Operátory polohy a hybnosti – pokračování

23.3.2020 – druhá část

Tuto přednášku otevřeme jedním tématem, které s minulými otázkami souvisí, a poté budeme pokračovat výkladem o operátorech polohy a hybnosti.

Zobecněný operátor násobení nezávislou proměnnou

V materiálu k operátoru polohy jsme se zmínili o tom, že některá tvrzení jdou vyslovit obecněji pro operátor násobení nezávislou proměnnou na prostoru $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu)$ s nějakou obecnější mírou. Co si pod takovým prostorem představit?

Míra μ_{ac} může být *absolutně spojitá* (A.9) vzhledem k Lebesgueově míře nad $\mathbb{R}$, kdy platí

$$\mathrm{d}\mu_{\mathrm{ac}} = f\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

s nějakou měřitelnou funkcí f (A.9.3 a konec A.9.4). Potom funkce g je měřitelná vzhledem k absolutně spojité μ_{ac} právě tehdy, je-li zúžení g na $\operatorname{supp} f$ měřitelné v klasickém smyslu, a pro $M \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ platí

$$\int_M g\,\mathrm{d}\mu_{\mathrm{ac}} = \int_M gf\,\mathrm{d}x = \int_{M\cap \operatorname{supp} f} gf\,\mathrm{d}x\,. \tag{2}$$

I prostor $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu_{\mathrm{ac}})$ tedy je ekvivalentní $L^2(\operatorname{supp} f, \mathrm{d}x)$ a operátor $Q_{\mu_{\mathrm{ac}}}$ operátoru násobení x na tomto prostoru, ničím nás tedy nepřekvapí. Jeho spektrum je rovno $\sigma(Q_{\mu_{\mathrm{ac}}}) = \sigma_{\mathrm{c}}(Q_{\mu_{\mathrm{ac}}}) = \operatorname{supp} f$.

Míra μ také může vůči Lebesgueově míře *singulární*, což znamená, že je soustředěna na množině Lebesgueovy míry nula. Může tedy přiřazovat nenulovou míru nějaké diskrétní množině bodů a nulu intervalům mezi nimi. Speciálně pak ještě mohou existovat *čistě bodové* (či diskrétní) míry, ve kterých jednotlivé body mají nenulové míry, a *singulárně spojité*, které nepotkáte, pokud někomu nějak zásadněji neublížíte,[1] a nebudeme se jimi zabývat.

Pro diskrétní míru μ_{pp} soustředěnou na nejvýše spočetné množině svých diskrétních bodů (obojí str. 627–628) $X = x_1, x_2, \ldots \subset \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce jednoznačně dány svými hodnotami v těchto bodech a jejich integrál[2] je dán sumou

$$\int_M f\,\mathrm{d}\mu_{\mathrm{pp}} = \sum_{x\in M\cap X} f(x) = \sum_i f(x_i)\chi_M(x_i). \tag{3}$$

Funkce f tedy patří do $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu_{\mathrm{pp}})$ právě tehdy, je-li posloupnost jejích hodnot v bodech X prvkem $\ell^2(X)$. Operátor $Q_{\mu_{\mathrm{pp}}}$ má na tomto prostoru čistě bodové, nedegenerované spektrum rovné uzávěru množiny X.

Obecně platí, že libovolná regulární borelovská míra μ nad $\mathbb{R}$, tedy taková, ve které všechny intervaly jsou měřitelné a k míře množiny se dá dospět zespodu kompaktními a shora otevřenými intervaly,[3] umožňuje rozklad (A.9.3, A.9.4)

$$\mu = \mu_{\mathrm{ac}} + \mu_{\mathrm{pp}} + \mu_{\mathrm{sc}}, \quad \mathrm{d}\mu_{\mathrm{ac}} = f\,\mathrm{d}x\,. \tag{4}$$

Pokud nebudeme uvažovat singulárně spojitý příspěvek, můžeme v takových případech $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu)$ uvažovat jako direktní součet

$$L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu) \cong L^2(\operatorname{supp} f, \mathrm{d}x) \oplus \ell^2(X). \tag{5}$$

Navíc pro konečná X je

$$\ell^2(X) \cong \mathbb{C}^{|X|}, \tag{6}$$

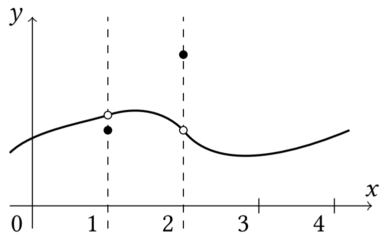
tedy každý diskrétní bod x_i míry μ přidá k prostoru $L^2(\operatorname{supp} f, \mathrm{d}x)$ jednorozměrný podprostor, nezávisle na velikosti $\mu(x_i)$. Můžeme si to představit, jak ukazuje obrázek 1.

Bodové spektrum operátoru Q_μ je pak dáno množinou X a jeho spojité spektrum množinou $\operatorname{supp} f \setminus X$.

[1] Nebo se nebudete snažit rozklíčovat větu 14.1.4.

[2] Libovolná $M \subset \mathbb{R}$ je nyní měřitelná.

[3] Dle (A.4.10) je každá borelovská míra regulární, ale tento předpoklad jsem viděl v jiných zdrojích explicitně uveden, tak pro jistotu přidávám také.



Obrázek 1: Příklad části grafu funkce na prostoru $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu)$ s mírou $\mu(M) := \lambda(M) + \chi_M(1) + \chi_M(2)$, kde λ je Lebesgueova míra a druhé dva členy tvoří čistě bodovou míru soustředěnou na $\{1, 2\}$ (A.3.2). Hodnota funkce je v těchto bodech podstatná.

Q_μ splňuje požadavky na operátor s jednoduchým spektrem, což se dokáže stejným způsobem, jako jsme viděli pro operátor polohy Q (10.9.2). Platí více, než to, což je hlavním důvodem, proč se operátory Q_μ studují: *Každý samosdružený operátor s jednoduchým spektrem je unitárně ekvivalentní nějakému* Q_μ (10.9.3). Lze tedy libovolné $A \in \mathscr{L}_{\mathrm{sa}}$ s jednoduchým spektrem vyjádřit jako $V^{-1} Q_\mu V$ s nějakou izometrií mezi $\mathscr{H}$ a $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu)$.[4] Takové vyjádření samosdruženého operátoru se nazývá jeho *spektrální reprezentací* (str. 362). Navíc nahradíme-li Q_μ nějakým obecnějším operátorem násobení funkcí na $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu)$ (10.5.1), získá takovou reprezentaci libovolné $A \in \mathscr{L}_{\mathrm{sa}}$ (10.9.7).

Uvědomme si, že rozklad A jako izomorfismu s (nějakým) prostorem funkcí, bodového vynásobení a izomorfismu zpět na $\mathscr{H}$ je nápadně podobné diagonalizaci: pro samosdružený operátor s čistě bodovým spektrem bychom udělali rozklad do báze vlastních vektorů (tj. izomorfismus s prostorem ℓ^2 posloupností), vynásobení vlastními hodnotami (funkce $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$) a zpětné sesčítání vzniklé lineární kombinace (inverze izomorfismu). Vyjádření A jako $V^{-1} Q_\mu V$ tedy dává zobecnění tohoto nástroje i pro spojité spektrum.

Komutující a nekomutující operátory, relace neurčitosti

V této otázce bych vás rád odkázal přímo na naši učebnici. Látka je v ní popsaná srozumitelnou a přijatelně stručnou formou a není třeba ji opakovat. Seznamte se prosím s celým obsahem kapitoly (16.1). Poznámku o „realizovatelném stavu“ v důkazu 16.1.5(a) můžete ignorovat, je to odkaz na superselekční pravidla (15.4). Příklad (16.1.9) můžete brát jen jako zajímavost.

Kanonický zápis komutačních relací Q a P

V této sekci bych rád shrnul některé výsledky (16.2).

Motivací celé kapitoly je, že tvar, ve kterém se často setkáme s komutačními relacemi operátorů polohy a hybnosti, ((16.2.1)), je z hlediska funkcionální analýzy fundamentálně špatně. Aby se totiž rovnal rozdíl $PQ - QP$ násobku jednotkového operátoru, musel by být definovaný na všech vektorech $\mathscr{H}$. Nicméně vzhledem k tomu, že operátory P ani Q nejsou na $\mathbb{R}$ omezené, jejich definiční obory, a zvláště pak

$$D_{PQ-QP} = D_{PQ} \cap D_{QP}, \tag{7}$$

jsou jen husté podprostory $L^2(\mathbb{R})$.

Opatrnost s porovnáváním operátorů na hustém podprostoru se může zdát jako banalita, a skutečně, pro nekompatibilitu dvou pozorovatelných A, B postačí existence *jediného* vektoru z D_{AB-BA}, který tento rozdíl zobrazuje na nenulu. Nicméně jak ukazuje příklad (16.2.2) (pro zájemce), opačná situace neplatí: ani podmínka, že $(AB - BA)\psi = 0$ na hustém podprostoru $\mathscr{H}$ není postačující k tomu, aby A a B komutovaly.

Vsuvka: částice na omezeném intervalu

Minulý týden jsme probírali tvar pozorovatelných Q, P na prostoru $L^2(a, b)$ s $-\infty < a < b < +\infty$. Připomeňme,

[4] Měli bychom se přesvědčit, že takový izomorfismus může existovat. O $\mathscr{H}$ víme, že musí být separabilní, jinak operátory s jednoduchým spektrem neumožňuje (10.9.1). Stejně tak $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu)$ má nejvýše spočetnou dimenzi; konečnou, je-li množina X konečná a μ_{ac} nula.

že Q je zde omezený operátor, lze tedy aplikovat na libovolný vektor bez obav o opuštění $L^2(a,b)$. Pro druhý z operátorů pro jednoduchost uvažujme případ s periodickou okrajovou podmínkou, tedy $P_{\vartheta=0}$. Definiční obor (7) je pak vymezen následovně:

$$D_{PQ-QP} = \left\{ f \in L^2(a,b) \,\middle|\, f, xf \text{ abs. spojité}, f', (xf)' \in L^2(a,b), f(a) = f(b), af(a) = bf(b) \right\}. \tag{8}$$

Některé z podmínek jsou závislé a jdou zredukovat, nicméně dvě poslední podmínky vymezují obor na funkce splňující $f(a) = f(b) = 0$. Na tomto oboru je skutečně $PQ\psi - QP\psi = -i\psi$ a proto může přijít paradoxní, že i když „platí“ (16.2.1), existují stavy s nulovou směrodatnou odchylkou $(\Delta P)_\psi$ a konečnou $(\Delta Q)_\psi$ – konkrétně vlastní stavy P, které do (8) nepatří.

Na 4. cvičení jste se setkali s alternativní formou zápisu komutační relace mezi Q a P,

$$(P\varphi, Q\varphi) - (Q\varphi, P\varphi) = -i\|\varphi\|^2, \tag{9}$$

která nepoužívá součiny operátorů a tak lze uvažovat na větším oboru validity $D_P \cap D_Q$. V předchozím příkladu by bylo

$$D_P \cap D_Q = D_P = \left\{ f \in L^2(a,b) \,\middle|\, f \text{ abs. spojitá}, f' \in L^2(a,b) \right\}, \tag{10}$$

které již vlastní stavy P obsahuje a snadno se na nich přesvědčíme, že rovnice (9) ve skutečnosti splněna není.

Po celý zbytek výkladu budeme uvažovat již jen operátory Q, P definované pro případ prostoru $L^2(\mathbb{R})$.

Jestliže se tedy vrátíme k textu před vsuvkou, vidíme, že je praktické hledat přístupy, ve kterých problém s definičními obory nenastane. Dva takové dává shrnutí (16.2.1): komutativita A, B je ekvivalentní komutativitě jejich rezolvent nebo komutativitě exponenciál tvaru

$$\exp(itA), \exp(isB). \tag{11}$$

V obou případech se tím problém převádí na otázku komutativity dvou *omezených* operátorů, pro které již můžeme mluvit o rovnosti $CD = DC$. Tvrzení se odvolává na dvě předchozí věty, mezi nimi (11.1.5), ke které se teprve dostaneme. Nicméně všechny prostředky pro jeho alternativní důkaz již máme: z definice A, B komutují právě tehdy, komutují-li jejich rozklady jednotky (str. 326), a to nastává právě tehdy, komutují-li jejich projektorové míry (cv. 9/7). Nicméně i $R_A(\lambda)$ i $\exp(itA)$ jsou zobrazení operátoru A nějakou prostou funkcí (v případě rezolventy se jedná o funkci $f(x) = 1/(x-\lambda)$ (10.3.3)) a tedy jejich operátorové míry dávají zcela stejné projektory, jen pro jiné množiny (10.3.6). Vzhledem k tomu, že otázka komutativity dvou projektorových měr se týká pouze jejich oborů hodnot, tuto vlastnost zobrazení žádnou *prostou* funkcí nezmění.

Dva samosdružené operátory A, B tedy komutují právě tehdy, komutují-li výrazy (11) pro všechna $t, s \in \mathbb{R}$.[5] O operátorech P, Q víme, že nekomutují, podívejme se tedy, čeho jiného součinem jejich exponenciál dosáhneme.

O exponenciálách (11) pro oba zmíněné operátory jsme se bavili v přednášce jim dříve věnované: operátor $\exp(isQ)$ je operátor násobení funkcí $\exp(isx)$ a $\exp(itP)$ je operátor posunutí nezávislé proměnné o t:

$$\left(\exp(isQ)\psi\right)(x) = e^{isx}\psi(x), \quad \left(\exp(itP)\psi\right)(x) = \psi(x+t). \tag{12}$$

Složením obou operací dostaneme funkci, která je posunutá a ještě vynásobená exponenciálou, ale záleží na pořadí: jestliže součin s exponenciálou provedeme první, dosazení $x \mapsto x+t$ se promítne i do přidaného členu a výsledek se bude lišit o komplexní fázi $s.t$. Dostáváme tedy operátorovou relaci

$$\exp(itP)\exp(isQ) = e^{ist}\exp(isQ)\exp(itP), \tag{13}$$

která se nazývá *Weylovou relací* nebo Weylovou formou kanonických komutačních relací polohy a hybnosti. Jedná se o formálně správný ekvivalent (16.2.1). Pro vícerozměrné systémy bychom mohli v exponentech uvažovat lineární kombinace složek P_j, resp. složek Q_k a ve Weylově relaci by se objevil skalární součin (16.2.4):

$$\exp\Big(i\sum_j t_j P_j\Big)\exp\Big(i\sum_k s_k Q_k\Big) = e^{i\sum_i s_i t_i}\exp\Big(i\sum_k s_k Q_k\Big)\exp\Big(i\sum_j t_j P_j\Big). \tag{14}$$

[5] To je silná podmínka, ale z předchozího vyplývá, že *ověřit* stačí libovolnou dvojici *nenulových* s, t, komutativita pro všechny ostatní hodnoty odsud již plyne. Samozřejmě pro s nebo t nulové je komutace (11) triviální a z ní tedy o komutativitě A, B usuzovat nelze.

Existuje zajímavý výsledek, že poslední relace je jedinečná pro operátory tvaru Q, P: konkrétněji, že (za dalších předpokladů) každé její operátorové řešení je nejvýše direktním součtem operátorů unitárně ekvivalentních naší dvojici Q, P (přes stejnou izometrii). K této větě se vrátíme, až budeme mít k dispozici potřebné nástroje z kapitoly 11. Podíváme se však dnes ještě na zajímavé vlastnosti operátorů, které v jejím důkazu hrají klíčovou roli.

Weylův operátor a koherentní stavy

Relace (13) vybízí k tomu najít operátor, který je „na půl cesty" mezi oběma součiny exponenciál (16.2.6)

$$R(t,s) := e^{-ist/2}\exp(itP)\exp(isQ) = e^{ist/2}\exp(isQ)\exp(itP). \tag{15}$$

V praxi se s ním častěji setkáváme v dosazení

$$W(t,s) := R(-t,s) = e^{ist/2}\exp(-itP)\exp(isQ) = e^{-ist/2}\exp(isQ)\exp(-itP) \tag{16}$$

z důvodů, které budou zanedlouho patrné. Dá se ukázat,[6] že tento operátor lze získat jednou samotnou exponenciálou, konkrétně (16.2.15)

$$W(t,s) = \exp\left(i\overline{(sQ-tP)}\right). \tag{17}$$

Kombinací (12) dostaneme jeho předpis na obecný vektor (16.2.13)

$$\big(W(t,s)\psi\big)(x) = \exp\left(is\left(x-\frac{t}{2}\right)\right)\psi(x-t). \tag{18}$$

Tyto operátory jsou unitární, protože vznikají složením unitárních činitelů a násobení komplexní jednotkou. Navíc ze (17) (či přímým výpočtem z (18)) pro jejich inverzi plyne

$$W(t,s)^{-1} = W(t,s)^* = \exp\left(-i\overline{(sQ-tP)}\right) = W(-t,-s) \tag{19}$$

a jejich složení je předepsáno vztahem (16.2.7)[7]

$$W(t,s)W(u,v) = e^{i(su-tv)/2}W(t+u,s+v). \tag{20}$$

Všimněme si též, že operátory na levé straně komutují právě tehdy, když dvojice (t,s) a (u,v) jsou v $\mathbb{R}^2$ rovnoběžné a speciálně všechny komutují s $W(0,0)=I$.

Operátor $W(t,s)$ se také nazývá operátor posunu (angl. displacement operator), ale tento název nebudeme používat kvůli kolizi s posunovacími operátory (angl. shift operators) na prostoru posloupností. Důvodem je, že stav $W(t,s)\psi$ má oproti ψ všechna měření polohy posunuta o t a hybnosti o s: přímým výpočtem s použitím (18) totiž určíme

$$\begin{aligned} W(t,s)^{-1}QW(t,s) &= Q+tI,\\ W(t,s)^{-1}PW(t,s) &= P+sI. \end{aligned} \tag{21}$$

Vzhledem k tomu, že se jedná o unitární transformaci, posunou se stejným způsobem střední hodnoty polohy a hybnosti, pravděpodobnosti libovolných jejich měření, spektrální rozklad atd.

Zajímavé je, že přitom aplikace Weylova operátoru neovlivní směrodatné odchylky měření. Zavedeme-li tedy *koherentní stavy* 16.1.10 jako stavy s minimální neurčitostí, Weylův operátor tuto jejich vlastnost zachovává a tedy *zobrazuje koherentní stavy na jiné koherentní stavy*. Konkrétně, uvažujeme-li koherentní stav lokalizovaný kolem střední polohy q a střední hybnosti p jako (16.1.13b)

$$\psi_{q,p}(x) := \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-q)^2 + ipx - \frac{1}{2}ipq\right), \tag{22}$$

platí

$$W(t,s)\psi_{q,p} = e^{i(qs-pt)/2}\psi_{q+t,p+s}. \tag{23}$$

[6] Zkuste si to: cv. 16/21

[7] Protože až na fázový faktor se jedná o zobrazení $[t,s]+[u,v]=[t+u,s+v]$ platné pro grupu $(\mathbb{R}^2,+)$, nazývají se takové operátory „projektivní" reprezentací této grupy.

Speciálně všechny koherentní stavy můžeme takto nagenerovat z $\psi_{0,0}$, který má obzvláště jednoduchý tvar

$$\psi_{0,0}(x) = \pi^{-1/4} e^{-x^2/2} \ : \quad \psi_{q,p} = W(q,p)\psi_{0,0} \tag{24}$$

a (23) potom plyne přímo z (20).

Zobecněním této úvahy můžeme získávat i jiné množiny, které splňují požadavky kladené na zobecněné koherentní stavy – postačí nahradit výchozí stav $\psi_{0,0}$ nějakým jiným vektorem 16.2.9, str. 503. Nicméně bez dalšího přívlastku se koherentními stavy myslí (22). Tyto stavy mají výsadní postavení obzvláště v kvantové optice.

Shrnutí

Důležité body k zapamatování:

1. operátory Q_μ umožňují vlastnosti, které Q nemá, například bodové spektrum,
2. samosdružené operátory mají spektrální reprezentaci $V^{-1} T_f V$, kde $T_f = f(Q_\mu)$,
3. definice směrodatné odchylky; formulace relací neurčitosti pro čisté i smíšené stavy, speciálně pro polohu a hybnost a pro složky spinu; koherentní stavy jakožto stavy s minimální neurčitostí (vše viz 16.1),
4. poloha a hybnost „na úsečce“ splňují $PQ - QP \subset -iI$, ale přesněji stanovené požadavky již ne,
5. Weylova relace, její výhody oproti tvaru $PQ - QP = -iI$,
6. Weylovy operátory a jejich vztah s koherentními stavy.