Teorie sférické trigonometrie

Trigonometrie (z řeckého *trigónon* = trojúhelník a *metrein*= měřit) je oblast goniometrie zabývající se praktickým užitím goniometrických funkcí při **řešení úloh o trojúhelnících**.

Trigonometrie se dělí na **rovinnou** a **sférickou**.

Goniometrie (z řeckého *gónia* = úhel a *metrein*= měřit) je oblast matematiky, která se zabývá goniometrickými funkcemi jako **sinus, kosinus, tangens** a **kotangens**.

Praktické využití sférické trigonometrie – výpočet skutečných vzdálenosti na Zemi (resp. referenční kouli) mezi body o známých zeměpisných souřadnicích φ a λ.

Základní pojmy:

Hlavní kružnice

- je taková kružnice na kulové ploše, jejíž střed je shodný se středem kruhové plochy (např. všechny poledníky, rovník)

Vedlejší kružnice

- všechny ostatní kružnice na kulové ploše, které nesplňují podmínky hlavní kružnice (s těmi ale počítat nebudeme, následující informace se odvozují od hlavních kružnic)

Sférický úhel α

- odchylka dvou rovin, ve kterých leží hlavní kružnice sféry. Na obr. 1 je sférickým úhlem α odchylka rovin *UAT* a *UBT*.

Sférická vzdálenost

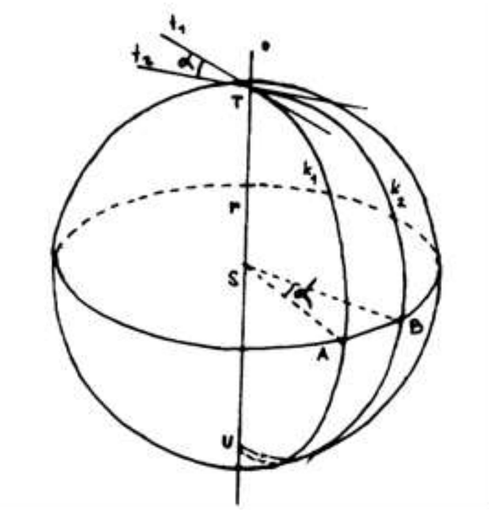
- sférickou vzdálenost bodů A, B na kulové ploše rozumíme menší z oblouků hlavní kružnice ohraničený body A a B (viz obr. 1)
- sférická vzdálenost se vyjadřuje v míře stupňové, nebo délkové

Přímá vzdálenost

- přímá vzdálenost mezi body A, B na kulové ploše je délka tětivy, která spojuje body A a B ležící na hlavní kružnici
- fyzicky bychom tuto vzdálenost na zeměkouli naměřili pod zemským povrchem, technicky je tato vzdálenost pro přepravu na zemi nevhodná a proto se pro výpočet nejkratší vzdálenosti mezi dvěma body nepoužívá

Sférický dvojúhelník

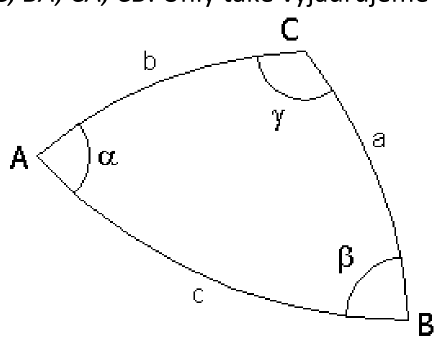
- je část kulové plochy ohraničená **dvěma hlavními polokružnicemi**. Body *T, U* se nazývají vrcholy, polokružnice k_1 a k_2 jsou strany a úhel dvojúhelníku je sférický úhel α, viz obr. 1.



Obr. 1

Sférický trojúhelník

- je menší část kulové plochy ohraničená oblouky tří **hlavních** kružnic.
- má **tři vrcholy** (*A, B, C)*, tři **strany** (*AB = c, BC = a, CA = b)*, a **tři úhly** (α, β, γ) viz obr. 2.
- strany *a, b, c* sférického trojúhelníku ABC jsou velikosti úhlů *BSC, ASC, ASB* v míře stupňové nebo obloukové
- Úhly α, β, γ sférického trojúhelníku *ABC* jsou sférické úhly, které svírají příslušné oblouky hlavních kružnic *AB, AC; BC, BA; CA, CB*. Úhly také vyjadřujeme v míře stupňové nebo obloukové.



Obr. 2

Vlastnosti sférického trojúhelníku:

a) Součet libovolných dvou stran je větší než strana třetí

a+b>c, b+c>a, a+c>b

b) Součet všech stran je menší než 360°

$a + b + c < 360°$.

c) Součet všech úhlů je větší než 180° a menší než 540°

$180° < \alpha + \beta + \gamma < 540°$.

d) Rozdíl mezi součtem všech úhlů sférického trojúhelníku a úhlem přímým se nazývá „exces“ sférického trojúhelníku (nadbytek), značí se ε,

$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180°$.

e) Proti stejným stranám leží stejné úhly, proti větší straně leží větší úhel.

Pro sférický trojúhelník platí následující věty:

Sinová věta (SV):

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta}$$

Kosinová věta pro strany (1. kosinová věta, 1KV):

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$$

Kosinová věta pro úhly (2. kosinová věta, 2KV):

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a$$

Sinuskosinová věta pro stranu a přilehlý úhel (SKV):

$$\sin a \cdot \cos \beta = \sin c \cdot \cos b - \cos c \cdot \sin b \cdot \cos \alpha$$

$$\sin a \cdot \cos \gamma = \sin b \cdot \cos c - \cos b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$$

Jakou větu použít při řešení sférického trojúhelníku?

Sférický trojúhelník je určen třemi prvky (na rozdíl od rovinného trojúhelníku to mohou být i tři úhly!). Řešit sférický trojúhelník znamená vypočítat jeho neznámé parametry. Vždy je třeba znát alespoň tři údaje, z nichž se mohou ostatní dopočítat jednou z výše uvedených vět. V tabulce je přehled, který udává použití konkrétních vět pro známé prvky trojúhelníku.

známé prvky		**Možný postup řešení**
a, b, c	(strana-strana-strana, SSS)	1KV nebo SKV
dvě strany a úhel jimi sevřený	(strana-úhel-strana, SUS)	1KV nebo SKV
strana a úhly k ní přilehlé	(úhel-strana-úhel, USU)	2KV nebo SKV
α, β, γ	(úhel-úhel-úhel, UUU)	2KV nebo SKV
dvě strany a úhel proti jedné z nich	(SsU)	SV
dva úhly a strana proti jednomu z nich	(UuS)	SV

ORTODROMA (z řeckého ortos = přímý, dromos = cesta)
- nejkratší spojnice dvou míst na zemském povrchu
- jde o kratší oblouk hlavní kružnice procházející oběma místy na referenční kouli

Základní geodetické úlohy – řeší výpočet ortodromy

1. geodetická úloha – úkolem je ze souřadnic počátečního bodu E, počátečního azimutu a délky ortodromy určit souřadnice koncového bodu F a koncový azimut
2. geodetická úloha – ze souřadnic bodů E a F zjistit délku ortodromy a počáteční a koncovou hodnotu azimutu

(my se určování azimutu věnovat nebudeme, budeme řešit jen2. geodetickou úlohu – tj. určení déky ortodromy)

Výpočet ortodromy pro dvojici bodů E, F ležící na stejné rovnoběžce:

$d = 2\pi r_z \,.\, \cos \varphi \,.\, \Delta\lambda/360°$

$\Delta\lambda = \lambda_E – \lambda_F$

$\Delta\lambda < 180°$ (musí splnit podmínku kratšího oblouku)

Výpočet ortodromy pro dvojici bodů E, F ležící na stejném poledníku:

$d = 2\pi r_z \,.\, \Delta \varphi /360°$

$\Delta \varphi = \varphi_E - \varphi_F$

$\Delta \varphi < 180°$ (musí splnit podmínku kratšího oblouku)

Výpočet ortodromy pro dvojici bodů E, F v obecné poloze:

K určení ortodromy mezi body v obecné poloze lze využít znalosti sférické trigonometrie. Oba body tvoří společně se severním pólem snadno řešitelný sférický trojúhelník (viz obr. 3).

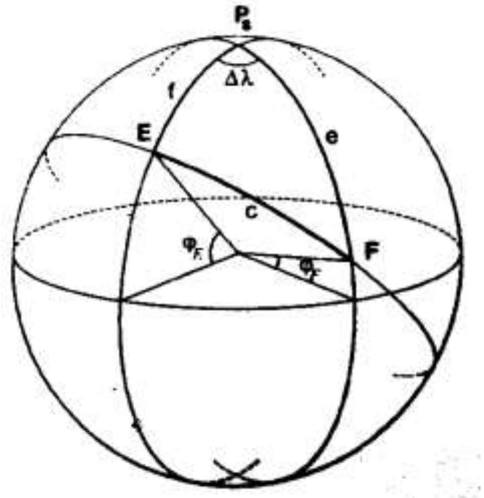
Kosinová věta pro stranu c sférického trojúhelníku: $\mathbf{\cos c = \cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b \,.\, \cos \gamma}$
Dosazením známých hodnot získáme vztah:

$$\cos c = \cos (90°- \varphi_E) \,.\, \cos (90°- \varphi_F) + \sin (90°- \varphi_E) \,.\, \sin (90°- \varphi_F) \,.\, \cos \Delta\gamma$$

c odpovídá velikosti oblouku mezi body EF v úhlové míře (°), jedná se o část hlavní kružnice procházející body E a F (viz obr.)

výsledná délka ortodromy se vypočítá ze vztahu:

$$d = 2\pi r_z \,.\, c /360°$$



Obr. 3

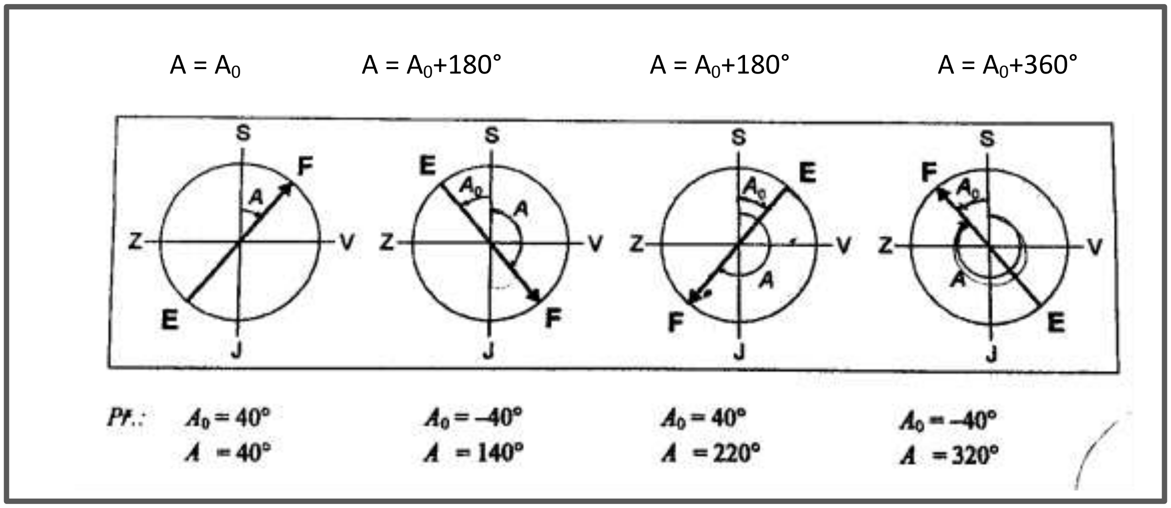
LOXODROMA (z řeckého loxos= šikmý, dromos = cesta)- čára spojující dvě místa na zemském povrchu protínající všechny poledníky pod stejným úhlem (azimutem A)

1. Výpočet azimutu loxodromy:
- při správném určení azimutu záleží na pořadí bodů (je nutné rozlišit počáteční a koncový bod)!
- souřadnice se musí dosadit včetně znamének (jš a zd jsou záporné)
- pro nejkratší loxodromu je opět nutné dodržet $\Delta\lambda < 180°$
- pokud je $\Delta\lambda > 180°$, musí se použít doplněk do 360°, který podmínku splní. Ve vztahu se nepoužívá absolutní hodnota, proto se do vztahu dosazuje doplněk s opačným znaménkem než původní rozdíl $\lambda_E - \lambda_F$ (např. místo 290° se dosadí -70°, místo -190° dosadíme 170°) – to je kvůli tomu, že musíme dodržet pořadí bodů
- délka loxodromy je samozřejmě stejná v obou směrech, ale při výpočtu její délky záleží na počátečním azimutu

azimut se určí ze vztahu:

$$\operatorname{tg} A_0 = \frac{\lambda_F - \lambda_E}{\ln\left(\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_F}{2} + 45°\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_E}{2} + 45°\right)}\right)} \cdot \frac{\pi}{180°}$$

Tímto jsme určili hodnotu úhlu A_0, který leží v intervalu základní periody funkce tangens (-90°; 90°). Protože ale azimut A se měří v intervalu <0°, 360°>, je nutné hodnotu A_0 opravit podle vzájemné polohy bodů E a F (resp. podle toho jakým směrem loxodromu počítáme). Korekce se provádí následovně:



Interpretace obrázku: pokud počítám loxodromu ve směru z JZ na SV, pak se A_0 = A (první obrázek zleva), pokud je směr loxodromy ze SZ na JV, pak se k zjištěnému A_0 přičte 180°

2. délka loxodromy se nakonec vypočítá dosazením do vztahu:

$$d_{EF} = \frac{r_Z}{\cos A} \,.\, (\varphi_F - \varphi_E) \,.\, \pi/180°$$

Zdroje k prostudování:

Pyšek J. (1994): Kartografie, kartometrie a matematická geografie v příkladech. ZČU, Plzeň, 169 s.