

Beitrag zum Einfluß des elastischen Spannungszustandes
auf die Schwingfestigkeit

Der Fakultät für Maschinenwesen
des Wissenschaftlichen Rates der
Technischen Universität Dresden

zur

Erlangung des akademischen Grades

Doktor - Ingenieur

(Dr.-Ing.)

vorgelegte Dissertation

J o e n s s o n , Dieter
geb. am 20. 09. 1951
in Schönhausen / Elbe

Tag der Einreichung: 29. Juli 1980

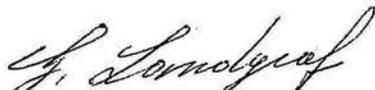
Tag der Verteidigung: 12. März 1981

Gutachter: Herr Prof.Dr.-Ing. H. Prochnow

Herr Prof.Dr.sc.techn. D. Witt

Herr Dr.-Ing. E. Puls, VEB Traktorenwerk Schönebeck

Vertraulichkeitsgrad: offen


Prof.Dr.rer.nat.habil. Landgraf
Vorsitzender der Prüfungskommission

Die vorliegende Arbeit entstand während der Zeit meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent in der Forschungsgruppe Betriebsfestigkeit an der Sektion Grundlagen des Maschinenwesens der Technischen Universität Dresden.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof.Dr.-Ing. H. Prochnow für die umfassende Förderung der Arbeit.

Weiterhin möchte ich allen Kolleginnen und Kollegen danken, die mich bei der Bearbeitung des Themas unterstützten, insbesondere meinen Kollegen der Forschungsgruppe Betriebsfestigkeit und meinen ehemaligen Kollegen der Abteilung Rechentechnik im WTZ des VEB Kombinat Pumpen und Verdichter Halle.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung	1
2. Probleme bei der Dimensionierung auf Betriebsfestigkeit	3
2.1. Einflußgrößen auf die Schwingfestigkeit	3
2.2. Vorgänge in Bauteilen unter Dauerschwingbeanspruchung	3
2.3. Lebensdauervorhersage	5
2.4. Abgeleitete Zielstellung	6
3. Die Formzahl in der Betriebsfestigkeit	7
3.1. Kenngrößen der Spannungskonzentration	7
3.2. Zur elastischen Formzahl als Dimensionierungsgrundlage	12
3.3. Die äquivalente Formzahl	14
4. Die Versuchsstrategie	18
4.1. Schwingfestigkeitsversuche	18
4.2. Auswahl der Proben	19
5. Berechnung von Formzahlen	22
5.1. Elastizitätstheoretische Grundlagen	22
5.2. Beispiele zur Berechnung von Formzahlen	23
5.3. Methode der finiten Elemente (MFE)	25
5.3.1. Grundbeziehungen	25
5.3.2. Linearer Verschiebungsansatz	29
5.3.3. Quadratischer Verschiebungsansatz	33
5.3.4. Abschätzung der Genauigkeit	35
5.4. Durchführung der Berechnungen	37
5.4.1. Verwendete Programme	37
5.4.2. Vernetzung in finite Elemente	38
5.4.2.1. Aufbereitung der Rechenmodelle	38
5.4.2.2. Vernetzung der Flachproben	40
5.4.2.3. Vernetzung der Rundproben	42

II

	Seite
5.4.3. Extrapolation der Formzahl	45
5.4.4. Einbeziehung von Vergleichsspannungen	47
5.4.5. Der ebene Spannungszustand in der Flachprobe	48
5.4.6. Diskussion der errechneten Formzahlen	50
5.4.6.1. Ergebnisse der Flachproben	50
5.4.6.2. Ergebnisse der Rundproben	52
5.4.6.3. Schlußfolgerungen	53
6. Herstellung der Proben	56
6.1. Werkstoffauswahl	56
6.2. Rundprobe	56
6.3. Flachproben	57
6.4. Fehler durch Fertigungstoleranzen	58
7. Versuchsdurchführung	59
7.1. Prüfmaschine und Frequenz	59
7.2. Statische Versuche	60
7.3. Wöhlerlinie	60
7.4. Randomversuche	62
7.4.1. Erzeugung der regellosen Belastung	62
7.4.2. Festlegung der Kollektivform	63
8. Diskussion der Versuchsergebnisse	65
9. Zusammenfassung und Ausblick	75
10. Literaturverzeichnis	
11. Anhang	

III

Anhang A

- A 1 Äquivalente Formzahlen, entnommen aus /35/
A 2 - A 4 Schwingfestigkeit verschiedener Probestäbe mit gleichen Formzahlen aus /40/, /43/ und /45/
A 5 Formzahldiagramm $\alpha_K = f(r, B)$ /Ersatzstrukturlänge nach /27/
A 6 - A 7 Konstruktionszeichnungen der Rund- und Flachprobe
A 8 - A 12 Vernetzungen der Flachproben F 4 bis F 8
A 13 Gegenüberstellung aller Kerbkonturen der Flachprobe
A 14 Darstellung der Kerbgrundelemente
A 15 - A 18 Ergebnisse und Formzahlen aller Flachproben für Element DV 1
A 19 - A 28 Ergebnisse und Formzahlen aller Flachproben für Element DV 2
A 29 Vergleich der Flachproben mit Ergebnissen von NEUBER
A 30 - A 31 Vernetzung der Rundproben RP1 und RP2
A 32 - A 33 Ergebnisse und Formzahlen der Rundproben RP1, RP2
A 34 - A 39 Vernetzung der Rundproben RP2A, RP3A, RK, RL, RM
A 40 - A 44 Ergebnisse und Formzahlen der Rundproben RP2A, RP3A, RK, RL, RM
A 45 Vergleich der Kräftebilanz für F 8 und F 8*
A 46 Fotos der Prüfmaschine und Einspannungen
A 47 Tabelle der Materialzusammensetzung/Abbildung der vier Probenarten
A 48 Ergebnisse der statischen Belastung
A 49 Verwendete Kollektivform
A 50 - A 65 Bruchlastwechselzahlen, Auswertung nach dem Treppenstufenverfahren, Bruchwahrscheinlichkeiten und Schwingfestigkeit der Rundprobe und der Flachproben F 4', F 6', F 8'
A 66 Bruchwahrscheinlichkeit der hochgesetzten Durchläufer
A 67 Gesamtergebnis der Versuche
A 68 - A 69 Vergleich der Schwingfestigkeiten für die Wöhler- und Lebensdauerlinien

Anhang B

B 1	Übersicht über alle verwendeten Programme	
B 2 - B 6	V DAT	} Programmbeschreibungen
B 7 - B 10	V DIG	
B 11 - B 14	S 4 B	
B 15 - B 20	ALPHA/K	

Verwendete FormelzeichenKoordinaten

x, y, z, u, w	Kartesische Koordinaten
r, z, φ	Polarkoordinaten

Spannungs- und Verzerrungsgrößen

(Index $_0$: Anfangsgrößen, Z. B. Anfangsdehnung)

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_r, \sigma_\varphi$	Normalspannungen
$\tau_{xy}, \tau_{r\varphi}$	Schubspannungen
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Hauptnormalspannungen
$\sigma_{V_1}, \sigma_{V_2}, \sigma_{V_3}, \sigma_{V_4}$	Vergleichsspannungen
σ_{Hmax}	Hookesche Maximalspannung
σ_{max}	wirkliche Maximalspannung
σ_n	Nennspannung im Nettoquerschnitt
σ_K	Nennspannung im Bruttoquerschnitt
χ	Spannungsgefälle
χ^*	bezogenes Spannungsgefälle
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \epsilon_r, \epsilon_\varphi$	Dehnungen
γ_{xy}, γ_{rz}	Winkelverzerrungen
ϵ_n	Nenndehnung im Nettoquerschnitt
ϵ_{max}	wirkliche Maximaldehnung

Formzahlen

α_K	elastische Formzahl
$\bar{\alpha}_K$	Formzahl infolge Mikrostützung
α_K^*	Formzahl von Vernetzungen mit nicht korrigierter Kerbkontur
α_{KS_i}	Formzahl, bezogen auf den Elementschwerpunkt S_i

VI

$\alpha_{K13} ! \alpha_{K21}$	Beim quadratischen Verschiebungsansatz berechenbare Formzahlen im Kerbgrund der Rund- bzw. Flachprobe
α_E	Dehnungsformzahl
α_G	Spannungsformzahl
α_τ	Formzahl nach der Hauptschubspannungshypothese
α_D	Formzahl nach der Hauptdehnungshypothese
α_V	Formzahl nach der Gestaltänderungsenergiehypothese

Funktionen und Funktionale

$\underline{f}(\underline{v})$	Funktion des Verschiebungsvektors
$G(t)$	Belastungsfolge
$\xi(x)$	Gauß'sche Dichtefunktion
$\psi(x)$	Verteilungsfunktion
π	elastisches Potential
$\pi^{(i)}$	elastisches Potential der inneren Kräfte
$\pi^{(a)}$	elastisches Potential der äußeren Kräfte
π_e	elastisches Potential eines Elementes

Vektoren und Matrizen

\underline{A}	Matrix der Knotenkoordinaten
\underline{a}	Ansatzvektor
\underline{D}	Matrixdifferentialoperator für CAUCHY-Beziehungen
\underline{d}	Systemverschiebungsvektor
\underline{de}	Elementknoten-Verschiebungsvektor

\underline{f}	Systemkraftvektor
\underline{f}_e	Elementkraftvektor
\underline{f}_i	Vektor der Knoteneinzelkräfte
\underline{f}_k	Knoteneinzelkraftvektor
\underline{f}_0	Anfangsverzerrungs-Kraftvektor
\underline{f}_p	Volumenkraftvektor
\underline{f}_q	Oberflächenkraftvektor
\underline{G}	Matrix der Ansatzfunktionen (Formfunktionsmatrix)
\underline{H}	Elastizitätsmatrix für HOOKEsches Gesetz
\underline{K}	Systemsteifigkeitsmatrix
\underline{K}_e	Elementsteifigkeitsmatrix
\underline{N}	Ansatzmatrix
\underline{p}	Vektor der Volumenkräfte
\underline{q}	Vektor der Oberflächenkräfte
\underline{v}	Verschiebungsvektor
$\underline{\tilde{v}}$	Oberflächen-Verschiebungsvektor
\underline{v}_i	Knotenverschiebungsvektor für den Knoten i
$\underline{\epsilon}$	Dehnungsvektor
$\underline{\sigma}$	Spannungsvektor

Schwingfestigkeitsgrößen

i	Regellosigkeitsfaktor
K	Konstante der Wöhlerlinien-Geradengleichung
N	Lastwechselzahl
N_B	Bruchlastwechselzahl
N_G	Grenzlastwechselzahl
p	Kollektivbeiwert

VIII

P_t	tatsächlicher Kollektivbeiwert infolge Stufung des Kollektivs
P_B	Bruchwahrscheinlichkeit
R	Spannungsverhältnis
s	Standardabweichung
s^2	Streuung
T	Streuspanne
\hat{T}	Reziprokwert der Streuspanne
t	Zeit
\bar{x}	empirischer Erwartungswert
p	Wöhlerlinienexponent
\bar{p}	Lebensdauerlinienexponent
μ	Erwartungswert
σ_D	Dauerfestigkeit
$\hat{\sigma}_n$	Nennspannungsamplitude des Kollektivgrößt- wertes
Σn	Summenhäufigkeit der Belastung

Treppenstufenverfahren:

K_s	Konstante der Streuung
x_i	Ereignishäufigkeit des Bruches
σ_A	niedrigster Spannungshorizont, für den ein Bruch festgestellt wurde
$\Delta\sigma$	Stufenabstand der Spannungshorizonte

Abmaße, Materialkonstanten und sonstige Formelzeichen

A	Fläche
a_i	Komponenten des Vektors \underline{a}
B	halber Bohrungsabstand der Flachproben bzw. Kerbgrundradius der Rundproben

b	halbe Breite der Proben im Bruttoquerschnitt
bb	halbe Bandbreite der Systemsteifigkeitsmatrix \underline{K}
E	Elastizitätsmodul
F	Kraft, Belastung
h	Dicke der Flachproben
h_{eff}	effektive Dicke der Flachproben
l	Länge der Proben
M	Moment
O	Oberfläche
r	Kerbradius
s	Faktor zur Berücksichtigung von Festigkeits-hypothesen
S_i	Schwerpunkt des Elementes i
V	Volumen
W_a	Arbeit der äußeren Kräfte
W_i	Arbeit der inneren Kräfte
Δl	Längenänderung
ν	Querkontraktionszahl
ρ_F	Fiktiver Krümmungsradius nach der Mikro-stütztheorie
ρ^*	Ersatzstrukturlänge der Mikrostütztheorie
σ_B	Bruchfestigkeit
σ_K	Nennspannung im Bruttoquerschnitt
σ_N	Nennspannung im Nettoquerschnitt
σ_S	Streckgrenze
$\sigma_{0,2}$	0,2 %-Dehngrenze
ω	Flankenwinkel der Kerbe

Bezeichnungen

DV 1	Dreieckselement mit linearem Verschiebungsansatz
DV 2	Dreieckselement mit quadratischem Verschiebungsansatz
F 4, F 5, ... F 8	Flachproben mit $B = 4, 5, \dots 8$ mm
F 4*, F 5*, ... F 8*	Flachprobenvernetzungen mit nicht korrigierter Kerbkontur
RP1, RP2, RP2A	Rundproben
RP3A, RK, RL, RM	
RP1*, ..., RM*	Rundprobenvernetzungen mit nicht korrigierter Kerbkontur
F 4', F 6', F 8', RK	Probestäbe für Schwingfestigkeitsversuche
LW	Lastwechsel

1. Einleitung

Eine wesentliche Aufgabe der Schwingfestigkeitsforschung ist die Klärung von Auswirkungen mechanischer Kerben auf das Bruchverhalten der Bauteile. Da sehr oft Dauerbrüche von Kerben ausgehen, ist die Behandlung dieses Problems im Sinne der Materialökonomie von großem Interesse.

Obwohl zahlreiche Hypothesen zur Ermüdung von Metallen vorliegen, die ein breites Spektrum verschiedener Interpretationen der Schädigung umfassen /1/, können bis heute keine sicheren und allgemeingültigen Lebensdauervorhersagen angegeben werden. Die Ursache dafür ist in der vielschichtigen Komplexität des Schädigungsvorganges zu sehen. Bei Schwingbelastungen entstehen erhebliche Streuungen der Bruchlastwechselzahlen. Es sind deshalb statistische Absicherungen notwendig, um für bestimmte Bruch- oder Überlebenswahrscheinlichkeiten die Angabe von Lebensdauerwerten zu ermöglichen.

In den letzten zehn Jahren wurden durch die Bereitstellung prozeßrechnergesteuerter, servohydraulischer Prüfanlagen regellose Schwingbelastungen mehr zum Gegenstand der Forschungen und verdrängten die klassischen Blockprogrammversuche /2/, die vor allem ein Zugeständnis an den Entwicklungsstand der Prüftechnik waren. Parallel dazu entstanden umfangreiche Arbeiten zur Untersuchung des elastisch-plastischen Kerbgrundverhaltens, dem große Bedeutung während des Schädigungsvorganges beigemessen wird.

Angesichts dieser theoretischen Vorarbeit bleibt für den Konstrukteur die Frage, inwieweit sich für mechanisch gekerbte Bauteile eine ökonomisch vertretbare Dimensionierung auf Betriebsfestigkeit unter Voraussetzung bekannter Belastungsfolgen durchführen läßt. Ein relativ geringer Aufwand ergibt sich durch die Betrachtung des elastischen Spannungszustandes, insbesondere dessen wichtigster Kenngröße, der elastischen Formzahl α_K .

Die elastische Formzahl wurde in früheren Arbeiten als die zentrale Einflußgröße auf die Gestaltfestigkeit angesehen und ist heute noch in Standards /3/ in dieser Weise enthalten. Da es aber bisher nicht gelungen ist, für die Dauer- und Zeitfestigkeit eine allgemeingültige Beziehung zur Erfassung des Formzahleinflusses auf die Schwingfestigkeit gekerbter Bauteile zu finden, wurde die Bedeutung des elastischen Spannungszustandes in verschiedenen Arbeiten angezweifelt und der Ausweg im elastisch-plastischen Materialverhalten gesucht. Die Berechnung oder die Messung dieses nichtlinearen Werkstoffverhaltens ist aber sehr aufwendig. Der Zusammenhang zwischen tatsächlich vorhandenen Maximalbeanspruchungen und einer Schädigung ist noch nicht ausreichend geklärt. Beachtet man die Abhängigkeit der Plastifizierung von den bei Randbelastung stochastisch auftretenden Amplituden, so wird deutlich, daß auch die Berücksichtigung der elastisch-plastischen Kerbgrundbeanspruchung nur näherungsweise eine Lebensdauervorhersage zuläßt.

Hier erscheint doch die elastische Formzahl, die als erste Näherung des elastisch-plastischen Materialverhaltens im Kerbgrund aufgefaßt werden kann, bezüglich des Aufwandes als günstigere Größe.

Die vorliegende Arbeit dient dem Ziel, die früher stärker beachtete elastische Formzahl als Übertragungsgröße für unterschiedlich gekerbte Bauteile bei regelloser Belastungsfolge zu überprüfen.

Der Nachweis einer solchen Übertragbarkeit kann nur experimentell an mehreren Prüfkörpern unter Randbelastung erbracht werden. Eine Übertragbarkeit ist dann vorhanden, wenn verschiedene Probestäbe mit genau gleicher Formzahl weitestgehend gleiche Wöhler- und Lebensdauerlinien ergeben. Die Bereitstellung unterschiedlich gekerbter Proben mit identischen Formzahlen bedarf als Voraussetzung der exakten Analyse des elastischen Spannungszustandes.

2. Probleme bei der Dimensionierung auf Betriebsfestigkeit

2.1. Einflußgrößen auf die Schwingfestigkeit

Einen Überblick über die zahlreichen Einflußgrößen auf die Schwingfestigkeit gibt HERTEL /4/. Die vier wichtigsten Gruppen dieser Einflußgrößen sind:

- Werkstoff
- Beanspruchung (Belastungsfolge, Belastungsart)
- Nebenbedingungen (Temperatur, Korrosion, Umgebungsmedium usw.)
- Gestalt

Für Untersuchungen über den Anteil dieser Einflüsse auf die Schwingfestigkeit muß man die Vielzahl der Parameter durch eine sinnvolle Auswahl einschränken. Das ist in vielen Fällen nicht ohne weiteres möglich, weil zahlreiche Einflußgrößen in enger Wechselbeziehung zueinander stehen. Das gilt auch für die Einflußgruppen. So ist die Beanspruchung von der Gestalt abhängig, z. B. wird die maximale Spannung wesentlich von konstruktiven Kerben beeinflußt.

2.2. Vorgänge in Bauteilen unter Dauerschwingbeanspruchung

In schwingbeanspruchten Bauteilen werden im allgemeinen sehr viele Einflußgrößen der Schwingfestigkeit wirksam. Im Laufe der Zeit kommt es zu einer fortschreitenden Schädigung, die je nach Belastungshöhe zum Bruch führt.

Man unterscheidet drei Phasen der Schädigung:

1. Bildung einer Ermüdungsgrundstruktur
2. Rißbildung
3. Rißfortschritt bis zum Bruch

Während der ersten Schädigungsphase werden Ver- und Entfestigungen, Änderung des Dämpfungsverhaltens, des elektrischen

Widerstandes, der Härte sowie spezifische Versetzungsanordnungen je nach Amplitudenhöhe. Ausscheidungen, Gleitlinien und Bildung von Mikrorissen beobachtet /5/, /6/. Ein eindeutiger Zusammenhang zwischen diesen meßbaren Veränderungen und einer Schädigung läßt sich wegen des komplexen Charakters des Schädigungsvorganges auch nicht näherungsweise in allgemein gültiger Form angeben. Besonders ausführlich werden in der Literatur Ver- und Entfestigungen diskutiert. Nach bisherigen Erfahrungen kommt es zur Ausbildung eines Sättigungszustandes in vielen Metallen, wobei hochfeste Stähle entfestigen und weiche Stähle verfestigen /5/, /7/. Dieser Effekt kann mit der zyklischen Spannungs-Dehnungs-Linie unter Annahme ihrer Stabilisierung nach mehreren tausend Lastwechseln erfaßt werden. Jedoch ist gerade bei stochastischen Belastungsvorgängen eine gesicherte Annahme zur Stabilisierung gegenwärtig nicht möglich /7/.

Die erste Schädigungsphase geht ohne nachweisbare Qualitätssprünge zur Rißbildungsphase über. Diese ist von den drei Phasen die ausgedehnteste. Dabei kommt es vorrangig an Spannungskonzentrationsstellen zur Bildung von Mikrorissen, die allmählich zu Makrorissen anwachsen. Mitunter ist die Rißbildungsphase von Beginn der Lebensdauer an ausgeprägt, wenn ungünstige Eigenspannungen vorliegen, z. B. infolge von Wärmebehandlung oder Montage.

Nach der Ausbildung genügend großer Makrorisse beginnt im Bauteil die Rißfortschrittsphase, die letztlich mit dem Bruch abschließt. Während dieser letzten Schädigungsphase verändert sich sogar die Belastungsgeometrie durch die sich ständig verkleinernde Restfläche. Weiterhin verläßt ein fortschreitender Riß den Wirkungsbereich der Kerbe, die nur als Entstehungsort des Risses angesehen werden kann /8/.

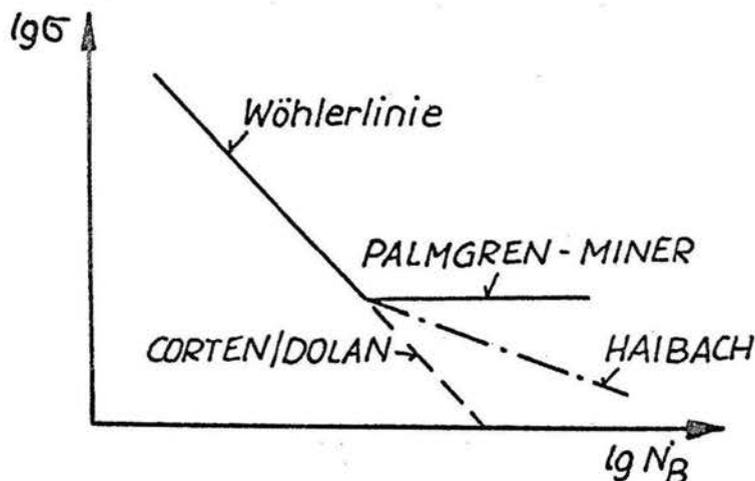
Sämtliche Vorgänge in schwingbeanspruchten Bauteilen - auch unter Einstufenbelastung - weisen zufällige Schwankungen auf und sind nur mit Hilfe statistischer Methoden auswertbar. Selbst bei der Erfassung der Werkstoffveränderungen ungekerbter, einfacher Probekörper kann es zu Problemen durch die vorhandene Streuung kommen /1/, /7/, die meist größer ist als bei gekerbten Proben /9/.

2.3. Lebensdauervorhersage

Zur Lebensdauervorhersage wird eine Schadensakkumulationshypothese benötigt. Das Kernproblem dabei besteht in der qualitativen Beschreibung der Schädigung. Es ist bisher nicht feststellbar, welche strukturmechanischen Effekte auf die Schädigung den maximalen Einfluß ausüben bzw. auf welche Art die Akkumulation der Schädigung erfolgt /10/. Auch die Länge eines Ermüdungsrisses ist bei veränderlichen Belastungsabläufen kein Maß für die Schädigung /11/. Je nach vorhergegangenen Beanspruchungen können zwei identische Proben mit Rissen gleicher Länge eine vollständig verschiedene Restlebensdauer haben.

Man unterscheidet bei der Lebensdauervorhersage Hypothesen zur Rißentstehung und Hypothesen zum Rißfortschritt. Die wichtigste Hypothese für die Rißentstehung ist die lineare Schadensakkumulationshypothese von PALMGREN /12/ und MINER /13/. Sie setzt einen abstrakten, linearen Schädigungsverlauf voraus und berücksichtigt unterhalb der Dauerfestigkeit keine Schädigung. Die Hypothese ist ursprünglich nur auf die Lebensdauer bis zum Auftreten eines meßbaren Anrisses angelegt gewesen, da sie aber häufig Ergebnisse auf der unsicheren Seite liefert, wird sie oft bis zum Bruch angewendet. Die zu große Lebensdauer der PALMGREN-MINER-Hypothese führte zu Modifikationen, die Schädigung unterhalb der Dauerfestigkeit annehmen. Weit verbreitet ist hier die Theorie von CORTEN und DOLAN /14/ und die Theorie von HAIBACH /15/, Bild 1.

Bild 1: Lineare Schadensakkumulationshypothesen



Eine ähnlich dominierende Stellung nimmt für den Rißfortschritt gegenwärtig die Hypothese von FORMAN /16/ ein /11/, /17/. Hier wird wie bei vielen Hypothesen zum Rißfortschritt über die Integration einer Rißgeschwindigkeitsgleichung die Lebensdauer errechnet.

Zur Lebensdauervorhersage existieren sehr viele unterschiedliche Hypothesen, zusammenfassende Übersichten befinden sich in /5/, /10/, /18/, /19/.

2.4. Abgeleitete Zielstellung

Insgesamt kann festgestellt werden, daß eine umfassend gültige Schadensakkumulationshypothese fehlt. Angesichts des komplexen Charakters der Schädigung bei Schwingbeanspruchung bieten rechnerische Lebensdauervorhersagen bisher nicht immer ausreichende Sicherheit. Deshalb ist eine verstärkte, experimentell abgesicherte Grundlagenforschung zu den wesentlichsten Einflußgrößen erforderlich.

Von größter Wichtigkeit ist die Erforschung der Auswirkung inhomogener Spannungszustände auf die Schwingfestigkeit, weil einerseits fast jede Konstruktion unter Betriebsbelastung inhomogene Spannungsverteilungen aufweist und andererseits gerade Gebiete mit örtlichen Spannungskonzentrationen am häufigsten Ausgangspunkte von Ermüdungsrissen sind.

Daraus ergibt sich die materialökonomisch bedeutsame Aufgabe, den Einfluß des Spannungszustandes auf die Schwingfestigkeit umfassend zu erforschen. Bisher fehlen fundierte Aussagen zum elastischen Spannungszustand, vor allem in Hinblick auf stochastische Belastung.

Folgende Hypothese soll in der vorliegenden Arbeit phänomenologisch überprüft werden:

Die maximale elastische Spannung beeinflusst entscheidend die Lebensdauer von dauerschwingbeanspruchten Bauteilen im Zeitfestigkeitsgebiet.

Wenn diese Hypothese richtig ist, dann muß experimentell nachweisbar sein, daß verschieden gestaltete Bauteile mit gleicher elastischer Formzahl etwa gleiche Wöhler- und Lebensdauerlinien ergeben.

3. Die Formzahl in der Betriebsfestigkeit

3.1. Kenngrößen der Spannungskonzentration

Man unterscheidet bei Kerben zwischen mechanisch hergestellten Kerben und Bauteilverbindungen, z. B. Niet- und Schweißverbindungen. In der vorliegenden Arbeit sollen mechanisch hergestellte Kerben betrachtet werden. Durch Kerben wird ein inhomogener Spannungszustand hervorgerufen. Das Verhältnis der elastischen Spannungsspitze σ_{Hmax} zur Nennspannung σ_n im Kerbgrund wird als Formzahl α_K bezeichnet:

$$\alpha_K = \frac{\sigma_{Hmax}}{\sigma_n} \quad (1)$$

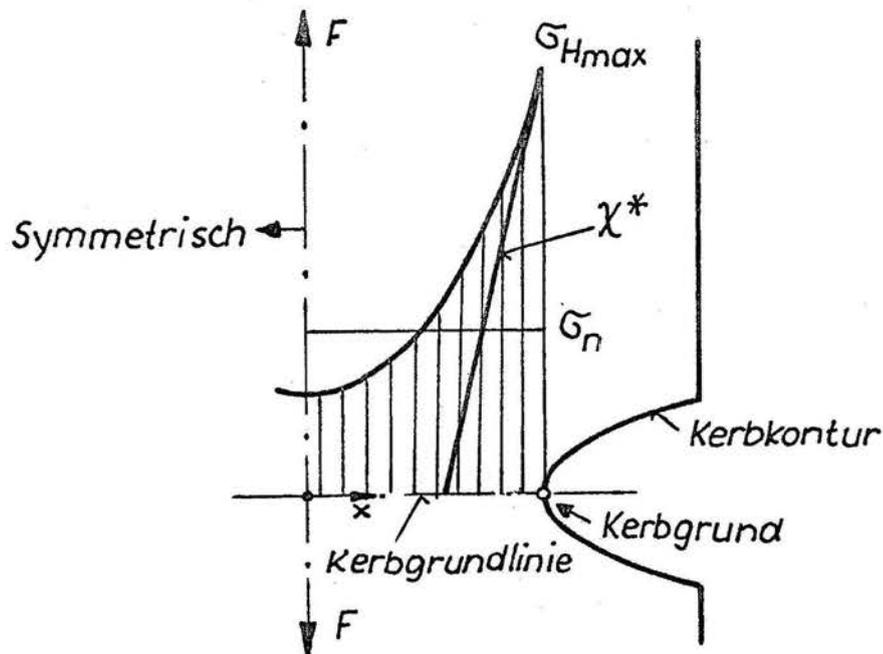
Diese Größe charakterisiert die elastische Spannungskonzentration /20/. Je nach Definition der Nennspannung gibt es unterschiedliche Bezeichnungen für α_K . Bei einer auf den Bruttoquerschnitt bezogenen Nennspannung erhält man den Häufungsfaktor (Grundformzahl) /4/, /21/. Gilt die Nennspannung für den Nettoquerschnitt, so lautet der Begriff: Formzahl oder Kerbfaktor. Der Kerbfaktor berücksichtigt nur die Überhöhung der Nennspannung infolge Kerbwirkung. Nach SIEBEL und STIELER /22/ stellt die gekerbte Probe einen Sonderfall der Probe mit Spannungskonzentration dar. Die Nennspannung für die Formzahl selbst wurde in /22/ definiert als gleichförmig verteilte Spannung, die dem Kräfte- und Momentengleichgewicht genügt.

Bei zug-druck-belasteten Proben ist immer die Formzahl mit dem Kerbfaktor identisch, weil die Belastung eine konstante Nennspannung bewirkt.

Bild 2 zeigt eine inhomogene Spannungsverteilung.

Nachfolgend werden ausschließlich doppeltsymmetrische Körper betrachtet, der Symmetrieschnitt senkrecht zur Belastung F in der Kerbe wird als "Kerbgrundlinie" bezeichnet, der Punkt der höchsten elastischen Spannung als "Kerbgrund" sowie die geometrische Form der Kerbe als "Kerbkontur".

Bild 2: Spannungsverteilung in einer zug-druck-belasteten Flachprobe mit Kerbe



Ein weiterer wichtiger Kennwert der Spannungskonzentration ist das Spannungsgefälle χ in der Kerbgrundlinie:

$$\chi = \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx} \quad (2)$$

Das bezogene Spannungsgefälle χ^* gilt für die Spannung σ_{Hmax} :

$$\chi^* = \frac{1}{\sigma_{Hmax}} \cdot \frac{d\sigma}{dx} \quad (3)$$

Dieses bezogene Spannungsgefälle wird mitunter als wichtigste Einflußgröße auf die Gestaltfestigkeit interpretiert /23/, /22/.

Die genannten Beziehungen haben nur für den elastischen Spannungszustand Gültigkeit unter Voraussetzung eines idealen, strukturlosen Körpers. In Wirklichkeit kommt es zu einem Abbau der Spannungsspitze σ_{Hmax} durch Spannungsumverteilungen, die auf elastisch-plastisches Werkstoffverhalten und Einflüsse der kristallinen Struktur der Metalle zurückzuführen sind. Beide Effekte wurden von NEUBER /24/, /25/ als "Makrostützung" und "Mikrostützung" beschrieben.

Die Mikrostützung ist für rein elastisches Materialverhalten nachweisbar. Die Kristallstruktur setzt einer Belastung größere Verformungswiderstände entgegen als ein strukturloser Körper, weil sich kleinere Stoffbereiche gegenseitig abstützen. Dadurch entsteht gerade im Kerbgrund ein Abbau der ideal möglichen Maximalspannung, weil dort das Spannungsgefälle am größten ist. NEUBER /24/ führte zur quantitativen Abschätzung dieser Spannungsverminderung eine "Ersatzstrukturlänge" ϱ^* ein, mit deren Hilfe ein fiktiver, größerer Krümmungsradius ϱ_F errechnet werden kann:

$$\varrho_F = \varrho + s\varrho^* \quad (4)$$

Mit dem Faktor s berücksichtigt man verschiedene Beanspruchungsarten und Festigkeitshypothesen.

Die Ersatzstrukturlänge ϱ^* ist von den Werkstoffeigenschaften, den Fertigungsverfahren und der Art der Belastung abhängig und kann nur experimentell ermittelt werden. Eine ähnliche Größe wurde von FÖPPL /26/ mit der "elastischen Zähigkeitsziffer des Werkstoffs" vorgeschlagen.

Die Formzahl α_K modifiziert sich durch die Mikrostützung zur Formzahl $\bar{\alpha}_K$:

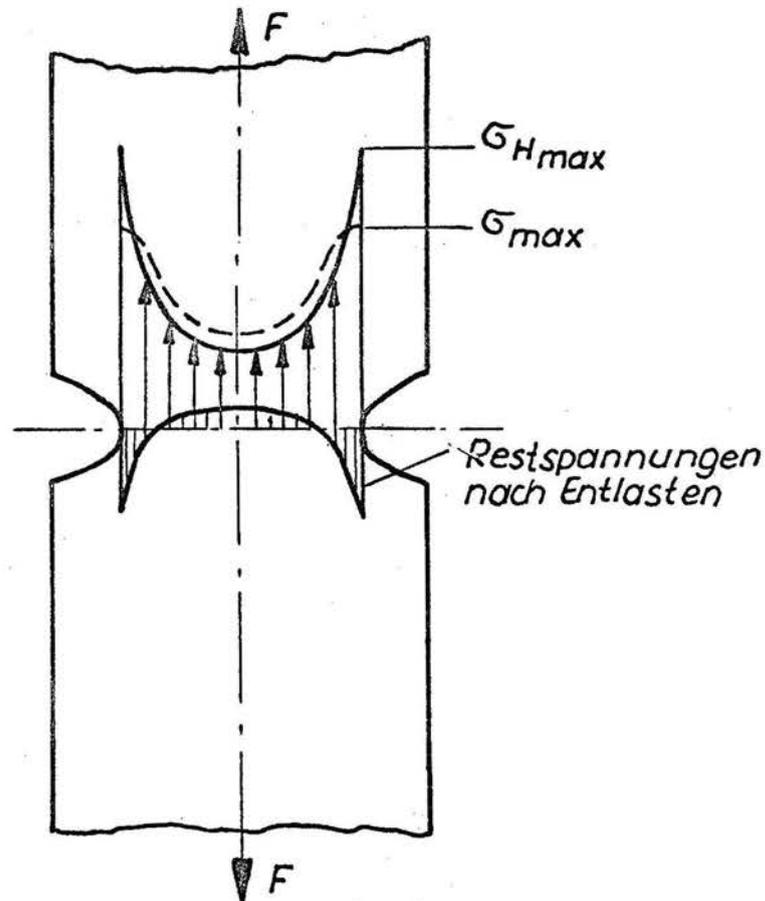
$$\bar{\alpha}_K = \alpha_K \sqrt{\frac{\varrho}{\varrho_F}} \quad (5)$$

In /24/ wird ϱ^* in Abhängigkeit von der 0,2-Dehngrenze $\sigma_{0,2}$ angegeben. BERTELE /27/ wertete mehrere eigene Versuche und die anderer Autoren aus und verweist auf die große Streuung der erzielten Ergebnisse. Die von ihm verwendete überschlägige Beziehung zwischen ϱ^* und $\sigma_{0,2}$ läßt sich als Gerade im linear-logarithmischen Koordinatensystem darstellen, siehe Anhang A 5.

Die Makrostützung (Bild 3) tritt als Folge des elastisch-plastischen Materialverhaltens in der Umgebung des Kerbgrundes bei entsprechend hohen Belastungen auf. Sie wird gegenwärtig durch drei Methoden ermittelt:

- ①. Numerische Rechenverfahren
- ②. Einfache Näherungsverfahren
- ③. Experimentelle Verfahren

Bild 3: Prinzipskizze zur Makrostützwirkung im Nettoquerschnitt



Die numerischen Berechnungen unter Zugrundelegung nichtlinearer Materialgesetze erfordern einen sehr hohen Zeit- und Kostenaufwand.

Deshalb werden öfter Näherungsverfahren verwendet, wobei der Ansatz von NEUBER am bekanntesten ist:

$$\alpha_K^2 = \alpha_\sigma \cdot \alpha_\epsilon \quad (6)$$

Diese Gesetzmäßigkeit findet auch zur Umrechnung von Wöhlerlinien verschiedener Kerbformen /28/, /29/ und von Lebensdauerlinien bei Blockprogrammversuchen /30/ Anwendung.

Die experimentellen Untersuchungen der Makrostützung dienen vor allem zur Überprüfung der rechnerischen Ergebnisse. Dabei treten im allgemeinen große meßtechnische Probleme auf /31/, /32/. BESTE und SEEGER /31/ überprüften mehrere Näherungsansätze und verwendeten zur Erzeugung von Spannungs-Dehnungs-Hystereseschleifen das "Begleitprobenverfahren" /33/, bei dem die in der Kerbe gemessene Dehnung einer ungekerbten Begleitprobe aufgezogen wird, um aus den für die Begleitprobe erforderlichen Lasten eine Zuordnung für die gekerbte Probe zwischen Spannung und Dehnung zu erhalten. Das Hauptproblem besteht in der Messung der größten Dehnung im Kerbgrund. Dazu muß beim heutigen Stand der Meßtechnik die Kerbe eine genügende Größe haben. Dies wiederum führt zu sehr großen Probekörpern bzw. -blechen, die während der Belastung instabiles Verhalten zeigen.

Bei der Anwendung der ermittelten Makrostützung auf die Schwingfestigkeit entstehen folgende Schwierigkeiten:

Wie bereits in Abschnitt 2.2. erläutert, ist zunächst das Werkstoffgesetz während der ersten Schädigungsphase Veränderungen unterworfen. Um die schädigende Wirkung zu erfassen, kann als Werkstoffgesetz die stabilisierte, zyklische Spannungs-Dehnungslinie für den Kerbgrund benutzt werden, falls sich ein Sättigungszustand des Ver- und Entfestigungsvorganges einstellt. Diese Idealisierung hat allerdings für die Rißfortschrittsphase wenig Bedeutung, weil dann die Lebensdauer nicht mehr vom Spannungszustand des Kerbgrundes, sondern von der Rißwachstumsgeschwindigkeit beeinflusst wird. Aus all diesen Gründen ist auch eine auf der elastisch-plastischen Kerbgrundbeanspruchung basierende Lebensdauerabschätzung prinzipiell mit Unsicherheiten behaftet.

3.2. Zur elastischen Formzahl als Dimensionierungsgrundlage

Die Bedeutung des elastischen Spannungszustandes auf die Schwingfestigkeit zeigt sich in der Arbeit von WAGNER /8/. Es wurden scharf gekerbte, teilbiegebelastete Proben im Einstufenversuch mit Variation von Kerbtiefe und Kerbradien untersucht. Bei gleichem Kerbradius ergab sich, daß die Bruchlastwechselzahlen weitgehend unabhängig von Kerbtiefe und Formzahl α_K als Funktion der maximalen elastischen Spannung $\sigma_{H_{max}}$ im Kerbgrund darstellbar sind. Nach WAGNER's Auffassung trifft das auch dann noch zu, wenn in genügend kleinem Bereich in der Umgebung des Kerbgrundes bereits große plastische Verformungen auftreten. Bei der höchsten untersuchten Spannungsamplitude betrug die der Oberlast entsprechende theoretische Spannung $\sigma_{H_{max}}$ etwa das Dreifache der Streckgrenze. Die Versuche mit verschiedenen Kerbradien ergaben einen deutlichen Einfluß des Kerbradius auf die Lebensdauer.

Ungünstig ist, daß WAGNER die Wöhlerlinien im $\sigma_{H_{max}}-N_B$ -Diagramm aufgetragen hat und nicht im σ_n-N_B -Diagramm. Dieses Vorgehen ist insofern nachteilig, weil in der Ordinate $\sigma_{H_{max}}$ bereits der Einfluß des Kerbradius enthalten ist, der dann als Parameter diskutiert wird. Es ist zweifellos günstiger, die vom Kerbradius unabhängige Nennspannung σ_n als Ordinate zu verwenden und dann die elastische Formzahl als Parameter zu betrachten. Diese Feststellung vermindert allerdings die von WAGNER geäußerte Erkenntnis über den dominierenden Einfluß des elastischen Spannungszustandes auf die Schwingfestigkeit in keiner Weise.

Analog zur elastischen Formzahl α_K kann man infolge der Makrostützung elastisch-plastische Formzahlen definieren. Da hier Spannung und Dehnung nicht mehr proportional sind, muß man zwischen der Spannungsformzahl α_σ und der Dehnungsformzahl α_ϵ unterscheiden:

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n} \quad , \quad \alpha_\epsilon = \frac{\epsilon_{max}}{\epsilon_n} \quad (7)$$

σ_{max} und ϵ_{max} sind die tatsächlichen Maximalwerte, die sich bei elastisch-plastischem Materialverhalten ergeben. Häufiger als die Spannungsformzahl wird die Dehnungsformzahl benutzt, weil die Dehnungen leichter experimentell zu erfassen sind /34/.

Im Vergleich zu elastisch-plastischen Formzahlen ergeben sich für die elastische Formzahl bei der Dimensionierung von Bauteilen folgende Effekte:

1. α_K gilt für alle Belastungsstufen, dagegen ist α_ε bzw. α_σ von der Amplitudenhöhe abhängig.
Daraus resultiert der große Aufwand zur Ermittlung der elastisch-plastischen Formzahlen sowohl auf rechnerischem als auch auf experimentellem Wege.
2. Die elastische Formzahl kann für das Zeitfestigkeitsgebiet als erste Näherung des nichtlinearen Kerbgrundverhaltens betrachtet werden.
3. Auch für elastisch-plastische Formzahlen ist die Vorgabe eines Stoffgesetzes problematisch, weil sich das Stoffgesetz infolge Ermüdung ändert. Häufig wird die zyklische Spannungs-Dehnungs-Linie angewendet, die ein stabiles Werkstoffverhalten nach mehreren tausend Lastwechseln voraussetzt. Gerade bei regellosen Amplituden ist eine Stabilisierung noch nicht nachweisbar.
4. Mit der Ausbildung von Makrorissen wird die Lebensdauer wesentlich vom Rißfortschritt beeinflusst. Dabei verändert sich auch die Belastungsgeometrie durch die kleiner werdende Nettoquerschnittsfläche. Diese Vorgänge sind auch mit α_ε bzw. α_σ nicht erfaßbar.
5. Eine eindeutige Zuordnung von nichtlinearer Kerbbeanspruchung zur Schädigung kann bisher nicht angegeben werden, das gilt vor allem für Randbelastungen. Zum Beispiel muß eine einzelne große Amplitude nicht unbedingt eine große Schädigung hervorrufen.

Die dargelegten Probleme beim Erfassen des elastisch-plastischen Werkstoffverhaltens und dessen Zuordnung zum Schädigungsvorgang sowie die einfache Handhabung der elastischen Formzahl bei der Dimensionierung machen die Vorzüge dieser Formzahl zunächst aus theoretischer Sicht deutlich.

Praktische Beispiele, die die Übertragbarkeit von Schwingfestigkeitswerten mit der elastischen Formzahl demonstrieren, werden im folgenden Abschnitt vorgestellt.

3.3. Die äquivalente Formzahl

Die Übertragbarkeit von Wöhler- und Lebensdauerlinien einfacher Probestäbe auf Bauteile kann mit der "äquivalenten Formzahl" erfaßt werden. Dazu lautet die Definition von SCHÜTZ /35/:

Eine äquivalente Formzahl liegt dann vor, wenn das betrachtete Bauteil über einen weiten Bereich von Spannungsamplituden und Mittelspannungen gleiche oder ähnliche Bruchlastspielzahlen erreicht wie ein gekerbter Probestab mit bekannter Formzahl.

Die äquivalente Formzahl wurde bereits in den fünfziger Jahren zur Abschätzung der Konstruktionsgüte benutzt /36/, /37/, /38/ und findet auch bei neueren Untersuchungen Anwendung /39/. Sie ist sogar für Mehrstufenversuche gültig. Im Anhang A 1 sind zwei Zeitfestigkeitsschaubilder enthalten (entnommen aus /35/, Anlagenband), in denen komplette Konstruktionen bezüglich ihrer Schwingfestigkeit mit einfachen Probestäben verglichen werden. Die Übereinstimmung ist auch für verschiedene Mittelspannungen gut. Diese Ergebnisse lassen die Schlußfolgerung zu, daß die elastische Formzahl durchaus ihre Berechtigung als Übertragungsparameter von einfachen Proben auf Bauteile hat. Genaue Angaben kann man dazu nur liefern, wenn die vorliegenden Spannungszustände exakt analysiert und gegenübergestellt werden. Mit einer gesicherten Übertragbarkeit könnte man die statistische Absicherung bei Konstruktionen einschränken, indem man nur ein bis zwei Bauteile zerstört und dann die erhaltenen Lebensdauerlinien mit den Ergebnissen von einfachen Probekörpern genau gleicher Formzahl vergleicht. Voraussetzung dafür sind umfangreiche experimentelle und theoretische Untersuchungen, bei denen verschiedene einfache Probekörper mit identischer Formzahl verglichen werden. Derartige Versuche sind sehr aufwendig, vor allem hinsichtlich der rechnerischen Bereitstellung

exakter Formzahlen und verlangen sowohl in der Probenfertigung als auch in der statistischen Absicherung der Ergebnisse große Sorgfalt. Untersuchungen dieser Art sind bisher nur in geringer Zahl bekannt.

AICHER und KIERNER /40/ vergleichen eine innengekerbte Flachprobe aus dem Werkstoff 3.4364.7 (7075-T 6) mit einer kreisumlaufgekerbten Rundprobe des gleichen Werkstoffes. Beide Proben weisen die Formzahl $\alpha_K = 3.6$ auf. Die Berechnung der Formzahlen erfolgte mit der Finit-Element-Methode. Als Versuchsergebnisse liegen je drei Wöhlerlinien mit den Spannungsverhältnissen $R = -1$, $R = 0$ und $R = 0.3$ vor. Zur Ermittlung der Wöhlerlinien wurden auf vier bis fünf Spannungshorizonten je 5 bis 10 Versuche gefahren. Das Treppenstufenverfahren diente mit je 5 bis 17 Proben zur Festlegung der jeweiligen Dauerfestigkeit.

Die Ergebnisse sind im Anhang A 2 für alle drei Spannungsverhältnisse dargestellt. Für den gesamten Bereich von 10^0 bis $2 \cdot 10^6$ Lastwechseln ergibt sich eine gute Übereinstimmung der unterschiedlichen Wöhlerlinien. Die Gegenüberstellung der Wöhlerlinien beider Probenformen zeigt, daß trotz gleicher Formzahl die Rundproben bei niedrigen Lastwechselzahlen höhere, bei hohen Lastwechselzahlen dagegen niedrigere Spannungen als die Flachproben ertragen. Von AICHER und KIERNER /40/ wird dieses Ergebnis so interpretiert, daß sich die durch die Kerbe erzeugte Spannungsspitze entlang verschieden großer Kerbumfänge erstreckt und damit unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten für die Rißentstehung vorliegen. Solange Spitzenspannungen noch im rein elastischen Bereich des Materials liegen, könnte die kürzere Lebensdauer der Rundproben demnach auf die größere Wahrscheinlichkeit von Anrissen zurückgeführt werden, weil der Kerbumfang größer ist.

Diese Interpretation steht im Einklang mit späteren Arbeiten von ZIEBART /41/ und KLOOS /43/, die den statistischen Größeneinfluß als maßgeblich betrachten. Bei höher werdenden Spannungen in den Ergebnissen von AICHER und KIERNER /40/ hingegen macht sich für die Rundproben der Einfluß des mehrachsigen

Spannungszustandes in einer stärkeren Fließbehinderung bemerkbar. Dadurch ist die je Lastwechsel von den Rundproben aufgenommene Formänderungsarbeit geringer als bei den Flachproben, was die hier beobachteten höheren Bruchlastspielzahlen der Rundproben erklären kann.

ARGYRIS, AICHER und KIERNER /43/ ermittelten die Schwingfestigkeit innen- und außengekerbter Flachstäbe aus dem Werkstoff 3.4364.7 (7075 - T 6) mit jeweils gleicher Formzahl $\alpha_K = 2,5$ und $\alpha_K = 4,6$. Die Berechnung von Formzahlen erfolgte mit der Finit-Element-Methode.

Es liegen je zwei Wöhlerlinien mit den Spannungsverhältnissen $R = 0$ und $R = -1$ vor, dazu Ergebnisse von entsprechenden Blockprogrammversuchen mit acht Stufen /44/. Die Wöhlerlinien wurden auf vier bis fünf Spannungshorizonten mit je 9 bis 11 Versuchen gefahren und zur Bestimmung der Dauerfestigkeiten mit dem Treppenstufenverfahren dienten je 13 Proben. Die Durchführung der Betriebsfestigkeitsversuche erfolgte mit 9 bis 12, teilweise auch bis zu 18 Proben je Horizont. Die Gegenüberstellungen der Ergebnisse sind im Anhang A 3 aufgeführt. Es zeigt sich, daß die ertragbaren Spannungen der innengekerbten Proben rund 12 % höher liegen als jene der außengekerbten. Dieses Ergebnis wird

von ARGYRIS, AICHER und KIERNER /43/ durch den Einfluß der unvermeidlichen Exzentrizität bei der Einspannung der Proben erklärt. Die Asymmetrie der Dauerbruchflächen ist bei Proben mit niedriger Formzahl größer als bei den Proben mit hoher Formzahl, was sich dadurch interpretieren läßt, daß mit höher werdender Formzahl der Unterschied der Spannungskonzentration zwischen angerissener und nicht angerissener Kerbe geringer wird.

SCHMALENBACH /45/ vergleicht ungekerbte Biegeproben mit außengekerbten Flachproben gleicher Formzahl. Er verwendet die allgemeinere Formzahldefinition von SIEBEL /22/ (siehe Abschnitt 3.1.), nach der auf eine konstante Nennspannung bezogen wird, die dem Kräfte- und Momentengleichgewicht genügt. Nach dieser

Definition ergibt sich für ungekerbte, biegebelastete Proben mit Rechteckquerschnitt eine Formzahl von $\alpha_K = 1,5$. Die Untersuchungen umfassen drei verschiedene Werkstoffe:

Reinaluminium Al 99,5 , unlegierter Edelstahl Ck 22 und hochlegierter Vergütungsstahl X 41 Cr Mo V 5 1. Die Ergebnisse sind im Anhang A 4 dargestellt. Die Wöhlerlinien für gekerbte Flachproben und ungekerbte Biegeproben sind bei Reinaluminium im gesamten Zeitfestigkeitsgebiet völlig identisch, bei Ck 22 dagegen nur in Nähe der Dauerfestigkeit zwischen $5 \cdot 10^5$ bis 10^6 Lastwechseln. Ab $5 \cdot 10^5$ Lastwechseln verzweigen sich die Wöhlerlinien, wobei die Kerbproben höhere Lastwechselzahlen ertragen. Bei 10^4 Lastwechseln sind die ertragbaren Spannungen der Kerbstäbe etwa 20 % größer als bei den Biegeproben. Beim Vergütungsstahl kommt es ebenfalls zu einem begrenzten Äquivalenzbereich zwischen $9 \cdot 10^4$ und 10^6 Lastwechseln. Bei höheren Amplituden entsteht eine Verzweigung mit gleicher Tendenz wie Ck 22.

SCHMALENBACH führt diese Effekte auf die Neigungsexponenten der stabilisierten, zyklischen Spannungs-Dehnungs-Linie zurück. Allerdings konnte er eine Stabilisierung nur beim Vergütungsstahl feststellen, für die anderen Werkstoffe wurde willkürlich die Spannungs-Dehnungs-Linie bei 10^4 Lastwechseln zugrunde gelegt.

Für die durchgeführten Versuche wurden nur zwei bis vier Proben je Horizont zerstört, das ist ein offensichtlicher Nachteil. Weiterhin ergibt sich nach neueren Ergebnissen der Berechnung von Kerbfaktoren /46/ für die Flachprobe eine Formzahl von $\alpha_K = 1.63$, siehe Anhang B 15. Daß trotzdem die Biegeprobe schneller zu Bruch geht, könnte durch den statistischen Größeneinfluß erklärt werden.

4. Die Versuchsstrategie

4.1. Schwingfestigkeitsversuche

Von den genannten Ergebnisse lassen sich folgende Schlußfolgerungen auf fortführende Untersuchungen ableiten:

- ①a Anwendung von Vergleichsspannungen
- ②a Versuchsdurchführung unter Einbeziehung stochastischer Belastungsfolgen

Randombelastungen ergeben gegenüber Blockprogrammen mehr oder weniger große Unterschiede des Schwingfestigkeitsverhaltens, die vor allem durch die Aufhebung der Reihenfolge einzelner Spannungsamplituden und Vernachlässigung momentaner Mittelwerte bei Blockprogrammen hervorgerufen werden. Von GASSNER, LIPP und DIETZ /47/ vorgestellte Untersuchungen ergeben Unterschiede der Lebensdauer zwischen dem herkömmlichen Blockprogramm-Versuch nach GASSNER /2/ und Betriebslastenversuchen von $N_{\text{Block}} : N_{\text{Random}} = 3 : 1$ für 50 % Überlebenswahrscheinlichkeit. PFEIFFER /48/ gibt Beziehungen zwischen N_{Block} und N_{Random} an, die vom Regellosigkeitsfaktor i und dem Korrelationskoeffizienten r abhängen. Für $i = 1$ und $r = -1$ ermittelte er für $N_{\text{Block}} : N_{\text{Random}}$ ein Verhältnis von 4 : 1. Im allgemeinen hat sich die Erkenntnis durchgesetzt, daß Blockprogramme zu starke Vereinfachungen gegenüber tatsächlichen Belastungsvorgängen bewirken. Aus den genannten Gründen soll auf die Untersuchung mit einem Blockprogrammversuch verzichtet werden.

Bei der Anwendung von Vergleichsspannungen sollten mindestens zwei unterschiedliche Vergleichsspannungshypothesen für den Kerbgrund Gültigkeit besitzen und verschiedene Formzahlwerte liefern. Daraus ergibt sich der Vergleich einer Probe eines Typs mit zwei Proben eines anderen Typs. Um eventuell auftretende nichtlineare Zusammenhänge zu erfassen, sollte wenigstens noch eine dritte Probe des zweiten Typs untersucht werden. Die Bruchlastwechselzahlen dieser drei Proben können dann auf jedem Spannungshorizont durch einen Parabelansatz interpoliert und den Werten der Probe des ersten Typs gegenübergestellt werden.

Mit diesen Forderungen ergibt sich ein minimaler Versuchsumfang von vier Wöhlerlinien und vier Random-Lebensdauerlinien.

Um den Versuchsaufwand in Maßen zu halten, werden zwei Einschränkungen gegenüber realen Verhältnissen an Bauteilen gemacht:

- ②a Es wird keine zusammengesetzte Belastung untersucht, die phasenverschobene Beanspruchung zur Folge hat, z. B. konstante Torsion und wechselnde Biegung, phasenverschobene Torsion und Biegung /49/,/50/.
- ②b Keine Einbeziehung von Mittelspannungen.

Die Einschränkung ②b bedeutet, daß Wöhlerlinien mit dem Spannungsverhältnis $R = -1$ und Lebensdauerlinien mit dem Regellosigkeitsfaktor $i = 1$ gefahren werden. Für Randbelastungen gilt die Vernachlässigung der Mittelspannung natürlich nur pauschal für das Lastkollektiv, ansonsten entstehen im Kerbgrund durch Plastifizierungseffekte bei höheren Amplituden entgegengesetzte Eigenspannungen, deren Einfluß auf den Schädigungsvorgang durchaus nicht vernachlässigbar sein muß.

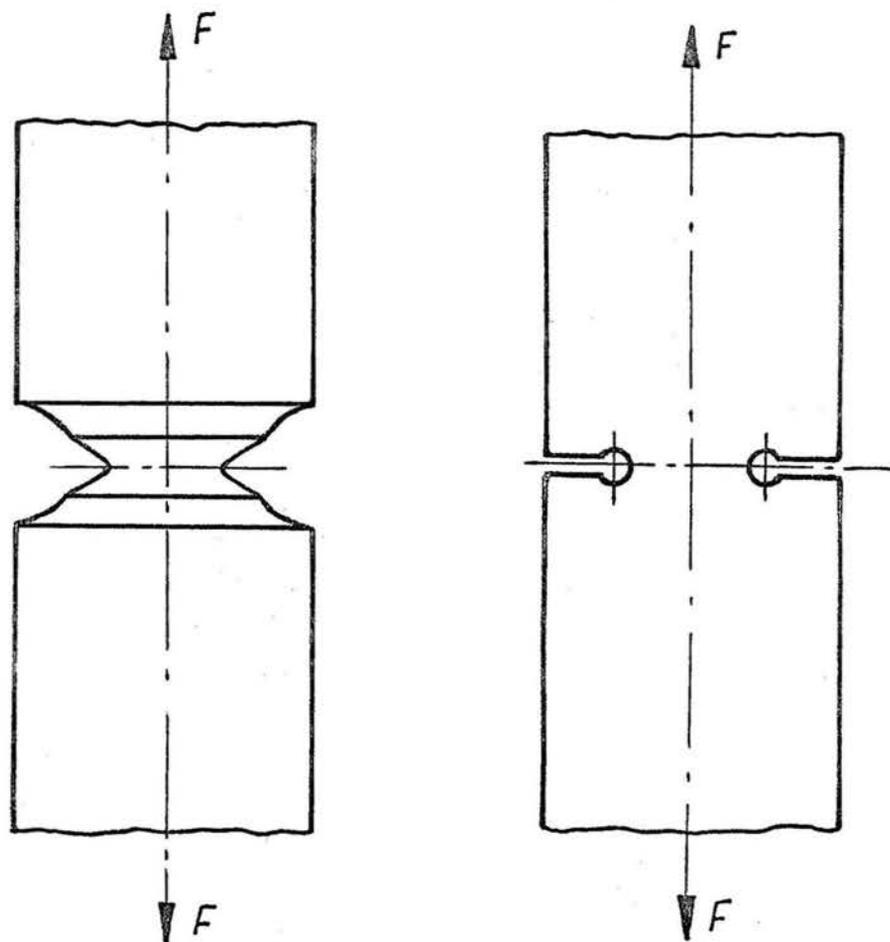
4.2. Auswahl der Proben

Der große Aufwand bei der rechnerischen Bereitstellung genau gleicher Formzahlen für verschiedene Körper erfordert, daß möglichst einfache Bauteile bzw. Proben für eine Grundlagenuntersuchung verwendet werden sollten. Günstig ist die Einbeziehung eines dreidimensionalen Spannungszustandes, um Einflüsse von Vergleichsspannungen auf die Schwingfestigkeit diskutieren zu können. Ein dreidimensionaler Spannungszustand, der sich relativ leicht berechnen läßt, ist der rotationssymmetrische Spannungszustand. In diesem Fall lassen sich verallgemeinerungsfähige Betrachtungen an einem Axialschnitt machen, so daß das räumliche Problem auf ein quasi-ebenes zurückgeführt

wird. Ein rotationssymmetrischer Spannungszustand bildet sich bei einer axial auf Zug-Druck belasteten Rundprobe mit Umlaufkerbe aus. Als Vergleichsprobe kann eine gekerbte, auf Zug-Druck belastete Flachprobe gelten, die ein ebenes Problem repräsentiert. Folgende zwei Probekörper wurden ausgewählt (Bild 4):

- a) Rundprobe mit Umlaufkerbe
- b) Flachprobe mit zwei Bohrungen, außen angesägt.

Bild 4:



a) Rundprobe

b) Flachprobe

Die Konstruktionszeichnungen mit den Maßangaben befinden sich im Anhang A 6 und A 7.

Die Auswahl der Probengeometrie erfolgte zunächst entsprechend üblichen Probenformen /51/. Um eine ausgeprägte Kerbwirkung zu erhalten, wurde die Flachprobengeometrie so festgelegt, daß sich nach TGL 19340 /3/ mindestens eine Formzahl größer als 2,5 ergibt, und dazu eine Rundprobengeometrie mit etwa gleicher Formzahl bereitgestellt. Dabei war eine mittlere Kerbtiefe anzustreben, die einer technischen Kerbe am besten entspricht, also weder einer flachen noch einer tiefen Kerbe zuzuordnen ist.

Aus fertigungstechnischen Gründen wird die eigentliche Rundprobenkerbe in eine bereits vorgefertigte größere Kreiskerbe eingestochen, siehe Abschnitt 6.2. Im Gegensatz zu ähnlichen Äquivalenzuntersuchungen /40/ soll nicht die Rundprobe geometrisch variiert werden, sondern die Flachprobe. Der Vorteil besteht in der einfachen technologischen Verwirklichung dieser Variation. Allein durch die Veränderung der Bohrungsabstände der Flachprobe können sämtliche interessierenden Parameter des Flachproben-Spannungszustandes, z. B. Formzahl, Spannungsgefälle, maximale elastische Spannung, entsprechenden Parametern der Rundprobe angepaßt werden.

5. Berechnung von Formzahlen

Das gesamte Ergebnis der vorliegenden Arbeit wird entscheidend davon beeinflusst, ob die maximale elastische Spannung exakt ermittelt wurde. Die errechnete Spannungsspitze im Kerbgrund reagiert wegen des großen Spannungsgefälles sehr empfindlich gegen Ungenauigkeiten im Berechnungsmodell bzw. schlechte Nachbildung der Kerbkonturen.

Deshalb muß der Formzahlberechnung besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden. Außerdem liegen noch zu wenig Erkenntnisse vor, die Aussagen zur Genauigkeit von errechneten Formzahlen ermöglichen.

Aus den genannten Gründen erfolgt eine ausführliche Herleitung und sorgfältige Durchführung der Formzahlberechnungen.

5.1. Elastizitätstheoretische Grundlagen

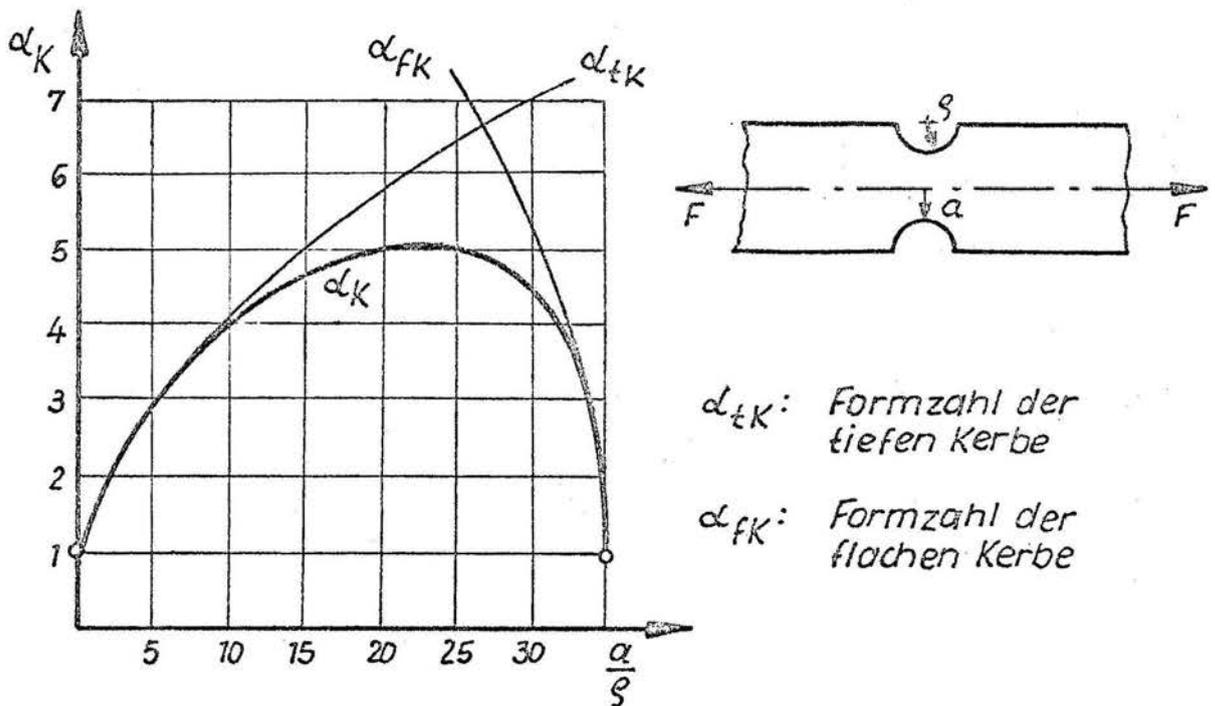
Zur Berechnung des elastischen Spannungszustandes sind zwei prinzipielle Wege möglich. Der eine Weg ist die Beschreibung des physikalischen Verhaltens eines infinitesimal kleinen Bereiches durch Differentialgleichungen. Diese werden dann unter Berücksichtigung der Anfangs- und Randbedingungen gelöst, soweit eine Lösung möglich ist. Denn obwohl die Gleichungen der Elastizitätstheorie und deren Lösungsstrategie über die Wahl von Hauptunbekannten seit langem bekannt sind (Verschiebungs-Unbekannte führen auf die LAMESchen Gleichungen, Spannungs-Unbekannte auf die BELTRAMI-MICHELL-Gleichungen /52/), so ist die Integration der Differentialgleichungen nur für einfache Sonderfälle geschlossen möglich. Der andere Weg ist die Anwendung der Variationsrechnung /53/. Hier geht man vom Gesamtgebiet aus und minimiert über dieses Gebiet ein Funktional. In der Festigkeitsberechnung wird häufig als Funktional die potentielle Gesamtenergie des Gebietes angesetzt /54/.

Für beide Wege existieren Näherungslösungen. Für den ersten Weg ist das Differenzenverfahren /55/ am bekanntesten, beim zweiten Weg das RITZ-Verfahren /56/ bzw. die Methode der finiten Elemente.

5.2. Beispiele zur Berechnung von Formzahlen

Zahlreiche Formzahlberechnungen für unterschiedliche Kerbformen und Körper wurden vor allem von NEUBER ausgearbeitet, die "Kerbspannungslehre" /25/ gilt als Standardwerk für diese Thematik. Ausgangspunkt seiner Berechnungen ist die Darstellung der Kerbgeometrie durch krummlinige Koordinaten. Damit projiziert er die nichtlineare Kerbkontur auf die lineare Kontur eines unendlich ausgedehnten Körpers, für den die Randbedingungen einfach erfüllbar sind. Auf diese Art formuliert NEUBER Formzahlen für sehr tiefe und sehr flache Kerben. Durch die Interpretation dieser Ergebnisse als asymptotische Grenzkurven führt er die für unendlich ausgedehnte Körper gültigen Formzahlen mittels eines quadratischen Ansatzes auf die Formzahl technischer Körper mit endlicher Ausdehnung zurück, siehe Bild 5.

Bild 5: Technische Formzahl nach NEUBER /25/



Im allgemeinen haben sich die technischen Formzahlen sehr gut in der Praxis bewährt, lassen sich aber nicht beliebig auf alle Kerbformen anwenden. Eine ähnliche Aussage trifft für die von SAWIN /57/ vorgelegten Ergebnisse zu. Hier wird über die

analytische Behandlung mit Hilfe der konformen Abbildung die Spannungskonzentration am Rande von Löchern in ebenen Scheiben unendlicher Ausdehnung errechnet.

Oft jedoch führen analytische Ansätze nicht zum Ziel, gerade bei endlichen Körpern mit beliebiger Form ist die Anwendung numerischer Näherungsverfahren unerlässlich.

BECKER /58/ arbeitet mit der konformen Abbildung zur Berechnung abgesetzter Flachstäbe, wobei die konforme Abbildung durch Polynomansätze numerisch approximiert wird. Sein Verfahren versagt bei großen Absatztiefen und kleinen bezogenen Absatzrundungen. Der Aufwand für unsymmetrische Krafteinleitung wäre nicht mehr vertretbar. Die Grenzen wurden bereits bei den durchgeführten Berechnungen für symmetrische Krafteinleitung deutlich, da sie schon einen Polynomansatz 135. Grades erforderten, um ausreichende Genauigkeiten zu erzielen.

RUOSS /59/ wendet das Differenzenverfahren zur Berechnung gekerbter Flachstäbe an. Besonders problematisch ist beim Differenzenverfahren die Behandlung des Randes, hierfür sind gesonderte Algorithmen erforderlich. TITTEL /60/ berechnet mit Hilfe des Übertragungsmatrizenverfahrens /61/ die Formzahlen von versteiften Langlochausschnitten. Auch hier ist eine feinere Diskretisierung des Kontiniums im Bereich großer Spannungskonzentration zur Absicherung genauer Ergebnisse erforderlich.

Die meisten Berechnungen von Formzahlen werden gegenwärtig mit der Methode der finiten Elemente durchgeführt, z. B. /40/, /43/, /62/, /63/, /64/, /65/, /66/. Die breite Anwendung dieser Methode ist vor allem auf ihre unkomplizierte Handhabung zurückzuführen. Sämtliche Randbedingungen lassen sich mit einem einheitlichen Grundalgorithmus behandeln. Durch die Zerlegung in einfache Elemente ist die Modellierung beliebig gestalteter Körper kein Problem. Wegen der großen erzielbaren Genauigkeit gibt es auch Bestrebungen, die Formzahlen ausschließlich mit finiten Elementen zu bestimmen und damit spannungsoptisch ermittelte Formzahlen zu ersetzen /67/. NEUBER hat selbst einige seiner analytisch hergeleiteten Formzahlen durch eine Interpolationsformel ersetzt, die auf den numerischen Ergebnissen von

BART /64/ und SCHNACK /65/ basiert. Kerbfaktoren nach dieser Interpolationsformel werden in /46/ vorgestellt.

Wegen der sehr guten Anpassungsfähigkeit an beliebig gestaltete Ränder wurde die Methode der finiten Elemente ebenfalls zur Formzahlberechnung in der vorliegenden Arbeit verwendet.

5.3. Methode der finiten Elemente (MFE)

5.3.1. Grundbeziehungen

Um in folgenden Abschnitten bestimmte Schritte zu begründen, vor allem bei der Absicherung der Genauigkeit, werden die Grundbeziehungen der MFE kurz dargestellt:

Parallel zu den Differentialgleichungssystemen der Elastizitätstheorie läßt sich über die Energiebilanz ein Variationsproblem formulieren. Man kann als Funktional das elastische Potential ansetzen, das sich aus der potentiellen Energie der inneren und äußeren Kräfte zusammensetzt:

$$\pi = \pi^{(i)} - \pi(\alpha) \quad (8)$$

Die Verschiebungen als die Unbekannten lassen sich durch das Verschwinden der ersten Variation von π errechnen:

$$\delta\pi = \delta \left[\int_{(V)} \varphi(\underline{v}) dV \right] = 0 \quad (9)$$

Damit ist das Minimalprinzip der Verschiebungen formuliert (LAGRANGESche Variationsgleichung /52/). Auf Spannungsansätze und gemischte Methoden soll hier nicht eingegangen werden /68/, /69/, /70/.

RITZ /56/ diskretisierte das Variationsproblem (9), indem er über den gesamten Bereich einen Verschiebungsansatz mit mehreren kinematisch zulässigen Ansatzfunktionen machte und die Freiwerte durch die nunmehr diskretisierte Bedingung (9) errechnet. Die MFE wird gegenwärtig bevorzugt auf der Grundlage des RITZ-Verfahrens hergeleitet und als dessen Modifikation interpretiert /71/, /72/.

Gegenüber dem RITZ-Verfahren ergeben sich folgende Vorteile: Ein Verschiebungsansatz wird nur für einfache, stückweise gültige Elemente gemacht. Diese Elemente werden dann zum Gesamtsystem des zu berechnenden Körpers zusammengesetzt. Damit ergibt sich keine vollbesetzte Steifigkeitsmatrix, sondern es entsteht eine Bandmatrix. Mit der Zusammensetzung einzelner Elemente ist die Modellierung beliebig geformter Bauteile möglich.

Die potentielle Energie der inneren Kräfte lautet:

$$\pi^{(i)} = W_i = \frac{1}{2} \int_{(v)} \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV \quad (10)$$

Die Formänderungsarbeit infolge äußerer Kräfte ist in Abhängigkeit vom Verschiebungsvektor \underline{v} :

$$W_a = \frac{1}{2} \int_{(v)} \underline{v}^T \underline{p} dV + \frac{1}{2} \int_{(o)} \tilde{\underline{v}}^T \underline{q} dO + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \underline{v}_i^T \underline{f}_i \quad (11)$$

Nach dem Satz von CLAPEYRON /52/, /54/ gilt:

$$\pi^{(a)} = 2W_a \quad (12)$$

Damit ergibt sich das elastische Potential zu:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{(v)} \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV - \int_{(v)} \underline{v}^T \underline{p} dV - \int_{(o)} \tilde{\underline{v}}^T \underline{q} dO - \sum_{i=1}^n \underline{v}_i^T \underline{f}_i \quad (13)$$

Bei der MFE wird die Gesamtstruktur in finite Elemente zerlegt und für jedes Element ein Verschiebungsansatz folgender Form gemacht:

$$\underline{v} = \underline{N} \underline{a} \quad (14)$$

Durch Einsetzen der Knotenkoordinaten in die Matrix \underline{N} erhält man den Elementknoten-Verschiebungsvektor \underline{d}_e :

$$\underline{d}_e = \underline{A} \underline{a} \quad (15)$$

Mit \underline{d}_e wird die stetige Verschiebung im Innern des Elementes durch die Knotenverschiebung ausgedrückt, damit reduziert sich die unendliche Anzahl der möglichen Freiheitsgrade auf eine endliche Anzahl.

Mit

$$\underline{a} = \underline{A}^{-1} \underline{d}_e \quad (16)$$

geht der Ansatz (14) über in

$$\underline{v} = \underline{N} \underline{A}^{-1} \underline{d}_e = \underline{G} \underline{d}_e \quad (17)$$

Die CHAUCHY-Beziehung liefert:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{D} \underline{v} - \underline{\varepsilon}_0 \quad (18)$$

Mit Gleichung (17) wird (18) zu:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{D} \underline{G} \underline{d}_e - \underline{\varepsilon}_0 \quad (19)$$

Die Materialeigenschaften gehen über das Stoffgesetz ein:

$$\underline{\sigma} = \underline{H} \underline{\varepsilon} \quad (20)$$

oder mit Gleichung (19):

$$\underline{\sigma} = \underline{H} (\underline{D} \underline{G} \underline{d}_e - \underline{\varepsilon}_0) \quad (21)$$

Aus Gleichung (21) wird nach Abschluß der Verschiebungsberechnung der Spannungsvektor $\underline{\sigma}$ berechnet.

Setzt man (17), (19) und (21) in (13) ein, so erhält man für das elastische Potential eines Elementes:

$$\begin{aligned} \pi_e = & \frac{1}{2} \int_{(v)} ((\underline{D} \underline{G})^T \underline{d}_e^T - \underline{\epsilon}_0^T) \underline{H} (\underline{D} \underline{G} \underline{d}_e - \underline{\epsilon}_0) dV \\ & - \int_{(v)} \underline{d}_e^T \underline{G}^T \underline{p} dV - \int_{(o)} \underline{d}_e^T \tilde{\underline{G}}^T \underline{q} dO - \sum_{i=1}^n \underline{d}_e^T \underline{G}_i^T \underline{f}_i \end{aligned} \quad (22)$$

oder umgeformt:

$$\pi_e = \frac{1}{2} \underline{d}_e^T \underline{K}_e \underline{d}_e - \underline{d}_e^T \underline{f}_e \quad (23)$$

mit den folgenden Abkürzungen:

$$\underline{K}_e = \int_{(v)} (\underline{D} \underline{G})^T \underline{H} \underline{D} \underline{G} dV \quad \text{Elementsteifigkeitsmatrix} \quad (24)$$

$$\underline{f}_e = \underline{f}_0 + \underline{f}_p + \underline{f}_q + \underline{f}_k \quad \text{Elementkraftvektor} \quad (25)$$

$$\underline{f}_0 = \int_{(v)} (\underline{D} \underline{G})^T \underline{H} \underline{\epsilon}_0 dV \quad \text{Anfangsverzerrungs-} \\ \text{kraftvektor} \quad (26)$$

$$\underline{f}_p = \int_{(v)} \underline{G}^T \underline{p} dV \quad \text{Volumenkraftvektor} \quad (27)$$

$$\underline{f}_q = \int_{(o)} \tilde{\underline{G}}^T \underline{q} dO \quad \text{Oberflächenkraftvektor} \quad (28)$$

$$\underline{f}_k = \sum_{i=1}^n \underline{G}_i^T \underline{f}_i \quad \text{Knoteneinzelkraftvektor} \quad (29)$$

Die Minimalbedingung (9) diskretisiert sich durch Einführung von \underline{d} zu dem Gleichungssystem:

$$\frac{\partial \pi}{\partial \underline{d}} = \underline{0} \quad (30)$$

Unter Beachtung folgender Regeln /73/

$$\frac{\partial (\underline{b}^T \underline{x})}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial (\underline{x}^T \underline{b})}{\partial \underline{x}} = \underline{b} \quad \text{und} \quad \frac{\partial (\underline{x}^T \underline{A} \underline{x})}{\partial \underline{x}} = 2 \underline{A} \underline{x} \quad (\text{für } \underline{A} = \underline{A}^T)$$

und der Summation aller elastischen Potentiale π_e zum Gesamtpotential

$$\pi = \sum_e \left(\frac{1}{2} \underline{d}_e^T \underline{K}_e \underline{d}_e - \underline{d}_e^T \underline{f}_e \right) \quad (31)$$

entsteht aus dem Gleichungssystem (30):

$$\boxed{\underline{K} \underline{d} = \underline{f}} \quad (32)$$

\underline{K} ist jetzt im Unterschied zum RITZ-Verfahren eine Bandmatrix. Die Bandbreite ist abhängig von der Numerierung der Struktur. Wegen der Symmetrie von \underline{K} , gemäß dem Satz von MAXWELL-BETTI, wird nur die halbe Bandbreite bb zur Berechnung benötigt:

$$bb = af \cdot (dif + 1) \quad (33)$$

mit af - Anzahl der möglichen Freiheitsgrade je Knotenpunkt
 dif - maximale Differenz der Knotennummerierung an einem Element

Nachfolgend werden zwei Verschiebungsansätze vorgestellt, die für die Berechnung der Formzahlen verwendet wurden.

5.3.2. Linearer Verschiebungsansatz

Zerlegt man eine ebene Struktur in finite Dreieckselemente (Bild 6) mit den Knotenpunkten i , k und l , so läßt sich folgender Polynomansatz für die Verschiebung machen, wenn man voraussetzt, daß jeder Knotenpunkt zwei mögliche Freiheitsgrade u und w besitzt:

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y \quad (34)$$

$$w = a_4 + a_5 x + a_6 y$$

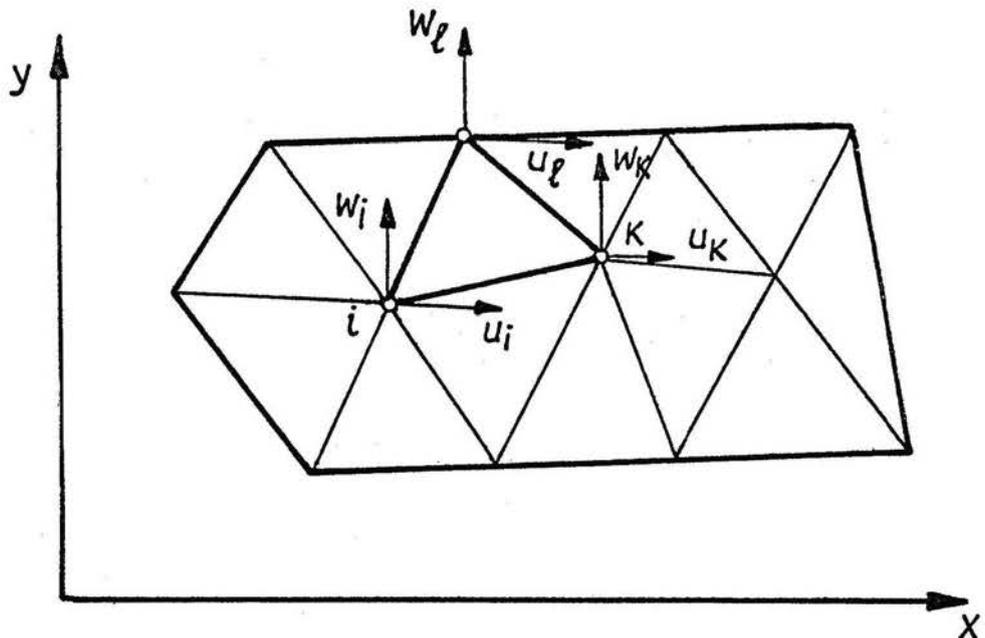
oder in Matrixschreibweise entsprechend Gleichung (14):

$$\underline{v}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ w(x,y) \end{pmatrix} = \underline{N}(x,y) \underline{\alpha} \quad (35)$$

$$\underline{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{pmatrix} \cdot (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)^T \quad (36)$$

Das Dreieckselement mit diesem Ansatz sei als Element DV 1 bezeichnet.

Bild 6



Der Ansatz erfüllt alle Bedingungen zur Erreichung von Konvergenz bei kleiner werdenden Elementen, siehe Abschnitt 5.3.4.

Mit (36) wird (15) zu:

$$\underline{d}_e = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_l & y_l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_l & y_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} = \underline{A} \underline{\alpha} \quad (37)$$

Beim ebenen Spannungszustand gilt nach CAUCHY:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Damit geht Gleichung (18) über in:

$$\underline{\varepsilon}(x,y) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon_{x_0} \\ \varepsilon_{y_0} \\ \gamma_{xy_0} \end{pmatrix} = \underline{D}\underline{v} - \underline{\varepsilon}_0 \quad (38)$$

und mit (17) ergibt sich entsprechend (19):

$$\underline{\varepsilon}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{\alpha} - \underline{\varepsilon}_0 = \underline{D}\underline{N}\underline{\alpha} - \underline{\varepsilon}_0 \quad (39)$$

$$\varepsilon(x,y) = \underline{D}\underline{N}\underline{\alpha} - \underline{\varepsilon}_0 = \underline{D}\underline{G} \underline{d}_e - \underline{\varepsilon}_0$$

Die Matrix $\underline{D}\underline{N}$ ist unabhängig von den Koordinaten x und y. Der lineare Verschiebungsansatz für ebene Elemente führt also auf konstante Verzerrungen je Element.

Für isotropes elastisches Material lautet das HOOKEsche Gesetz:

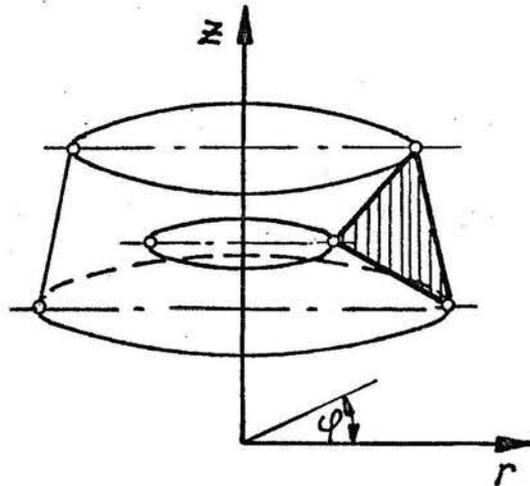
$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \underline{H}\underline{\varepsilon} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (40)$$

Damit sind alle Matrizen für den Aufbau der Elementsteifigkeitsmatrix (24) bereitgestellt, die für den ebenen Körper die folgende Form annimmt:

$$\underline{K}_e = \int_{(A)} (\underline{D} \underline{G})^T \underline{H} \underline{D} \underline{G} h dA \quad (41)$$

Bei Rotationssymmetrie wird analog ein Verschiebungsansatz für den Axialschnitt eines Ringelementes gemacht.

Bild 7



$$\underline{v}(r, z) = \begin{pmatrix} u(r, z) \\ w(r, z) \end{pmatrix} = \underline{N}(r, z) \underline{\alpha} \quad (42)$$

oder ausführlich:

$$\underline{v}(r, z) = \begin{pmatrix} 1 & r & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r & z \end{pmatrix} \cdot (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)^T \quad (43)$$

Die CAUCHY-Beziehungen lauten

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \epsilon_\varphi = \frac{1}{r} u \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}$$

Damit wird Gleichung (18) zu (44) umgeformt:

$$\underline{\epsilon}(r, z) = \begin{pmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\varphi \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{r_0} \\ \epsilon_{\varphi_0} \\ \epsilon_{z_0} \\ \gamma_{rz_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & 1 & \frac{z}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{\alpha} - \underline{\epsilon}_0 \quad (44)$$

In Gleichung (44) zeigt sich, daß durch die Dehnungskomponente ϵ_r der Verzerrungsvektor $\underline{\epsilon}$ von r und z abhängig wird. Der lineare Ansatz führt also bei Rotationssymmetrie auf nichtlineare Dehnungsverteilung je Element. Trotzdem wird wegen Gleichung (43) vom linearen Verschiebungsansatz (Element DV 1) gesprochen.

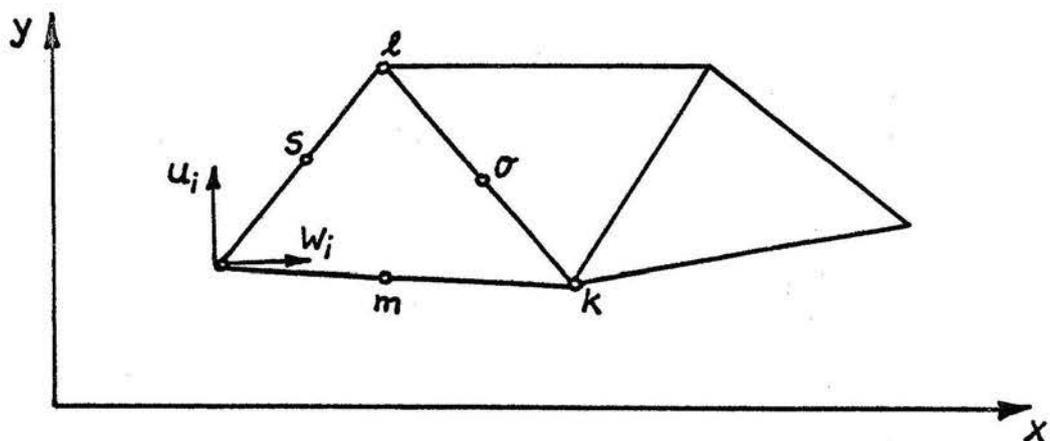
Die Elementsteifigkeitsmatrix lautet für Rotationssymmetrie:

$$\underline{K}_e = 2\pi \int_{(A)} (\underline{D}\underline{G})^T \underline{H}\underline{D}\underline{G} r dA \quad (45)$$

5.3.3. Quadratischer Verschiebungsansatz

Zur verbesserten Nachbildung einer inhomogenen Spannungsverteilung können die Verschiebungen der finiten Elemente durch mehr Knotenpunkte ausgedrückt werden, so z. B. durch die Einfügung von Seitenmittenknoten.

Bild 8



Hierfür lautet der Verschiebungsansatz:

$$\underline{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & x & y & x^2 & y^2 & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & y^2 & xy \end{pmatrix} \underline{a} \quad (46)$$

Der Vektor \underline{a} umfaßt jetzt 12 Komponenten a_i .

Für Rotationssymmetrie läßt sich ein quadratischer Verschiebungsansatz analog zu Abschnitt 5.3.2. machen. Die Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrizen (41) bzw. (45) erfolgt wie beim linearen Verschiebungsansatz.

Beim ebenen Spannungszustand erhält man entsprechend zu Gleichung (39) für den quadratischen Verschiebungsansatz einen linearen Verzerrungszustand je Element:

$$\underline{\underline{\epsilon}}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2x & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2y & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2y & x & 0 & 1 & 0 & 2x & 0 & y \end{pmatrix} \underline{a} - \underline{\underline{\epsilon}}_0 \quad (47)$$

Gleichung (44) für Rotationssymmetrie führt jetzt auf folgenden nichtlinearen Verzerrungszustand je Element:

$$\underline{\underline{\epsilon}}(r,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2r & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & 1 & \frac{z}{r} & r & \frac{z^2}{r} & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2z & r \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2z & r & 0 & 1 & 0 & 2r & 0 & z \end{pmatrix} \underline{a} - \underline{\underline{\epsilon}}_0 \quad (48)$$

Trotz linearer und nichtlinearer Dehnungsverteilungen bleiben Verzerrungssprünge an den Elementgrenzen bestehen.

|| Elemente mit dem quadratischen Verschiebungsansatz seien ||
 || als Elemente DV 2 bezeichnet. ||

5.3.4. Abschätzung der Genauigkeit

Ein Problem der MFE ist die Fehlerabschätzung der errechneten Lösung. Die MFE ist ein Gebietswertverfahren, d. h. die Minimalbedingung (9) gilt nur für das Gesamtgebiet, so daß eine quantitative Aussage nur über dieses Gebiet möglich ist. Der Verschiebungsansatz liefert insgesamt kleinere Werte als die exakte Lösung /72/. Das bedeutet aber nicht, daß damit alle errechneten Spannungen diesem Trend folgen müssen, es können ebenso Spannungsüberhöhungen gegenüber der exakten Lösung an Spannungskonzentrationsstellen auftreten.

Um die Konvergenz gegen die exakte Lösung zu sichern, müssen zunächst von den verwendeten Ansatzfunktionen bestimmte Konvergenzkriterien erfüllt werden /70/, /74/, /75/:

- a) Mit den Ansatzfunktionen muß die Stetigkeit der Verschiebungen und ihrer Ableitungen bis zu der Ordnung gewährleistet sein, die um eins kleiner ist als die in Π vorkommende Ableitung. Physikalisch heißt das, daß an den Zwischenflächen der finiten Elemente kein Beitrag zur potentiellen Energie entstehen darf.
- b) Bei Starrkörperverschiebung darf keine Dehnung im Element erzeugt werden.
- c) Die Verschiebungsfunktion muß einen konstanten Dehnungszustand exakt wiedergeben.
- d) Die Ansatzfunktionen müssen invariant gegen Verschiebung und Verdrehung des Koordinatensystems sein.

Alle diese genannten Kriterien werden mit den im Abschnitt 5.3.2. und 5.3.3. vorgestellten Verschiebungsansätzen erfüllt, so daß mit ständig feinerer Vernetzung die Lösung gegen den exakten Wert konvergiert. Von entscheidendem Einfluß aber ist die Art der Vernetzung. Jede Vernetzung hat ein anderes Konvergenzverhalten zur Folge, das nicht mathematisch beschreibbar ist. Dieser Umstand hat dazu geführt, daß im allgemeinen ein Konvergenzbeweis für eine Vernetzung folgendermaßen vorgenommen wird:

1. Vergleich mit bekannten Lösungen.
2. Iterative Netzverfeinerung und Vergleich der Lösungen untereinander.

Die Variante 1 ist nur in wenigen Fällen möglich, oft nur mit Hilfe von Grenzbetrachtungen. Variante 2 erfordert mehrere Rechnungen, wobei vom Bearbeiter von vornherein aus Erfahrung ein optimales Netz erstellt werden kann. DUDA /63/ hat unterschiedliche Verschiebungsansätze bezüglich der Konvergenz verglichen und kommt zu dem Ergebnis, daß noch höherklassige Elemente als DV2 optimal sind. Weiterhin stellte er fest, daß die Konvergenz wesentlich von der Vernetzungsart abhängt. Unter Umständen ist sogar eine zu starke örtliche Netzverdichtung konvergenzverschlechternd.

Zu den höherklassigen Elementen mit mehr Knotenpunkten als Element DV2 muß man bemerken, daß damit grundsätzlich die Genauigkeit bei gleicher Netzstruktur verbessert werden kann. Dadurch ist es möglich, ein Kontinuum mit weniger Elementen zu idealisieren. Dieser Vorteil muß aber mit größerem programmiertechnischem Aufwand und höherem Speicherplatzbedarf bezahlt werden. Nach den Aussagen DUDA's ergibt sich keine Überlegenheit von Elementen mit quadratischem Verschiebungsansatz gegenüber dem linearen Ansatz. Auch FÜHRING /62/ erzielte mit dem Element DV1 ausreichende Genauigkeit. Im Gegensatz dazu kommen mehrere Autoren zu der Ansicht, daß gerade das Element mit quadratischem Verschiebungsansatz optimal ist. SCHNACK /76/, KÄRCHER /77/, ARGYRIS und RADAJ /78/ sowie DARIO und BRADLEY /79/ zeigen die Überlegenheit von DV2 gegenüber DV1. Diese Autoren kommen zu der Auffassung, daß noch höhere Elemente als DV2 kaum optimal sind. Zum einen läßt sich eine komplizierte Struktur besser durch viele Dreieckselemente nachbilden, und zum zweiten - das ist ebenfalls von DUDA belegt - sind einspringende Ecken und Einzelkräfte besonders konvergenzschädigend bei höherklassigen Elementen. Eine genaue Formzahlberechnung kann man nur unter folgenden Voraussetzungen erhalten /62/, /63/:

- ① Die Einteilung im Kerbgrund muß möglichst fein sein.

- ② Es ist zum Strukturinnern hin auf einen stetigen Übergang der einzelnen Elemente bezüglich ihrer Größe zu achten. Sprungstellen im Elementnetz führen zu Unstetigkeiten im Spannungsverlauf.
- ③ Die Kerbkontur sollte durch eine genügende Anzahl von Elementen möglichst genau nachgebildet werden. Im Kerbgrund sollte nur ein Element vorhanden sein.

Diese Voraussetzungen wurden von NOACK /80/ bei Anwendung des Elementes DV1 für verschiedene Kerbformen bestätigt.

5.4. Durchführung der Berechnungen

Es wurden insgesamt 28 MFE-Berechnungen durchgeführt, davon 13 unter Verwendung des Elementes DV1 und 15 mit Element DV2. Im Anhang A sind 12 entsprechende Vernetzungen grafisch dargestellt.

Eine Übersicht über alle benötigten Programme zeigt Anhang B1.

5.4.1. Verwendete Programme

Für den linearen Verschiebungsansatz wurde das Programm "SCHEIBE 3" /81/, /82/ beim rotationssymmetrischen Spannungszustand und das Programm "S 4 B" (siehe Anhang B 11) beim ebenen Spannungszustand verwendet. Beide Programme liegen in ALGOL für den Rechner "ODRA 1204" vor. Überschlägige Kapazitätsschranken dieser Programme sind:

Bandbreite:	35
Anzahl der Knotenpunkte:	200
Anzahl der Elemente:	350

Für den quadratischen Verschiebungsansatz kam das Programm "A 3 G" /83/ bei Rotationssymmetrie und "E 3" /84/ beim ebenen Spannungszustand zur Anwendung. Diese Programme sind in FORTRAN für den Rechner "BESM-6" geschrieben.

Als Kapazitätsschranken ergeben sich:

	A 3 G	E 3
Bandbreite	200	200
Anzahl der Knotenpunkte	900	900
Anzahl der Elemente	449	349

Die Datengenerierung zur automatischen Vernetzung für die Programme mit Element DV1 erfolgt mit Hilfe des Programmes "DATGEN.2" /85/. In "A 3 G" und "E 3" ist bereits eine programminterne Datengenerierung eingearbeitet.

Zur Untersuchung von Konvergenz-Unterschieden zwischen den beiden Elementen DV1 und DV2 ist es angebracht, völlig gleiche MFE-Netze durchzurechnen. Hiermit lassen sich Aussagen treffen, inwieweit das in der Literatur als Optimalelement anerkannte Element DV2 eventuell durch das noch kostengünstigere Element DV1 ersetzbar ist.

Die Übertragung der MFE-Netze von DV1 zu DV2 wurde mit dem ALGOL-Programm "VDAT" (Anhang B 2) realisiert.

"VDAT" liest die Eingabedaten in ALGOL für "SCHEIBE 3" und "S 4 B" in Form von "DATGEN 2" - Ausgabelochstreifen ein und gibt FORTRAN-Daten für "A 3 G" und "E 3" mit den notwendigen Umformungen zu DV2 aus. Für die Eingabedaten der BESM-6-Programme mußte das Einlesen sämtlicher Knoten veranlaßt werden, um den programminternen Datengenerator auszuschalten (siehe Anhang B 2).

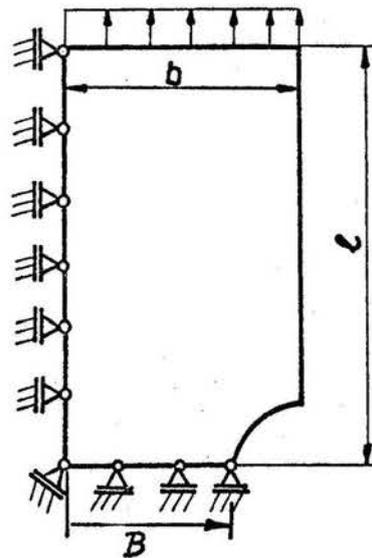
Die Zeichnungen der Vernetzungen wurden mit Hilfe des Programms "VDIG" (Anhang B 7) für den Zeichentisch "DIGIGRAF 2008" erstellt. Um einen Vergleich der errechneten Formzahlen mit /25/ und /46/ ausführen zu können, wurden die dort angegebenen Formeln für zugbeanspruchte Rund- und Flachproben im Programm "ALPHA / K" (Anhang B 15) programmiert.

5.4.2. Vernetzung in finitè Elemente

5.4.2.1. Aufbereitung der Rechenmodelle

Aus Symmetriegründen wird nur ein Viertel der Flachprobe bzw. des Rundproben-Axialschnittes berechnet, wobei die Symmetrielinien durch entsprechende kinematische Randbedingungen simuliert werden (Bild 9).

Bild 9: Idealisierung eines Probenviertels



B: halber Bohrungsabstand
der Flachproben bzw.
Kerbgrundradius der
Rundproben

Die Größe l sollte gemäß dem St. VENANTschen Prinzip ausreichend groß gewählt werden. Das Verhältnis von $l/b = 2$ stellt einen optimalen Wert dar, das belegen Untersuchungen von RUOSS /59/. Für die zentriert angreifende Last F wird eine äquivalente konstante Flächenlast angesetzt. Das Viertelstück der Probe wurde so in finite Dreieckselemente zerlegt, daß die Bandbreite der Koeffizientenmatrix \underline{K} trotz sehr feiner Vernetzung im Kerbgrundbereich nicht zu groß wurde, weil von der Bandbreite entscheidend die Anzahl der benötigten Speicherplätze und die Rechenzeit beeinflußt wird.

Bei der Vernetzung mußte in Ergänzung zu den Forderungen im Abschnitt 5.3.4. folgendes berücksichtigt werden:

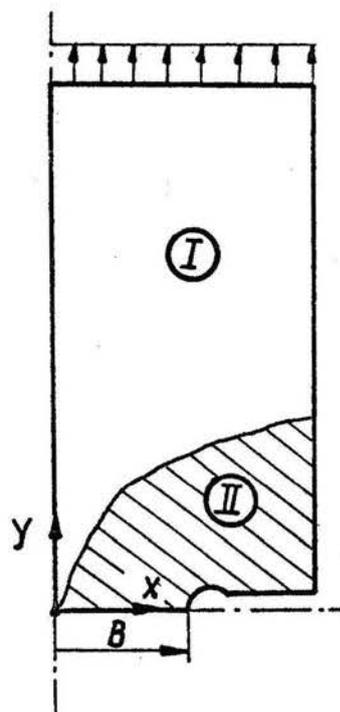
- ① Die Bandbreite der Systemsteifigkeitsmatrix muß minimal gehalten werden. Sie wird direkt durch die Wahl der Knotennumerierung und der gewählten Elementanordnung festgelegt (Gleichung 33).
- ② Die Dreiecke sollten möglichst gleichseitig sein. Bei starker Verzerrung der Dreiecke kann es zu numerischen Instabilitäten beim Lösen des Gleichungssystems (32) kommen.

Die Bereitstellung der Koordinaten erfolgte rationell mit dem Gerät "DIGITRON" (Hersteller; VEB Meß- und Zeichengerätebau Bad Liebenwerda). Dieses reißbrettähnliche Gerät ermöglicht es, jeden Punkt einzeln anzufahren und das Stanzen der Punktkoordinaten auf Lochstreifen auszulösen. Trotz dieser Vereinfachung ist es bei finiten Elementen wegen der großen Datenmengen vorteilhafter, Datengenerator-Programme zu benutzen, die mit wenigen eingegebenen Daten den vollständigen Datenumfang einschließlich Topologie - Zuordnung der Punkte zu den Elementen - liefern. Für die zu erstellenden Vernetzungen war das Programm "DATGEN 2" /85/ gut geeignet. Dabei wird auf die zu berechnende Struktur ein Rechtecknetz verzerrt, von dem nur ein Teil der Punkte manuell bzw. mit "DIGITRON" vorgegeben werden muß. Die restlichen Punktkoordinaten werden durch lineare Interpolation errechnet.

5.4.2.2. Vernetzung der Flachproben

Ausgangspunkt für alle Flachprobenvarianten ist eine einheitliche Vernetzung, die nur in der Umgebung der Kerbgrundlinie für verschiedene Kerbgrundradien bzw. halbe Bohrungsabstände B verzerrt ist (Bild 10).

Bild 10: Vernetzungsgebiete der Flachprobe



Dabei wurden zwei Vernetzungsgebiete eingeteilt. Nur Gebiet I ist für alle Flachproben in gleicher Weise vernetzt. Für Gebiet II dagegen erfolgte eine Anpassung an die jeweilige Kerbform, d. h. bei den Flachproben wurde der halbe Bohrungsabstand B gemäß Abschnitt 4.2. variiert.

Es wurden 5 Flachproben berechnet:

F 4: B = 4 mm	F 6: B = 6 mm	F 8: B = 8 mm
F 5: B = 5 mm	F 7: B = 7 mm	

Die Flachproben mit dem halben Bohrungsabstand $B = j$ mm erhielten die Bezeichnung F_j .

Für alle Flachprobenvarianten gelten folgende Vernetzungskennwerte beim Element DV 1:

Bandbreite:	23
Anzahl der Punkte:	198
Anzahl der Elemente:	340

Mit den angegebenen Werten ist die Speicherplatzkapazität des verwendeten MFE-Programms "S 4 B" voll ausgelastet.

Der zusätzliche Aufwand zum Neuvernetzen pro Flachprobenvariante bestand nur aus der Koordinatenabnahme von je 71 Punkten des Vernetzungsgebietes II mit dem "DIGITRON". Alle restlichen Punkte konnten direkt übernommen werden.

Zum vollständigen Datensatz gehören noch die kinematischen Randbedingungen und die Belastung, die in Form von Knoteneinzelkräften aufbereitet werden mußte.

Liegen alle Daten generiert vor, so ist eine Kontrolle der Geometrie von Vorteil. Dazu diente der Zeichentisch "DIGIGRAF 2008", für den die Steuerstreifen durch das Programm "VDIG" auf dem Rechner "ODRA 1204" erzeugt wurden. Die Vernetzungen in normierter Größe befinden sich im Anhang A 8 bis A 12.

5.4.2.3. Vernetzung der Rundproben

Bei der Rundprobe wurde wie bei den Flachproben von einem einheitlichen Netz mit zwei Vernetzungsgebieten ausgegangen. Die Variation verschiedener Rundproben erfolgte auch hier über ein Vernetzungsgebiet II in Nähe der Kerbgrundlinie. Zunächst wurden Rundproben mit nicht abgesetzter Kerbe mit dem Element DV 1 berechnet, um Ergebnisse des Programms "ALPHA/K" zu vergleichen:

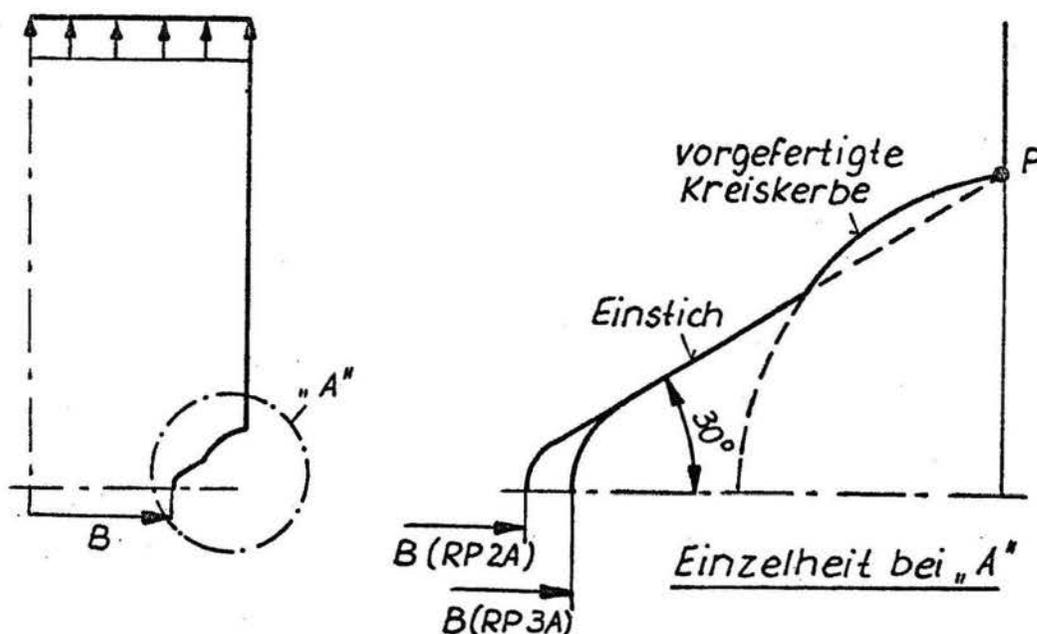
Rundprobe RP 1: $B = 3.0 \text{ mm}$, Kerbradius $r = 1 \text{ mm}$
Rundprobe RP 2: $B = 3.0 \text{ mm}$, Kerbradius $r = 2 \text{ mm}$

Die Vernetzungen dazu zeigt Anhang A 30 und A 31. Anschließend wurden unter Verwendung des Elementes DV 2 Rundproben mit abgesetzter Kerbe berechnet:

RP2A: $B = 2.47 \text{ mm}$, Kerbradius $r = 2 \text{ mm}$
RP3A: $B = 2.54 \text{ mm}$, Kerbradius $r = 3 \text{ mm}$

Die Vernetzungen dieser Proben zeigt Anhang A 34 und A 35. Die Festlegung des Kerbgrundradius B wird im Bild 11 verdeutlicht:

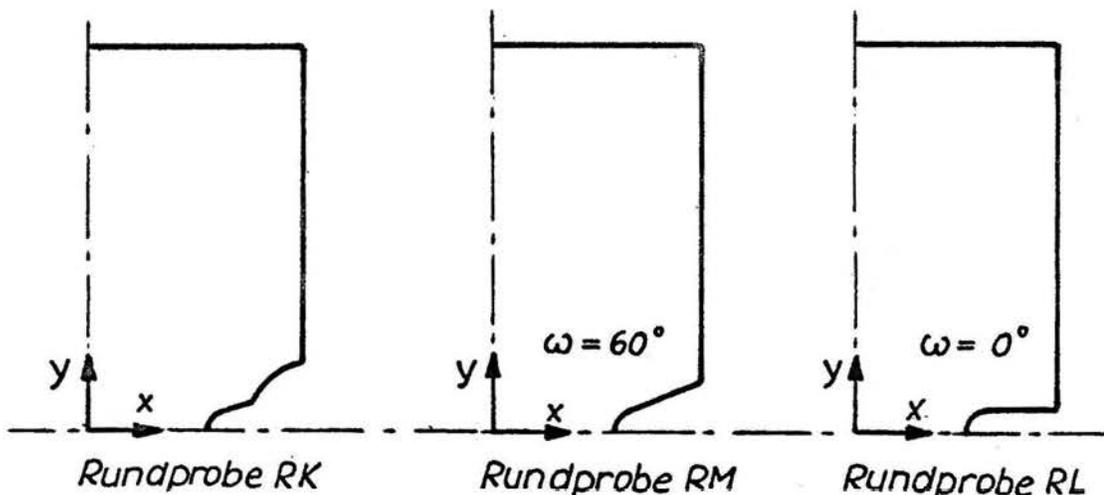
Bild 11: Rundprobe mit abgesetzter Kerbe



Der Einstich in die vorgefertigte Kreiskerbe sollte nur so tief erfolgen, daß der Gewindestrehler, siehe Abschnitt 6.2., höchstens den Punkt P berührt. Daraus ergibt sich für einen kleineren Kerbradius ein kleinerer Kerbgrundradius B. Die Rundprobe RP2A zeigte für einen Vergleich mit den Flachproben die besten Ergebnisse. Um wenigstens noch eine Kontrollberechnung zur Optimierung der Vernetzung durchzuführen, wurde diese Rundprobe in Nähe des Kerbgrundes feiner vernetzt, ohne jedoch die Gesamtanzahl der Punkte und die Bandbreite zu verändern. Diese endgültige Vergleichsprobe ist als Rundprobe RK bezeichnet. Die Vernetzung befindet sich im Anhang A 36.

Zur Beurteilung des Einflusses von Flankenwinkel und abgesetzter Kerbe wurde zusätzlich zu Probe RK eine Rundprobe mit dem Flankenwinkel $\omega = 60^\circ$ sowie eine Probe mit $\omega = 0^\circ$ ohne abgesetzte Kerbe untersucht, siehe Bild 12:

Bild 12: Varianten der Vergleichsprobe RK



Die Vernetzungen der Proben RM und RL zeigt Anhang A 38 und A 37. Eine detaillierte Gegenüberstellung der ersten 36 Elemente der Proben RM, RL und RK ist im Anhang A 39 enthalten.

Für die Rundproben mit Element DV 1 gelten folgende Vernetzungskennwerte:

Bandbreite: 21
Anzahl der Punkte: 210
Anzahl der Elemente: 360

Damit ist die Speicherplatzkapazität des Programms "SCHEIBE 3" /81/ maximal ausgelastet.

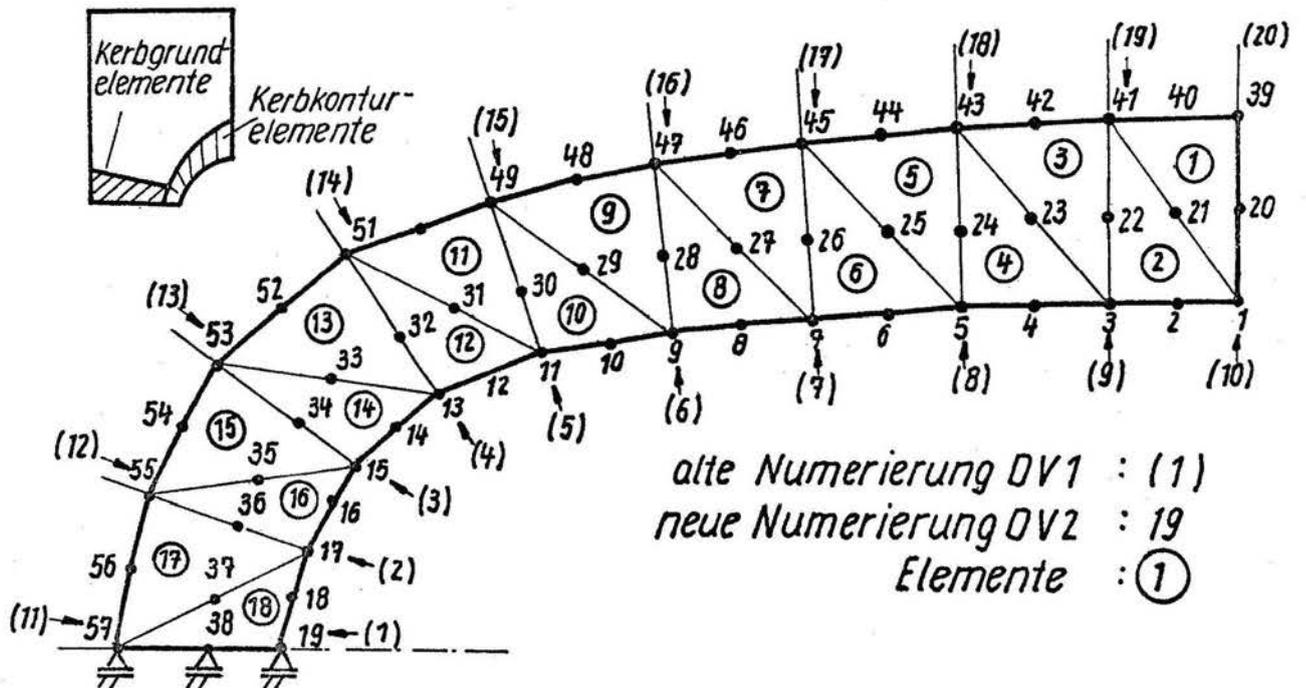
5.4.2.4. Umsetzung der Elemente DV 1 zu DV 2

Die Übertragung sämtlicher DV 1-Vernetzungen auf das Element DV 2 erfolgte mit Hilfe des Programmes "VDAT" folgendermaßen:

- Umdrehen der beiden Zählrichtungen, um die Anpassung an den programminternen Datengenerator in "A 3 G" und "E 3" zu erreichen, siehe Anhang B 2. Zu beachten ist dabei, daß durch die Veränderung der Knotenpunkt-Zählrichtungen auch die Elementnumerierung verändert wird.
- Einfügen von Seitenmittenknoten, deren Numerierung kompatibel zu den Eckknotenpunkten sein muß.
- Eingabe in ALGOL-Daten, Ausgabe in FORTRAN-Formaten

Die veränderte Numerierung ist am Beispiel der Rundprobe im Bild 13 dargestellt:

Bild 13: Kerbkonturelemente der Rundprobe für DV 1 und DV 2:



Die mit "VDAT" realisierte Zuordnung von DV 1 zu DV 2 für die Kerbgrundelemente zeigt Anhang A 14.

Mit Einfügen der Seitenmittenknoten erhöht sich bei gleichem Netz zwangsläufig die Bandbreite und die Knotenpunktanzahl. Für die Flachproben gelten damit folgende Vernetzungskennwerte:

Bandbreite:	90
Anzahl der Punkte:	735
Anzahl der Elemente:	340

Lediglich die Knotenanzahl kommt der Speicherplatzkapazität von "A 3 G" nahe. Bei den Rundproben gilt für DV 2:

Bandbreite:	82
Anzahl der Punkte:	779
Anzahl der Elemente:	360

Die Elementanzahl lastet das Programm "E 3" vollständig aus.

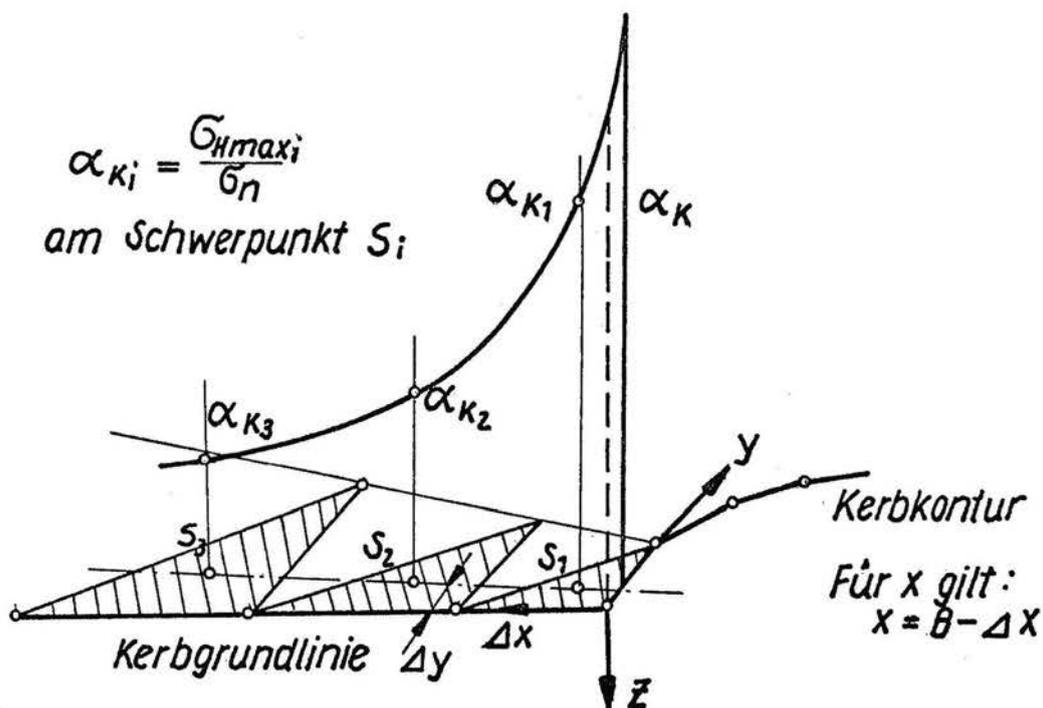
5.4.3. Extrapolation der Formzahl

Die Güte der Formzahlberechnung hängt auch davon ab, wie die elementweise erzielten Ergebnisse interpretiert werden. Bei DV 1 mit ebenem Spannungszustand tritt nur eine konstante Spannung pro Element auf. Hier ist es sinnvoll, die Spannung, bezogen auf den Elementschwerpunkt des Dreieckes, für eine Extrapolation auf den Rand zu verwenden. Genau so wird auch für das Element DV 1 mit Rotationssymmetrie verfahren, obwohl hier wegen Gleichung (44) eine r- und z-Abhängigkeit der Dehnungen zu nichtlinearer Spannungsverteilung führt. Beim Element DV 2 sind für den ebenen und für den rotationssymmetrischen Spannungszustand lineare bzw. nichtlineare Dehnungsverteilungen vorhanden, die aber trotzdem nicht stetig an den Elementgrenzen verlaufen. Deshalb ist es auch hier angebracht, grafische Ergebnisse aus Formzahlextrapolationen wie bei Element DV 1 zu verwenden.

FÜHRING /62/ weist auf den Einfluß der Formzahlauswertung hin und führt als Beispiel für eine genaue Formzahl von $\alpha_K = 2.0$ Werte zwischen 1.49 und 1.98 an, die allein durch verschiedene Auswertungen finiter Elemente erhalten wurden. So ist z. B. üblich, im Innern von Strukturen Schwerpunktspannungen von jeweils zwei benachbarten Elementen zu mitteln, diese Mittelung ist aber gerade für Randgebiete ohne Bedeutung /72/. Ein solches Vorgehen führt eindeutig auf zu niedrige Werte, das wurde durch alle durchgeführten Berechnungen bestätigt.

Zur Auswertung der Formzahl wurden diejenigen Kerbgrundelemente herangezogen, die mit einer Dreiecksseite die Kerbgrundlinie darstellen (Bild 14). Dabei ist der Abstand Δy der Dreiecksschwerpunkte von der Kerbgrundlinie für die Formzahl von untergeordneter Bedeutung, weil der Spannungsgradient in y-Richtung im Kerbgrund Null ist. Die Formzahlextrapolation könnte theoretisch entfallen, wenn die Netzverdichtung im Kerbgrund unendlich groß wäre, dem sind aber rechentechnische Grenzen gesetzt.

Bild 14: Grafische Formzahlextrapolation



5.4.4. Einbeziehung von Vergleichsspannungen

Der Vergleich zweier unterschiedlicher Probestäbe bezüglich ihrer Spannungskonzentration erfordert einen einheitlichen Maßstab. Mit Hilfe von Festigkeitshypothesen kann der mehrachsige Spannungszustand auf eine skalare Spannungsgröße bezogen werden. Über die Wertigkeit der einzelnen Spannungskomponenten gibt es unterschiedliche Auffassungen, die zur Herausbildung mehrerer Festigkeitshypothesen geführt haben. Folgende Vergleichsspannungen wurden zur Untersuchung herangezogen:

$$\text{Hauptspannungshypothese} \quad \sigma_{V_1} = \sigma_1 \quad (49)$$

$$\text{Hauptdehnungshypothese} \quad \sigma_{V_2} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \quad (50)$$

$$\text{Hauptschubspannungshypothese} \quad \sigma_{V_3} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (51)$$

Gestaltänderungsenergiehypothese

$$\sigma_{V_4} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (52)$$

Für die ersten drei Festigkeitshypothesen gilt die Voraussetzung:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad (53)$$

Gemäß Gleichung (1) werden folgende Vergleichsformzahlen definiert:

$$\alpha_K = \frac{\sigma_{V_1 \max}}{\sigma_n} \quad (54)$$

$$\alpha_D = \frac{\sigma_{V_2 \max}}{\sigma_n} \quad (55)$$

$$\alpha_T = \frac{\sigma_{V_3 \max}}{\sigma_n} \quad (56)$$

$$\alpha_V = \frac{\sigma_{V_4 \max}}{\sigma_n} \quad (57)$$

Die maximalen Vergleichsspannungen $\sigma_{v_i \max}$ gelten für den Kerbgrund. Gleichung (54) ist mit (1) hinreichend identisch, weil bei den vorliegenden Berechnungen kaum Unterschiede zwischen der Maximalspannung $\sigma_{y \max} = \sigma_{H \max}$ in Belastungsrichtung y und der maximalen Hauptspannung $\sigma_{1 \max}$ auftreten, siehe Anhang A 19, A 21, A 23 usw.

Die Formzahlen (54) bis (56) lassen sich beim grafischen Auftragen der Formzahlverläufe $\alpha_K = f(\Delta x)$ bereits zu einer pauschalen Kontrolle für die Genauigkeit der Ergebnisse verwenden, weil im Kerbgrund folgende Beziehung Gültigkeit hat, wenn die Werte exakt sind:

$$\alpha_K = \alpha_D = \alpha_Z = \alpha_V \quad (58)$$

An dieser Stelle verschwinden wegen des lastfreien Randes die anderen Hauptspannungskomponenten außer σ_1 beim ebenen Spannungszustand.

Trotz der gleichen Werte von (54) bis (56) im Kerbgrund ist aber das bezogene Spannungsgefälle χ^* für die vier Vergleichsformzahlen nicht unbedingt gleich.

5.4.5. Der ebene Spannungszustand in der Flachprobe

In der Flachprobe bildet sich infolge der gewählten Abmessungen, siehe Anhang A 6, weder ein ebener Spannungszustand (ESZ) noch ein ebener Verzerrungszustand (EVZ) aus. Trotzdem wurden sämtliche Berechnungen mit dem ESZ durchgeführt.

Der ESZ führt zur Vernachlässigung der Spannungskomponente σ_z . Das ist aber nur gültig, wenn der Kerbradius sehr viel größer ist als die Scheibendicke h. Durch das Auftreten von σ_z kann es zu erheblichen Querdehnungsbehinderungen kommen, in /86/ werden für verschiedene gekerbte Flachstäbe bis zu 30 % Querdehnungsbehinderungen festgestellt. Im anderen Extremfall $r \ll h$ wird über die Dicke h ein EVZ ausgebildet. Nach Angaben von LÖTZSCH /87/ gilt für das Verhältnis

$$\frac{r}{h} < 0.1$$

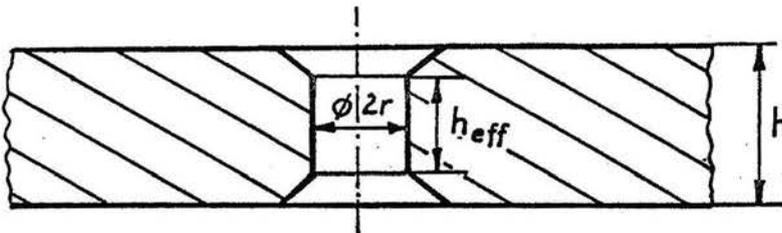
in guter Näherung der EVZ.

Die verwendeten Flachproben, siehe Anhang A 6 , haben ein Verhältnis

$$\frac{r}{h} = 0.25$$

Durch das Ansenken der Bohrungen ist nur noch eine effektive Dicke, $h_{\text{eff}} = 3 \text{ mm}$, vorhanden (Bild 15).

Bild 15: Schnitt durch die Flachprobenbohrung



Damit wird $\frac{r}{h} = 0.33$,

also im Hinblick auf den EVZ noch ungünstiger.

Eine Begründung für die sinnvolle Verwendung des ESZ kann in diesem speziellen Fall über die Mikrostütztheorie gegeben werden.

Der Kerbradius der Rundprobe beträgt 0,2 mm, dagegen bei der Flachprobe 1 mm. Daraus kann man schlußfolgern, daß die Rundprobe stärker mikrogestützt wird als die Flachprobe. Eine quantitative Abschätzung ist über konkrete Werte der Ersatzstrukturlänge ϱ^* möglich:

Verwendet man die von BERTELE /27/ angegebene grafische Darstellung des Zusammenhanges von ϱ^* und $\bar{\sigma}_{0,2}$, siehe Anhang A 5, so erhält man mit $\bar{\sigma}_{0,2} = 390 \text{ N/mm}^2$ (Anhang A 48):

$$\varrho^* = 0.073 \text{ mm}$$

Für die Flachprobe ergibt sich daraus mit den Gleichungen (4), (5) und (1):

$$\bar{\sigma}_{H\text{max}} = 0.92 \sigma_{H\text{max}}$$

und für die Rundprobe gilt:

$$\bar{\sigma}_{Hmax} = 0.70 \sigma_{Hmax}$$

Es kann angenommen werden, daß das Absinken der Flachproben-Maximalspannung infolge Spannungskomponente σ_z /86/ plus Absinken infolge kleinerer Mikrostützung der Flachproben etwa in der gleichen Größenordnung liegt wie das Absinken der maximalen Rundprobenspannung infolge der größeren Mikrostützung. Damit ist die Formzahl der Rundprobe vergleichbar mit der Formzahl der Flachprobe auf der Grundlage des ESZ.

5.4.6. Diskussion der errechneten Formzahlen

5.4.6.1. Ergebnisse der Flachproben

Im Anhang A 15 bis A 28 befinden sich die grafischen und numerischen Ergebnisse für die Flachproben. Die Formzahlverläufe sind über $4x = B - x$ aufgetragen. Eine iterative Netzverfeinerung erfolgte nicht, da die verwendeten Programme jeweils bis zur maximalen Speicherplatzkapazität ausgelastet wurden und Erfahrungen aus Literaturergebnissen sowie aus eigenen Berechnungen genutzt werden konnten. Lediglich eine Art der Doppelberechnung kam zur Anwendung:

Die Kerbkontur wurde zunächst wie alle anderen erforderlichen Punkte zur Bereitstellung der Vernetzung im Maßstab 20 : 1 manuell mit dem "DIGITRON" von einer genau angefertigten Handskizze abgenommen. Die damit ermittelten Formzahlen seien als Formzahl α_K^* bezeichnet.

Bei Kontrolle der Vernetzungen konnten keine Fehler festgestellt werden, siehe Anhang A 8 bis A 12. Die optisch scheinbar richtigen Kerbkonturen wurden dann rechnerisch korrigiert.

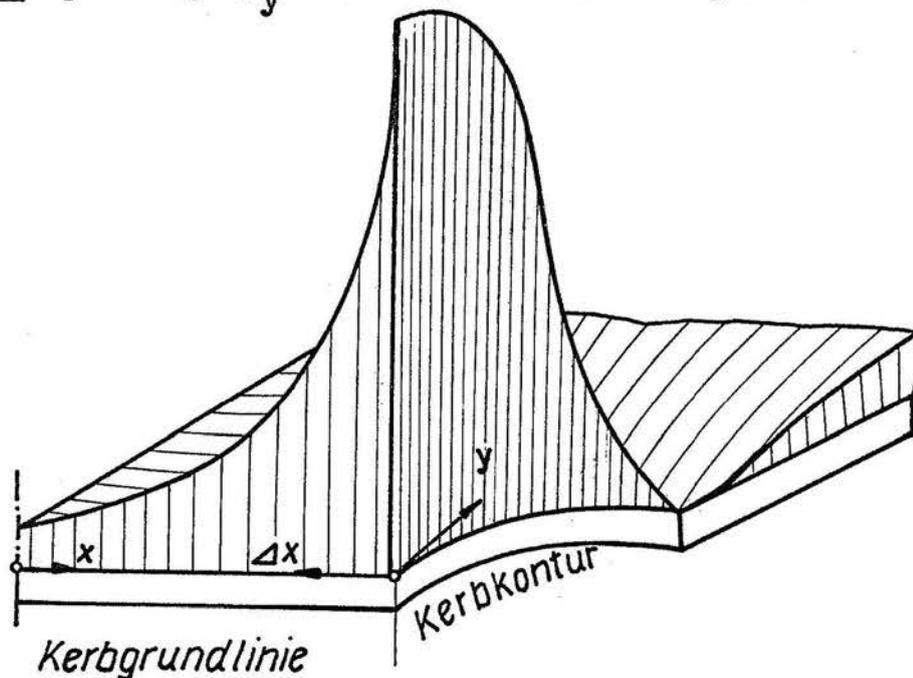
Für die Vernetzungen mit den rechnerisch hergestellten Kerbkonturen erfolgte eine zweite Berechnung.

Die mit den korrigierten Kerbkonturen erzielten Ergebnisse seien als Formzahl α_K bezeichnet.

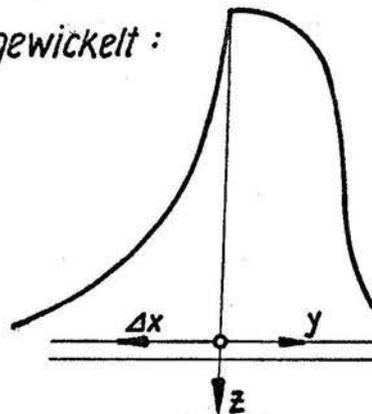
Die Korrektur der Kerbkontur beschränkte sich auf die Ausbesserung der Koordinaten von nur jeweils 5 Punkten, beginnend vom Kerbgrund her. Die Gegenüberstellung aller verwendeten Kerbkonturen befindet sich im Anhang A 13. Daß diese wenigen Punkte einen dominierenden Einfluß auf die Formzahl haben, soll folgende Darstellung verdeutlichen:

Zeichnet man die Ergebnisse der Spannung σ_y in Belastungsrichtung über ein Viertel der Flachprobe auf, so erhält man die im Bild 16 dargestellte qualitative Spannungsverteilung:

Bild 16: Spannung σ_y am Beispiel der Flachprobe



oder abgewickelt :



Es ist ersichtlich, daß die Spannung an der Kerbkontur in Nähe des Kerbgrundes fast ebenso groß ist wie $\sigma_{y_{\max}}$, denn wegen der Symmetriebedingung gilt für die Kerbgrundlinie:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (59)$$

In gleichem Maße wie für den Kerbgrund ist für diesen Bereich der Spannungsgradient $\frac{\partial \sigma_y}{\partial x}$ ausgeprägt.

Daraus läßt sich die weitreichende Auswirkung von Veränderungen der Kerbkontur - bei DUDA /63/ als "ein- oder aus-springende Ecken" bezeichnet - auf die Formzahl erklären.

Besonders deutlich zeigt sich dieser Effekt beim Vergleich der Flachprobenergebnisse F 8 zu F 8*, Anhang A 28.

Interessant ist in diesem Zusammenhang, daß sowohl das Element DV 2 als auch DV 1 gleichermaßen empfindlich gegenüber einspringenden Ecken reagieren.

Ein Vergleich der Ergebnisse α_K für alle Flachproben mit alten und neuen NEUBER-Formeln zeigt Anhang A 29.

5.4.6.2. Ergebnisse der Rundproben

Die Rundproben RP1 und RP2 ergaben mit dem linearen Verschiebungsansatz trotz feiner und stetiger Vernetzung im Vergleich zu den numerischen Interpolationsformeln /46/ deutlich höhere Werte. Deshalb erfolgte die Behandlung der folgenden Rundproben RP2A, RP3A und RK, RL, RM nur mit dem quadratischen Verschiebungsansatz.

Ebenso wie bei der Flachprobe wurden die Kerbkonturen rechnerisch korrigiert und Formzahlen α_K^* und α_K gegenübergestellt (Anhang A 40 bis A 44).

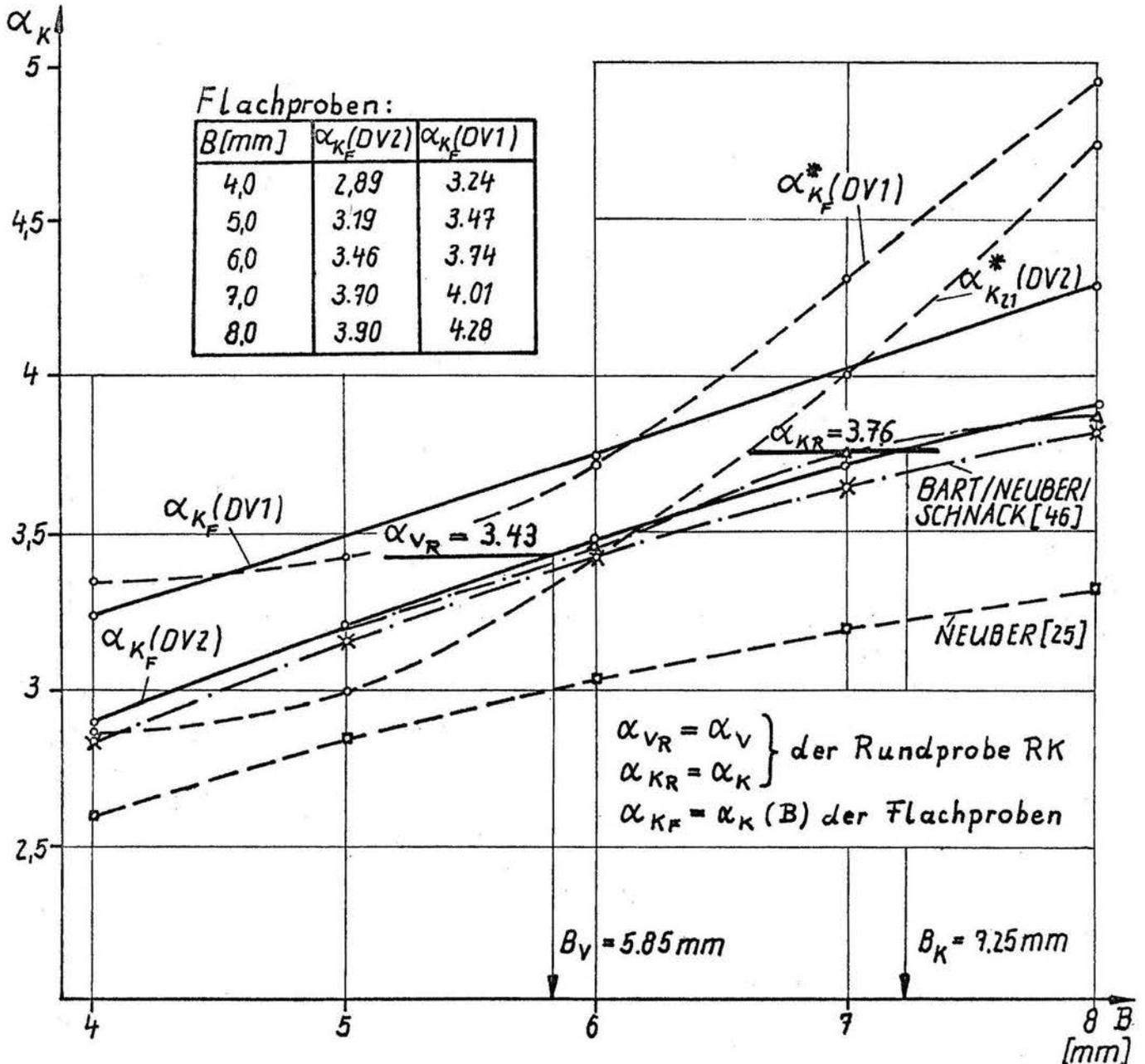
Der Flankenwinkel ist bei den betrachteten Rundproben von untergeordneter Bedeutung für die Formzahl, das zeigen die Ergebnisse im Anhang A 41 und A 43.

Die im Anhang A 7 dargestellte Rundprobe wurde mit der Vernetzung RK berechnet.

5.4.6.3. Schlußfolgerungen

Das Ergebnis aller durchgeführten Berechnungen zeigt Bild 17:

Bild 17: Gesamtergebnis der Formzahlberechnungen



Man erkennt, daß die Ergebnisse von DV 1 etwa 10 % größer sind als die Ergebnisse von DV 2, das gilt sowohl für α_K^* als auch für α_K . Dieser Effekt erscheint wegen der größeren Anzahl der Freiheitsgrade von DV 2 nicht plausibel, tatsächlich aber

lassen sich, wie bereits im Abschnitt 5.3.4. erläutert, aus der Gesamtenergiebilanz keine Rückschlüsse auf konkrete Tendenzen an Spannungskonzentrationsstellen ziehen.

In den Diagrammen zum Formzahlverlauf wurden für die Elemente DV 2 die von den EDV-Programmen ausgegebenen Spannungen an den Knotenpunkten im Kerbgrund als Formzahl α_{K21} für die Flachprobe (der Kerbgrund ist der Punkt 21) und α_{K19} für die Rundprobe (hier ist Punkt 19 der Kerbgrund) angegeben. Diese Spannungen an den Knotenpunkten werden aus den am jeweiligen Punkt angrenzenden, unterschiedlichen Elementspannungen arithmetisch gemittelt.

Bezüglich des Elementes DV 2 kann folgendes wichtiges Ergebnis formuliert werden:

Wenn die durch die lineare Dehnungsverteilung errechenbare Spannung im Kerbgrund mit der grafisch extrapolierten Spannung der Elementschwerpunkte identisch ist, so liegt eine genaue Formzahlberechnung vor. Voraussetzung dafür ist eine sorgfältige Nachbildung der Kerbkontur sowie eine feine Vernetzung im Kerbgrundbereich, die stetig ins Innere der Probe verläuft.

Am deutlichsten wird diese Aussage beim Vergleich der Flachproben F 8 zu F 8*, Anhang A 28, und F 5 zu F 5*, Anhang A 22. Weiterhin wurde überprüft, inwieweit eine Kräftebilanz /88/ in der Kerbgrundlinie Aussagen zur Genauigkeit der erzielten Lösung liefert.

Im Anhang A 45 ist die Kräftebilanz am Beispiel der Flachproben F 8 und F 8* dargestellt. Die schraffierte Fläche stellt, multipliziert mit der Dicke h, die Gesamtkraft in der Kerbgrundlinie dar. Der Vergleich von α_K zu α_K^* ergibt einen Fehler von 21.9 %. Demgegenüber täuscht die Kräftebilanz für F 8* einen Fehler von nur 0.15 % vor, bei F 8 erhält man 0.29 %. Scheinbar ist F 8* sogar noch besser als die Probe F 8 vernetzt. Die Ursache liegt eindeutig in der hohen Spannungskonzentration begründet, weil auch große Veränderungen der

Formzahlen auf die Gesamtkraft wenig Einfluß haben.

Die Vergleichsformzahl α_{VR} der Rundprobe ist etwa 10 % niedriger als ihre Formzahl α_{KR} . Bei der Flachprobe hingegen sind wegen des ESZ und der erfüllten Bedingung (58) alle Vergleichsformzahlen einander identisch.

Damit ergeben sich nach Bild 17 zwei Flachproben als Vergleichsproben:

Für α_K : Flachprobe mit halbem Bohrungsabstand $B_K = 7.25$ mm
und für α_V : Flachprobe mit halbem Bohrungsabstand $B_V = 5.85$ mm

Das bezogene Spannungsgefälle χ^* wurde aus den grafischen Formzahlverläufen im Anhang A 20, A 22, A 24, A 26, A 28 und A 44 entnommen und in der Tabelle 1 zusammengestellt:

Tabelle 1: Spannungsgefälle χ^* für Formzahlverläufe von α_K

Probe	F 4	F 5	F 6	F 7	F 8	RK
χ^*	2.22	2.09	1.87	2.22	2.99	8.3
nach /89/	2.0					10

Das bezogene Spannungsgefälle ist nicht zwischen Rund- und Flachproben vergleichbar. Eine ähnliche Tendenz ergibt sich auch für die Formzahlverläufe von α_D , α_r und α_V . Mit der von SIEBEL /89/ vorgeschlagenen Näherungsformel

$$\chi^* \approx \frac{z}{r} \quad (60)$$

besteht eine gute Übereinstimmung.

Erst nach Abschluß sämtlicher Formzahlberechnungen konnten die einzelnen Probenformen festgelegt werden. Entsprechend der chronologischen Reihenfolge der Themenbearbeitung folgt jetzt ein Abschnitt über die Probenherstellung.

6. Herstellung der Proben

6.1. Werkstoffauswahl

Wegen der großen Verbreitung wurde für die Rund- und die Flachproben der Baustahl St 38 b - 2 nach TGL 7960 /90/ ausgewählt. Die chemische Zusammensetzung zeigt Anhang A 47.

6.2. Rundprobe

Als Halbzeug diente Rundmaterial aus einer Charge von 26 mm Durchmesser. Hieraus wurden zunächst Rundproben mit einer halbkreisförmigen Kerbe hergestellt. Nach der Vorbearbeitung und dem Normalisieren folgte das Feindreihen der Kerboberfläche. In diese vorgefertigte Rundprobe wurde eine tiefere Kerbe mit Hilfe eines einzahnigen Gewindestrehlers mit einem Flankenwinkel $\omega = 60^\circ$ eingestochen. Durch das nachträgliche Einstechen konnte eine zu große Abnutzung des Strehlers vermieden werden sowie Verfestigungen im Kerbgrund und Ungenauigkeiten durch zu große Biegebelastungen während der Bearbeitung weitestgehend ausgeschlossen werden. Das Ausmessen der Kerbradien r erfolgte mit dem Meßprojektor "MP 600" (Hersteller VEB Carl Zeiss Jena) unter Zuhilfenahme selbstgefertigter Radienschablonen, Maßstab 50 : 1.

Die Kerbgrundradien B wurden mit Hilfe des "Großen Werkzeugmikroskopes" mit Digitalanzeige (Hersteller VEB Carl Zeiss Jena) vermessen.

Die Werkstatt lieferte insgesamt 128 Rundproben, davon konnten 79 mit dem Kerbradius von 0.2 mm als brauchbar mit dem Meßprojektor aussortiert werden. Die restlichen Proben hatten infolge Bearbeitungstoleranzen etwas größere Radien (bis maximal 0.26 mm).

Die Konstruktionszeichnung befindet sich im Anhang A 7, ein Foto der gefertigten Probe im Anhang A 47.

6.3. Flachproben

Als Halbzeug dienten Blechtafeln mit den Abmessungen 5 x 1000 x 1500 mm. Von den Blechen wurden 100 mm breite Randstreifen mit der Schlagschere abgeschnitten. Anschließend folgte das Herausschneiden der Probenrohlinge. Nach dem Normalglühen war das Abschleifen der Oxidschicht der nächste Bearbeitungsschritt, dann Schleifen auf Maß mit der Dicke $h = 4.0 \pm 0.1$ mm und Fräsen der Probenlängsseiten, so daß sich die Probenbreite von 30 mm ergab. Die Kerblöcher wurden mit Hilfe einer Bohrlehre gebohrt, dann gesenkt und mit 2 mm-Maschinenreibahlen aufgerieben. Die Schlitze wurden von Hand mit einer Metallsäge eingebracht, um eine hohe Maßgenauigkeit zu erzielen.

Das Vermessen der Kerbradien und der Bohrungsabstände erfolgte wieder wie bei den Rundproben mit dem Meßprojektor "MP 600" und mit dem "Großen Werkzeugmikroskop".

Aus Bild 17 im Abschnitt 5.4.6.3. ergaben sich Vergleichsproben mit den halben Bohrungsabständen $B_K = 7.25$ mm und $B_V = 5.85$ mm. Diese Werte sind bei der Herstellung der Bohrlehre aus fertigungstechnischen Gründen nicht exakt zu erreichen. Nach Anfertigung der Bohrlehre ergaben sich folgende Werte für B: 7.60 mm und 6.00 mm.

Gemäß der Versuchsstrategie im Abschnitt 4.1. kam eine dritte Flachprobenart mit $B = 3.90$ mm zur Anwendung.

Diese drei Flachproben dienten als Grundlage bei den Schwingfestigkeitsversuchen und wurden als Flachproben F 8', F 6' und F 4' in Anlehnung an die berechneten Flachproben bezeichnet:

F 8': $R = 7.60$ mm mit $\alpha_K = 3.83$

F 6': $R = 6.00$ mm mit $\alpha_K = 3.46$

F 4': $R = 3.90$ mm mit $\alpha_K = 2.84$

Die angegebenen Formzahlen sind dem Bild 17 entnommen. Die Konstruktionszeichnung der verwendeten Flachproben befindet sich im Anhang A 6, ein Foto der drei Proben F 4', F 6' und F 8' im Anhang A 47.

6.4. Fehler durch Fertigungstoleranzen

Im Anhang A 5 sind für die Rundproben die Einflüsse der Bohrungsabstände und der Kerbradien auf die Formzahl dargestellt. Es handelt sich hierbei um Ergebnisse der Interpolationsformel von NEUBER /46/, speziell berechnet mit dem Programm "ALPHA/K". Der Kerbradius hat auf die Formzahl einen wesentlich größeren Einfluß als die Bohrungsabstände. Durch die Auswahl von brauchbaren Rund- und Flachproben bezüglich der Kerbradien wurden derartige Fertigungstoleranzen ausgeschlossen. Fertigungstoleranzen der Kerbgrundradien B bei den Rundproben sowie Toleranzen der Dicke h und der Bohrungsabstände bei den Flachproben konnten durch eine entsprechende Anpassung der Nennspannung durch Vorgabe einer bestimmten Kraft während der Schwingfestigkeitsversuche kompensiert werden.

7. Versuchsdurchführung

Es wurden insgesamt 304 Schwingfestigkeitsversuche mit einem Umfang von etwa 300 Mill. Lastwechseln durchgeführt. Zur statistischen Absicherung der Ergebnisse dienten für die Wöhlerlinien 9 Proben je Spannungshorizont, für die Lebensdauerlinien 10 Proben pro Horizont. Die Ermittlung der Dauerfestigkeiten erfolgte jeweils aus 20 Versuchen.

7.1. Prüfmaschine und Frequenz

Sämtliche Schwingfestigkeitsversuche wurden auf einer servo-hydraulischen Prüfmaschine des Systems Hydropuls durchgeführt. Es handelt sich dabei um ein prozeßrechnergesteuertes Prüfsystem mit hydraulischem Antrieb, elektronischer Sollwertvorgabe, elektronischer Messung der Regelgröße sowie Prozeßregelung über einen Rechner "SPC 16/60" /91/ mit 32 K Byte Kernspeicherkapazität. Zur Belastung diente ein Längszylinder der Bauart PL 40 mit hydrostatischer Lagerung der Kolbenstange und einer maximal möglichen Last von 40 kN. Im Anhang A 46 sind Fotos enthalten von der Prüfmaschine, der Rundprobe und einer Flachprobe mit den entsprechenden Einspannvorrichtungen.

Die Frequenz war bei allen Versuchen einheitlich 50 Hz. Eine Erwärmung der Proben während der Versuche konnte nicht festgestellt werden, lediglich bei den Flachproben erhöhte sich etwas die Temperatur bei Auftreten eines Risses. Die Temperaturerhöhung betraf im wesentlichen höhere Spannungsamplituden bei $\sigma_n > 150 \text{ N/mm}^2$, bei denen der Riß erst nach 90 % der Lebensdauer entstand.

Das Grundprogramm des Prozeßrechners erlaubt die Vorgabe einer "Steilheit". Damit wird die Belastungsgeschwindigkeit den Möglichkeiten des Regelsystems angepaßt, wenn hohe Frequenzen mit hohen Belastungen gekoppelt auftreten. Die Steilheit wurde sowohl bei Einstufen- als auch bei Randomversuchen so gewählt,

daß in keinem Falle - auch nicht bei Auftreten einer extremen Spannungsspitze im Randomversuch - die Frequenz durch die Steilheitsbegrenzung zeitweilig herabgesetzt werden mußte. Daß trotzdem die vorgegebene sinusförmige Belastung nachgefahren werden konnte, wurde durch die automatische Toleranzüberwachung ständig gewährleistet und durch vorheriges Abgleichen der P, I und D-Regler gesichert.

7.2. Statische Versuche

Zur Durchführung der statischen Versuche wurde die Anweisung "ZEIT-AMPLITUDE" des Prozeßrechners /91/ genutzt, mit der kraftgesteuert unter Vorgabe von Rechner-Taktzeiten festgelegte Belastungen auf die Probe aufgebracht werden können. Die Untersuchungen erfolgten an 7 ungekerbten und 9 gekerbten Rundproben mit Aufnahme von Kraft-Weg-Diagrammen. Aus diesen Diagrammen können die Werte für die Streckgrenze und die Bruchfestigkeit entnommen werden. Die empirischen Erwartungswerte sind im Anhang A 48 enthalten, ebenso zwei repräsentative F- Δ l-Diagramme. Die Streckgrenze für die ungekerbte Probe liegt deutlich höher als die in der TGL 7960 /90/ angegebene Streckgrenze. Bei der gekerbten Probe steigen diese Werte weiter an.

7.3. Wöhlerlinie

Für alle Einstufenversuche gilt das Spannungsverhältnis $R = -1$. Die Zeitfestigkeit wurde auf vier Horizonten belegt:

$$\sigma_n = 230, 200, 150 \text{ und } 125 \text{ N/mm}^2$$

Die Versuchsergebnisse im Anhang A 52, A 56, A 60 und A 64 zeigen eine gute Annäherung an die logarithmische Normalverteilung. Die statistische Auswertung je Spannungshorizont erfolgte über Punktschätzungen nach der Momentenmethode /92/, /93/. Für den empirischen Erwartungswert und die empirische Streuung erhält man bei der logarithmischen Normalverteilung:

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_i^n \ln x_i \quad (61)$$

$$s_z^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i^n (\bar{z} - \ln x_i)^2 \quad (62)$$

Die Versuchsergebnisse wurden im Anhang A grafisch nach der verteilungsfreien Schätzformel von WEIBULL aufgetragen.

Zur Bestimmung der Dauerfestigkeit diente das Treppenstufenverfahren /94/, /95/ bei konstanter Grenzlastwechselzahl $N_G = 2 \cdot 10^6$ LW, wobei die Ereignishäufigkeit der Brüche zugrunde gelegt wurde.

Als Treppenstufengröße war der Wert $\Delta G = 5 \text{ N/mm}^2$ sowohl bei der Rundprobe als auch bei den Flachproben ausreichend klein. Die Kontrolle mit folgender Bedingung aus /95/

$$\frac{\sum x_i \sum i x_i^2 - (\sum i x_i)^2}{(\sum x_i)^2} > 0.3 \quad (63)$$

ergab bei allen Proben ein positives Ergebnis.

Die ermittelten Wöhlerlinien sind im doppeltlogarithmischen Koordinatensystem sehr gut durch Geraden darstellbar. Deshalb kam zur analytischen Formulierung der Wöhlerlinien die Geradengleichung zur Anwendung:

$$N = K \cdot \sigma_n^{-f} \quad (64)$$

Zur Abschätzung des Exponenten f wurde auf eine Ausgleichsrechnung verzichtet und statt dessen grafisch eine Ausgleichsgerade bestimmt.

7.4. Randomversuche

7.4.1. Erzeugung der regellosen Belastung

Zur Herstellung der Randoelastungsfolge wurde die Prozeßrechner-Anweisung "RANDOM-AMPLITUDE" /91/ für den Rechner SPC-16/60 genutzt. Diese Anweisung ist Bestandteil des Prozeßrechner-Grundprogrammes und erzeugt digital eine regellose Belastungsfolge mit dem Regellosigkeitsfaktor $i = 1.0$.

Nach JACOBY /96/ unterscheidet man bei Randomversuchen drei Gruppen:

- Betriebslasten-Versuche
- randomisierte Programmversuche
- Random-Prozeßversuche

Die verwendete Belastungsfolge mit $i = 1.0$ ist eine Randomfolge von Schwingspielen und ordnet sich in die Gruppe der randomisierten Programmversuche ein.

Die Lebensdauer wurde bei zwei Spannungshorizonten $\hat{\sigma}_n$ untersucht:

$$\hat{\sigma}_{n_1} = 230 \text{ N/mm}^2 \text{ und } \hat{\sigma}_{n_2} = 180 \text{ N/mm}^2$$

Mit diesen Werten entsteht ein Verhältnis der Spannungshorizonte von $\hat{\sigma}_{n_1} : \hat{\sigma}_{n_2} = 1.28 : 1$. Als Mindestmaß wurde in /44/ für dieses Verhältnis $1.20 : 1$ angegeben, um eine aussagefähige Lebensdauerlinie zu erhalten.

Für das verwendete Programm ist die Vorgabe einer Kollektivtabelle erforderlich. Aus dieser Tabelle werden dann vom Rechner unter Benutzung von 32-bit-Zufallszahlen die entsprechenden Amplituden entnommen. Dabei kann vom Anwender ein bestimmter Startwert vorgegeben werden. Für alle Versuche wurde ein gleicher Startwert beibehalten. Da ein Digitalrechner immer eine deterministische Abarbeitung der Zufallszahlen einhält, ist damit die völlig identische Realisierung aller Randomversuche gewährleistet. Dieses Vorgehen ist bei den durchgeführten Untersuchungen von besonderer Bedeutung, weil praktisch damit ein "Nachfahrversuch" für den Vergleich von Rund- und Flachproben vorliegt.

7.4.2. Festlegung der Kollektivform

In der Praxis treten sehr oft Kollektive mit Gauß'scher Normalverteilung der Spannungs-Summenhäufigkeiten auf /97/, /98/, /99/. Weiterhin lassen sich anders geartete Kollektive durch die Überlagerung mehrerer Kollektive darstellen. Die Analyse derartiger Mischkollektive ist mit Hilfe der Normalverteilung sehr gut durchführbar.

Es erscheint deshalb sinnvoll, die Gauß'sche Normalverteilung für die Kollektivform zu benutzen.

Die Häufigkeitssumme eines Kollektivs ergibt sich aus der relativen Häufigkeitssumme $\Psi(x_1)$. Diese erhält man aus der Integration der Gauß'schen Dichtefunktion /100/:

$$\Psi(x_1) = \int_{x_1}^{\infty} f(x) dx \quad (65)$$

$$\Psi(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s} \int_{x_1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{s}\right)^2} dx \quad (66)$$

Durch die Substitution

$$k = \frac{x-\mu}{s} \quad (67)$$

und die Einführung von

$$dx = s \cdot dk \quad (68)$$

entsteht die normierte Verteilungsfunktion $\Psi(k_1)$:

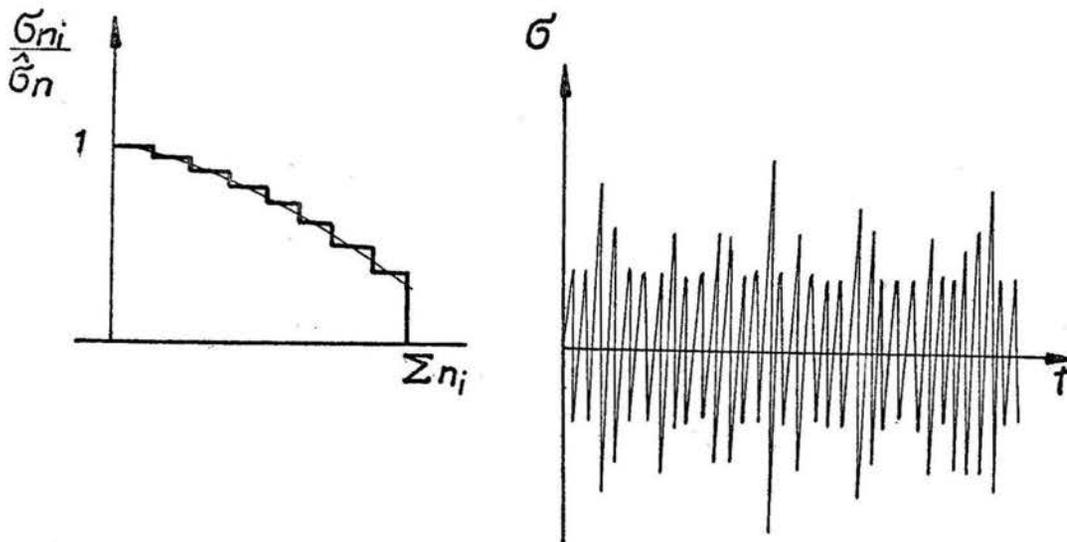
$$\Psi(k_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} k^2} dk \quad (69)$$

Diese Verteilungsfunktion entspricht den relativen Summenhäufigkeiten $\sum n_j$ des normalverteilten Kollektivs.

Zur Festlegung der einzelnen Spannungshorizonte für die geforderte Kollektivtabelle wurde ein normalverteiltes, symmetrisches Kollektiv verwendet, das in acht Spannungshorizonte gestuft ist. Es wurde ein Amplitudenkollektiv nach /44/ mit dem Kollektivbeiwert $p = 0.25$ benutzt. Durch die Stufung ist der

tatsächliche Kollektivbeiwert $P_t = 0.344$. Damit werden kleine Spannungsamplituden nicht berücksichtigt und die Spanne zwischen Größt- und Kleinstamplitude ist genügend groß, um noch deutliche Reihenfolgeeinflüsse erwarten zu lassen. Im Bild 18 ist das Amplitudenkollektiv und die durch das Prozeßrechnerprogramm erzeugte Belastungsfolge schematisch dargestellt:

Bild 18: Amplitudenkollektiv und Belastungsfolge $\sigma(t)$



Genauere Angaben zum Kollektiv enthält Anhang A 49.

Das Kleinstkollektiv hat einen Häufigkeitsumfang von $H_0 = 5 \cdot 10^5$ Lastwechseln. Die für die Anweisung "RANDOM-AMPLITUDE" erforderliche Kollektivtabelle kann aber nur maximal 65000 Extremwerte enthalten. Deshalb wurde ein Anwenderprogramm für den Prozeßrechner geschrieben, in dem der Häufigkeitsumfang $H_B = 10^6$ Lastwechsel, siehe Anhang A 49, durch 31 Random-Teilfolgen abgearbeitet wird, wobei die Maximalamplitude $\hat{\sigma}_n$ bei etwa $5 \cdot 10^5$ Lastwechseln auftritt.

Die statistische Auswertung der Versuchsergebnisse erfolgte wie für die Einstufenversuche mit der Momentenmethode.

8. Diskussion der Versuchsergebnisse

Die Ergebnisse der Schwingfestigkeitsversuche sind im Anhang A 50 bis A 66 enthalten, die Gegenüberstellung aller Ergebnisse für 50 % Bruchwahrscheinlichkeit befindet sich im Anhang A 67. Die ermittelten Streuspannen

$$T = 1 : \frac{N_B (P_B=90\%)}{N_B (P_B=10\%)} \quad (70)$$

zeigt Tabelle 2:

Tabelle 2: Reziprokwerte \hat{T} der Streuspannen und Neigungsexponenten der Wöhler- und Lebensdauerlinien für P_B (50 %)

Horizonte bzw. f	Proben Rundprobe	Flachproben		
		F 4'	F 6'	F 8'
230	1.89	1.50	2.01	2.13
200	1.87	1.59	1.86	1.77
150	1.99	1.84	1.83	1.55
125	2.15	2.34	1.72	1.55
G_D	1.22	1.17	1.13	1.09
Hochgesetzte Durchläufer	2.82	2.79	2.54	1.77
$\hat{G}_{n_1} = 230$	2.27	2.58	1.91	1.98
$\hat{G}_{n_2} = 180$	2.94	3.82	2.65	2.71
f	5.68	6.44	6.00	6.23
\bar{f}	5.19	8.82	6.71	5.35

(Maßeinheit der Spannungshorizonte: N/mm^2)

Die über das Treppenstufenverfahren ermittelten Streuspannen der Dauerfestigkeiten sind wegen Gültigkeit der Normalverteilung für die konstante Grenzlastwechselzahl kleiner als die Streuspannen der Zeitfestigkeits-Spannungshorizonte.

Die hochgesetzten Durchläufer, die die Grenzlastwechselzahl $N_G = 2 \cdot 10^6$ Lastwechsel ohne Bruch passiert hatten, haben eine etwas größere Streuspanne als die nicht vorbelasteten Proben. Es ist jeweils nur ein geringer Trainiereffekt für 50 % Bruchwahrscheinlichkeit festzustellen, der sich bei der Rundprobe etwas mehr als bei den Flachproben bemerkbar macht.

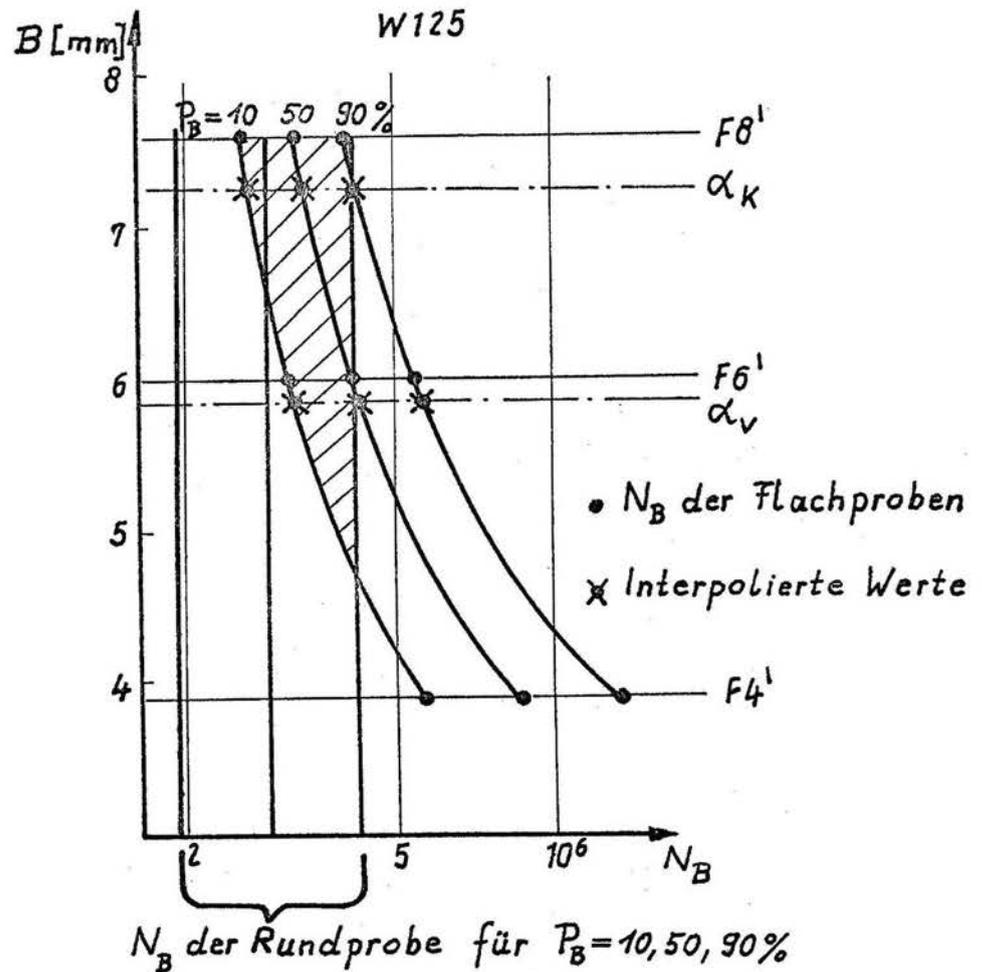
Die Streuspannen der Einstufenversuche sind nicht einheitlich von der Beanspruchungshöhe abhängig. Dagegen ist eine Abhängigkeit bei den Randomversuchen zu verzeichnen, d. h. für den niedrigen Lebensdauerhorizont \hat{G}_{n_2} ist die Streuung größer. Insgesamt sind die Streuspannen bei Einstufen- und Randombelastungen mit den von SCHÜTZ /35/ und HANEL /101/ angegebenen Werten vergleichbar, wobei ähnliche Versuche an gekerbten Aluminium- bzw. Stahlproben zugrunde liegen.

Der von ARGYRIS, AICHER und KIERNER /43/ diskutierte Einfluß der asymmetrischen Lasteinleitung auf die Lebensdauer bei außengekerbten Flachproben, siehe Abschnitt 3.3., konnte nicht in dem Maße festgestellt werden. Im Anhang A 54, A 58 und A 62 sind diejenigen Flachproben mit "x" gekennzeichnet, die eine asymmetrische Rißfläche aufwiesen. Diese wenigen Proben zeigen keine signifikanten Unterschiede zu den anderen Flachproben, deshalb wurden sie auch mit zur Auswertung herangezogen.

Bei der Herstellung der Bohrlehre für die Flachproben konnten nicht genau die im Abschnitt 5.4.6.3. ermittelten Bohrungsabstände B_K und B_V eingehalten werden.

Mit Hilfe der Schwingfestigkeitsergebnisse der Flachprobe F 4' lassen sich exakt Bruchlastwechselzahlen zu den Formzahlen α_K und α_V angeben. Die Vorgehensweise dazu wird mit Bild 19 am Beispiel eines Spannungshorizontes erläutert:

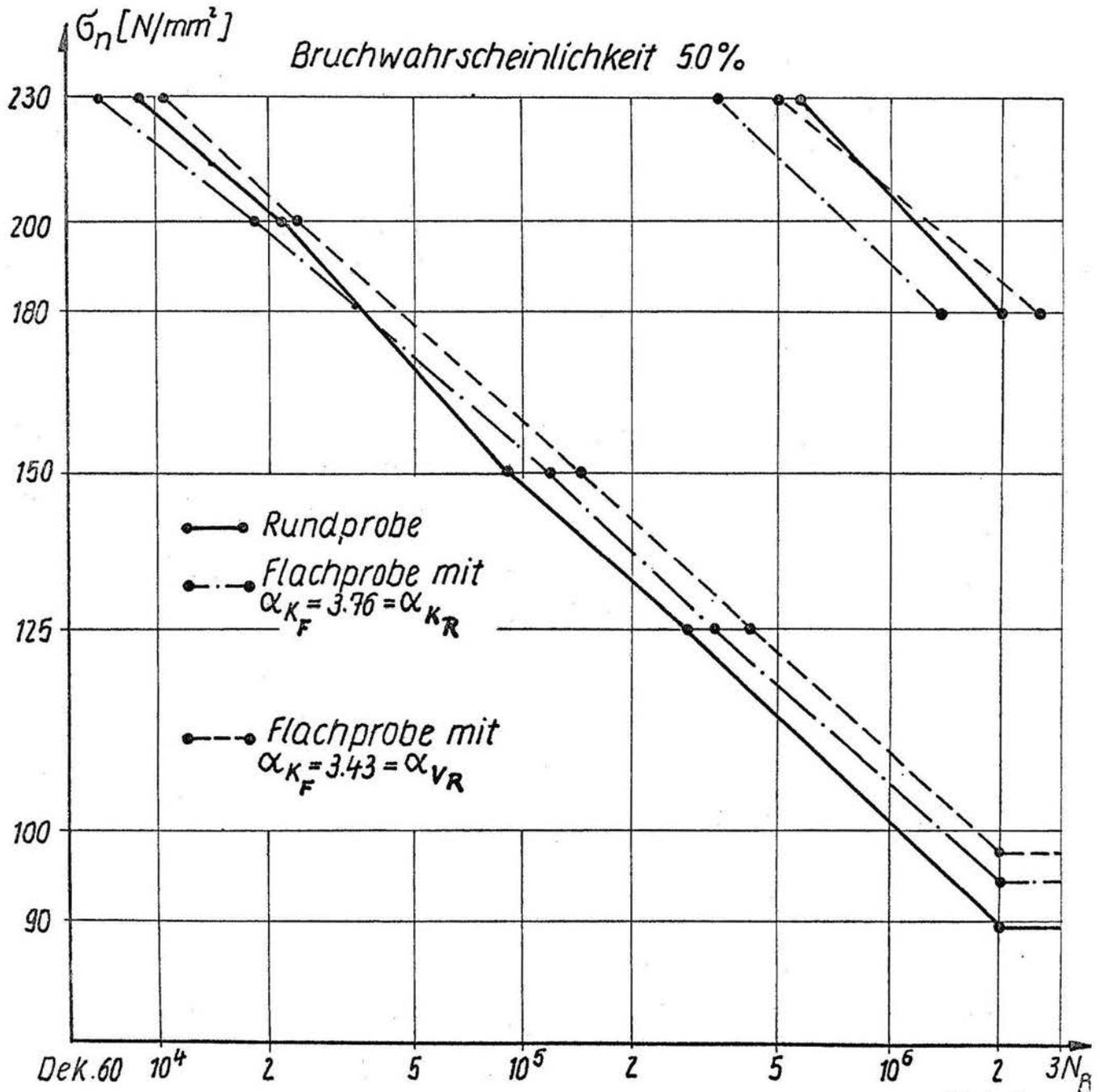
Bild 19: Vergleich der Schwingfestigkeiten für $\sigma_n = 125 \text{ N/mm}^2$



Die dick ausgezogenen senkrechten Linien charakterisieren die Bruchlastwechsel der Rundprobe für 10, 50 und 90 % Bruchwahrscheinlichkeit. Auf der Ordinate sind die halben Bohrungsabstände B der Flachproben aufgetragen. Auf den entsprechenden waagerechten Linien wurden die Bruchlastwechsel für die Flachproben $F 4'$, $F 6'$ und $F 8'$ eingezeichnet, ebenfalls wieder für 10, 50 und 90 % Bruchwahrscheinlichkeit. Die im Abschnitt 4.1. festgelegte Versuchsstrategie ermöglicht jetzt die Interpolation der 10, 50 und 90 %-Flachprobenwerte in Form von Parabeln. Diese Interpolation kann unter der Voraussetzung ausgeführt werden, daß sich bei stetiger Veränderung der Bohrungsabstände auch die zugehörigen Bruchlastwechselzahlen stetig ändern. Dadurch ist es möglich, den Formzahlen α_K und α_V der Rundprobe exakt Bruchlastwechselzahlen der Flachproben mit genau gleichen Formzahlen zuzuordnen. Im Bild 19 sind diese Werte mit "x" gekennzeichnet.

Im Anhang A 68 und A 69 befindet sich die grafische Auswertung für alle Wöhlerlinien- und Random-Spannungshorizonte nach dem erläuterten Prinzip. Die schraffierten Flächen kennzeichnen die Äquivalenz der Flachproben mit den Rundprobenergebnissen. Die endgültig interpolierten Ergebnisse für 50 % Bruchwahrscheinlichkeit zeigt Bild 20. Dabei werden nur noch Wöhler- und Lebensdauerlinien der Flachproben für α_K und α_V der Rundprobe gegenübergestellt:

Bild 20: Interpolierte Schwingfestigkeitswerte im Vergleich zur Rundprobe



Die interpolierten Schwingfestigkeitswerte weichen nicht sehr viel von den Versuchsergebnissen der Flachproben F 8' und F 6' ab.

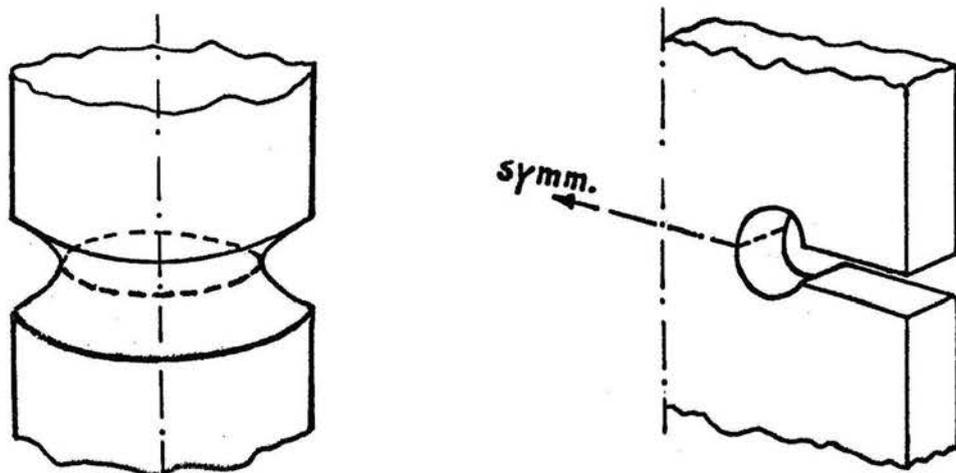
Beide Flachproben-Wöhlerlinien im Bild 20 sind in doppeltlogarithmischer Darstellung fast genau Geraden. Die Rundproben-Wöhlerlinie dagegen zeigt bei Nennspannungen zwischen 150 und 200 N/mm² einen steileren Anstieg, der dann wieder bis 230 N/mm² etwa den gleichen Wert wie im niedrigen Amplitudenbereich annimmt.

Vergleicht man die Rundproben-Wöhlerlinie mit der α_K -Flachproben-Wöhlerlinie, so stimmen die Verhältnisse mit den von AICHER und KIERNER /40/ ermittelten Ergebnisse für ähnliche Versuche überein, siehe Abschnitt 3.3. und Anhang A 2.

Auch bei den vorliegenden Probestäben ist die von AICHER und KIERNER gegebene Interpretation zu den Unterschieden beider Wöhlerlinien plausibel, nach der die Rundprobe bei niedrigen Spannungshorizonten wegen des größeren Kerbgrundumfanges eine größere Wahrscheinlichkeit für Anrisse als die Flachprobe aufweist. Das wiederum führt zur kleineren Lebensdauer der Rundprobe.

Konkret ergibt sich für die Rundprobe ein maximal beanspruchter Kerbgrundumfang von 15,7 mm gegenüber der Flachprobe mit 8 mm, siehe Bild 21.

Bild 21: Maximal beanspruchter Kerbgrundumfang: "----"



Bei höheren Amplituden setzt der räumliche Spannungszustand die Vergleichsspannung der Rundprobe herab, so daß mehr Lastwechsel von der Rundprobe ertragen werden als von der Flachprobe mit $\alpha_K = \alpha_{KR}$.

Diese Überlegung wird mit den Versuchsergebnissen der Flachprobe für $\alpha_K = \alpha_{VR}$ im Bild 20 bestätigt. Die Rundproben-Wöhlerlinie schmiegt sich zwischen Nennspannungen von 200 bis 230 N/mm² den Flachproben-Bruchlastwechseln an, bleibt aber trotzdem noch unterhalb der Lebensdauer für diese Flachprobe.

Hier könnte weiterhin die größere Anrißwahrscheinlichkeit der Rundprobe zur Wirkung kommen.

Ansonsten weist die gute Annäherung beider Wöhlerlinien gerade im hohen Amplitudenbereich darauf hin, daß die im Abschnitt 5.4.5. getroffenen Idealisierungen bei der Vorgabe der verschiedenen Spannungszustände richtig waren.

Das wichtigste Ergebnis aller Versuche besteht in der Gegenüberstellung der verschiedenen Lebensdauerlinien für die Randbelastung, siehe Bild 20.

Die Rundprobe erträgt deutlich mehr Lastwechsel unter stochastischer Beanspruchung als die Flachprobe mit $\alpha_K = \alpha_{KR}$, das gilt für beide Spannungshorizonte $\hat{\sigma}_{n1}$ und $\hat{\sigma}_{n2}$. Dagegen besteht eine sehr gute Übereinstimmung der Lebensdauerlinien der Rundprobe und der Flachprobe mit $\alpha_K = \alpha_{VR}$. Die Gestaltänderungsenergiehypothese für die Vergleichsformel α_V ist zur Übertragung von Schwingfestigkeitswerten beim verwendeten Werkstoff St 38 sehr gut geeignet.

Obwohl die Einstufen-Bruchlastwechsel der Rundprobe durchgängig kleiner sind als die der Flachprobe mit $\alpha_K = \alpha_{VR}$, zeigt die Rundprobe für den höchsten Spannungshorizont unter stochastischer Belastung die größte Lebensdauer.

Hier könnten wegen des größeren Spannungsgefälles der Rundprobe in Verbindung mit Reihenfolgeeffekten bei regelloser Belastung andere Plastifizierungseffekte und daraus resultierende Schädigung wirksam werden.

Um den Plastifizierungsgrad im Kerbgrund einschätzen zu können, werden die elastischen Maximalspannungen im Kerbgrund für den höchsten Spannungshorizont $\sigma_{n_{\max}} = 230 \text{ N/mm}^2$ den statischen Werten für die Streckgrenze gegenübergestellt:

$$\sigma_{H_{\max}} = \alpha_{KR} \cdot \sigma_{n_{\max}} = 864.8 \text{ N/mm}^2$$

Verwendet man den in der TGL 7960 angegebenen Wert für die Streckgrenze, siehe Anhang A 48, so ergibt sich folgende theoretische Streckgrenzenüberhöhung:

$$\frac{\sigma_{H_{\max}}}{\sigma_S} = \underline{3.83}$$

Demnach müßte also eine starke Plastifizierung in der Umgebung des Kerbgrundes für den höchsten Spannungshorizont vorliegen.

Die Verwendung der Hookeschen Maximalspannung ist allerdings unzweckmäßig, weil möglichst Vergleichsspannungen mit Materialkennwerten verglichen werden müssen, um alle wirksamen Spannungskomponenten zu berücksichtigen. Für die Gestaltänderungsenergiehypothese gilt:

$$\sigma_{V_{\max}} = \alpha_{VR} \cdot \sigma_{n_{\max}} = 788.9 \text{ N/mm}^2$$

Damit entsteht eine theoretische Streckgrenzenüberhöhung von

$$\frac{\sigma_{V_{\max}}}{\sigma_S} = \underline{3.50}$$

Zu beachten ist aber, daß der in der TGL enthaltene Streckgrenzenwert einer bestimmten Wahrscheinlichkeit zuzuordnen ist und nicht generell für alle Probestäbe gilt. Dieser Wert muß gewährleisten, daß die weitaus größte Zahl von Bauteilen die angegebene Streckgrenze erreicht.

Die durchgeführten Versuche, siehe Anlage 48, ermöglichen hier umfassendere Aussagen.

Nach diesen Versuchen liegt die Streckgrenze mit 50 % Erwartungswahrscheinlichkeit für ungekerbte Proben bei 388 N/mm^2 und für gekerbte Proben bei 488 N/mm^2 . Unter Anwendung der Momentenmethode für Normalverteilung erhält man die in Tabelle 3 aufgeführten Zuordnungen für $\hat{\sigma}_S$:

Tabelle 3: Streckgrenzen verschiedener Erwartungswahrscheinlichkeiten

Erwartungswahrsch. Probenart	Streckgrenzen			\hat{T}
	90 %	50 %	10 %	
ungekerbt	320	388	456	1.43
gekerbt	469	488	507	1.08

Angaben in N/mm^2

Es werden z. B. 90 % der ungekerbten Proben mindestens eine Streckgrenze von 320 N/mm^2 aufweisen und nur 10 % erreichen 456 N/mm^2 .

Die Streuspannen sind bei ungekerbten Proben größer als bei den gekerbten Proben.

Verlängert man im Wahrscheinlichkeitsnetz die über die Momentenmethode ermittelte Gerade für die ungekerbten Proben bis zum TGL-Streckgrenzenwert auf der Abzisse, so ergibt sich, daß

99.85 % der ungekerbten Proben

diese Streckgrenze mindestens erreichen. Benutzt man den aus den statischen Versuchen gewonnenen 50 %-Wert der ungekerbten

Probe, so ist damit die theoretische Überhöhung zu σ_S :

$$\frac{\sigma_{V_{\max}}}{\sigma_{S_{50\% \text{ ungekerbt}}}} = \frac{788.9}{388} = 2.03$$

bzw. für gekerbte Proben

$$\frac{\sigma_{V_{\max}}}{\sigma_{S_{50\% \text{ gekerbt}}}} = \frac{788.9}{488} = 1.61$$

Weiterhin muß berücksichtigt werden, daß beim Hochfahren der Belastung die Mikrostützung zur Geltung kommt.

Gemäß Abschnitt 5.4.5. erfolgt bei der Rundprobe ein Abfall der Hookeschen Maximalspannung auf 70 %:

$$\bar{\sigma}_{V_{\max}} = 0.70 \cdot \sigma_{V_{\max}} = 552 \text{ N/mm}^2$$

Diese Spannungsverminderung tritt ebenfalls bei den Flachproben auf, wenn man die dort entstehenden Querspannungen berücksichtigt und deren Wirkung auf die Vergleichsspannung mit der kleineren Mikrostützung überlagert.

Insgesamt gelten jetzt folgende theoretische Streckgrenzenüberhöhungen:

Tabelle 4: Verhältnis der $\sigma_{V_{\max}}$ zu σ_S nach Tabelle 3

$\frac{\sigma_{V_{\max}}}{\sigma_S}$	TGL 7960 ($\hat{=}$ 0.15 %)	Erwartungswahrscheinlichkeit		
		10 %	50 %	90 %
ungekerbt	2.45	1.73	1.42	1.21
gekerbt	-	1.18	1.13	1.09

Nach Tabelle 4 gilt für 90 % der Proben beim höchsten Spannungshorizont mindestens eine 1.21-fache Streckgrenzenüberhöhung.

Im Ergebnis für die gekerbten Proben müßte bereits die Mikrostützwirkung enthalten sein. Die Kontrolle liefert für 50 % (Tabelle 3):

$$\frac{\sigma_{S_{\text{ungekerbt}}}}{\sigma_{S_{\text{gekerbt}}}} = 0,80$$

Wenn man in Betracht zieht, daß der Abfall der Spannung infolge Mikrostützung auf 70 % nach überschlägigen Angaben von BERTELE /27/ erfolgte und außerdem die eigenen Versuche lediglich kraftgesteuert durchgeführt worden sind, so liegt eine gute Übereinstimmung von dem "statischen" Faktor 0.80 und den aus Schwingfestigkeitsversuchen /27/ hergeleiteten Faktor 0.70 vor.

Insgesamt läßt sich feststellen, daß auf dem höchsten Spannungshorizont mit 50 % Erwartungswahrscheinlichkeit etwa eine 1,5-fache theoretische Streckgrenzenüberhöhung stattfindet und nicht eine starke Plastifizierung, wie es zunächst den Anschein hatte beim Vergleich der idealen Hookeschen Maximalspannung mit der TGL-Streckgrenze für St 38.

Dadurch wird die Argumentation im Abschnitt 3.3 bestätigt, daß die elastische Formzahl unter anderem deshalb vorteilhaft gegenüber elastisch-plastischen Formzahlen ist, weil α_K als erste Näherung des nichtlinearen Kerbgrundverhaltens im Zeitfestigkeitsgebiet betrachtet werden kann.

Weiterhin wurde sichtbar, daß der Plastifizierungsgrad bereits bei statischer Belastung eine statistische Größe ist. Es ist nicht zu erwarten, daß dieser Effekt bei dynamischer Beanspruchung abgeschwächt wird.

9. Zusammenfassung und Ausblick

Nach der Erörterung zahlreicher Einflüsse auf den Schädigungsvorgang bei gekerbten, dauerschwingbeanspruchten Bauteilen wurde die Bedeutung des elastischen Spannungszustandes herausgearbeitet. Die Anwendung der elastischen Formzahl ist im Vergleich zu elastisch-plastischen Formzahlen aus folgenden Gründen zweckmäßig:

- α_K ist für alle Belastungsstufen gültig
- Im Zeitfestigkeitsgebiet kann die elastische Formzahl als erste Näherung des nichtlinearen Kerbgrundverhaltens betrachtet werden.
- Das Stoffgesetz unterliegt während der Dauerschwingbeanspruchung Veränderungen durch Ermüdungsvorgänge, deshalb ist die Vorgabe eines gültigen Stoffgesetzes für nichtlineares Werkstoffverhalten problematisch.
- Nachdem sich Makrorisse ausgebildet haben, entscheidet der Rißfortschritt wesentlich die Lebensdauer. Außerdem verkleinert sich, abhängig von der Rißlänge, die Nettoquerschnittsfläche, so daß sich auch die tatsächliche Beanspruchungshöhe ändert.
Diese Vorgänge lassen sich auch mit elastisch-plastischen Formzahlen nicht erfassen.
- Bisher ist eine eindeutige Zuordnung der nichtlinearen Kerbgrundbeanspruchung zur Schädigung nicht möglich. Besondere Schwierigkeiten bereiten dabei stochastische Belastungsfolgen.

Aufbauend auf theoretischen Betrachtungen sowie praktischen Versuchsergebnissen anderer Autoren folgte die Festlegung einer Versuchsstrategie zum experimentellen Nachweis, daß die elastische Formzahl als charakteristische Größe der elastischen Spannungskonzentration durchaus nicht ihre Berechtigung als Übertragungsparameter von Schwingfestigkeitswerten bei verschieden gestalteten Bauteilen verloren hat.

Diese Versuchsstrategie umfaßt die Gegenüberstellung einer

Rundprobenform mit drei außengekerbten Flachprobenformen unter Einstufen- und Randbelastung.

Von entscheidender Bedeutung für die durchgeführten Untersuchungen ist die exakte Bestimmung der maximalen elastischen Spannung im Kerbgrund. Das dort auftretende große Spannungsfälle führt dazu, daß die errechnete Spannungsspitze sehr empfindlich gegen Ungenauigkeiten im Berechnungsmodell oder zu grobe Nachbildung der Kerbkontur reagiert. Deshalb wurde die Formzahlberechnung besonders sorgfältig durchgeführt und verschiedene Einflüsse auf die Genauigkeit der Ergebnisse diskutiert.

Zur Berechnung inhomogener Spannungszustände wurden mehrere Verfahren vorgestellt und die Methode der finiten Elemente für die Analyse der konkreten Spannungskonzentrationen ausgewählt, weil damit eine flexible Anpassung an beliebig gestaltete Kerbkonturen möglich ist. Es erfolgte die Darlegung von Besonderheiten dieser Methode für den linearen und quadratischen Verschiebungsansatz, vor allem im Hinblick auf die zu erzielende Genauigkeit der Ergebnisse. Einen wesentlichen Einfluß auf die Konvergenz der Lösung hat die Art der Vernetzung in finite Elemente. Zur Absicherung genauer Formzahlberechnungen wurden keine iterativen Netzverfeinerungen vorgenommen, sondern Einflüsse der Kerbkontur diskutiert. Infolge der sehr feinen Vernetzung der untersuchten Flach- und Rundproben waren die verwendeten Finit-Element-Programme bis zur Speicherplatzkapazität voll ausgelastet.

In der Literatur angegebene Näherungsformeln bzw. numerische Interpolationsformeln zur Berechnung der Formzahlen wurden programmiert und dienten zur Beurteilung der errechneten Lösungen.

Die Anwendung der finiten Elemente auf die gewählten Probenformen erbrachte folgende Ergebnisse:

- Obwohl der Verschiebungsansatz insgesamt zu kleine Werte liefert, ergaben sich bei ungünstiger Nachbildung der

Kerbkontur im Kerbgrund größere Spannungen als vergleichbare exakte Lösungen.

- Die mit dem linearen Verschiebungsansatz errechneten Formzahlen waren stets mindestens 10 % größer als die mit dem quadratischen Ansatz ermittelten Werte unter Benutzung völlig gleicher Vernetzungen.
- Eine genaue Formzahlberechnung liegt für den quadratischen Verschiebungsansatz dann vor, wenn die im Kerbgrund errechenbare Spannung mit der grafisch extrapolierten Spannung der Elementschwerpunkte identisch ist. Dabei muß eine sorgfältige Nachbildung der Kerbkontur und eine feine Vernetzung im Kerbgrundbereich vorausgesetzt werden.
- Zur Beurteilung von Vernetzungen ist die Kontrolle der Kräftebilanz bei gekerbten Bauteilen wenig geeignet. Unter Umständen können sogar schlechtere Vernetzungen ein besseres Ergebnis vortäuschen.

Die Berechnungen der Flachproben erfolgten über den ebenen Spannungszustand. Eine Vergleichbarkeit mit dem rotationssymmetrischen Spannungszustand der Rundprobe konnte über die Mikrostütztheorie nachgewiesen werden.

Für die vier Probenformen wurde je eine Wöhlerlinie mit fünf Horizonten einschließlich Dauerfestigkeit und eine Lebensdauerlinie mit zwei Horizonten auf einer prozeßrechnergesteuerten, servohydraulischen Prüfanlage ermittelt. Zur Durchführung der Randomversuche für eine stochastische Belastung ohne Mittelspannungen diente eine vom Prozeßrechner erzeugte Zufallsfolge von Amplituden.

Aus den Wöhler- und Lebensdauerlinien konnten je Spannungshorizont die Bruchlastwechselzahlen für eine Flachprobe mit genau gleicher Formzahl α_{KR} bzw. α_{VR} der Rundprobe interpoliert werden.

Die Versuchsergebnisse zeigen eine sehr gute Übereinstimmung der Schwingfestigkeitswerte der Rundprobe und der Flachprobe mit $\alpha_K = 3.43$, die exakt der Rundproben-Formzahl α_V nach der Gestaltänderungsenergiehypothese entspricht. Die Übereinstimmung ist besonders gut für die Randomversuche.

Um die vorgelegten Ergebnisse umfassend bei der Dimensionierung von Bauteilen einsetzen zu können, sind weitere experimentelle Untersuchungen erforderlich, in denen unterschiedliche Belastungsarten sowie Randomversuche mit veränderlichen Mittelspannungen einbezogen werden. Die zitierten Forschungsergebnisse anderer Autoren zeigen bereits für Einstufen- und Blockprogrammversuche, daß die elastische Formzahl auch bei Vorgabe von Mittelspannungen zu guter Übertragbarkeit führt.

Zur Handhabung der elastischen Formzahl als Übertragungsgröße bei Schwingfestigkeitsversuchen ergeben sich für den Anwender folgende Voraussetzungen:

1. Die Formzahl sollte auf eine gleichförmige Nennspannung im Nettoquerschnitt bezogen werden.
2. Es sollte möglichst eine Vergleichsformzahl nach einer geeigneten Festigkeitshypothese verwendet werden.
3. Es ist eine exakte Ermittlung der Formzahl erforderlich.

Beim gegenwärtigen Stand der Meßtechnik ist die experimentelle Bestimmung maximaler Dehnungen im Kerbgrund problematisch. Hinzu kommt, daß elastische Beanspruchungen nur sehr kleine Dehnungen erzeugen. Deshalb ist die rechnerische Ermittlung der elastischen Formzahl günstiger, um genaue Ergebnisse zu erhalten. Allerdings bereiten gerade echt räumliche Körper besondere Schwierigkeiten. Das in der DDR konzipierte COSAR-System /102/ dürfte für zukünftige Berechnungen geeignet sein, doch wird auch hier die Absicherung der Genauigkeit von errechneten Formzahlen Bedeutung haben.

Für häufig verwendete Bauteile, z. B. Wellen mit Paßfedernut, ist die Erstellung von Kerbfaktordiagrammen aus einzelnen

numerischen Ergebnissen anzustreben, weil damit der geringste Aufwand ermöglicht wird.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die Ermittlung des Einflusses inhomogener Spannungsverteilungen auf die Schwingfestigkeit von großer Bedeutung ist. Fast alle Konstruktionen weisen unter Belastung derartige Spannungsverteilungen auf. Durch Dauerschwingbeanspruchung werden Ermüdungsrisse am häufigsten gerade in Gebieten mit örtlichen Spannungskonzentrationen ausgelöst.

Eine theoretische Lebensdauerberechnung bietet bisher noch zu wenig Sicherheit, so daß auch weiterhin experimentelle Untersuchungen unerlässlich sind. Hier ist es dringend erforderlich, die Auswirkung der wesentlichsten Einflußgrößen umfassend zu klären.

In der vorliegenden Arbeit konnte der Nachweis erbracht werden, daß die elastische Formzahl als charakteristische Kenngröße der elastischen Spannungskonzentration wesentlich die Schwingfestigkeit beeinflusst, so daß eine Übertragung von Wöhler- und Lebensdauerlinien verschiedener Bauteile mit genau gleicher Formzahl möglich ist.

Literaturverzeichnis

- /1/ Betz, U. Zur Rißbildung wechselbeanspruchter
 glatter Proben
 Diss. Universität Stuttgart 1970
- /2/ Gaßner, E. Auswirkung betriebsähnlicher Belastungs-
 folgen auf die Festigkeit von Flugzeug-
 bauteilen
 Diss. TH Darmstadt 1941
- /3/ - TGL 19340
 Maschinenbauteile Dauerschwingfestig-
 keit
 September 1974
- /4/ Hertel, H. Ermüdungsfestigkeit der Konstruktionen
 Springer-Verlag Berlin, Heidelberg,
 New York 1969
- /5/ Schott, G. Werkstoffermüdung
 VEB Deutscher Verlag für Grundstoff-
 industrie
 Leipzig 1976
- /6/ Munz, D.; Dauerschwingverhalten metallischer
 Schwalbe, K.; Werkstoffe
 Mayr, P. Braunschweig, Vieweg u. Sohn GmbH, 1971
- /7/ Klee, S. Das zyklische Spannungs-Dehnungs- und
 Bruchverhalten verschiedener Stähle
 Veröffentlichung des Institutes für
 Statik und Stahlbau der TH Darmstadt,
 Heft 22 (1973)
- /8/ Wagner, R. Lebensdauervorhersage schwingend bean-
 spruchter scharf gekerbter Bauteile
 auf der Grundlage der Bruchmechanik
 Diss. TU München 1973

- /9/ Maennig, W.W. Das Abgrenzungsverfahren, eine kostensparende Methode zur Ermittlung von Schwingfestigkeitswerten - Theorie, Praxis und Erfahrungen
Materialprüfung Nr. 8 (1977), S. 280 - 289
- /10/ Günther, W. Schwingfestigkeit
VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie
Leipzig 1973
- /11/ Schütz, W. Lebensdauer-Berechnung bei Beanspruchungen mit beliebigen Last-Zeit-Funktionen
VDI-Bericht 268, Düsseldorf 1976,
S. 113 - 138
- /12/ Palmgren, A. Die Lebensdauer von Kugellagern
VDI-Zeitschrift 58 (1924), S. 339 - 341
- /13/ Miner, M.A. Cumulative Damage in Fatigue
J. of. Appl. Mech., Trans. ASME, 12
(1945), S. 159/164
- /14/ Corten, H.T.;
Dolan, T.J. Cumulative fatigue Damage.
Proc. of the Int. Conference on Fatigue of Metals
London, New York 1956, S. 235 - 246
- /15/ Haibach, E. Modifizierte lineare Schadensakkumulations-Hypothese zur Berücksichtigung des Dauerfestigkeitsabfalls mit fortschreitender Schädigung
Laboratorium für Betriebsfestigkeit,
Darmstadt
Technische Mitteilung Nr. TM 50/70, 1970

- /16/ Forman, R.G.;
Kearny, V.E.
Engle, R.M. Numerical Analysis of Crak Propagation
in Cyclic Loaded Structures
Journal of Basic Engineering. Trans.
ASME, Jg. 1967, Series D, Vol. 89,
S. 459 ff.
- /17/ Lehmann, R. Anforderungen an die Werkstoffermüdungs-
forschung aus der Sicht der technischen
Zuverlässigkeit wechselbeanspruchter
Konstruktionen
IfL-Mitt. 16 (1977) Heft 5, S. 137 - 142
- /18/ Schütz, W.;
Zeuner, H. Schadensakkumulationshypothesen zur
Lebensdauervorhersage bei schwingender
Beanspruchung - Ein kritischer Überblick
Zeitschrift für Werkstofftechnik, Heft 1
(1973), S. 25 - 33, Heft 2 (1973),
S. 97 - 102
- /19/ Wirthgen, G. Untersuchung neuer Verfahren zur Lebens-
dauerberechnung
Diplomarbeit TU Dresden 1977
Sektion Grundlagen des Maschinenwesens
- /20/ Thum, A.;
Buchmann, W. Dauerfestigkeit und Konstruktion
Mitteilungen der Material-Prüfanstalt
an der TH Darmstadt, Heft 1, VDI-Verlag
Berlin 1932
- /21/ Peterson, R.E. Stress concentration design factors
New York: J. Wiley u. Sons 1953,
London: Chapmon u. Hall 1953
- /22/ Siebel, E.;
Stieler, M. Ungleichförmige Spannungsverteilung bei
schwingender Beanspruchung
VDI-Zeitschrift 97 (1955), Nr. 5,
S. 121 - 126
- /23/ Siebel, E.;
Pfender, M. Neue Erkenntnisse der Festigkeitsfor-
schung
Die Technik, Bd. 2, Nr. 3, 1947, S. 117 -
121

- /24/ Neuber, H. Über die Berücksichtigung der Spannungskonzentration bei Festigkeitsberechnungen
Zeitschrift Konstruktion, Springer-Verlag 1968, Heft 7
- /25/ Neuber, H. Kerbspannungslehre
Springer-Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg 1958, 2. Auflage
- /26/ Föppl, L. Eine neue elastische Materialkonstante
Ing.Archiv 7 (1936), S. 229 - 236
- /27/ Bertele, L. Zur Frage der Lebensdauervorhersage umlaufend gekerbter Stahlrundproben unter wiederholter Zug-Druckbeanspruchung
Diss. TH München 1970
- /28/ Hülbig, H. Beitrag zur Verbesserung der Berechnungsverfahren für dynamische Belastung
Diss. TU Dresden 1972
- /29/ Heckel, K.; Kurth, U. Eine Interpolationsmethode für die Lebensdauervorhersage gekerbter, schwingend beanspruchter Bauteile
Konstruktion 28 (1976), S. 443 - 446
- /30/ Eulitz, K.G. Umrechnung ertragbarer Spannungen unter Kollektivbeanspruchung bei veränderten Bauteil- und Beanspruchungskenngrößen
Diss. TU Dresden 1979
- /31/ Beste, A.; Seeger, T. Statische und zyklische Versuche an Lochstäben aus St 37 zur Überprüfung neuzeitlicher Näherungsbeziehungen für die Lebensdauervorhersage
Veröffentlichung des ISS der TH Darmstadt, Heft 29 (1976)

- /32/ Schütz, D. Durch veränderliche Betriebslasten in Kerben erzeugte Eigenspannungen und ihre Bedeutung für die Anwendbarkeit der linearen Schadensakkumulationshypothese
LBF-Bericht Nr. FB-100, 1972
- /33/ Grews, J.H. jr. A Study of cyclic plastic stresses at a notch root
Hardrath, H. F. SESA Proc. XXIII (1966), Nr. 1, S. 313 - 320
- /34/ Meinhardt, J. Beitrag zur Ermittlung des Zusammenhanges zwischen der Formzahl und der Schwingfestigkeit, dargestellt an Schweißbauteilen aus dünnwandigem quadratischen Rohrprofil.
Diss. TH Karl-Marx-Stadt 1975
- /35/ Schütz, W. Über eine Beziehung zwischen der Lebensdauer bei konstanter zur Lebensdauer bei veränderlicher Beanspruchungsamplitude und ihre Anwendbarkeit auf die Bemessung von Flugzeugbauteilen
Diss. TH München 1965
- /36/ Payne, A. O. Determination of the Fatigue Resistance of Aircraft Wings by Full-Scale Testing
In: Proceedings of the Symposium on Full Scale Fatigue Testing of Aircraft Structures, Amsterdam 1959
S. 76 - 132, Hrsg. von Plantema, F.J. u. Schijve, J., Pergamon Press Oxford, London, New York, Paris 1961
- /37/ - Data Sheets - Fatigue -
Royal Aeronautical Society, London

- /38/ Spaulding, E.H. Detail Design for Fatigue in Aircraft
Wing Structures
In: Metal Fatigue. Hrsg. von Sines,
J. u. Waisman, J. L.
S. 325 - 354, McGraw Hill Company,
New York, Toronto, London 1959
- /39/ Schütz, D.; Zur Verwendung von Bemessungsunter-
Lowak, H. lagen aus Versuchen mit betriebsähn-
lichen Lastfolgen zur Lebensdauerab-
schätzung
Laboratorium für Betriebsfestigkeit
Darmstadt, Bericht Nr. FB-109 (1976)
- /40/ Aicher, W.; Schwingfestigkeit gekerbter Flach-
Kierner, J. und Rundproben gleicher Formzahl
Institut für Statik und Dynamik der
Luft- und Raumfahrtkonstruktionen
(ISD), Bericht Nr. 69, Stuttgart 1969
- /41/ Ziebart, W. Ein Verfahren zur Berechnung des Kerb-
und Größeneinflusses bei Schwingbean-
spruchung
Diss. TU München 1976
- /42/ Kloos, K.-H. Einfluß des Oberflächenzustandes und
der Probengröße auf die Schwingfestig-
keitseigenschaften
VDI-Bericht 268, Düsseldorf 1976,
S. 63 - 76
- /43/ Argyris, J. H.; Schwingfestigkeit innen- und außenge-
Aicher, W.; kerbter Flachstäbe gleicher Formzahl
Kierner, J. aus 3.4364.7 (7075- T 6), ISD-Bericht
Nr. 145, Stuttgart 1973
- /44/ Haibach, E.; Verwendung eines Einheits-Kollektivs
Lipp, W. bei Betriebsfestigkeitsversuchen
TM Nr. 15/65 des Laboratoriums für
Betriebsfestigkeit, Darmstadt 1965

- /45/ Schmalenbach, E.W. Wechselverformungsuntersuchungen an Kerb- und Biegeproben äquivalenter Geometrie
Diss. Universität Karlsruhe 1975
- /46/ Bart, J.;
Neuber, H.;
Schnack, E. Kerbfaktordiagramme nach numerischen Berechnungsverfahren
Konstruktion 28 (1976), S. 217 - 218
- /47/ Gaßner, E.;
Lipp, W.;
Dietz, V. Schwingfestigkeitsverhalten von Bauteilen im Betrieb und im Betriebslasten-Nachfahrversuch
TM Nr. 76/76 des Laboratoriums für Betriebsfestigkeit, Darmstadt 1976
- /48/ Pfeiffer, F. Einfluß regelloser Beanspruchungsfolgen auf die Bauteilermüdung
Tagung Festkörpermechanik vom 25. bis 28. 2. 1976 in Dresden, Beitrag CLVIII, Leipzig, VEB Fachbuchverlag, 1976
- /49/ Lempp, W. Festigkeitsverhalten von Stählen bei mehrachsiger Dauerschwingbeanspruchung durch Normalspannungen mit überlagerten phasengleichen und phasenverschobenen Schubspannungen
Diss. Universität Stuttgart 1977
- /50/ Naubereit, H. Zusammengesetzte Wechselbeanspruchung bei Phasenverschiebung
IfL-Mitt. 16 (1977) Heft 3, S. 89 - 95
- /51/ Hanel, W. Studie zur Probenherstellung für Schwingfestigkeitsversuche
Arbeitsbericht TU Dresden, Sektion Grundlagen des Maschinenwesens, Bereich Dynamik/Betriebsfestigkeit 1976, unveröffentlicht

- /52/ Filonenko-
Boroditsch, M. M. Elastizitätstheorie
VEB Fachbuchverlag Leipzig 1967
- /53/ Baule, B. Variationsrechnung
Die Mathematik des Naturforschers und
Ingenieurs, Band V, S. Hirzel Verlag
Leipzig 1968
- /54/ Szabó, I. Höhere Technische Mechanik
Springer-Verlag Berlin, Göttingen,
Heidelberg 1960
- /55/ Collatz, L. Numerische Behandlung von Differential-
gleichungen
Springer-Verlag Berlin, Göttingen,
Heidelberg 1955
- /56/ Ritz, W. Über eine neue Methode zur Lösung ge-
wisser Variationsprobleme der mathe-
matischen Physik
J. Math. (Crelle) 135, 1 (1909)
Ges. Werke, S. 192, Paris 1911
- /57/ Sawin, G. N. Spannungserhöhung am Rande von Löchern
VEB Verlag Technik, Berlin 1956
- /58/ Becker, B. Rechnerische Bestimmung der Formzahlen
abgesetzter Flachstäbe bei verschiedenen
symmetrischen Krafteinleitungen
Diss. TU Karlsruhe 1971
- /59/ Ruoss, H. Spannungs- und Verformungszustand ge-
kerbter Flachstäbe bei elastischer und
überelastischer Beanspruchung
Diss. TU Stuttgart 1971
- /60/ Tittel, S. Spannungs- und Verformungsberechnung
in Scheiben mit versteiftem Langloch-
ausschnitt
Diss. TU Dresden 1973

- /61/ Weber, D. Spannungs- und Verformungsberechnung
von ein- und zweifach zusammenhängenden
Scheiben bei elastisch-plastischem
Materialverhalten
Diss. TU Dresden 1972
- /62/ Führung, H. Finit-Element-Lösungen von Kerb- und
Rißproblemen mit Hilfe automatischer
Netzerzeugung
Institut für Statik und Stahlbau der
TH Darmstadt, Heft 24, 1973
- /63/ Duda, M. Eine vergleichende Untersuchung der
Wirtschaftlichkeit ebener finiter
Elemente
Diss. TH Darmstadt 1975
- /64/ Bart, J. Kombination eines Integralgleichungs-
verfahrens mit der Methode der finiten
Elemente zur Berechnung ebener Span-
nungskonzentrationsprobleme
Diss. TU München 1974
- /65/ Schnack, E. Beitrag zur Berechnung rotationssymme-
trischer Spannungskonzentrationspro-
bleme mit der Methode der finiten Ele-
mente
Diss. TU München 1974
- /66/ Wolf, M. Lösung von ebenen Kerb- und Rißproble-
men mit der Methode der finiten Elemente
Diss. TU München 1976
- /67/ - Formzahlen von Flachstäben für Schwing-
festigkeits-Versuche
Laboratorium für Betriebsfestigkeit
Darmstadt, Technische Mitteilung Nr. 61,
1971

- /68/ Landgraf, G. Zusammenhang zwischen Extremalprinzipien und der Methode der finiten Elemente
Vortrag - Problemseminar "Finite Elemente", TU Dresden 1974, S. 83 - 92
- /69/ Callagher, R. H. Finite Element Analysis: fundamentals
Prentice - Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1975
- /70/ Whiteman, J. R. The Mathematics of Finite Elements and Applications
Academic Press, London and New York 1973
- /71/ Dankert, J. Numerische Methoden der Mechanik
VEB Fachbuchverlag Leipzig 1977
- /72/ Zienkiewicz, O.C. Methode der finiten Elemente
VEB Fachbuchverlag Leipzig 1974
- /73/ Dietrich, G.;
Stahl, H. Matrizen und Determinanten und ihre Anwendung in Technik und Ökonomie
VEB Fachbuchverlag Leipzig 1973
- /74/ Hennig, K. Zur Konvergenz bei der Methode der finiten Elemente
Vortrag Problemseminar "Finite Elemente"
TU Dresden 1974, S. 77 - 82
- /75/ Kolář, V.;
Kratochvíl, J.;
Leitner, R.;
Ženíšek, A. Berechnung von Flächen- und Raumtragwerken nach der Methode der finiten Elemente
Springer-Verlag Wien, New York 1975
- /76/ Schnack, E. Effektivitätsuntersuchung für numerische Verfahren bei Festigkeitsberechnungen
VDI-Zeitschrift 1977, Nr. 1/2, S. 43-50

- /77/ Kärcher, H. J. Die Finit-Element-Methode auf kontinuumsmechanischer Grundlage mit einer Anwendung zweier hybrider Elementmodelle auf die Scheibenberechnung
Diss. TH Darmstadt 1973
- /78/ Argyris, J. H.; Radaj, D. Lösung spezieller parametrischer Kerbspannungsprobleme mit Finit-Element-Verfahren
Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen (ISD)
Bericht Nr. 80, Stuttgart 1970
- /79/ Dario, N. P.; Bradley, W. A. A comparison of first and second order axially symmetric finite elements
Int. J. Num. Meth. in Engng., Bd. 5 (1973), S. 573 - 583
- /80/ Noack, M. Berechnung von Formzahlen mit der Methode der finiten Elemente
Diplomarbeit TU Dresden 1977
Sektion Grundlagen des Maschinenwesens
- /81/ Gabbert, U.; Joensson, D. Programmbeschreibung MH 214/75-0 ("Scheibe 3")
VEB Kombinat Pumpen und Verdichter Halle 1975
- /82/ Gabbert, U. Die Methode der finiten Elemente zur Berechnung axialsymmetrischer Körper
Wiss. Zeitschrift der TH Magdeburg 1972, Heft 4, S. 311 - 322
- /83/ Recke, H. G. Die Programme E 3 und A 3
Vortrag zum Problemseminar "Finite Elemente", TU Dresden 1974, S. 11 - 14
Programmbeschreibung E 3, Stand vom 10. 4. 1978, Bergakademie Freiberg, Sektion Maschinen- und Energietechnik, Bereich Mechanik und Getriebetechnik

- /84/ - Programmbeschreibung A 3 G, Stand vom
10. 4. 1978, siehe /83/
- /85/ Joensson, D. Programmbeschreibung MH 218/75-0
("Datgen - 2")
VEB Kombinat Pumpen und Verdichter
Halle 1976
- /86/ Wellinger, K.; Zeitfestigkeit und Dehnungsformzahl
Gaßmann, H.; gekerbter Flachproben
Luithle, J. Konstruktion 21 (1969), Heft 6
- /87/ Lötsch, K. Beitrag zur Spannungsmechanik bei be-
hinderter Verformung
Österreichisches Ing.Archiv, Bd. 8
(1959), S. 151 - 175
- /88/ Bergander, H. Über die Anwendung von Finit-Element-
Programmen zur Festigkeitsberechnung
komplizierter Konstruktionen
IfL-Mitteilung 17 (1978), Heft 1,
S. 16 - 19
- /89/ Siebel, E.; Das Kerbproblem bei schwingender Bean-
Bussmann, K. H. spruchung
Technik, Bd. 3 (1948), S. 249 - 252
- /90/ - TGL 7960, Allgemeine Baustähle/Stahl-
marken, November 1967
- /91/ - Schenck Hydropuls System
Betriebsanleitung, Oktober 1976
- /92/ Prochnow, H.; Grundlagen der mathematischen Stati-
Mogwitz, H. stik und Wahrscheinlichkeitsrechnung
für die Betriebsfestigkeit
Lehrbrief für das Hochschulfernstudium
TU Dresden, 1974

- /93/ Müller, P. H. Lexikon Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik Akademie-Verlag Berlin 1970
- /94/ Dixon, W. J.; Mood, A. M. A method for obtaining and analyzing sensitivity data J. Americ. Statist. Assoc. 43 (1948), S. 108 - 126
- /95/ Bühler, H.; Schreiber, W. Lösung einiger Aufgaben der Dauerschwingfestigkeit mit dem Treppenstufen-Verfahren Archiv für das Eisenhüttenwesen, 28. Jahrgang, Heft 3 (1957)
- /96/ Jacoby, G. Schwingfestigkeit In: Neuzeitliche Verfahren der Werkstoffprüfung, Verlag Stahleisen, Düsseldorf 1973, S. 80 - 107
- /97/ Lehmann, R. Normkollektive für die Betriebsfestigkeitsforschung IfL-Mitteilung 8 (1969) 8, S. 309 - 321
- /98/ Gassner, E.; Griese, F. W.; Haibach, E. Ertragbare Spannungen und Lebensdauer einer Schweißverbindung aus Stahl St 37 bei verschiedenen Formen des Beanspruchungskollektivs Archiv für Eisenhüttenwesen 35 (1964) 3, S. 255 - 267
- /99/ Schweer, W. Beanspruchungskollektiv als Bemessungsgrundlage für Hüttenwerkslaufkrane Diss. TH Hannover 1963
- /100/ Storm, R. Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und statistische Qualitätskontrolle VEB Fachbuchverlag Leipzig 1972

/101/ Hanel, W.

Beitrag zur Lebensdauervorhersage
regellos beanspruchter Bauteile auf
der Grundlage einer zweiparametrischen
Klassierung

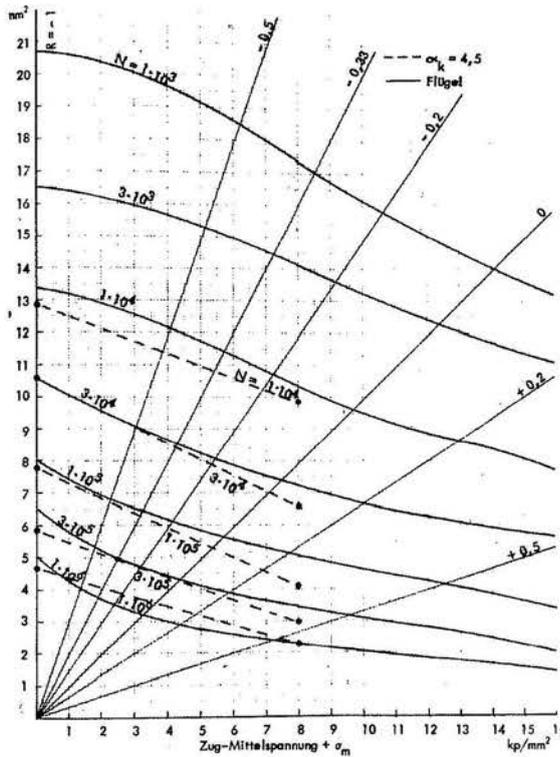
Diss. TU Dresden 1979

/102/ Altenbach, J.

Entwicklung und Anwendung von Pro-
grammen "Finite Elemente 3 D"

Vortrag Tagung Festkörpermechanik
1976 in Dresden, Band A, Beitrag A V
VEB Fachbuchverlag Leipzig 1976

11. A N H A N G



Beispiel aus /36/:

Vergleich eines Flügels mit
einfachen Probestäben

(Formzahl $\alpha_K = 4.5$)

für Spannungsverhältnisse von
 $R = -0.5$ bis $R = +0.5$

und Bruchlastwechselzahlen
zwischen 10^3 und 10^6 LW

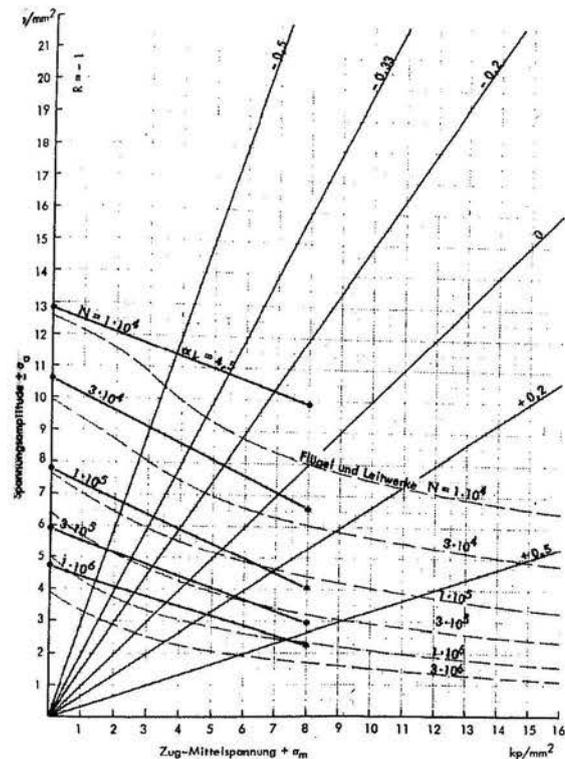
Beispiel aus /37/:

Vergleich kompletter
Flügel und Leitwerke

mit einfachen Probestäben
(Formzahl $\alpha_K = 4.5$)

für Spannungsverhältnisse
von $R = -0.5$ bis $R = +0.5$

und Bruchlastwechselzahlen
zwischen 10^4 und $3 \cdot 10^6$ LW



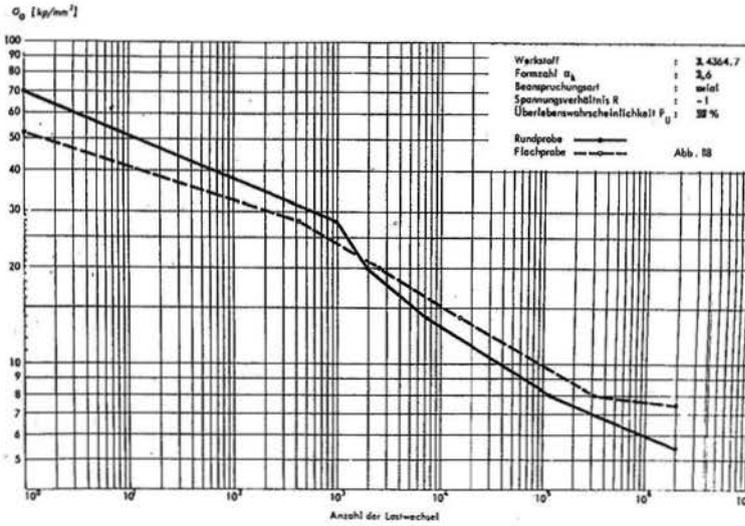
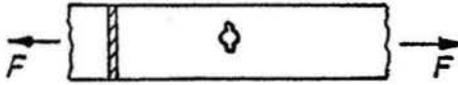
Schwingfestigkeit verschiedener
 Probestäbe mit gleichen Formzahlen,
 aus /40/

Anhang A 2

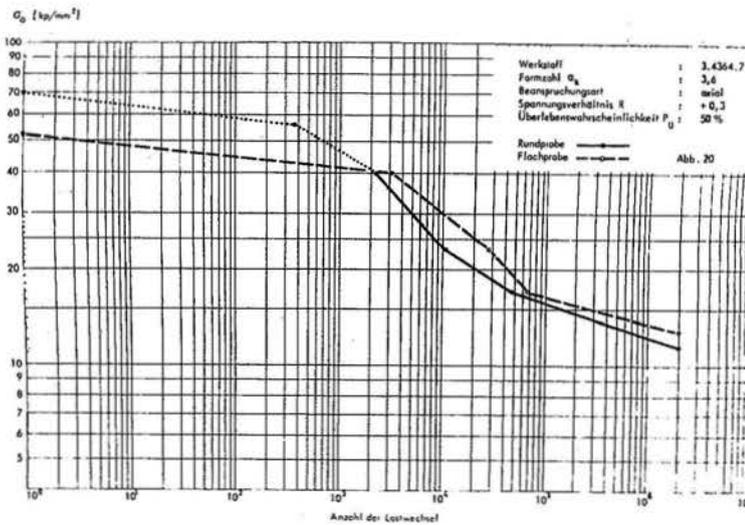
Flachprobe:

Rundprobe:

$\alpha_K = 3.6$

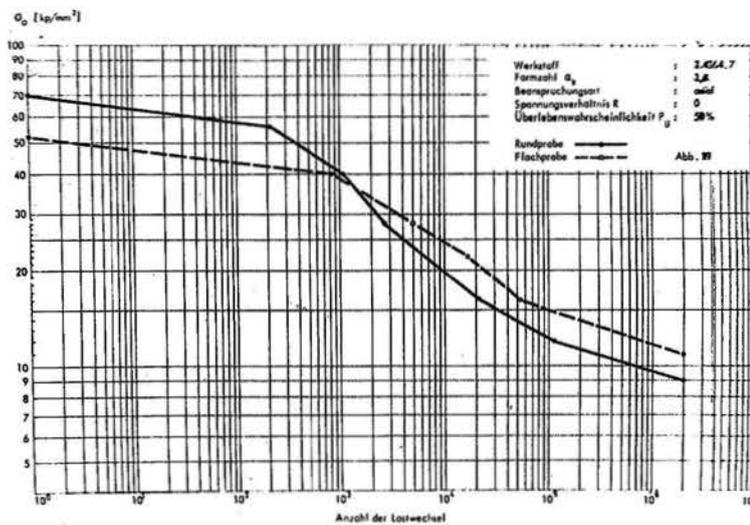


$R = -1$

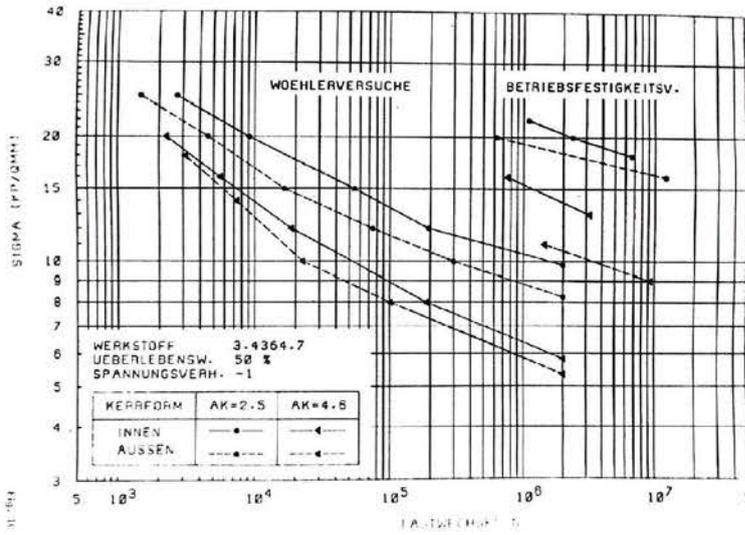
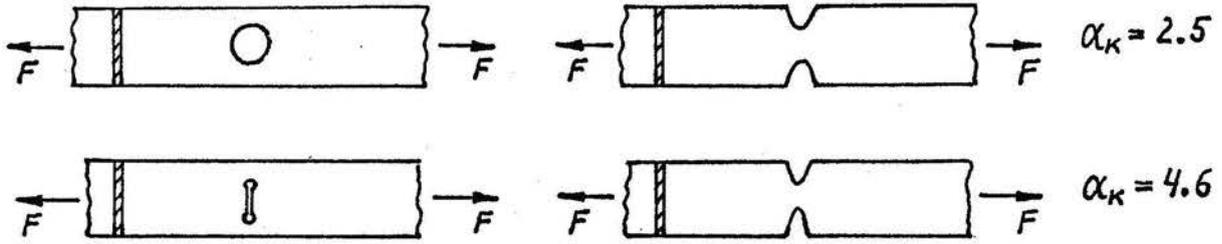


$R = 0.3$

$R = 0$

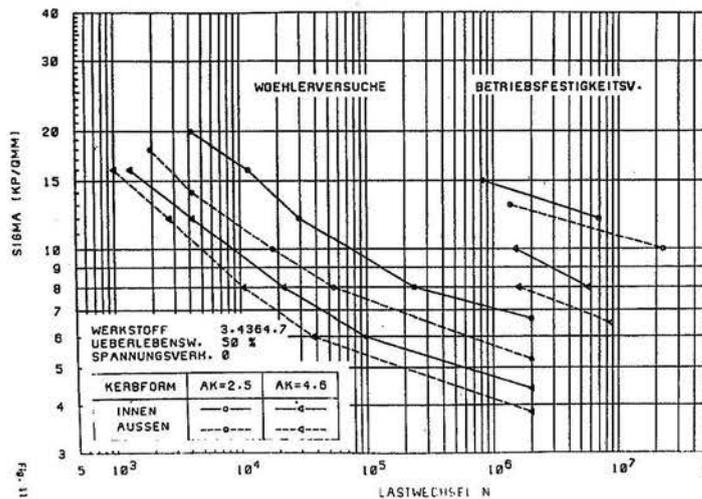


Flachproben innen gekerbt Flachproben außen gekerbt

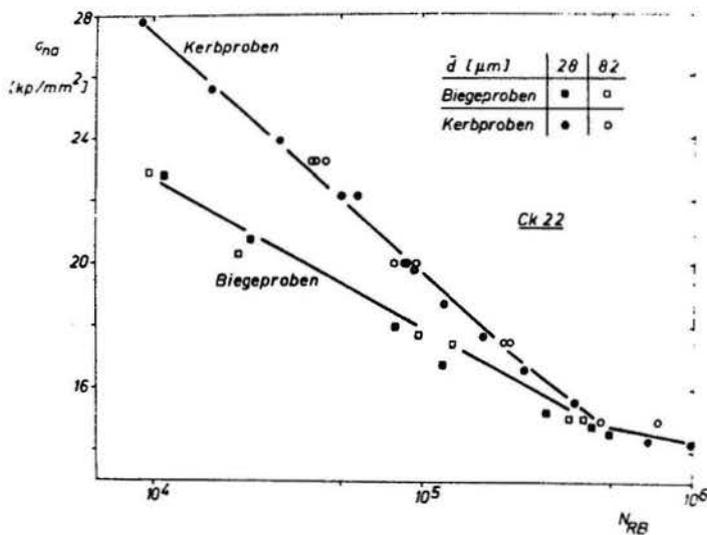
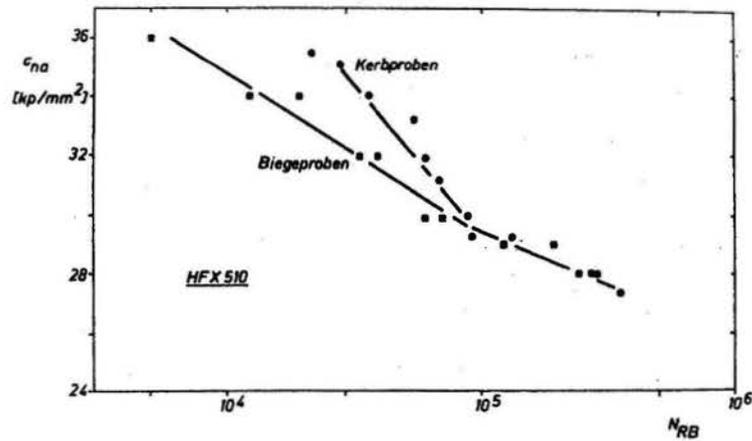
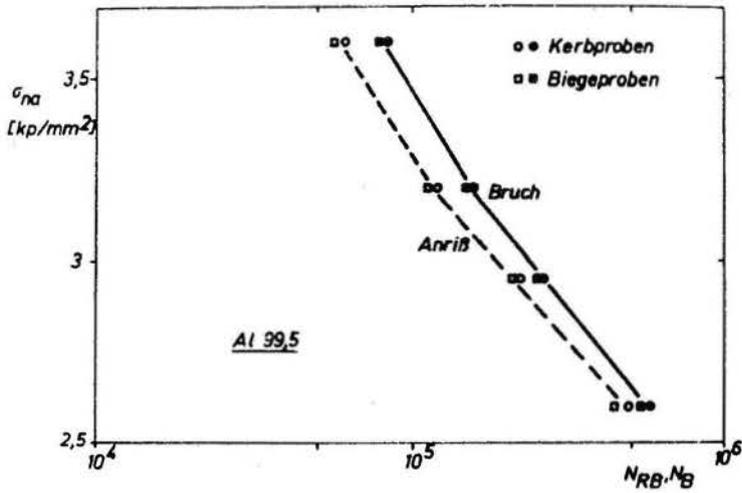
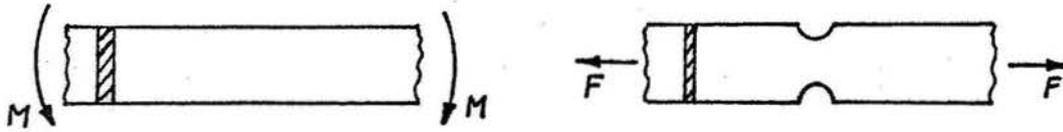


$R = -1$

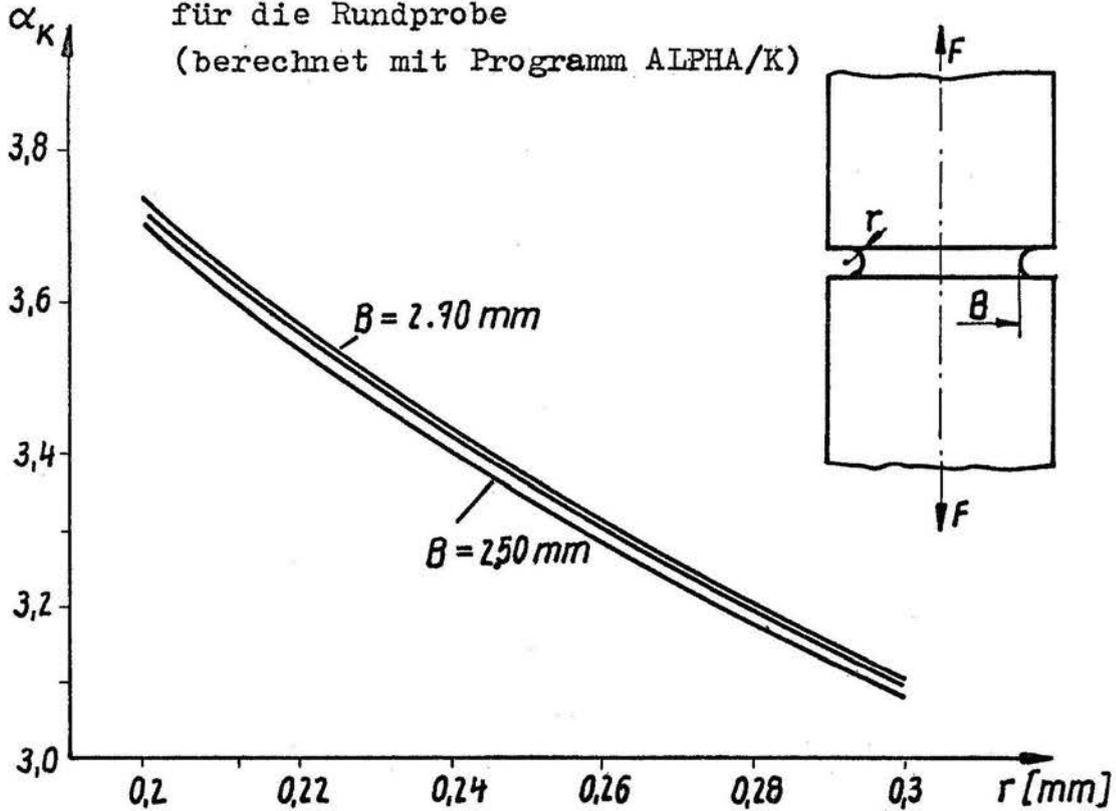
$R = 0$



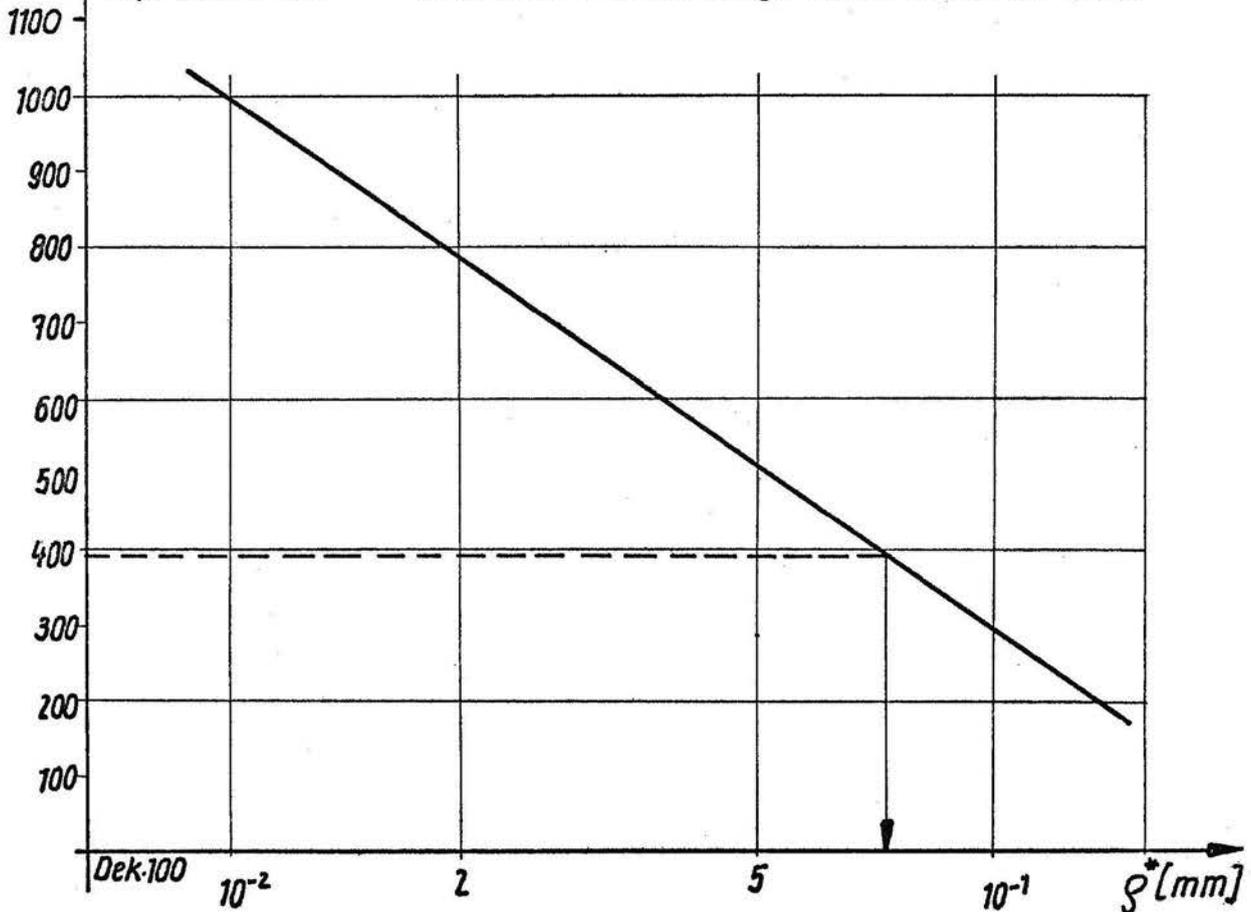
$$\alpha_K = 1.50$$

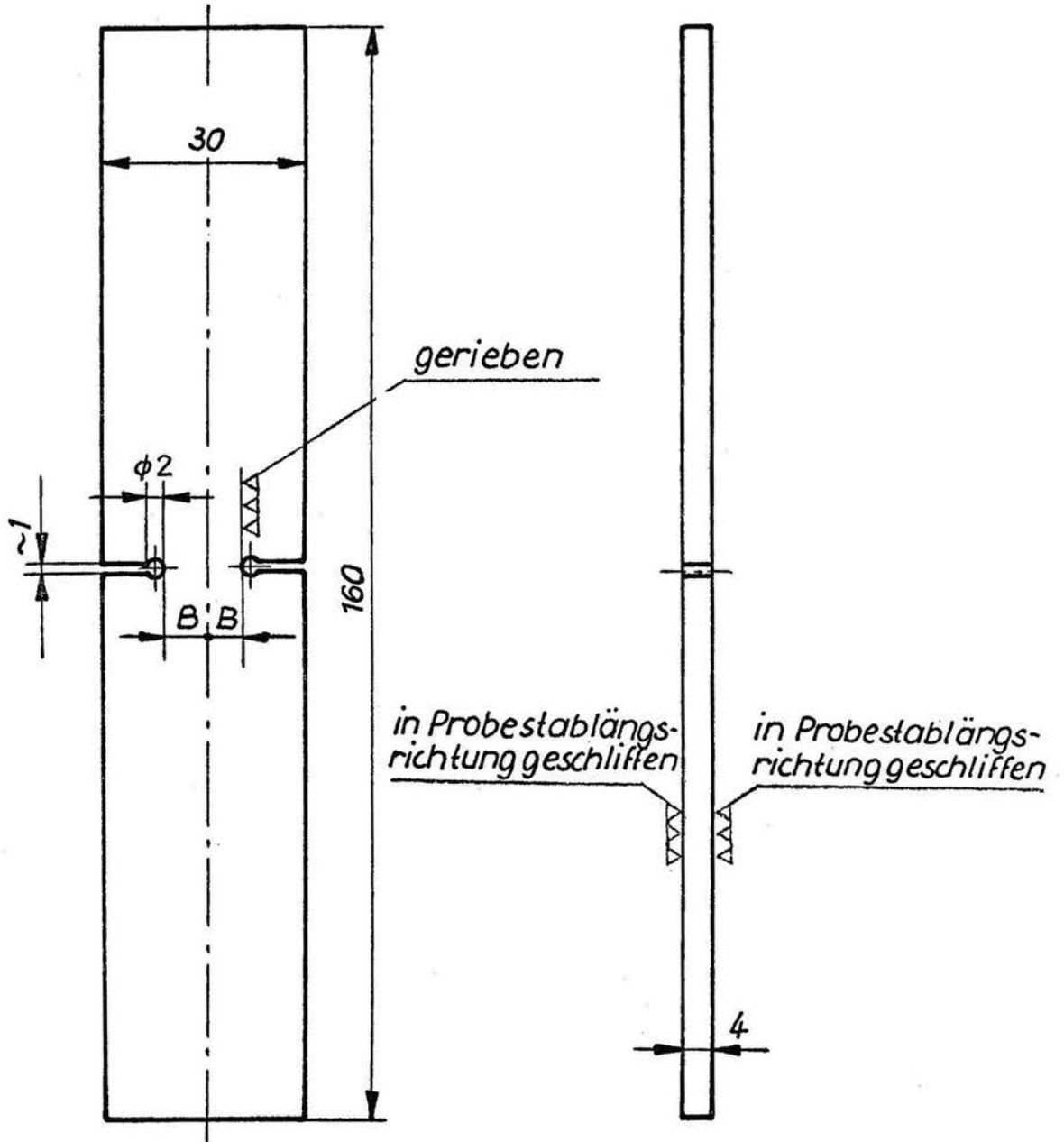


a) Abhängigkeit der Formzahl von r und B
 für die Rundprobe
 (berechnet mit Programm ALPHA/K)

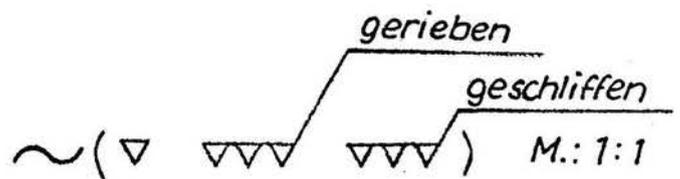


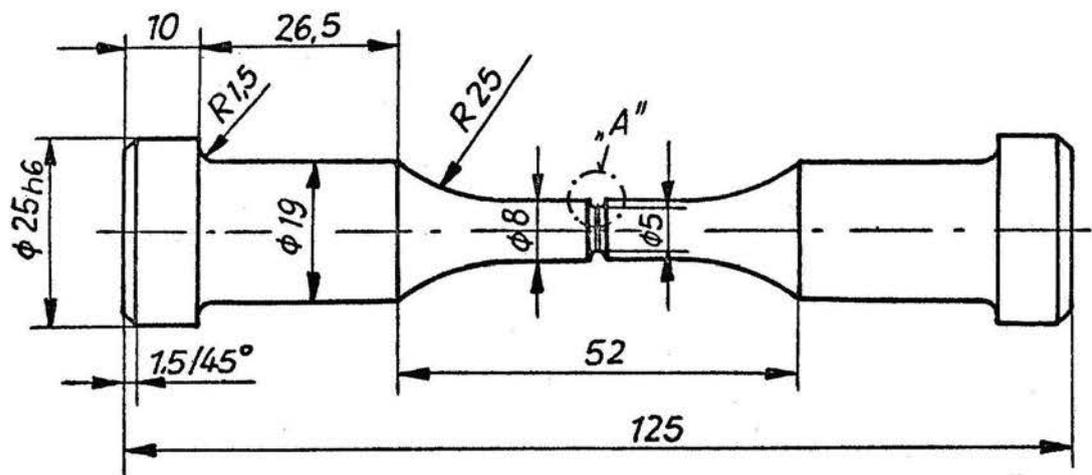
b) $\sigma_{0,2} [\text{N/mm}^2]$ Ersatzstrukturlänge nach BERTELE /27/



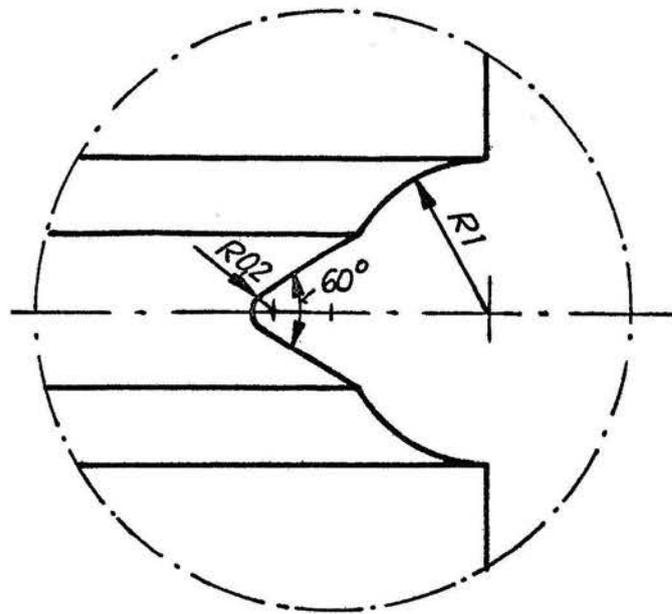


B variabel

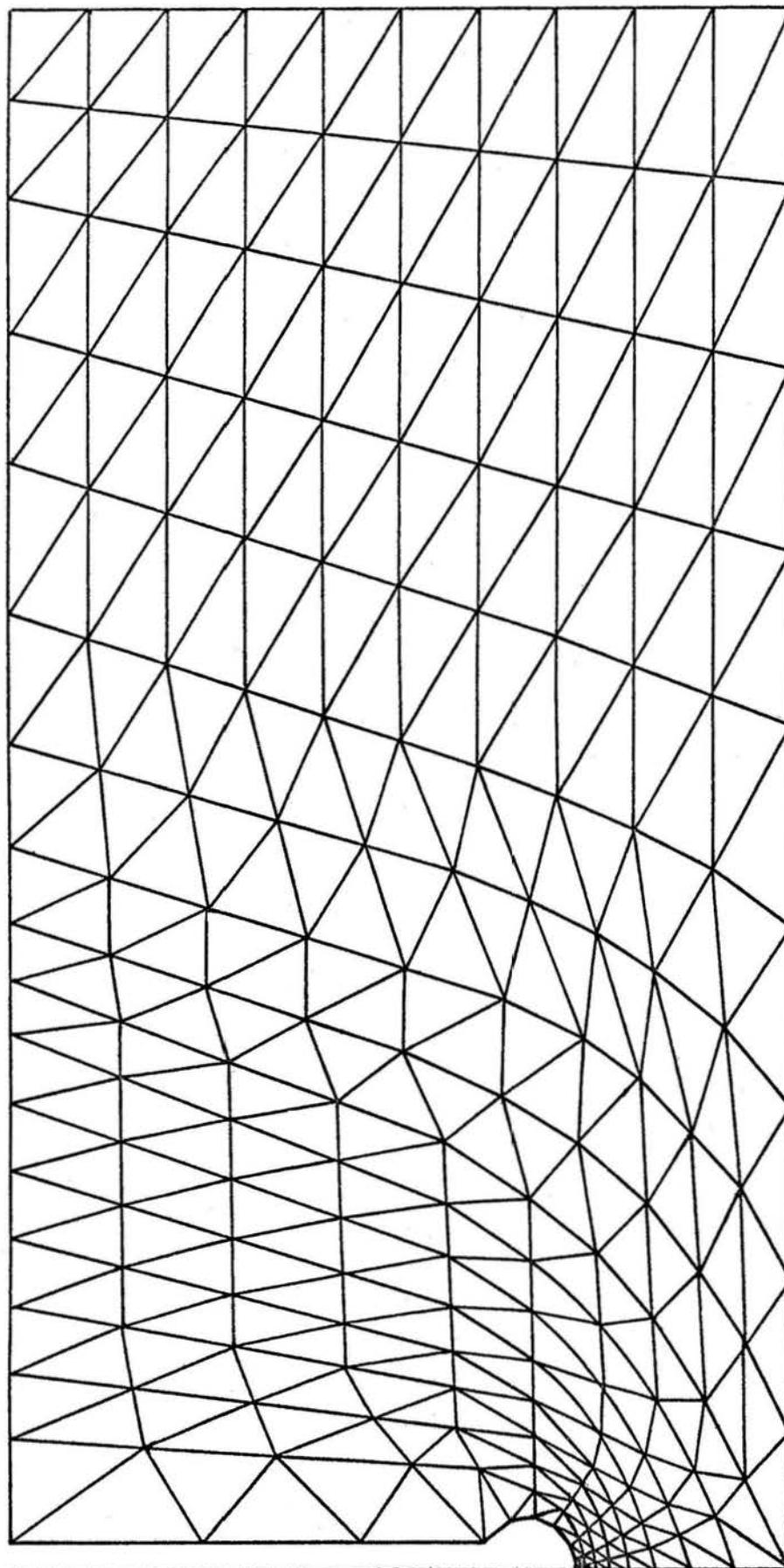


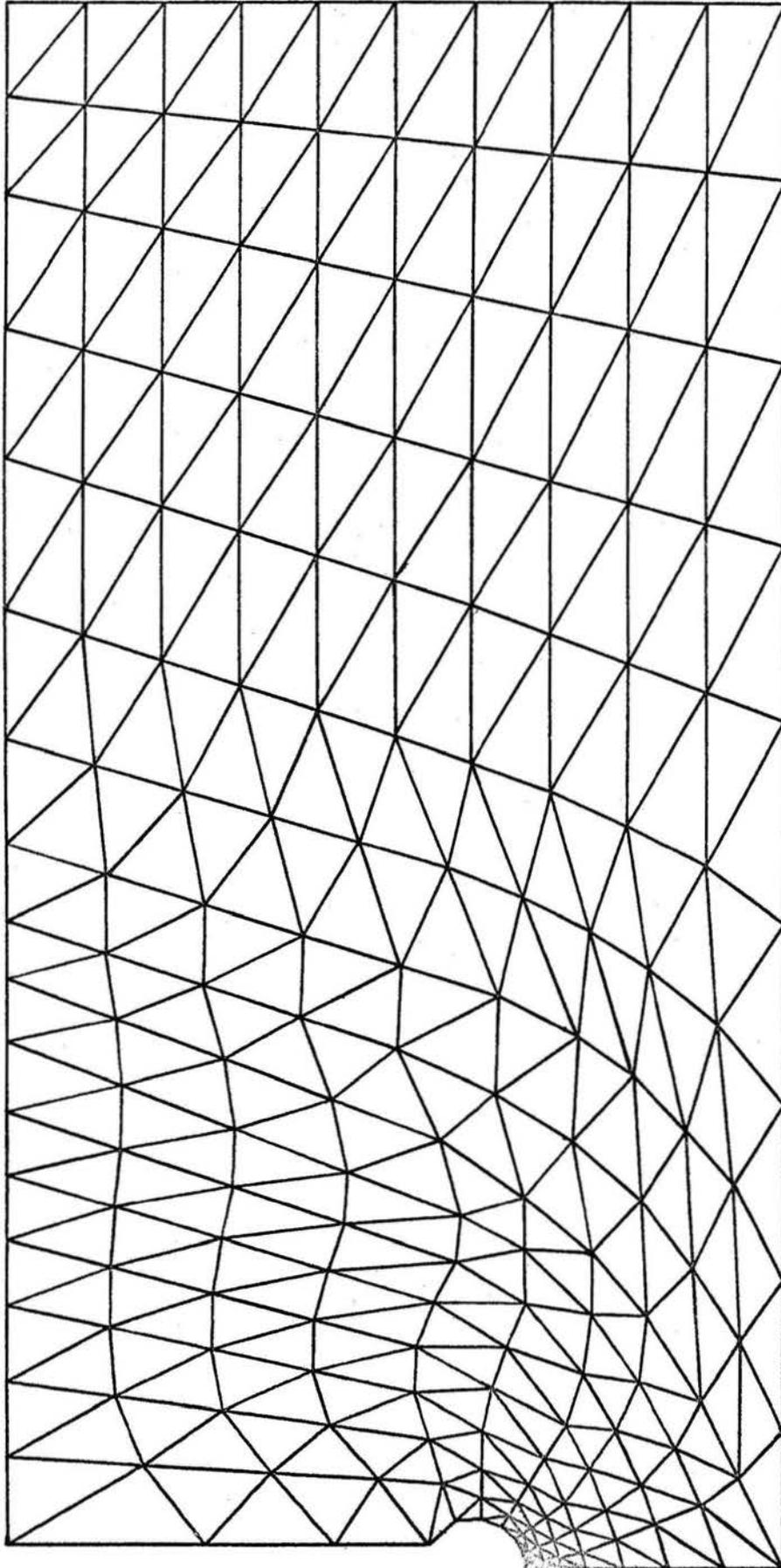


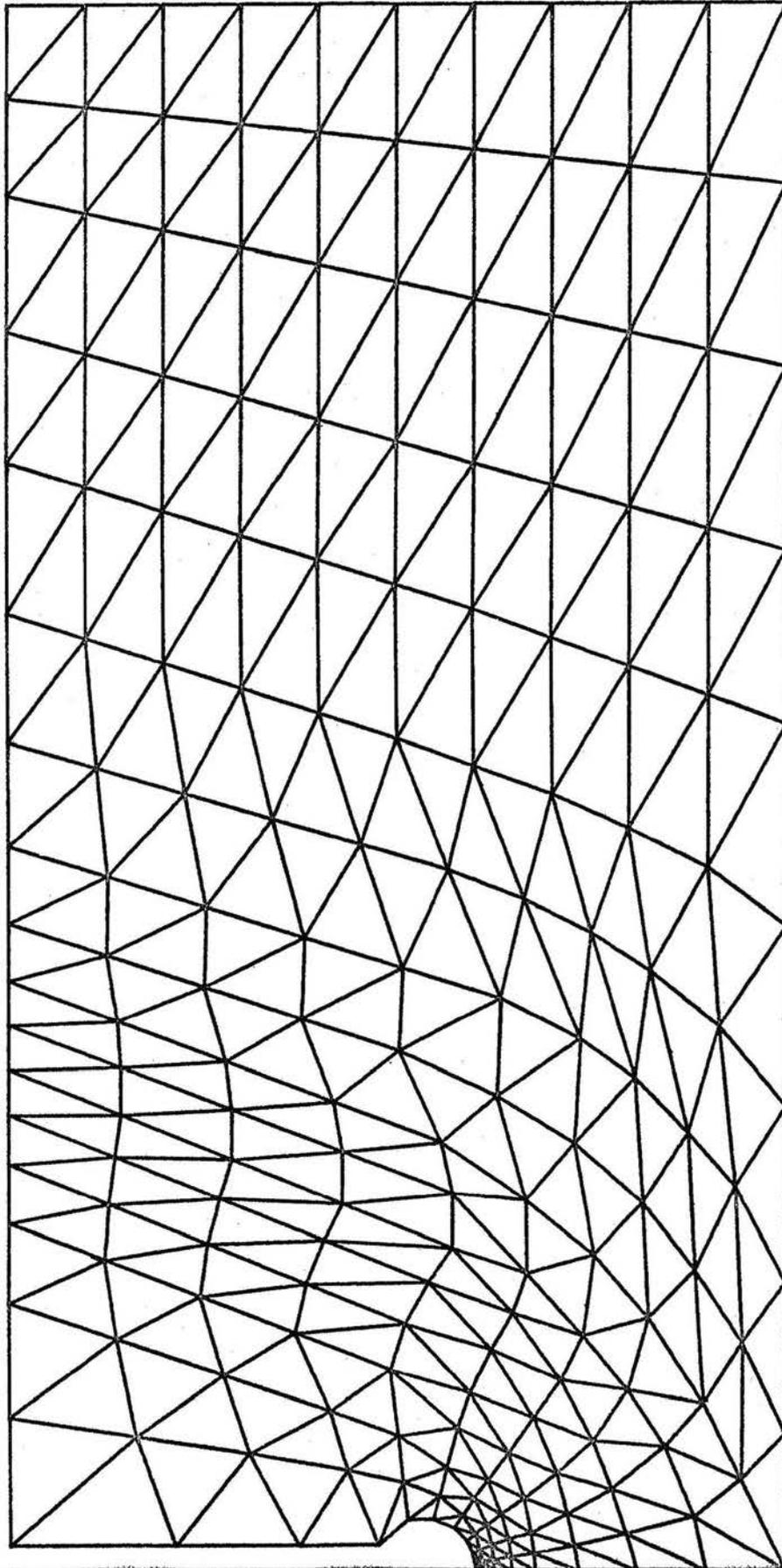
M.: 1:1

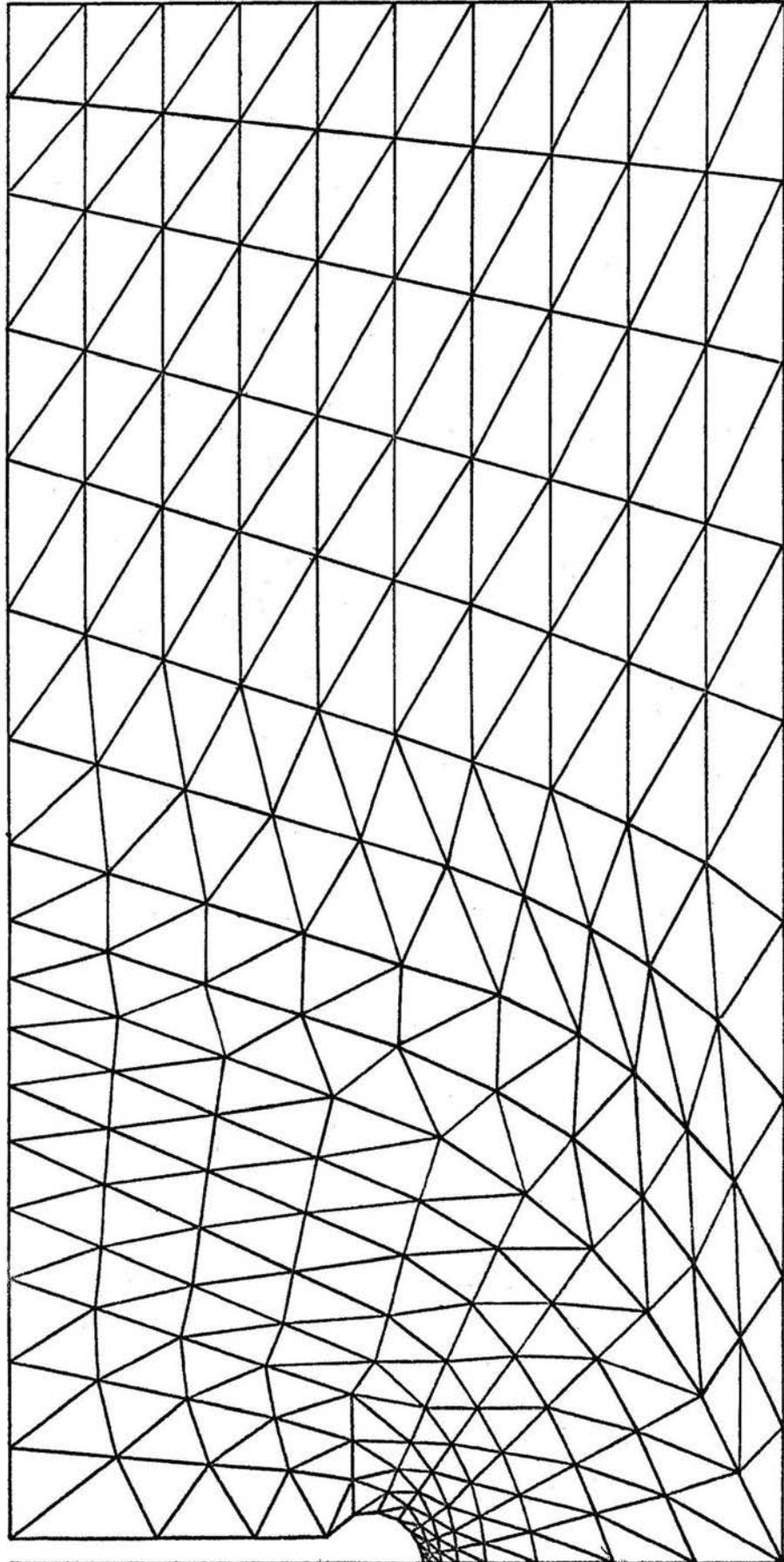


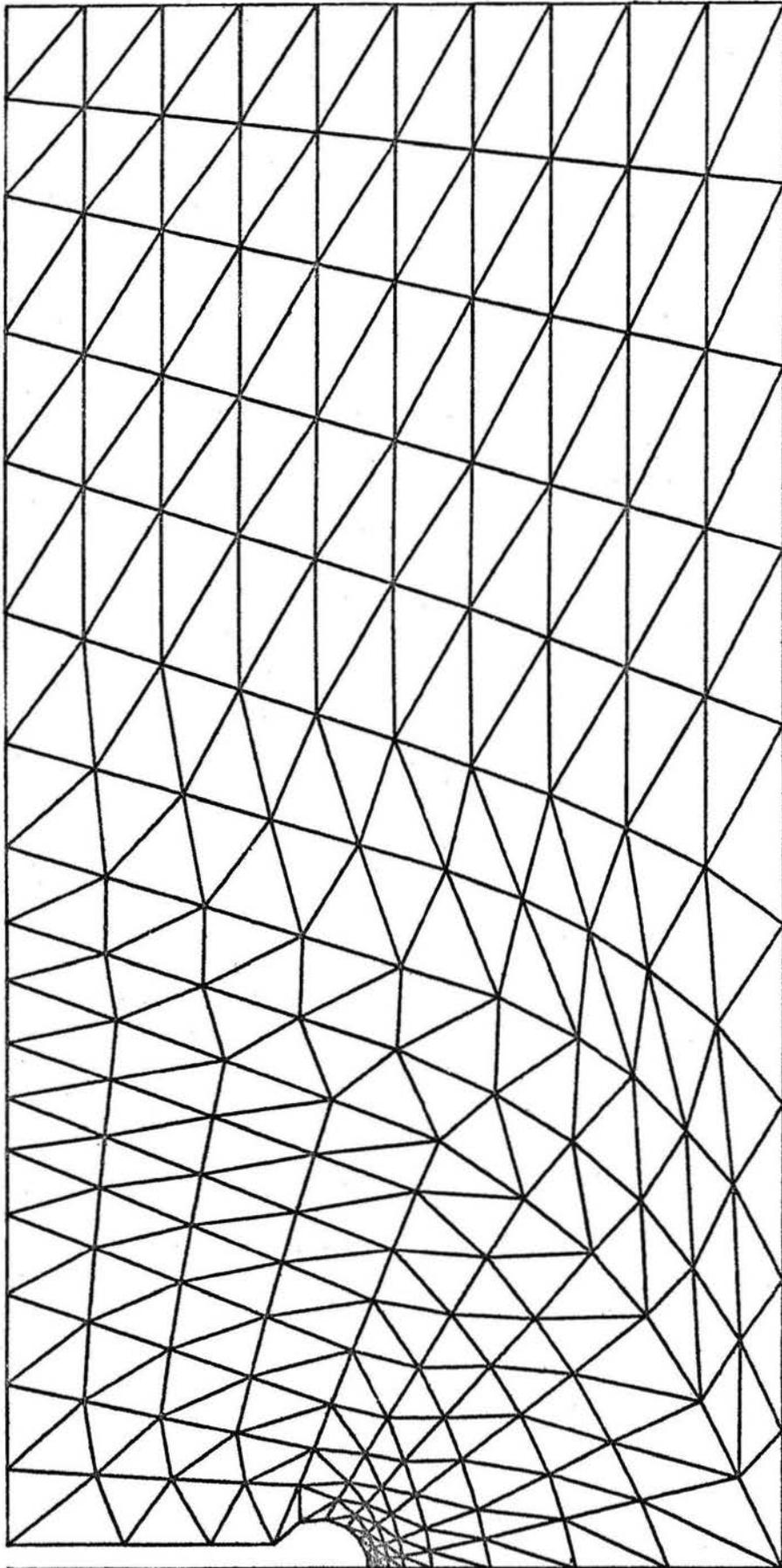
Einzelheit bei „A“ M.: 20:1

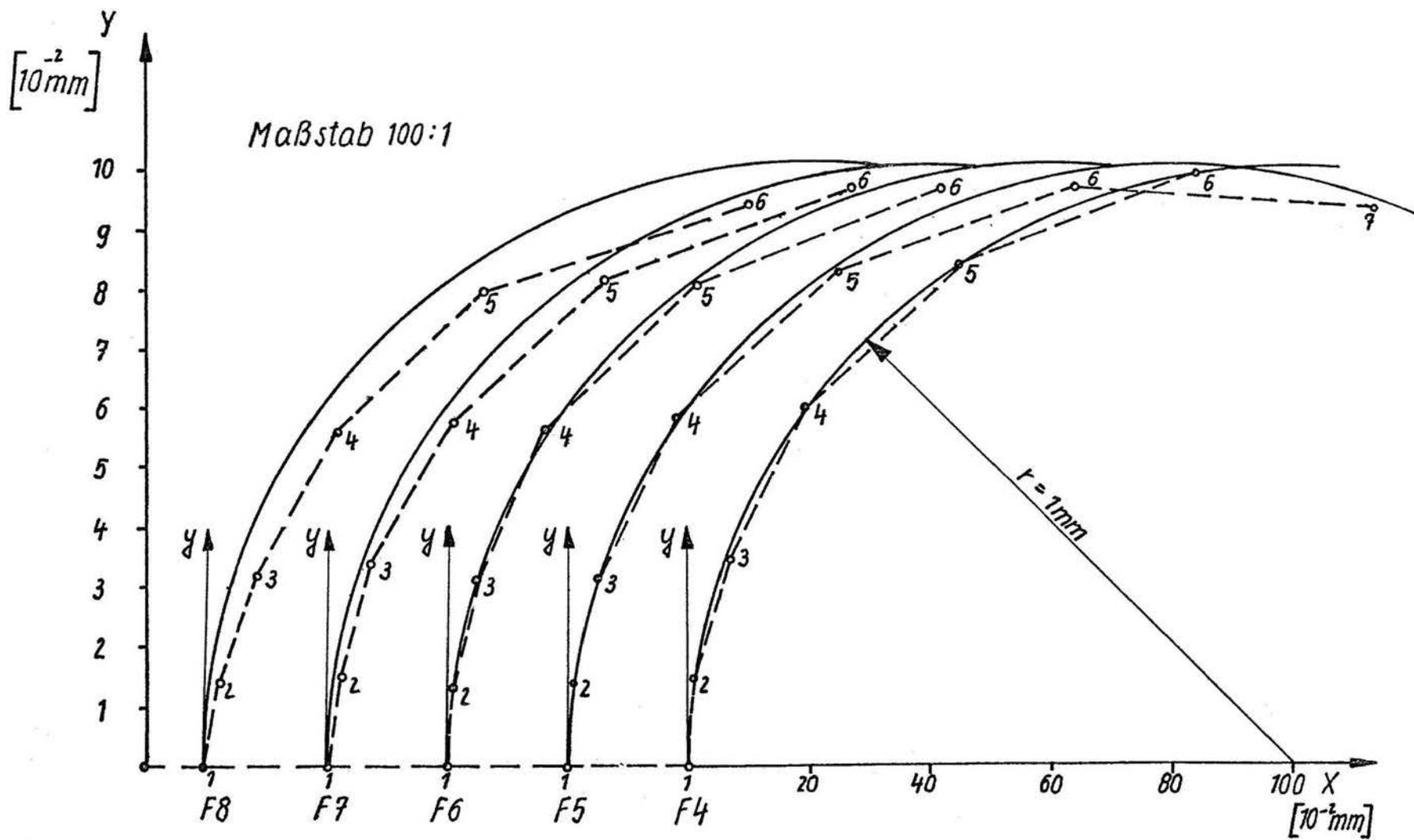










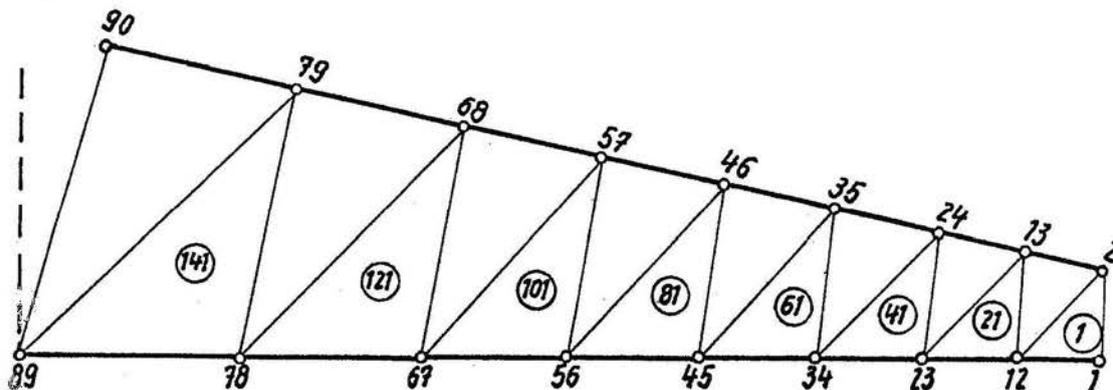


Gegenüberstellung aller
Kerbkonturen der Flachproben

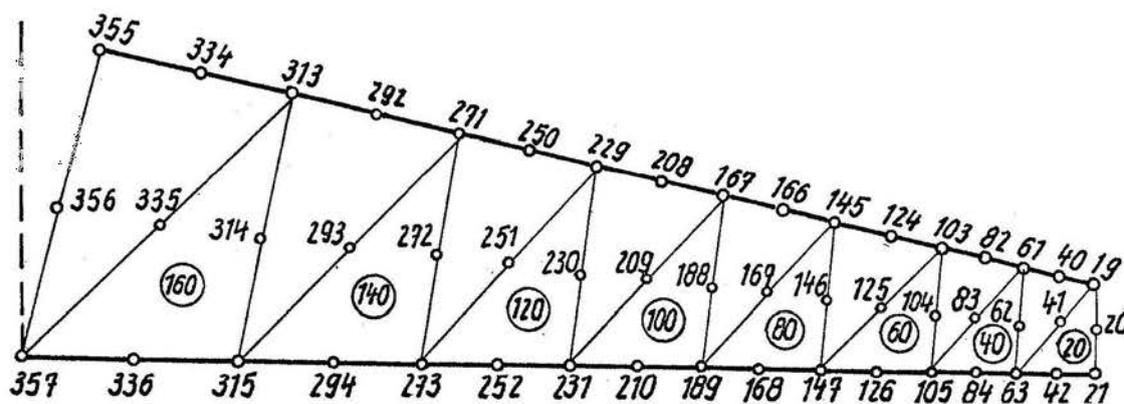
Anhang A 13

1. Flachprobe

a) DV 1

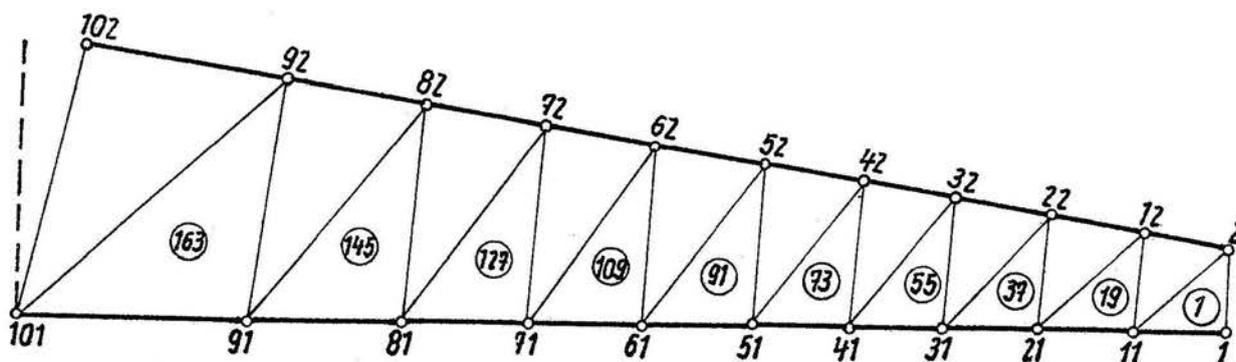


b) DV 2

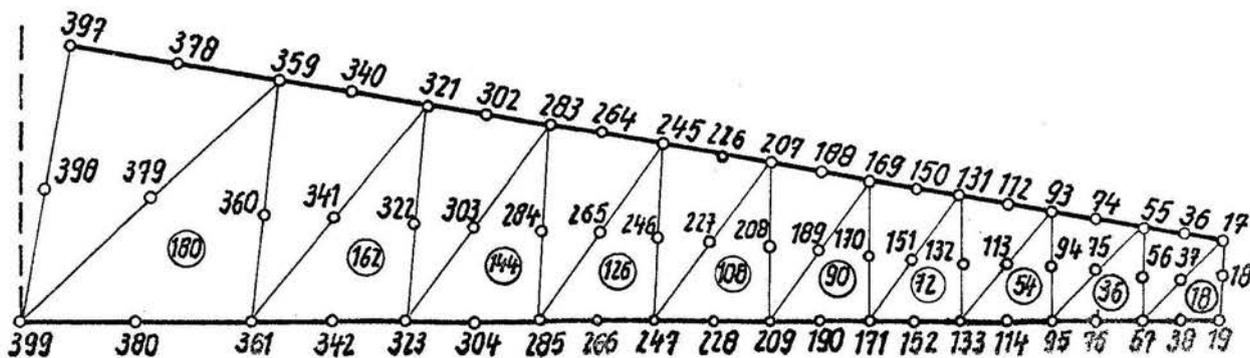


2. Rundprobe

a) DV 1



b) DV 2



Flachprobe F 4*

B = 4.0 mm b = 14.94 mm $\sigma_n = 100 \text{ N/mm}^2$

Element	x[mm]	$\Delta x [10^{-2} \text{ mm}]$	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_v	α_K	α_v
1	3.95	5	14.25	296.64	-13.79	290.76	2.97	2.91
21	3.80	20	43.64	226.22	- 3.56	207.95	2.26	2.08
41	3.59	41	57.35	178.86	1.08	158.20	1.79	1.58
61	3.31	69	61.61	142.69	3.04	124.07	1.43	1.24

Flachprobe F 4

B = 4.0 mm b = 14.94 mm $\sigma_n = 100 \text{ N/mm}^2$

Element	x[mm]	$\Delta x [10^{-2} \text{ mm}]$	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_v	α_K	α_v
1	3.96	4	14.25	295.54	-13.68	289.65	2.96	2.90
21	3.80	20	43.58	226.73	- 3.92	208.50	2.27	2.09
41	3.59	41	57.63	179.06	1.01	158.33	1.79	1.58
61	3.31	69	61.91	142.71	3.06	124.06	1.43	1.24

Flachprobe F 5*

B = 4.97 mm b = 14.94 mm $\sigma_n = 100.604 \text{ N/mm}^2$

Element	x[mm]	$\Delta x [10^{-2} \text{ mm}]$	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_v	α_K	α_v
1	4.93	4	12.85	320.91	-12.85	315.46	3.19	3.14
21	4.77	20	47.03	258.18	- 4.57	238.30	2.57	2.37
41	4.52	45	65.22	197.14	1.25	173.97	1.96	1.73
61	4.14	83	66.87	144.18	3.10	125.08	1.43	1.24

Flachprobe F 6*

B = 5.97 mm b = 14.94 mm $\sigma_n = 100.503 \text{ N/mm}^2$

Element	x[mm]	$\Delta x [10^{-2} \text{ mm}]$	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_v	α_K	α_v
1	5.93	4	16.64	346.90	-13.52	339.69	3.45	3.38
21	5.76	21	51.52	269.79	- 3.46	248.14	2.68	2.47
41	5.50	47	68.62	201.61	1.64	177.57	2.01	1.77
61	5.12	85	68.34	150.47	3.32	130.62	1.50	1.30

Flachprobe F 6

B = 5.97 mm

b = 14.94 mm

$\sigma_n = 67.002 \text{ N/mm}^2$

Element	x[mm]	$\Delta x [10^2 \text{ mm}]$	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_v	α_K	α_v
1	5.93	4	10.95	233.76	- 9.28	229.05	3.49	3.42
21	5.76	21	35.02	181.19	- 2.32	166.51	2.70	2.49
41	5.50	47	46.28	134.73	1.23	118.59	2.01	1.77
61	5.12	85	45.81	100.34	2.31	87.10	1.50	1.30

Flachprobe F 7*

B = 6.96 mm

b = 14.94 mm

$\sigma_n = 100.575 \text{ N/mm}^2$

Element	x[mm]	$\Delta x [10^2 \text{ mm}]$	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_v	α_K	α_v
1	6.92	4	21.41	391.01	-17.74	382.00	3.89	3.80
21	6.75	21	62.26	285.88	- 1.67	260.40	2.84	2.59
41	6.51	45	75.81	215.25	3.03	189.18	2.14	1.88
61	6.12	84	73.85	158.98	4.23	137.99	1.58	1.37

Flachprobe F 8*

B = 7.96 mm

b = 14.94 mm

$\sigma_n = 100.503 \text{ N/mm}^2$

Element	x[mm]	$\Delta x [10^2 \text{ mm}]$	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_v	α_K	α_v
1	7.92	4	25.33	435.95	-20.11	425.28	4.34	4.23
21	7.74	22	69.53	295.15	1.20	267.26	2.94	2.66
41	7.52	44	78.56	222.59	4.33	195.67	2.21	1.95
61	7.14	82	76.23	168.83	4.70	146.67	1.68	1.46

Flachprobe F 8

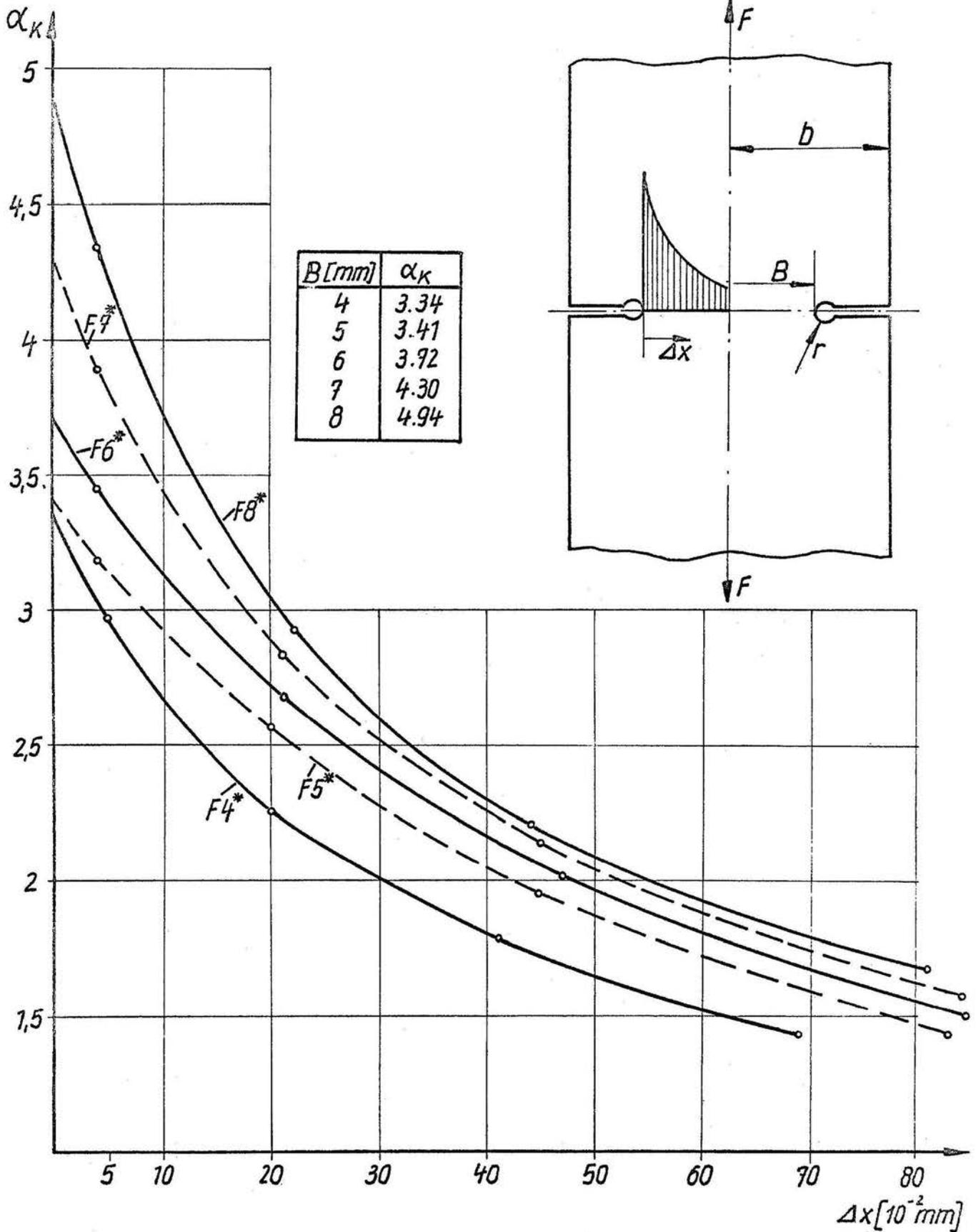
B = 7.96 mm

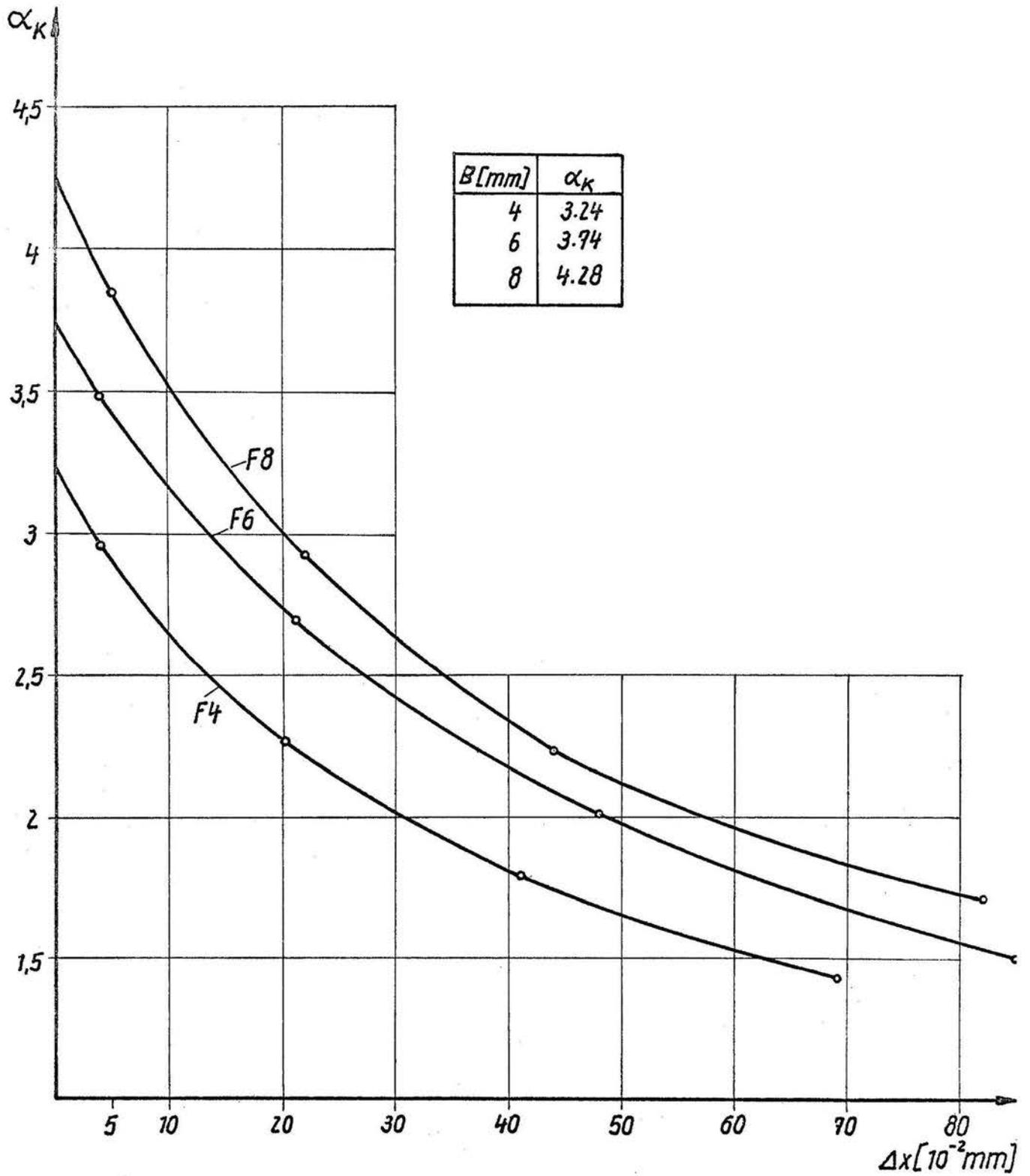
b = 14.94 mm

$\sigma_n = 100.503 \text{ N/mm}^2$

Element	x[mm]	$\Delta x [10^2 \text{ mm}]$	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_v	α_K	α_v
1	7.91	5	18.23	387.17	-15.42	379.32	3.85	3.77
21	7.74	22	57.47	293.30	- 2.91	269.25	2.92	2.68
41	7.52	44	72.25	224.95	2.14	198.95	2.24	1.98
61	7.14	82	73.76	171.58	3.79	149.22	1.71	1.48

$b = 15\text{ mm}$ $r = 1\text{ mm}$ Dicke $h = 4\text{ mm}$





Flachprobe F 4*

B = 4.0 mm

b = 14.94 mm

$$\sigma_k = 53.33 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_n = 199.18755 \text{ N/mm}^2 \quad \alpha_{k21} = 2.87$$

Element	x1[mm]	$\Delta x [10^{-2} \text{mm}]$	σ_x	σ_y	τ_{xy}
20	3.955	4.5	26.095	527.14	25.254
40	3.797	20.3	77.425	407.00	14.324
60	3.587	41.3	103.57	320.23	5.923
80	3.307	69.3	114.02	256.20	1.436

Element	σ_2	σ_1	σ_v	α_k	α_v	α_τ	α_D
20	24.826	528.41	510.45	2.65	2.56	2.65	2.62
40	76.803	407.62	375.17	2.04	1.88	2.04	1.93
60	103.41	320.39	283.21	1.61	1.42	1.61	1.45
80	114.00	256.22	222.34	1.29	1.12	1.29	1.11

Flachprobe F 4

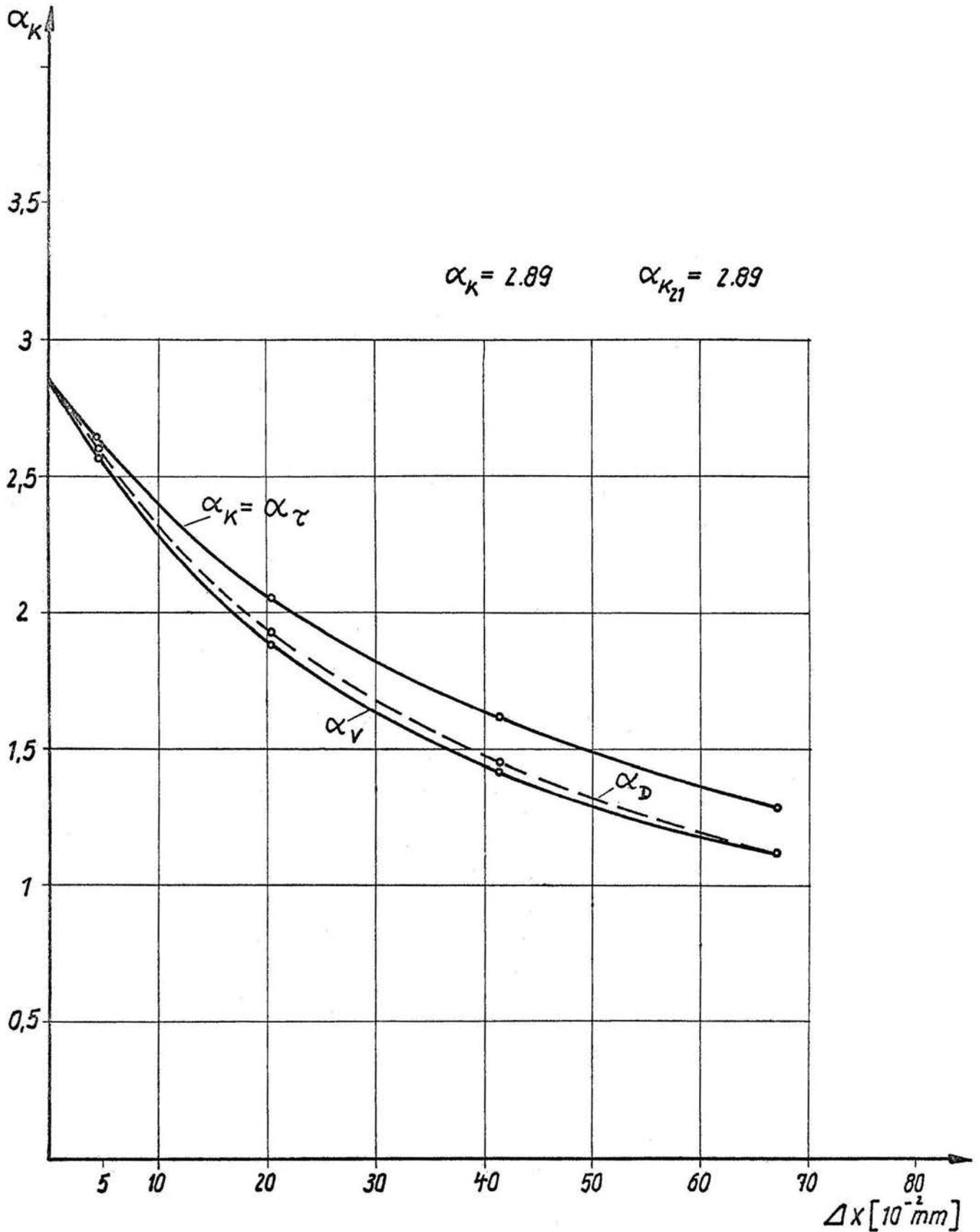
B = 4.0 mm

b = 14.94 mm

$$\sigma_k = 46.67 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_n = 174.31245 \text{ N/mm}^2 \quad \alpha_{k21} = 2.89$$

Element	x[mm]	$\Delta x [10^{-2} \text{mm}]$	σ_x	σ_y	τ_{xy}
20	3.955	4.5	22.307	459.36	21.983
40	3.797	20.3	67.316	356.68	12.624
60	3.587	41.3	90.911	280.61	5.372
80	3.307	69.3	100.30	224.25	1.279

Element	σ_1	σ_2	σ_v	α_k	α_v	α_τ	α_D
20	460.46	21.802	449.95	2.64	2.58	2.64	2.60
40	357.23	66.766	328.97	2.05	1.89	2.05	1.93
60	280.76	90.759	248.16	1.61	1.42	1.61	1.45
80	224.26	100.29	194.57	1.29	1.12	1.29	1.11



Flachprobe F 5*

$B = 4.97 \text{ mm}$

$b = 14.94 \text{ mm}$

$\sigma_k = 40.0 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_n = 120.24144 \text{ N/mm}^2$

$\alpha_{k21} = 2.98$

Element	x [mm]	$\Delta x [10^3 \text{ mm}]$	σ_x	σ_y	τ_{xy}
20	4.927	4.3	13.323	347.03	13.323
40	4.767	20.3	48.331	273.32	6.920
60	4.518	45.2	69.280	206.28	2.987
80	4.143	82.7	75.083	156.10	0.087

Element	σ_z	σ_1	σ_v	α_k	α_v	α_τ	α_D
20	12.792	347.56	341.35	2.89	2.84	2.89	2.86
40	47.987	273.67	253.11	2.28	2.11	2.28	2.16
60	69.215	206.35	181.90	1.72	1.51	1.72	1.54
80	75.083	156.10	135.22	1.30	1.12	1.30	1.11

Flachprobe F 5

$B = 4.97 \text{ mm}$

$b = 14.94 \text{ mm}$

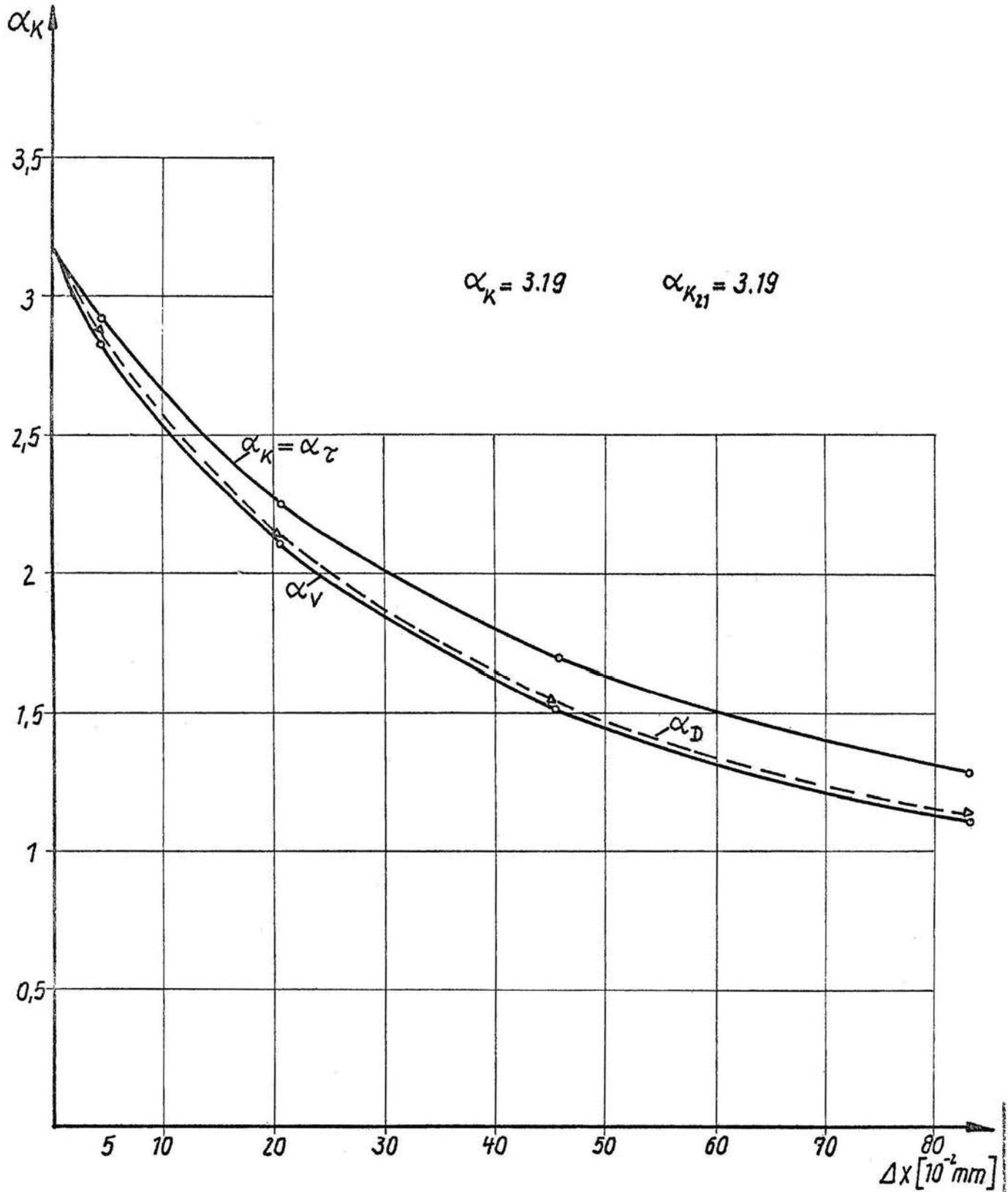
$\sigma_k = 46.67 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_n = 140.292 \text{ N/mm}^2$

$\alpha_{k21} = 3.19$

Element	x [mm]	$\Delta x [10^3 \text{ mm}]$	σ_x	σ_y	τ_{xy}
20	4.928	4.2	19.071	410.71	18.439
40	4.767	20.3	58.541	316.72	9.346
60	4.518	45.2	80.895	239.18	3.156
80	4.145	83.0	67.029	181.58	0.063

Element	σ_1	σ_2	σ_v	α_k	α_v	α_τ	α_D
20	411.58	18.205	402.78	2.93	2.87	2.93	2.89
40	317.06	58.203	292.33	2.26	2.08	2.25	2.14
60	239.24	80.832	210.79	1.70	1.50	1.70	1.53
80	181.58	87.029	157.29	1.29	1.12	1.29	1.11



Flachprobe F 6*

B = 5.975 mm

b = 14.94 mm

$\sigma_k = 40.0 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_n = 100.01673 \text{ N/mm}^2$

$\alpha_{k21} = 3.44$

Element	x[mm]	$\Delta x [10^{-2} \text{ mm}]$	σ_x	σ_y	τ_{xy}
20	5.928	4.7	14.993	307.59	12.182
40	5.757	21.8	44.056	237.60	6.289
60	5.497	47.8	60.707	179.44	2.146
80	5.118	85.7	64.773	136.60	0.091

Element	σ_z	σ_1	σ_v	α_k	α_v	α_τ	α_D
20	14.487	308.10	301.11	3.08	3.01	3.08	3.04
40	43.852	237.81	219.19	2.38	2.19	2.38	2.25
60	60.669	179.48	158.13	1.79	1.58	1.79	1.61
80	64.773	136.60	118.35	1.37	1.18	1.37	1.17

Flachprobe F 6

B = 5.975 mm

b = 14.94 mm

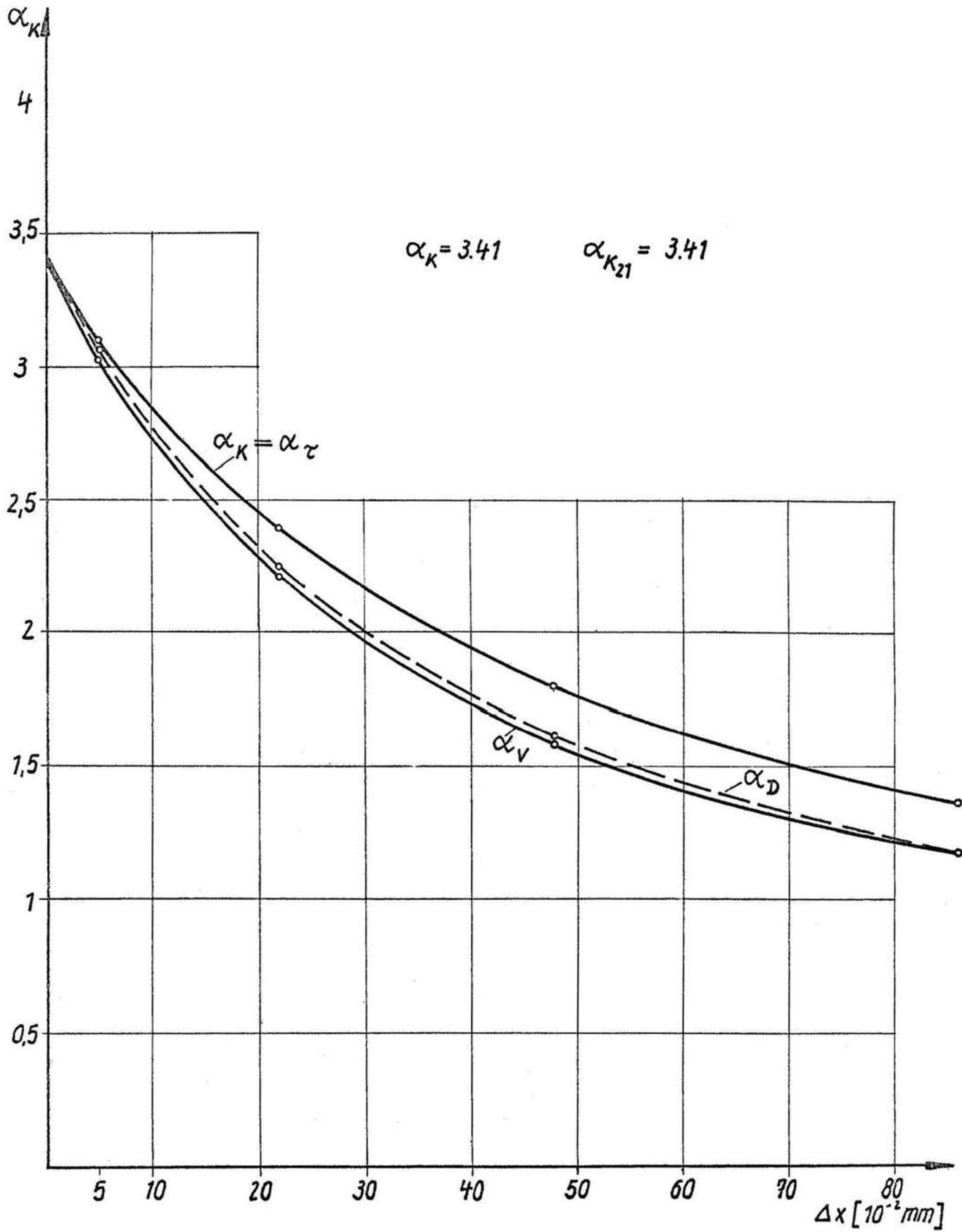
$\sigma_k = 46.67 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_n = 116.69452 \text{ N/mm}^2$

$\alpha_{k21} = 3.41$

Element	x[mm]	$\Delta x [10^{-2} \text{ mm}]$	σ_x	σ_y	τ_{xy}
20	5.928	4.7	17.295	361.26	-14.185
40	5.757	21.8	52.318	278.11	-7.543
60	5.497	47.8	71.503	209.32	-2.416
80	5.118	85.7	75.877	159.24	1.729

Element	σ_1	σ_z	σ_v	α_k	α_v	α_τ	α_D
20	361.85	16.711	353.79	3.10	3.03	3.10	3.06
40	278.36	52.067	258.32	2.39	2.21	2.39	2.24
60	209.36	71.520	184.32	1.79	1.58	1.79	1.61
80	159.24	75.877	137.95	1.36	1.18	1.36	1.17



Flachprobe F 7*

$B = 6.965 \text{ mm}$

$b = 14.94 \text{ mm}$

$\sigma_k = 46.67 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_n = 100.108 \text{ N/mm}^2$

$\alpha_{k21} = 4.00$

Element	$x [\text{mm}]$	$\Delta x [10^2 \text{mm}]$	σ_x	σ_y	τ_{xy}
20	6.917	4.8	21.916	344.25	18.159
40	6.747	21.8	54.619	253.36	6.622
60	6.510	45.5	67.698	192.10	1.873
80	6.118	84.7	69.232	144.02	0.652

Element	σ_2	σ_1	σ_v	α_k	α_v	α_τ	α_D
20	20.896	345.27	335.31	3.43	3.35	3.43	3.37
40	54.399	253.58	231.24	2.53	2.31	2.53	2.37
60	67.970	192.13	168.75	1.92	1.69	1.92	1.72
80	69.227	144.02	124.76	1.44	1.25	1.44	1.23

Flachprobe F 7

$B = 6.965 \text{ mm}$

$b = 14.94 \text{ mm}$

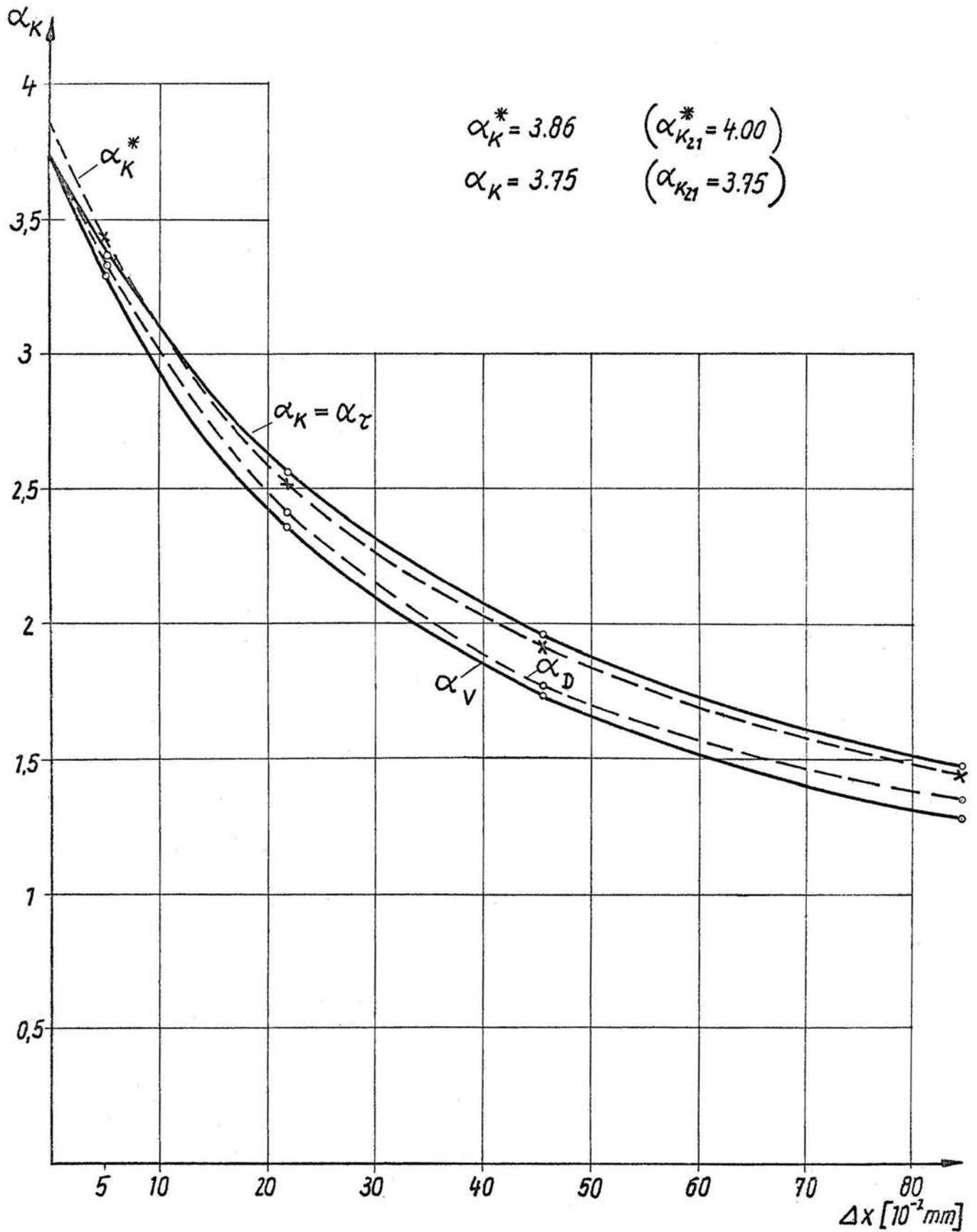
$\sigma_k = 53.33 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_n = 112.32607 \text{ N/mm}^2$

$\alpha_{k21} = 3.75$

Element	$x [\text{mm}]$	$\Delta x [10^2 \text{mm}]$	σ_x	σ_y	τ_{xy}
20	6.915	5.0	20.212	378.81	17.179
40	6.747	21.8	56.311	288.25	8.097
60	6.510	45.5	73.733	220.64	2.717
80	6.118	84.7	77.251	165.70	0.413

Element	σ_2	σ_1	σ_v	α_k	α_v	α_τ	α_D
20	19.391	379.63	370.32	3.37	3.30	3.37	3.33
40	56.028	288.54	265.00	2.57	2.36	2.57	2.42
60	73.682	220.69	194.61	1.96	1.73	1.96	1.77
80	77.250	165.70	143.61	1.48	1.28	1.48	1.36



Flachprobe F 8*

$B = 7.96 \text{ mm}$

$b = 14.94 \text{ mm}$

$\sigma_k = 53.33 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_n = 100.094 \text{ N/mm}^2$

$\alpha_{k21} = 4.73$

Element	$x [\text{mm}]$	$\Delta x [10^2 \text{mm}]$	σ_x	σ_y	τ_{xy}
20	7.917	4.3	29.529	381.87	23.449
40	7.743	21.7	64.153	264.99	5.393
60	7.515	44.5	74.079	199.94	1.123
80	7.138	82.2	72.631	150.88	0.992

Element	σ_2	σ_1	σ_v	α_k	α_v	α_τ	α_D
20	27.975	383.42	370.23	3.82	3.70	3.82	3.73
40	64.008	265.14	239.63	2.65	2.39	2.65	2.46
60	74.069	199.95	175.09	2.00	1.75	2.00	1.78
80	72.619	150.89	130.71	1.51	1.31	1.51	1.29

Flachprobe F 8

$B = 7.96 \text{ mm}$

$b = 14.94 \text{ mm}$

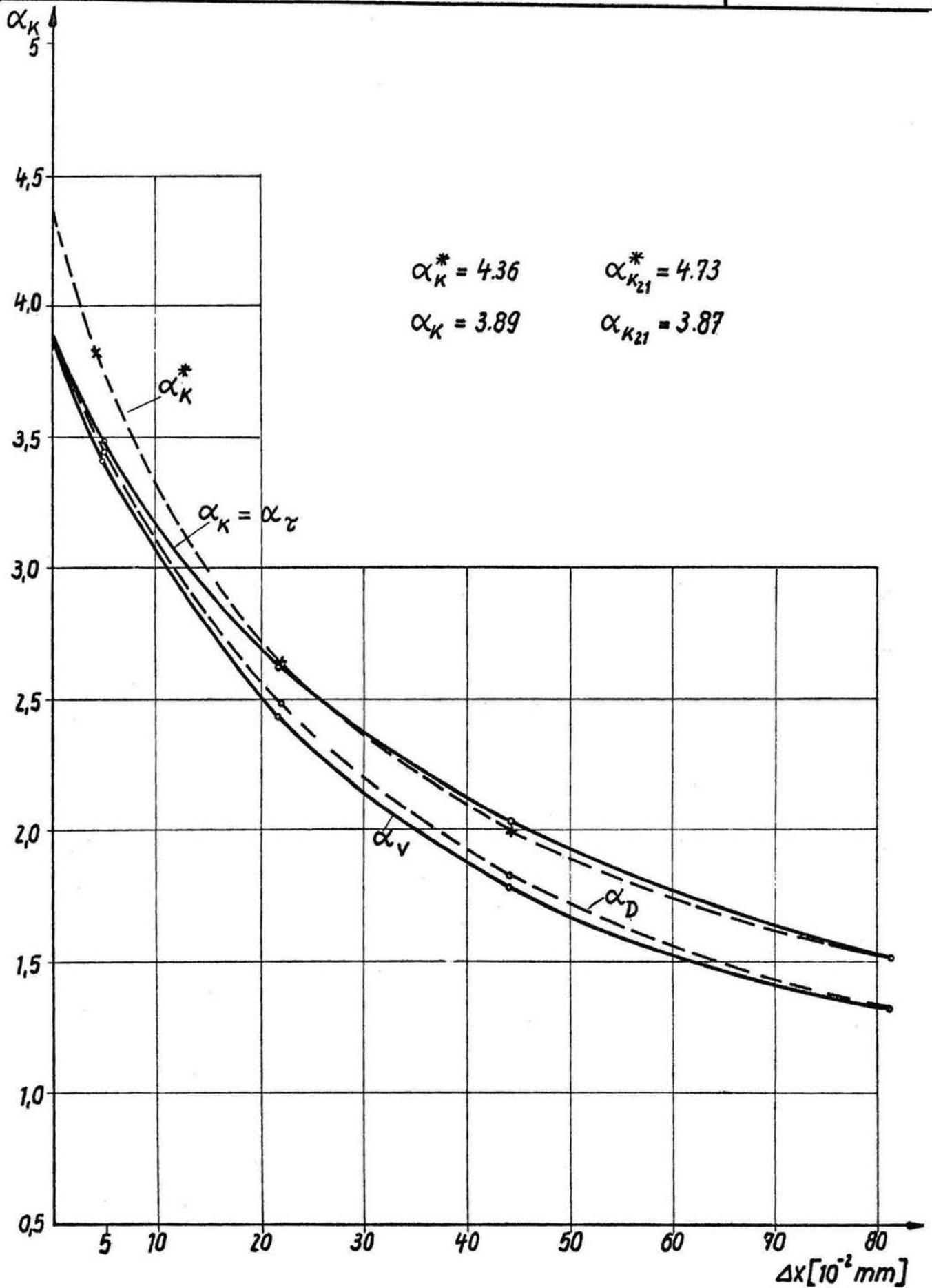
$\sigma_k = 46.67 \text{ N/mm}^2$

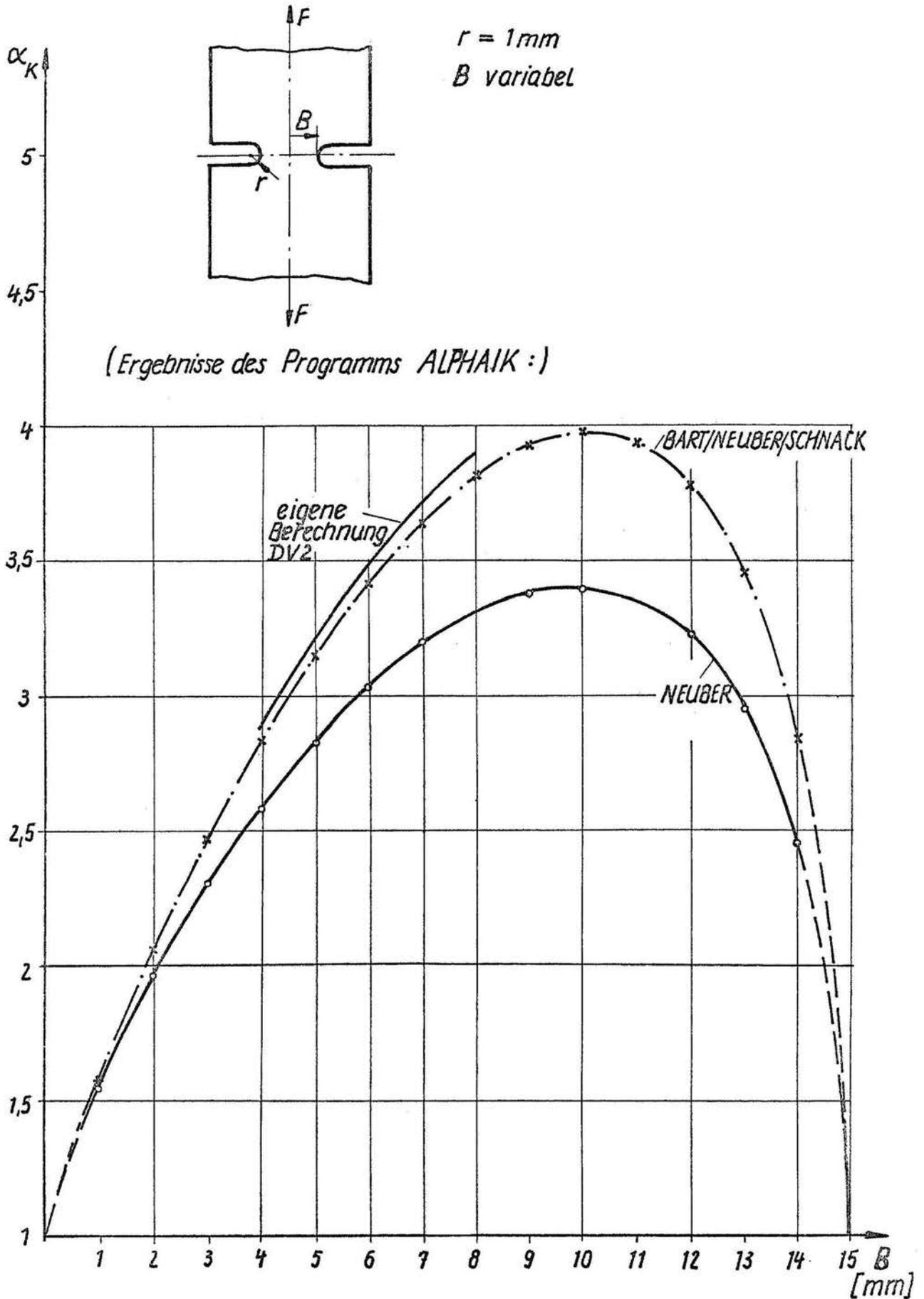
$\sigma_n = 87.594 \text{ N/mm}^2$

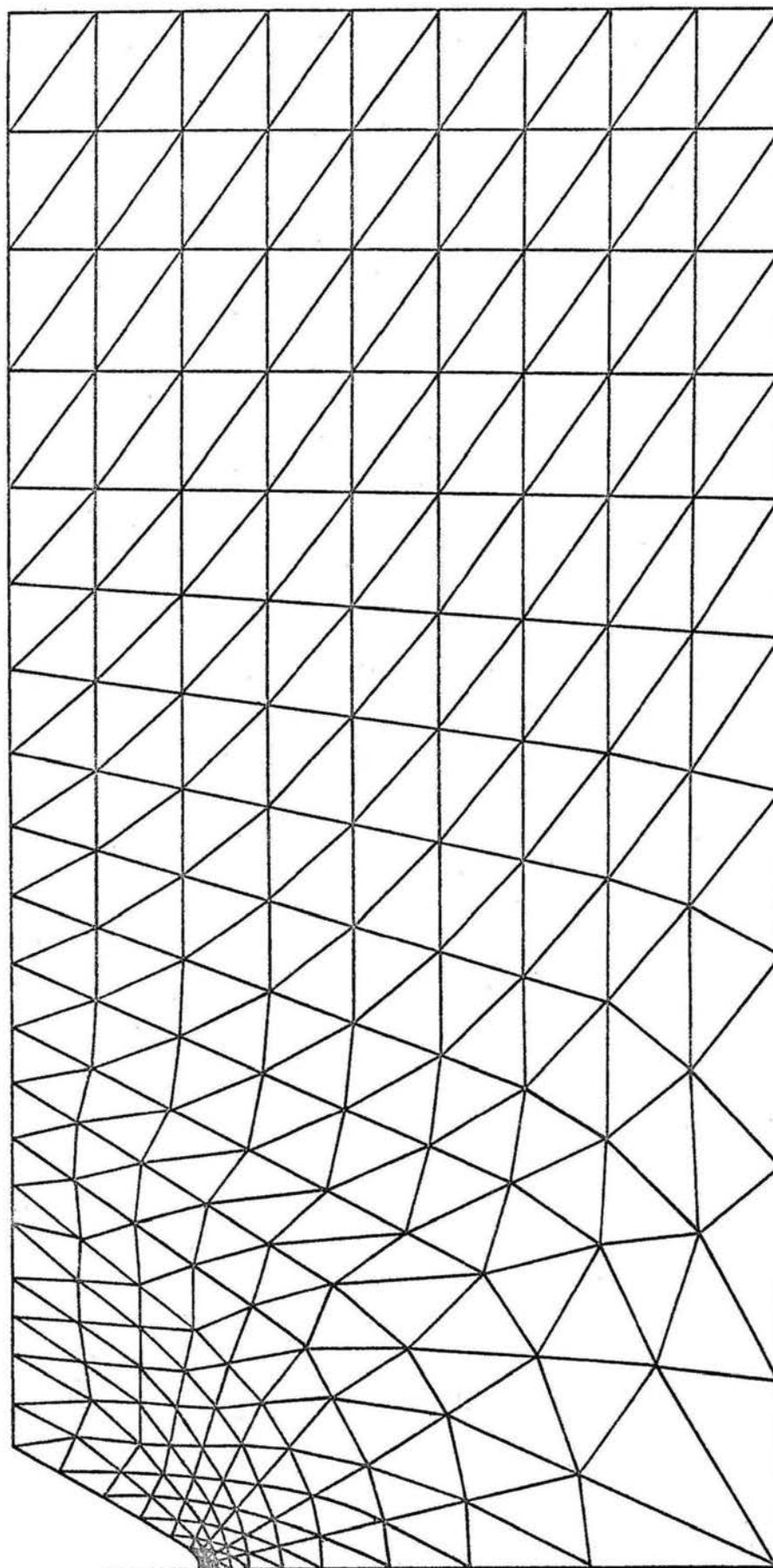
$\alpha_{k21} = 3.87$

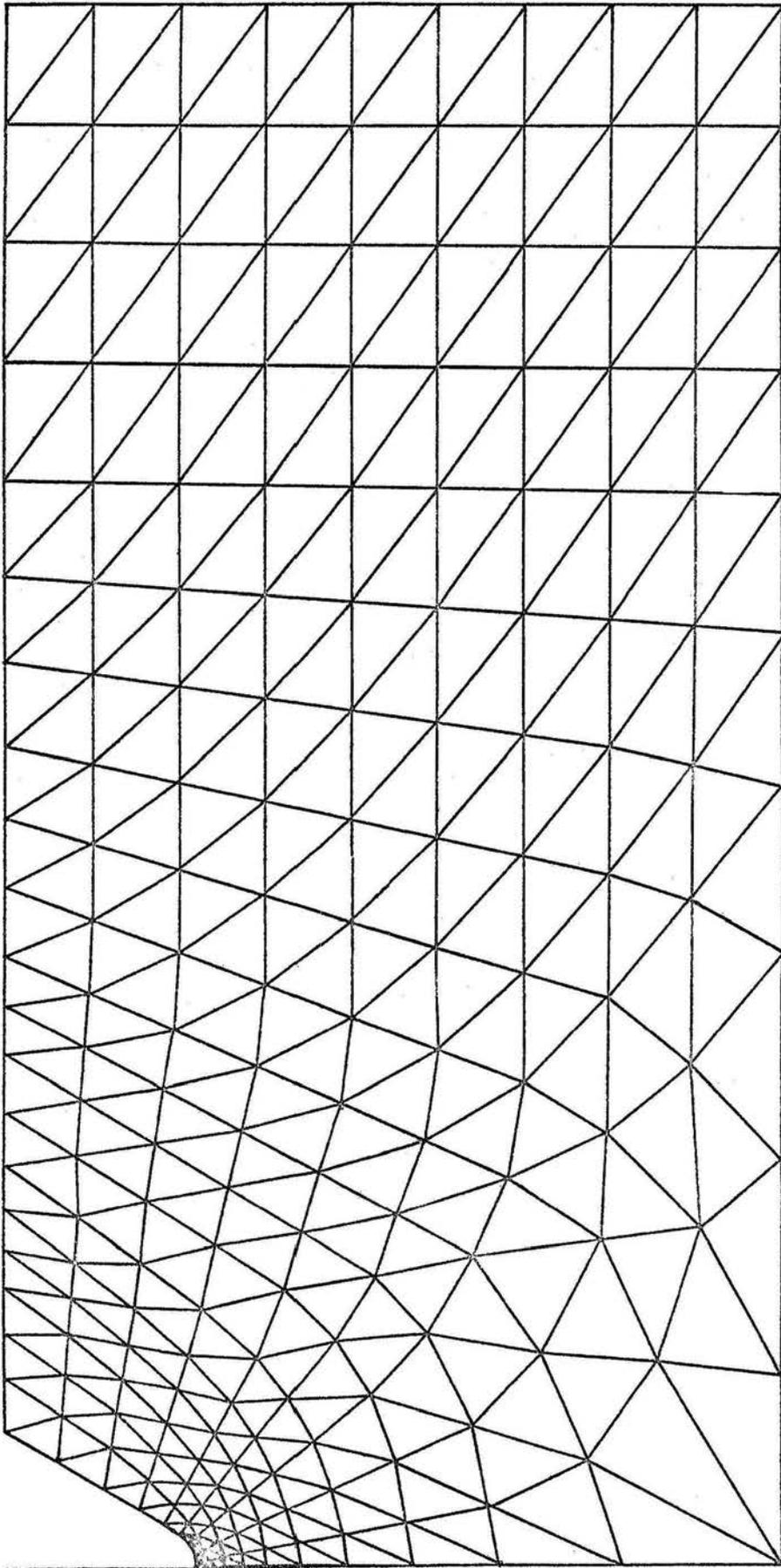
Element	$x [\text{mm}]$	$\Delta x [10^2 \text{mm}]$	σ_x	σ_y	τ_{xy}
20	7.913	4.7	15.544	305.58	13.148
40	7.743	21.7	44.758	231.02	6.175
60	7.515	44.5	58.187	177.45	2.1646
80	7.138	82.2	60.612	134.10	0.332

Element	σ_2	σ_1	σ_v	α_k	α_v	α_τ	α_D
20	14.949	306.18	298.98	3.49	3.41	3.49	3.44
40	44.554	231.22	212.48	2.64	2.43	2.64	2.49
60	58.148	177.48	156.72	2.03	1.79	2.03	1.83
80	60.610	134.10	116.31	1.53	1.33	1.53	1.32









Rundprobe RP1

$B = 2.99 \text{ mm}$ $b = 3.98 \text{ mm}$ $\sigma_n = 100.663 \text{ N/mm}^2$

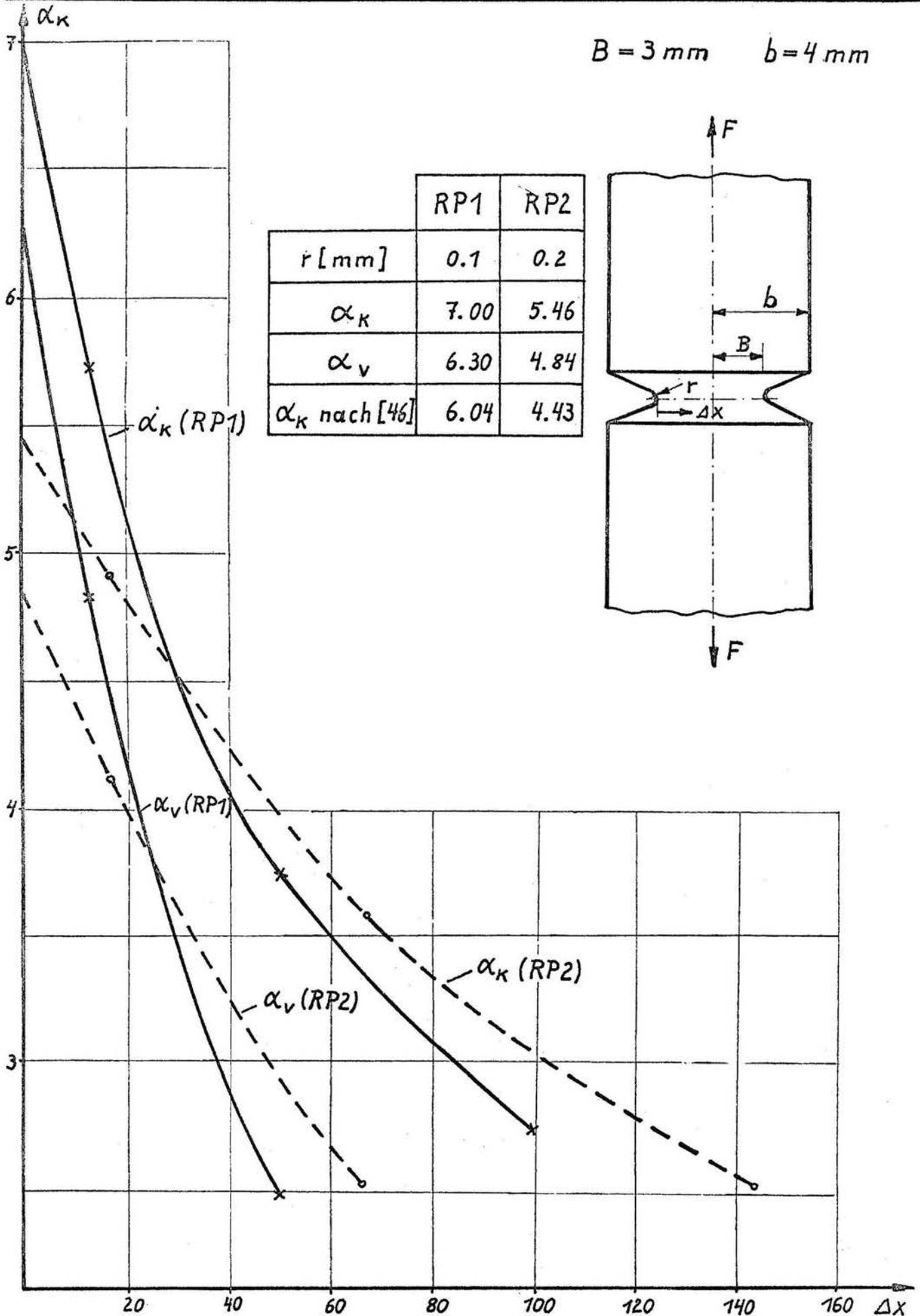
Element	$x \text{ [mm]}$	$\Delta x \text{ [} 10^{-5} \text{ mm]}$	σ_x	σ_z	σ_y	τ_{xy}	σ_v	α_K	α_v
1	2.977	13	43.85	179.38	574.04	-41.34	482.43	5.70	4.79
19	2.940	50	114.14	141.58	373.90	- 4.48	247.31	3.71	2.46
37	2.890	100	122.26	113.80	272.68	5.74	155.14	2.71	1.54
55	2.813	177	107.45	85.55	195.25	9.99	102.03	1.94	1.01

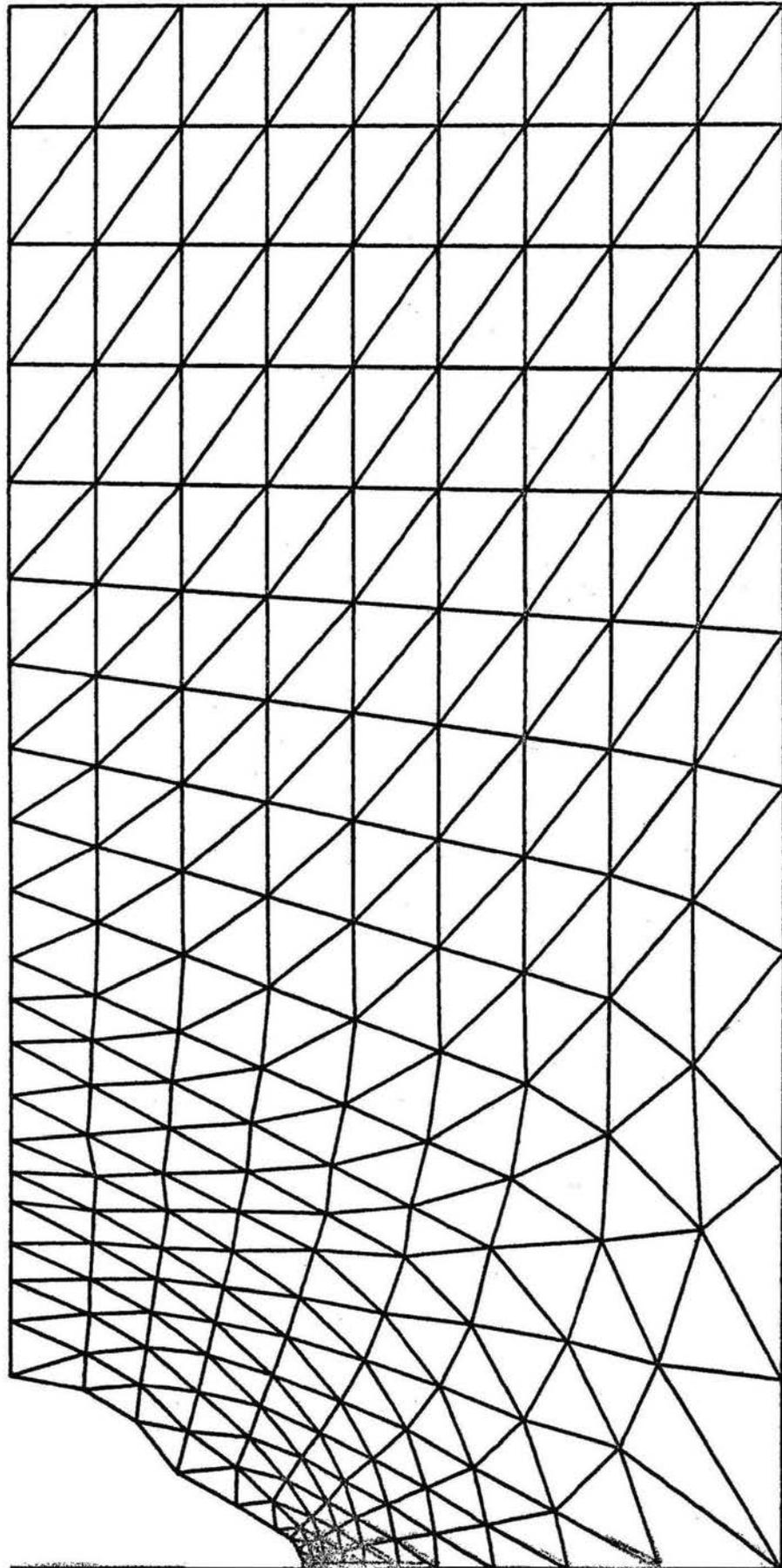
Rundprobe RP2

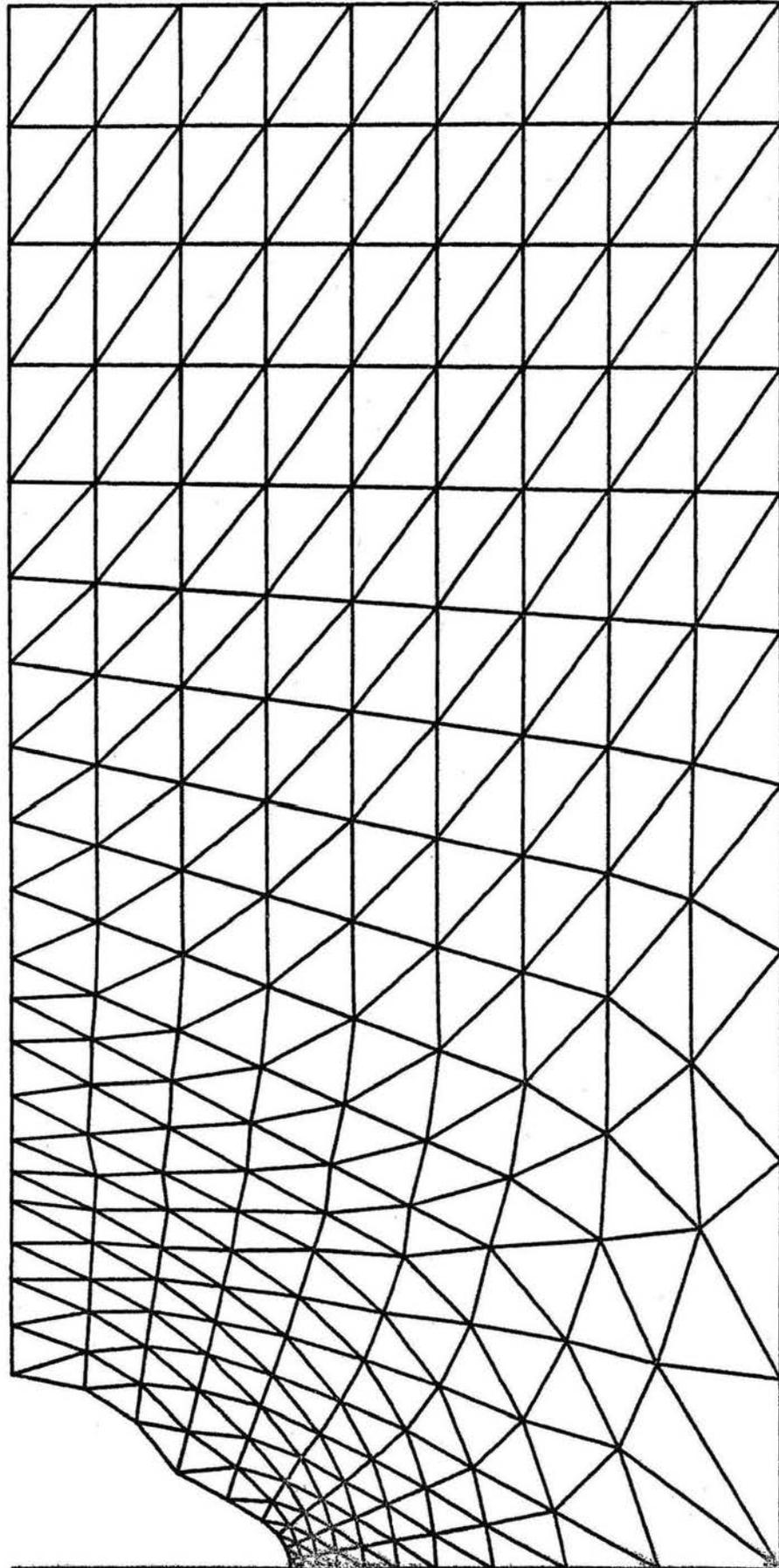
$B = 2.99 \text{ mm}$ $b = 3.98 \text{ mm}$ $\sigma_n = 100.663 \text{ N/mm}^2$

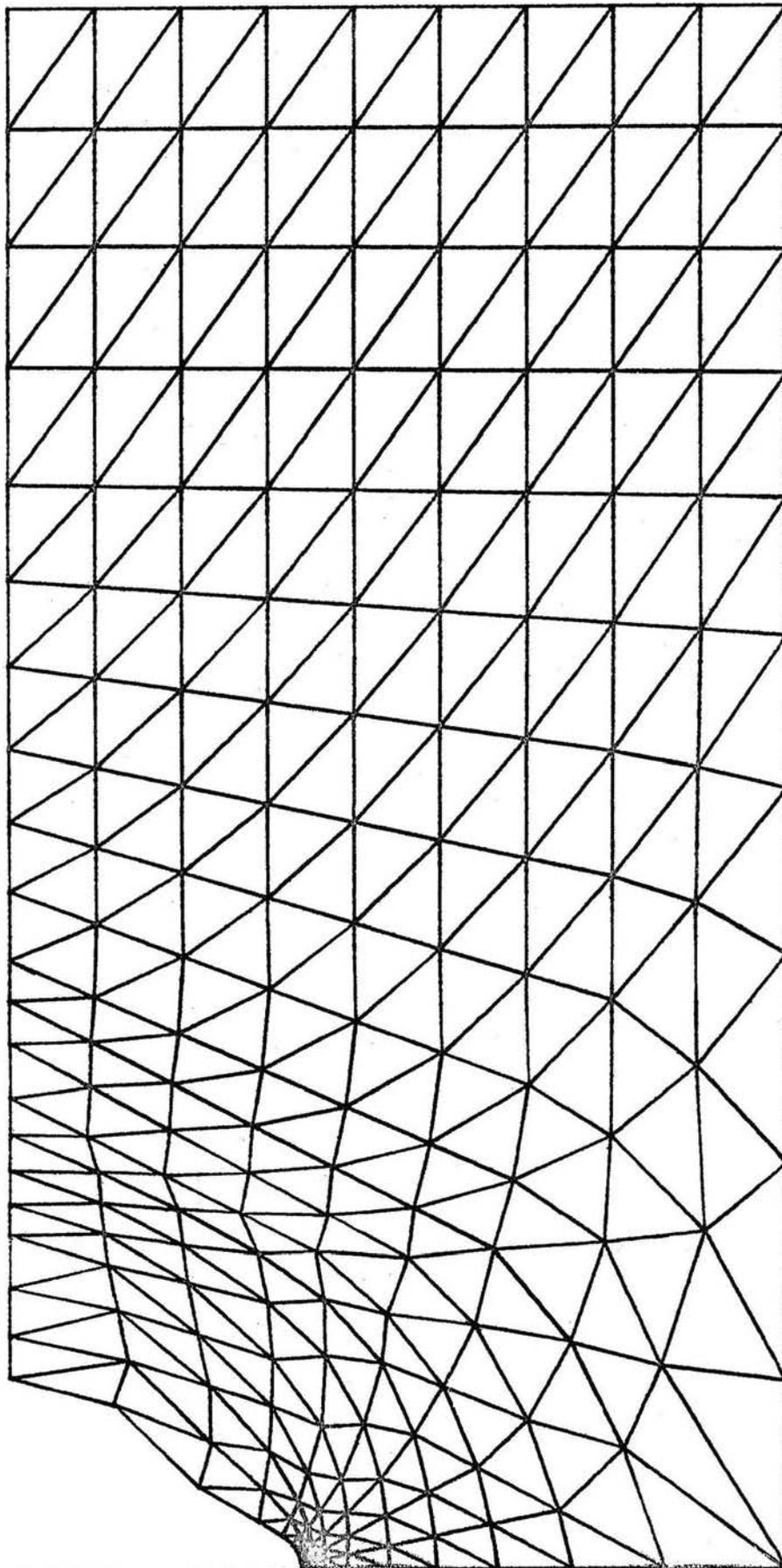
Element	$x \text{ [mm]}$	$\Delta x \text{ [} 10^{-3} \text{ mm]}$	σ_x	σ_z	σ_y	τ_{xy}	σ_v	α_K	α_v
1	2.973	17	40.87	150.63	490.97	-34.03	410.75	4.88	4.08
19	2.923	67	90.97	127.56	358.62	- 7.91	251.85	3.56	2.50
37	2.847	143	100.83	98.50	249.93	4.73	150.50	2.48	1.50
55	2.733	257	89.44	73.37	179.33	8.93	100.11	1.78	0.99

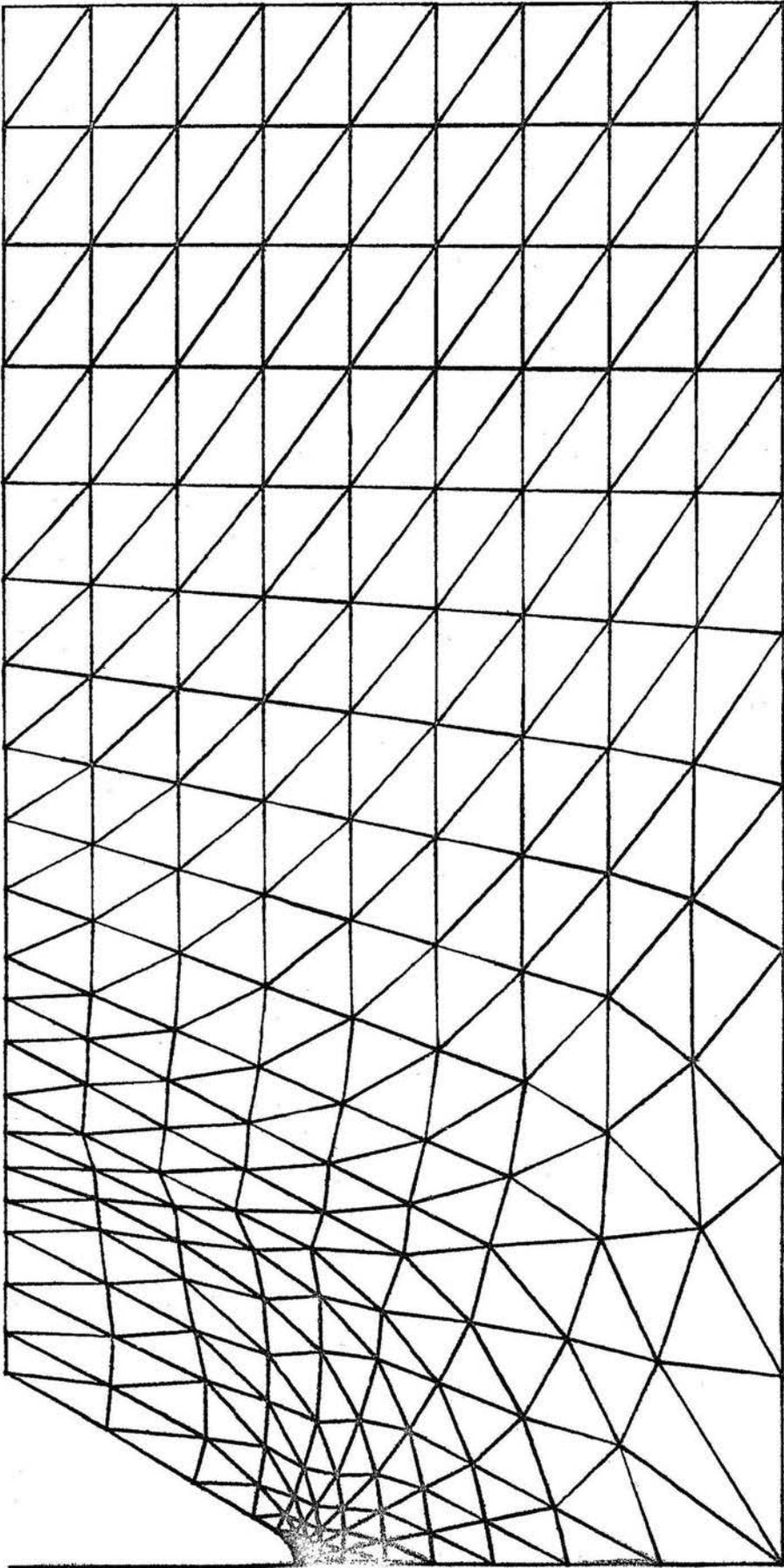
$B = 3 \text{ mm}$ $b = 4 \text{ mm}$

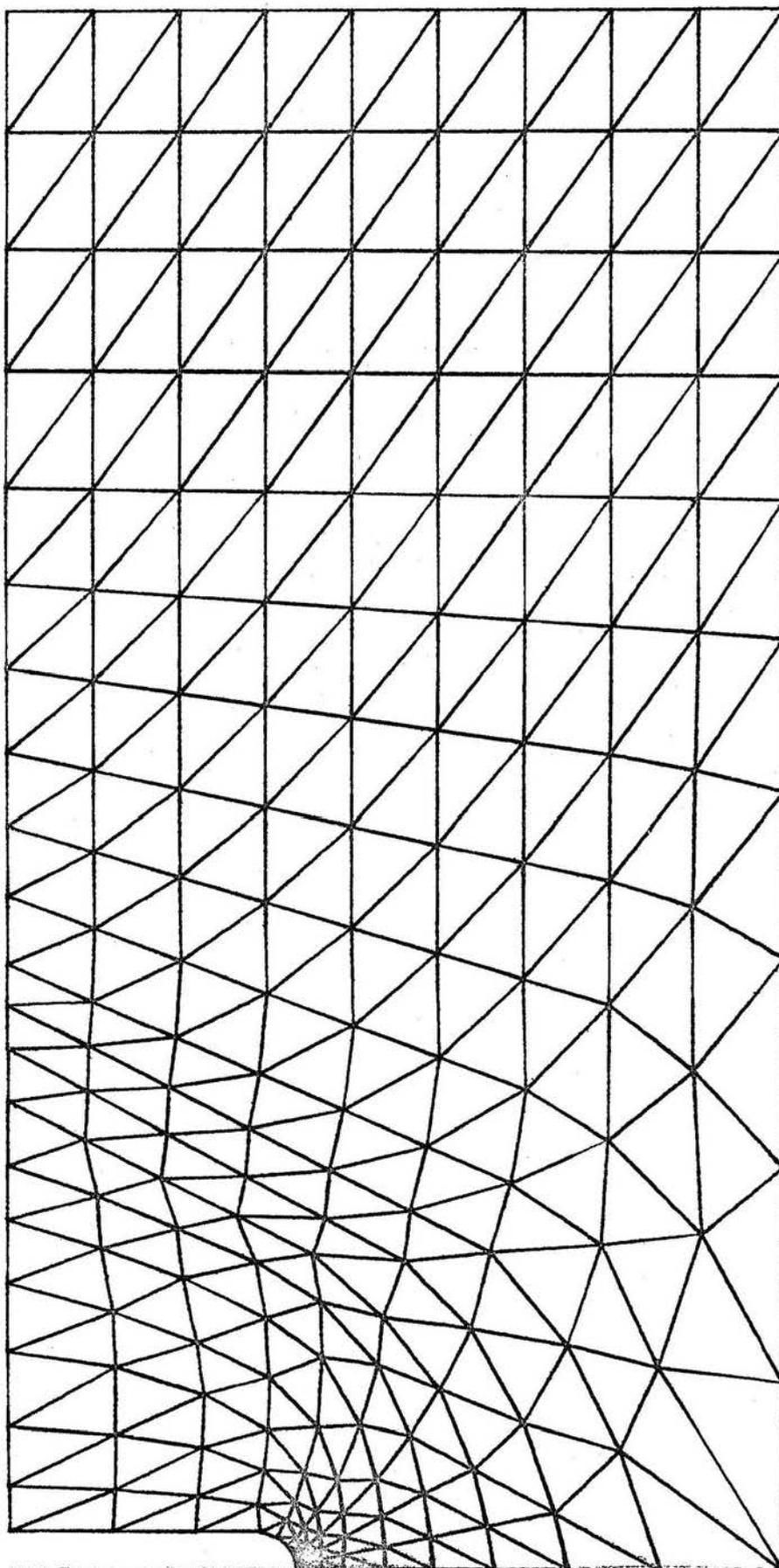




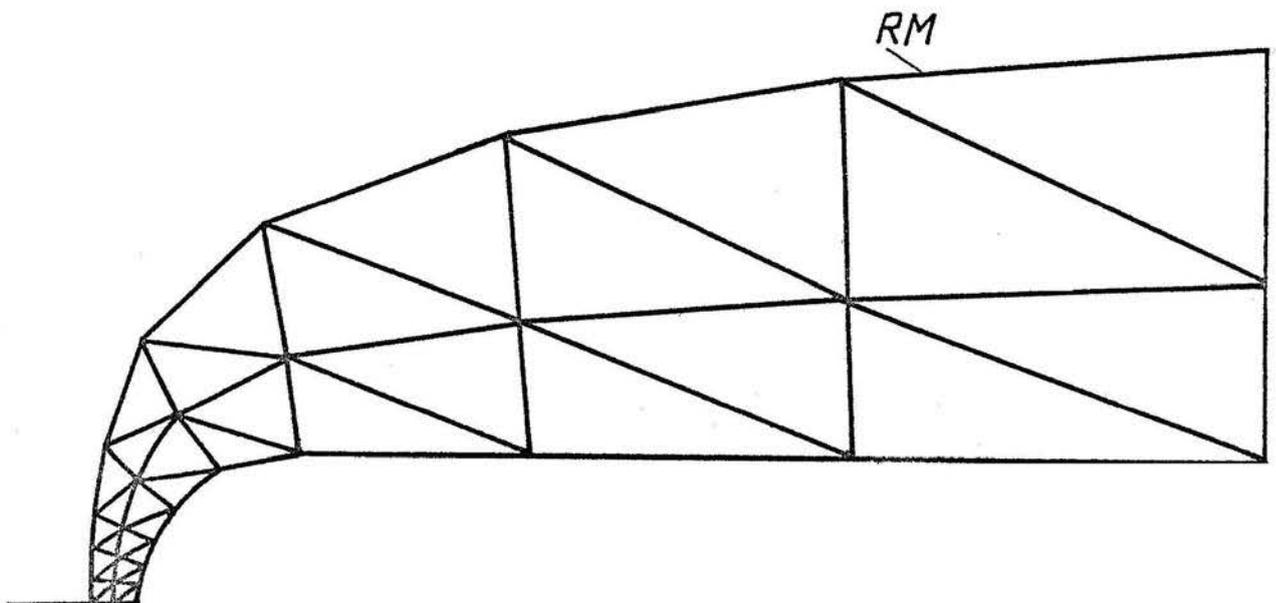
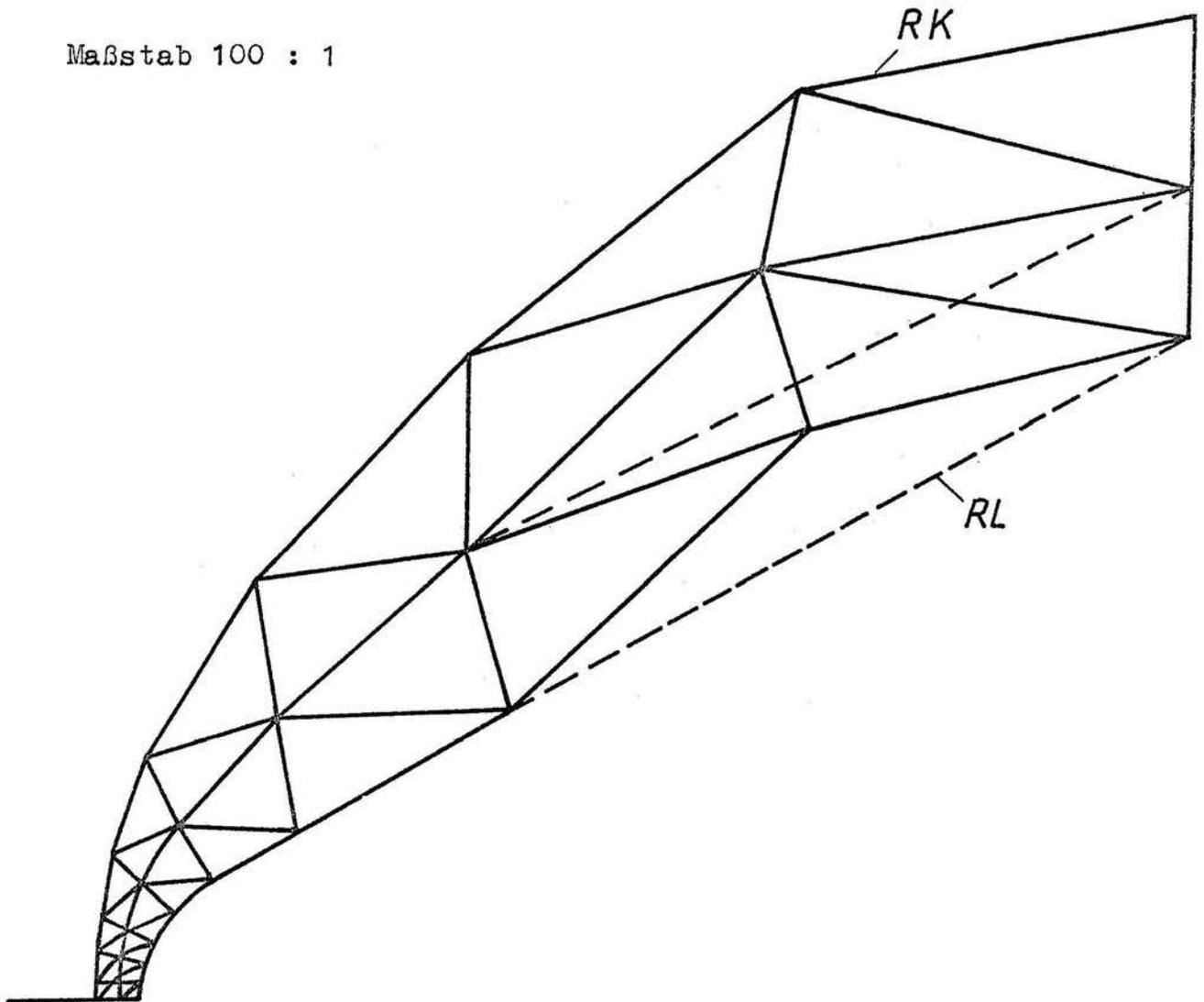








Maßstab 100 : 1



Rundprobe RP2A*

B = 2.4729 mm

b = 3.98 mm

$\sigma_k = 40.2 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_n = 104.13075 \text{ N/mm}^2$

$\alpha_{k19} = 3.87$

Element	$x_1[\text{mm}]$	$\Delta x[10^{-3}\text{mm}]$	σ_r	σ_z	τ_{rz}	$\sigma_f = \sigma_2$
18	2.456	16.9	28.609	332.39	21.923	109.82
36	2.398	74.9	62.045	223.01	5.964	88.486
54	2.327	145.9	67.804	166.99	0.289	73.926
72	2.233	239.9	64.305	131.08	1.660	62.100

Element	σ_3	σ_1	σ_v	α_K	α_v	α_T	α_D
18	27.035	333.96	275.04	3.19	2.64	2.95	2.81
36	61.825	223.23	149.86	2.14	1.44	1.55	1.71
54	67.803	166.99	96.268	1.60	0.92	0.95	1.20
72	64.264	131.12	67.967	1.26	0.65	0.64	0.90

Rundprobe RP2A

B = 2.4729 mm

b = 3.98 mm

$\sigma_k = 40.2 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_n = 104.13075 \text{ N/mm}^2$

$\alpha_{k19} = 3.87$

Element	$x_1[\text{mm}]$	$\Delta x[10^{-3}\text{mm}]$	σ_r	σ_z	τ_{rz}	$\sigma_f = \sigma_2$
18	2.456	16.9	28.726	334.09	22.050	110.58
36	2.398	74.9	63.427	224.20	6.269	80.631
54	2.327	145.9	69.181	167.23	0.179	74.609
72	2.233	239.9	65.269	130.77	1.682	62.463

Element	σ_3	σ_1	σ_v	α_K	α_v	α_T	α_D
18	27.142	335.67	276.42	3.21	2.65	2.96	2.83
36	63.183	224.45	149.85	2.15	1.44	1.55	1.74
54	69.181	167.23	95.449	1.61	0.92	0.94	1.19
72	65.226	130.82	67.014	1.26	0.64	0.63	0.89

Rundprobe RP2M (RM)

$B = 2.50 \text{ mm}$

$b = 3.980 \text{ mm}$

$\alpha_{v19} = 3.47$

$\sigma_k = 40.2 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_n = 101.88545 \text{ N/mm}^2$

$\alpha_{k19} = 3.92$

Element	$x_1 [\text{mm}]$	$\Delta x [10^{-3} \text{mm}]$	σ_r	σ_z	τ_{rz}	$\sigma_f = \sigma_z$
18	2.491	9	17.346	356.86	14.872	114.09
36	2.461	39	47.940	278.89	7.785	100.97
54	2.419	81	64.809	217.02	2.851	83.273
72	2.338	162	70.098	157.86	0.235	72.535

Element	σ_3	σ_1	σ_v	α_k	α_v	α_γ	α_D
18	16.696	357.61	304.15	3.51	2.99	3.35	3.12
36	47.678	279.15	209.67	2.74	2.06	2.27	2.30
54	64.756	217.07	142.03	2.13	1.39	1.49	1.70
72	70.097	157.86	86.566	1.55	0.85	0.86	1.13

Rundprobe RP3A

$B = 2.5386 \text{ mm}$

$b = 3.9814 \text{ mm}$

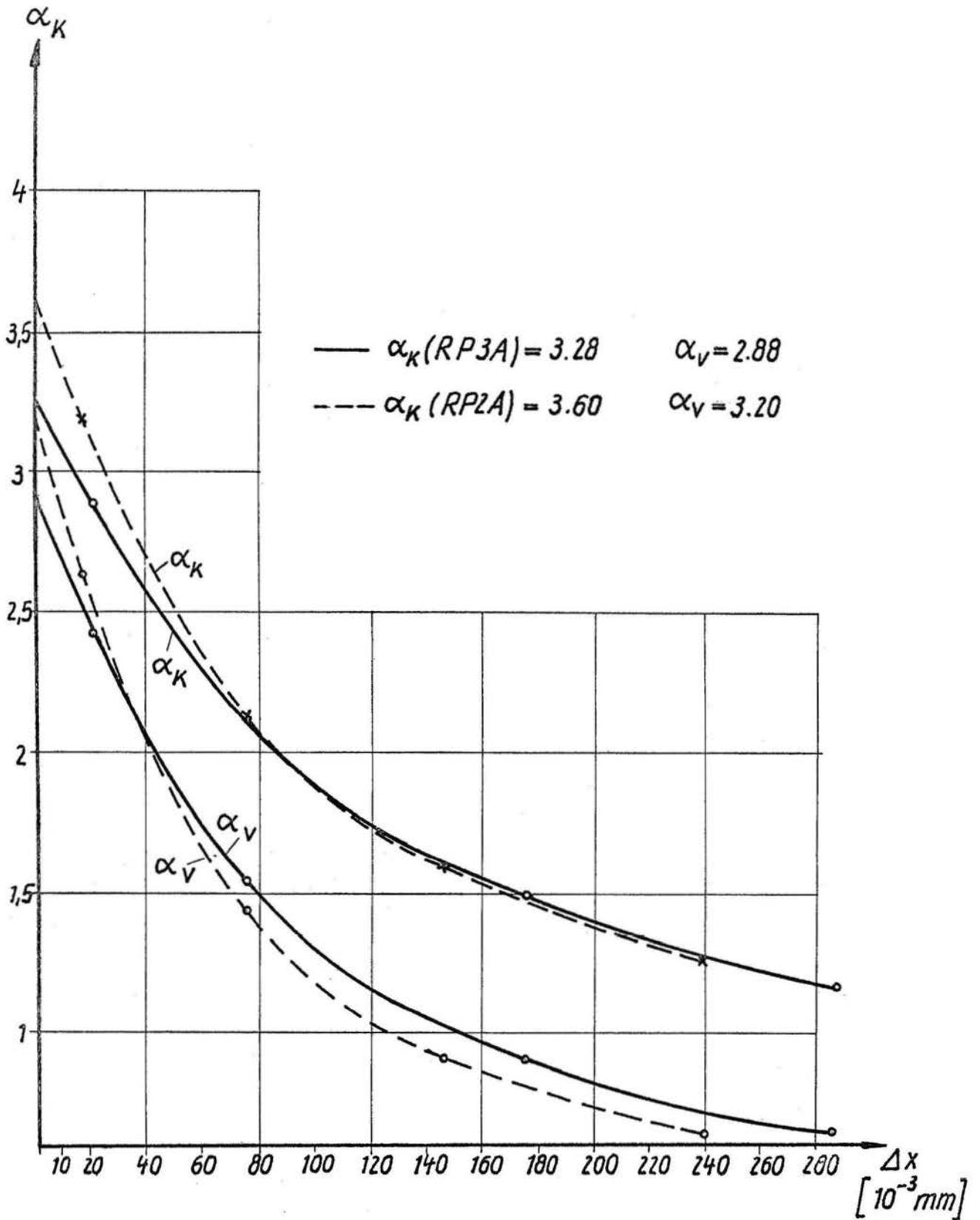
$\sigma_k = 40.2 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_n = 98.88 \text{ N/mm}^2$

$\alpha_{k19} = 3.26$

Element	$x [\text{mm}]$	$\Delta x [10^{-3} \text{mm}]$	σ_r	σ_z	τ_{rz}	$\sigma_f = \sigma_z$
18	2.518	20.6	19.227	284.76	13.664	90.609
36	2.450	88.6	48.632	198.66	4.966	75.163
54	2.364	174.6	55.783	149.01	0.619	63.073
72	2.252	286.6	53.779	117.80	1.012	53.162

Element	σ_3	σ_1	σ_v	α_k	α_v	α_γ	α_D
18	18.525	285.46	239.19	2.89	2.42	2.70	2.56
36	48.467	198.83	138.95	2.01	1.41	1.52	1.64
54	55.779	199.01	89.807	1.51	0.91	0.94	1.15
72	53.763	117.62	64.180	1.19	0.65	0.65	0.87



Rundprobe RP2K (RK)

B = 2.50 mm

b = 3.980 mm

$\sigma_k = 40.2 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_n = 101.88545 \text{ N/mm}^2$

$\alpha_{k19} = 3.90$

Element	$x_1[\text{mm}]$	$\Delta x[10^3 \text{mm}]$	σ_r	σ_z	τ_{rz}	$\sigma_p = \sigma_2$
18	2.491	9	17.192	354.64	14.739	112.56
36	2.461	39	47.245	276.56	7.5317	99.252
54	2.419	81	63.395	215.22	2.6304	83.486
72	2.338	162	68.010	157.06	0.305	70.850

Element	σ_3	σ_1	σ_v	α_k	α_v	α_τ	α_D
18	16.550	355.23	302.38	3.49	2.97	3.32	3.11
36	46.995	276.81	208.65	2.72	2.05	2.26	2.29
54	63.348	215.26	141.78	2.11	1.39	1.49	1.67
72	68.009	157.06	87.665	1.54	0.86	0.87	1.13

Rundprobe RP2L (RL)

B = 2.50 mm

b = 3.980 mm

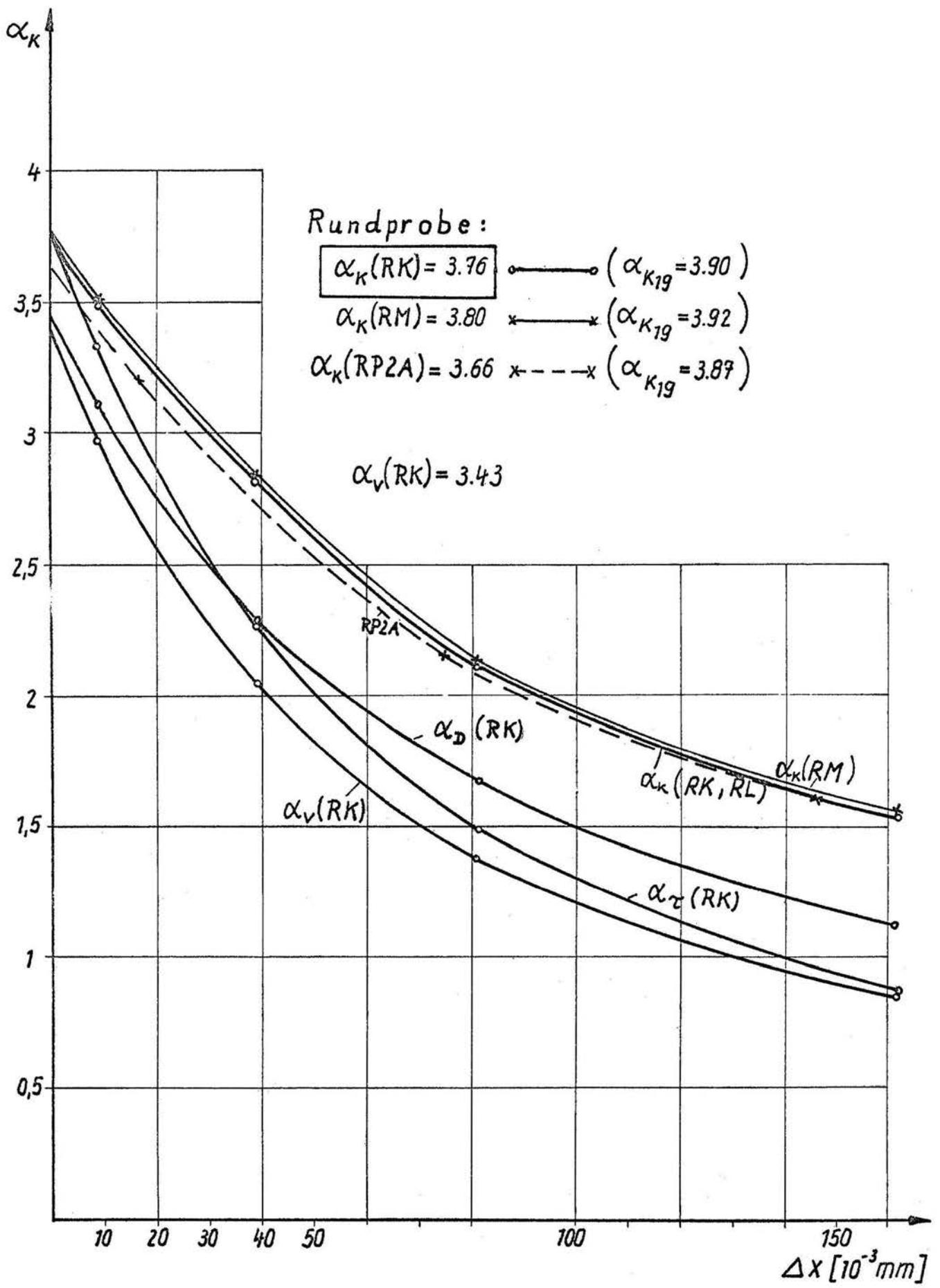
$\sigma_k = 40.2 \text{ N/mm}^2$

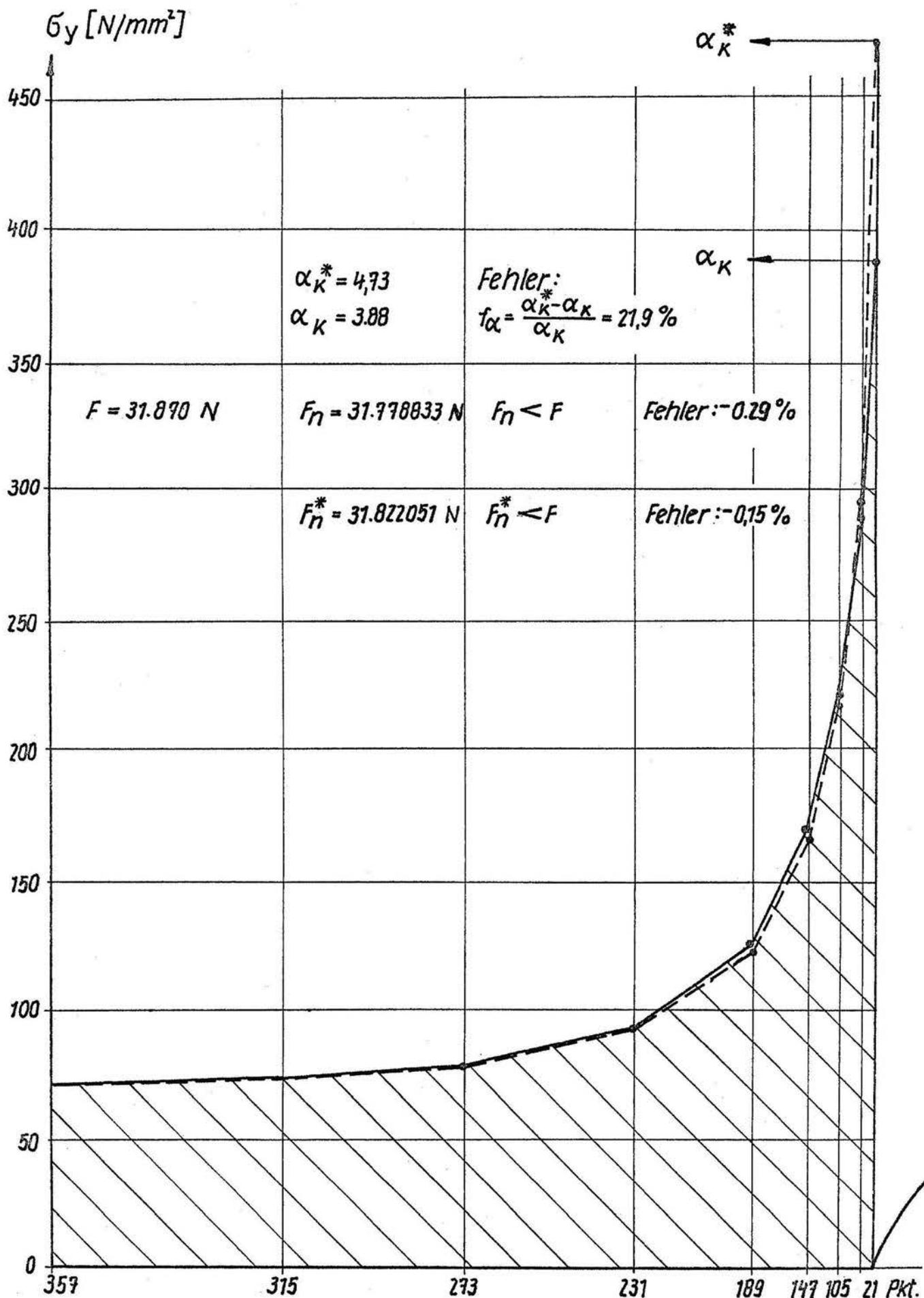
$\sigma_n = 101.88545 \text{ N/mm}^2$

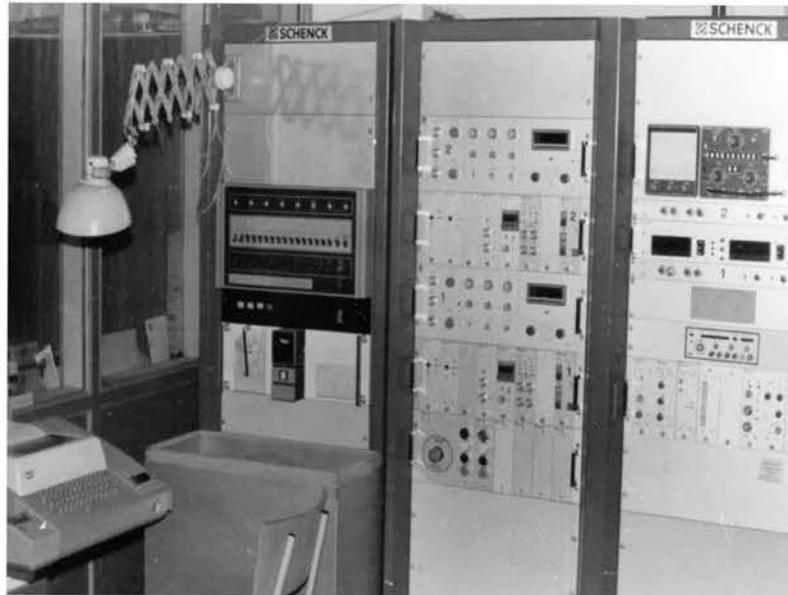
$\alpha_{k19} = 3.90$

Element	$x_1[\text{mm}]$	$\Delta x[10^3 \text{mm}]$	σ_r	σ_z	τ_{rz}	$\sigma_p = \sigma_2$
18	2.491	9	17.208	354.89	14.753	112.80
36	2.461	39	47.317	276.83	7.603	99.518
54	2.419	81	63.544	215.45	2.699	86.769
72	2.338	162	68.254	157.21	0.290	71.112

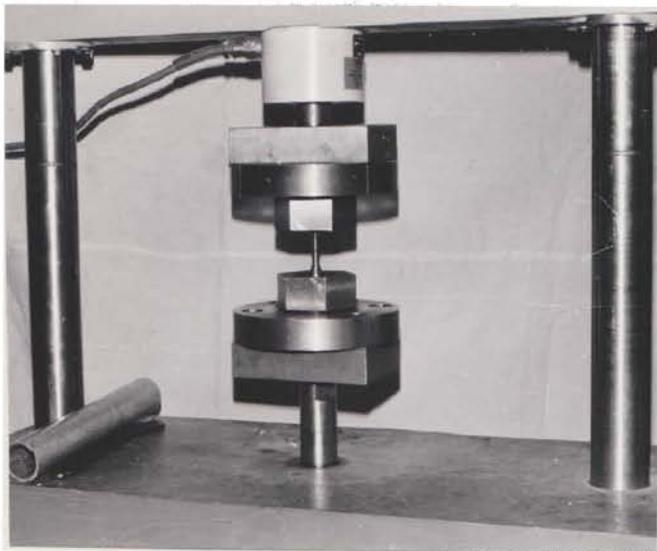
Element	σ_3	σ_1	σ_v	α_k	α_v	α_τ	α_D
18	16.565	355.54	302.56	3.49	2.97	3.33	3.11
36	47.065	277.08	208.79	2.72	2.05	2.26	2.29
54	63.496	215.50	141.81	2.12	1.39	1.49	1.67
72	68.253	157.21	87.549	1.54	0.86	0.87	1.13







Prüfmaschine mit Prozeßrechner



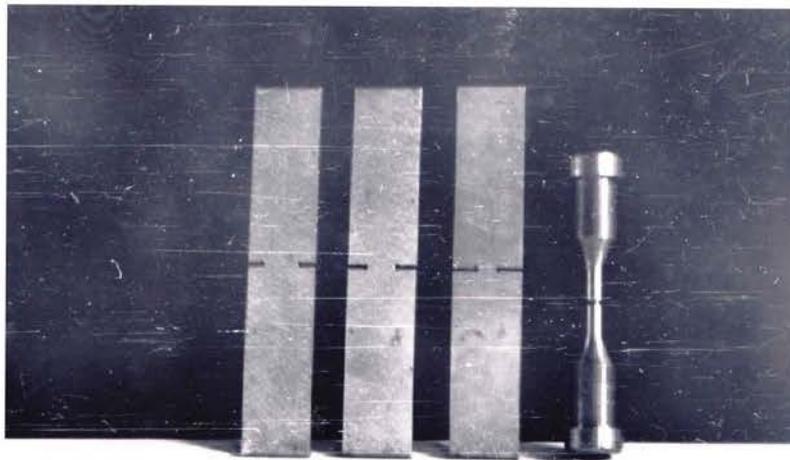
Rundprobe



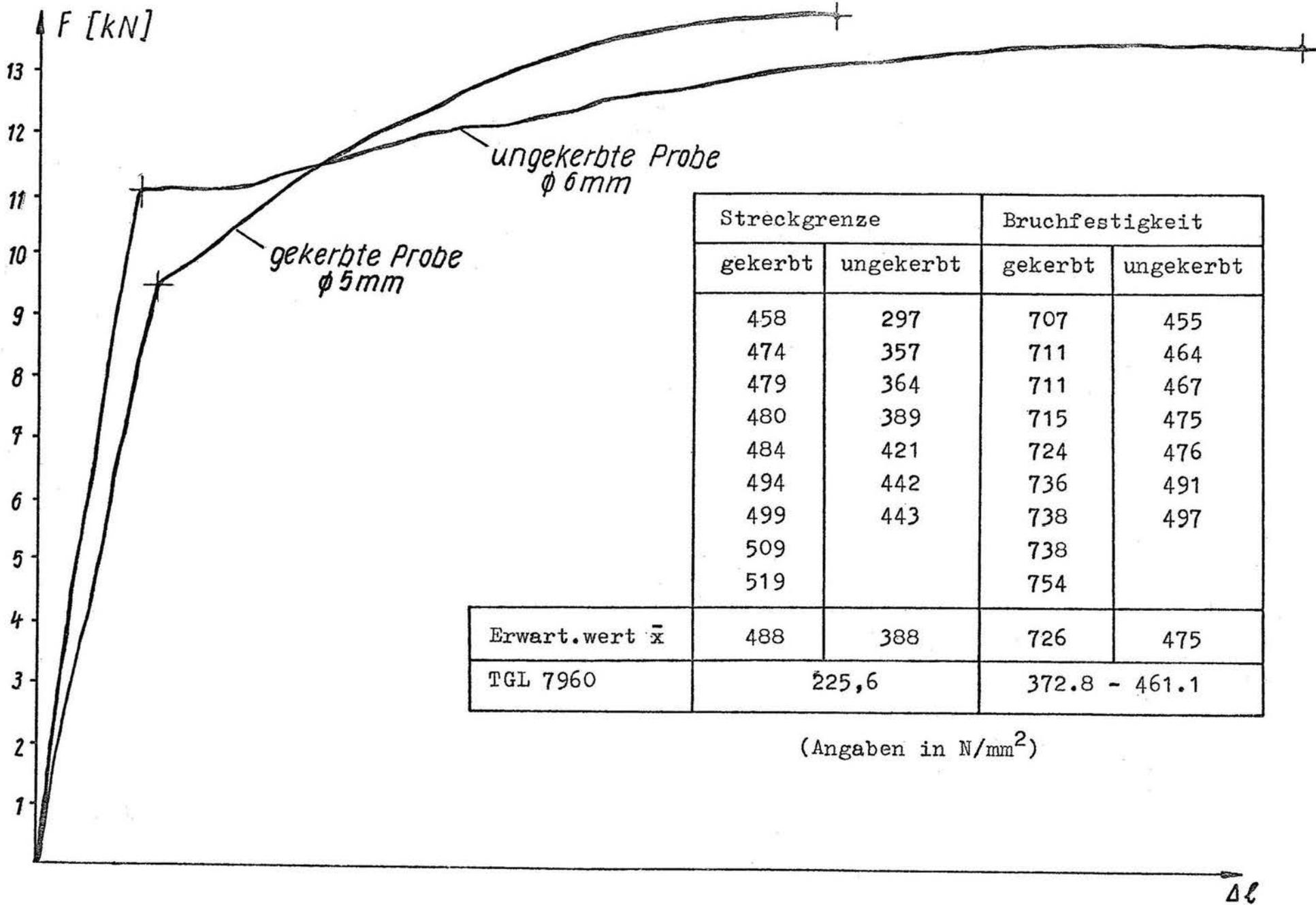
Flachprobe

Chemische Zusammensetzung des Probenwerkstoffes St 38 b - 2

Chemische Zusam- mensetzung nach	C %	Si %	Mn %	P %	S %
TGL 7960	0.12 - 0.20	0.17 - 0.34	0.4 - 0.65	höchst. 0.05	höchst. 0.055
VEB Stahl- und Walzwerk Riesa	0.15	0.34	0.54	0.029	0.04
TU, Sektion 13 Werkstoffwiss.	0.12 - 0.14	0.29 - 0.34	0.50 - 0.54	0.012 - 0.022	0.027 - 0.034

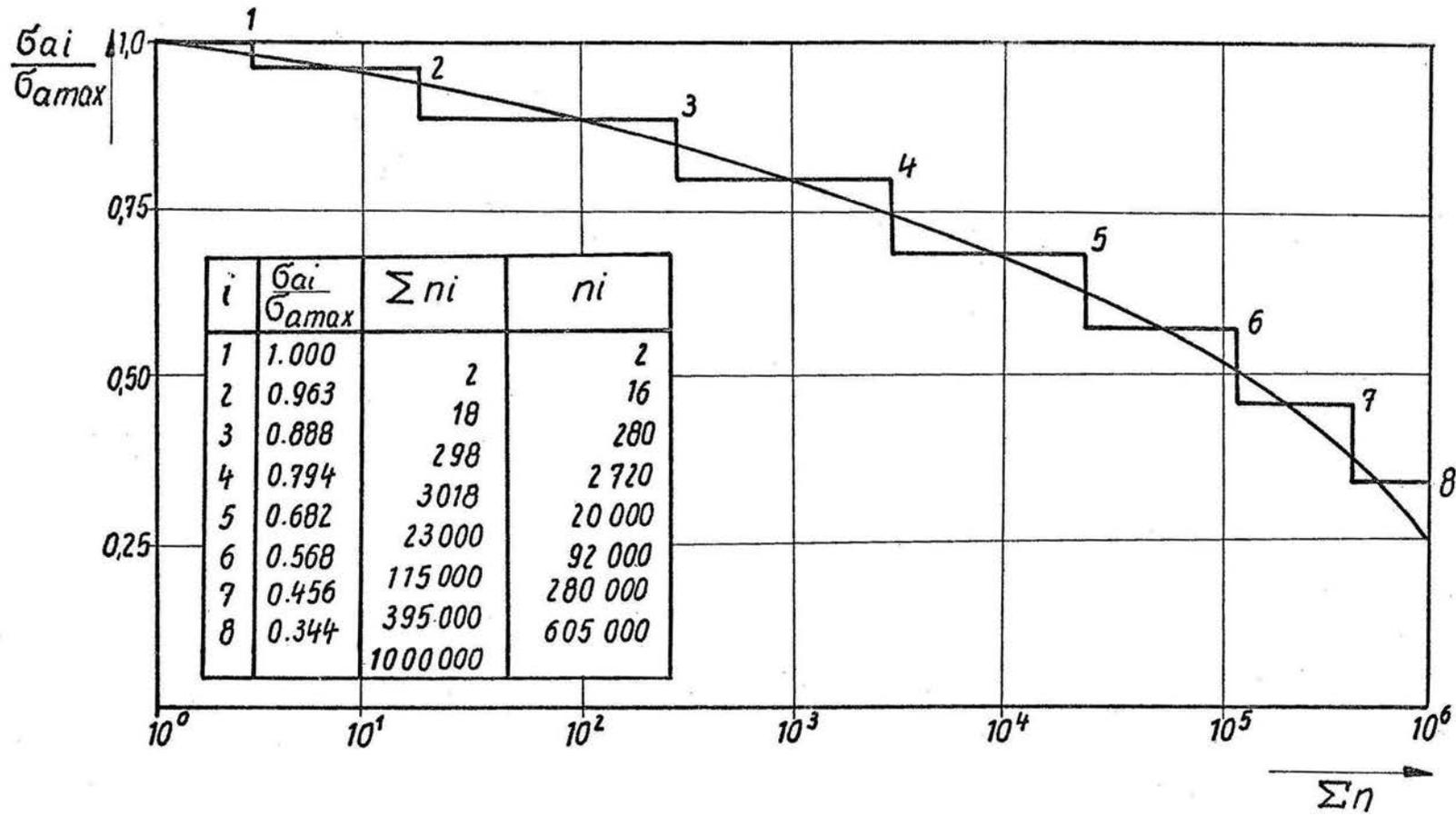


Verwendete Probenformen



	Streckgrenze		Bruchfestigkeit	
	gekerbt	ungekerbt	gekerbt	ungekerbt
	458	297	707	455
	474	357	711	464
	479	364	711	467
	480	389	715	475
	484	421	724	476
	494	442	736	491
	499	443	738	497
	509		738	
	519		754	
Erwart.wert \bar{x}	488	388	726	475
TGL 7960	225,6		372.8 - 461.1	

(Angaben in N/mm²)



Verwendete Kollektivform
 $p = 0.25$

	Bruchlastwechselzahlen N_B der Rundprobe	Anhang A 50
--	---	-------------

a) Wöhlerlinie

σ_n [N/mm ²]		230	200	150	125
N_B		6239	15400	68400	175500
		7200	16500	70900	211400
		7390	17400	72000	244700
		8400	18700	77700	253000
		8710	22200	82100	272700
		10200	24000	84700	308600
		10400	25700	107900	320400
		10900	28700	119900	369600
		13900	29500	148400	478700
	\bar{N}_B	50 %	9020	21500	89300
90 %		12400	29300	126100	412500
10 %		6570	15700	63300	191500
T		1 : 1.89	1 : 1.87	1 : 1.99	1 : 2.15

b) Randomversuche

$\hat{\sigma}_n$ [N/mm ²]		230	180
N_B		360700	1082200
		404700	1186600
		438000	1595400
		460100	1813800
		555000	1937100
		569800	2028500
		696400	2173400
		738900	2809200
		786600	3478900
		955100	3955100
	\bar{N}_B	50%	569600
90%		857700	3494600
10%		378300	1186700
T		1 : 2.27	1 : 2.94

c) Hochgesetzte Durchläufer (10)

σ_n [N/mm ²]		230	
N_B		7540	
		8160	
		9460	
		11800	
		12600	
		13700	
		16400	
		19200	
		20600	
		25300	
	\bar{N}_B	50%	13500
		90%	22600
		10%	8010
T		1 : 2.82	

Stufe der Brüche i	σ_a N/mm ²	Grenzlastwechselzahl $N_G = 2 \cdot 10^6$ oben Versuchs-Nr., darunter Bruchlastwechselzahl $N/10^6$																				Stufenabstand $\Delta\sigma = 5 \text{ N/mm}^2$			Ereignishäufigkeit der Brüche je Stufe: x_i		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	x_i	$i x_i$	$i^2 x_i$			
		0.62	/	/	/	0.75	1.46	1.21	1.67	/	/	/	/	0.50	0.86	1.84	1.62	/	/	1.78	/						
	80								○								○										
0	85		○					×		○						×		○		○		2	0	0			
1	90	×		○			×				○				×				×			4	4	4			
2	95				○		×					○		×								2	4	8			
3	100					×								×								2	6	18			
	105																										
	110																										
	115																										
	120																										
																						$\Sigma =$	10	14	30		

Treppenstufenverfahren
für die Rundprobe

$$\sigma_A = 85 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_D = \sigma_A + \Delta\sigma \left(\frac{\sum i x_i}{\sum x_i} - \frac{1}{2} \right) = 89.5 \text{ N/mm}^2$$

$$S = 1.62 \cdot \Delta\sigma \cdot (K_S + 0.029) = 8.66 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{mit } K_S = \frac{\sum x_i \sum i^2 x_i - (\sum i x_i)^2}{(\sum x_i)^2} = 1.04 > 0.3$$

$$\sigma_D (P_B = 90\%) = 98.2 \text{ N/mm}^2$$

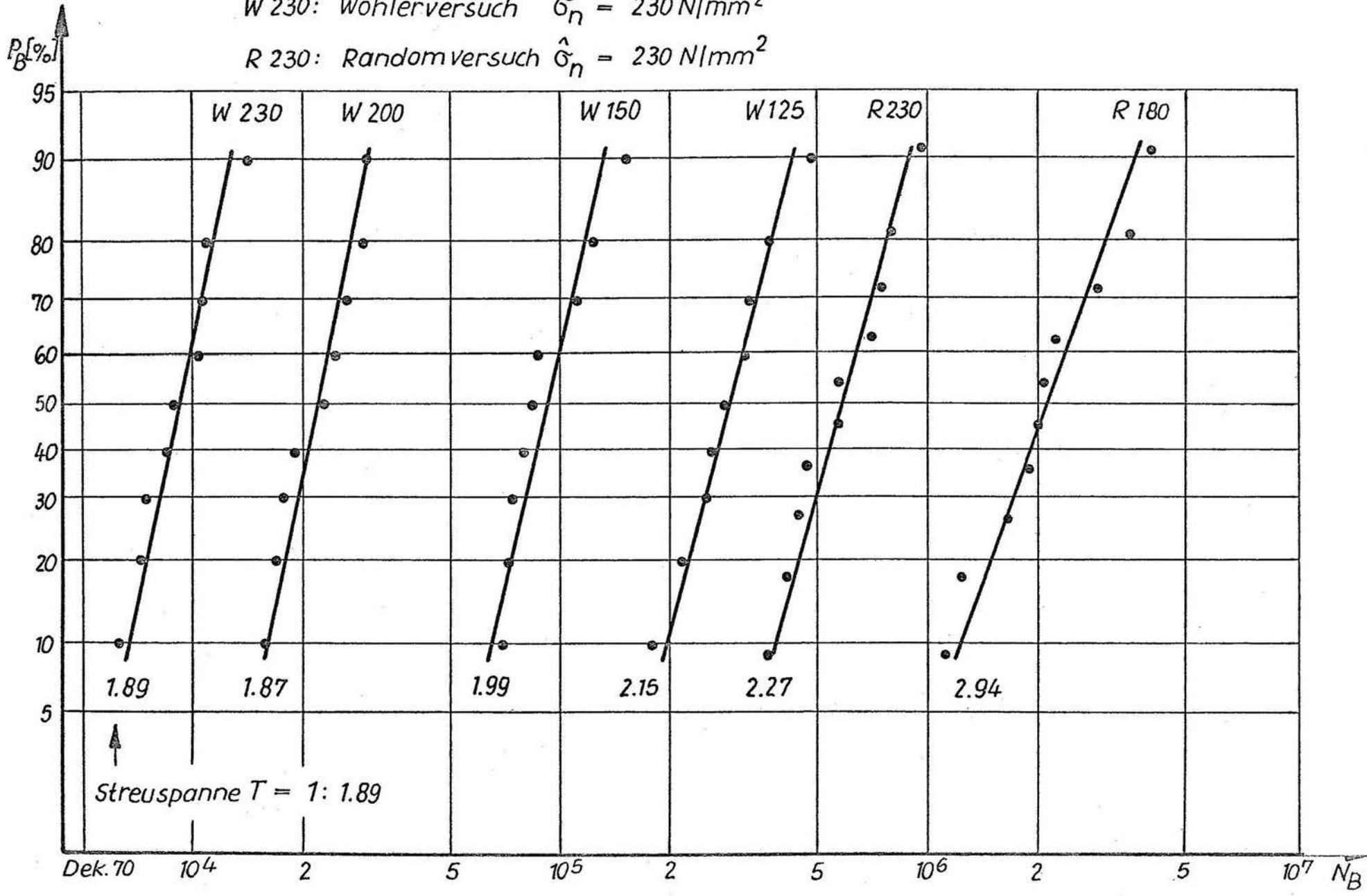
$$\sigma_D (P_B = 50\%) = 89.5 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_D (P_B = 10\%) = 80.8 \text{ N/mm}^2$$

$$T = 1: 1.22$$

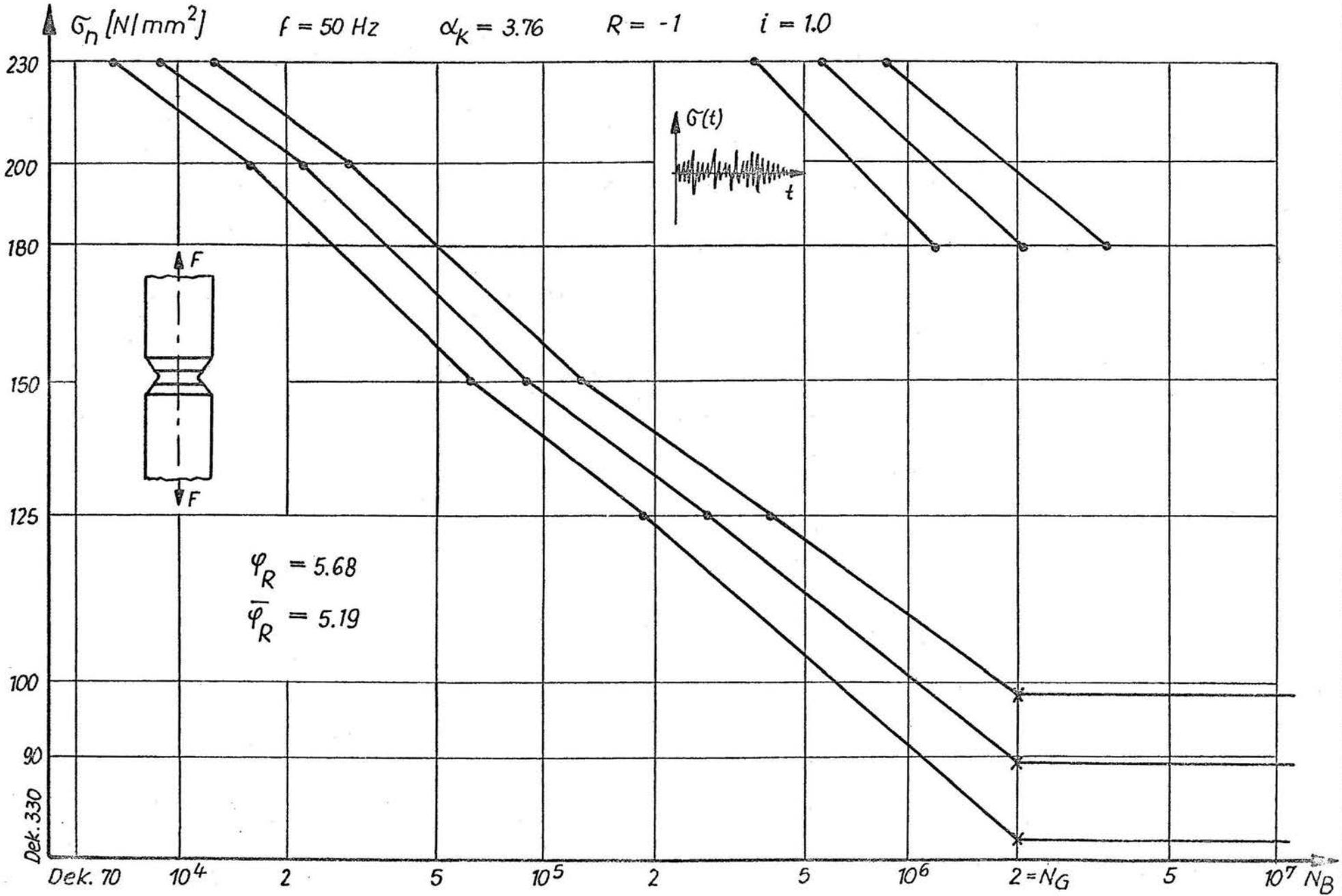
W 230: Wöhlerversuch $\sigma_n = 230 \text{ N/mm}^2$

R 230: Randomversuch $\hat{\sigma}_n = 230 \text{ N/mm}^2$



Bruchwahrscheinlichkeiten P_B der Rundprobe

Anhang A 52



Wöhler- und Lebensdauerlinien
 der Rundprobe für
 $P_B = 10, 50, 90 \%$

a) Wöhlerlinie

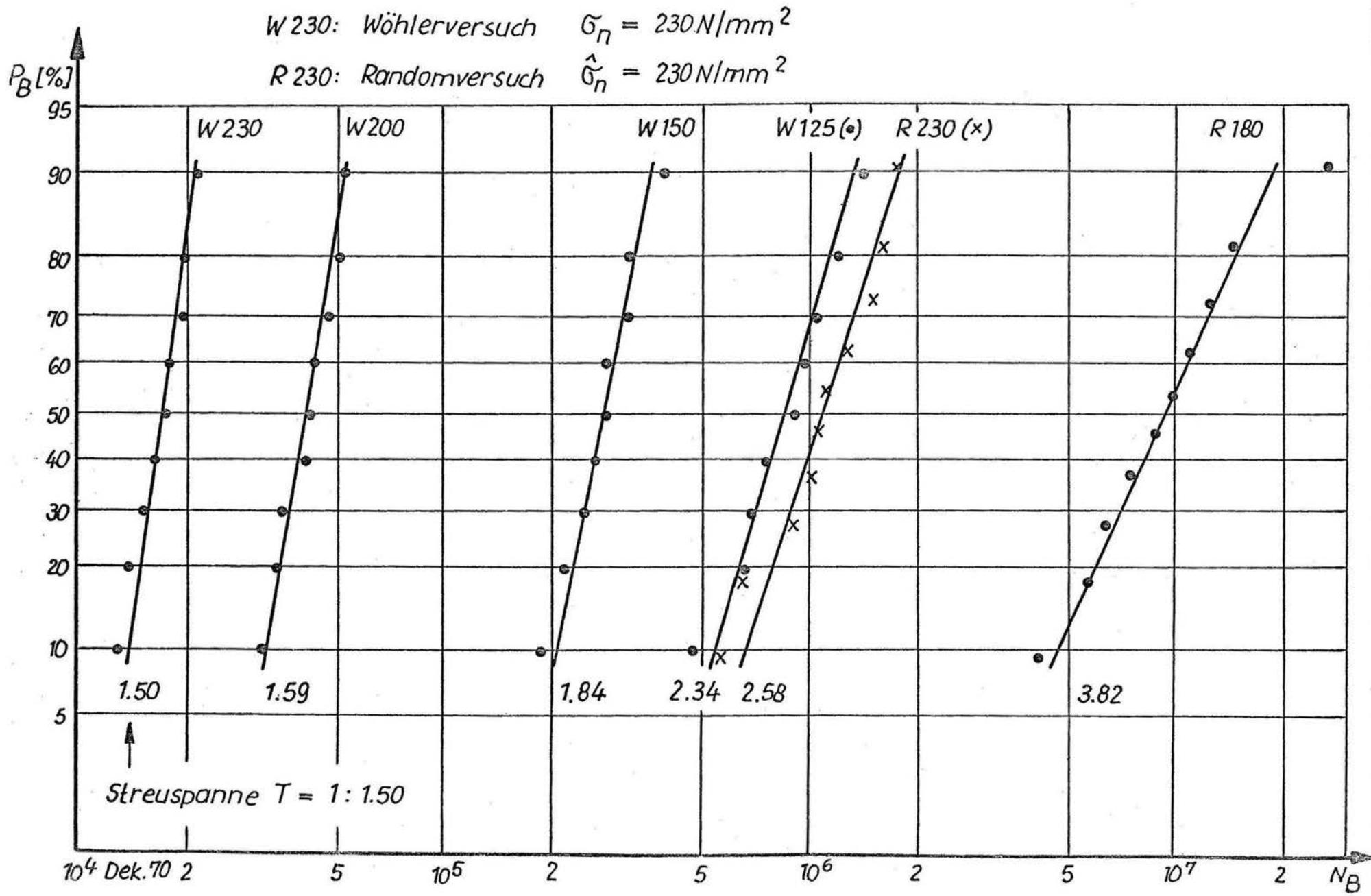
σ_n [N/mm ²]		230	200	150	125	
N_B		12900	31700 x	185600	483400 x	
		13700 x	34900	213100	671700	
		15200	36300	244700	701000 x	
		16000	42400	260400 x	768700 x	
		17300 x	43200	281800	909000	
		17700	43900	283700	967600	
		19400	48700	322600	1047200	
		19500	52000	324700 x	1218200	
		21200	53400	410100	1426600	
	\bar{N}_B	50 %	16800	42300	273800	868200
		90 %	20500	53300	371000	1327300
10 %		13700	33600	202100	567900	
T		1 : 1.50	1 : 1.59	1 : 1.84	1 : 2.34	

b) Randomversuche

$\hat{\sigma}_n$ [N/mm ²]		230	180	
N_B		583400	4251900	
		659100	5716700	
		913600 x	6414400 x	
		1032900	7487900	
		1068500	8796000 x	
		1134200 x	9837500	
		1286900	11001200	
		1505300	12590000 x	
		1628800	14598200	
		1749300	26653000	
	\bar{N}_B	50 %	1092800	9410100
		90 %	1756300	18393500
		10 %	679900	4811900
T		1 : 2.58	1 : 3.82	

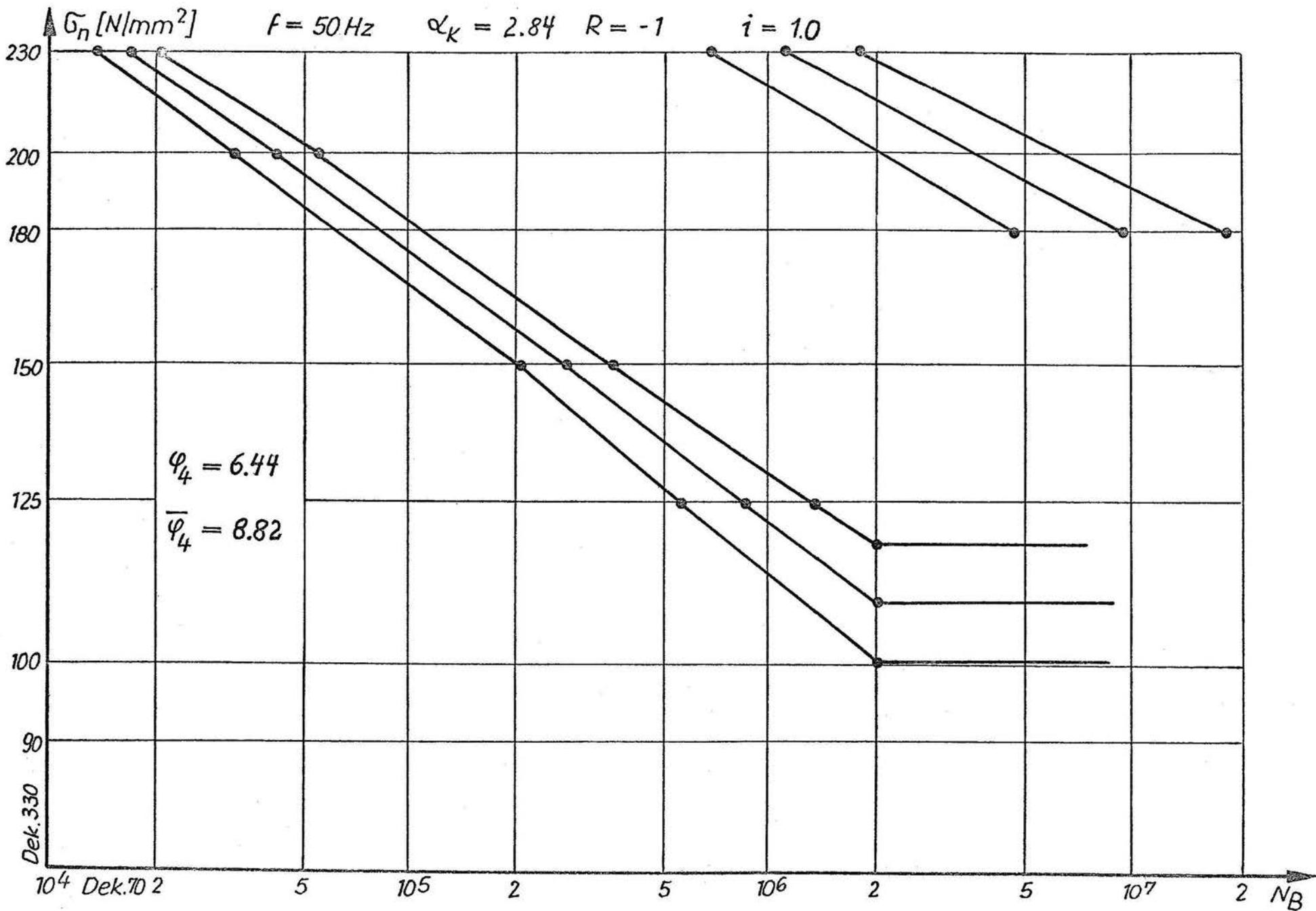
c) Hochgesetzte
Durchläufer (13)

σ_n [N/mm ²]		230
N_B		8200
		9600 x
		10900 x
		12100
		14400
		15400
		17500 x
		18400 x
		19900 x
		22100
		24100
		24700
		30900
\bar{N}_B	50 %	16300
	90 %	27300
	10 %	9800
T		1 : 2.79



Bruchwahrscheinlichkeiten der Flachprobe F 4'

Anhang A 56



Wähler- und Lebensdauerlinien
 der Flachprobe F 4 für
 $P_R = 10, 50, 90\%$

	Bruchlastwechselzahlen N_B der Flachprobe F 6'	Anhang A 58
--	--	-------------

a) Wöhlerlinie

σ_n [N/mm ²]		230	200	150	125
N_B		7350	15000 x	93600	303000
		7950	17900	99000	326800
		7980 x	20800	135700	351300
		8050	21300	142100 x	382700
		10500	23600	146100	426600 x
		11200	25500	154100 x	438000
		11900	30000	165000	470800
		14500	30500	170400	533500 x
		15800	31700	188200	556800
	\bar{N}_B	50 %	10000	23100	140500
90 %		14200	31500	190000	541400
10 %		7060	16900	103800	314700
T		1 : 2.01	1 : 1.86	1 : 1.83	1 : 1.72

b) Randomversuche

$\hat{\sigma}_n$ [N/mm ²]		230	180
N_B		330600	1337100
		382500	1595000 x
		386300 x	1842900
		393600	1948300
		458800	2133200 x
		476800	2431100
		532400 x	2808600
		577600 x	3274700 x
		652100	3852400
		712600	4252000
\bar{N}_B	50 %	476300	2386200
	90 %	658000	3887200
	10 %	344800	1464800
T		1 : 1.91	1 : 2.65

c) Hochgesetzte Durchläufer (11)

σ_n [N/mm ²]		230
N_B		6200
		7000
		8400
		10100 x
		10700 x
		13100
		14500
		15200
		16500
		16600
	17200	
\bar{N}_B	50 %	11600
	90 %	10600
	10 %	7310
T		1 : 2.54

Stufe Jer Brüche i	σ_a [N/mm ²]	Grenzlastwechselzahl $N_G = 2 \cdot 10^6$ Stufenabstand $\Delta\sigma = 5 \text{ N/mm}^2$ oben Versuchs-Nr., darunter Bruchlastspielzahl $N/10^6$																		Ereignishäufigkeit der Brüche je Stufe: x_i							
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	x_i	$i x_i$	$i^2 x_i$			
	80	1.10	/	/	/	1.99	/	1.07	1.49	/	/	1.59	0.96	/	1.63	/	/	/	0.83	1.85	/						
	85		○																								
0	90	×		○						○			○		○										1	0	0
1	95			○		○		×		○		×		×		○						○		3	3	3	
2	100					×		×				×					○		×					4	8	16	
3	105																	×						1	3	9	
	110																										
	115																										
	120																										
																					$\Sigma =$	9	14	28			

Treppensufenverfahren
für Probe P 6'

$$\sigma_A = 90 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_D = \sigma_A + \Delta\sigma \left(\frac{\sum i x_i}{\sum x_i} - \frac{1}{2} \right) = 95.3 \text{ N/mm}^2$$

$$s = 1.62 \cdot \Delta\sigma \left[\frac{\sum x_i \sum i^2 x_i - (\sum i x_i)^2}{(\sum x_i)^2} + 0.029 \right] = 5.83 \text{ N/mm}^2 > \frac{1}{2} \Delta\sigma$$

$$\sigma_D (P_B = 90\%) = 101.1 \text{ N/mm}^2$$

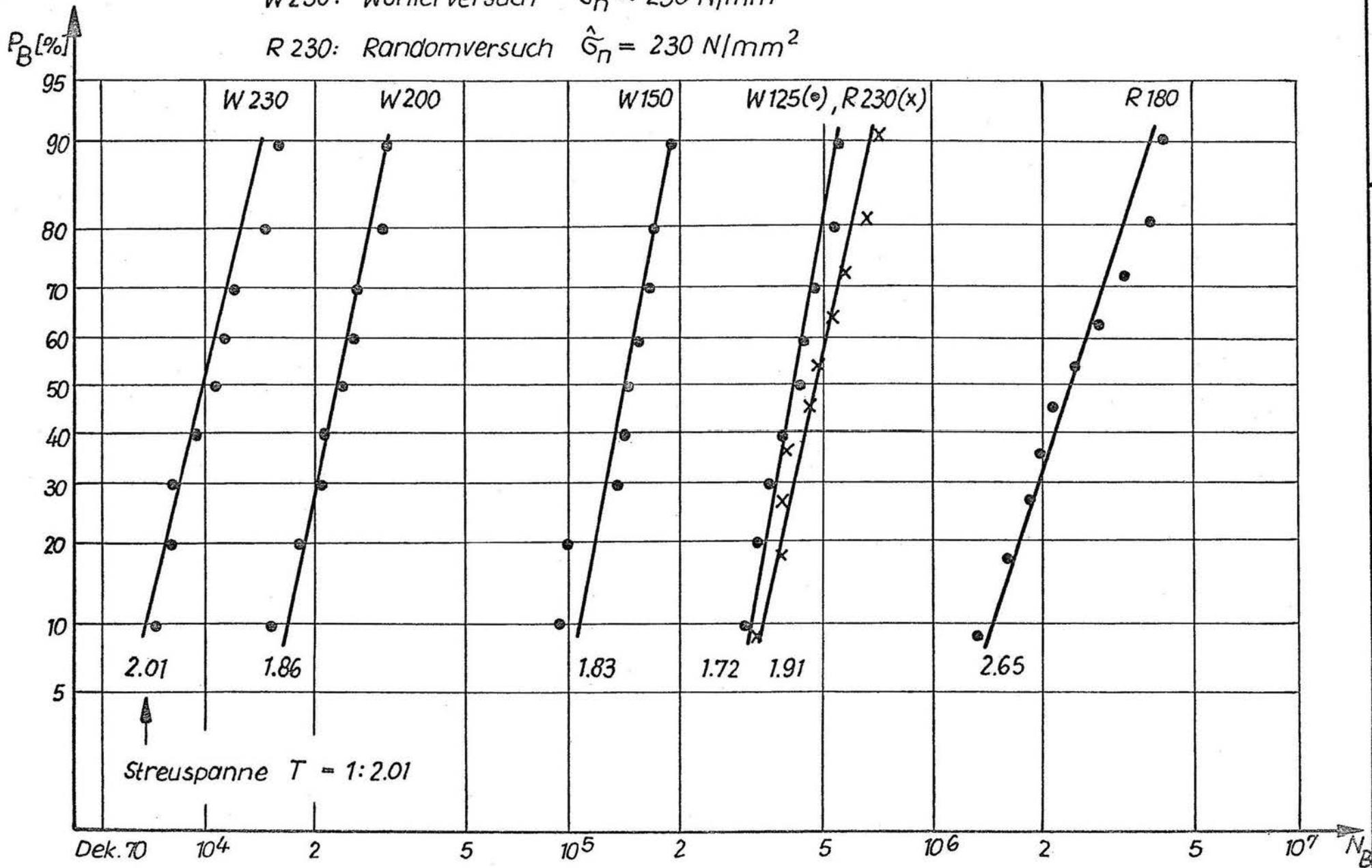
$$\sigma_D (P_B = 50\%) = 95.3 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_D (P_B = 10\%) = 89.5 \text{ N/mm}^2$$

$$T = 1:1.13$$

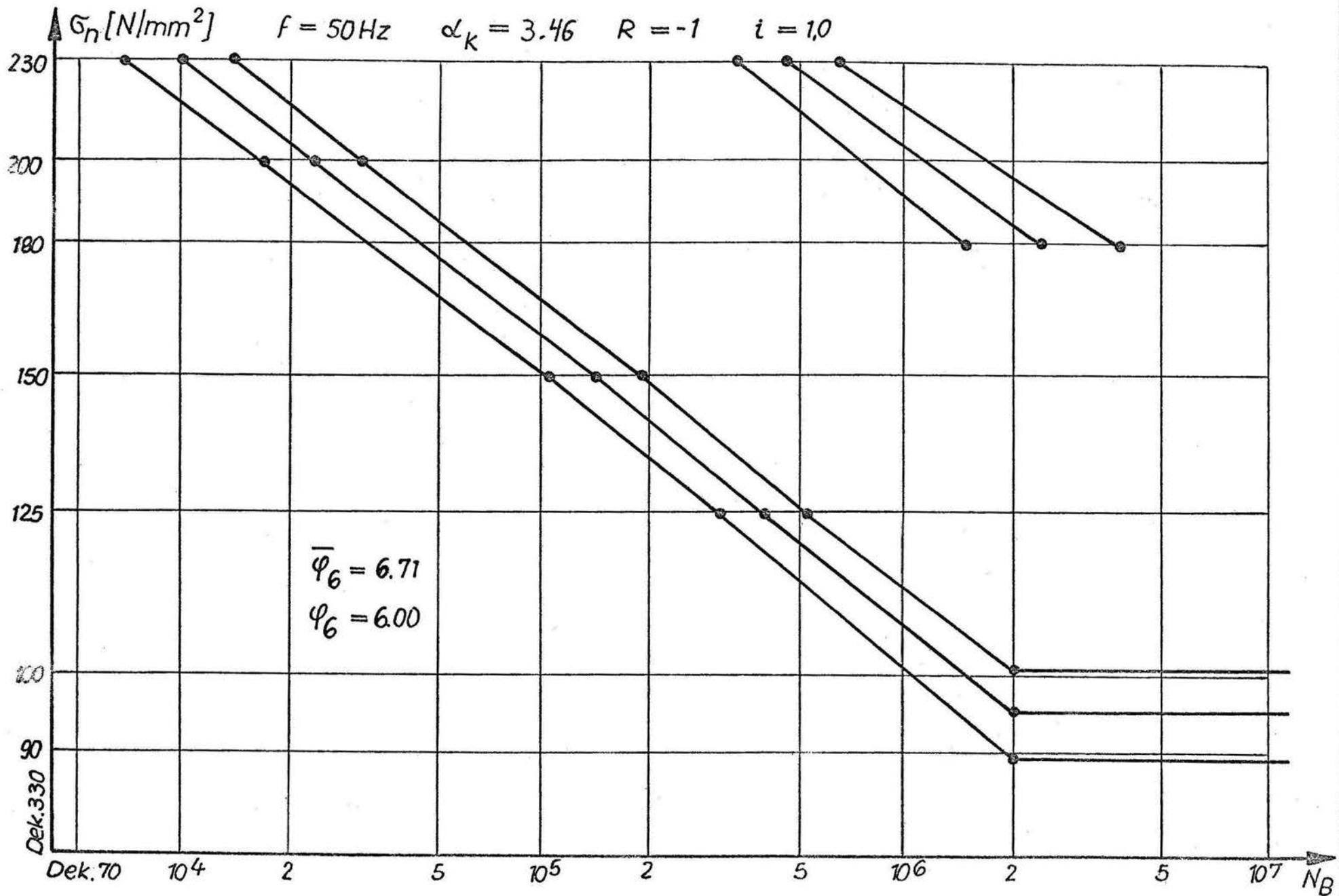
W 230: Wöhlerversuch $\sigma_n = 230 \text{ N/mm}^2$

R 230: Randomversuch $\hat{\sigma}_n = 230 \text{ N/mm}^2$



Bruchwahrscheinlichkeiten der
Flachprobe F 6'

Anhang A 60



Wöhler- und Lebensdauerlinien
 der Flachprobe F 6' für
 $R_B = 10, 50, 90 \%$

Anhang A 61

	Bruchlastspielzahlen N_B der Flachprobe F 8'	Anhang A 62
--	---	-------------

a) Wöhlerlinie

σ_n [N/mm ²]		230	200	150	125
N_B		4520 4580 5080 6280 6390 6460 8140 x 8340 10900	11800 14900 15000 15800 17800 x 18700 20600 x 22600 23900	88300 96100 109200 109700 x 110800 119100 126300 139000 152200	243900 289400 290300 306000 327900 341100 x 375200 380200 429400
\bar{N}_B	50 %	6480	17500	116100	327200
	90 %	9440	23300	144400	407900
	10 %	4440	13200	93400	262400
T		1 : 2.13	1 : 1.77	1 : 1.55	1 : 1.55

b) Randomversuche

$\hat{\sigma}_n$ [N/mm ²]		230	180
N_B		228100 252800 278200 309500 320400 346400 356700 380800 455300 556800	631000 826300 1030100 1085800 x 1103800 1242500 1403300 1489000 1911900 2414800
\bar{N}_B	50 %	337200	1226700
	90 %	474400	2019800
	10 %	239500	745000
T		1 : 1.98	1 : 2.71

c) Hochgesetzte
Durchläufer (10)

σ_H [N/mm ²]		230
N_B		6050 6280 x 6850 7440 7660 x 7930 8470 10100 11100 11300
\bar{N}_B	50 %	8130
	90 %	10800
	10 %	6110
T		1 : 1.77

Stufe der Brüche <i>i</i>	σ_a N/mm ²	Grenzlastwechselzahl $N_G = 2 \cdot 10^6$ oben Versuchs-Nr., darunter Bruchlastwechselzahl $N/10^6$																				Stufenabstand $\Delta\sigma = 5 \text{ N/mm}^2$ Ereignishäufigkeit der Brüche je Stufe: x_i					
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	x_i	$i x_i$	$i^2 x_i$			
	80	/	1.70	/	0.77	/	/	1.63	1.84	/	1.82	/	/	0.43	/	0.88	1.32	1.04	/	1.55	/						
	85																		○		○						
0	90	○		○		○				○		○						×		×				2	0	0	
1	95		×		×		○		×		×		○		○		×							5	5	5	
2	100							×						×		×								3	6	12	
	105																										
	110																										
	115																										
	120																										
																					$\Sigma =$	10	11	17			

Treppentufenverfahren für Probe F 8'

$$\sigma_A = 90 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_D = \sigma_A + \Delta\sigma \left(\frac{\sum i x_i}{\sum x_i} - \frac{1}{2} \right) = 93.0 \text{ N/mm}^2$$

$$s = 1.62 \cdot \Delta\sigma (K_S + 0.029) = 4.20 \text{ N/mm}^2 > \frac{1}{2} \Delta\sigma$$

$$\text{mit } K_S = \frac{\sum x_i \sum i^2 x_i - (\sum i x_i)^2}{(\sum x_i)^2} = 0.49 > 0.3$$

$$\sigma_D (P_B = 90\%) = 97.2 \text{ N/mm}^2$$

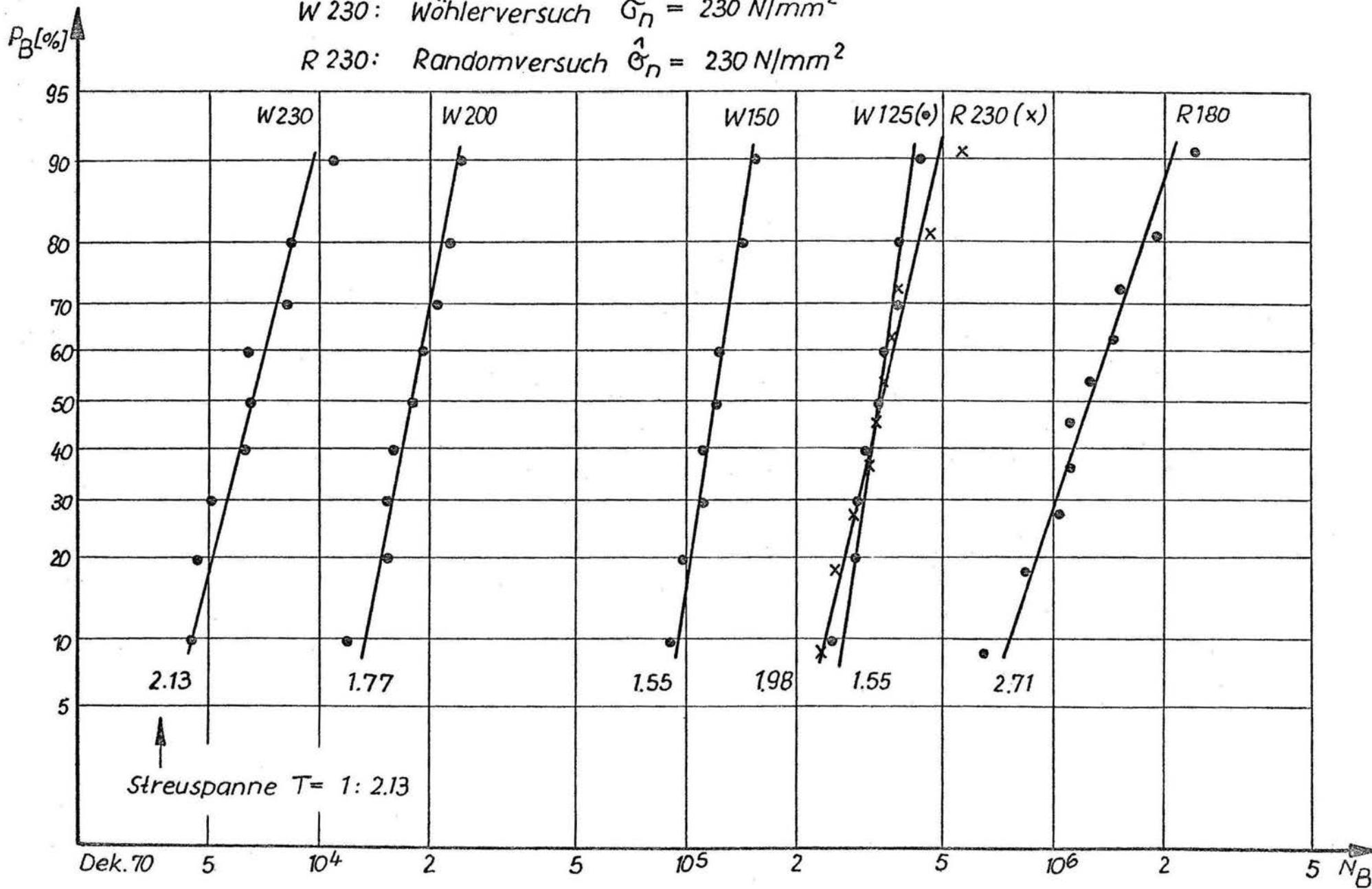
$$\sigma_D (P_B = 50\%) = 93.0 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_D (P_B = 10\%) = 88.8 \text{ N/mm}^2$$

$$T = 1:1.09$$

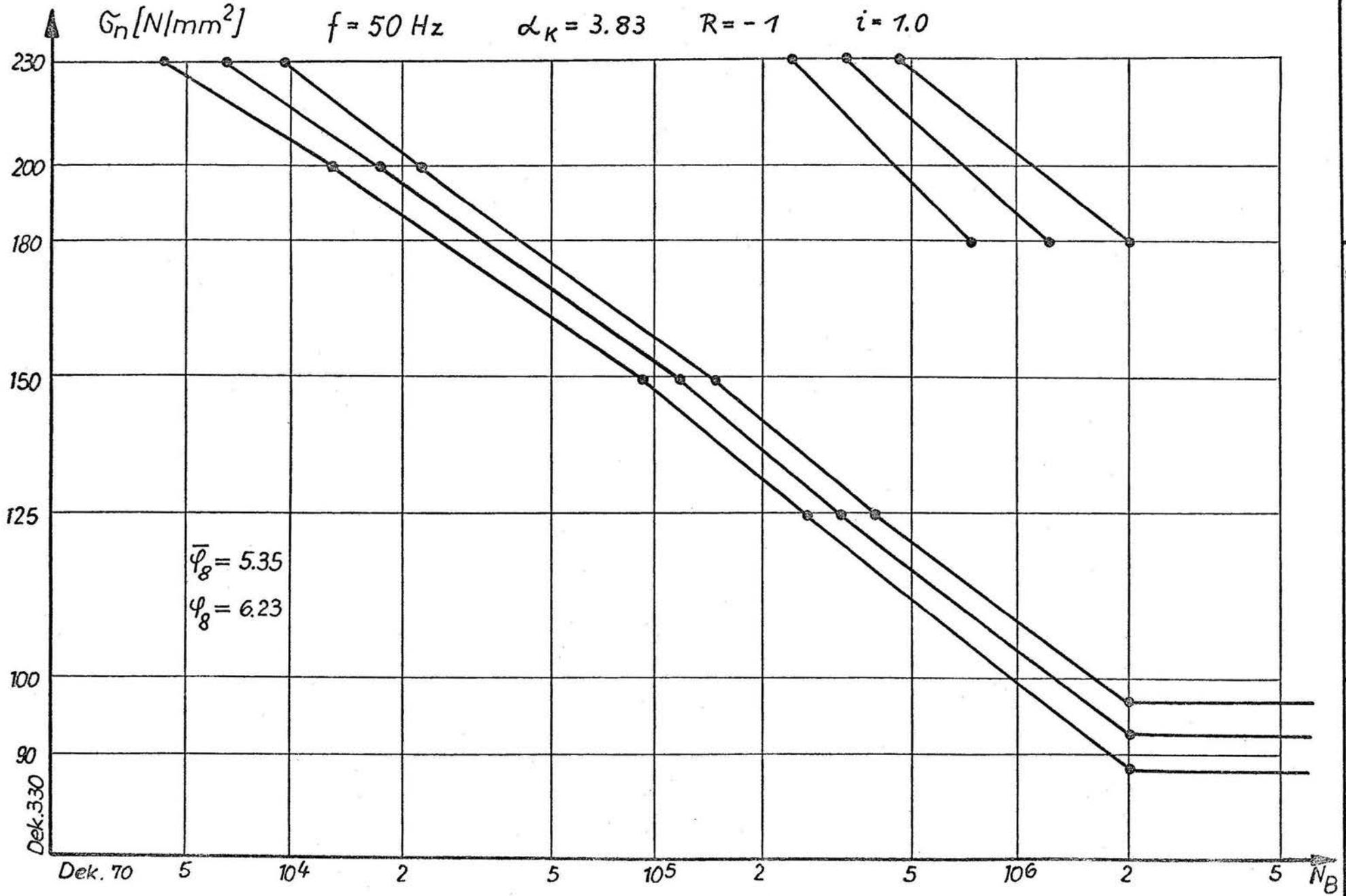
Anhang A 63

W 230: Wöhlerversuch $\bar{\sigma}_n = 230 \text{ N/mm}^2$
 R 230: Randomversuch $\hat{\sigma}_n = 230 \text{ N/mm}^2$

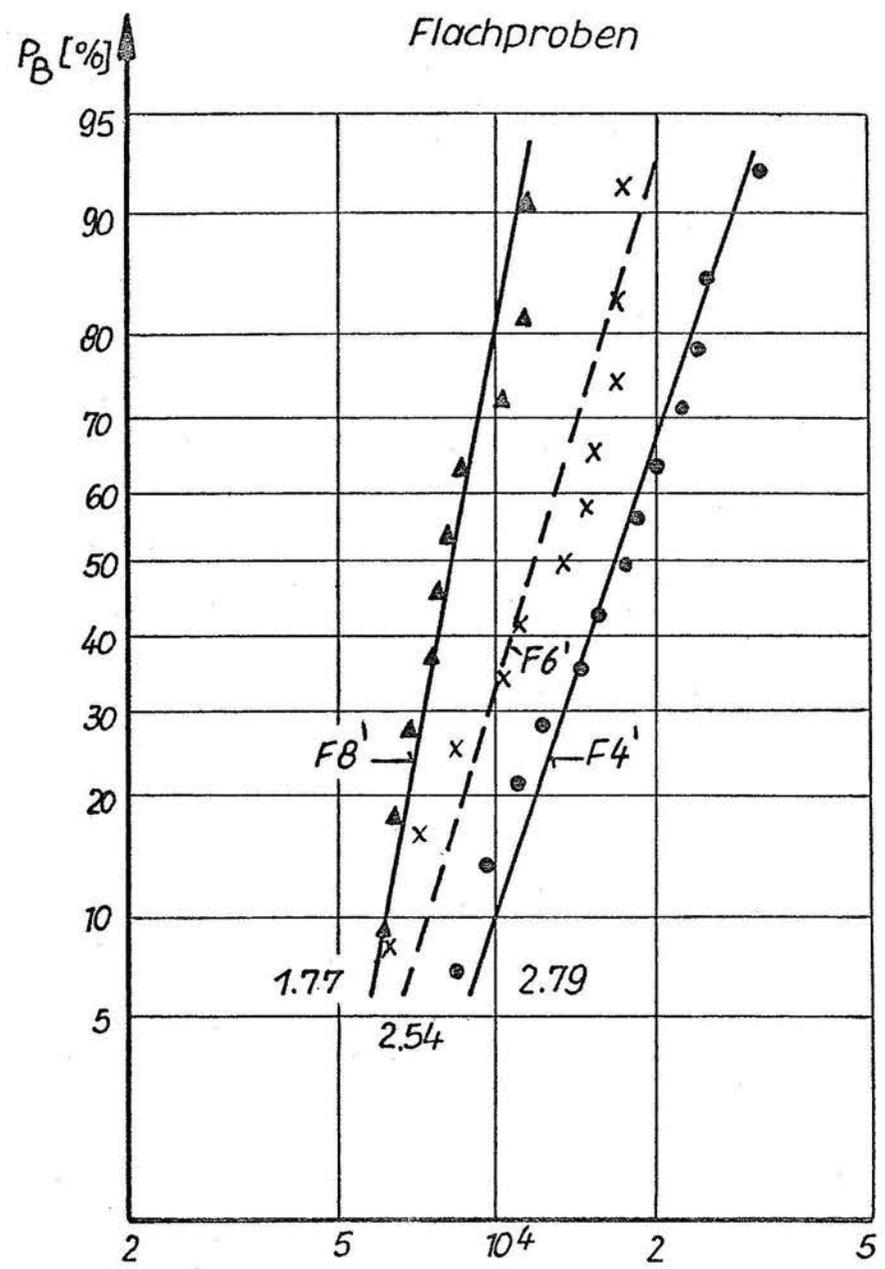
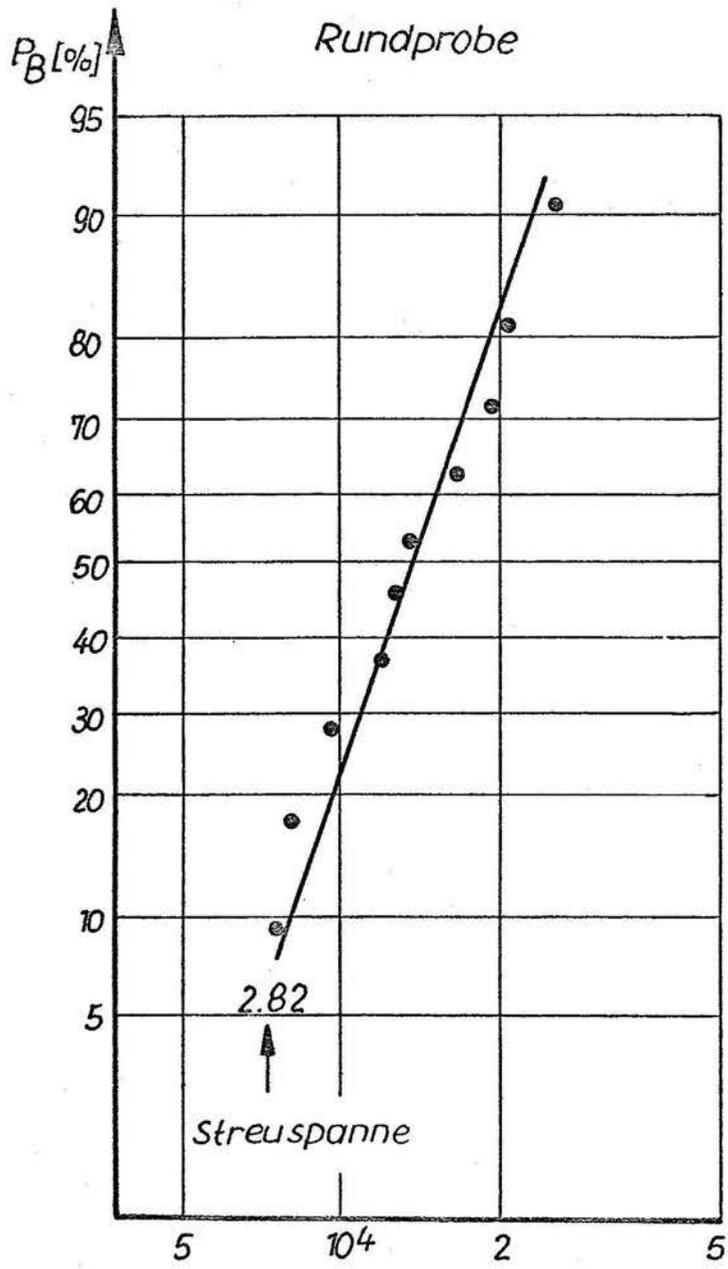


Bruchwahrscheinlichkeiten der
Flachprobe F 8'

Anhang A 64

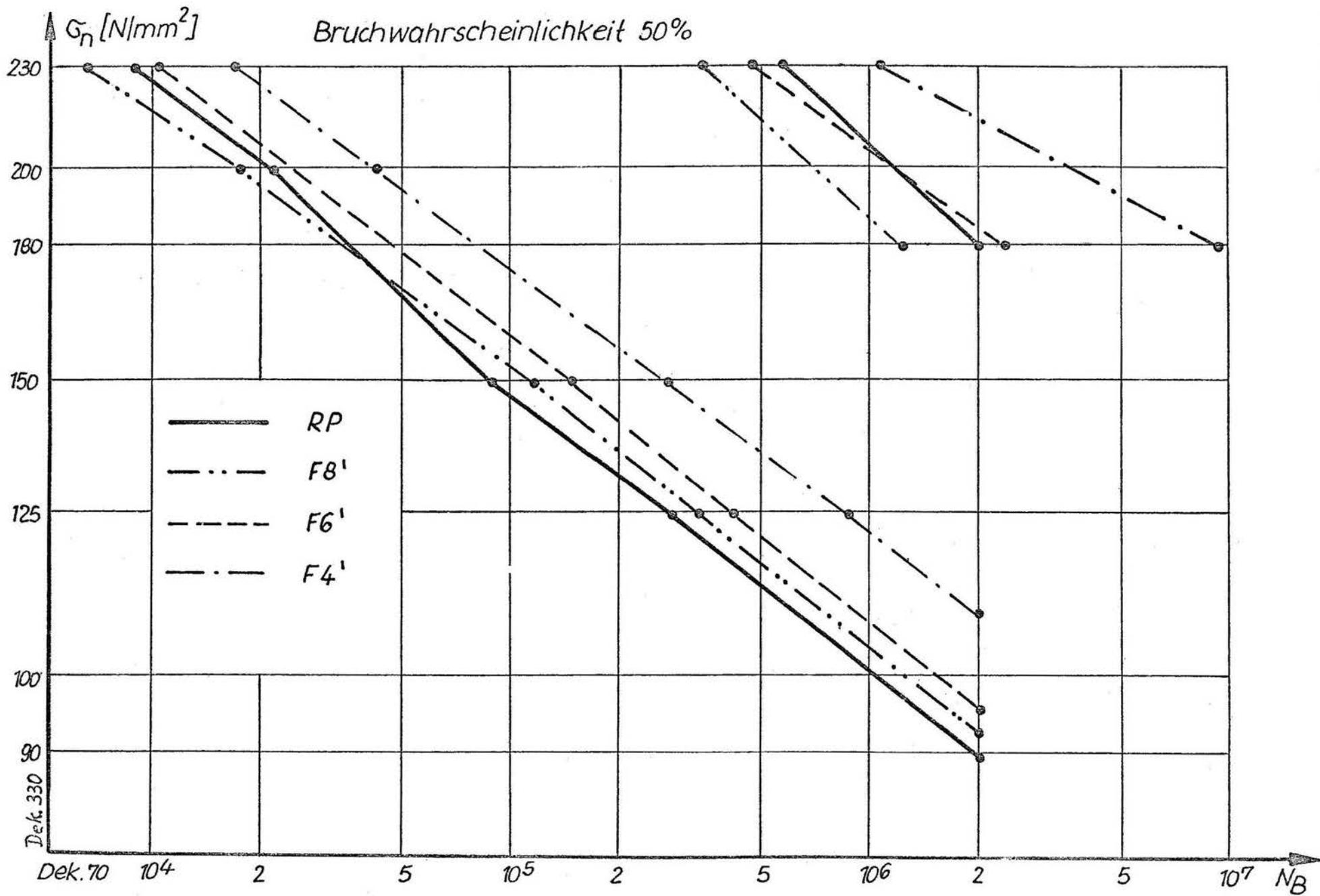


Wöhler- und Lebensdauerlinien
 der Flachprobe F 8' für
 $P_B = 10, 50, 90 \%$



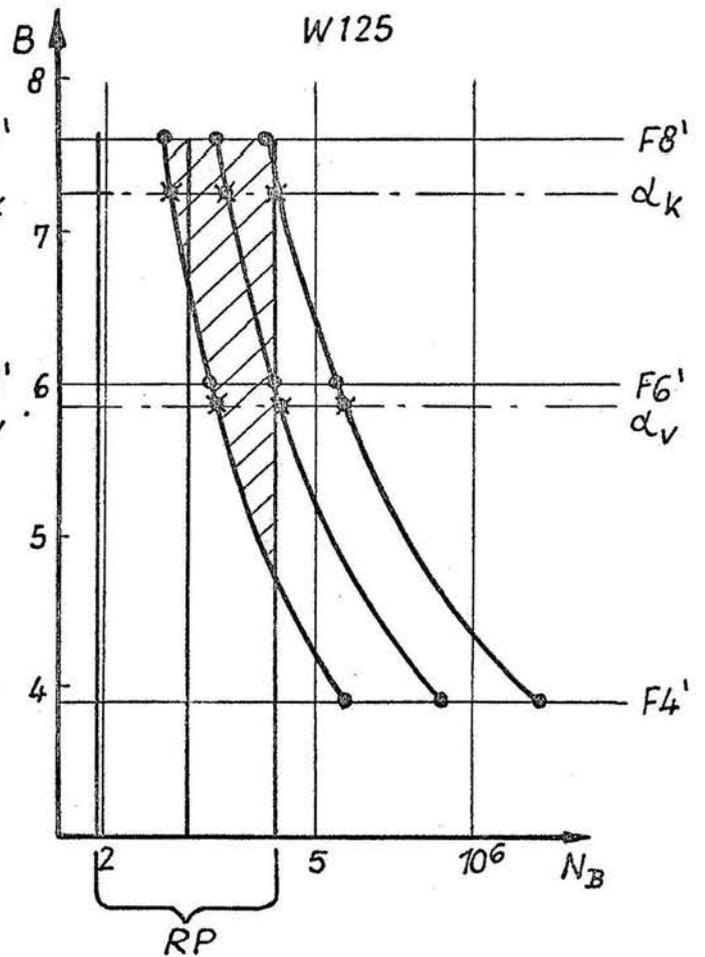
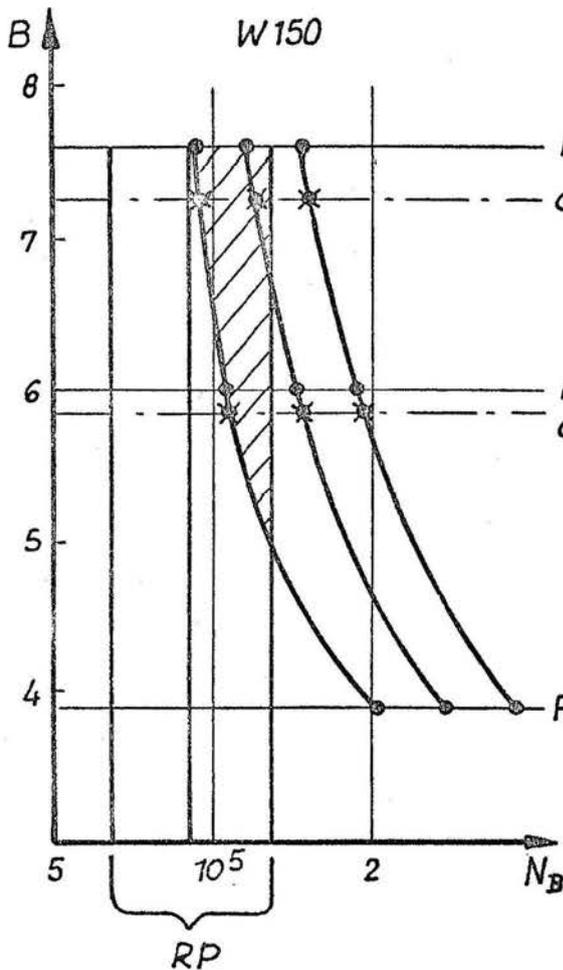
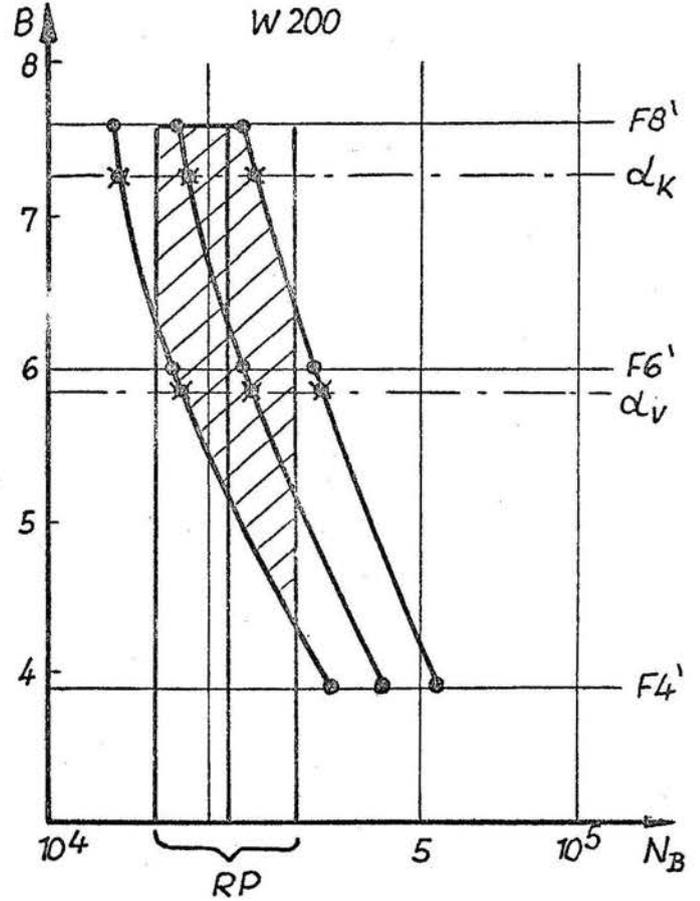
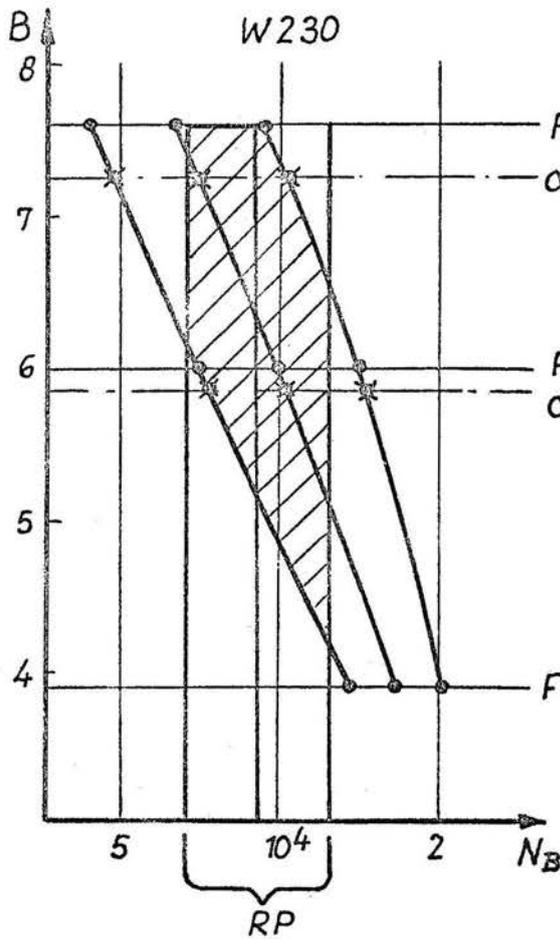
Bruchwahrscheinlichkeiten der hochgesetzten Durchläufer

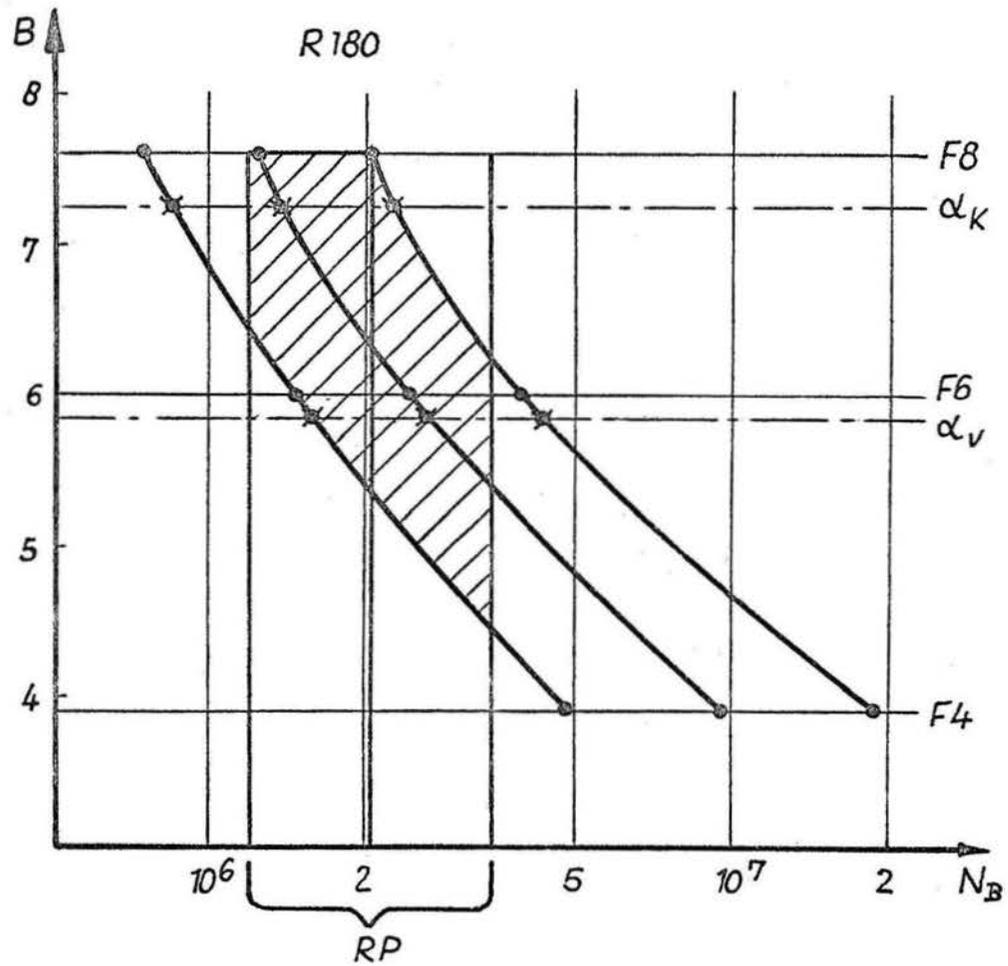
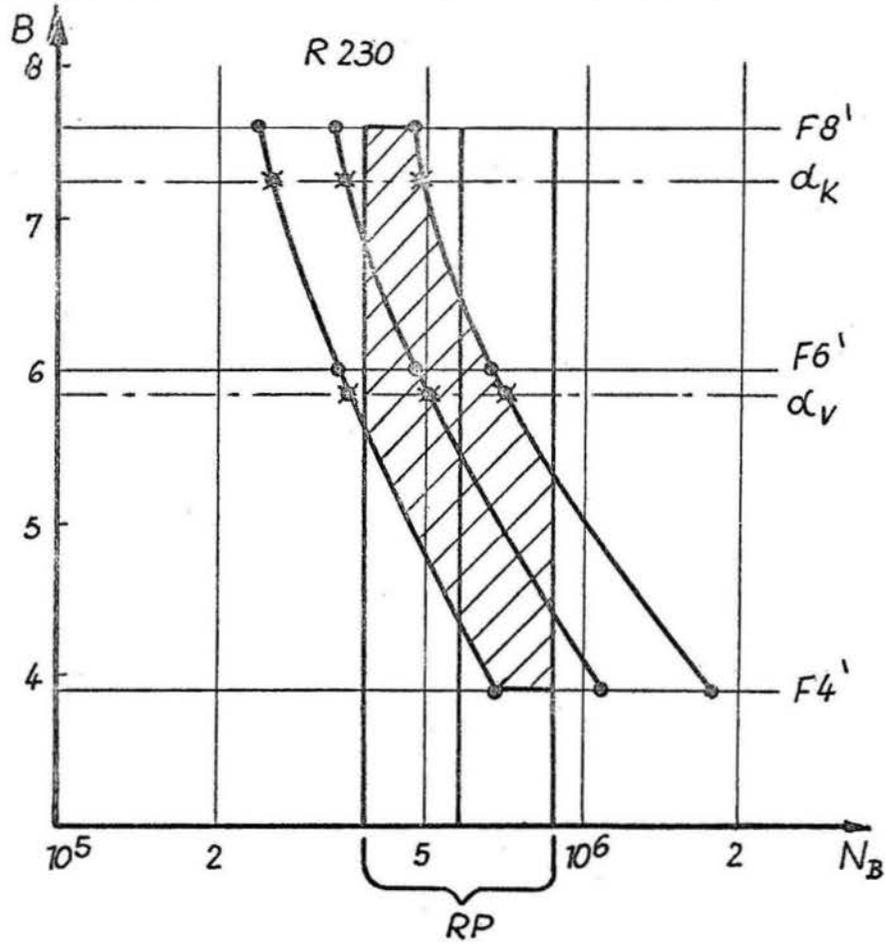
Anhang A 66



Wöhler- und Lebensdauerlinien
 der Rundprobe und aller Flach-
 proben für $P_B = 50\%$

Anhang A 67





Manuelle Vernetzung eines Probenviertels

"DIGITRON"

Datenstreifen für DATGEN-2

Rechner: ODRA-1204

DATGEN-2 /85/

Datenstreifen für Finit-Element-Programme DV1

Rotationssymmetrie

SCHEIBE 3 /81/

Ergebnisse Rundprobe DV1

Ebener Spannungszustand

S 4 B /B 11/

Ergebnisse Flachprobe DV1

VDIG /B 7/

Steuerstreifen für "DIGIGRAF"

Grafische Darstellung der
Vernetzungen

VDAT /B 2/

Datenstreifen für Finit-Element-Programme DV2

Rotationssymmetrie

A 3 G /84/

Ergebnisse Rundprobe DV2

Rechner: BESM-6

Ebener Spannungszustand

E 3 /83/

Ergebnisse Flachprobe DV2

Vergleich der Ergebnisse mit NEUBER /25/
sowie BART/NEUBER/SCHNACK /46/

Rechner: DDP 516

ALPHA/K /B 15/

Programmbeschreibung VDAT

Programmiersprache: ALGOL 1204
Rechnertyp: ODRA 1204
Betrieb: VEB Kombinat Pumpen und Verdichter Halle
WTZ, Abt. Rechentechnik
402 Halle, Leninallee 90
Bearbeiter: Dipl.-Ing. D. Joensson
Datum der Fertigstellung: 5. 2. 1979
Kurzbeschreibung: Herstellung eines Datenstreifens für
Finite-Element-Rechnung auf der BESM-6
(Umsetzung der Netzstruktur vom linearen
auf den quadratischen Verschiebungsansatz).
Eingabedaten: Eingabe-Lochstreifen FEM-Programme
(linearer Verschiebungsansatz) auf dem
Rechner ODRA 1204.
Ergebnisse: Eingabe-Lochstreifen für die BESM-6 in
FORTRAN-Formaten.
Rechenzeit: 10 s
Umfang: 5 Blatt, 1 Seite ALGOL-Text

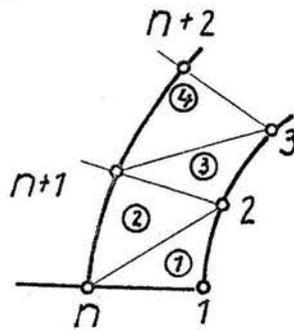
1. Algorithmus

Das Programm VDAT dient der Bereitstellung von Koordinaten für die Finit-Element-Programme "E 3" /1/ und "A 3 G" /2/. Dabei wird von den Daten für Dreieckselemente mit linearem Verschiebungsansatz (DV 1) ausgegangen.

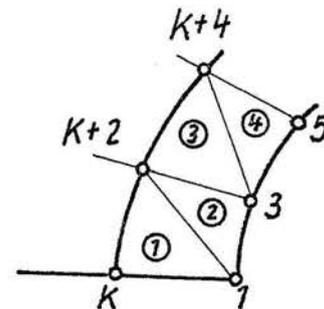
Das Element DV 1 wurde für den rotationssymmetrischen Spannungszustand /3/ und den ebenen Spannungszustand /4/ in ALGOL für den Rechner ODRA 1204 programmiert. Die Programme "E 3" und "A 3 G" basieren auf Dreieckselementen mit quadratischem Verschiebungsansatz (DV 2) und sind in FORTRAN für den Rechner BESM-6 geschrieben.

Die in den Programmen "E 3" und "A 3 G" verwendete automatische Vernetzung ist bezüglich der Numerierung anders ausgelegt als der Datengenerator "Datgen 2" /5/, der zur Vernetzung für die Programme /3/ und /4/ benutzt wird. Hier gehören zum 1. Punkt zwei Elemente (Skizze 1):

Skizze 1



a) "Datgen-2"-Vernetzung



b) Vernetzung nach "E 3",
"A 3 G"

Das Programm VDAT ist gültig für ein beliebig verzerrtes Rechtecknetz (siehe /5/). Man unterscheidet grundsätzlich zwei Zählrichtungen der Numerierung. Die 1. Zählrichtung ist entscheidend für die Festlegung der Bandbreite der Systemsteifigkeitsmatrix.

Die Bandbreite bb ergibt sich direkt aus der größten an einem Element auftretenden Knotenpunktdifferenz $dif.$ zu:

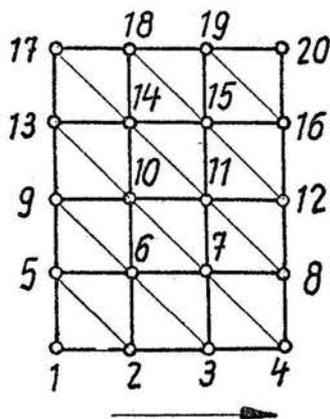
$$bb = 2 * (dif + 1)$$

Will man die Finit-Element-Ansätze DV1 und DV2 unmittelbar miteinander vergleichen, so muß die Vernetzung der Struktur erhalten bleiben. Das ist nur gewährleistet, wenn die 1. Zählrichtung beim Übergang von DV1 auf DV2 umgedreht wird, um den Anforderungen der beiden unterschiedlichen Datengeneratoren zu entsprechen.

In Skizze 2 ist dazu ein Beispiel dargestellt:

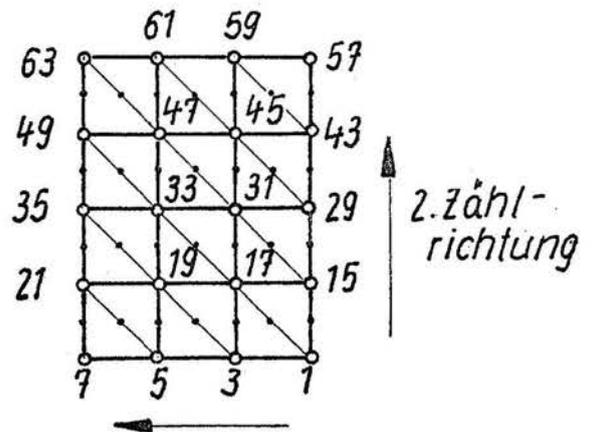
Skizze 2

a) Numerierung für DV1:



1. Zählrichtung

b) Numerierung für DV2:



1. Zählrichtung

In /5/ wurde die Anzahl der Punkte in der 1. Zählrichtung (für den Ansatz DV1) als Größe "hoe" bezeichnet. Das Programm VDAT setzt automatisch, vom Punkt "hoe" beginnend, in entgegengesetzter 1. Zählrichtung alle Eckpunktkoordinaten auf den Elementtyp DV2 um unter Berücksichtigung der Seitenmittenknotennumerierung.

2. Eingabe

Nr.	Eingabe	Größe	Erläuterung
1		n	Beispiel - Nr.
2		pkt	Anzahl der Punkte
3		hoe	Anzahl der Punkte in 1. Zählrichtung
4		fel	Anzahl der Elemente
5	Ergebnisstreifen des Programmes "Datgen 2" /5/		

3. Ergebnis

Die Ausgabe erfolgt auf dem Stanzer (BCD-Code) in folgendem FORTRAN-Format: I 10, 2 E 15.5 .

4. Literatur

- /1/ Recke, H.G. Die Programme E 3 und A 3
Vortrag zum Problemseminar "Finite
Elemente"
TU Dresden 1974, S. 11 - 14
Programmbeschreibung E 3
Stand vom 10. 4. 1978
Bergakademie Freiberg, Sektion Maschinen-
und Energietechnik, Bereich Mechanik und
Getriebetechnik
- /2/ - Programmbeschreibung A 3 G, Stand vom
10. 4. 1978
siehe /1/
- /3/ Gabbert, U.; Programmbeschreibung MH 214/75-0
Joensson, D. ("Scheibe 3") WTZ des VEB Kombinat
Pumpen und Verdichter (KPV) Halle 1975
- /4/ Gabbert, U. Programmbeschreibung MH 253/77-0
("Scheibe 4") WTZ des VEB KPV
Halle 1977
- /5/ Joensson, D. Programmbeschreibung MH 218/75-0
("Datgen 2") WTZ des VEB KPV
Halle 1975

Programmbeschreibung VDIG

Programmiersprache: ALGOL 1204
Rechnertyp: ODRA 1204
Betrieb: VEB Kombinat Pumpen und Verdichter Halle
WTZ, Abt. Rechentechnik
402 Halle, Leninallee 90
Bearbeiter: Dipl.-Ing. D. Joensson
Datum der Fertigstellung: 10. 12. 1977
Kurzbeschreibung: Herstellung von Steuerstreifen für das
Zeichnen von FEM-Netzen auf dem Zeichen-
tisch DIGIGRAF 1008
Eingabedaten: Eingabelochstreifen für FEM-Programme
bzw. Datengeneratorergebnis-Streifen
Ergebnisse: Steuerstreifen für beliebige Dreiecks-
struktur mit genormtem Maßstab
Rechenzeit: 1 min
Umfang: 4 Blatt, 6 Seiten ALGOL-Text

1. Algorithmus

Das Programm VDIG ist eine Modifikation des Programmes "Diginetz MD" von BERGER /1/.

Ausgangspunkt für die Berechnung in /1/ ist die Eingabe von FEM-Dreiecksstrukturen. Entsprechend der Topologie (Zuordnung der Knotenpunkte zu den Dreieckselementen) wird jedes Element einzeln gezeichnet.

Ein Nachteil des Programmes /1/ besteht darin, daß der Eingabestreifen sofort mit den Knoten-Koordinaten beginnt. Das ist bei der Eingabe für die FEM-Programme /2/ und /4/ nicht gegeben, da am Anfang immer globale Netzangaben gemacht werden müssen.

Deshalb wurde in VDIG eine unterschiedliche Eingabe von unveränderten Streifen für die Programme /2/, /3/ und /4/ gewährleistet. Für die Scheibe-Programme muß lediglich noch die Anzahl der Nullverschiebungen und Knotenkräfte (Erläuterung siehe /2/) angegeben werden.

Weiterhin wurde gegenüber /1/ in VDIG eine Normierung des Zeichnungsmaßstabes vorgegeben. Am DIGIGRAF 1008 sind nur die Maßstäbe 1 : 1, 1 : 2 und 2 : 1 einstellbar. Bei der Beurteilung von FEM-Netzen kommt es weniger darauf an, einen bestimmten Maßstab zu betrachten, vielmehr interessieren qualitative Aussagen zur Struktur. Durch das Programm VDIG wird jedes FEM-Netz mit einer maximalen Ausdehnung von 23,5 cm bereitgestellt, so daß es bequem auf ein DIN-A 4-Blatt paßt.

2. Eingabe

Nr.	Eingabe	Größe	Bezeichnung	Erläuterung
1		sten	Typ-Nr. des Datenstrei- fens	= 1.0 "Scheibe 3" /2/
				= 2.0 "Scheibe 4" /4/
				= 3.0 "Datgen 2" /3/
2		pkt	Anzahl der Knotenpunkte	
3		fel	Anzahl der Dreieckselemente	
4		nv	Anzahl der Nullverschiebungen	} nur für /2/, /4/ sonst = 0.0!
5		Kn	Anzahl der Knotenkräfte	

3. Beispiel

Es soll ein Eingabestreifen für das Programm "Scheibe 4" /4/ grafisch kontrolliert werden.

Dazu lauten die Eingabedaten für das Programm VDIG:

sten = 2.0, pkt = 93,0, fel = 148.0, nv = 16.0,
Kn = 5.0

4. Literatur

- /1/ Berger, W. Programmbeschreibung MH 247/77-0
 ("Diginetz MD")
 WTZ des VEB Kombinat Pumpen und Ver-
 dichter (KPV) Halle 1977
- /2/ Gabbert, U.; Programmbeschreibung MH 214/75-0
 Joensson, D. ("Scheibe 3"), WTZ des VEB KPV
 Halle 1975
- /3/ Joensson, D. Programmbeschreibung MH 218/75-0
 ("Datgen 2"), WTZ des VEB KPV
 Halle 1975
- /4/ Gabbert, U. Programmbeschreibung MH 253/77-0
 ("Scheibe 4"), WTZ des VEB KPV
 Halle 1977

Programmbeschreibung S 4 B

Programmiersprache: ALGOL 1204
Rechnertyp: ODRA 1204
Betrieb: VEB Kombinat Pumpen und Verdichter Halle
WTZ, Abt. Rechentechnik
402 Halle, Leninallee 90
Bearbeiter: Dipl.-Ing. D. Joensson
Datum der Fertigstellung: 10. 1. 1978
Kurzbeschreibung: Festigkeitsberechnung von ebenen Bauteilen (ebener Spannungszustand) mit beliebigen, ebenen Belastungen unter Benutzung der Finit-Element-Methode. Es wird das Dreieckelement mit linearem Verschiebungsansatz benutzt.
Eingabe: Geometrie- und Materialkennwerte
Ergebnisse: Verschiebungen in x- und y-Richtung für jeden Knotenpunkt, konstante Spannungen pro Element.
Rechenzeit: Bei maximaler Speicherplatzauslastung etwa 60 min.

Umfang: 4 Blatt, 13 Seiten ALGØL-Text

1. Algorithmus

Das Programm S 4 B stellt eine reduzierte Variante des Programmes "Scheibe 4" /1/ dar. Bei der Entwicklung des Programmes /1/ erweiterte GABBERT zunächst das Programm "Scheibe 3" /2/ dahingehend, daß wahlweise rotationssymmetrischer oder ebener Spannungszustand gerechnet werden konnte. Beide Spannungszustände sind sich sehr ähnlich, dadurch muß nur die Berechnung der einzelnen Elementsteifigkeitsmatrizen und der Element-Kraftvektoren unterschiedlich bereitgestellt werden /3/.

Das so entstandene Programm hatte einen Umfang von 6270 Speicherplätzen. Eine Einsparung von Speicherplätzen wurde von GABBERT durch die Formulierung der auf Trommelspeicher zugeschnittenen Dreieckszerlegung und Lösung der Bandmatrix (siehe /2/, Abschnitt 2.4.) mittels externer Prozeduren erreicht. Somit konnten in /1/ 12 % des ursprünglichen Programmes wegfallen.

Wegen der geringen aktiven Speicherplatzkapazität des ODRA-Rechners ist es für größere Probleme günstiger, noch mehr Einsparungen vorzunehmen. Deshalb wurde das ursprüngliche Programm "Scheibe 4" so modifiziert, daß jetzt eine Beschränkung ausschließlich auf ebene Probleme vorliegt.

Das neue Programm S 4 B hat nur noch einen Umfang von 75 % des Programmes "Scheibe 4".

Außerdem ist das Druckbild gegenüber /1/ auf den ebenen Spannungszustand zugeschnitten.

Am Ende der Rechnung werden die Schwerpunktkoordinaten x_S und y_S für jedes Dreieckelement berechnet und ausgegeben.

2. Speicherplatzbeschränkung

Als verfügbarer Speicherplatz verbleiben auf dem ODRA-Rechner nur 11 K Werte. Davon belegt bereits das Programm S 4 B 4751 Speicherplätze.

Die Gleichung für die Speicherplatzbeschränkung unter Berücksichtigung aller vereinbarten Größen und Felder lautet:

$$14 * \text{pkt} + 3 * \text{fel} + 2 * (\text{bb} + 1)^2 + 2 * \text{vt} + 3 * \text{kn} - \text{nv} \leq 6013$$

Die Erläuterung der Größen befindet sich in /2/.

Für ein konstruiertes Beispiel mit

bb	=	20
vt	=	1
kn	=	5
nv	=	20

würden sich folgende Möglichkeiten für die Netzstruktur ergeben:

z. B. 250 Punkte mit 545 Elementen
oder 250 Elemente mit 313 Punkten.

3. Eingabe

Die Eingabedaten entsprechen vollständig den Eingabedaten in /2/. Nur bei der Bereitstellung der Knoteneinzelkräfte muß man beachten, daß es sich jetzt nicht mehr um Linienlasten, sondern um Flächenlasten handelt.

Als zusätzliche Angaben werden benötigt:

1. Nach Eingabe Nr. 6 (Eingabeblatt 1/1) muß noch einmal der Wert der Größe "fel" angegeben werden.
2. Am Schluß der Dateneingabe (nach dem Einlesen der Punktzuordnung) wird die Dicke h in cm verlangt.

Programmbeschreibung ALPHA/K

Programmiersprache: FORTRAN - IV
Rechnertyp: DDP 516
Betrieb: Technische Universität Dresden
Automatenbereich Kleinrechner
8016 Dresden, Marschnerstraße 30
Bearbeiter: Dipl.-Ing. D. Joensson
Datum der Fertigstellung: 15. 6. 1979

Kurzbeschreibung: Berechnung von Formzahlen entsprechend den Formeln nach NEUBER (TGL 19340) und den an numerische Ergebnisse angeglichenen neuen Interpolationsformeln von BART, NEUBER, SCHNACK.

Eingabedaten: Radius der Kerbe, Kerbtiefe und Differenz zwischen Probenbreite und Kerbtiefe

Ergebnisse: Formzahlen nach den alten und neuen NEUBER-Formeln für Rund- und Flachproben unter Zug-Druck-Belastung

Rechenzeit: 1 s je Beispiel

Umfang: 6 Blatt, 1 Seite FORTRAN-Text

1. Theoretische Grundlagen

NEUBER leitet in /1/ für praktisch auftretende Kerben die Formzahl für endliche Körper aus Formzahlen für sehr flache und sehr tiefe Kerben mit folgendem Ansatz her:

$$\alpha_K = 1 + \frac{(\alpha_{fK} - 1)(\alpha_{tK} - 1)}{\sqrt{(\alpha_{fK} - 1)^2 + (\alpha_{tK} - 1)^2}} \quad (1)$$

1.1. Flachprobe

Die Formzahl α_{fK}^F für zugdruck-belastete Scheiben (Flachprobe) mit beiderseitiger, flacher Außenkerbe lautet:

$$\alpha_{fK}^F = 3 \sqrt{\frac{t}{2r}} - 1 + \frac{4}{2 + \sqrt{\frac{t}{2r}}} \quad (2)$$

Für die tiefe Kerbe ergibt sich die entsprechende Formzahl α_{tK}^F :

$$\alpha_{tK}^F = \frac{2 \left(\frac{a}{r} + 1\right) \sqrt{\frac{a}{r}}}{\left(\frac{a}{r} + 1\right) \arctan \sqrt{\frac{a}{r}} + \sqrt{\frac{a}{r}}} \quad (3)$$

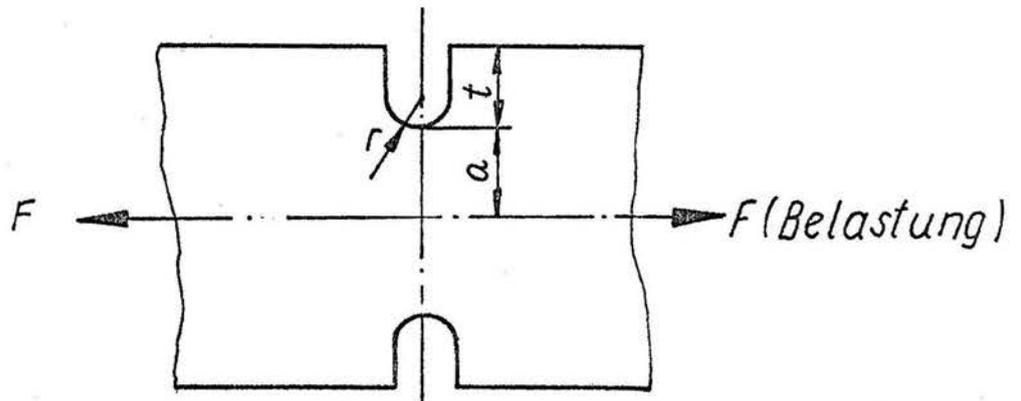
Mit r = Kerbradius

t = Kerbtiefe

a = halbe Breite des Restquerschnittes
im Kerbgrund

} siehe Bild 1

Bild 1:



Die technische Formzahl für zugdruckbelastete Flachproben α_K^F wird mit (1) errechnet:

$$\alpha_K^F = f(\alpha_{fK}^F, \alpha_{tK}^F)$$

1.2. Rundprobe

Für einen Rotationshyperboloid mit sehr flacher Kerbe ermittelte NEUBER folgende Formzahl:

$$\alpha_{fK}^R = \frac{1}{M} \left\{ 2 \left(\frac{t}{r} \right)^2 - \left(1.5 - \frac{1}{m} \right) \frac{t}{r} + 1 - \frac{1}{m} + \left[\frac{1}{m} - \left(1.5 + \frac{1}{m} \right) \frac{t}{r} \right] \frac{t}{r} \cdot c \right\} \quad (4)$$

mit $c = \frac{\arctan \sqrt{\frac{t}{r} - 1}}{\sqrt{\frac{t}{r} - 1}}$ (gilt nur für $\frac{t}{r} > 1$!)

$$M = \frac{t}{r} + 1 - \frac{1}{m} + \left(\frac{t}{r} - 2 + \frac{2}{m} \right) \frac{t}{r} c - \left(1 + \frac{1}{m} \right) \left(\frac{t}{r} \right)^2 c^2$$

$$\frac{1}{m} = \text{Querkontraktionszahl}$$

Für die sehr tiefe Kerbe lautet die Formzahl:

$$\alpha_{tK}^R = \frac{1}{N} \left[\frac{a}{r} \sqrt{\frac{a}{r} + 1} + \left(0.5 + \frac{1}{m} \right) \frac{a}{r} + \left(1 + \frac{1}{m} \right) \left(\sqrt{\frac{a}{r} + 1} + 1 \right) \right] \quad (5)$$

mit $N = \frac{a}{r} + \frac{2}{m} \sqrt{\frac{a}{r} + 1} + 2$

Für beide Formzahlen gilt wieder

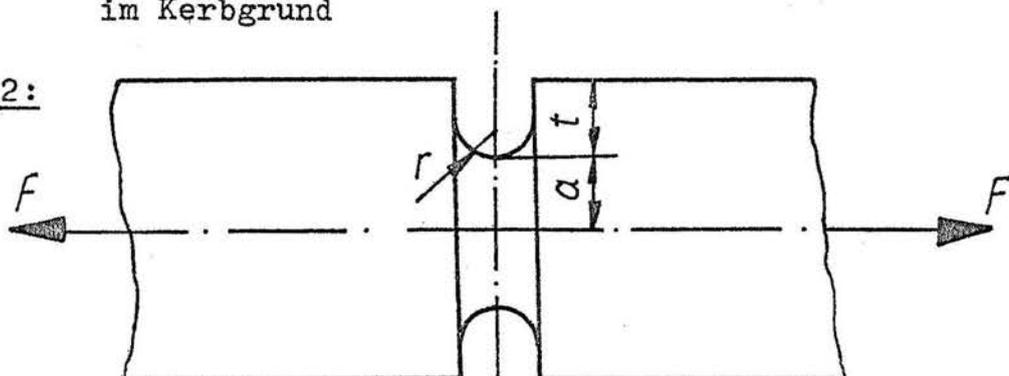
r = Kerbradius

t = Kerbtiefe

a = halbe Breite des Restquerschnittes
im Kerbgrund

siehe Bild 2

Bild 2:



Die technische Formzahl für zugdruckbelastete Rundproben α_K^R wird wieder mit (1) errechnet:

$$\alpha_K^R = f(\alpha_{rK}^R, \alpha_{tK}^R)$$

Zur Verbesserung der Formzahlberechnung wird in /2/ eine (an numerische Ergebnisse angepaßte) neue Formel vorgestellt:

$$\alpha_K = M + \sqrt{\left[\frac{C_3 + C_4(t/a)}{1 + C_7(t/a)} \right]^2 + \frac{C_5 + C_6(t/a)}{1 + C_8(t/a) + C_9(t/a)^2} \cdot \frac{t}{r}} \quad (6)$$

$$\text{Mit } M = \frac{C_1 + C_2(t/a)}{1 + C_7(t/a)}$$

Die numerischen Ergebnisse wurden mit der Finite-Element-Methode (FEM) erzielt. Für ebene Probleme kam eine Kombination von Integralgleichungselementen mit FEM /3/ zur Anwendung, für Rotationssymmetrie krummlinig berandete Hybridelemente /4/. Die Konstanten C_1 bis C_9 wurden mittels Ausgleichsrechnung bestimmt und für vier Fälle in /2/ angegeben:

- a) ebener Zugstab mit Kreiskerbe
- b) ebener Biegestab mit Kreiskerbe
- c) ebener Zugstab mit Langloch
- d) rotationssymmetrischer Zugstab mit Kreiskerbe.

2. Algorithmus

Es werden die Formzahlen für Flach- und Rundproben über Gleichung (1) berechnet. Anschließend erfolgt die Festlegung der Konstanten C_1 bis C_9 nach /2/ für die beiden Fälle:

- ebener Zugstab mit Kreiskerbe
- rotationssymmetrischer Zugstab mit Kreiskerbe.

Diese beiden Fälle werden über die Gleichung (6) durchgerechnet.

AKF - Formzahl für Flachprobe	}	nach /1/
AKR - Formzahl für Rundprobe		
NKF - Formzahl für Flachprobe	}	nach /2/
NKR - Formzahl für Rundprobe		

6. Literaturverzeichnis

- [1] Neuber, H.: "Kerbspannungslehre"
Springer-Verlag Berlin, Göttingen,
Heidelberg 1958, 2. Auflage
- [2] Bart, J.;
Neuber, H.;
Schnack, E.: "Kerbfaktordiagramme nach numerischen
Berechnungsverfahren"
Konstruktion 28 (1976), S. 217 - 218
- [3] Bart, J.: "Kombination eines Integralgleichungs-
verfahrens mit der Methode der finiten
Elemente zur Berechnung ebener Span-
nungskonzentrationsprobleme"
Diss. TU München 1974
- [4] Schnack, E.: "Beitrag zur Berechnung rotationssymme-
trischer Spannungskonzentrationsprobleme
mit der Methode der finiten Elemente"
Diss. TU München 1973