LINEÁRNÍ OPERÁTORY V KVANTOVÉ FYZICE

Jiří Blank
Pavel Exner
Miloslav Havlíček

$$\|f\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(e_j, f)|^2$$

$$e^{iPt} e^{iQs} = e^{ist} e^{iQs} e^{iPt}$$

$$Af = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE_\lambda^{(A)} f$$

UNIVERZITA KARLOVA

LINEÁRNÍ OPERÁTORY V KVANTOVÉ FYZICE

UNIVERZITA
KARLOVA
PRAHA

Ing. Jiří Blank, CSc.
Doc. RNDr. Pavel Exner, DrSc.
Prof. Ing. Miloslav Havlíček, DrSc.

Památce přítele

Je kruté, když smrt zastihne člověka v rozkvětu sil a odtrhne jej nejen od rodiny a přátel, ale i od práce, kterou měl rád. S touto myšlenkou vzpomínáme na svého dlouholetého přítele a spoluautora Jiřího Blanka, jenž v těchto dnech podlehl těžké chorobě. Práce na této knize, která nese nesmazatelnou pečeť jeho osobnosti, pro niž bylo vždy charakteristické úsilí o naprosto přesné formulace a nesmlouvavá intelektuální poctivost, byla v té době završena, ale zůstala řada dalších tvůrčích plánů, jež se již nenaplní, a přednášky, které již nebudou prosloveny. Nechť je tento svazek připomínkou všem, kteří Jiřího znali.

Praha, únor 1990

Pavel Exner
Miloslav Havlíček

Vztahy mezi matematikou a fyzikou mají dlouhou a spletitou tradici, v níž lze najít mnoho případů, kdy si obě disciplíny přinášely inspiraci a vzájemný prospěch. Přitom každá z nich má své vlastní cíle a metody. Nejasné chápání této skutečnosti má na svědomí, že vztahy nejsou někdy bez konfliktů; jak poznamenal D. Richtmyer, „fyzikové jsou přesvědčeni, že matematici tráví spoustu času, aby docílili přehnaného pořádku, zatímco matematici kroutí hlavami a diví se, jak ti lajdáčtí fyzici dokáží přece jenom dostat správné výsledky“.

Existují však oblasti, kde jsou vztahy obou disciplín hlubší a jejich cíle jsou ne-li stejné, tedy alespoň blízké. Jde o fyzikální problémy, u nichž matematické prostředky potřebujeme spíše k pochopení podstaty než jako pouhý výpočetní nástroj a které i matematiky mohou zaujmout samy o sobě jako rigorózně formulovaná úloha. Tomuto hraničnímu oboru se obvykle říká matematická fyzika. Po dlouhá desetiletí byla její doménou teorie pružnosti, termodynamika a některé vlnové jevy v klasické fyzice, jež matematicky popisujeme vhodnými parciálními diferenciálními rovnicemi. Takováto představa o náplni a metodách matematické fyziky pevně zakořenila a přežívá místy dodnes.

Mezitím se ovšem situace změnila, především díky rozvoji kvantové mechaniky a kvantové teorie polí. Ačkoli od doby jejich vzniku nás dělí přes šedesát let, stále se setkáváme s novými kvantovými jevy. Tento vytrvalý rozvoj možná postrádá dramatičnost konce dvacátých a počátku třicátých let, ale není méně významný; již dnes je možné tvrdit, že kvantová teorie se stala základem většiny oborů aplikované fyziky.

Moderní matematická fyzika vznikla téměř současně s kvantovou teorií samotnou. Jejím zakladatelem je bezesporu J. von Neumann, který jako první rozebral matematické základy formalismu kvantové mechaniky v sérii časopiseckých prací koncem dvacátých let a své výsledky shrnul v klasické monografii, jež vyšla roku 1932. Je až s podivem, kolik pozdějších metod a prací bere své kořeny v této knize. Nemalý vklad do rozvoje oboru v jeho počátcích vnesli i E. Wigner, H. Weyl a další význační vědci.

Po další tři desetiletí provázela tato nová větev matematické fyziky celkem skromně rozvoj kvantové teorie; zdobila ji sice některá velká jména, ale stěží ji bylo možno počítat ke směrům, jež na sebe poutají největší zájem. Potom se situace změnila. Není snadné určit přesně dobu, kdy k tomu došlo, ale příliš se nezmýlíme, když budeme mluvit o konci šedesátých let. Vnějších příznaků si může všimnout i nepříliš zasvěcený pozorovatel. V uvedené době bylo založeno několik časopisů specializovaných na problémy matematické fyziky a brzy se jim podařilo získat si solidní reputaci. V roce 1972 vznikla Mezinárodní asociace matematické fyziky, která dnes sdružuje kolem tisíce pracovníků z několika desítek zemí a vyvíjí velmi aktivní činnost. Méně nápadným, ale stejně důležitým projevem této tendence je posilování podílu matematické fyziky v učebních programech univerzit v Evropě, USA i jinde.

Tento rozvoj byl provázen rozšiřováním počtu témat, jimiž se matematická fyzika zabývá. Dnes k nim patří také obecná teorie relativity, gravitace a supergravitace, klasická a kvantová statistická mechanika, aplikace nelineárních diferenciálních rovnic, studium stochastických systémů, aplikace Lieových algeber včetně nekonečnědimenzionálních, analýza dynamického chaosu v klasických a kvantových systémech a řada dalších; podrobnější přehled lze získat například nahlédnutím do sborníků referátů přednesených na pravidelných kongresech výše zmíněné asociace. Důležité je, že spolu s tímto tematickým rozšiřováním sílí integrační tendence; objevují se nové, mnohdy nečekané souvislosti mezi zmíněnými obory.

Vysvětlit základy moderní matematické fyziky v jediné knize je dnes stěží možné, a my nemáme v úmyslu se o to pokoušet. Chceme se soustředit na ty její části, jež jsou spojeny s aplikacemi v kvantové teorii a podle našeho názoru hrají nadále ústřední roli.

Jako ilustraci cílů, k nimž matematická fyzika v této oblasti směřuje, připomeňme několik výsledků. Počátky nového rozvoje, o němž jsme výše hovořili, jsou spojeny s prvním důkazem existence netriviálního kvantového pole v nejjednodušším nefyzikálním případě dvourozměrného prostoročasu. Přechod k vyšším dimenzím přináší velmi složité problémy, přesto se nedávno podařilo dokázat existenci hned několika modelů interagujících kvantových polí v reálném prostoročase. Druhý příklad se týká teorie rozptylu. V šedesátých letech byla dokázána asymptotická úplnost, jež – zhruba řečeno – znamená existenci a unitaritu S-matice spolu s absencí jistých patologických stavů, pro potenciálový rozptyl dvou částic a započalo se se studiem tříčásticového problému. Bylo zapotřebí dvou desetiletí a řady nových idejí, než se podařilo dokázat asymptotickou úplnost pro rozptyl v soustavě N částic, prozatím pro potenciály krátkého dosahu.

Aby nevznikl dojem, že matematickou fyziku tvoří pouze existenční důkazy, uvedeme ještě jeden příklad. Když v roce 1971 J. Aguilar a J. Combes zformulovali metodu komplexního škálování pro Schrödingerovy operátory, málokdo v ní viděl něco jiného než zajímavý matematický nápad. Dnes představuje jeden z nejefektivnějších způsobů výpočtu rezonancí v atomové a molekulární fyzice.

Kniha, kterou čtenáři předkládáme, si neklade za cíl podrobně vysvětlit zmíněné problémy (tomu je věnována přinejmenším desítka monografií a několik set původních prací), ani další problémy na úrovni soudobého výzkumu. Rádi bychom alespoň částečně zlikvidovali nemalý dluh, který česká literatura v oblasti moderní matematické fyziky má. Naším záměrem proto je

(i) vyložit základy lineární funkcionální analýzy z hlediska aplikací v kvantové teorii,

(ii) pomocí takto vybudovaného matematického aparátu zformulovat rigorózním způsobem základy kvantové teorie s hlavním důrazem na nerelativistickou kvantovou mechaniku, a vytvořit tak tolik postrádaný protějšek běžným kursům,

(iii) dovést čtenáře tak daleko, aby byl schopen samostatně studovat původní časopiseckou literaturu v oboru.

Dodejme několik slov o tom, jak kniha vznikla. Jejím základem je přednáška, kterou jsme střídavě konali po dobu patnácti let na matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Pro její potřeby jsme v letech 1975–80 napsali čtyřsvazkové skriptum. Po delší přestávce, vyvolané okolnostmi spíše nahodilými, jsme se k jeho textu vrátili, abychom jej upravili do knižní podoby. Časový odstup způsobil, že jsme se rozhodli pro zevrubné přepracování. Zařadili jsme nový materiál a také větší část původního obsahu vykládáme jinak než před deseti lety; věříme, že lépe.

Jak je u vysokoškolské učebnice obvyklé, probíraná témata souvisí s našimi odbornými zájmy a byla jimi do určité míry ovlivněna. Jak je rovněž obvyklé, bylo nutné vynaložit nemalé úsilí, aby se podařilo sladit psaní knihy s povinnostmi, jež jsme měli na svých pracovištích, v Nukleárním centru MFF UK, v Ústavu jaderné fyziky ČSAV a také v Laboratoři teoretické fyziky Spojeného ústavu jaderných výzkumů v Dubně, kde vznikla asi polovina textu. Náš dík patří těm, od nichž se nám v tomto nesnadném úkolu dostalo podpory a povzbuzení, především prof. I. Úlehlovi, doc. J. Tučkovi a prof. V. A. Meščerjakovovi.

Dále chceme poděkovat řadě kolegů, kteří svými připomínkami, zapůjčením vlastních rukopisů nebo jinak přispěli ke konečnému tvaru rukopisu, zejména dr. J. Dittrichovi a dr. P. Šebovi. V neposlední řadě patří dík našim manželkám, bez jejichž trpělivosti a pochopení bychom stěží mohli tuto knihu dokončit.

Praha–Dubna
květen 1988

Autoři

Cílem této knihy je vyložit teorii lineárních operátorů na Hilbertových prostorech a některé její aplikace v kvantové teorii. Naší snahou přitom bylo vytvořit text přístupný především studentům, kteří absolvovali pouze úvodní kursy matematické analýzy, algebry a kvantové mechaniky; žádné další speciální znalosti nepředpokládáme. Doufáme však, že kniha bude užitečná i čtenářům s hlubšími znalostmi kvantové teorie, kteří se chtějí poučit o její matematické struktuře, a rovněž (alespoň některým) matematikům: těm by měla jazykem, na nějž jsou zvyklí, poskytnout seznámení se základy kvantové teorie.

Přístup k textu se samozřejmě bude u jednotlivých kategorií čtenářů lišit. Než dáme příslušné doporučení, s čím začít a co vynechat, popíšeme stručně materiál v knize obsažený.

První tři kapitoly obsahují přehled poznatků z lineární algebry, topologie a funkcionální analýzy; k nim je nutno přiřadit také dodatek shrnující potřebné pojmy a výsledky teorie míry a integrálu. Důkazy jsou v této části nezřídka nahrazeny odkazy na literaturu.

Další část zahrnující kapitoly 4–7 je věnována základům teorie Hilbertových prostorů a operátorů na nich, a to jak omezených (zvláštní kapitola je věnována kompaktním operátorům), tak i neomezených. Na tuto část navazují další čtyři kapitoly, v nichž vykládáme spektrální teorii samosdružených, normálních a unitárních operátorů; je to oblast obsahující nejdůležitější a pravděpodobně také nejhezčí výsledky teorie.

Zbytek matematické části knihy tvoří kapitoly 12–14, v nichž se zabýváme operátorovými algebrami a množinami, jakož i abstraktními normovanými algebrami. Zde jsme opět v některých místech nahradili důkazy odvolávkami na literaturu.

Závěrečných šest kapitol je věnováno fyzikálním aplikacím vyložené teorie; postupně v nich budujeme formalismus kvantové teorie a ilustrujeme různé „podrobnosti", jež se v učebnicích kvantové mechaniky obvykle opomíjejí, na řadě příkladů.

Studentům doporučujeme číst knihu v podstatě od začátku s tím, že lze vynechávat důkazy (zejména v kapitolách 1–3 a v dodatku). Pro matematiky bude patrně vhodné začít patnáctou kapitolou a k předcházejícímu textu se vracet podle potřeby. Konečně fyzikové by se měli zaměřit hlavně na kapitoly 4–11 a pak přejít k závěrečným šesti kapitolám; pokud se jim poté objeví základy kvantové teorie v novém, jasnějším světle, splnila naše kniha svůj účel.

Výklad je organizován způsobem obvyklým v literatuře o matematické fyzice: výsledky se formulují ve větách, méně závažné či pomocné jako tvrzení či lemmata, za nimiž následuje důkaz. Vzhledem k tomu, že jde většinou o „klasické" výsledky, citujeme prameny pouze výjimečně. Neužíváme formálních definic; nově zaváděné pojmy jsou odlišeny tučným tiskem a je možné je lokalizovat pomocí rejstříku. Jednotlivé kapitoly se dělí na paragrafy. Uvnitř každého paragrafu je zavedeno jednotné průběžné číslování pro věty, tvrzení, lemmata, příklady a poznámky; průběžně jsou číslovány rovněž formule.

K prohloubení a doplnění textu slouží četné odkazy na literaturu, které lze najít zejména v komentářích zařazených na konci skoro všech kapitol. Většina odkazů je na učebnice, monografie, resp. přehledné práce, kde lze najít další bibliografické údaje, poznámky o historii vývoje daného okruhu problémů atd. Původní (časopisecké) prameny citujeme zpravidla u novějších poznatků.

Kromě již zmíněného komentáře jsou jednotlivé kapitoly doplněny cvičeními, která jsou číslována průběžně v každé kapitole; v řadě případů jsme sem zařadili důkazy některých pomocných tvrzení s více či méně podrobným návodem. Doporučujeme zejména studentům, aby jim věnovali dostatečnou pozornost – je to nejlepší způsob, jak si ověřit, že výkladu správně porozuměli.

$A^2(\mathbb{C}, d\mu)$		123
$\mathscr{A}', \mathscr{A}''$	komutant (bikomutant) algebry $\mathscr{A}$	389
$a^*(f)$, $a(f)$	kreační (anihilační) operátory	574
$\mathfrak{A}(\mathscr{S})$	σ-algebra generovaná systémem $\mathscr{S}$	617
$\mathscr{A}_0(\mathscr{S})$	algebra generovaná množinou $\mathscr{S}$	389
$\mathscr{A}_+$	množina pozitivních elementů	400
$(\Delta A)_w$	směrodatná odchylka	487
$\langle A \rangle_\psi$	střední hodnota pozorovatelné A	450
$\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$	direktní součin σ-algeber	621
$AC(J)$		205
$ac(J)$		254
$AC^2(J)$		237
$\mathscr{A}^E$	množina projektorů v algebře $\mathscr{A}$	415
$\mathscr{B}^d$	borelovské množiny v $\mathbb{R}^d$	617
B^*	sdružený operátor	144
$B_\varepsilon(p_1, \ldots, p_n)$		57
$\mathscr{B}(V_1, V_2)$, $\mathscr{B}(V)$	omezené operátory	74
$\boldsymbol{B}_r$		167
$\mathscr{B}_s(\mathscr{H})$		148
$\mathscr{B}_w(\mathscr{H})$		149
$\mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$	množina integrabilních vektorových funkcí s hodnotami v $\mathscr{X}$	99
bd M	hranice množiny	36
$\mathbb{C}$	komplexní čísla	21
$\mathbb{C}^n$		21
$\mathbb{C}(\mathscr{H})$	množina skalárních operátorů	415
$C^\infty(\mathbb{R}^n)$		59
$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$		59
$C(X)$, $C_{\mathbb{R}}(X)$	spojité funkce	22
$C_\infty(X)$		73
$\mathscr{C}(X)$	uzavřené operátory	94
$D_f \equiv D(f)$	definiční obor zobrazení	618
$D_T \equiv D(T)$	definiční obor operátoru	89

$M \setminus N$	rozdíl množin	615
$M_b(\mathscr{H})$	vázané stavy	594
M_{lin}	lineární obal	22
$M_s(\mathscr{H})$	rozptylové stavy	589
M°	vnitřek množiny	36
M_x, M^y	řezy množiny M	621
$M^\perp$	ortogonální doplněk	29
$\overline{M}$	uzávěr množiny	36
mod W		23
$\mathscr{N}(\mathscr{H})$	omezené normální operátory	164
$N_A(\lambda) \equiv \mathrm{Ker}\,(A - \lambda)$		251
$\mathscr{O}$	množina pozorovatelných	469
$\mathscr{O}_b$	omezené pozorovatelné	469
P	operátor impulsu	204, 454
P_j	operátor j-té složky impulsu	457
P_l	Legendreovy polynomy	119
Q	násobení nezávisle proměnnou, operátor polohy	151, 454
Q_j	operátor j-té souřadnice	456
$r_{\mathscr{A}}(a)$	spektrální poloměr prvku a	395
$\mathbb{R}$	reálná čísla	21
$\mathbb{R}^n$		22
$\mathscr{R}^d$	minimální okruh obsahující $\mathscr{I}^d$	617
$\mathbb{R}^+ \equiv [0, \infty)$		24
$R_{ess}(f)$	obor podstatných hodnot	214
Ran f	obor hodnot zobrazení	618
$\mathscr{S}'$	komutant množiny $\mathscr{S}$	341
$\mathscr{S}''_{ex}$	rozšířený bikomutant	341
$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$	rychle ubývající funkce	59
$S_\varepsilon(x)$		37
s-lim		148
supp	nosič míry nebo funkce	59, 628
sup ess		27
T^*	sdružený operátor	198
$\mathscr{T}(.)$		296
$\mathscr{T}_b(.)$		289
$\mathscr{T}^\Sigma(T), \mathscr{T}^\Pi(T)$	druhé kvantování operátoru T	567
$U_\varepsilon(x)$	ε-okolí bodu x	36
u-lim		143
V^f	algebraický duální prostor	25
V^*, V'	duální prostor	80, 104
$V_1 + V_2$		32

1.1 ZÁKLADNÍ DEFINICE A VLASTNOSTI

Pojem vektorového prostoru vznikl axiomatizací vlastností třídimenzionálního prostoru Eukleidovy geometrie, resp. konfiguračního prostoru klasické mechaniky.

Vektorový (lineární) prostor V je množina, na níž je definována binární operace sčítání $[x, y] \mapsto x + y \in V$ a operace násobení komplexním nebo reálným číslem α, $[\alpha, x] \mapsto \alpha x \in V$, přičemž tyto operace vyhovují následujícím axiomům:

(i) $x + y = y + x$ (komutativita),
(ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativita),
(iii) existuje prvek $0 \in V$ (nulový prvek) takový, že $x + 0 = x$ pro všechna $x \in V$,
(iv) ke každému $x \in V$ existuje prvek $-x \in V$ (inverzní prvek) takový, že $x + (-x) = 0$,
(v) $\alpha(\beta)\, x = (\alpha\beta)\, x$,
(vi) $1x = x$,
(vii) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $(\alpha + \beta)\, x = \alpha x + \beta x$ (distributivnost sčítání a násobení).

Prvky prostoru V nazýváme **vektory.**

1.1.1 Poznámka: V uvedené definici lze množinu komplexních, resp. reálných čísel nahradit jakoukoli množinou F, která je tělesem (definici uvádí např. ⟦Ku⟧). Mluvíme pak o **vektorovém prostoru nad tělesem** F; speciálně pro $F = \mathbb{C}$, resp. $F = \mathbb{R}$ užíváme názvu **komplexní**, resp. **reálný vektorový prostor.** V této knize pracujeme převážně s komplexními vektorovými prostory, u nichž většinou označení „komplexní" vynecháváme. Poznamenejme v této souvislosti, že z každého komplexního vektorového prostoru lze dostat reálný prostor $V^{(\mathrm{R})}$, omezíme-li se na násobení reálnými čísly.

Uvedeme několik jednoduchých příkladů vektorových prostorů; ověření axiomů je v nich většinou elementární – redukuje se na sčítání a násobení komplexních nebo reálných čísel.

1.1.2 Příklad: Prostor $\mathbb{C}^n$ je množina $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C}$, na níž je sčítání a násobení komplexním číslem definováno „po složkách": pro $x \equiv [\xi_1, \ldots, \xi_n] \in \mathbb{C}^n$,

$y \equiv [\eta_1, \ldots, \eta_n] \in \mathbb{C}^n$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\alpha x := [\alpha\xi_1, \ldots, \alpha\xi_n]$, $x + y := [\xi_1 + \eta_1, \ldots, \xi_n + \eta_n]$, přičemž $0 := [0, \ldots, 0]$. Analogicky se zavádí reálný prostor $\mathbb{R}^n$, který se ovšem liší od $\mathbb{C}^{n(\mathrm{R})}$.

1.1.3 Příklad: Prostor $C(J)$, kde $J \subset \mathbb{R}$ je libovolný interval, je tvořen všemi komplexními funkcemi reálné proměnné, které jsou spojité a omezené na J. Sčítání a násobení číslem se definuje „bodově": pro $f, g \in C(J)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, je $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$, $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, přičemž $0(x) := 0$ pro všechna $x \in J$. Stejně se definuje prostor $C(X)$ pro libovolný topologický prostor (X, τ): jeho prvky jsou spojitá a omezená zobrazení $f\colon X \to \mathbb{C}$ (viz § 2.3). Pro reálný vektorový prostor reálných funkcí spojitých a omezených na X se užívá označení $C_{\mathbb{R}}(X)$.

1.1.4 Příklad: Prostor l^p, $p \geqq 1$, je množina všech posloupností $X \equiv \{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\xi_j \in \mathbb{C}$, takových, že $\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty$. Sčítání, násobení číslem a nulový prvek definujeme stejně jako v příkladu 2. Implikace $X, Y \in l^p \Rightarrow X + Y \in l^p$ plyne z **Minkovského nerovnosti** (cvičení 3).

Podmnožinu $L \subset V$, která je sama vektorovým prostorem s týmž sčítáním a násobením číslem, tj. $\alpha L + L \subset L$ pro všechna $\alpha \in F$, nazýváme **podprostorem** prostoru V. Pro danou množinu $M \subset V$ označíme symbolem M_{lin} minimální podprostor obsahující M. Je zřejmé, že podprostor M_{lin} obsahuje právě všechny lineární kombinace prvků množiny M; nazýváme jej **lineárním obalem** množiny M.

Vektory $x_1, \ldots, x_n \in V$ jsou **lineárně nezávislé**, jestliže z rovnosti $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ plyne, že všechna čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou nulová. V opačném případě jsou tyto vektory **lineárně závislé**, což je ekvivalentní tomu, že alespoň jeden z nich se dá vyjádřit jako lineární kombinace ostatních. Pojem lineární nezávislosti není omezen jen na konečné množiny vektorů: libovolná *množina* $M \subset V$ je *lineárně nezávislá*, jestliže každá její konečná podmnožina je tvořena lineárně nezávislými vektory.

Pomocí lineární závislosti dospíváme k pojmu **dimenze** vektorového prostoru V (značení dim V). Je to celé nezáporné číslo n nebo symbol ∞, které udává maximální počet lineárně nezávislých vektorů ve V: $\dim V = n$ (V je n-dimenzionální), jestliže ve V existuje n lineárně nezávislých vektorů a každé $x \in V$ lze vyjádřit jako jejich lineární kombinaci; $\dim V = \infty$ (V je nekonečnědimenzionální), jestliže ve V existuje n lineárně nezávislých vektorů pro každé přirozené n. Z prostorů uvedených v příkladech 2–4 jsou $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{R}^n$ n-dimenzionální, $\dim \mathbb{C}^{n(\mathrm{R})} = 2n$, a všechny ostatní prostory jsou nekonečnědimenzionální.

Ve vektorovém prostoru V konečné dimenze nazýváme **bází** každou lineárně nezávislou množinu B, pro niž platí $B_{\mathrm{lin}} = V$. Z předchozích definic je jasné, že $\dim V = n$ právě tehdy, když ve V existuje báze o n prvcích.

Jak jsme viděli v příkladech, dají se vektorové prostory realizovat mnoha způsoby a vzniká otázka, zda mezi nimi existuje nějaký vztah příbuznosti. K tomu je účelné zavést následující pojem. Řekneme, že (komplexní) vektorové prostory V, V' jsou (algebraicky) **izomorfní**, jestliže existuje bijekce $f\colon V \to V'$, která je *lineární*: $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ pro všechna $x, y \in V$; $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, tj. zachovává operace sčítání a násobení číslem. Přímo z definice se ověří, že algebraický izomorfismus je relace ekvivalence (viz příklad A.1.10). Dále snadno nahlédneme, že izomorfní prostory mají stejnou dimenzi (cvičení 4). V případě prostorů konečné dimenze platí i obrácené tvrzení.

1.1.5. Věta: Každý komplexní (reálný) n-dimenzionální vektorový prostor je algebraicky izomorfní prostoru $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$.

Probereme nyní dva způsoby, umožňující z daných vektorových prostorů konstruovat vektorové prostory nové.

(i) Mějme vektorové prostory $V_1, \dots, V_N$ nad týmž tělesem F. Na množině $V := V_1 \times \dots \times V_N$ definujeme sčítání a násobení číslem

$$\alpha[x_1, \dots, x_N] + [y_1, \dots, y_N] := [\alpha x_1 + y_1, \dots, \alpha x_N + y_N]$$

a označíme $0 := [0_1, \dots, 0_N]$. Axiomy jsou zřejmě splněny; vzniklý vektorový prostor označujeme symbolem $V_1 \oplus \dots \oplus V_N$ nebo $\sum_{j=1}^{N} {}^{\oplus} V_j$ a nazýváme **direktním (přímým) součtem** prostorů $V_1, \dots, V_N$. Příkladem direktního součtu je $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ apod.

1.1.6 Poznámka: Nechť ve vektorovém prostoru V je dán systém podprostorů $V_1, \dots, V_N$ tak, že pro každé $x \in V$ existuje jednoznačné vyjádření ve tvaru $x = x_1 + \dots + x_N$, $x_j \in V_j$. Zavedeme-li zobrazení $f\colon V \to V_1 \times V_2 \times \dots \times V_N$, $f(x_1 + \dots + x_N) := [x_1, \dots, x_N]$, vidíme, že V je izomorfní prostoru $V_1 \oplus \dots \oplus V_N$. V tomto případě říkáme, že V je direktním součtem podprostorů $V_1, \dots, V_N$ a užíváme opět označení $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_N$.

(ii) Pomocí daného podprostoru W vektorového prostoru V je na V možno zavést relaci ekvivalence: $x \sim y$, jestliže $x - y \in W$. Někdy se tento vztah zapisuje ve tvaru $x = y(\mathrm{mod}\ W)$ – rovnost modulo W. Nechť $\tilde{V}$ je množina všech tříd ekvivalence, $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{V}$, $\alpha \in F$; potom definujeme $\alpha\tilde{x} + \tilde{y} := \{z \in V\colon z = \alpha x + y, x \in \tilde{x}, y \in \tilde{y}\}$. Z definice relace $\sim$ snadno ověříme, že $\alpha\tilde{x} + \tilde{y} \in \tilde{V}$ a že množina $\tilde{V}$ s takto zavedeným sčítáním a násobením číslem je vektorový prostor. Nazýváme jej **faktorovým prostorem** prostoru V podle W a značíme V/W.

1.1.7 Příklad: Prostor $\mathscr{L}^p(M, d\mu)$, $p \geqq 1$, kde μ je nezáporná míra (viz § A.3), sestává ze všech měřitelných funkcí $f\colon M \to \mathbb{C}$, pro něž

$$\int_M |f|^p \, d\mu < \infty ,$$

přičemž sčítání, násobení číslem a nulový prvek jsou definovány jako v příkladu 3. Implikace $f, g \in \mathscr{L}^p \Rightarrow f + g \in \mathscr{L}^p$ plyne z Minkovského nerovnosti v integrálním tvaru (cvičení 3). Pro $p = 1$ je tento prostor samozřejmě totožný s množinou $\mathscr{L}(M, d\mu)$ z § A.6.

Nechť dále $\mathscr{L}_0 \subset \mathscr{L}^p$ je množina všech funkcí f takových, že $f(x) = 0$ skoro všude v M. Ze základních vlastností míry plyne, že $\mathscr{L}_0$ je podprostor v $\mathscr{L}^p$. Faktorový prostor

$$L^p(M, d\mu) := \mathscr{L}^p(M, d\mu)/\mathscr{L}_0 , \qquad p \geqq 1 ,$$

je tvořen třídami μ-ekvivalentních funkcí, tj. funkcí, které se mohou vzájemně lišit nejvýše na μ-nulové množině.

1.2 FUNKCIONÁLY A FORMY

Funkcionálem na vektorovém prostoru V nazýváme zobrazení f: $V \to \mathbb{C}$; pro zobrazení f: $V \to \mathbb{R}$ užíváme názvu *reálný funkcionál*. Funkcionál f je **aditivní**, jestliže $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pro všechna $x, y \in V$; je **homogenní**, resp. **antihomogenní**, jestliže $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, resp. $f(\alpha x) = \bar{\alpha} f(x)$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Funkcionál, který je aditivní a homogenní (antihomogenní), se nazývá **lineárním (antilineárním)** funkcionálem.

Z reálných funkcionálů nás budou zajímat především funkcionály **konvexní**: nazveme tak každé zobrazení p: $V \to \mathbb{R}$ vyhovující pro všechna $x, y \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$ podmínkám

$$p(x + y) \leqq p(x) + p(y) , \qquad p(\alpha x) = |\alpha| \, p(x) . \tag{1}$$

Užívá se též termínu *seminorma* (*pseudonorma*). Z podmínek (1) se snadno odvodí, že obor hodnot každé seminormy je množina $\mathbb{R}^+$, a dále nerovnost

$$|p(x) - p(y)| \leqq p(x - y) . \tag{2}$$

Ve funkcionální analýze se často setkáváme se situací, kdy na nějakém podprostoru V_0 vektorového prostoru V je zadán lineární funkcionál f_0 a potřebujeme vědět, zda je možné rozšířit jej na lineární funkcionál definovaný na celém prostoru V. Následující věta má pro řešení této otázky základní význam.

1.2.1 Věta (*Hahnův-Banachův teorém*): Nechť p je konvexní funkcionál na vektorovém prostoru V a nechť na podprostoru $V_0 \subset V$ je dán lineární funkcionál f_0 splňující pro všechna $y \in V_0$ podmínku $|f_0(y)| \leqq p(y)$. Potom existuje lineární funkcionál f na V takový, že $f_0(y) = f(y)$ pro všechna $y \in V_0$ a $|f(x)| \leqq p(x)$ pro všechna $x \in V$.

Zobrazení F: $V \times \ldots \times V \to \mathbb{C}$ se nazývá **formou** na vektorovém prostoru V, resp. **reálnou formou**, pokud pro obor hodnot platí Ran $F \subset \mathbb{R}$. Formu, která je lineární v každém argumentu, nazýváme *multilineární*, speciálně *bilineární*, je-li jejím definičním oborem množina $V \times V$. Jestliže forma F: $V \times V \to \mathbb{C}$ je lineární v jednom a antilineární v druhém argumentu, mluvíme o **seskvilineární** formě. Budeme důsledně užívat „fyzikální" konvence, podle níž je seskvilineární forma lineární v pravém a antilineární v levém argumentu. S některými vlastnostmi seskvilineárních forem (dále jen forem) se nyní seznámíme.

Pro danou formu F nazýváme zobrazení $x \mapsto q_F(x) := F(x, x)$ *kvadratickou formou* (generovanou formou F). Následující jednoduchý vztah, tzv. **polarizační formule**, který se ověří přímo z definice, ukazuje, že forma F je úplně určena kvadratickou formou q_F:

$$F(x, y) = \frac{1}{4}(q_F(x+y) - q_F(x-y)) - \frac{\mathrm{i}}{4}(q_F(x+\mathrm{i}y) - q_F(x-\mathrm{i}y)). \quad (3)$$

Forma F je *symetrická*, jestliže $F(x, y) = \overline{F(y, x)}$ pro všechna $x, y \in V$, a *pozitivní*, jestliže $q_F(x) \geqq 0$, $x \in V$; jestliže $q_F(x) = 0$ jen pro $x = 0$, je F *striktně pozitivní*. Pozitivní forma je symetrická a platí pro ni **Schwarzova nerovnost** (viz cvičení 9)

$$|F(x, y)|^2 \leqq q_F(x)\, q_F(y). \quad (4)$$

Uvažujme množinu všech lineárních funkcionálů na V. Tato množina se stane vektorovým prostorem, definujeme-li operace sčítání a násobení číslem „bodově" (srov. příklad 1.1.3):

$$(\alpha f + g)(x) := \alpha f(x) + g(x).$$

Vzniklý vektorový prostor V^f nazýváme *algebraickým duálním prostorem* k prostoru V.

1.2.2 Příklad: Mějme n-dimenzionální prostor V_n s bází $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Pro $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j \in V_n$ definujeme $g_j \in V_n^f$ vztahy $g_j(x) := \xi_j$, $j = 1, \ldots, n$. Funkcionály g_j jsou lineárně nezávislé a pro libovolné $f \in V_n^f$ a každé $x \in V_n$ platí:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} f(e_j)\, g_j(x),$$

tj. $f = \sum_{j=1}^{n} f(e_j)\, g_j$. Funkcionály $g_1, \ldots, g_n$ tedy tvoří bázi prostoru V_n^f, která se nazývá *duální bází* k bázi $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset V_n$. Tím jsme dokázali, že

$$\dim V_n^f = \dim V_n.$$

26 Pro danou množinu $\mathscr{F}$ zobrazení $f\colon X \to Y$ bývá často důležité vědět, zda obsahuje „dostatečně velký“ počet prvků v tom smyslu, že pro každou dvojici $x, y \in X$, $x \neq y$, existuje $f \in \mathscr{F}$, pro něž $f(x) \neq f(y)$. Má-li množina $\mathscr{F}$ tuto vlastnost, říkáme, že **odděluje body** (v X). V případě, že X, Y jsou vektorové prostory a všechna zobrazení v $\mathscr{F}$ jsou lineární, odděluje množina $\mathscr{F}$ body právě tehdy, když ke každému $x \neq 0$ existuje $f_x \in \mathscr{F}$ takové, že $f_x(x) \neq 0$.

1.2.3 Tvrzení: Množina V^f odděluje body ve V.
Důkaz: Pro libovolný nenulový vektor $y \in V$ sestrojíme množinu $B \equiv \{x_\alpha\colon \alpha \in I\} \subset V$ takovou, že $B_{\text{lin}} = V$ a $y \in B$, tj. existuje $\alpha' \in I$, pro něž $x_{\alpha'} = y$. Je-li $\dim V < \infty$, je B jakákoli n-tice lineárně nezávislých vektorů, z nichž jeden je y, v případě $\dim V = \infty$ plyne existence takové množiny z výsledku cvičení 17. Hledaný funkcionál můžeme definovat např. tak, že položíme $f_y(y) := 1$, $f_y(x_\alpha) := 0$ pro $\alpha \neq \alpha'$ a lineárně rozšíříme. ■

1.3 NORMOVANÉ PROSTORY

Normou na vektorovém prostoru V nazýváme reálný funkcionál $\|\cdot\|$, který splňuje pro všechna $x, y \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$ (nebo $\mathbb{R}$) následující podmínky (axiomy normy):
(n1) $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,
(n2) $\|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|$,
(n3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$.
Vidíme, že *norma je konvexní funkcionál,* který navíc splňuje podmínku (n1); představuje abstrakci délky vektoru v $\mathbb{R}^3$. Vektorový prostor s normou nazýváme normovaným prostorem; v případě potřeby jej budeme značit jako dvojici $(V, \|\cdot\|)$. Následující příklady ukazují, že na daném vektorovém prostoru lze zavést různé normy.

1.3.1. Příklad: V prostorech $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^n$ se běžně pracuje s normami

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leqq j \leqq n} |\xi_j|\,, \qquad \|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p\right)^{1/p}, \qquad p \geqq 1\,.$$

Axiomy se ověří snadno, pro $p > 1$ vyjadřuje axiom (n2) Minkovského nerovnost. Mezi uvedenými normami platí jednoduché nerovnosti (viz cvičení 10), pro $n = 1$ všechny normy splývají. Podobně v prostorech l^p, $p \geqq 1$, jsou normami zobrazení

$$X \equiv \{\xi_j\} \mapsto \|X\|_\infty := \sup_j |\xi_j|\,, \quad X \mapsto \|X\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{1/p}.$$

O nerovnostech mezi těmito normami a některých dalších normách na prostorech l^p pojednává cvičení 11.

1.3.2 Příklad: Ve vektorovém prostoru $L^p(M, d\mu)$ z příkladu 1.1.7 lze normu zavést např. předpisem

$$\|f\|_p := \left(\int_M |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} .$$

Vztah $\|f\|_p = 0$ implikuje $f(x) = 0$ pro μ-s. v. $x \in M$, tj. f je nulový prvek prostoru $L^p(M, \mathrm{d}\mu)$; axiom (n2) vyjadřuje opět Minkovského nerovnost, tentokrát v integrálním tvaru. Dále bude symbol $L^p(M, \mathrm{d}\mu)$ znamenat vždy tento *normovaný* prostor; na *vektorovém* prostoru $L^p(M, \mathrm{d}\mu)$ lze ovšem zavést i jiné normy – viz cvičení 12.

1.3.3 Příklad: Užijeme označení z příkladu 1.1.7. Symbolem $L^\infty(M, \mathrm{d}\mu)$ označíme množinu všech tříd μ-ekvivalentních měřitelných funkcí $f\colon M \to \mathbb{C}$, které jsou skoro všude omezené, tj. existuje $c > 0$ takové, že $|f(x)| \leqq c$ pro μ-s.v. $x \in M$ (přičemž μ-nulová množina, na níž $|f(x)| > c$, obecně závisí na f a c). Infimum množiny $\mathscr{C}_f$ všech čísel c s touto vlastností označíme $\sup\operatorname{ess} |f(x)|$ (esenciální supremum). Snadno ověříme, že toto číslo patří do $\mathscr{C}_f$ a že pro libovolnou dvojici μ-ekvivalentních měřitelných funkcí f a g platí $\mathscr{C}_f = \mathscr{C}_g$, tj. též

$$\sup_{x \in M} \operatorname{ess} |f(x)| = \sup_{x \in M} \operatorname{ess} |g(x)| .$$

Odtud dále vyplývá, že $L^\infty(M, \mathrm{d}\mu)$ *je vektorový prostor a zobrazení*

$$f \mapsto \|f\|_\infty := \sup_{x \in M} \operatorname{ess} |f(x)|$$

je norma. Dále rozumíme symbolem $L^\infty(M, \mathrm{d}\mu)$ tento normovaný prostor; některé jeho vlastnosti jsou uvedeny ve cvičení 13. Speciálně pro diskrétní míru μ_c (viz § A.3), jejíž diskrétní body tvoří spočetně nekonečnou množinu $P \equiv \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$, tj. $\mu_c(M \setminus P) = 0$, lze každé $f \in L^\infty(M, \mathrm{d}\mu_c)$ ztotožnit s omezenou posloupností $\{\xi_n\}$, kde $\xi_n := f(x_n)$, přičemž $\|f\|_\infty = \sup_n |\xi_n|$. Pro každou diskrétní míru s uvedenými vlastnostmi je tedy $L^\infty(M, \mathrm{d}\mu_c)$ totožné s normovaným prostorem l^∞ *všech omezených komplexních posloupností* $X \equiv \{\xi_n\}$ s normou $\|X\|_\infty := \sup_n |\xi_n|$. Podobně prostory l^p, $p \geqq 1$, jsou totožné s $L^p(M, \mathrm{d}\mu_c)$ pro každou diskrétní míru splňující $\mu_c(x_n) = 1$, $n = 1, 2, \ldots$.

1.3.4 Příklad: Na prostoru $C(X)$ z příkladu 1.1.3 lze zavést normu

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)| . \tag{1}$$

Symbolem $C(X)$ budeme dále rozumět vždy tento *normovaný* prostor. Je podprostorem v prostoru $B(X)$ tvořeném omezenými funkcemi $f\colon X \to \mathbb{C}$ (vztah (1) zjevně určuje normu i na $B(X)$).

Skalárním součinem na vektorovém prostoru V nazýváme každou striktně pozitivní seskvilineární formu; její hodnotu pro daná $x, y \in V$ obvykle značíme (x, y). Vektorovému prostoru se skalárním součinem se říká **pre-Hilbertův prostor** (srovnej s definicí Hilbertova prostoru v § 4.1).

Z toho, co bylo řečeno v § 1.2, vyplývá, že skalární součin je určen následujícími podmínkami (axiomy skalárního součinu), v nichž x, y, z, resp. α jsou libovolné prvky V, resp. $\mathbb{C}$:
(s1) $(x, \alpha y + z) = \alpha(x, y) + (x, z)$,
(s2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$,
(s3) $(x, x) \geqq 0$ a $(x, x) = 0$, právě když $x = 0$.

Vzhledem k tomu, že skalární součin je striktně pozitivní, splňuje Schwarzovu nerovnost, přičemž rovnost $|(x, y)|^2 = (x, x) \cdot (y, y)$ platí právě tehdy, když vektory x, y jsou lineárně závislé (srov. s cvičením 9). Pro všechna $x, y \neq 0$ platí nerovnosti $0 \leqq |(x, y)|/(x, x)^{1/2} \cdot (y, y)^{1/2} \leqq 1$; připomeňme, že v $\mathbb{R}^3$ má tento podíl geometrický význam absolutní hodnoty kosinu úhlu mezi vektory x, y.

Každý pre-Hilbertův prostor je normovaným prostorem s normou

$$\|x\| := (x, x)^{1/2}. \tag{1}$$

Schwarzovu nerovnost nyní můžeme psát ve tvaru $|(x, y)| \leqq \|x\| \, \|y\|$. O normě (1) říkáme, že je *indukována skalárním součinem*. Taková norma má některé speciální vlastnosti. Z axiomů (s1,2) plyne **rovnoběžníková rovnost**

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Dále polarizační formule umožňuje vyjádřit skalární součin libovolných dvou vektorů pomocí normy:

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) - \frac{i}{4}(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2).$$

Tyto dvě vlastnosti jsou pro normu indukovanou skalárním součinem charakteristické: máme-li normovaný prostor $(V, \|.\|)$, v němž norma splňuje rovnoběžníkovou rovnost, můžeme na V zavést skalární součin pomocí polarizační formule (cvičení 14). Platnost rovnoběžníkové rovnosti je tedy nutná a stačí k tomu, aby daná norma byla indukována skalárním součinem.

1.4.1 Příklad: V prostoru $\mathbb{C}^n$ je skalární součin dán vztahem

$$(x, y) := \sum_{j=1}^{n} \bar{\xi}_j \eta_j. \tag{2a}$$

Tento skalární součin indukuje normu $\|.\|_2$; naproti tomu normy $\|.\|_\infty$ a $\|.\|_p$, $p \neq 2$, nesplňují rovnoběžníkovou rovnost, a nemohou být proto indukovány žádným skalárním součinem. Analogická je situace v prostorech l^p: pro $1 \leqq p \leqq 2$ v nich lze zavést skalární součin

$$(X, Y) := \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\xi}_j \eta_j \,, \tag{2b}$$

který indukuje normu $\|.\|_2$. Konvergence řady pro libovolná $X, Y \in l^p$ plyne z Hölderovy nerovnosti (viz komentář; uvažte, že pro $p \in [1, 2]$ platí $q := p/(p-1) \geqq p$). Normy $\|.\|_\infty$ a $\|.\|_q$, $q \neq 2$, opět nejsou indukovány žádným skalárním součinem. Dále symboly $\mathbb{C}^n$ a l^2 budou označovat vždy prostory se skalárním součinem (2a), resp. (2b).

1.4.2 Příklad: V prostoru $L^2(M, d\mu)$ je skalární součin definován vztahem

$$(f, g) := \int_M \bar{f} g \, d\mu \,;$$

existence integrálu je opět důsledkem Hölderovy nerovnosti. Tento skalární součin indukuje normu $\|.\|_2$. V normovaných prostorech $L^p(M, d\mu)$, $p \neq 2$, norma nesplňuje rovnoběžníkovou rovnost (cvičení 15) a nelze pomocí ní zavést skalární součin.

O vektorech x, y v pre-Hilbertově prostoru říkáme, že jsou **ortogonální**, jestliže $(x, y) = 0$. *Vektor* x je *ortogonální k množině* $M \subset V$, jestliže $(x, y) = 0$ pro všechna $y \in M$. Množinu všech takových vektorů značíme $M^\perp$ a nazýváme **ortogonálním doplňkem množiny** M; důvod pro takový název poznáme v § 4.2. Z vlastností skalárního součinu vyplývá, že ortogonální doplněk každé množiny je podprostor

$$(M^\perp)_{\text{lin}} = M^\perp \,. \tag{3}$$

Podobně dostaneme následující užitečné vztahy (viz též cvičení 18):

$$(M_{\text{lin}})^\perp = M^\perp \,, \qquad M_{\text{lin}} \subset (M^\perp)^\perp \,, \qquad M \subset N \Rightarrow M^\perp \supset N^\perp \,. \tag{4}$$

Množina M nenulových vektorů, jejíž každé dva prvky jsou ortogonální, se nazývá *ortogonální množinou*; jestliže navíc platí $\|x\| = 1$ pro každé $x \in M$, říkáme, že množina M je **ortonormální**. Mezi ortonormálními množinami a množinami lineárně nezávislými existuje úzká souvislost. Na jedné straně je zřejmé, že každá ortonormální množina je lineárně nezávislá. V opačném směru je situace jen o málo složitější.

1.4.3 Věta (Gramova-Schmidtova): Nechť N je nejvýše spočetná lineárně nezávislá množina v pre-Hilbertově prostoru V. Potom existuje ortonormální množina $M \subset V$ stejné mohutnosti jako N, přičemž $M_{\text{lin}} = N_{\text{lin}}$.
Důkaz přenecháváme čtenáři (cvičení 16).

1.4.4 Důsledek: V každém pre-Hilbertově prostoru konečné dimenze existuje ortonormální báze.

Komentář

§ **1.1** • Nechť $p > 1$, $q := p/(p-1)$ a ξ_j, η_j jsou nějaké n-tice komplexních čísel. Potom platí *Hölderova nerovnost*

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j \eta_j| \leqq \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^q\right)^{1/q} .$$

Tvrzení, které stačí zřejmě ověřit pro „normalizovaný" případ

$$\sum_j |\xi_j|^p = \sum_j |\eta_j|^p = 1 ,$$

vyplývá z elementárního vztahu

$$ab \leqq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q ,$$

platného pro všechna $a, b \geqq 0$ (viz [Jar 1], věta 101). Podobně se dostanou analogické nerovnosti pro nekonečné řady, resp. integrály:
(a) Nechť komplexní posloupnosti $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty}$, splňují podmínky $\sum_j |\xi_j|^p < \infty$, $\sum_j |\eta_j|^q < \infty$. Potom řada $\sum_j \xi_j \eta_j$ absolutně konverguje a platí Hölderova nerovnost s $n = \infty$.
(b) Nechť $(X, \mathscr{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $M \in \mathscr{A}$ a f, g jsou komplexní funkce definované na M. Jestliže $f^p, g^q \in L^1(M, \mathrm{d}\mu)$, potom $fg \in L^1(M, \mathrm{d}\mu)$ a

$$\int_M |fg| \,\mathrm{d}\mu \leqq \left(\int_M |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \left(\int_M |g|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q} .$$

• Báze se dá definovat i pro nekonečnědimenzionální vektorový prostor V. Lineárně nezávislá množina $B \subset V$, pro niž $B_{\text{lin}} = V$, se nazývá *Hammelovou bází* prostoru V. Tato množina je nutně nekonečná (její mohutnost se nazývá *algebraickou dimenzí* prostoru V). Pomocí Zornova lemmatu je možno dokázat existenci Hammelovy báze v každém vektorovém prostoru – cvičení 17. Například Hammelovou bází podprostoru $P(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$ tvořeného všemi polynomy reálné proměnné x je množina $\{1, x, x^2, \ldots\}$. V nekonečnědimenzionálních vektorových prostorech, zejména prostorech Hilbertových, se však většinou pracuje s bázemi jiného typu: každý vektor prostoru je vyjádřen jako „nekonečná" lineární kombinace vektorů báze (viz § 4.2). To ovšem předpokládá zavedení topologických pojmů, jako je konvergence aj.
• Pro dané dva body $x, y \in V$ nazýváme zobrazení $[0, 1] \ni t \mapsto tx + (1-t)\,y$ *úsečkou spojující body* x, y (spojnicí bodů x, y). Množina $C \subset V$ je **konvexní**, jestliže s každou dvojicí $x, y \in C$ patří do C spojnice bodů x, y. Každý podprostor

$L \subset V$ je zjevně konvexní. Dále je jasné, že průnik libovolného systému konvexních množin je konvexní.

V konvexní množině C mohou existovat body x, které neleží na spojnici žádných dvou bodů $z, y \in C$, $x \neq y$, $x \neq z$; takové body nazýváme *extremálními body konvexní množiny C.* Ekvivalentní definice zní: $x \in C$ je extremálním bodem množiny C, jestliže z podmínky $x = ty + (1 - t)\, z$, $t \in (0, 1)$, $y, z \in C$, plyne $x = y = z$. Například každý trojúhelník je konvexní množina v $\mathbb{R}^2$, jejímiž jedinými extremálními body jsou vrcholy.

• Kromě lineárních zobrazení se na vektorových prostorech pracuje i se zobrazeními antilineárními. Příkladem je *involuce,* která se definuje jako zobrazení $V \ni x \mapsto x^* \in V$ splňující pro všechna $x, y \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$ následující podmínky:
(i1) $(\alpha x + y)^* = \bar{\alpha} x^* + y^*$,
(i2) $x^{**} = x$.
Z (i2) je vidět, že involuce je bijekce.

§ **1.2** • Důkaz Hahnova-Banachova teorému je možno najít ve většině knih pojednávajících o funkcionální analýze – viz např. [[KF]], [[RS 1]], [[Tay]].

§ **1.4** • V matematické literatuře se skalární součin obvykle definuje jako forma lineární v levém a antilineární v pravém argumentu. Skalární součin se zavádí také na reálných vektorových prostorech jako reálná symetrická bilineární forma splňující podmínku (s3). Pro reálný vektorový prostor se skalárním součinem se užívá názvu *euklidovský prostor.*

Cvičení

1. Ve vektorovém prostoru V platí: $-0 = 0$, $\alpha 0 = 0$ pro všechna $\alpha \in \mathbb{C}$, $0x = 0$, $-x = (-1)\, x$ pro všechna $x \in V$ a pro $x \neq 0$ z rovnosti $\alpha x = \beta x$ plyne $\alpha = \beta$.

2. Prostor $\mathbb{C}^{n(R)}$ má dimenzi $2n$. Doplňte vektory $e_j := \{\delta_{1j}, \dots, \delta_{nj}\}$, $1 \leqq j \leqq n$, na bázi v $\mathbb{C}^{n(R)}$.

3. Nechť $p \geqq 1$. (i) Pro každou dvojici $x, y \in \mathbb{C}^n$, $x = [\xi_1, \dots, \xi_n]$, $y = [\eta_1, \dots, \eta_n]$ platí *Minkovského nerovnost*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j + \eta_j|^p\right)^{1/p} \leqq \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^p\right)^{1/p}.$$

(ii) Užijeme označení z příkladu 1.1.7. Jestliže $f, g \in \mathscr{L}^p(M, d\mu)$, potom $f + g \in \mathscr{L}^p(M, d\mu)$ a platí *Minkovského nerovnost v integrálním tvaru*

$$\left(\int_M |f + g|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leqq \left(\int_M |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_M |g|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

Návod: Ve vztahu $|\xi_j + \eta_j|^p \leqq |\xi_j|\, |\xi_j + \eta_j|^{p-1} + |\eta_j|\, |\xi_j + \eta_j|^{p-1}$ aplikujte na výraz na pravé straně Hölderovu nerovnost.

4. Algebraický izomorfismus $f\colon V \to V'$ zachovává lineární nezávislost: množina $M \subset V$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když je lineárně nezávislá množina $f(M) \subset V'$.

5. Nechť V_1, V_2 jsou podprostory vektorového prostoru V; jejich *algebraickým součtem* $V_1 + V_2$ nazýváme podprostor $(V_1 \cup V_2)_{\mathrm{lin}} = \{x \in V\colon\ x = x_1 + x_2,\ x_1 \in V_1, x_2 \in V_2\}$. Tento podprostor spolu s podprostorem $V_1 \cap V_2$ splňuje vztah $\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$. Speciálně pro $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ platí $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$ a odtud $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$.
Návod: Bázi ve $V_1 \cap V_2$ doplňte jednak na bázi $\mathscr{E}_1$ ve V_1, jednak na bázi $\mathscr{E}_2$ ve V_2, a ukažte, že $\mathscr{E}_1 \cup \mathscr{E}_2$ je báze ve $V_1 + V_2$.

6. Jsou dány podprostory V_1, V_2 vektorového prostoru V takové, že $V = V_1 \oplus V_2$. Potom faktorový prostor V/V_1 je algebraicky izomorfní podprostoru V_2.

7. Pro lineární zobrazení $f\colon V \to V'$ jsou množiny $\operatorname{Ker} f := \{x \in V\colon f(x) = 0\} = f^{(-1)}(\{0\})$, resp. $\operatorname{Ran} f$ podprostory ve V, resp. V'. Jestliže $\dim \operatorname{Ker} f < \infty$ potom $\dim \operatorname{Ran} f = \dim V - \dim \operatorname{Ker} f$.

8. Nechť W je podprostor vektorového prostoru V, $\dim W < \infty$; potom $\dim V/W = \dim V - \dim W$.
Návod: Aplikujte tvrzení předchozího cvičení na vhodně zvolené surjektivní zobrazení $V \to V/W$.

9. Nechť F je seskvilineární forma na vektorovém prostoru V a q_F odpovídající kvadratická forma.
(i) Forma F je symetrická právě tehdy, když $q_F(x) \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in V$.
(ii) Je-li F pozitivní, pak funkcionál $x \mapsto p_F(x) := \sqrt{q_F(x)}$ je seminorma na V a dále platí nerovnost (1.2.4), přičemž rovnost nastává právě tehdy, když existuje $\alpha \in \mathbb{C}$ takové, že $q_F(\alpha x + y) = 0$ nebo $q_F(x + \alpha y) = 0$.

10. Pro $q \geqq p \geqq 1$, $x \in \mathbb{C}^n$ platí nerovnosti $\|x\|_\infty \leqq \|x\|_q \leqq \|x\|_p \leqq n^{1/p}\|x\|_\infty$. Odtud dále plyne $\|x\|_\infty = \lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p$.

11. Na prostoru l^p, $p \geqq 1$, je vztahem $\|X\|_q := \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^q\right)^{1/q}$, kde $X \equiv \{\xi_j\}_{j=1}^{\infty} \in l^p$, definována norma pro všechna $q \geqq p$. Pro každé $X \in l^p$ platí $\|X\|_\infty \leqq \|X\|_q \leqq \|X\|_p$, zatímco pro žádná kladná čísla k, k' nelze splnit nerovnosti $\|X\|_p \leqq k\|X\|_\infty$, $\|X\|_p \leqq k'\|X\|_q$ pro všechna $X \in l^p$.
Návod: Pro $0 < a < 1$ položte $\xi_j := a^{j/p}$.

12. S označeními z příkladu 1.1.7 platí: jestliže $\mu(M) < \infty$, $1 \leqq q \leqq p$, potom zobrazení $f \mapsto \|f\|_q := \left(\int_M |f|^q \,d\mu\right)^{1/q}$ je norma na $L^p(M, d\mu)$ a pro každé $f \in L^p(M, d\mu)$ je splněna nerovnost

$$\|f\|_q \, \mu(M)^{-1/q} \leqq \|f\|_p \, \mu(M)^{-1/p} .$$

13. Převezmeme označení z příkladu 1.3.3.

(i) Pro každé $f \in L^\infty(M, d\mu)$ platí $|f(x)| \leqq \|f\|_\infty$, tj. $\|f\|_\infty$ je *minimem* množiny všech $c > 0$ takových, že $|f(x)| \leqq c$ pro μ-s. v. $x \in M$.

(ii) Jestliže $\mu(M) < \infty$, máme pro každé $p \geqq 1$: $L^\infty(M, d\mu) \subset L^p(M, d\mu)$ a zobrazení $f \mapsto \|f\|_p$ je norma na vektorovém prostoru $L^\infty(M, d\mu)$, přičemž $\|f\|_p \leqq \mu(M)^{1/p} \|f\|_\infty$ a $\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

(iii) Nechť posloupnost $\{f_n\} \subset L^\infty(M, d\mu)$ je stejnoměrně omezená, tj. existuje $c > 0$ takové, že $\|f_n\|_\infty \leqq c$, $n = 1, 2, \ldots$, a nechť pro μ-s. v. $x \in M$ $f_n(x) \to f(x)$. Potom $f \in L^\infty(M, d\mu)$ a $\|f\|_\infty \leqq c$.

Návod: (ii) Funkce $p \mapsto \mu(M)^{-1/p} \|f\|_p$ je neklesající a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje množina $M_\varepsilon \in \mathscr{A}$, $\mu(M_\varepsilon) \neq 0$ taková, že $|f(x)| \geqq \|f\|_\infty - \varepsilon$ pro všechna $x \in M_\varepsilon$.

14. Jestliže na normovaném prostoru $(V, \|.\|)$ je splněna rovnoběžníková rovnost pro všechna $x, y \in V$, potom forma $(.,.)$, $(x, y) := r(x, y) + \mathrm{i}r(\mathrm{i}x, y)$, kde $r(x, y) := \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$, zadává skalární součin na V.

Návod: Platí $r(x, y) = r(y, x) = r(\mathrm{i}x, \mathrm{i}y)$; z rovnoběžníkové rovnosti se odvodí $r(x, y + z) = r(x, y) + r(x, z)$. Odtud odvodíme dále vztah $r(x, cy) = cr(x, y)$ pro racionální c a ze spojitosti reálných funkcí $t \mapsto \|tx + y\|$ (viz nerovnost (1.2.2)) vztah $r(\alpha x, y) = \alpha r(x, y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

15. V normovaném prostoru $L^p(M, d\mu)$ je splněna rovnoběžníková rovnost pro všechna f, g jen v případě $p = 2$.

Návod: Pro $p \neq 2$ uvažujte charakteristické funkce libovolných disjunktních množin $A, B \subset M$, $\mu(A) = \mu(B) < \infty$.

16. Dokažte větu 1.4.3.

Návod: Pro $N \equiv \{y_1, y_2, \ldots\}$ uvažujte vektory $x_n := z_n / \|z_n\|$, kde

$$z_n := y_n - \sum_{k=1}^{n-1} (x_k, y_n)\, x_k , \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

17. V každém nekonečnědimenzionálním vektorovém prostoru existuje Hammelova báze. Navíc pro každou lineárně nezávislou množinu $M \subset V$ lze najít Hammelovu bázi B_M ve V takovou, že $M \subset B_M$.

Návod: Na systému $\mathscr{S}$ všech lineárně nezávislých množin ve V (obsahujících M) zadává množinová inkluze částečné uspořádání, přičemž horní hranicí každého uspořádaného podsystému je sjednocení všech jeho prvků. Podle Zornova lemmatu existuje maximální prvek $B \in \mathscr{S}$; potom $B_{\mathrm{lin}} = V$.

18. Najděte pre-Hilbertův prostor V a množinu $M \subset V$ tak, aby $M_{\mathrm{lin}} \neq (M^\perp)^\perp$.

Návod: V prostoru l^2 uvažujte množinu $\{E_k\colon k = 1, 2, \ldots\}$, $E_k := \{\delta_{jk}\}_{j=1}^\infty$.

 19. Pro každou konečnou množinu $\{x_1, \ldots, x_n\}$ v pre-Hilbertově prostoru je *Gramův determinant* $\Gamma(x_1, \ldots, x_n)$, což je determinant matice tvořené skalárními součiny (x_j, x_k), $j, k = 1, \ldots, n$, nezáporný; nulové hodnoty nabývá právě tehdy, když vektory $x_1, \ldots, x_n$ jsou lineárně závislé.

Návod: Užijte vztahu $(x_j, x_k) = \sum_{r=1}^{n} (x_j, e_r)(e_r, x_k)$, kde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je ortonormální báze v podprostoru $\{x_1, \ldots, x_n\}_{\text{lin}}$, a pravidlo pro násobení determinantů.

20. Nechť $B \equiv \{x_\alpha : \alpha \in I\}$ je Hammelova báze ve vektorovém prostoru V a je dáno zobrazení f_0: $B \times B \to \mathbb{C}$ takové, že $f_0(x_\alpha, x_\beta) = \overline{f_0(x_\beta, x_\alpha)}$. Potom existuje právě jedna symetrická seskvilineární forma f na V splňující $f \upharpoonright B \times B = f_0$.

2.1 METRICKÉ PROSTORY, ZÁKLADNÍ DEFINICE A VZTAHY

Nechť je dána množina X, jejíž prvky nazveme body, a zobrazení ϱ: $X \times X \to [0, \infty)$ takové, že pro všechna $x, y, z \in X$ jsou splněny **axiomy metriky**:
(m1) $\varrho(x, y) = 0$ právě tehdy, když $x = y$,
(m2) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ (symetrie),
(m3) $\varrho(x, z) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$ (trojúhelníková nerovnost).
Zobrazení ϱ nazýváme **metrikou** a množinu X, na níž je definována metrika, **metrickým prostorem**. Protože na dané množině lze většinou zavést metriku více způsoby, užíváme někdy pro metrický prostor symbol (X, ϱ), chceme-li explicite vyznačit, kterou metriku na X právě uvažujeme.

Jedním z nejjednodušších příkladů metriky je tzv. *diskrétní metrika* ϱ_d: $\varrho_d(x, y) := 1$, $x \neq y$, jíž lze zavést na každé množině X; extrémně jednoduchá definice metriky vede k některým „patologickým" vlastnostem tohoto prostoru (cvičení 4). Velký význam pro další výklad má případ, kdy metrický prostor konstruujeme z daného normovaného prostoru V; jestliže položíme

$$\varrho(x, y) := \|x - y\|\,, \tag{1}$$

vidíme, že axiomy normy zaručují splnění podmínek (m1–3). O takové metrice říkáme, že je *indukována normou*. Každá *metrika indukovaná normou* je invariantní vůči translacím:

$$\varrho(x + z, y + z) = \varrho(x, y) \quad \text{pro} \quad \text{všechna } x, y, z \in V;$$

při dilatacích $x \mapsto \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{C}$, se transformuje podle vztahu

$$\varrho(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, \varrho(x, y)\,.$$

Naopak, nechť je dána metrika ϱ na vektorovém prostoru V, která má uvedené dvě vlastnosti. Položíme-li $\|x\|_\varrho := \varrho(x, 0)$, ověříme snadno, že $\|.\|_\varrho$ je norma, která splňuje vztah (1). V dalším daný normovaný prostor V automaticky chápeme jako metrický prostor s metrikou (1), pokud není metrika na V výslovně zavedena jinak (cvičení 2). Normované prostory z příkladů 1.3.1–4 tak poskytují současně příklady metrických prostorů.

Východiskem pro další výklad o vlastnostech metrických prostorů je pojem okolí. Pro daný bod $x \in X$ a $\varepsilon > 0$ nazveme množinu $U_\varepsilon(x) := \{y \in X\colon \varrho(x, y) < \varepsilon\}$

 ε-**okolím bodu** x (někdy se též mluví o otevřené kouli se středem x a poloměrem ε). Připomeňme důležité vlastnosti okolí, které bezprostředně plynou z definice a axiomů metriky:

(i) pro každou dvojici $x, y \in X$, $x \neq y$, existují disjunktní okolí $U_\varepsilon(x)$ a $U_\eta(y)$,
(ii) do daného okolí $U_\varepsilon(x)$ patří spolu s každým bodem i jisté okolí tohoto bodu: $y \in U_\varepsilon(x) \Rightarrow$ existuje $U_\eta(y) \subset U_\varepsilon(x)$,
(iii) nespočetný systém všech okolí daného bodu x lze nahradit spočetným systémem $\{U_{\varepsilon_n}(x): n = 1, 2, \ldots\}$ v tom smyslu, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené n, pro něž $U_{\varepsilon_n}(x) \subset U_\varepsilon(x)$.

Všechny pojmy, které dále zavádíme, se vztahují k danému metrickému prostoru (X, ϱ), „množina" znamená prvek systému 2^X atd. V definicích užíváme výhradně pojmu okolí, resp. pojmů z něj odvozených (viz komentář). Ekvivalentní definice vycházející přímo z metriky, jakož i chybějící důkazy některých tvrzení, si čtenář snadno doplní sám.

Bod x je **vnitřním bodem** množiny M, jestliže existuje $U_\varepsilon(x) \subset M$. Všechny vnitřní body množiny M tvoří její *vnitřek* (značení M°). Množina G je **otevřená**, jestliže $G = G^\circ$, tj. jestliže každý její bod je vnitřní. Triviálními příklady jsou celý prostor X a prázdná množina $\emptyset$; z vlastnosti (ii) je dále vidět, že všechna okolí daného bodu $x \in X$ jsou otevřenými množinami. Otevřené množiny $U_\varepsilon(x)$ jsou navíc „elementární" v tom smyslu, že každou otevřenou množinu G lze zapsat ve tvaru $G = \bigcup_{x \in G} U_{\varepsilon(x)}(x)$. Odtud dostáváme základní vlastnost otevřených množin:

2.1.1. Věta: Sjednocení libovolného systému, resp. průnik konečného systému otevřených množin je otevřená množina.

Uzávěr množiny M (značení $\bar{M}$) je množina všech bodů $x \in X$, takových, že $U_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$ pro každé $\varepsilon > 0$. **Bod uzávěru** množiny M, tj. prvek $x \in \bar{M}$, se nazývá **izolovaným bodem**, jestliže existuje $U_\varepsilon(x)$, pro něž $U_\varepsilon(x) \cap M = \{x\}$. Bod uzávěru, který není izolovaným bodem množiny M, je jejím **hromadným bodem**. Pro každou množinu M platí

$$M \subset \bar{M}, \qquad \bar{\bar{M}} = \bar{M}. \tag{2}$$

Dále jsou splněny vztahy

$$M \subset N \Rightarrow \bar{M} \subset \bar{N}, \qquad \overline{M \cup N} = \bar{M} \cup \bar{N}. \tag{3}$$

Poznamenejme, že pro uzávěr průniku dvou množin platí pouze inkluze $\overline{M \cap N} \subset \bar{M} \cap \bar{N}$ a nikoli rovnost. Množina $\mathrm{bd}\, M := \bar{M} \setminus M^\circ$ se nazývá **hranicí** množiny M.

Množina F je **uzavřená**, jestliže $F = \bar{F}$. Uzávěr každé množiny je uzavřená množina; ze vztahů (2, 3) dále plyne, že $\bar{M}$ *je minimální uzavřená množina obsahující* M. Kromě toho je zřejmé, že celý prostor X a prázdná množina jsou uzavřené:

$$\bar{X} = X, \qquad \bar{\emptyset} = \emptyset. \tag{4}$$

Uzavřeným protějškem otevřené množiny $U_\varepsilon(x)$ je uzavřená koule $S_\varepsilon(x) := \{y \in X\colon \varrho(x, y) \leqq \varepsilon\}$. Podle (3) platí $\overline{U_\varepsilon(x)} \subset S_\varepsilon(x)$, obecně však nikoli rovnost (cvičení 4). Připomeňme ještě dvě základní vlastnosti uzavřených množin:

2.1.2 Věta: (a) Množina F je uzavřená právě tehdy, když její doplněk $X \setminus F$ je množina otevřená.
(b) Průnik libovolného systému, resp. sjednocení konečného systému uzavřených množin je množina uzavřená.

Říkáme, že množina $M \subset X$ je **hustá v množině** $N \subset X$, jestliže $\bar{M} \supset N$; **všude hustá**, jestliže $\bar{M} = X$; **všude řídká**, jestliže $X \setminus \bar{M}$ je všude hustá (cvičení 5). Metrický prostor, který obsahuje všude hustou spočetnou podmnožinu, je **separabilní**. Jednoduchým příkladem je prostor $\mathbb{C}^n$ s metrikou indukovanou libovolnou z norem zavedených v příkladu 1.3.1; všude hustou spočetnou množinu v něm tvoří n-tice komplexních čísel s racionální reálnou i imaginární částí. S dalšími příklady separabilních prostorů se seznámíme v následujících kapitolách.

Bod x je **limitou posloupnosti** $\{x_n\} \subset X$, jestliže ke každému $U_\varepsilon(x)$ existuje přirozené n_0 (závisející obecně na ε a x) tak, že platí implikace $n > n_0 \Rightarrow \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(x)$. Alternativně říkáme, že **posloupnost** $\{x_n\}$ **konverguje k bodu** x, a píšeme $x_n \to x$ nebo $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Z vlastnosti (i) okolí plyne, že *každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Pomocí konvergence lze charakterizovat body uzávěru.

2.1.3 Tvrzení: Bod x patří do uzávěru množiny M právě tehdy, když existuje posloupnost $\{x_n\} \subset M$, která konverguje k x.

Dále se budeme zabývat zobrazeními metrických prostorů. Pokud neuvádíme bližší specifikaci, půjde o zobrazení $f\colon X \to X'$, kde (X, ϱ), (X', ϱ') jsou dané metrické prostory (mohou být případně totožné), přičemž pro ε-okolí bodu v prostoru X' užijeme označení $U'_\varepsilon(.)$. Speciálně v případě, že $X' \equiv \mathbb{C}$, resp. $\mathbb{R}$, mluvíme o komplexní, resp. reálné funkci na prostoru X. Začneme s pojmem lokální spojitosti: zobrazení f **je spojité v bodě** $x \in X$, jestliže ke každému $U'_\varepsilon(f(x))$ existuje $U_\delta(x)$ takové, že $f(U_\delta(x)) \subset U'_\varepsilon(f(x))$. Podobně jako body uzávěru lze i lokální spojitost charakterizovat pomocí posloupností (cvičení 7). **Spojitostí zobrazení** f (říká se též *globální spojitost*) se rozumí tato vlastnost: vzor libovolné otevřené množiny $G' \subset X'$ při zobrazení f je otevřená množina v X. Následující vztah mezi lokální a globální spojitostí lze jednoduše dokázat.

2.1.4 Tvrzení: Zobrazení f je spojité právě tehdy, když je spojité v každém bodě $x \in X$.

2.1.5 Příklad: Pro pevné $x \in X$ uvažujme reálnou funkci $f_x(y) := \varrho(x, y)$. Tato funkce je spojitá v každém bodě – viz cvičení 1. Speciálně, jestliže X je vektorový prostor, na němž je metrika indukována normou, dostáváme spojitost normy – srov. vztah (1.2.2) pro $p(x) \equiv \|x\|$.

2.1.6. Příklad: Předpokládejme, že na vektorovém prostoru V jsou dány normy $\|.\|_1$, $\|.\|_2$. Říkáme, že *norma* $\|.\|_2$ *není silnější než* $\|.\|_1$, jestliže existuje $\alpha > 0$ takové, že pro všechna $x \in V$ platí

$$\|x\|_2 \leqq \alpha\|x\|_1 . \tag{5}$$

Dokážeme, že tato podmínka je ekvivalentní spojitosti zobrazení e_{12}: $(V, \|.\|_1) \to$ $\to (V, \|.\|_2)$ definovaného vztahem $e_{12}(x) := x$. Z nerovnosti (5) a linearity zobrazení e_{12} plyne spojitost v každém bodě $x \in V$. Naopak, v důsledu spojitosti e_{12} v bodě $x = 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $\|x\|_1 < \delta \Rightarrow \|x\|_2 < 1$. Pro libovolné nenulové $y \in V$ je norma $\|.\|_1$ vektoru

$$\frac{\delta}{2}\frac{y}{\|y\|_1}$$

rovna $\delta/2 < \delta$, takže

$$\left\|\frac{\delta}{2}\frac{y}{\|y\|_1}\right\|_2 < 1;$$

odtud plyne $\|y\|_2 \leqq 2/\delta\,\|y\|_1$ pro každé $y \in V$ (rovnost nastává pro $y = 0$).

Důležitou třídu spojitých zobrazení metrických prostorů tvoří **homeomorfismy**. Nazýváme tak bijekce f takové, že f i f^{-1} jsou spojitá zobrazení. Homeomorfismus má všechny znaky ekvivalence: reflexivnost a symetrie jsou zřejmé, k ověření tranzitivity si stačí uvědomit, že jsou-li dány homeomorfismy f: $X \to X'$, g: $X' \to X''$, potom složené zobrazení $h := g \circ f$ je spojitá bijekce prostorů X, X'' a $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

2.1.7 Tvrzení: Nechť τ, resp. τ' je systém všech otevřených množin v metrickém prostoru X, resp. X' a nechť f je homeomorfismus těchto prostorů. Potom f zobrazuje bijektivně τ na τ'.
Důkaz: Protože zobrazení f^{-1} je spojité, platí $f(G) \in \tau'$ pro všechna $G \in \tau$. Pro každou dvojici $G_1, G_2 \in \tau$ splňující $f(G_1) = f(G_2)$ dostaneme aplikací f^{-1} rovnost $G_1 = G_2$, takže f zobrazuje injektivně systém τ do τ'. Zapíšeme-li dané $G' \in \tau'$ ve tvaru $G' = f(f^{-1}(G'))$, plyne ze spojitosti f, že $f^{-1}(G') =$ $= f^{(-1)}(G') \in \tau$, tj. $f(\tau) = \tau'$. ■

Vzhledem k tomu, že systém otevřených množin určuje topologickou strukturu prostoru (X, ϱ) (viz dále § 2.3), říkáme, že *homeomorfní metrické prostory jsou topologicky ekvivalentní.*

Vyšetříme homeomorfismy normovaných prostorů. Tyto prostory jsou bohatší o algebraickou strukturu vektorového prostoru, a proto se budeme zabývat homeomorfismy lineárními (viz též § 2.6); požadavek linearity zaručuje shodnost algebraické struktury uvažované dvojice prostorů (§ 1.1). Je účelné zavést pojem **ekvivalentních norem:** normy $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ na tomtéž vektorovém prostoru V jsou ekvivalentní, není-li jedna silnější druhé, tj. existují-li kladná čísla α, β taková, že pro všechna $x \in V$ platí $\|x\|_1 \leqq \alpha\|x\|_2$, $\|x\|_2 \leqq \beta\|x\|_1$. Z tvrzení uvedeného v příkladu 2.1.6 je vidět, že normy $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ jsou ekvivalentní právě tehdy, když zobrazení e_{12} je homeomorfismus. Odtud dále dostáváme velmi jednoduchou nutnou a postačující podmínku pro homeomorfismus normovaných prostorů konečné dimenze.

2.1.8 Věta: Konečnědimenzionální normované prostory V, V' jsou lineárně homeomorfní právě tehdy, když $\dim V = \dim V'$.

Dokážeme nejprve pomocné tvrzení.

2.1.9 Lemma: Jestliže $\dim V = n$, jsou každé dvě normy na V ekvivalentní.
Důkaz: Vztah ekvivalence norem je zjevně tranzitivní, a proto stačí dokázat, že libovolná norma $\|.\|$ na V je ekvivalentní normě, kterou definujeme pomocí pevně zvolené báze $\mathscr{E} \equiv \{e_1, \ldots, e_n\}$ takto: jestliže $x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n$, položíme $\|x\|_{\mathscr{E}} := \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{1/2}$. Z axiomů normy a Hölderovy nerovnosti potom plyne

$$\|x\| \leqq \alpha\|x\|_{\mathscr{E}}, \qquad \alpha := \left(\sum_{j=1}^{n} \|e_j\|^2\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Zbývá tedy ukázat, že norma $\|.\|_{\mathscr{E}}$ není silnější než $\|.\|$. Uvažujme funkci f: $\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^+$, $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) := \|\xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n\|$. Z nerovností (1.2.2), (6) je vidět, že tato funkce je spojitá

$$|f(\xi_1, \ldots, \xi_n) - f(\eta_1, \ldots, \eta_n)| \leqq \|\xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n - (\eta_1 e_1 + \ldots + \eta_n e_n)\| \leqq$$
$$\leqq \alpha \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j - \eta_j|^2\right)^{1/2}.$$

Na omezené uzavřené množině $S_1 := \left\{[\xi_1, \ldots, \xi_n] : \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2 = 1\right\}$ nabývá tudíž funkce f minima (viz důsledek 2.5.10), a protože f je na S_1 kladná, existuje $\beta > 0$ takové, že na S_1 platí $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) \geqq \beta$. Je-li nyní x libovolný nenulový vektor, potom pro složky η_j vektoru $y := x/\|x\|_{\mathscr{E}}$ platí $\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^2 = 1$, takže $\|x\|/\|x\|_{\mathscr{E}} \geqq \beta$; odkud $\|x\| > \beta\|x\|_{\mathscr{E}}$. ■

Důkaz věty 8 je nyní už snadný. Nutná podmínka plyne ze cvičení 1.4. K důkazu postačující podmínky zvolíme v prostorech V, V' báze $\mathscr{E} \equiv \{e_1, \ldots, e_n\}$, resp. $\mathscr{E}' \equiv \{e_1', \ldots, e_n'\}$ a definujeme lineární bijekci f: $V \to V'$ vztahem $f\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right) := \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j'$, takže pro všechna $x \in V$ je splněna rovnost $\|x\|_{\mathscr{E}} = \|f(x)\|_{\mathscr{E}'}$. Odtud dále vyplývá spojitost zobrazení f, f^{-1}, takže prostory $(V, \|\cdot\|_{\mathscr{E}})$, $(V', \|\cdot\|_{\mathscr{E}'})$ jsou lineárně homeomorfní; tvrzení potom plyne z lemmatu. ■

Homeomorfní metrické prostory jsou topologicky ekvivalentní, což však neznamená, že mají shodné všechny metrické vlastnosti. Mohou se lišit v těch vlastnostech, které nelze vyjádřit pomocí pojmu okolí a pojmů z něj odvozených – viz komentář. Jako jednoduchý příklad uvažujme metrické prostory $\mathbb{R}$ a $(-\pi/2, \pi/2)$ se stejnou metrikou $\varrho(x, y) := |x - y|$. Zobrazení $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ je zjevně homeomorfismem těchto prostorů, avšak jen v prvním prostoru existují neomezené množiny.

Metrické prostory (X, ϱ), (X', ϱ') mají shodné všechny vlastnosti, jestliže existuje bijekce f, která zachovává metriku:

$$\varrho(x, y) = \varrho'(f(x), f(y)) . \tag{7}$$

Takovéto zobrazení metrických prostorů se nazývá **izometrie**. Ze zachování metriky plyne spojitost zobrazení f i f^{-1}, takže izometrické prostory jsou homeomorfní. Speciálně pro lineární izometrie $f\colon V \to V'$ normovaných prostorů přechází podmínka (7) na

$$\|x\| = \|f(x)\|' .$$

2.1.10 Příklad: Uvažujme n-dimenzionální pre-Hilbertovy prostory V, V' s ortonormálními bázemi $\{e_1, \dots, e_n\}$, resp. $\{e'_1, \dots, e'_n\}$. Definujme lineární bijekci $f\colon V \to V'$ stejně jako v důkazu věty 8; potom pro každou dvojici $x \equiv \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$, $y \equiv \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j$ platí

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \eta_j = (f(x), f(y))' .$$

Věta 8 se tedy dá v tomto případě zesílit: *Konečnědimenzionální pre-Hilbertovy prostory jsou lineárně izometrické právě tehdy, když mají stejnou dimenzi.*

Na závěr tohoto přehledu připomeňme pojem limity zobrazení f z metrického prostoru (X, ϱ) do (X', ϱ'). Nechť x_0 je hromadný bod množiny X; bod $a \in X'$ je **limitou zobrazení** f v bodě x_0, $a = \lim_{x \to x_0} f(x)$, jestliže ke každému $U'_\varepsilon(a)$ existuje $U_\delta(x_0)$ takové, že platí $f(U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \subset U'_\varepsilon(a)$. To lze zapsat ekvivalentně též ve tvaru $\lim_{x \to x_0} \varrho'(f(x), a) = 0$.

Pro $X = \mathbb{R}$ budeme pracovat také s limitami v nevlastních bodech $\pm\infty$, které definujeme stejně jako v případě číselných funkcí. Například $a = \lim_{x \to +\infty} f(x)$ znamená, že ke každému $U'_\varepsilon(a)$ existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x > K$ platí $f(x) \in U'_\varepsilon(a)$.

Souvislost limity a lokální spojitosti je zřejmá. Čtenář si příslušnou modifikaci známých vět z úvodního kursu analýzy snadno doplní. Zmíněná souvislost se projevuje i v tom, že vztah $a = \lim_{x \to x_0} f(x)$ platí právě tehdy, když $f(x_n) \to a$ pro každou posloupnost splňující $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ (srov. s cvičením 7).

2.1.11. Poznámka: Nechť V je normovaný prostor; zobrazení f: $\mathbb{R} \to V$, resp. $\mathbb{C} \to V$ nazýváme vektorovou funkcí (reálné, resp. komplexní proměnné). Vektorová funkce f je **diferencovatelná v bodě** x_0, jestliže existuje $y \in V$ takové, že

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = y,$$

neboli

$$\lim_{x \to x_0} \left\| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - y \right\| = 0.$$

Vektor y nazýváme derivací funkce f v bodě x_0; užíváme pro něj obvyklého označení $f'(x_0)$, resp. $\mathrm{d}f(x_0)/\mathrm{d}x$.

2.2 ÚPLNÉ METRICKÉ PROSTORY

Mezi základní pojmy, na nichž je vybudována klasická i funkcionální analýza, patří limitní přechod. Jestliže posloupnost $\{x_n\}$ bodů metrického prostoru X konverguje k $x \in X$, potom z trojúhelníkové nerovnosti plyne $\varrho(x_n, x_m) \to 0$ pro $n, m \to \infty$. Platnost obrácené implikace je rozumným a přitom zcela přesně definovaným vyjádřením intuitivního požadavku „uzavřenosti“ uvažovaného metrického prostoru vůči limitním přechodům. Je dobře známo, že existují metrické prostory, kde tento požadavek splněn není, např. množina racionálních čísel s metrikou $\varrho(x, y) := |x - y|$. Tato okolnost byla jedním z hlavních motivů pro zavedení reálných čísel.

Přejděme nyní k příslušným definicím. Posloupnost $\{x_n\}$ v metrickém prostoru X nazveme **cauchyovskou posloupností**, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo n_ε takové, že pro všechna $n, m > n_\varepsilon$ platí $\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Jak již bylo řečeno, každá konvergentní posloupnost je cauchyovská. Metrický prostor, v němž platí i obrácené tvrzení, se nazývá **úplným metrickým prostorem.**

2.2.1 Příklad: Úplnost většiny normovaných prostorů, které jsme zavedli v § 1.3, plyne z Bolzanovy-Cauchyovy podmínky známé z úvodního kursu analýzy (viz např. [Die], § 3.14), jež vyjadřuje úplnost prostoru $\mathbb{R}$. Tak se např. přímo ověří *úplnost prostorů* $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^n$ s normou $\|.\|_2$; z lemmatu 2.1.9 potom vyplývá úplnost i vzhledem k normám $\|.\|_\infty$ a $\|.\|_p$, $p \geqq 1$. Pro důkaz úplnosti prostorů zavedených v příkladu 1.3.4 si stačí uvědomit, že konvergence vzhledem k normě $\|.\|_\infty$ znamená stejnoměrnou konvergenci, a užít toho, že limitní funkce stejnoměrně konvergentní posloupnosti spojitých funkcí je spojitá. Ověření *úplnosti prostorů* l^p, $p \geqq 1$, a prostoru $L^\infty(M, d\mu)$ přenecháváme čtenáři (cvičení 12).

2.2.2 Příklad: *Úplnost prostorů $L^p(M, d\mu)$, $p \geqq 1$, pro σ-konečné míry.* Uvažujme nejprve případ $\mu(M) < \infty$. Z Hölderovy nerovnosti plyne $L^p \subset L^1$, takže posloupnost $\{f_n\}$, která je cauchyovská vzhledem k normě $\|.\|_p$, je cauchyovská i vzhledem k $\|.\|_1$. Ke každému $\varepsilon > 0$ tedy existuje přirozené $N(\varepsilon)$ takové, že

$$n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon\,. \tag{1}$$

Sestrojíme vybranou posloupnost $g_n := f_{k_n}$ tak, že položíme $k_1 := N(2^{-1})$, $k_{n+1} := \max(k_n + 1, N(2^{-n-1}))$. Ze vztahu (1) máme $\|g_{n+1} - g_n\|_1 < 2^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Pro neklesající posloupnost měřitelných funkcí

$$\varphi_n := |g_1| + \sum_{l=1}^{n-1} |g_{l+1} - g_l|$$

tak získáváme odhad

$$\int_M \varphi_n \, d\mu \leqq \|g_1\|_1 + \sum_{l=1}^{n-1} 2^{-l} < 1 + \|g_1\|_1\,.$$

Na tuto posloupnost lze tudíž aplikovat Léviho větu (viz § A.6), z níž plyne, že pro s.v. $x \in M$ existuje konečná $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$. Jelikož

$$|g_{n+p} - g_n| = \left|\sum_{k=1}^{p} (g_{n+k} - g_{n+k-1})\right| \leqq \varphi_{n+p} - \varphi_n\,,$$

existuje také funkce f, která je skoro všude v M konečná a splňuje

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,. \tag{2}$$

Posloupnost $\{g_n\}$ je vybrána z cauchyovské posloupnosti $\{f_n\}$, a proto je rovněž cauchyovská: $\|g_n - g_m\|_p < \varepsilon$ pro všechna $n, m > N(\varepsilon)$. Ze vztahu (2) dostáváme $|g_n(x) - g_m(x)|^p \underset{m\to\infty}{\to} |g_n(x) - f(x)|^p$ pro s.v. $x \in M$ a Fatouova věta potom dává nerovnost $\|g_n - f\|_p \leqq \varepsilon$ pro všechna $n > N(\varepsilon)$. Odtud především vyplývá $f \in L^p$ a dále $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$ (cvičení 13). Jako důležitý vedlejší výsledek jsme dostali následující tvrzení: *Jestliže pro posloupnost $\{f_n\} \subset L^p(M, d\mu)$ platí $\|f_n - f\|_p \to 0$, potom existuje vybraná posloupnost $\{f_{k_n}\}$ taková, že $f_{k_n}(x) \to f(x)$ pro s. v. $x \in M$* (viz též komentář).

V případě, že $\mu(M) = \infty$, existuje podle předpokladu σ-konečnosti míry μ disjunktní systém $\{M_j \in \mathscr{A}: j = 1, 2, \ldots\}$ takový, že $\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j = M$, přičemž $\mu(M_j) < \infty$, $j = 1, 2, \ldots$. Ze σ-aditivity integrálu a již dokázané úplnosti prostorů $L^p(M_j, d\mu)$ plyne existence funkcí $f^{(j)} \in L^p(M_j, d\mu)$ splňujících

$$\|f_n^{(j)} - f^{(j)}\|_p \underset{n\to\infty}{\to} 0 .$$

Dále se postupuje analogicky jako při důkazu úplnosti prostoru l^p (cvičení 12 a 14).

Úplnost je jednou ze základních „netopologických" charakteristik metrického prostoru – pojem cauchyovské posloupnosti zřejmě nelze zavést pomocí okolí. Úplnost se proto nemusí zachovávat při homeomorfismech: např. metrické prostory $\mathbb{R}$, $(-\pi/2, \pi/2)$ s metrikou $\varrho(x, y) := |x - y|$ jsou homeomorfní, ale úplný je jen první z nich.

Často se setkáváme se situací, kdy úplnost daného metrického prostoru je z nějakého důvodu obtížné ověřit, případně je známo, že prostor úplný není; v následujících kapitolách poznáme řadu konkrétních případů. Vzhledem k významu úplnosti, o němž se dále nejednou přesvědčíme, vzniká otázka, zda je možné daný neúplný metrický prostor X nějak „zúplnit", tj. vnořit do úplného prostoru X', a to tak, aby X' byl minimálním úplným prostorem obsahujícím X. Příslušná definice zní takto: úplný metrický prostor (X', ϱ') je **úplným obalem** metrického prostoru (X, ϱ), jestliže (i) $X \subset X'$ a $\varrho(x, y) = \varrho'(x, y)$ pro všechna $x, y \in X$, (ii) množina X je všude hustá v X' (tento požadavek zaručuje minimálnost – srov. cvičení 15).

2.2.3 Věta: Každý metrický prostor (X, ϱ) má úplný obal (X', ϱ'). Je-li $(\tilde{X}, \tilde{\varrho})$ jiný úplný obal prostoru (X, ϱ), existuje izometrie $f\colon X' \to \tilde{X}$ taková, že $f(x) = x$ pro všechna $x \in X$.

Důkaz pouze naznačíme. Nejprve se ukáže, v podstatě přímo z definice, tvrzení o jednoznačnosti. Existence úplného obalu se potom dokazuje konstruktivně postupem, který je zobecněním Cantorovy konstrukce reálných čísel a nazývá se **standardní zúplňovací procedurou**. Vychází se z množiny všech cauchyovských posloupností v prostoru (X, ϱ). Tato množina se faktorizuje pomocí relace ekvivalence: $\{x_j\} \sim \{y_j\}$, jestliže $\lim_{j\to\infty} \varrho(x_j, y_j) = 0$. Množinu tříd ekvivalence označíme X^*, pro libovolné její dva prvky $[x]$, $[y]$ definujeme $\varrho^*([x], [y]) := \lim_{j\to\infty} \varrho(x_j, y_j)$, kde $\{x_j\} \in [x]$, $\{y_j\} \in [y]$, a ověříme korektnost definice, tj. nezávislost ϱ^* na výběru posloupností $\{x_j\}$, $\{y_j\}$ z uvažovaných tříd. Nakonec se zjistí, že zobrazení ϱ^* splňuje axiomy metriky a že metrický prostor (X^*, ϱ^*) vyhovuje oběma podmínkám definice úplného obalu prostoru (X, ϱ). ■

Na závěr uvedeme dvě vlastnosti úplných metrických prostorů, které budeme potřebovat v další kapitole.

2.2.4 Věta (o vnořených koulích): Metrický prostor X je úplný právě tehdy, když pro každou posloupnost uzavřených koulí $S_n \equiv S_{\varepsilon_n}(x_n)$ vyhovující pro

 $n = 1, 2, \ldots$ podmínkám $S_{n+1} \subset S_n$ a $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, platí $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \neq \emptyset$.

Důkaz je snadný – viz cvičení 16.

2.2.5 Důsledek (Baireova věta): Jestliže metrický prostor X je úplný a $\{M_n$: $n = 1, 2, \ldots\}$ je libovolný spočetný systém jeho všude řídkých podmnožin, potom $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \neq X$.

Důkaz: Existuje $x_1 \in X$, které nepatří do $\overline{M_1}$; potom pro jisté $U_1 \equiv U_{\eta_1}(x_1)$ platí $U_1 \cap M_1 = \emptyset$. Položíme-li $\varepsilon_1 := \eta_1/2$, $S_1 := S_{\varepsilon_1}(x_1)$, máme $S_1 \cap M_1 = \emptyset$. Nechť $V_1 := U_{\varepsilon_1}(x_1)$; podle předpokladu M_2 není hustá ve V_1, takže existuje bod $x_2 \in V_1 \setminus \overline{M_2}$ a jisté okolí $U_2 = U_{\eta_2}(x_2)$ takové, že $U_2 \subset V_1$; $U_2 \cap M_2 = \emptyset$. Položíme $\varepsilon_2 := \min(\eta_2/2, \varepsilon_1/2)$, $S_2 := S_{\varepsilon_2}(x_2)$; potom $S_2 \subset V_1 \subset S_1$, $S_2 \cap M_2 = \emptyset$. Tímto postupem získáme posloupnost $\{S_n\}$ vnořených koulí, jejichž poloměry konvergují k nule, a platí $S_n \cap M_n = \emptyset$, $n = 1, 2, \ldots$. Podle předchozí věty existuje $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ a tento bod nepatří do žádné z množin M_n. ■

2.3 OBECNÉ VLASTNOSTI TOPOLOGICKÝCH PROSTORŮ

Topologické prostory představují zobecnění prostorů metrických, k němuž dospíváme axiomatizací některých jejich vlastností. Budeme postupovat obvyklým způsobem, který spočívá v axiomatizaci vlastností otevřených množin vyjádřených větou 2.1.1.

Nechť je dána množina X a systém τ jejích podmnožin splňujících následující podmínky (**axiomy topologie**):

(t1) $X \in \tau, \emptyset \in \tau$,

(t2) jestliže I je libovolná indexová množina a $G_\alpha \in \tau$ pro všechna $\alpha \in I$, potom $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \in \tau$,

(t3) pro každý konečný podsystém $\{G_1, \ldots, G_n\} \subset \tau$ platí $\bigcap_{j=1}^{n} G_j \in \tau$.

Systém τ nazýváme **topologií**, jeho prvky **otevřenými množinami** a množinu X, na níž je zavedena topologie, **topologickým prostorem**, který budeme podle potřeby značit též (X, τ). Symbol 2^X bude znamenat systém všech podmnožin v X (viz příklad A.1.3), takže vždy $\tau \subset 2^X$.

Definitoricky je tedy topologií systém všech otevřených množin v každém metrickém prostoru (X, ϱ). Mluvíme o *topologii τ_ϱ indukované metrikou*, v případě normovaného prostoru o *topologii indukované normou*, pro niž se také užívá označení *silná topologie*. Každý metrický prostor (X, ϱ) je tedy automaticky topologickým prostorem (X, τ_ϱ). Opačné tvrzení neplatí; nalezení podmínek **metrizovatelnosti**, tj. podmínek, jimž musí vyhovovat daný topologický prostor

(X, τ), aby existovala metrika ϱ na X taková, že $\tau = \tau_\varrho$, je komplikovaná úloha (viz např. [[Al]], dodatek ke kap. VI).

Podobně jako v případě metrických prostorů lze na dané množině X definovat různé topologie. Dva extrémní případy představují *diskrétní topologie* $\tau_d := 2^X$ a *triviální topologie* $\tau_0 := \{\emptyset, X\}$, které lze zavést na každé množině X. V prostoru (X, τ_d) je každá množina otevřená a je vidět, že tento prostor je metrizovatelný, přičemž $\tau_d = \tau_{\varrho_d}$, kde ϱ_d je diskrétní metrika. Prostor (X, τ_0) metrizovatelný není (cvičení 17) s výjimkou případu, kdy množina X je jednobodová.

V topologických prostorech má vedle topologie základní důležitost pojem okolí. **Okolím** daného bodu x (dané množiny M) nazveme každou otevřenou množinu G takovou, že $x \in G$ ($M \subset G$). Budeme užívat označení $U(x)$, resp. $U(M)$. Pojmy, které jsme pro metrický prostor zavedli v § 2.1, se přenášejí beze změny do topologického prostoru s tím, že okolí bodu chápeme ve smyslu právě uvedené definice, tj. všude zaměníme množiny $U_\varepsilon(x)$ množinami $U(x) \in \tau$. V souvislosti s tím zůstávají pro topologický prostor v platnosti i některé jednoduché vztahy a věty z § 2.1. Jsou to:

(i) vlastnosti uzávěru vyjádřené vztahy (2.1.2–4),
(ii) vlastnosti uzavřených množin – věta 2.1.2,
(iii) tvrzení 2.1.4 o vztahu mezi lokální a globální spojitostí,
(iv) tvrzení 2.1.7 o topologické ekvivalenci homeomorfních prostorů.

Naproti tomu obecný topologický prostor nemá řadu jiných, stejně elementárních vlastností metrického prostoru.

2.3.1 Příklad: Na množině $X \equiv [0, 1]$ uvažujme topologie τ_{fin} a τ_{count}: kromě X a prázdné množiny do nich patří právě všechny doplňky konečných, resp. spočetných množin intervalu $[0, 1]$. Axiomy snadno ověříme pomocí věty 2.1.2. Vyšetříme konvergenci posloupností v těchto topologických prostorech. Nechť $\{x_n\} \subset X$ je prostá posloupnost, tj. $x_n \neq x_{n'}$ pro $n \neq n'$; potom pro každé $x \in X$ platí $x_n \xrightarrow{\tau_{\text{fin}}} x$, neboť libovolné okolí $U(x)$ nutně obsahuje všechny členy posloupnosti až na konečný počet. V prostoru (X, τ_{fin}) tedy *neplatí tvrzení o jednoznačnosti limity*. V prostoru (X, τ_{count}) toto tvrzení sice platí, zato konvergentních posloupností je extrémně málo: jsou to jen takové posloupnosti, pro něž $x_n = x_{n_0}$ pro všechna $n \geqq n_0$. Lokální spojitost v prostoru (X, τ_{count}) se proto nedá charakterizovat pomocí posloupností (srov. s cvičením 7). Stejnou příčinu má i neplatnost tvrzení 2.1.3; např. pro množinu $M \equiv (0, 1)$ je bod $x = 0$ bodem uzávěru, avšak neexistuje posloupnost $\{x_n\} \subset M$ taková, že $x_n \to 0$.

Tento příklad rovněž ilustruje skutečnost, že dvě různé topologie mohou vytvářet ze stejné množiny topologické prostory s odlišnými vlastnostmi. Přitom vlastnosti takové dvojice topologických prostorů má smysl porovnávat pouze v případě, kdy mezi uvažovanými topologiemi platí nějaká inkluze. Jestliže topologie τ_1, τ_2 na množině X splňují podmínku $\tau_1 \subset \tau_2$, říkáme, že *topologie* τ_1 *je slabší* (*hrubší*) *než*

τ_2, případně τ_2 *je silnější* (*jemnější*) *než* τ_1. V příkladu 1 je tedy topologie τ_{fin} slabší než τ_{count}. V systému všech topologií, které je možno zadat na dané množině X, je tak přirozeně definováno částečné uspořádání, přičemž maximálním (minimálním) prvkem je diskrétní topologie (topologie τ_0).

Uvedeme několik jednoduchých důsledků, které pro topologické prostory (X, τ_1), (X, τ_2) plynou z podmínky $\tau_1 \subset \tau_2$.

2.3.2 Tvrzení: (a) Je-li x bodem uzávěru množiny M vzhledem k τ_2, je jejím bodem uzávěru i vzhledem k τ_1, tj. $\overline{(M)}_{\tau_2} \subset \overline{(M)}_{\tau_1}$; speciálně posloupnost $\{x_n\} \subset X$, která konverguje vzhledem k τ_2, konverguje i vzhledem k τ_1.
(b) Je-li (Y, τ) další topologický prostor, potom zobrazení f: $Y \to X$ spojité vzhledem k τ_2 je spojité i vůči τ_1. Je-li zobrazení g: $X \to Y$ spojité vůči τ_1, je spojité i v topologii τ_2.

2.3.3 Poznámka: Tvrzení 2b tedy říká, že spojitost zobrazení f: $X \to Y$ zůstane zachována, jestliže zeslabujeme topologii v Y nebo zesilujeme topologii v X. V ostatních případech se spojitost zachovávat nemusí. S takovou situací se setkáme např. ve cvičení 5.10, kde při vyšetřování spojitosti daného zobrazení f: $X \to X$ vůči třem různým topologiím $\tau_1 \subset \tau_2 \subset \tau_3$ zjistíme, že f není spojité jako zobrazení z (X, τ_2) do (X, τ_2), avšak je spojité vůči topologiím τ_1 a τ_3.

2.3.4 Příklad: Popíšeme jeden způsob, jímž se často zadávají konkrétní topologie (viz např. cvičení 25). Nechť je dána množina X a soubor $\mathscr{F}$ zobrazení z X do topologického prostoru $(\tilde{X}, \tilde{\tau})$. Chceme zadat na X topologii τ, v níž by každé zobrazení $f \in \mathscr{F}$ bylo spojité; z tvrzení 2b je zřejmé, že je zajímavá nejslabší topologie s touto vlastností, pro niž se užívá názvu **$\mathscr{F}$-slabá topologie**. Její existence plyne z výsledků cvičení 21, přičemž systém $\mathscr{S}$ je tvořen všemi množinami $f^{(-1)}(G)$ pro $G \subset \tilde{\tau}$, $f \in \mathscr{F}$. Popsaný postup se bez potíží zobecní na případ, kdy $\mathscr{F}$ je soubor zobrazení do různých topologických prostorů.

K základním pojmům, s nimiž se v topologických prostorech pracuje, patří dále pojmy podprostoru, báze a lokální báze. Uvažujme libovolnou množinu M v daném topologickém prostoru (X, τ). Na množině M lze zadat tzv. *relativní* (*indukovanou*) *topologii* τ_M, do níž patří právě všechny množiny tvaru $M \cap G$, $G \subset \tau$. Topologický prostor (M, τ_M) se nazývá **podprostorem** výchozího prostoru (X, τ).

Zbývající dva pojmy vznikly axiomatizací vlastností systému otevřených koulí v metrickém prostoru, kde každá otevřená množina je sjednocením prvků tohoto systému. Podobně pro daný bod x metrického prostoru je systém $\{U_\varepsilon(x): \varepsilon > 0\}$ význačný tím, že každá otevřená množina obsahující bod x obsahuje nějakou kouli $U_\varepsilon(x)$. Topologická struktura metrického prostoru se tím značně zjednodušuje. Je proto účelné zavést v obecném topologickém prostoru následující pojmy. Systém $\mathscr{B} \subset \tau$ nazveme **bází topologického prostoru** (X, τ), jestliže každou neprázdnou otevřenou množinu lze vyjádřit ve tvaru sjednocení prvků systému $\mathscr{B}$. Systém $\mathscr{B}_x$

okolí daného bodu x nazveme **lokální bází v bodě** x (řídicím systémem okolí bodu x), jestliže každé okolí $U(x)$ obsahuje nějaké $B \in \mathscr{B}_x$.

Tyto dva pojmy spolu úzce souvisí: jestliže $\mathscr{B}$ je báze, potom pro každé $x \in X$ tvoří všechna $U(x) \in \mathscr{B}$ řídicí systém okolí tohoto bodu a naopak systém $\mathscr{B}$ s touto vlastností je zřejmě bází.

Daný topologický prostor (X, τ) může mít více bází. Triviálním případem báze i lokální báze je samotný systém; zajímavé jsou pochopitelně případy, kdy bázi tvoří jen „malá" část systému τ – viz následující paragraf.

Lokálních bází lze využít k porovnávání topologií.

2.3.5 Tvrzení: Na množině X mějme topologie τ, τ' a nechť systémy $\mathscr{B}_x$, $\mathscr{B}'_x$ jsou pro každé $x \in X$ lokálními bázemi těchto topologií. Potom $\tau \subset \tau'$ právě tehdy, když ke každé množině $B(x) \in \mathscr{B}_x$ existuje $B'(x) \in \mathscr{B}'_x$ tak, že $B'(x) \subset B(x)$.

Důkaz: Každou množinu $G \in \tau$ lze zapsat ve tvaru $G = \bigcup_{x \in G} B(x)$, $B(x) \in \mathscr{B}_x$, a z podmínky $B'(x) \subset B(x)$ vyplývá $G = \bigcup_{x \in G} B'(x) \in \tau'$. Podobně i opačná implikace se dostane přímo z příslušných definic. ■

Konkrétní topologie na množině X je možno konstruovat prostřednictvím nějakého (libovolného) systému množin $\mathscr{S} \subset 2^X$. K danému $\mathscr{S}$ totiž existuje právě jedna **minimální topologie** $\tau(\mathscr{S})$, která systém $\mathscr{S}$ obsahuje (cvičení 20–22). Je-li navíc $\bigcup_{B \in \mathscr{S}} B = X$ a pro libovolné množiny $B, C \in \mathscr{S}$ platí $B \cap C \in \mathscr{S}$, je $\mathscr{S}$ bází topologie $\tau(\mathscr{S})$. Podobná je následující konstrukce, která má důležité aplikace (viz § 6): pro každé $x \in X$ je dán systém $\mathscr{B}_x \subset 2^X$ a hledáme topologii τ na X takovou, aby $\mathscr{B}_x$ byl lokální bází v bodě x. Tato úloha nemá vždy řešení; aby jej měla, musí systémy $\mathscr{B}_x$ splňovat jisté předpoklady.

2.3.6 Věta: Předpokládejme, že každému bodu x množiny X je přiřazen neprázdný systém $\mathscr{B}_x \subset 2^X$ splňující podmínky

(i) $x \in B$ pro všechna $B \in \mathscr{B}_x$,

(ii) ke každé dvojici $C, D \in \mathscr{B}_x$ lze najít množinu $B \in \mathscr{B}_x$, pro niž $B \subset C \cap D$,

(iii) jestliže $B \in \mathscr{B}_x$, $y \in B$, potom existuje $C \in \mathscr{B}_y$ tak, že $C \subset B$.

Potom pro každé $x \in X$ je systém $\mathscr{B}_x$ lokální bází topologie $\tau(\mathscr{B})$, $\mathscr{B} := \bigcup_{x \in X} \mathscr{B}_x$, přičemž systém $\mathscr{B}$ je bází této topologie.

Důkaz: Ověříme, že $\mathscr{B}$ je bází topologie $\tau(\mathscr{B})$. Jelikož $X = \bigcup_{x \in X} B_x$, $B_x \in \mathscr{B}_x$, stačí ukázat, že pro libovolné množiny $B, C \in \mathscr{B}$ a každé $z \in B \cap C$ existuje $D \in \mathscr{B}_z$ takové, že $D \subset B \cap C$ – viz cvičení 23. Podle definice $\mathscr{B}$ je možno najít body $x, y \in X$ takové, že $B \in \mathscr{B}_x$, $C \in \mathscr{B}_y$. Nechť $z \in B \cap C$; z podmínky (iii) plyne existence množin $D, D' \in \mathscr{B}_z$, pro něž $D \subset B$, $D' \subset C$ a z (ii) existence $D(z) \in \mathscr{B}_z$, $D(z) \subset D \cap D' \subset B \cap C$. K ověření toho, že $\mathscr{B}_x$ je lokální bazí topologie $\tau(\mathscr{B})$, stačí uvážit, že k libovolnému okolí $U(x) \in \tau(\mathscr{B})$ existuje $y \in X$ a množina $B \in \mathscr{B}_y$ taková, že $x \in B$, $B \subset U(x)$, a užít podmínky (iii). ■

2.3.7 Poznámka: Bez obtíží se přesvědčíme o tom, že větu lze obrátit: jestliže τ je topologie na X a $\mathscr{B}_x$ její lokální báze v každém bodě $x \in X$, potom jsou splněny podmínky (i)–(iii) a systém $\mathscr{B}$ je bází topologie τ.

2.3.8. Příklad: Nechť (X, τ_X), (Y, τ_Y) jsou dané topologické prostory. Na kartézském součinu $X \times Y$ se standardně zadává topologie $\tau_{X \times Y}$ určená pouze topologiemi τ_X, τ_Y jako minimální topologie, obsahující všechny množiny $G_X \times G_Y$, kde $G_X \in \tau_X$, $G_Y \in \tau_Y$, tj.

$$\tau_{X \times Y} := \tau(\tau_X \times \tau_Y)\,.$$

Vzhledem k tomu, že pro libovolné množiny $A, B \subset X$, $C, D \subset Y$ platí $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$, je bází topologie $\tau_{X \times Y}$ přímo systém $\tau_X \times \tau_Y$. Lokální bázi v bodě $[x, y]$ tvoří množiny $U(x) \times V(y)$, kde $U(x) \in \tau_X$, $V(y) \in \tau_Y$ jsou libovolná okolí bodů x, y.

Topologický prostor $(X \times Y, \tau_{X \times Y})$ se nazývá **topologickým součinem** prostorů (X, τ_X), (Y, τ_Y). Popsaný způsob lze bez potíží zobecnit pro případ jakéholi konečného počtu topologických prostorů. O dalších zobecněních pojednává např. ⟦Nai 1⟧, § I.2.12.

2.4 AXIOMY SPOČETNOSTI A ODDĚLITELNOSTI

V obecném topologickém prostoru ztrácí řada pojmů převzatých z metrických prostorů svůj původní význam. To se týká např. konvergence posloupnosti – viz příklad 2.3.1. Příčinou je přílišná obecnost topologického prostoru. Proto se zavádějí speciální třídy topologických prostorů tak, že k základním axiomům topologie se přidávají některé požadavky další, které většinou opět axiomatizují jisté vlastnosti metrických prostorů.

Probereme nejprve tzv. axiomy spočetnosti, které se vztahují k pojmu báze a lokální báze. Vlastnost (iii) okolí metrických prostorů uvedená v § 2.1 znamená, že metrický prostor má *v každém svém bodě spočetnou lokální bázi.* O topologických prostorech, které mají tuto vlastnost, říkáme, že vyhovují **prvnímu axiomu spočetnosti**. Topologický prostor splňuje **druhý axiom spočetnosti**, jestliže v něm existuje *spočetná báze.* Místo výrazu „prostor vyhovující druhému axiomu spočetnosti" se stručněji říká prostor se spočetnou bází.

Je zřejmé, že každý prostor se spočetnou bází splňuje první axiom spočetnosti. Obrácené tvrzení neplatí: z následující věty plyne, že každý neseparabilní metrický prostor (viz cvičení 6) vyhovuje prvnímu, ale nikoli druhému axiomu spočetnosti.

2.4.1 Věta: Topologický prostor se spočetnou bází je separabilní.
Důkaz: Nechť $\mathscr{B} = \{G_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$ je báze v (X, τ). Z každé množiny G_n vybereme bod x_n; vzniklá spočetná množina $M := \{x_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$ zřejmě splňuje vztah $X \setminus \overline{M} = \emptyset$, a je proto všude hustá v X. ■

2.4.2 Poznámka: Pro metrické prostory je existence spočetné báze nutnou a postačující podmínkou separability – cvičení 26. Existují však separabilní topologické prostory, které nemají spočetnou bázi, a nevyhovují dokonce ani prvnímu axiomu spočetnosti (cvičení 27).

Uvažujme prostor (X, τ) splňující první axiom spočetnosti; jestliže $\{U_n(x) \in \tau: n = 1, 2, \ldots\}$ je spočetný řídicí systém okolí bodu x, potom systém $\{V_n(x) \in \tau: n = 1, 2, \ldots\}$ definovaný rekurentně vztahy $V_1 := U_1$, $V_{n+1} := V_n \cap U_{n+1}$, je rovněž lokální bází v bodě x, přičemž platí

$$V_{n+1} \subset V_n\,, \qquad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{1}$$

Můžeme tedy bez újmy obecnosti předpokládat, že tyto podmínky jsou splněny pro spočetnou lokální bázi $\mathscr{B}_x$ v každém bodě uvažovaného prostoru. V důsledku toho dochází v prostorech s prvním axiomem spočetnosti k částečné rehabilitaci pojmu konvergence posloupnosti. Vezměme např. bod uzávěru dané množiny M, $x \in \overline{M}$; z každého okolí $V_n \in \mathscr{B}_x$ vybereme bod $x_n \in V_n \cap M$, čímž dostaneme posloupnost $\{x_n\} \subset M$. K libovolnému okolí $U(x)$ najdeme $V_{n(U)} \in \mathscr{B}_x$, $V_{n(U)} \subset U(x)$; potom z inkluze (1) plyne $n \geqq n(U) \Rightarrow x_n \in U(x)$, tj. $x_n \to x$. Analogickým postupem se pro zobrazení f: $(X, \tau) \to (X', \tau')$, které není spojité v bodě $x \in X$, sestrojí posloupnost $x_n \to x$ taková, že posloupnost $f(x_n)$ nekonverguje k $f(x)$ (přitom prostor (X', τ') je zcela obecný, platnost prvního axiomu spočetnosti předpokládáme pouze v prostoru (X, τ)). Dospíváme tak k tomuto závěru:

2.4.3 Tvrzení: V prostorech splňujících první axiom spočetnosti je možno charakterizovat body uzávěru a lokální spojitost zobrazení pomocí posloupností stejně jako v metrickém prostoru.

Pro úplnou rehabilitaci konvergence by bylo třeba zajistit jednoznačnost limity, což však z axiomů spočetnosti nevyplývá; jednoznačnost limity souvisí s tím, do jaké míry daná topologie „odděluje body" – srov. vlastnost (i) v § 2.1. Třídy topologických prostorů, které se liší svými vlastnostmi oddělitelnosti, se zavádějí pomocí **oddělovacích axiomů**. Topologický prostor (X, τ) splňuje axiom:

T_1, jestliže ke každé dvojici bodů $x, y \in X$, $x \neq y$, existuje okolí $U(x)$ takové, že $y \notin U(x)$,

T_2, jestliže ke každé dvojici bodů $x, y \in X$, $x \neq y$, existují disjunktní okolí $U(x)$ a $U(y)$,

T_3, jestliže ke každému x a uzavřené množině F, $x \notin F$, existují disjunktní okolí $U(x)$ a $U(F)$,

T_4, jestliže ke každé dvojici disjunktních uzavřených množin F, F' existují disjunktní okolí $U(F)$ a $U(F')$.

Prostor, v němž jsou splněny axiomy T_1 a T_j, $j = 1, \ldots, 4$, nazveme T_j-**prostorem**. Význam jednotlivých axiomů a hierarchii T_j-prostorů nyní stručně probereme.

V T_1-prostoru je uzavřená každá jednobodová (a tedy i každá konečná) množina, což je zjevně výrok ekvivalentní axiomu T_1. Tento axiom splňují např. topologie τ_{fin} a τ_{count} z příkladu 2.3.1 – to je vidět přímo z jejich definice.

T_2-prostorům se též říká **Hausdorffovy prostory**. Axiom T_2 je zesílením T_1, takže v definici Hausdorffova prostoru stačí požadovat pouze splnění axiomu T_2. Jako příklad T_1-prostorů, které nejsou Hausdorffovy, je možno opět uvést prostory s topologiemi τ_{fin}, τ_{count}, v nichž průnik libovolných dvou otevřených množin je neprázdný. Důležitou vlastností T_2-prostorů je jednoznačnost limitního přechodu.

2.4.4 Věta: V Hausdorffově prostoru má každá posloupnost nejvýše jednu limitu. *Důkaz* se snadno provede sporem. Poznamenejme, že větu lze obrátit, uvažujeme-li místo posloupnosti tzv. usměrněný soubor – viz komentář k § 2.3.

Pro T_3-prostory se užívá též názvu **regulární prostory**. Vzhledem k tomu, že T_3-prostor splňuje definitoricky axiom T_1, je každá jednobodová množina uzavřená, a proto každý regulární prostor je Hausdorffův; opačné tvrzení neplatí (cvičení 33).

T_4-prostory, jimž se říká též **normální prostory**, stojí v hierarchii určené oddělovacími axiomy nejvýše. Přitom je opět podstatné, že normální prostor vyhovuje vedle axiomu T_4 též axiomu T_1. Dají se zkonstruovat příklady regulárních prostorů, které nejsou normální.

Na závěr tohoto paragrafu vyjasníme, které oddělovací axiomy splňuje obecný metrický prostor. Vlastnost (i) z § 2.1 znamená, že je Hausdorffův – platí však silnější tvrzení.

2.4.5 Věta: Každý metrický prostor je normální.
Důkaz lze najít např. v ⟦Al⟧, § VI.5; čtenář však větu snadno dokáže sám.

2.5 KOMPAKTNOST

V úvodním kursu analýzy se probírá Heineho-Borelova věta, která říká, že z každého systému otevřených intervalů pokrývajících omezenou uzavřenou množinu $F \subset \mathbb{R}$ je možno vybrat konečný podsystém, který rovněž pokrývá množinu F. Odtud plyne řada závažných důsledků, např. úplnost prostoru $\mathbb{R}$, řada vlastností funkcí spojitých na uzavřeném intervalu apod. Pojem kompaktnosti v topologických prostorech vznikl axiomatizací tvrzení této věty.

Nechť X je topologický prostor a $M \subset X$. Systém $\mathscr{P} \equiv \{M_\alpha\colon \alpha \in I\} \subset 2^X$ nazveme **pokrytím** množiny M, jestliže $M \subset \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha$. Podle mohutnosti indexové množiny I mluvíme o pokrytí konečném, spočetném nebo nespočetném. Jestliže $\mathscr{P} \subset \tau$, říkáme, že *pokrytí $\mathscr{P}$ je otevřené.* Množina M je **kompaktní**, jestliže z každého jejího otevřeného pokrytí lze vybrat *konečný* podsystém, který ji rovněž pokrývá. Má-li tuto vlastnost sama množina X, říkáme, že *topologický prostor X je* *kompaktní.* Není těžké ověřit, že kompaktnost množiny M je ekvivalentní kompaktnosti topologického prostoru (M, τ_M), kde τ_M je relativní topologie; dá se tedy vystačit s pojmem kompaktního prostoru, což je výhodné při formulaci některých vět.

2.5.1 Tvrzení: Každá nekonečná množina v kompaktním prostoru X má alespoň jeden hromadný bod.
Důkaz: Stačí zřejmě uvažovat spočetné množiny. Předpokládejme, že $M = \{x_n\colon n = 1, 2, \dots\}$ nemá hromadné body. Totéž se potom týká množin $M_N := \{x_n\colon n \leqq N\}$, které jsou proto uzavřené; jejich doplňky tvoří otevřené pokrytí prostoru X, z nějž nelze vybrat konečné podpokrytí. ■

2.5.2 Poznámka: O topologickém prostoru X se říká, že je **spočetně kompaktní**, jestliže z každého *spočetného* otevřeného pokrytí množiny X lze vybrat konečné pokrytí. Každý kompaktní prostor je tedy automaticky spočetně kompaktní – obrácené tvrzení neplatí (viz [[KF]], kap. II, § 6.4). Pro některé třídy topologických prostorů jsou pojmy kompaktnosti a spočetné kompaktnosti totožné: týká se to prostorů se spočetnou bází a metrických prostorů (viz cvičení 38 a důsledek 8).

2.5.3 Věta: (a) Každá uzavřená množina F v kompaktním topologickém prostoru X je kompaktní.
(b) Jestliže prostor (X, τ) je kompaktní a $f\colon (X, \tau) \to (X', \tau')$ je spojité zobrazení, potom množina $f(X)$ je kompaktní v (X', τ').
Důkaz: (a) Libovolné otevřené pokrytí $\{G_\alpha\}$ množiny F doplníme množinou $G := X \setminus F$ na otevřené pokrytí prostoru X. Každé konečné podpokrytí $\{G_j\colon j = 1, \dots, n\}$ prostoru X musí obsahovat G, např. $G = G_1$; potom systém $\{G_j\colon j = 2, \dots, \}$ pokrývá množinu F. Tvrzení (b) se ověří přímo z příslušných definic. ■

Mezi kompaktními prostory, v nichž je splněn některý z oddělovacích axiomů, zaujímají význačné místo Hausdorffovy kompaktní prostory – někdy se pro ně užívá označení *kompakt.* Především se ukazuje, že kompaktnost v kombinaci s axiomem T_2 implikuje platnost axiomů T_3 a T_4.

2.5.4 Věta: Kompaktní Hausdorffův prostor je normální.
Důkaz: Nechť F, R jsou disjunktní uzavřené množiny, $y \in R$. Ke každému $x \in F$ existují disjunktní okolí $U_y(x)$, $U_x(y)$. Systém $\{U_y(x)\colon x \in F\}$ tvoří otevřené pokrytí množiny F, která je podle předchozí věty kompaktní; existuje tedy konečný podsystém $\{U_y(x_j)\colon j = 1, \dots, n\}$ takový, že $U_y(F) := \bigcup_{j=1}^{n} U_y(x_j)$ je okolím množiny F. Dále $U(y) := \bigcap_{j=1}^{n} U_{x_j}(y)$ je okolí bodu y a platí $U(y) \cap U_y(F) = \emptyset$. To můžeme udělat pro každý bod $y \in R$, čímž dostaneme otevřené pokrytí $\{U(y)\colon y \in R\}$ množiny R; z něj opět vybereme konečný podsystém $\{U(y_k)\colon k = 1, \dots, m\}$

 takový, že $U(R) := \bigcup_{k=1}^{m} U(y_k)$ je okolím množiny R, které má prázdný průnik s $U(F) := \bigcap_k U_{y_k}(F)$ ■

Tvrzení věty 3 lze v Hausdorffových prostorech zesílit.

2.5.5 Věta: Nechť X je Hausdorffův prostor.
(a) Každá kompaktní množina $F \subset X$ je uzavřená.
(b) Jestliže prostor X je kompaktní, pak každá jeho spojitá bijekce f na Hausdorffův prostor X' je homeomorfismus.
Důkaz: (a) Pro $y \notin F$ má okolí $U(y)$ zkonstruované v důkazu předcházející věty prázdný průnik s F, a proto $y \notin \bar{F}$. K ověření (b) stačí ukázat, že pro každou uzavřenou množinu $F \subset X$ je množina $f(F)$ uzavřená v X'; to ale snadno plyne z (a) a věty 3b. ■

Na závěr této části, pojednávající o kompaktnosti topologických prostorů, zavedeme ještě dva pojmy: množinu M v topologickém prostoru nazveme **prekompaktní** množinou (říká se také relativně kompaktní), jestliže $\bar{M}$ je kompaktní. O topologickém prostoru X řekneme, že je **lokálně kompaktní**, jestliže každý bod $x \in X$ má prekompaktní okolí. Příkladem je reálná osa: pro libovolné $\varepsilon > 0$ je interval $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ prekompaktním okolím bodu x.

Ve druhé části tohoto paragrafu probereme kompaktnost v metrických prostorech. Tam je každá kompaktní množina nutně uzavřená (věta 5) a omezená – v neomezené množině lze vždy najít nekonečnou podmnožinu, která nemá hromadný bod. Tyto podmínky však nejsou postačující: například v normovaném prostoru l^2 je množina $S_1(0) := \{X \in l^2\colon \|X\|^2 \leqq 1\}$ omezená a uzavřená, není však kompaktní. V její nekonečné podmnožině tvořené body $X_j := \{\delta_{jk}\}_{k=1}^{\infty}$, $j = 1, 2, \ldots$, totiž platí $\|X_j - X_k\| = 2^{1/2}$ pro všechna $j \neq k$, takže tato podmnožina nemá žádný hromadný bod.

K tomu, abychom mohli kompaktnost charakterizovat pomocí vzdálenosti, je nutno nahradit omezenost nějakou silnější podmínkou. Nechť M je množina v metrickém prostoru X a $\varepsilon > 0$; množinu N_ε nazveme *ε-sítí pro množinu M*, jestliže ke každému $x \in M$ existuje $y \in N_\varepsilon$ takové, že $\varrho(x, y) \leqq \varepsilon$.[1]) Řekneme, že množina M je **totálně omezená**, když ke každému $\varepsilon > 0$ pro ni existuje *konečná* ε-síť. Je-li totálně omezená samotná množina X, mluvíme o *totálně omezeném metrickém prostoru.*

2.5.6 Poznámka: Množina N_ε nemusí být podmnožinou v M, avšak pomocí N_ε lze sestrojit 2ε-síť množiny M, která leží v M.

Je zřejmé, že každá totálně omezená množina je omezená; příkladem omezené množiny, která není totálně omezená, je každá nekonečná ortonormální množina v pre-Hilbertově prostoru, třeba množina $\{X_j \in l^2\colon X_j := \{\delta_{jk}\}_{k=1}^{\infty},\ j = 1, 2, \ldots\}$.

[1]) Např. v prostoru $\mathbb{R}^2$ je možno za ε-síť zvolit čtvercovou síť s „mřížkovou konstantou“ $\sqrt{2}\varepsilon$.

2.5.7 Tvrzení: (a) Spočetně kompaktní metrický prostor je totálně omezený.
(b) Totálně omezený metrický prostor je separabilní.

Důkaz: (a) Předpokládejme, že pro nějaké $\varepsilon > 0$ neexistuje konečná ε-síť. Pro jakkoli vybrané $x_1 \in X$ musí platit $X \setminus S_\varepsilon(x_1) \neq \emptyset$ – jinak by $\{x_1\}$ byla ε-síť pro X. Existuje tedy $x_2 \in X$ takové, že $\varrho(x_1, x_2) > \varepsilon$. Dále $X \setminus (S_\varepsilon(x_1) \cup S_\varepsilon(x_2)) \neq \emptyset$, a proto je možné najít $x_3 \in X$ splňující $\varrho(x_1, x_3) > \varepsilon$, $\varrho(x_2, x_3) > \varepsilon$. Tímto postupem dostaneme nekonečnou množinu $\{x_j\colon j = 1, 2, \ldots\}$ splňující $\varrho(x_j, x_k) > \varepsilon$ pro všechna $j \neq k$; tato množina nemá hromadné body, a proto prostor (X, ϱ) není spočetně kompaktní.

(b) Jestliže N_n je $1/n$-síť pro X, je $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ spočetná množina, která je všude hustá v X. ■

2.5.8 Důsledek: Pro metrický prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní:
(i) prostor X je kompaktní;
(ii) prostor X je spočetně kompaktní;
(iii) každá nekonečná množina v X má hromadný bod.

Důkaz: Implikace (i) $\Rightarrow$ (ii) je zřejmá, (ii) $\Rightarrow$ (iii) se dokáže stejně jako tvrzení 1, (ii) $\Rightarrow$ (i) plyne z tvrzení 7, cvičení 38 a 26, a konečně (iii) $\Rightarrow$ (ii) z cvičení 37. ■

2.5.9 Věta: Metrický prostor je kompaktní právě tehdy, když je úplný a totálně omezený.

Důkaz: Podle předchozího tvrzení je kompaktní metrický prostor totálně omezený. Je-li $\{x_n\}$ cauchyovská posloupnost, plyne z kompaktnosti existence vybrané posloupnosti $x_{k_n} \to x$; potom také $x_n \to x$ (cvičení 13). Pro ověření opačné implikace stačí ukázat, že každá nekonečná množina $M = \{x_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$ má nějaký hromadný bod. Nechť konečná množina N_1 je 1-síť pro X; musí existovat $y_1 \in N_1$ tak, že uzavřená koule $S_1(y_1)$ obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny M. Koule $S_1(y_1)$ je totálně omezená a lze najít její konečnou $1/2$-síť $N_2 \subset S_1(y_1)$ (viz poznámku 6) a bod $y_2 \in N_2$ takový, že $S_{1/2}(y_2) \cap M$ je nekonečná množina. Tímto postupem získáme posloupnost $S_{\varepsilon_n}(y_n)$ uzavřených koulí o poloměru $\varepsilon_n := 2^{1-n}$, z nichž každá obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny M; dále platí $y_{n+1} \in S_{\varepsilon_n}(y_n)$. Potom uzavřené koule o dvojnásobném poloměru splňují $S_{2\varepsilon_{n+1}}(y_{n+1}) \subset S_{2\varepsilon_n}(y_n)$ a existence hromadného bodu množiny M plyne z věty 2.2.4. ■

2.5.10 Důsledek: (a) Množina M v úplném metrickém prostoru (X, ϱ) je prekompaktní právě tehdy, když je totálně omezená.
(b) Množina M v n-dimenzionálním komplexním nebo reálném normovaném prostoru V je prekompaktní právě tehdy, když je omezená.
(c) Reálná funkce f spojitá na kompaktním topologickém prostoru X je omezená a nabývá maxima a minima.

Důkaz: (a) Stačí uvážit, že metrický prostor (M, ϱ) je úplný (viz cvičení 15).

(b) Z prekompaktnosti snadno plyne omezenost (viz cvičení 39). Vzhledem k (a) bude opačná implikace platit, ukážeme-li že každá omezená množina $M \subset V$ je totálně omezená. Díky ekvivalenci všech norem na V lze bez újmy na obecnosti položit $V = \mathbb{C}^n$; důkaz pak čtenář snadno dokončí sám (viz poznámku pod čarou k definici ε-sítě).

(c) Z tvrzení (b) věty 3 plyne, že $f(X)$ je kompaktní, a tudíž omezená množina v $\mathbb{R}$. Nechť $\alpha := \sup_{x \in X} f(x)$ a nechť pro posloupnost $\{x_n\} \subset X$ platí $f(x_n) \to \alpha$. Vzhledem ke kompaktnosti prostoru X existuje $x_s \in X$ a vybraná posloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, která konverguje k x_s; ze spojitosti potom plyne $f(x_s) = \alpha$. Stejně se najde $x_i \in X$ taková, že $f(x_i) = \inf_{x \in X} f(x)$. ■

2.6 TOPOLOGICKÉ VEKTOROVÉ PROSTORY

V dalších kapitolách budeme pracovat téměř výhradně s topologickými prostory typu (V, τ), kde V je vektorový prostor. Význačným představitelem prostorů tohoto typu jsou prostory normované, v nichž topologie je indukována metrikou $\varrho(x, y) := \|x - y\|$. Tato definice zaručuje spojitost sčítání jakožto zobrazení topologického součinu $V \times V$ do V; podobně je spojitá operace násobení číslem. Mnohdy je však třeba zavést na daném vektorovém prostoru topologii, která není indukována žádnou normou – konkrétně se s takovou situací setkáme již v příští kapitole. Přitom se ukazuje, že nemá smysl uvažovat nejobecnější případ, kdy τ je *jakákoli* topologie na daném V; je rozumné spojit topologii s algebraickou strukturou prostoru V jako v normovaných prostorech, tj. tak, aby operace sčítání a násobení číslem byly spojité.

Mějme (komplexní) vektorový prostor V a topologii τ na V. Topologický prostor (V, τ) nazýváme **topologickým vektorovým prostorem**, jestliže

(tv1) operace sčítání je spojité zobrazení prostoru $(V \times V, \tau_{V \times V})$ do (V, τ),

(tv2) násobení číslem je spojité zobrazení prostoru $(\mathbb{C} \times V, \tau_{\mathbb{C} \times V})$ do (V, τ).

(tv3) je splněn oddělovací axiom T_2, tj. (V, τ) je Hausdorffův prostor.

2.6.1 Poznámky: (a) Analogicky se definuje topologický vektorový prostor nad libovolným tělesem F, speciálně pro $F = \mathbb{R}$ dostáváme reálný topologický vektorový prostor. V této knize však pracujeme pouze s komplexními topologickými vektorovými prostory.

(b) Axiom (tv3) je možno nahradit slabším požadavkem T_1-oddělitelnosti, protože z prvních dvou axiomů plyne splnění oddělovacího axiomu T_3 (cvičení 44).

Pro vyšetřování struktury topologického vektorového prostoru má základní význam množina translací $\{t_x : x \in V\}$, což jsou bijekce $V \to V$ definované vztahem $t_x(y) := x + y$. Budeme užívat označení

$$x + M := t_x(M) = \{y \in V : y = x + z, z \in M\} \tag{1}$$

pro libovolnou množinu $M \subset V$. Vzhledem k tomu, že $t_x^{-1} = t_{-x}$, plyne ze spojitosti sčítání, že *každá translace je homeomorfismus.* Jestliže tedy G je otevřená množina, je množina $x + G$ otevřená pro každé $x \in V$ a totéž se vztahuje na uzavřené množiny. Speciálně platí:

2.6.2 Lemma: Množina U je okolím bodu x právě tehdy, když $U = x + U(0)$, kde $U(0)$ je nějaké okolí nuly.

V § 2.3 jsme popsali, jak je možno pomocí daných systémů $\mathscr{B}_x \subset 2^X$ zkonstruovat topologii τ na X takovou, že pro každé $x \in X$ je systém $\mathscr{B}_x$ její lokální bází. V případě, že množina X je vektorový prostor, platí obdoba věty 2.3.6 za podstatně slabších předpokladů.

2.6.3 Věta: Nechť ve vektorovém prostoru V je dán systém $\mathscr{B}_0 \subset 2^V$ s následujícími vlastnostmi:
(a) $0 \in B$ pro všechna $B \in \mathscr{B}_0$,
(b) ke každé dvojici $C, D \subset \mathscr{B}_0$ existuje $B \in \mathscr{B}_0$ tak, že $B \subset C \cap D$,
(c) jestliže $B \in \mathscr{B}_0$, $y \in B$, potom existuje $C \in \mathscr{B}_0$, pro něž $y + C \subset B$.
Potom pro každé $x \in V$ je systém $\mathscr{B}_x \equiv x + \mathscr{B}_0 := \{x + B\colon B \in \mathscr{B}_0\}$ lokální bází minimální topologie obsahující $\mathscr{B} := \bigcup_{x \in V} \mathscr{B}_x$, přičemž systém $\mathscr{B}$ je bází této topologie.

Důkaz: Stačí ukázat, že systémy $x + \mathscr{B}_0$ splňují podmínky (i–iii) věty 2.3.6. První dvě jsou přímým důsledkem vlastností (a), (b), a zbývá tedy (iii). Jestliže $B \in \mathscr{B}_x$, $y \in B$, existuje $B_0 \in \mathscr{B}_0$ a vektor $y_0 \in B_0$ tak, že $B = x + B_0$, $y = x + y_0$. Podle (c) najdeme $C_0 \in \mathscr{B}_0$, pro něž $y_0 + C_0 \subset B_0$; odtud $x + y_0 + C_0 = y + C_0 \subset B$ a pro $C := y + C_0$ máme $C \in \mathscr{B}_y$, $C \subset B$. ■

2.6.4 Poznámka: Zkonstruovaná topologie obecně nesplňuje axiomy (tv1–3), takže $(V, \tau(\mathscr{B}))$ není topologický vektorový prostor. K tomu je třeba, aby systém $\mathscr{B}_0$ vyhovoval kromě podmínek (a–c) některým dalším požadavkům – viz dále větu 9.

Význačné postavení mezi množinami v daném topologickém vektorovém prostoru mají podprostory, zejména podprostory uzavřené. Uvedeme dvě často užívané vlastnosti podprostorů.

2.6.5 Tvrzení: (a) Průnik libovolného systému uzavřených podprostorů je uzavřený podprostor.
(b) Uzávěr podprostoru je podprostor.

Důkaz: Tvrzení (a) je přímým důsledkem příslušných definic. K ověření (b) stačí ukázat, že pro daný podprostor $L \subset V$ platí $f(\bar{L} \times \bar{L}) \subset \bar{L}$ a $g(\mathbb{C} \times \bar{L}) \subset \bar{L}$, kde jsme užili označení f, g pro operace sčítání, resp. násobení číslem. Tyto inkluze plynou z výsledků cvičení 28 a 30 a z toho, že pro každý podprostor platí $f(L \times L) \subset L$, $g(\mathbb{C} \times L) \subset L$. ■

Viděli jsme, že při vyšetřování vlastností prostorů daného typu (vektorových, metrických atd.) je užitečné vymezit třídy ekvivalentních prostorů, které mají shodné všechny vlastnosti charakterizující uvažovaný typ. Je zřejmé, že topologické vektorové prostory (V, τ), (V', τ') mají shodné všechny vlastnosti jako vektorové i jako topologické prostory právě tehdy, když existuje zobrazení $f\colon V \to V'$ takové, že

(i) f je algebraický izomorfismus vektorových prostorů V, V',

(ii) f je homeomorfismus topologických prostorů (V, τ), (V', τ').

Užíváme pro ně názvu **lineární homeomorfismus** nebo **topologický izomorfismus.**

Podobně jako v případě normovaných prostorů, jsou třídy ekvivalentních *konečnědimenzionálních* topologických vektorových prostorů určeny dimenzí.

2.6.6 Věta: Konečnědimenzionální topologické vektorové prostory (V, τ), (V', τ') jsou lineárně homeomorfní právě tehdy, když $\dim V = \dim V'$.

Důkaz: Stačí sestrojit lineární homeomorfismus f daného n-dimenzionálního prostoru (V, τ) a prostoru $\mathbb{C}^n$. Pomocí nějaké báze $\{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ sestrojíme lineární bijekci $f\colon V \to \mathbb{C}^n$, $f\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right) := [\xi_1, \dots, \xi_n]$, takže platí $\|f(x)\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{1/2}$ pro všechna $x \in V$. Zbývá dokázat, že zobrazení f a f^{-1} jsou spojitá, přičemž stačí ověřit spojitost v nule (cvičení 47). Při důkazu spojitosti zobrazení f^{-1} vyjdeme ze spojitosti sčítání: $V \times V \times \dots \times V \ni [x_1, \dots, x_n] \mapsto x_1 + \dots + x_n \in V$. K danému $U(0) \in \tau$ najdeme okolí $U_j(0)$, $j = 1, 2, \dots, n$, pro něž platí implikace $x_j \in U_j(0) \Rightarrow \sum_j x_j \in U(0)$, a čísla $a_j > 0$ taková, že $0 \leqq |\xi_j| \leqq a_j \Rightarrow \xi_j e_j \in U_j(0)$ (cvičení 50); pro $\varepsilon := \min_{1 \leqq j \leqq n} a_j$ potom platí implikace $\sum_j |\xi_j|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \sum_j \xi_j e_j \in U(0)$.

Při důkazu spojitosti zobrazení f je podstatné to, že V je Hausdorffův prostor. Na základě vět 2.5.3, 2.5.5 a již dokázané spojitosti zobrazení f^{-1} tato vlastnost zaručuje, že pro dané $\varepsilon > 0$ je $S_\varepsilon := \{x \in V\colon \|f(x)\| = \varepsilon\}$ uzavřená množina, neboť $S_\varepsilon = f^{-1}(K_\varepsilon)$ a $K_\varepsilon := \{[\xi_1, \dots, \xi_n] \in \mathbb{C}^n\colon \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2 = \varepsilon^2\}$ je kompaktní v $\mathbb{C}^n$. Jelikož $0 \notin S_\varepsilon$, je $G := V \setminus S_\varepsilon$ okolím nuly, a podle výsledků cvičení 51 existuje vyvážené okolí U bodu 0 takové, že $U \subset G$, tj. pro všechna $x \in U$ platí $\|f(x)\| \neq \varepsilon$. Dále podmínky $x \in U$, $\|f(x)\| > \varepsilon$ vedou ke sporu s tím, že U je vyvážené, a proto pro všechna $x \in U$ platí $\|f(x)\| < \varepsilon$. ■

2.6.7 Důsledek: Každý konečnědimenzionální topologický vektorový prostor je lokálně kompaktní.

Důkaz: Takový prostor je homeomorfní prostoru $\mathbb{C}^n$, v němž množiny $U_r(x)$ jsou omezené, a tudíž prekompaktní. ■

2.6.8 Poznámka: F. Riesz dokázal obrácené tvrzení: *každý lokálně kompaktní topologický vektorový prostor má konečnou dimenzi.* Důkaz uvádět nebudeme – viz [[Tay]], cvičení k § 3.3.

Zbývající část tohoto paragrafu je věnována tzv. lokálně konvexním prostorům, které jsou mnohými svými vlastnostmi bližší normovaným prostorům než obecné topologické vektorové prostory. Podobně jako v normovaných prostorech, je v nich topologie zadána pomocí seminorem na V, ne však jedinou seminormou, nýbrž celým systémem, který může mít jakoukoli mohutnost.

Mějme vektorový prostor V a systém $\mathscr{P}$ seminorem na V: $\mathscr{P} = \{p_\alpha : \alpha \in I\}$, kde I je libovolná indexová množina. Říkáme, že *systém* $\mathscr{P}$ *odděluje body*, jestliže ke každému $x \in V$, $x \neq 0$, existuje $p_\alpha \in \mathscr{P}$ takové, že $p_\alpha(x) \neq 0$ (jinými slovy, jestliže z podmínky $p_\alpha(x) = 0$ pro všechna $\alpha \in I$ plyne $x = 0$). Je zřejmé, že systém $\mathscr{P}$, který obsahuje jedinou seminormu p, odděluje body právě tehdy, když p je norma. Příkladem nespočetného systému seminorem oddělujícího body je $\{p_x : x \in V\}$, kde V je pre-Hilbertův prostor se skalárním součinem $(.,.)$ a $p_x(y) := |(x, y)|$.

Pomocí daného systému $\mathscr{P}$ seminorem (ne nutně oddělujícího body) sestrojíme množiny

$$B_\varepsilon(p_1, \ldots, p_n) := \{x \in V : p_j(x) < \varepsilon, j = 1, \ldots, n\}. \tag{2}$$

Soubor množin $B_\varepsilon(p_1, \ldots, p_n)$ pro všechna $\varepsilon > 0$ a všechny konečné podmnožiny systému $\mathscr{P}$ označíme $\mathscr{B}_0^{\mathscr{P}}$. Snadno se přesvědčíme o tom, že $\mathscr{B}_0^{\mathscr{P}}$ vyhovuje předpokladům věty 3; tento soubor podmnožin prostoru V tedy zadává na V topologii $\tau^{\mathscr{P}}$, jejíž lokální bázi v každém bodě $x \in V$ tvoří množiny $x + B$, $B \in \mathscr{B}_0^{\mathscr{P}}$.

2.6.9 Věta: Jestliže systém $\mathscr{P}$ seminorem na vektorovém prostoru V odděluje body, pak $(V, \tau^{\mathscr{P}})$ je topologický vektorový prostor.

Důkaz: Z toho, že $\mathscr{P}$ odděluje body, plyne pro libovolnou dvojici $x, y \in V$, $x \neq y$, existence seminormy $p \in \mathscr{P}$ takové, že $p(x - y) = 2\varepsilon > 0$; pak $U(x) := x + B_\varepsilon(p)$ a $U(y) := y + B_\varepsilon(p)$ jsou disjunktní okolí, a je tudíž splněn axiom T_2. Vzhledem k tomu, že lokální bázi v každém bodě $x \in V$ tvoří množiny $x + B$, $B \in \mathscr{B}_0^{\mathscr{P}}$, stačí spojitost sčítání ověřit pro bod $[0, 0]$, což se snadno provede pomocí nerovnosti $p(x + y) \leqq p(x) + p(y)$. Vezměme dále $\alpha_0 \in \mathbb{C}$, $x_0 \in V$, $\varepsilon > 0$ a nějakou konečnou podmnožinu $\{p_1, \ldots, p_n\} \subset \mathscr{P}$. Pro libovolné $\delta \in (0, 1)$, $x \in x_0 + B_\delta(p_1, \ldots, p_n)$ a všechna $\alpha \in \mathbb{C}$ taková, že $|\alpha - \alpha_0| < \delta$, máme odhad

$$p_j(\alpha x - \alpha_0 x_0) \leqq |\alpha - \alpha_0|\, p_j(x_0) + |\alpha|\, p_j(x - x_0) < [\max_j \{p_j(x_0)\} + 1 + |\alpha_0|]\, \delta,$$

takže pro

$$\delta := \min\,[1, \varepsilon/(\max_j \{p_j(x_0)\} + 1 + |\alpha_0|)]$$

platí $\alpha x \in \alpha_0 x_0 + B_\varepsilon(p_1, \ldots, p_n)$. ■

Topologický vektorový prostor, v němž je topologie určena systémem seminorem $\mathscr{P}$ oddělujícím body, se nazývá **lokálně konvexní prostor** (viz též komentář).

2.6.10. Poznámka: Důvod pro takový název je zjevný: jestliže $x, y \in B_\varepsilon(p)$, potom pro všechna $t \in [0, 1]$ máme $p(tx + (1 - t)\, y) \leqq tp(x) + (1 - t)\, p(y) < \varepsilon$, takže množiny $B_\varepsilon(p)$, a tedy také $B_\varepsilon(p_1, \dots, p_n) = \bigcap_{j=1}^{n} B_\varepsilon(p_j)$ jsou konvexní. Konvexnost se zachovává při translacích, a proto lokální báze okolí každého bodu $x \in V$ je tvořena konvexními množinami.

2.6.11 Příklad: Topologii určenou v pre-Hilbertově prostoru V systémem $\mathscr{P} := \{p_x : x \in V\}$, $p_x(y) := |(x, y)|$ nazýváme slabou topologií a užíváme pro ni označení τ_w (srv. s obecným postupem v § 3.5). Prvky její lokální báze v bodě nula značíme $B_\varepsilon(x_1, \dots, x_n) := B_\varepsilon(p_{x_1}, \dots, p_{x_n})$. V prostoru V existuje kromě τ_w „přirozená" topologie $\tau_{\|.\|}$ indukovaná normou, jíž se často říká silná topologie. Snadno zjistíme, že $\tau_w \subset \tau_{\|.\|}$, tj. slabá topologie je opravdu slabší než topologie silná: podle tvrzení 2.3.5 stačí k libovolnému slabému okolí $B_\varepsilon(x_1, \dots, x_n)$ najít silné okolí $U_\delta(0) := \{x \in V : \|x\| < \delta\}$ takové, že $U_\delta(0) \subset B_\varepsilon(x_1, \dots, x_n)$, což je zjevně splněno pro $\delta := \varepsilon / \max_{1 \le j \le n} \|x_j\|$.

Přestože lokálně konvexní prostory jsou řadou svých vlastností blízké normovaným prostorům, v některých aspektech se od nich podstatně liší. V této souvislosti je poučné vyšetřit otázku metrizovatelnosti lokálně konvexních prostorů.

2.6.12 Věta: Lokálně konvexní prostor V je metrizovatelný právě tehdy, když systém seminorem $\mathscr{P}$, který určuje topologii τ na V, je spočetný.

Důkaz: Je-li prostor V metrizovatelný, splňuje první axiom spočetnosti. Nechť $\{U_j : j = 1, 2, \dots\}$ je spočetná lokální báze topologie τ v bodě 0. Podle definice ke každému U_j existuje $\varepsilon > 0$ a konečná podmnožina $\mathscr{P}_j \subset \mathscr{P}$ tak, že

$$\bigcap_{p \in \mathscr{P}_j} B_\varepsilon(p) \subset U_j . \tag{3}$$

Systém $\mathscr{P}' := \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathscr{P}_j$ je spočetný; odpovídající soubor $\mathscr{B}_0^{\mathscr{P}'}$ sestrojený podle (2) opět splňuje předpoklady věty 3 a zadává na V topologii $\tau^{\mathscr{P}'}$, která nemůže být silnější než $\tau \equiv \tau^{\mathscr{P}}$. Z inkluze (3) potom plyne $\tau^{\mathscr{P}'} = \tau$, takže topologie τ je určena spočetným systémem seminorem.

Naopak nechť τ je určena systémem seminorem $\{p_n : n = 1, 2, \dots\}$, který odděluje body. Potom zobrazení $\varrho : V \times V \to \mathbb{R}$

$$\varrho(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x - y)}{1 + p_n(x - y)} \tag{4}$$

je metrika na V, přičemž pro topologii indukovanou touto metrikou platí $\tau_\varrho = \tau$ (viz cvičení 2 a 53). ■

2.6.13 Poznámky: (a) Metrika (4) není indukována žádnou normou, protože $\varrho(\alpha x, \alpha y) \neq |\alpha| \, \varrho(x, y)$.

(b) Lokálně konvexní prostor, který je úplný vzhledem k metrice (4), se nazývá **Fréchetův** nebo **F-prostor** (viz též komentář).

2.6.14 Příklad: Množina $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ všech funkcí $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, které mají parciální derivace všech řádů, je podprostor v $C(\mathbb{R}^n)$. Symbolem $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ označíme podmnožinu tvořenou všemi C^∞-funkcemi f takovými, že pro libovolné multiindexy $J \equiv [j_1, \ldots, j_n]$, $K \equiv [k_1, \ldots, k_n]$, kde j_r, k_r jsou celá nezáporná čísla, platí

$$\|f\|_{J,K} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^J (D^K f)(x)| < \infty \,. \tag{5}$$

Zde

$$x^J := \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \ldots \xi_n^{j_n} \quad \text{a} \quad D^K := \frac{\partial^{|K|}}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_n^{k_n}} \,,$$

přičemž $|K| := k_1 + \ldots + k_n$. Do $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ patří např. funkce $x^J \exp(-\|x\|^2)$ pro každý multiindex J. Z definice (5) vyplývá, že každé $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ splňuje $|x^J (D^K f)(x)| \leqq \|f\|_{J,K}$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ a všechny dvojice multiindexů J, K; pro jakékoliv J klesá tedy f a každá derivace $D^K f$ pro $\|x\| \to \infty$ k nule rychleji než $|x^J|^{-1}$ (říkáme, že f rychle ubývá). Vidíme rovněž, že $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ je podprostor v $C(\mathbb{R}^n)$, a že pro každý polynom P na $\mathbb{R}^n$ platí implikace

$$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow D^K(Pf),\; PD^K f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \,. \tag{6}$$

Dále je zřejmé, že $\|.\|_{J,K}$ jsou seminormy, přičemž $\|f\|_{0,0} = \|f\|_\infty$. Systém $\mathscr{P} := \{\|.\|_{J,K}\}$ proto odděluje body v $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$; symbolem $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ se označuje i lokálně konvexní prostor $(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \tau^{\mathscr{P}})$, tzv. **prostor rychle ubývajících funkcí** nebo **Schwartzův prostor**. Dá se dokázat, že $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *je úplný* ([[RS 1]], § V.3) – je to tedy Fréchetův prostor.

Podmnožina tvořená funkcemi $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ s *kompaktním nosičem* se značí $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$; pro každé $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tedy existuje kompaktní množina $K_f \subset \mathbb{R}^n$ taková, že $f(x) = 0$ pro $x \notin K_f$; užívá se též zápisu $f \subset K_f$. Příkladem takové funkce je

$$j(x) := \begin{cases} \exp\,(\|x\|^2 - 1)^{-1} \ldots & \|x\| < 1 \\ 0 \ldots & \|x\| \geqq 1 \end{cases} \tag{7}$$

(viz cvičení 54). Množina $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ je zjevně podprostor v $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$; dále platí

$$\overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \,. \tag{8}$$

Uvážíme-li, že $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ je úplný, stačí k ověření (8) ukázat, že pro libovolné $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, libovolný konečný systém $\{\|.\|_{J,K} : [J, K] \in \mathscr{J}_0\}$ a $\varepsilon > 0$ existuje $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ splňující $\|f - g\|_{J,K} < \varepsilon$ pro všechna $[J, K] \in \mathscr{J}_0$. Ze vztahu (5) plyne $\lim_{\|x\| \to \infty} x^J (D^K f)(x) = 0$ pro všechna $[J, K] \in \mathscr{J}_0$; ke každému $\delta \in (0, 1]$ můžeme proto najít $r_\delta \geqq \delta^{-1}$ takové, že pro $\|x\| > r_\delta$ platí $|x^J (D^K f)(x)| < \delta$ pro všechna $[J, K] \in \mathscr{J}_0$. Nechť funkce $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ splňuje $h(x) = 1$ pro $\|x\| \leqq 1$ (viz cvičení 54).

 Potom $g_\delta(x) := f(x)\, h(x/r_\delta)$ patří do $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ a pomocí Leibnizova pravidla dostaneme

$$x^J(D^K(f - g_\delta))(x) =$$
$$= (1 - h(x/r_\delta))\, x^J(D^K f)(x) - \sum_{\substack{L+M=K \\ |M| \geqq 1}} c_{LM} x^J(D^L f)(x)\, r_\delta^{-|M|}(D^M h)(x/r_\delta)\,.$$

Absolutní hodnota druhého členu je pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ menší než $\delta \sum c_{LM} \|f\|_{J,L}\, \|h\|_{0,M}$. První člen je pro $\|x\| \leqq r_\delta$ roven nule; pro $\|x\| > r_\delta$ a $[J, K] \in \mathcal{J}_0$ platí $|(1 - h(x/r_\delta))\, x^J(D^K f)(x)| < \delta(1 + \|h\|_{0,0})$. Lze tedy zvolit δ tak, že $\|f - g_\delta\|_{J,K} < \varepsilon$ pro všechna $[J, K] \in \mathcal{J}_0$.

Komentář

§ **2.1** • Většinu základních pojmů, s nimiž se v metrických prostorech pracuje, je možno definovat dvěma ekvivalentními způsoby: buď přímo pomocí metriky, nebo zprostředkovaně pomocí pojmu okolí. Druhý způsob, jehož důsledně užíváme, umožňuje zcela přirozeně přejít k topologickým prostorům. Existují ovšem pojmy, které se pomocí okolí definovat nedají. To se týká např. *průměru* dané množiny M, $\operatorname{diam} M := \sup\{\varrho(x, y) : x, y \in M\}$, pojmu *omezené množiny*, což je definitoricky množina s konečným průměrem, a zejména pojmů cauchyovské posloupnosti a úplnosti – viz § 2.2.

§ **2.2** • V příkladu 2 jsme pro $\mu(M) < \infty$ ukázali, že z každé posloupnosti $\{f_n\} \subset L^p(M, d\mu)$, $\|f_n - f\|_p \to 0$, lze vybrat posloupnost $\{f_{k_n}\}_{n=1}^\infty$ takovou, že $f_{k_n}(x) \to f(x)$ pro s.v. $x \in M$. *To platí obecně pro jakoukoli nezápornou míru*: množina $M_\varepsilon^{(n)} := \{x \in M : |f(x) - f_n(x)| \geqq \varepsilon\}$ totiž splňuje nerovnost $\|f_n - f\|_p \geqq \varepsilon[\mu(M_\varepsilon^{(n)})]^{1/p}$ pro každé $\varepsilon > 0$ a díky podmínce $\|f_n - f\|_p \to 0$ je $\lim_{n\to\infty} \mu(M_\varepsilon^{(n)}) = 0$; dá se ukázat, že odtud plyne zmíněné tvrzení (viz např. [[Jar 2]], § III.5, věta 68). Pro libovolnou nezápornou míru platí rovněž tvrzení o úplnosti prostoru $L^p(M, d\mu)$; důkaz je ovšem složitější (viz [[DS 1]], § III.6).

§ **2.3** • Alternativní způsob zavedení topologie (pomineme-li triviální obměnu, kdy se místo vlastností otevřených množin axiomatizují vlastnosti množin uzavřených) spočívá v axiomatizaci vlastností uzávěru (viz např. [[Kel]], kap. I a rovněž cvičení 19).

• Topologický prostor (X, τ) je *souvislý*, pokud jej není možné zapsat jako sjednocení dvou neprázdných disjunktních otevřených množin, což je ekvivalentní podmínce, že X a $\emptyset$ jsou jediné množiny, které jsou současně otevřené i uzavřené. Příkladem topologického prostoru, který není souvislý, je množina X, obsahující alespoň dva prvky, vybavená diskrétní topologií τ_d; zde každá množina je otevřená i uzavřená.

Množina $M \subset X$ je souvislá, je-li souvislý prostor (M, τ_M), kde τ_M je topologie indukovaná v množině M topologií τ.

Křivkou spojující body x a y topologického prostoru X se nazývá množina $\varphi([0,1])$, kde φ je nějaké spojité zobrazení intervalu $[0,1]$ do X takové, že $\varphi(0) = x$ a $\varphi(1) = y$. Pro každou křivku je množina $\varphi([0,1])$ souvislá (cvičení 42). O topologickém prostoru, v němž každé dva body je možné spojit nějakou křivkou, říkáme, že je *křivkově* (*lineárně*) *souvislý*. Příkladem je každý normovaný prostor. Křivkově souvislý prostor je souvislý, existují však souvislé prostory, které nejsou křivkově souvislé.

• Vzhledem k tomu, že při přechodu od metrických k obecným topologickým prostorům ztrácí limita posloupnosti některé důležité vlastnosti, zavádí se následující zobecnění pojmu posloupnosti. Částečně uspořádanou „indexovou" množinu I jakékoli mohutnosti nazveme *usměrněnou množinou*, jestliže pro každou dvojici a, $\beta \in I$ existuje $\gamma \in I$ takové, že $\alpha < \gamma$, $\beta < \gamma$. Příkladem takové množiny je systém 2^M všech podmnožin dané množiny M s částečným uspořádáním definovaným pomocí inkluze. Zobrazení $\alpha \mapsto x_\alpha$ usměrněné množiny I do topologického prostoru X nazveme *usměrněným souborem* v prostoru X; užívá se též označení $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ a $\{x_\alpha\}$. Říkáme, že usměrněný soubor $\{x_\alpha\} \subset X$ konverguje k bodu $x \in X$, jestliže ke každému okolí $U(x)$ existuje $\alpha_0 \in I$ takové, že pro všechna $\alpha > \alpha_0$ je $x_\alpha \in U(x)$; bod x pak nazýváme *limitou usměrněného souboru* $\{x_\alpha\}$ a píšeme $x_\alpha \to x$ nebo $x = \lim_{\alpha \in I} x_\alpha$ (Mooreova-Smithova konvergence). Ilustrací významu těchto pojmů jsou následující tvrzení platná v libovolném topologickém prostoru X:

(a) Bod $x \in X$ patří do uzávěru množiny $M \subset X$ právě tehdy, když existuje usměrněný soubor $\{x_\alpha\} \subset M$ takový, že $x_\alpha \to x$.

(b) Zobrazení f z X do topologického prostoru X' je spojité v bodě $x \in X$ právě tehdy, když pro každý usměrněný soubor $\{x_\alpha\} \subset X$, $x_\alpha \to x$, konverguje usměrněný soubor $\{f(x_\alpha)\}$ k $f(x)$.

(c) Prostor X je Hausdorffův právě tehdy, když každý usměrněný soubor $\{x_\alpha\} \subset X$ má nejvýše jednu limitu.

§ **2.4** • V souvislosti s oddělovacími axiomy zavádějí někteří autoři pojem T_0-prostoru, kde pro každou dvojici různých bodů x, y platí alespoň jedna z podmínek: (i) existuje okolí bodu x, které neobsahuje y, (ii) existuje okolí bodu y, které neobsahuje x. Každý T_1-prostor je tedy T_0-prostorem; příkladem T_0 prostoru, který nesplňuje axiom T_1, je tzv. souvislá dvoubodová množina $X \equiv \{x, y\}$, kde otevřenými množinami jsou X, $\emptyset$ a $\{x\}$.

§ **2.5** • Terminologie související s pojmem kompaktnosti je velmi nejednotná. Kromě již zmíněných synonym prekompaktní množina $\equiv$ relativně kompaktní množina, je třeba upozornit na to, že řada autorů užívá termínu „bikompaktní" místo kompaktní, přičemž „kompaktnost" pro ně znamená spočetnou kompaktnost.

62 • Existuje standardní postup umožňující zkonstruovat k danému nekompaktnímu prostoru (X, τ) tzv. *jednobodovou kompaktifikaci*, tj. kompaktní prostor (X', τ') takový, že (X, τ) je jeho podprostorem, přičemž množina $X' \setminus X$ je jednobodová (viz ⟦Tay⟧, § 2.31). Jednoduchým příkladem je kompaktifikace $\mathbb{C}$ připojením bodu $x_0 \equiv \infty$.

• Zobrazení f metrického prostoru (X, ϱ) do (X', ϱ') je *stejnoměrně spojité*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolnou dvojici bodů $x_1, x_2 \in X$ splňujících $\varrho(x_1, x_2) < \delta$ platí $\varrho'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$; „stejnoměrnost" spočívá v tom, že δ nezávisí na x_1, x_2, nýbrž pouze na ε. Často se užívá následující tvrzení: spojité zobrazení *kompaktního* prostoru (X, ϱ) do (X', ϱ') je stejnoměrně spojité. Důkaz (sporem) lze najít v řadě učebnic (např. ⟦KF⟧ § II.7.6); čtenář si jej však snadno provede sám.

§ **2.6** • Jiný příklad spojení algebraických vlastností dané množiny s topologií představuje pojem topologické grupy. Připomeňme nejprve, že množinu G nazýváme *grupou*, jestliže (i) je definována asociativní binární operace $G \times G \ni [g, g'] \mapsto gg' \in G$, (ii) existuje tzv. *jednotkový prvek* $e \in G$ takový, že $eg = ge = g$ pro všechna $g \in G$, (iii) ke každému $g \in G$ existuje *inverzní prvek* g^{-1} splňující $g^{-1}g = gg^{-1} = e$. Zavedeme-li na dané grupě G topologii τ vyhovující axiomu T_1 takovou, že zobrazení $g \mapsto g^{-1}$ je spojité na (G, τ) a rovněž násobení $[g, g'] \mapsto gg'$ chápané jako zobrazení z $(G \times G, \tau_{G\times G})$ do (G, τ) je spojité, stane se prostor (G, τ) *topologickou grupou*. Podobně je tomu v případě topologické algebry, kde algebraické vlastnosti jsou spojeny s topologií podmínkami spojitosti sčítání a násobení (viz § 12.2). O topologických grupách pojednávají např. monografie ⟦Nai 3⟧, ⟦Pon⟧.

• Viděli jsme, že v metrických prostorech se pracuje též s „netopologickými" pojmy, tj. takovými, jež nelze definovat pomocí okolí. Některé z nich je však možno vhodně zobecnit a přenést do topologických vektorových prostorů. Uvedeme tři příklady. Množina M v topologickém vektorovém prostoru je omezená, jestliže ke každému okolí U bodu 0 existuje $\alpha \in \mathbb{C}$ takové, že $M \subset \alpha U$. Vzhledem k tomu, že každé okolí nuly obsahuje nějaké vyvážené okolí nuly (cvičení 51), existuje $\alpha > 0$ tak, že inkluze $M \subset \beta U$ platí pro všechna $|\beta| \geqq \alpha$. Je snadné ověřit, že pro množinu M v normovaném prostoru je tato definice ekvivalentní požadavku existence $c_M > 0$ takového, že $\|x\| < c_M$ pro všechna $x \in M$. Usměrněný soubor $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ v topologickém vektorovém prostoru V je *cauchyovský*, jestliže ke každému okolí U bodu 0 existuje $\alpha_0 \in I$ takové, že pro $\alpha > \alpha_0$, $\beta > \alpha_0$ platí $x_\alpha - x_\beta \in U$. Speciálně v lokálně konvexním prostoru V, v němž topologie je určena systémem seminorem $\mathscr{P}$, je usměrněný soubor $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset V$ cauchyovský právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ a každé seminormě $p \in \mathscr{P}$ existuje $\alpha_p \in I$ takové, že z podmínek $\alpha > \alpha_p$, $\beta > \alpha_p$ plyne $p(x_\alpha - x_\beta) < \varepsilon$. Každý konvergentní usměrněný soubor je cauchyovský; platí-li obrácené tvrzení, tj. konverguje-li každý cauchyovský usměrněný soubor ve V k nějakému $x \in V$, říkáme, že *prostor V je úplný*. Pojem usměrněného cauchyovského souboru se zavádí i v metrických prostorech (X, ϱ), kde X není nutně vektorový prostor: $\{x_\alpha\} \subset X$ je cauchyovský, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\alpha_\varepsilon \in I$, že $\varrho(x_\alpha, x_\beta) < \varepsilon$, jakmile $\alpha > \alpha_\varepsilon$, $\beta > \alpha_\varepsilon$. Dá se ukázat, že ke každému cauchyovskému usměrněnému souboru $\{x_\alpha\}$ v úplném metrickém prostoru X existuje $x \in X$ takové, že $x_\alpha \to x$ (⟦DS 1⟧, lemma I.7.5). Odtud např. vyplývá, že lokálně konvexní prostor určený spočetným systémem seminorem $\{p_n: n = 1, \dots\}$ je Fréchetův (tj. úplný vzhledem k metrice (4)) právě tehdy, když je úplný ve smyslu výše uvedené definice (srv. s cvičením 53).

• Lokálně konvexní prostor jsme definovali jako topologický vektorový prostor, v němž topologie je zadána systémem seminorem oddělujícím body. V literatuře se často setkáme s jinou definicí: *topologický vektorový prostor je lokálně konvexní, jestliže každé okolí bodu* 0 *obsahuje nějaké konvexní okolí nuly.* Důkaz ekvivalence obou definic uvádí např. ⟦Tay⟧, § 3.8.

• Pro vektorový prostor s metrikou (4) zjevně platí
(i) $\varrho(x, y) = \varrho(x - y, 0)$ (translační invariance),
(ii) zobrazení $x \mapsto \alpha_0 x$ a $\alpha \mapsto \alpha x_0$ jsou spojitá pro každé pevné $\alpha_0 \in \mathbb{C}$, resp. $x_0 \in V$.
Z těchto vlastností vychází následující obecnější definice F-prostoru (⟦DS 1⟧ § II.1, ⟦Yo⟧ § I.9): F-prostor je vektorový prostor, který je úplný vzhledem k metrice splňující (i) a (ii).

Cvičení

1. Obor hodnot metriky je množina nezáporných čísel a pro všechny body x, y, z daného metrického prostoru platí nerovnost

$$|\varrho(x, y) - \varrho(x, z)| \leqq \varrho(y, z) \qquad \text{(spojitost metriky).}$$

2. Předpokládejme, že na vektorovém prostoru V je dána spočetná množina seminorem $\mathscr{P} \equiv \{p_n: n = 1, 2, \dots\}$. Potom zobrazení $\varrho: V \times V \to \mathbb{R}$, $\varrho(x, y) := = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} p_n(x - y)/(1 + p_n(x - y))$ je metrika na V, která není indukována žádnou normou.
Návod: Funkce $t \mapsto t/(1 + t)$ je rostoucí na $\mathbb{R}^+$.

3. V metrickém prostoru X definujeme *vzdálenost bodu* x *od množiny* M: $\varrho(x, M) := \inf_{y \in M} \varrho(x, y)$. Zformulujte definice vnitřního bodu, resp. bodu uzávěru množiny M pomocí $\varrho(x, M)$ a $\varrho(x, X \setminus M)$.

4. V každém normovaném prostoru platí $\overline{U_\varepsilon(x)} = S_\varepsilon(x)$, avšak v obecném metrickém prostoru platí pouze inkluze $\overline{U_\varepsilon(x)} \subset S_\varepsilon(x)$.
Návod: Uvažujte prostor (X, ϱ_d).

5. Je dán metrický prostor X a množina $M \subset X$. Následující podmínky jsou ekvivalentní: (a) M je všude řídká, (b) $\bar{M}$ nemá vnitřní body, (c) M není hustá v žádné otevřené kouli.

6. Jestliže M je všude hustá v metrickém prostoru X, potom mohutnost libovolné množiny disjunktních otevřených koulí je nejvýše rovna mohutnosti M; speciálně X je neseparabilní, existuje-li v něm nespočetná množina otevřených disjunktních koulí. Jako aplikaci tohoto tvrzení ověřte, že prostory (X, ϱ_d), kde X je nespočetná množina, $L^\infty(\mathbb{R}, dx)$ a l^∞ jsou neseparabilní.
Návod: Jako středy disjunktních otevřených koulí v $L^\infty(\mathbb{R}, dx)$ zvolte charakteristické funkce intervalů $(-\infty, t)$.

7. Jsou-li X a X' metrické prostory, pak zobrazení $f\colon X \to X'$ je spojité v bodě $x \in X$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset X$, která konverguje k x, platí $f(x_n) \to f(x)$.

8. Dokažte tvrzení 2.1.4. Najděte příklady spojitých zobrazení, při nichž obraz otevřené množiny není otevřená množina.

9. Jestliže zobrazení metrických prostorů $f\colon X \to X'$ a $g\colon X' \to \tilde{X}$ jsou spojitá, je spojité i složené zobrazení $h := g \circ f$.

10. Pro každou množinu M v separabilním metrickém prostoru (X, ϱ) je prostor (M, ϱ) separabilní.
Návod: Je-li $\{x_j\colon j = 1, 2, \ldots\}$ všude hustá v X, existuje pro každé přirozené k bod $y_{jk} \in M$ takový, že $\varrho(x_j, y_{jk}) < \varrho(x_j, M) + 1/k$.

11. Nechť $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ jsou ekvivalentní normy na vektorovém prostoru V. Potom prostor $(V, \|.\|_1)$ je úplný právě tehdy, když je úplný prostor $(V, \|.\|_2)$.

12. Prostor l^p je úplný pro každé p, $1 \leqq p \leqq \infty$.
Návod: Jestliže $\{X_n \equiv \{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty\colon n = 1, 2, \ldots\}$ je cauchyovská posloupnost, pak pro každé N platí $\sum_{k=1}^{N} |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}|^p < \varepsilon$; proveďte nejprve limitní přechod $m \to \infty$ a potom $N \to \infty$.

13. Jestliže z cauchyovské posloupnosti $\{x_n\}$ je možno vybrat konvergentní posloupnost $\{x_{k_n}\}$, $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = x$, potom $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

14. Dokončete důkaz úplnosti prostoru $L^p(M, d\mu)$ pro $\mu(M) = \infty$.
Návod: S označeními z příkladu 2.2.2 pro $r = 1, 2, \ldots$ platí $\sum_{j=1}^{r} \int_{M_j} |f^{(j)} - f_n^{(j)}|^p \, d\mu \leqq \varepsilon^p$, $n > N(\varepsilon)$. Definujte funkci f na M: $f(x) := f^{(j)}(x)$, $x \in M_j$, a pro dané $n > N(\varepsilon)$ aplikujte na posloupnost $\{F_r^{(n)}\}_{r=1}^\infty$, $F_r^{(n)} := |f - f_n|^p \chi\left(\bigcup_{j=1}^{r} M_j\right)$ Léviho větu.

15. Nechť Y je podmnožina úplného metrického prostoru (X, ϱ). Metrický prostor (Y, ϱ) je úplný právě tehdy, když Y je uzavřená.

16. Dokažte větu 2.2.4.
Návod: Posloupnost středů $\{x_j\}$ je cauchyovská a její limita je prvkem všech S_j. Naopak z dané cauchyovské posloupnosti $\{x_n\}$ vyberte posloupnost $y_n \equiv x_{k_n}$ splňující $\varrho(y_{n+1}, y_n) < 2^{-n}$ a uvažujte uzavřené koule $S_{2^{-n+1}}(y_n)$.

17. V metrickém prostoru je doplněk každé jednobodové množiny otevřená množina.

18. Pro topologie τ_1, τ_2 indukované na daném vektorovém prostoru V normami $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ platí: τ_1 je slabší než τ_2 právě tehdy, když norma $\|.\|_1$ není silnější než $\|.\|_2$. Speciálně jsou obě topologie totožné právě tehdy, když normy $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ jsou ekvivalentní.

19. Jestliže na systému množin 2^X je dáno zobrazení $M \mapsto [M] \in 2^X$ splňující podmínky $M \subset [M]$, $[M \cup N] = [M] \cup [N]$, $[\emptyset] = \emptyset$, $[[M]] = [M]$ (tzv. *Kuratowského axiomy*), potom systém množin $\{G \in 2^X : [X \setminus G] = X \setminus G\}$ je topologie, přičemž pro uzávěr každé množiny platí $\bar{M} = [M]$.

20. Nechť na množině X jsou zadány topologie τ_α, $\alpha \in I$, kde I je indexová množina libovolné mohutnosti. Potom $\bigcap_{\alpha \in I} \tau_\alpha$ je topologie, která je slabší než každá z topologií τ_α.

21. Ke každému systému $\mathscr{S} \subset 2^X$ existuje topologie $\tau(\mathscr{S})$ taková, že $\mathscr{S} \subset \tau(\mathscr{S})$ a pro libovolnou jinou topologii τ obsahující $\mathscr{S}$ platí $\tau(\mathscr{S}) \subset \tau$.

22. Bázi topologie $\tau(\mathscr{S})$ z předchozího cvičení tvoří množina X a průniky všech konečných podsystémů systému $\mathscr{S}$.

23. Systém $\mathscr{B} \subset 2^X$ je bází topologie $\tau(\mathscr{B})$ na množině X právě tehdy, když (i) ke každému $x \in X$ existuje $B \in \mathscr{B}$ takové, že $x \in B$, (ii) pro libovolné množiny $B, C \in \mathscr{B}$ a každé $x \in B \cap C$ existuje $D \in \mathscr{B}$ tak, že $x \in D$ a $D \subset B \cap C$.

24. Jestliže topologický prostor (X, τ) je separabilní, je separabilní i prostor (X, τ') pro každou topologii $\tau' \subset \tau$.

25. Uvažujte zobrazení f, g množiny $X \times Y$ do topologických prostorů (X, τ_X), resp. (Y, τ_Y): $f(x, y) := x$, $g(x, y) := y$, a ukažte, že nejslabší topologie na $X \times Y$, vůči níž jsou f, g spojitá, je $\tau_{X \times Y}$.
Návod: Báze $\{f, g\}$-slabé topologie na $X \times Y$ je totožná s bází topologie $\tau_{X \times Y}$.

26. Metrický prostor je separabilní právě tehdy, když má spočetnou bázi.

27. Další vlastnosti prostorů z příkladu 2.3.1: (i) (X, τ_{fin}) je separabilní, (X, τ_{count}) neseparabilní, (ii) ani jeden z těchto prostorů nesplňuje první axiom spočetnosti.

Návod: Každý spočetný systém okolí daného bodu x je určen spočetnými nebo konečnými uzavřenými množinami F_n, $n = 1, 2, \ldots$, takže $M := \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ je spočetná. Pro $y \neq x$, $y \in X \setminus M$ uvažujte množinu $X \setminus \{y\}$.

28. Dokažte, že v topologickém součinu prostorů X_r, $r = 1, 2$, platí pro libovolné množiny $M_r \subset X_r$ vztah $\overline{M_1 \times M_2} = \overline{M_1} \times \overline{M_2}$.

29. Nechť (X, τ), (X', τ') jsou obecné topologické prostory, f zobrazení X do X'.
(i) Jestliže f je spojité v bodě $x \in X$, potom pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset X$, $x_n \xrightarrow{\tau} x$, platí $f(x_n) \xrightarrow{\tau'} f(x)$. Splňuje-li prostor (X, τ) první axiom spočetnosti, platí i obrácené tvrzení (srv. cvičení 7).
(ii) Nechť $\mathscr{B}_x \subset \tau$, $\mathscr{B}'_{x'} \subset \tau'$ jsou lokální báze v bodech x, $x' := f(x)$. Zobrazení f je spojité v bodě x právě tehdy, když ke každému $B'(x') \in \mathscr{B}'_{x'}$ existuje $B(x) \in \mathscr{B}_x$ splňující $B(x) \subset f^{(-1)}(B'(x'))$.

30. Jestliže zobrazení f z topologického prostoru X do topologického prostoru X' je spojité, potom pro libovolnou množinu $M \subset X$ platí $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$.

31. Topologický součin T_2-prostorů je T_2-prostor.

32. Topologický prostor X splňuje axiom T_3 právě tehdy, když ke každému okolí $U(x)$ libovolného bodu $x \in X$ existuje okolí $V(x)$ takové, že $\overline{V(x)} \subset U(x)$.

33. Na množině $X \equiv [0, 1]$ zadáme topologii τ pomocí lokálních bází (viz větu 2.3.6). Pro libovolné $x \in X$ definujeme systém $\mathscr{B}_x \subset 2^X$ následovně: položíme $\mathscr{B}_0 := \{[0, b) \setminus N : 0 < b < 1\}$, kde $N := \left\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\right\}$, a pro $x \neq 0$ $\mathscr{B}_x = \{(\alpha, \beta) \cap X : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < x < \beta\}$. Prostor (X, τ) je Hausdorffův, ale není regulární.
Návod: Ukažte, že množina N je uzavřená, přičemž ji nelze oddělit od bodu 0.

34. Bod x je hromadným bodem množiny M v T_1-prostoru právě tehdy, když každé jeho okolí obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny M. Platí to v obecném topologickém prostoru?

35. V obecném topologickém prostoru *neplatí* tvrzení: Jestliže x je hromadný bod množiny M a F je uzavřená množina taková, že $M \setminus F$ je konečná, potom $x \in F$.
Návod: Uvažujte prostor $X \equiv \{1, 2, \ldots\}$, v němž jsou otevřené jen množiny $X, \emptyset$ a $\{1, 2\}$.

36. Systém množin $\{M_\alpha : \alpha \in I\}$ je *centrovaný*, jestliže každý jeho konečný podsystém má neprázdný průnik. Dokažte, že topologický prostor je kompaktní (spočetně kompaktní) právě tehdy, když každý (každý spočetný) centrovaný systém uzavřených množin má neprázdný průnik.

37. Jestliže v T_1-prostoru má každá nekonečná množina hromadný bod, je tento prostor spočetně kompaktní.
Návod: Nechť $\{F_n : n = 1, 2, \ldots\}$ je centrovaný systém uzavřených množin, přičemž $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq R_N$, $N = 1, 2, \ldots$, kde $R_N := \bigcap_{n=1}^{N} F_n$. Pak existuje nekonečná množina $\{x_k : k = 1, 2, \ldots\}$ taková, že $x_k \in R_{N_k}$; ukažte, že její hromadný bod patří do všech R_N (viz cvičení 34).

38. V topologickém prostoru X se spočetnou bází pojmy kompaktnosti a spočetné kompaktnosti splývají.
Návod: Nechť $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ je nějaké pokrytí X; ze spočetné báze $\{B_j : j = 1, 2, \ldots\}$ vyřadíme ty množiny, které nejsou částí žádné G_α. Zbývající B_j tvoří pokrytí X a každá z nich je částí alespoň jedné G_α.

39. Jestliže M je totálně omezená množina, je totálně omezená i množina $\bar{M}$.

40. Nechť M je kompaktní množina v topologickém prostoru a $\{f_n\}$ je posloupnost reálných funkcí spojitých na M taková, že pro každé $x \in M$ je $\{f_n(x)\}$ nerostoucí posloupnost. Jestliže pro dané $c \in \mathbb{R}$ ke každému $x \in M$ existuje n_x takové, že $f_{n_x}(x) < c$, potom pro všechna dosti velká n a všechna $x \in M$ platí $f_n(x) < c$. (Snadným důsledkem tohoto tvrzení je známá *Diniho věta* – viz např. [[Die]], § 7.2).
Návod: Ke každému $x \in M$ existuje okolí $U(x)$ takové, že $f_{n_x}(y) < c$ pro všechna $y \in U(x)$. Ze systému $\{U(x) : x \in M\}$ vyberte konečné pokrytí množiny M.

41. Každý uzavřený interval je souvislá množina v $\mathbb{R}$.
Návod: Předpoklad existence neprázdných disjunktních uzavřených množin $F, F' \subset [a, b]$ takových že $F \cup F' = [a, b]$, vede ke sporu.

42. Jestliže X je souvislý topologický prostor a zobrazení $f : X \to X'$ je spojité, pak $f(X)$ je souvislá množina.

43. Nechť (V, τ) je topologický vektorový prostor; předpisem $[x, y] \mapsto x - y$ je definováno spojité zobrazení prostoru $(V \times V, \tau_{V \times V})$ do (V, τ).
Návod: Ověřte spojitost zobrazení $[x, y] \mapsto [x, -y]$.

44. Dokažte, že vektorový prostor V vybavený topologií τ splňující axiomy (tv1) a (tv2) je T_3-prostor.
Návod: K danému $U(0)$ existuje $U'(0)$ takové, že $x, y \in U'(0)$ implikuje $x - y \in U(0)$; odtud plyne $\overline{U'(0)} \subset U(0)$.

45. Pro každou množinu M v topologickém vektorovém prostoru platí $\overline{x + M} = x + \bar{M}$.
Návod: Užijte výsledku cvičení 30.

46. Jestliže $\mathscr{B}_0$ je řídicí systém okolí nuly v topologickém vektorovém prostoru (V, τ), potom $\mathscr{B}_x := \{x + B : B \in \mathscr{B}_0\}$ je řídicí systém okolí bodu $x \in V$.

47. Lineární zobrazení z topologického vektorového prostoru V do V' $f\colon V \to V'$ je spojité právě tehdy, je-li spojité v bodě $0 \in V$.

48. Jestliže G je otevřená množina v topologickém vektorovém prostoru V, potom pro každou množinu $M \subset V$ je $M + G := \{x \in V\colon x = y + z,\ \ y \in M, z \in G\}$ otevřená množina.

49. Zobrazení d_α definované na (komplexním) topologickém vektorovém prostoru V vztahem $d_\alpha(x) := \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, je homeomorfismus prostoru V se sebou samým.

50. Každé okolí $U(0)$ nulového prvku komplexního topologického prostoru (V, τ) má tuto vlastnost: pro libovolné $x \in V$ existuje $a_x > 0$ takové, že pro všechna $\alpha \in \mathbb{C}$, $0 < |\alpha| \leqq a_x$, platí $\alpha x \in U(0)$.
Návod: Pro dané x užijte spojitosti zobrazení $\alpha \mapsto \alpha x$ v bodě $\alpha = 0$.

51. Říkáme, že množina M v topologickém vektorovém prostoru je *vyvážená*, jestliže $M = M_E := \bigcup_{|\alpha| \leqq 1} \alpha M$, kde $\alpha M := \{y \in V\colon y = \alpha x, x \in M\}$. Dokažte, že k libovolnému okolí $U(0)$ bodu 0 existuje vyvážené okolí $V(0)$ takové, že $V(0) \subset U(0)$.
Návod: Ze spojitosti násobení $[\alpha, x] \mapsto \alpha x$ plyne existence $W(0)$ a $\varepsilon > 0$ takových, že

$$\frac{2}{\varepsilon} \bigcup_{|\alpha| \leqq \frac{\varepsilon}{2}} \alpha W(0) \subset \frac{2}{\varepsilon} U(0)\,.$$

Dále užijte toho, že pro dané vyvážené okolí $V(0)$ a libovolné $\beta \in \mathbb{C}$ je $\beta V(0)$ rovněž vyvážené okolí nuly.

52. Ověřte, že systém $\mathscr{B}_0^{\mathscr{P}}$ tvořený množinami $B_\varepsilon(p_1, \ldots, p_n)$ (viz (2.6.2)) splňuje podmínky (a)–(c) věty 2.6.3.

53. Topologie τ na vektorovém prostoru V určená spočetným systémem seminorem $\{p_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$ oddělujícím body je totožná s topologií τ_ϱ indukovanou metrikou (2.6.4). Posloupnost $\{x_j\} \subset V$ je cauchyovská v metrickém prostoru (V, ϱ) právě tehdy, když pro $n = 1, 2, \ldots$ platí: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $j(\varepsilon, n)$ takové, že pro $k, l > j(\varepsilon, n)$ platí $p_n(x_k - x_l) < \varepsilon$.
Návod: Užijte tvrzení 2.3.5 a toho, že metrika (2.6.4) je invariantní při translacích. Dané $B_\varepsilon(p_n)$ obsahuje $U_\delta(0) := \{x \in V\colon \varrho(x, 0) < \delta\}$ pro $\delta := 2^{-n}\varepsilon/(1 + \varepsilon)$. Naopak pro dané $U_\varepsilon(0)$ najděte $\delta > 0$ tak, aby $B_\delta(p_1, \ldots, p_N) \subset U_{\varepsilon/2}(0)$, přičemž N je určeno podmínkou $\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \leqq \varepsilon/2$.

54. (i) Dokažte, že funkce j definovaná vztahem (2.6.7) patří do $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Jestliže f je spojitá funkce s kompaktním nosičem, potom pro $g_f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, j(y)\, \mathrm{d}y$ platí $g_f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Najděte $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tak, aby $h(x) = 1$ pro $\|x\| \leqq 1$.

Návod: (i) Nechť

$$f(t) := \begin{Bmatrix} \exp(-1/t) \ldots t > 0 \\ 0 \quad\quad\quad \ldots t \leqq 0 \end{Bmatrix};$$

dokažme indukcí, že $f^{(j)}(t) = f(t) \cdot t^{-2j} \cdot P(t)$, kde $P(t)$ je reálný polynom v t. Dále dokažte, že pro každý multiindex K platí

$$\frac{\partial^{|K|} j}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_n^{k_n}}(x) = \sum_{m=1}^{|K|} f^{(m)}(1 - \|x\|^2)\, P_m(x)$$

kde

$$P_m(x) := c_m \prod_{r=1}^{n} \xi_r^{m_r}, \qquad m_r = 0, 1, \ldots, \; c_m \in \mathbb{R}\,.$$

Při výpočtu

$$\frac{\partial}{\partial \xi_r} \frac{\partial^{|K|} j}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_n^{k_n}}(x)$$

pro $x \equiv [\xi_1, \ldots, \xi_n]$ splňující $\|x\| = 1$ položte $t_r(h) := 1 - \sum_{k=1}^{n} (\xi_k + \delta_{rk} h)^2 = -2\xi_r h - h^2$; jelikož $t_r(h) > 0$ pro h splňující $\xi_r h < 0$, $0 < |h| < 2|\xi_r|$, platí

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h\xi_r < 0}} \frac{1}{h} \frac{f(t_r(h))}{(t_r(h))^k} = \lim_{y \to 0^+} \frac{f(y)}{y^{k+1}} \lim_{h \to 0} \frac{t_r(h)}{h}.$$

(ii) Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí $g_f(x) = \int_{\operatorname{supp} f} f(z)\, j(x-z)\, \mathrm{d}z$; potom $\operatorname{supp} g_f \subset \{x : \inf_{z \in \operatorname{supp} f} \|x - z\| < 1\}$ a pro každý multiindex K má funkce $z \mapsto f(z)\,(D^K j)\,(x - z)$ integrabilní majorantu nezávislou na x.

3.1 BANACHOVY PROSTORY

Normovaný prostor, který je úplný vzhledem k metrice indukované normou, se nazývá **Banachův** nebo **B-prostor**. Všechny metrické vlastnosti B-prostorů se samozřejmě vztahují k této metrice. Abstraktní Banachovy prostory budeme značit jediným symbolem $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ atd.

Vzhledem k tomu, že B-prostor je topologickým vektorovým prostorem, platí o jeho podprostorech všechna tvrzení uvedená v § 2.6: průnik libovolného systému (uzavřených) podprostorů je (uzavřený) podprostor, uzávěr podprostoru je podprostor atd. B-prostor je však také metrický prostor, a proto je nutné některé pojmy modifikovat, např. místo lineárního homeomorfismu se zavádí pojem lineární izometrie. Říkáme tedy, že B-prostory $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ jsou **lineárně izometrické** nebo **izometricky izomorfní** a píšeme $\mathcal{X}_1 \sim \mathcal{X}_2$, jestliže existuje lineární izometrie $f: \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$, tj. lineární bijekce (algebraický izomorfismus) prostorů $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ taková, že pro všechna $x \in \mathcal{X}_1$ platí $\|f(x)\|_2 = \|x\|_1$.

Budou nás zajímat především B-prostory nekonečné dimenze, mj. z následujícího důvodu.

3.1.1 Tvrzení: (a) Každý konečnědimenzionální normovaný prostor V_n je úplný, tj. je to B-prostor.
(b) Každý konečnědimenzionální podprostor B-prostoru je uzavřený.
Důkaz: Vzhledem k lemmatu 2.1.9 stačí ověřit úplnost prostoru $(V_n, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$, kde norma $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ je určena pomocí libovolné báze $\mathcal{E} \equiv \{e_1, \dots, e_n\}$ vztahem $\|\sum_j \xi_j e_j\|_{\mathcal{E}} := (\sum_j |\xi_j|^2)^{1/2}$; je zřejmé, že $(V_n, \|\cdot\|_{\mathcal{E}}) \sim \mathbb{C}^n$, takže jde o úplný prostor. Tvrzení (b) je důsledkem (a) — viz cvičení 2.15. ■

Z konkrétních nekonečnědimenzionálních prostorů, s nimiž jsme se seznámili v předchozí kapitole, patří mezi Banachovy tyto prostory:
(i) $l^p, p \geqq 1$ a l^∞;
(ii) $L^p(M, d\mu)$, $p \geqq 1$ a $L^\infty(M, d\mu)$ pro libovolnou množinu M se σ-konečnou nezápornou mírou μ definovanou na σ-algebře $\mathcal{A} \subset 2^M$;
(iii) $C(X)$ pro každý topologický prostor X a $B(M)$ pro každou množinu M.

K ověření toho, zda daný normovaný prostor je nebo není Banachův, se často hodí následující kritérium, jehož důkaz přenecháváme čtenáři (cvičení 1):

3.1.2 Věta: Normovaný prostor V je úplný právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset V$ splňující podmínku $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ existuje $x \in V$ takové, že $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$.

Množina M v B-prostoru $\mathscr{X}$ je **totální,** jestliže $\overline{M_{\text{lin}}} = \mathscr{X}$. Je-li $\dim \mathscr{X} = n$, splývá pojem lineárně nezávislé totální množiny s pojmem báze. V nekonečnědimenzionálním prostoru $\mathscr{X}$ je zjevně každá Hammelova báze totální množina; je-li M lineárně nezávislá totální množina, která není Hammelovou bází, je její lineární obal nekonečnědimenzionálním podprostorem, který není uzavřený. Uvedeme některé jednoduché vlastnosti totálních množin.

3.1.3 Lemma: (a) Jestliže M je totální v B-prostoru $\mathscr{X}$, potom každá množina $N \subset \mathscr{X}$, která je hustá v M, je totální v $\mathscr{X}$.
(b) Když v $\mathscr{X}$ existuje spočetná totální množina, je $\mathscr{X}$ separabilní.
Důkaz: Tvrzení (a) se snadno ověří přímo z příslušných definic.
(b) Nechť $M \equiv \{x_1, x_2, \ldots\}$ je totální v $\mathscr{X}$ a $\mathbb{C}_{\text{rac}}$ je spočetná množina komplexních čísel, které mají racionální reálnou i imaginární část. Pro n $= 1, 2, \ldots$ má množina $L_n := \{\sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_j \colon \gamma_j \in \mathbb{C}_{\text{rac}}\}$ stejnou mohutnost jako $\mathbb{C}_{\text{rac}} \times \ldots \times \mathbb{C}_{\text{rac}}$; je to tedy spočetná množina, a spočetná je tudíž i množina $L := \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$. Z toho, že M je totální a $\mathbb{C}_{\text{rac}}$ hustá v $\mathbb{C}$, potom snadno plyne $\overline{L} = \mathscr{X}$. ∎

Mějme normovaný prostor V, který není úplný. Podle věty 2.2.3 existuje úplný metrický prostor $(\tilde{V}, \varrho)$ takový, že $\overline{(V)}_\varrho = \tilde{V}$ a $\varrho(x, y) = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in V$. Vzhledem k tomu, že ke každému $x \in \tilde{V}$ existuje posloupnost $\{x_k\} \subset V$, $\varrho(x_k, x) \to 0$, můžeme operace sčítání a násobení skalárem rozšířit z V na $\tilde{V}$, např. α-násobek vektoru $x \in \tilde{V} \setminus V$ definujeme jako limitu posloupnosti $\{\alpha x_k\} \subset V$, která je zjevně cauchyovská. Dále ze spojitosti metriky plyne $\varrho(x, y) = \lim_{k\to\infty} \|x_k - y_k\|$ a odtud zjistíme, že $\varrho(x, y) = \varrho(x - y, 0)$ a $\varrho(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, \varrho(x, y)$, takže $x \mapsto \varrho(x, 0)$ je norma na $\tilde{V}$ (viz § 2.1). Dospíváme tak k důležitému závěru:

3.1.4 Věta: Úplný obal normovaného prostoru V je B-prostor, který je určen jednoznačně až na lineární izometrie f takové, že $f(x) = x$ pro všechna $x \in V$.

3.1.5 Příklad: Množina $\mathscr{P}(a, b)$ tvořená všemi komplexními polynomiálními funkcemi reálné proměnné $x \in [a, b]$ je nekonečnědimenzionální podprostor Banachova prostoru $C([a, b])$. Podle Weierstrassovy věty ([[Jar 1]], věta 180) existuje ke každé funkci $f \in C([a, b])$ posloupnost $\{p_n\} \subset \mathscr{P}$, pro niž $\|p_n - f\|_\infty \to 0$. Banachův prostor $C([a, b])$ je tedy úplným obalem normovaného prostoru $(\mathscr{P}(a, b), \|\cdot\|_\infty)$. Jelikož $\mathscr{P}(a, b) \neq C([a, b])$, je $\mathscr{P}$ nekonečnědimenzionální neuzavřený podprostor v $C([a, b])$. Množina $\{x^k: k = 0, 1, \ldots\}$ je totální v $C([a, b])$; tento prostor je proto separabilní.

V následujících příkladech jsou v konkrétních B-prostorech nalezeny důležité totální množiny a podprostory.

3.1.6 Příklad: Pro $k = 0, 1, \ldots$ označíme $E_k := \{\delta_{jk}\}_{j=1}^{\infty}$ a k danému $X \equiv \{\xi_j\} \in l^p$, $p \geqq 1$, sestrojíme posloupnost $X_n := \sum_{j=1}^{n} \xi_j E_j$; potom $\|X - X_n\|_p = (\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p)^{1/p} \to 0$ pro $n \to \infty$. Množina $\{E_k: k = 1, 2, \ldots\}$ je tedy totální v prostoru l^p; ten je proto separabilní.

3.1.7 Příklad: Uvažujme B-prostor $L^p(\mathbb{R}^n, d\mu) \equiv L^p$, $1 \leqq p < \infty$, kde μ je libovolná borelovská míra na $\mathbb{R}^n$. Budeme užívat označení z příkladu A.1.1: $\mathcal{J}^n$ je systém všech omezených intervalů v $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{R}^n$ minimální okruh obsahující $\mathcal{J}^n$ a $\mathcal{B}^n$ systém borelovských množin v $\mathbb{R}^n$. Připomeňme, že každou množinu $R \in \mathcal{R}^n$ je možno vyjádřit jako sjednocení konečného disjunktního podsystému v $\mathcal{J}^n$. Dále označíme

$$S^{(n)} := \{\chi_J: J \in \mathcal{J}^n\}.$$

Jelikož $\mu(J) < \infty$ pro všechna $J \in \mathcal{J}^n$, platí inkluze $S^{(n)} \subset L^p$. Pro prvky lineárního obalu množiny $S^{(n)}$ se užívá názvu **schodovité funkce** na $\mathbb{R}^n$ (viz též cvičení 5).

Množina $S^{(n)}$ je totální v $L^p(\mathbb{R}^n, d\mu)$. Tvrzení dokážeme nejprve za předpokladu, že $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$. V tomto případě je množina $\{\chi_M: M \in \mathcal{B}^n\}$ totální v L^p (cvičení 6). Dále ke každým $M \in \mathcal{B}^n$, $\varepsilon > 0$, existuje $R \in \mathcal{R}^n$, pro něž $\mu(R \Delta M) < \varepsilon$ – viz lemma A.4.3c. Jelikož $\chi_R \in (S^{(n)})_{\mathrm{lin}}$ a $\|\chi_R - \chi_M\|_p = \mu(R \Delta M)^{1/p}$, je podle lemmatu 3 množina $S^{(n)}$ totální v L^p. Jestliže $\mu(\mathbb{R}^n) = \infty$, vyjádříme $\mathbb{R}^n$ jako disjunktní sjednocení spočetného systému $\{J_k: k = 1, 2, \ldots\} \subset \mathcal{J}^{(n)}$. Pro množiny $R_k := \bigcup_{l=1}^{k} J_l \in \mathcal{R}^n$ potom platí $R_k \subset R_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} R_k = \mathbb{R}^n$. K danému $f \in L^p$ sestrojíme posloupnost $f_k := f\chi_{R_k}$; z Lebesgueovy věty potom dostaneme

$$\lim_{k \to \infty} \|f - f_k\|_p = 0\,. \tag{1}$$

Uvažujme borelovskou míru μ_k definovanou vztahem $\mu_k(M) := \int_M \chi_{R_k} \, d\mu$, $M \in \mathcal{B}^n$. Díky tomu, že $\mu_k(\mathbb{R}^n) = \mu(R_k) < \infty$ a $f_k \in L^p(\mathbb{R}^n, d\mu_k)$, lze ke každému $\varepsilon > 0$ najít schodovitou funkci s, pro niž

$$\varepsilon > \int_{\mathbb{R}^n} |f_k - s|^p \, d\mu_k = \int_{\mathbb{R}^n} |f_k - s_k|^p \, d\mu\,, \qquad s_k := s\chi_{R_k}\,. \tag{2}$$

Jelikož χ_{R_k} je schodovitá, je i s_k schodovitá, a tvrzení plyne ze vztahů (1), (2).

Ze vztahu $\overline{(S^{(n)})_{\mathrm{lin}}} = L^p(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}\mu)$ a lemmatu 3 dále vyplývá:
(i) Prostor $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ je hustý v $L^p(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}\mu)$, neboť podle výsledků cvičení 7 je $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ hustá v $S^{(n)}$. Speciálně pro Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}^n$ platí $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ (ověřte) a současně $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Pro uzávěr $\overline{(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n))_p}$ prostoru $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ vzhledem k normě $\|\,.\,\|_p$ pak dostáváme

$$\overline{(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n))_p} = L^p(\mathbb{R}^n)\,. \tag{3}$$

(ii) Inkluze $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}\mu)$ implikuje, že také podprostor $C(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}\mu)$ je hustý v $L^p(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}\mu)$. To se dá dokázat také přímo, bez užití tvrzení (i), a to i pro obecnější prostory L^p – viz [[KF]], § VII.1.2.

3.1.8 Příklad: K danému topologickému prostoru (X, τ) sestrojíme množinu $C_\infty(X)$ tvořenou funkcemi $f \in C(X)$, které mají tuto vlastnost: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje kompaktní množina $K_\varepsilon^{(f)} \subset X$ taková, že $|f(x)| < \varepsilon$ pro všechna $x \in X \setminus K_\varepsilon^{(f)}$. Například množina $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ je tvořena právě těmi spojitými funkcemi, pro něž $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = 0$; speciálně platí $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Vzhledem k tomu, že konečné sjednocení kompaktních množin je kompaktní, je $C_\infty(X)$ podprostorem v $C(X)$. Není těžké ověřit, že normovaný prostor $(C_\infty(X), \|\,.\,\|_\infty)$ je úplný (cvičení 8).

Uvažujme množinu $C_0(X) \subset C_\infty(X)$ tvořenou spojitými funkcemi s kompaktním nosičem. To je podprostor v $C_\infty(X)$; dokážeme, že

$$\overline{C_0(X)} = C_\infty(X)\,. \tag{4}$$

Vzhledem k evidentním implikacím $f \in C_\infty(X) \Rightarrow \mathrm{Re}\, f,\ \mathrm{Im}\, f,\ |f| \in C_\infty(X)$ a $f \in C_\infty(X) \Rightarrow f_\pm := (|f| \pm f)/2 \in C_\infty(X)$ můžeme se omezit na nezáporné funkce $g \in C_\infty(X)$. K libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje kompaktní $K_\varepsilon^{(g)}$, pro niž $X \setminus K_\varepsilon^{(g)} \subset g^{(-1)}[0, \varepsilon)$. V důsledku spojitosti je množina $g^{(-1)}[\varepsilon, \infty)$ uzavřená, a protože je částí kompaktní množiny $K_\varepsilon^{(g)}$, je kompaktní. Funkce g_ε definovaná na množině $g^{(-1)}[\varepsilon, \infty)$ vztahem $g_\varepsilon := g - \varepsilon$ a vně této množiny nulou má tedy kompaktní nosič a pomocí spojitosti g se snadno ověří, že g je spojitá v každém bodě $x \in X$. Tedy $g_\varepsilon \in C_0(X)$ a současně $|g(x) - g_\varepsilon(x)| \leqq \varepsilon$ pro všechna $x \in X$, neboli $\|g - g_\varepsilon\|_\infty \leqq \varepsilon$; tím je rovnost (4) dokázána.

Pro $X = \mathbb{R}^n$ se dá ukázat, že podprostor $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C_\infty(\mathbb{R}^n)$ je hustý v $C_0(\mathbb{R}^n)$ – viz [[Yo]], § 1.1; z rovnosti (4) potom plyne

$$\overline{(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))_\infty} = \overline{(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n))_\infty} = C_\infty(\mathbb{R}^n)\,. \tag{5}$$

Existuje řada postupů umožňujících z daných Banachových prostorů konstruovat nové. Uvedeme nyní dva z nich; s dalšími se seznámíme v následujícím paragrafu (viz též komentář).

 (i) Mějme nejvýše spočetný systém B-prostorů $\mathscr{X}_j$, $j = 1, 2, \ldots$. Nechť $\mathscr{X}$ je množina posloupností $X \equiv \{x_j\}$, $x_j \in \mathscr{X}_j$, takových, že $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_j < \infty$ (v případě konečného systému $\mathscr{X} := \mathscr{X}_1 \times \ldots \times \mathscr{X}_n$). Na $\mathscr{X}$ definujeme sčítání a násobení komplexním číslem „po složkách" a položíme $\|X\|_{\oplus} := \sum_j \|x_j\|_j$. To je zjevně norma na $\mathscr{X}$, přičemž normovaný prostor $(\mathscr{X}, \|\cdot\|_{\oplus})$ je úplný (to se ověří podobně jako úplnost prostoru l^p – viz cvičení 2.12). Banachův prostor $\mathscr{X}$ nazýváme **direktním součtem** B-prostorů $\mathscr{X}_j$ a píšeme $\mathscr{X} = \sum_j^{\oplus} \mathscr{X}_j$. V případě konečného systému se píše též $\mathscr{X} = \mathscr{X}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{X}_n$.

(ii) Nechť I je indexová množina libovolné mohutnosti a každému $\alpha \in I$ je přiřazen nějaký B-prostor X_α. Symbolem $(\bigtimes_{\alpha \in I} \mathscr{X}_\alpha)_b$ označíme množinu všech zobrazení $F \in \bigtimes_{\alpha \in I} \mathscr{X}_\alpha$ (viz poznámku A.1.8b), pro něž $\sup_{\alpha \in I} \|F(\alpha)\|_\alpha < \infty$; zavedeme opět sčítání a násobení číslem po složkách a označíme $\|F\|_\infty := \sup_{\alpha \in I} \|F(\alpha)\|_\alpha$. Dostaneme tak B-prostor

$$\prod_{\alpha \in I} \mathscr{X}_\alpha := ((\bigtimes_{\alpha \in I} \mathscr{X}_\alpha)_b, \|\cdot\|_\infty)\,,$$

který použijeme v § 12.3. Pro speciální volbu množiny I a prostorů $\mathscr{X}_\alpha$ je tento prostor totožný s některými dříve probranými B-prostory: např. $\prod_{r=1}^{\infty} \mathbb{C} = l^\infty$ (viz příklad 1.3.3).

3.2 OMEZENÁ LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

Mějme normované prostory $(V, \|\cdot\|)$, $(V_1, \|\cdot\|_1)$ nad týmž tělesem ($\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$), ne nutně úplné. Říkáme, že lineární zobrazení $B\colon V \to V_1$ je **omezené,** jestliže existuje $c > 0$ takové, že pro všechna $x \in V$ platí

$$\|B(x)\|_1 \leqq c\|x\|\,. \tag{1}$$

Množinu všech takových zobrazení označíme $\mathscr{B}(V, V_1)$. Jestliže $(V, \|\cdot\|) = (V_1, \|\cdot\|_1)$, užíváme označení $\mathscr{B}(V)$. Prvkům množiny $\mathscr{B}(V)$ se říká *omezené (lineární) operátory* (na normovaném prostoru V). Názvu omezený operátor (z prostoru V do V_1) budeme alternativně užívat i pro $B \in \mathscr{B}(V, V_1)$, kdy $V \neq V_1$. Dále zkráceně píšeme Bx místo $B(x)$ a podobně B-obraz množiny $M \subset V$ značíme BM.

Množina $\mathscr{B}(V, V_1)$ se stane vektorovým prostorem, definujeme-li příslušné operace „bodově" pomocí sčítání a násobení skalárem v prostoru V_1:

$$(B + \alpha C)\, x := Bx + \alpha Cx\,. \tag{2}$$

Z definice (1) je vidět, že každému $B \in \mathscr{B}(V, V_1)$ můžeme přiřadit nezáporné číslo

$$\|B\| := \sup_{x \in V,\, \|x\| = 1} \|Bx\|_1\,. \tag{3}$$

3.2.1 Věta: (a) Zobrazení $B \mapsto \|B\|$ je norma na vektorovém prostoru $\mathscr{B}(V, V_1)$.
(b) Je-li prostor V_1 úplný, je $\mathscr{B}(V, V_1)$ také úplný, tj. je to Banachův prostor.
Důkaz: Tvrzení (a) je elementární. Nechť $\{B_n\}$ je cauchyovská posloupnost v prostoru $\mathscr{B}(V, V_1)$. Z implikace $n, m > n(\varepsilon) \Rightarrow \|B_n - B_m\|_1 < \varepsilon$ plyne pro každé $x \in V$

$$\|B_n x - B_m x\|_1 \leqq \varepsilon \|x\|\,. \tag{4a}$$

Posloupnost $\{B_n x\}$ v B-prostoru V_1 je tedy cauchyovská, a proto $B_n x \to Bx \in V_1$. Z linearity operátorů B_n plyne, že zobrazení $x \mapsto Bx$ je lineární; provedeme-li v nerovnosti (4a) limitní přechod, dostáváme

$$\|Bx - B_n x\|_1 \leqq \varepsilon \|x\|\,. \tag{4b}$$

Odtud $\|Bx\|_1 \leqq (\varepsilon + \|B_n\|)\, \|x\|$, tj. $B \in \mathscr{B}(V, V_1)$, a konečně nerovnost (4b) dává $\|B - B_m\| \leqq \varepsilon$, $m > n(\varepsilon)$. ■

3.2.2 Poznámky: (a) Normu (3) je možno ekvivalentně vyjádřit takto:

$$\|B\| = \sup_{x \in V, x \neq 0} \|Bx\|_1 / \|x\| = \sup_{x \in V,\, \|x\| \leqq 1} \|Bx\|_1 = \inf \mathscr{C}_B\,, \tag{5}$$

kde $\mathscr{C}_B$ je množina všech $c > 0$, pro něž je splněna podmínka (1).
(b) Je-li $V = V_1$, lze první tvrzení věty 1 rozšířit. Pro libovolné $B, C \in \mathscr{B}(V)$, $x \in V$ platí nerovnost

$$\|B(Cx)\| \leqq \|B\|\, \|Cx\| \leqq \|B\|\, \|C\|\, \|x\|\,,$$

z níž vyplývá, že pro složené zobrazení $BC \equiv B \circ C$ platí $BC \in \mathscr{B}(V)$ přičemž

$$\|BC\| \leqq \|B\|\, \|C\|\,. \tag{6}$$

Jestliže V je B-prostor, plyne z těchto vlastností, že prostor $\mathscr{B}(V)$ je tzv. Banachova algebra (viz § 12.2).

3.2.3 Tvrzení: Nechť V, V_1 jsou normované prostory a $B\colon V \to V_1$ je lineární zobrazení; potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

76 (i) $B \in \mathscr{B}(V, V_1)$,
(ii) B je spojité,
(iii) B je spojité v nějakém bodě $x \in V$.

Důkaz: Z linearity a podmínky (i) plyne

$$\|Bx - By\|_1 = \|B(x-y)\|_1 \leqq \|B\| \, \|x-y\| \ ,$$

takže (i) $\Rightarrow$ (ii). Protože (iii) plyne z (ii), zbývá dokázat (iii) $\Rightarrow$ (i). Jestliže B je spojité v bodě y, potom z předchozí nerovnosti plyne spojitost v 0 a odtud postupem užitým v příkladu 2.1.6 ověříme omezenost. ■

V předchozím paragrafu jsme viděli, že ke každému normovanému prostoru V, který není úplný, existuje jednoznačně určený B-prostor $\mathscr{X}$ – úplný obal. V této souvislosti vzniká otázka, kdy existuje pro daný lineární operátor $B\colon V \to V_1$ rozšíření na prostor $\mathscr{X}$ a jaké má toto rozšíření vlastnosti.

3.2.4 Věta *(o spojitém rozšíření):* Nechť $\mathscr{X}, \mathscr{X}_1$ jsou B-prostory a podprostor V je všude hustý v $\mathscr{X}$. Potom pro každé $B \in \mathscr{B}(V, \mathscr{X}_1)$ existuje právě jedno $\tilde{B} \in \mathscr{B}(\mathscr{X}, \mathscr{X}_1)$ takové, že $B = \tilde{B} \upharpoonright V$. Dále platí $\|B\| = \|\tilde{B}\|$.

Důkaz: Ke každému $x \in \mathscr{X}$ lze najít posloupnost $\{x_n\} \subset V$, $x_n \to x$. V důsledku omezenosti operátoru B je posloupnost $\{Bx_n\} \subset \mathscr{X}_1$ cauchyovská, takže existuje $y \in \mathscr{X}_1$, pro něž $\|Bx_n - y\|_1 \to 0$. Elementárními prostředky se ověří, že pro každou jinou posloupnost $\{x_n'\} \subset V$, $x_n' \to x$, platí $Bx_n' \to y$; vektor y tedy závisí jen na x. Z linearity limitního přechodu dále plyne, že přiřazení $x \mapsto y$ je lineární. Zkonstruovali jsme tak lineární zobrazení z $\mathscr{X}$ do $\mathscr{X}_1$, které označíme $\tilde{B}$. Jestliže $x \in V$, můžeme zvolit $x_n := x$, $n = 1, 2, \ldots$, a proto $\tilde{B} \upharpoonright V = B$. Z podmínky $\|Bx_n\|_1 \leqq \|B\| \, \|x_n\|$ dostaneme limitním přechodem $\|\tilde{B}x\|_1 \leqq \|B\| \, \|x\|$, takže $\tilde{B} \in \mathscr{B}(\mathscr{X}, \mathscr{X}_1)$, $\|\tilde{B}\| \leqq \|B\|$, a vzhledem k tomu, že $\tilde{B}$ je rozšířením B, musí platit rovnost. Nechť konečně $B = C \upharpoonright V$ pro nějaké $C \in \mathscr{B}(\mathscr{X}, \mathscr{X}_1)$. Jestliže $x \in \mathscr{X}$ a posloupnost $\{x_n\} \subset V$ konverguje k x, pak ze spojitosti plyne $Cx_n \to Cx$, a protože $Cx_n = Bx_n$ pro $n = 1, 2, \ldots$, je $C = \tilde{B}$. ■

3.2.5 Poznámky: (a) Definiční vztah

$$\tilde{B}x := \lim_{n \to \infty} Bx_n, \qquad \text{kde} \quad x := \lim_{n \to \infty} x_n, \quad x_n \in V\,, \tag{7}$$

je důležitý i z výpočetního hlediska. Operátor B bývá často zadán jednoduchou formulí a vztah (7) umožňuje vypočíst $\tilde{B}x$ v každém bodě $x \in \mathscr{X}$ s libovolnou přesností (ve smyslu topologie indukované normou $\|\cdot\|_1$).

(b) Připomeňme, že prostor $\mathscr{B}(V, \mathscr{X}_1)$ je úplný i v případě, že prostor V úplný není, tj. pro $V \neq \mathscr{X}$ je $\mathscr{B}(V, \mathscr{X}_1) = \overline{\mathscr{B}(V, \mathscr{X}_1)} \neq \mathscr{B}(\mathscr{X}, \mathscr{X}_1)$.

3.2.6 Příklad *(Fourierova transformace):* Budeme užívat označení zavedeného v příkladu 2.6.14. Dále budeme zkráceně psát $\mathscr{S} := \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $L^p := L^p(\mathbb{R}^n)$;

podobně v integrálech, u nichž není explicite uveden integrační obor, se integruje přes $\mathbb{R}^n$.

Pro dané $f \in \mathscr{S}$ položíme

$$\hat{f}(y) := (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i(x,y)} f(x)\, dx\,, \qquad y \in \mathbb{R}^n\,, \tag{8a}$$

kde $(.,.)$ je skalární součin na $\mathbb{R}^n$. Vzhledem k tomu, že každé $f \in \mathscr{S}$ patří do L^1, je tímto předpisem definována funkce $\hat{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Z implikace (2.6.6) vyplývá, že funkce $x \mapsto F_y^K(x) := e^{-i(x,y)} x^K f(x)$ má integrabilní majorantu nezávislou na y pro každé K. Můžeme tedy ve formuli (8a) derivovat podle y za znakem integrálu, což dává

$$y^J (D^K \hat{f})(y) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i(x,y)} (-i)^{|K|} y^J x^K f(x)\, dx =$$
$$= (2\pi)^{-n/2} (-i)^{|K| - |J|} \int D_x^J (e^{-i(x,y)})\, x^K f(x)\, dx\,,$$

kde index x v symbolu D_x^J vyznačuje proměnnou, podle které derivujeme. Nyní Fubiniova věta a integrace *per partes* dávají

$$y^J (D^K \hat{f})(y) = (2\pi)^{-n/2} (-i)^{|K| + |J|} \int e^{-i(x,y)} D^J (x^K f)(x)\, dx\,.$$

Protože integrand se opět majorizuje nezávisle na y, existuje konečné $\sup |(y^J D^K f)(y)|$ pro všechna J a K, takže $\hat{f} \in \mathscr{S}$. Dále pro $P_n(x) := 1 + \|x\|^{2n}$ platí $1/P_n \in L^1(\mathbb{R}^n)$, což poskytuje odhad

$$\|\hat{f}\|_{J,K} \leqq C_n \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |P_n(x)\,(D^J x^K f)(x)|\,, \qquad C_n := (2\pi)^{-n/2} \int |P_n|^{-1}\, dx\,.$$

Pomocí Leibnizova pravidla ještě upravíme $D^J(x^K f)(x)$; pak již snadno zjistíme, že pro dané J, K existuje přirozené m, multiindexy L_j, M_j a konstanty c_j, pro něž $\|\hat{f}\|_{J,K} \leqq \sum_{j=1}^{m} c_j \|f\|_{L_j, M_j}$. Z vlastností funkce $\hat{f}$, které jsme takto odvodili, vyplývá, že vztahem (8a) je definováno lineární zobrazení $\mathscr{F}_0$ prostoru $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ do sebe, tj.

$$\mathscr{F}_0 f = \hat{f}\,, \tag{8b}$$

které je spojité vzhledem k topologii Schwartzova prostoru. Stejné vlastnosti má zobrazení $\mathscr{F}_0'\colon f \to \check{f}$, $\check{f}(x) := \hat{f}(-x)$. Tvrdíme, že pro každé $f \in \mathscr{S}$ platí $\mathscr{F}_0' \mathscr{F}_0 f = f$ a $\mathscr{F}_0 \mathscr{F}_0' f = f$, tj.

$$\mathscr{F}_0' = \mathscr{F}_0^{-1} . \tag{9}$$

Důkaz je založen na vztahu

$$\int e^{i(x,y)} g(y) \hat{f}(y) \, dy = \int \hat{g}(y) f(x + y) \, dy , \tag{10}$$

který platí pro $f, g \in \mathscr{S}$, $x \in \mathbb{R}^n$ (cvičení 13). Pro $\varepsilon > 0$ položíme $g_\varepsilon(x) := \exp(-\varepsilon^2 \|x\|^2/2)$ a pomocí Fubiniovy věty a známé formule

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2} - i\xi\eta\right) d\xi = 2 \int_{\mathbb{R}^+} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}\right) \cos(\xi\eta) \, d\xi = \frac{(2\pi)^{1/2}}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\varepsilon^2}\right),$$

jež platí pro libovolné reálné η (viz [[GR]], § 3.896), dostaneme $\hat{g}_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-n} \exp(-\|y\|^2/(2\varepsilon^2))$. Po dosazení do (10) získáme pro každé $\varepsilon > 0$ rovnost

$$\int \exp(i(x,y) - \varepsilon^2\|y\|^2/2) \hat{f}(y) \, dy = \int \exp(-\tfrac{1}{2} \|y/\varepsilon\|^2) f(x + y) \, \varepsilon^{-n} \, dy = \int \exp(-\tfrac{1}{2} \|z\|^2) f(x + \varepsilon z) \, dz .$$

Oba integrandy mají integrabilní majoranty nezávislé na ε; limitní přechod $\varepsilon \to 0^+$ potom dává

$$(\mathscr{F}_0' \hat{f})(x) = (2\pi)^{-n/2} f(x) \int \exp(-\tfrac{1}{2} \|z\|^2) \, dz = f(x) \, \hat{g}_1(0) = f(x) .$$

Tím je dokázána rovnost $\mathscr{F}_0' \mathscr{F}_0 f = f$; z ní a vztahu $\check{f}(x) = \hat{f}(-x)$ dostaneme $\mathscr{F}_0 \mathscr{F}_0' f = f$. Souhrnně můžeme říci, že *zobrazení $f \mapsto \mathscr{F}_0 f$ je lineární homeomorfismus Schwartzova prostoru $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ se sebou samým, přičemž pro inverzní zobrazení platí $(\mathscr{F}_0^{-1} f)(x) = (\mathscr{F}_0 f)(-x)$.* Pomocí věty 3.2.4 zkonstruujeme dvě důležitá rozšíření zobrazení $\mathscr{F}_0$. Vyjdeme z toho, že množina $\mathscr{S}$ je vzhledem k normě $\|.\|_p$ hustá v B-prostoru L^p, $p \geqq 1$ (viz (3.1.3)); normovaný prostor $(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \|.\|_p)$ označíme $\mathscr{S}_p(\mathbb{R}^n)$.

(i) Jelikož $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ je také podmnožinou v prostoru $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ a protože z (8a) plyne $\|\hat{f}\|_\infty \leqq (2\pi)^{-n/2} \|f\|_1$, můžeme zobrazení $\mathscr{F}_0$ interpretovat jako prvek prostoru $\mathscr{B}(\mathscr{S}_1(\mathbb{R}^n), C_\infty(\mathbb{R}^n))$. Spojitým rozšířením dostaneme zobrazení $\mathscr{F} \in \mathscr{B}(L^1(\mathbb{R}^n), C_\infty(\mathbb{R}^n))$. Ukážeme, že funkci $\mathscr{F} f$ je možno i pro $f \in L^1 \setminus \mathscr{S}$ počítat přímo integrálem (8a). Podle (7) platí pro každé $f \in L^1, \{f_k\} \subset \mathscr{S}$, implikace $\|f_k - f\|_1 \to 0 \Rightarrow \|\mathscr{F}f - \hat{f}_k\|_\infty \to 0$; současně

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \left| \int e^{-i(x,y)} f(x)\, dx - (2\pi)^{n/2} \hat{f}_k(y) \right| \leqq \|f - f_k\|_1 .$$

Odtud plyne pro každé $f \in L^1$:

$$(\mathscr{F}f)(y) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i(x,y)} f(x)\, dx\,, \qquad y \in \mathbb{R}^n . \tag{11}$$

Funkce $\mathscr{F}f$ se nazývá **Fourierovou transformací** funkce $f \in L^1$ a tvrzení $\mathscr{F}f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$, z nějž plyne

$$\lim_{\|x\| \to \infty} (\mathscr{F}f)(x) = 0\,, \tag{12}$$

Riemannovým-Lebesgueovým lemmatem.

(ii) Z definičního vztahu (8a) plyne $\bar{\hat{f}} = \hat{\bar{f}}$ (pruh označuje komplexní sdružení); dosadíme-li tedy do (10) funkci $g := \bar{f}$, dostaneme pro $x = 0$:

$$\int |\hat{f}(y)|^2\, dy = \int |f(y)|^2\, dy\,, \qquad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\,. \tag{13}$$

Z této rovnosti plyne další možná interpretace zobrazení $\mathscr{F}_0$ jako prvku prostoru $\mathscr{B}(\mathscr{S}_2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))$. Jeho spojitým rozšířením dostaneme operátor $F \in \mathscr{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$, kterému se říká **Fourierův-Plancherelův operátor;** pokud je nutné explicite vyznačit dimenzi prostoru $\mathbb{R}^n$, píšeme $F \equiv F_n$. Ukážeme, že F je izometrie: k danému $f \in L^2$ existuje posloupnost $\{f_k\} \subset \mathscr{S}$, $\|f - f_k\|_2 \to 0$; ze spojitosti plyne $\|Ff_k\|_2 \to \|Ff\|_2$ a současně rovnost (13) dává $\|Ff_k\|_2 = \|f_k\|_2 \to \|f\|_2$, takže

$$\|Ff\|_2 = \|f\|_2\,, \qquad f \in L^2(\mathbb{R}^n)\,. \tag{14}$$

Odtud se snadno odvodí, že operátor F je surjektivní (viz cvičení 14). *Fourierův--Plancherelův operátor je tedy lineární izometrie prostoru $L^2(\mathbb{R}^n)$ se sebou samým.*

Pro akci operátoru F na vektory $f \in L^2 \setminus \mathscr{S}$ máme zatím k dispozici jen limitní vyjádření (7). Jednoduchou funkcionální realizaci operátoru F je možno najít pro $n=1$ (viz příklad 5.1.11). Zde se omezíme na to, že pro $h \in L^2 \cap L^1$ a s. v. $y \in \mathbb{R}^n$ ukážeme platnost vztahu

$$(Fh)(y) = (\mathscr{F}h)(y) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i(x,y)} h(x)\, dx\,. \tag{15}$$

Důkaz provedeme nejprve za předpokladu, že $\operatorname{supp} h \subset J$, kde J je omezený interval v $\mathbb{R}^n$. Nechť pro posloupnost $\{h_k\} \subset \mathscr{S}$ platí $\operatorname{supp} h_k \subset J$, $k = 1, 2, \ldots$, $\|h - h_k\|_2 \to 0$ (cvičení 15). Z Hölderovy nerovnosti plyne $\|h - h_k\|_1 \leqq \leqq \mu(J)^{1/2}\|h - h_k\|_2$, kde $\mu(J)$ je objem intervalu J, a odtud $\|h - h_k\|_1 \to 0$; proto funkce $\mathscr{F}_0 h_k$ stejnoměrně konvergují k $\mathscr{F}h$ na $\mathbb{R}^n$. Současně $\mathscr{F}_0 h_k = Fh_k$, takže $\|\mathscr{F}_0 h_k - Fh\|_2 = \|h_k - h\|_2 \to 0$. Dokazované tvrzení potom vyplývá z výsledků cvičení 16. Pro obecné $h \in L^2 \cap L^1$ označíme symbolem χ_j charakteristickou funkci koule $\{x \in \mathbb{R}^n\colon \|x\| \leqq j\}$ a položíme $h_j := \chi_j h$. Pomocí Lebesgueovy věty zjistíme, že $\|h_j - h\|_p \to 0$, pro $p = 1, 2$; pro $p = 1$ odtud dostáváme $(\mathscr{F}h_j)(x) \to (\mathscr{F}h)(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ (dokonce stejnoměrně). Protože má funkce h_j omezený nosič, platí podle předchozího $(\mathscr{F}h_j)(x) = (Fh_j)(x)$ pro $x \in \mathbb{R}^n \setminus N_j$, kde N_j je množina nulové míry. Pro $x \in R^n \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$, tj. pro s. v. $x \in \mathbb{R}^n$ je $(Fh_j)(x) = (\mathscr{F}h_j)(x) \to (\mathscr{F}h)(x)$. Nakonec $\|h_j - h\|_2 \to 0$ implikuje $\|Fh_j - Fh\|_2 = \|h_j - h\|_2 \to 0$ a důkaz se opět dokončí pomocí cvičení 16.

Poznamenejme na závěr, že pro každé $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ platí (viz (7))

$$\|Ff - Ff_j\|_2 \to 0\,, \qquad f_j := f\chi_j\,. \tag{16a}$$

Vzhledem k tomu, že $f_j \in L^2 \cap L^1$, tj. platí pro ně formule (15), užívá se pro (16a) ekvivalentního funkcionálního zápisu

$$(Ff)(y) = \operatorname*{l.i.m.}_{j\to\infty} (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\|x\| \leqq j} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x,y)} f(x)\, \mathrm{d}x\,, \tag{16b}$$

kde symbol l.i.m. (*limes in medio*) vyjadřuje, že nejde o bodovou konvergenci, nýbrž o konvergenci vzhledem k normě v L^2.

3.3 DUÁLNÍ PROSTORY

Jestliže V je komplexní nebo reálný normovaný prostor, užíváme pro $\mathscr{B}(V, \mathbb{C})$, resp. $\mathscr{B}(V, \mathbb{R})$ názvu **duální prostor** k V a označení V^*. Prvky prostoru V^* jsou tedy omezené lineární funkcionály na V; budeme je většinou označovat $f, g, \ldots$. Často se užívá též označení $x^*, y^*, \ldots$; hodnota, jíž nabývá daný $f \in V^*$, resp. $x^* \in V^*$ v bodě $x \in V$ se značí $f(x) \equiv \langle f, x\rangle$, resp. $x^*(x) \equiv x^*x$.

Srovnání s definicí algebraického duálního prostoru v § 1.2 ukazuje, že V^* je podprostorem vektorového prostoru V^f. Ovšem V^* je navíc B-prostor vzhledem k normě (3.2.3); jestliže $\dim V = \infty$, nelze tuto normu rozšířit na celý prostor V^f, tj. pro nekonečnědimenzionální V platí $V^* \neq V^f$ (cvičení 17). Naopak v případě $\dim V = n$ zvolíme jakoukoliv bázi $\mathscr{E} \equiv \{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$; pro každé $f \in V^f$ a $x \equiv \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n \in V$ z Hölderovy nerovnosti plyne $|f(x)| \leqq C\|x\|_{\mathscr{E}}$, kde

$C := [\sum_{i=1}^{n}(f(e_i))^2]^{1/2}$ a $\|x\|_{\mathscr{E}} := (\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^2)^{1/2}$. Vzhledem k ekvivalenci všech norem na V je f omezený. Shrneme výsledky těchto úvah:

3.3.1 Tvrzení: Pro daný normovaný prostor V jsou vektorové prostory V^*, V^f totožné právě tehdy, když $\dim V < \infty$.

Uvedeme některé závažné důsledky Hahnova-Banachova teorému.

3.3.2 Věta: Nechť V_0 je podprostor normovaného prostoru V.
(a) Ke každému $f_0 \in V_0^*$ existuje $f \in V^*$ tak, že $f \restriction V_0 = f_0$ a $\|f_0\| = \|f\|$.
(b) Jestliže $\overline{V_0} \neq V$, potom pro každé $z \notin \overline{V_0}$ existuje $f_z \in V^*$ takové, že $f_z \restriction V_0 = 0$ a $f_z(z) = d(z) := \inf_{y \in V_0}\|z - y\|$, přičemž $\|f_z\| = 1$.

Důkaz: Tvrzení (a) plyne z Hahnova-Banachova teorému pro $p(\cdot) = \|f_0\| \, \|\cdot\|$. (b) Zobrazení $x \mapsto d(x)$ je seminorma na V, přičemž $d(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{V_0}$ (cvičení 12). Pro každý prvek prostoru $V_1 := \{x \in V\colon x = y + \alpha z,\ y \in V_0,\ \alpha \in \mathbb{C}\}$ položme $f_1(x) := \alpha d(z)$; speciálně máme $f_1(z) = d(z)$. To je zjevně lineární funkcionál na V_1 a z vlastností seminormy d plyne $|f_1(y + \alpha z)| = |\alpha|\, d(z) = d(\alpha z) \leqq \|\alpha z + y\|$, takže $f_1 \in V_1^*$ a $\|f_1\| \leqq 1$. Dále pro každé $y \in V_0$ platí $d(z) = |f_1(y - z)| \leqq \|f_1\|\,\|z - y\|$ a odtud $\|f_1\| \inf_{y \in V_0}\|z - y\| \geqq d(z)$. Celkem máme $\|f_1\| = 1$ a tvrzení plyne z (a). ■

3.3.3 Poznámka: V případě, že prostor V je úplný a $\overline{V_0} = V$, je tvrzení (a) totožné s větou 3.2.4 (pro $\mathscr{X}_1 = \mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$), což mj. znamená, že f je určen funkcionálem f_0 jednoznačně.

3.3.4 Důsledek: (a) Ke každému nenulovému $x \in V$ existuje $f_x \in V^*$ tak, že $f_x(x) = \|x\|$ a $\|f_x\| = 1$.
(b) Množina V^* odděluje body prostoru V.
(c) Jestliže duální prostor $\mathscr{X}^*$ k danému B-prostoru $\mathscr{X}$ je separabilní, potom $\mathscr{X}$ je rovněž separabilní.

Důkaz: Tvrzení (a), (b) čtenář snadno ověří sám (cvičení 18). Nechť $\{f_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$ je hustá množina v $\mathscr{X}^*$. Sestrojíme množinu $M \equiv \{x_n \in \mathscr{X}\colon \|x_n\| = 1, |f_n(x_n)| > \frac{1}{2}\|f_n\|, n = 1, 2, \ldots\}$ (existence vektorů x_n splňujících tuto nerovnost plyne z definice normy). Vzhledem k lemmatu 3.1.3 stačí dokázat, že M je totální v $\mathscr{X}$. Nechť $V_0 := \overline{M_{\text{lin}}}$; jestliže $V_0 \neq \mathscr{X}$, existuje podle věty 2(b) funkcionál $f \in \mathscr{X}^*$ takový, že $\|f\| = 1$ a $f(x) = 0$ pro $x \in V_0$. K libovolnému $\varepsilon > 0$ najdeme f_n, pro něž $\|f_n - f\| < \varepsilon$, tj. $\|f_n\| > 1 - \varepsilon$. Nyní $\varepsilon > \|f_n - f\| \geqq |f_n(x_n) - f(x_n)| = |f_n(x_n)| > \|f_n\|/2 > (1 - \varepsilon)/2$. Předpoklad $V_0 \neq \mathscr{X}$ tedy vede ke sporu. ■

Při vyšetřování vlastností konkrétního B-prostoru $\mathscr{X}$ patří mezi základní úlohy najít „analytické" vyjádření prostoru $\mathscr{X}^*$, což se také formuluje jako úloha nalezení obecného tvaru omezeného lineárního funkcionálu na $\mathscr{X}$. Probereme několik příkladů s tím, že se k této úloze vrátíme ještě v příští kapitole.

3.3.5 Příklad (prostory $(l^p)^*$, $1 \leqq p < \infty$): Ukážeme, že prostor $(l^p)^*$, $1 \leqq p < \infty$, je lineárně izometrický prostoru $l^{p'}$, kde

$$p' := \begin{cases} p/(p-1) \ldots p > 1 \\ \infty \qquad \ldots p = 1 \end{cases}. \tag{1}$$

Pro libovolné $X \equiv \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^p$ a $Y \equiv \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^{p'}$ platí Hölderova nerovnost

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k\right| \leqq \|X\|_p \, \|Y\|_{p'}, \tag{2}$$

takže

$$f_Y(X) := \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k \tag{3}$$

je omezený lineární funkcionál na l^p, přičemž z (2) plyne

$$\|f_Y\| \leqq \|Y\|_{p'}. \tag{4}$$

Vztah (3) tedy definuje zobrazení $Y \mapsto f_Y$ prostoru $l^{p'}$ do $(l^p)^*$, které je zjevně lineární. Tvrdíme, že toto zobrazení je hledanou lineární izometrií, tj. že ke každému $f \in (l^p)^*$ existuje $Y_f \equiv \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^{p'}$ tak, že $f = f_{Y_f}$ a $\|f\| = \|Y_f\|_{p'}$. Ukážeme, že $\varphi_k = f(E_k)$, kde $E_k := \{\delta_{jk}\}_{j=1}^{\infty}$. Podle příkladu 3.1.6 pro každé $X \equiv \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^p$ platí $\|X - X_n\|_p \to 0$, kde $X_n := \sum_{k=1}^{n} \xi_k E_k$. Odtud na základě spojitosti f vyplývá $f(X) = \lim_{n \to \infty} f(X_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k$, takže vztah (3) je splněn. Ověříme dále, že $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^{p'}$. Uvažujme nejprve případ $p > 1$. Položíme $\zeta_k := u(\overline{\varphi_k})\, |\varphi_k|^{p'-1}$, kde funkci $u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definujeme takto:

$$u(z) := \begin{cases} z/|z| \ldots z \neq 0 \\ 0 \qquad \ldots z = 0 \end{cases}. \tag{5}$$

Pro vektory $X_n := \sum_{k=1}^{n} \zeta_k E_k$, $n = 1, 2, \ldots$, potom platí $\|X_n\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi_k|^{p'}\right)^{1/p}$ a $f(X_n) = \sum_{k=1}^{n} |\varphi_k|^{p'}$, a z nerovnosti $|f(X_n)| \leqq \|f\| \, \|X_n\|_p$ dostáváme

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k|^{p'}\right)^{1/p'} \leqq \|f\| \,. \tag{6}$$

Jestliže $p = 1$, potom pro $X = E_n$, $n = 1, 2, \ldots$ máme $|f(E_n)| = |\varphi_n|$, a protože $\|E_n\|_1 = 1$, platí nerovnost

$$\sup_n |\varphi_n| \leqq \|f\| \,. \tag{7}$$

V obou případech tedy $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ patří do $l^{p'}$ a dále nerovnosti (4), (6) a (7) dávají $\|f\| = \|Y_f\|_{p'}$. Zobrazení $Y \mapsto f_Y$ je tedy lineární izometrie prostorů $l^{p'}$ a $(l^p)^*$:

$$(l^p)^* \sim l^{p'}, \qquad 1 \leqq p < \infty \,. \tag{8}$$

Podobně se zjistí, že $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty) \sim (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1)$. Naproti tomu prostory $(l^\infty)^*$ a l^1 izometrické nejsou: to plyne z důsledku 4c, neboť prostor l^∞ je neseparabilní (viz cvičení 2.6), zatímco l^1 je separabilní.

3.3.6 Poznámka: Analogický výsledek platí pro prostory $L^p \equiv L^p(X, \mathrm{d}\mu)$, kde μ je σ-konečná míra: zobrazení $L^{p'} \ni \varphi \mapsto J_\varphi \in (L^p)^*$, kde

$$J_\varphi(\psi) := \int_X \varphi\psi \,\mathrm{d}\mu \,, \qquad \psi \in L^p \,, \tag{9a}$$

je pro všechna $p \in [1, +\infty)$ izometrií prostorů $L^{p'}$ a $(L^p)^*$, tj.

$$(L^p)^* \sim L^{p'}, \qquad 1 \leqq p < \infty \tag{9b}$$

(viz ⟦Ru 1⟧, § 6.16; ⟦Tay⟧, § 7.4). Prostory $(L^\infty)^*$ a L^1 opět nejsou izometrické (s výjimkou triviálního případu diskrétní míry μ_d takové, že $L^\infty(X, \mathrm{d}\mu_d) \sim$ $\sim (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Analytické vyjádření prostoru $(L^\infty)^*$ lze najít v ⟦DS 1⟧, § IV.8, kde se rovněž dokazuje, že (9b) platí pro každou nezápornou míru, jestliže $p > 1$.

3.3.7 Poznámka: Dalším důležitým příkladem B-prostorů, pro něž lze najít jednoduché analytické vyjádření obecného omezeného lineárního funkcionálu, jsou prostory $C(K)$, resp. $C_{\mathbb{R}}(K)$ komplexních, resp. reálných funkcí spojitých na kompaktním Hausdorffově prostoru K. Příslušné tvrzení, tzv. **Rieszova-Markovova věta,** se formuluje pomocí komplexních (reálných) borelovských měr na K. Ve speciálním případě prostoru $C_{\mathbb{R}}[a, b]$ lze každou takovou míru vyjádřit pomocí funkce F s konečnou variací (podobně jako v příkladu A.4.8). Věta pak říká, že ke každému $f \in C_{\mathbb{R}}^*[a, b]$ existuje funkce F s konečnou variací taková, že pro všechna $\varphi \in C_{\mathbb{R}}[a, b]$ platí

$$f(\varphi) = \int_{[a,b]} \varphi \, \mathrm{d}F \,. \tag{10}$$

Navíc $\|f\|$ se rovná (totální) variaci funkce F (podrobnosti viz např. v [[KF]], § VI.6.6 nebo [[RN]], § 50). Obecnou formulaci a důkaz Rieszovy-Markovovy věty lze najít např. v [[DS 1]], § IV.6.

Duální prostor k danému normovanému prostoru V je normovaný; proto můžeme vytvořit druhý duální prostor $V^{**} := (V^*)^*$ a obecně n-tý duální prostor $V^{(n*)}$, $n = 1, 2, \dots$. V této souvislosti hrají důležitou roli funkcionály J_x na V^* definované pro každé $x \in V$ vztahem

$$J_x(f) := f(x) \,. \tag{11}$$

Snadno ověříme, že $J_x \in V^{**}$, přičemž $\|J_x\| \leqq \|x\|$. Pomocí důsledku 4a získáme opačnou nerovnost: $|J_x(f_x)| = \|x\| \leqq \|J_x\| \, \|f_x\| = \|J_x\|$. Zobrazení J_x tedy zachovává normu, a je proto injektivní. Souhrnně lze říci:

3.3.8 Tvrzení: Zobrazení $x \mapsto J_x$ je lineární izometrie prostoru V a podprostoru $\mathrm{Ran}\, J \subset V^{**}$.

V případě, že toto zobrazení je surjektivní, tj. jestliže ke každému $\varphi \in V^{**}$ existuje $x \in V$ takové, že pro všechna $f \in V^*$ platí $\varphi(f) = f(x)$, říkáme, že prostor V je **reflexivní.** Pro reflexivní prostory je tedy vztahem (11) určena lineární izometrie $V \to V^{**}$. Z toho např. vyplývá:

(i) každý reflexivní prostor V je automaticky Banachův,

(ii) jestliže B-prostor $\mathcal{X}$ je reflexivní, jsou reflexivní i prostory $\mathcal{X}^{(n*)}$, $n = 1, 2, \dots$ (cvičení 21).

Příkladem reflexivních prostorů jsou prostory l^p a $L^p(M, \mathrm{d}\mu)$ pro $1 < p < \infty$ (cvičení 20); naproti tomu pro $p = 1$ tyto prostory reflexivní nejsou. Rovněž prostor $C(K)$ není reflexivní.

Následující tvrzení, které uvádíme bez důkazu (viz [[DS 1]], § II.3.23), budeme potřebovat v § 3.5.

3.3.9 Věta: Každý uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.

3.4 PRINCIP STEJNOMĚRNÉ OMEZENOSTI A OTEVŘENOSTI ZOBRAZENÍ

Vzhledem k tomu, že každý B-prostor $\mathcal{X}$ je úplný metrický prostor, platí pro něj Baireova věta. V teorii Banachových prostorů se jí užívá většinou k důkazu existence vnitřních bodů nějaké množiny: jestliže pro systém $\{M_n \subset \mathcal{X} : n = 1, 2, \dots\}$ platí $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = \mathcal{X}$, potom alespoň jedna z množin $\overline{M_n}$ má vnitřní bod. Pomocí tohoto tvrzení odvodíme dvě obecné věty – principy, které mají základní důležitost pro studium vlastností množiny $\mathscr{B}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$.

3.4.1 Věta (*princip stejnoměrné omezenosti*): Nechť $\mathscr{F}$ je libovolná množina v prostoru $\mathscr{B}(\mathscr{X}, V_1)$, kde $\mathscr{X}$ je B-prostor s normou $\|.\|$, a $(V_1, \|.\|_1)$ je nějaký normovaný prostor. Jestliže pro každé $x \in \mathscr{X}$ platí

$$s(x) := \sup_{B \in \mathscr{F}} \|Bx\|_1 < \infty\,, \tag{1a}$$

potom existuje $c > 0$ takové, že

$$\sup_{B \in \mathscr{F}} \|B\| < c\,. \tag{1b}$$

Důkaz: V důsledku spojitosti každého $B \in \mathscr{F}$ a normy $\|.\|_1$ jsou

$$M_n^{(B)} := \{x \in \mathscr{X}\colon \|Bx\|_1 \leqq n\},\ n = 1, 2, \ldots,$$

a

$$M_n := \bigcap_{B \in \mathscr{F}} M_n^{(B)} = \{x \in \mathscr{X}\colon \sup_{B \in \mathscr{F}} \|Bx\|_1 \leqq n\}$$

uzavřené množiny. Z předpokladu (1a) dostáváme $\mathscr{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ a podle Baireovy věty alespoň jedna z množin M_n má vnitřní bod, tj. existuje přirozené $\bar{n}$, $\bar{x} \in M_{\bar{n}}$ a $\varepsilon > 0$ tak, že všechna x splňující $\|x - \bar{x}\| < \varepsilon$ patří do $M_{\bar{n}}$, a tudíž pro ně platí

$$\sup_{B \in \mathscr{F}} \|Bx\|_1 \leqq \bar{n}\,. \tag{2}$$

Pro libovolný jednotkový vektor $y \in \mathscr{X}$ položíme $x_y := \frac{\varepsilon}{2} y$; potom $\|x_y + \bar{x} - \bar{x}\| = \|x_y\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, takže $x_y + \bar{x} \in M_{\bar{n}}$, a z (2) dostaneme pro každé $B \in \mathscr{F}$

$$\|By\|_1 = \frac{2}{\varepsilon} \|Bx_y\|_1 \leqq \frac{2}{\varepsilon} (\|B(x_y + \bar{x})\|_1 + \|B\bar{x}\|_1) \leqq \frac{4\bar{n}}{\varepsilon}\,,$$

a tedy také $\|B\| = \sup_{\|y\|=1} \|By\|_1 \leqq 4\bar{n}/\varepsilon$. ■

Příkladem použití věty je důkaz spojitosti zobrazení $[x, y] \mapsto F(x, y)$, je-li známo, že $x \mapsto F(x, y)$ je spojité pro každé y a $y \mapsto F(x, y)$ je spojité pro každé x a jsou splněny jisté dodatečné předpoklady.

3.4.2 Tvrzení: Nechť (Y, τ) je lokálně kompaktní topologický prostor, $\mathscr{X}$ je Banachův prostor a nechť zobrazení $F\colon (\mathscr{X} \times Y, \tau_{\mathscr{X} \times Y}) \to (V, \|\cdot\|_1)$ má tyto vlastnosti:

(i) F je lineární v prvním argumentu, tj. $F(\alpha x + x', y) = \alpha F(x, y) + F(x', y)$ pro všechna $x, x' \in \mathscr{X}$, $y \in Y$, $\alpha \in \mathbb{C}$;

(ii) zobrazení $B_y\colon \mathscr{X} \to (V, \|\cdot\|_1)$, $B_y(x) := F(x, y)$ je spojité pro každé $y \in Y$;

(iii) zobrazení $C_x\colon (Y, \tau) \to (V, \|\cdot\|_1)$, $C_x(y) := F(x, y)$ je spojité pro každé $x \in \mathscr{X}$.

Potom F je spojité.

Důkaz: Nechť $[x_0, y_0] \in \mathscr{X} \times Y$, $\varepsilon > 0$; v důsledku lokální kompaktnosti prostoru (Y, τ) a předpokladu (iii) existuje okolí $U_0 \in \tau$ bodu y_0 takové, že množina $K \equiv \overline{U_0}$ je kompaktní a $\|F(x_0, y) - F(x_0, y_0)\|_1 < \varepsilon/2$ pro všechna $y \in U_0$. Podmínky (i), (ii) znamenají, že pro každé $y \in Y$ platí $B_y \in \mathscr{B}(\mathscr{X}, V)$, tj. $\|B_y(x)\|_1 \leqq \|B_y\| \, \|x\|$ pro $x \in \mathscr{X}$. Označme $\mathscr{F} := \{B_y\colon y \in K\} \subset \mathscr{B}(\mathscr{X}, V)$. Pro dané $x \in \mathscr{X}$ plyne ze spojitosti zobrazení C_x, že množina $\{C_x(y)\colon y \in K\} = \{F(x, y)\colon y \in K\}$ je kompaktní ve $(V, \|\cdot\|_1)$ a tudíž omezená; existuje tedy $s(x) > 0$ takové, že pro každé $y \in K$

$$\|F(x, y)\|_1 = \|B_y(x)\|_1 \leqq s(x)\,.$$

Množina $\mathscr{F}$ tedy splňuje podmínku (1a), a proto pro všechna $y \in K$ platí $\|B_y\| < c$. Položíme-li $\delta := \varepsilon/2c$, máme pro všechna $[x, y]$ splňující $\|x - x_0\| < \delta$ a $y \in U_0$ odhad

$$\|F(x, y) - F(x_0, y_0)\|_1 \leqq \|F(x, y) - F(x_0, y)\|_1 + \|F(x_0, y) - F(x_0, y_0)\|_1 \leqq$$
$$\leqq \|F(x - x_0, y)\|_1 + \frac{\varepsilon}{2} \leqq \|B_y\| \, \delta + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,. \quad \blacksquare$$

3.4.3 Poznámka: Toto tvrzení zůstává v platnosti, zaměníme-li předpoklad lokální kompaktnosti požadavkem, aby prostor (Y, τ) splňoval první axiom spočetnosti (cvičení 23).

3.4.4 Příklad: Uvažujme prostor $(M, \mathscr{A}, \mu)$ se σ-konečnou mírou a B-prostor $L^p \equiv L^p(M, d\mu)$ pro $1 \leqq p < \infty$ a označme $p' = p/(p-1)$ pro $p > 1$, resp. $p' = \infty$ pro $p = 1$. Dokážeme, že známou implikaci $f \in L^p$, $g \in L^{p'} \Rightarrow fg \in L^1$ je možno obrátit v následujícím smyslu: *jestliže funkce $g\colon M \to \mathbb{C}$ je měřitelná a $fg \in L^1$ pro všechna $f \in L^p$, potom $g \in L^{p'}$*. Vzhledem k σ-konečnosti míry μ existuje spočetný systém $\{R_n\colon n = 1, 2, \ldots\} \subset \mathscr{A}$ takový, že pro všechna n platí $R_n \subset R_{n+1}$, $\mu(R_n) < \infty$ a $\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n = M$. Pomocí množin $M_m := \{x \in M\colon |g(x)| < m\} \in \mathscr{A}$ utvoříme pro $m, n = 1, 2, \ldots$ lineární funkcionály $\varphi_m^{(n)}\colon L^p \to \mathbb{C}$:

$$\varphi_m^{(n)}(f) := \int_{R_n \cap M_m} fg \, d\mu = \int_M fg_m^{(n)} \, d\mu ,$$

kde $g_m^{(n)} := \chi_{R_n}\chi_{M_m}g$. Jelikož $g_m^{(n)}$ je omezená a $\mu(\mathrm{supp}\, g_m^{(n)}) \leqq \mu(R_n) < \infty$, platí $g_m^{(n)} \in L^{p'}$; z Hölderovy nerovnosti pak plyne $\varphi_m^{(n)} \in (L^p)^*$ a $\|\varphi_m^{(n)}\| \leqq \|g_m^{(n)}\|_{p'}$. Pro dané $f \in L^p$ máme odhad

$$|\varphi_m^{(n)}(f)| \leqq \int_{R_n \cap M_m} |fg| \, d\mu \leqq \int_M |fg| \, d\mu$$

a princip stejnoměrné omezenosti dává $\|\varphi_m^{(n)}\| \leqq \|g_m^{(n)}\|_{p'} < c$. Pro pevné n a všechna $x \in M$ platí $g_m^{(n)}(x) \to g^{(n)}(x)$, kde $g^{(n)} := g\chi_{R_n}$. Aplikací Fatouova lemmatu na posloupnost $\{|g_m^{(n)}|^{p'}\}_{m=1}^{\infty}$ (pro $p' = \infty$ viz cvičení 1.13) dostaneme $g^{(n)} \in L^{p'}$ a $\|g^{(n)}\|_{p'} \leqq c$; vzhledem k tomu, že $g^{(n)}(x) \to g(x)$ pro všechna $x \in M$, můžeme předchozí argumentaci zopakovat, což dává $g \in L^{p'}$.

Analogické tvrzení platí pro prostory l^p – viz cvičení 24.

S řadou aplikací věty 1 se setkáme v dalších kapitolách. V následujícím lemmatu a větě budeme pracovat s dvojicí Banachových prostorů $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ s normami $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$. Pro $\varepsilon > 0$ značí U_ε, resp. V_ε otevřenou kouli v $\mathscr{X}$, resp. $\mathscr{Y}$ se středem v nule a poloměrem ε; dále N^0 značí vnitřek (tj. množinu všech vnitřních bodů) množiny $N \subset \mathscr{Y}$.

3.4.5 Lemma: Jestliže pro dané $\varepsilon > 0$ a $B \in \mathscr{B}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ platí $(\overline{BU_\varepsilon})^0 \neq \emptyset$, resp. $(BU_\varepsilon)^0 \neq \emptyset$, potom $0 \in (\overline{BU_\eta})^0$, resp. $0 \in (BU_\eta)^0$ pro každé $\eta > 0$.

Důkaz: Nechť y_0 je vnitřní bod množiny $\overline{BU_\varepsilon}$, takže existuje $\delta > 0$ takové, že $y_0 + y_\delta \subset \overline{BU_\varepsilon}$. Podle definice uzávěru množiny pro každé $y \in V_\delta$ můžeme najít posloupnost $\{z_n^{(y)}\} \subset BU_\varepsilon$, $z_n^{(y)} = Bx_n^{(y)}$, $\|x_n^{(y)}\|_1 < \varepsilon$, pro niž $z_n^{(y)} \to y + y_0$. Speciálně $z_n^{(0)} \to y_0$, takže $z_n^{(y)} - z_n^{(0)} \to y$. Jelikož $z_n^{(y)} - z_n^{(0)} = B(x_n^{(y)} - x_n^{(0)})$ a $\|x_n^{(y)} - x_n^{(0)}\|_1 < 2\varepsilon$, platí inkluze $V_\delta \subset \overline{BU_{2\varepsilon}}$. Pomocí vztahů $cV_\delta = V_{c\delta}$, $cBU_\varepsilon = BU_{c\varepsilon}$ a $c\overline{BU_\varepsilon} = \overline{(cBU_\varepsilon)}$, $c > 0$ (viz cvičení 2.49 a 2.30), dostaneme $V_{\eta\delta/2\varepsilon} \subset \overline{BU_\eta}$, což znamená, že 0 je vnitřním bodem množiny $\overline{BU_\eta}$. Tvrzení pro případ $(BU_\eta)^0 \neq \emptyset$ se dokazuje analogicky. ■

Každé zobrazení $B \in \mathscr{B}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ je spojité, což znamená, že vzor $B^{(-1)}(G) \subset \mathscr{X}$ libovolné otevřené množiny $G \subset \mathscr{Y}$ je opět otevřená množina. Je-li B surjektivní, pak v důsledku jeho linearity a omezenosti je možno uvedené tvrzení obrátit v následujícím smyslu:

3.4.6 Věta (*princip otevřenosti zobrazení*): Jestliže operátor $B \in \mathscr{B}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ splňuje $\mathrm{Ran}\, B = \mathscr{Y}$, potom pro každou otevřenou množinu $G \subset \mathscr{X}$ je BG otevřená množina v $\mathscr{Y}$.

Důkaz: Stačí dokázat, že $0 \in (BU_\eta)^0$ pro každé $\eta > 0$; k libovolnému $x \in G$ totiž existuje U_η splňující $x + U_\eta \subset G$, tj. $B(x + U_\eta) = Bx + BU_\eta \subset BG$, a jestliže existuje V_δ takové, že $V_\delta \subset BU_\eta$, máme $Bx + V_\delta \subset BG$, a množina BG je tedy otevřená. Zapíšeme $\mathscr{X}$ ve tvaru $\mathscr{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$; užijeme-li surjektivity zobrazení B, máme $\mathscr{Y} = \bigcup_{n=1}^{\infty} BU_n$ a z Baireovy věty potom plyne, že pro nějaké přirozené $\bar{n}$ platí

$$(\overline{BU_{\bar{n}}})^0 \neq \emptyset\,. \tag{3a}$$

Dokážeme, že

$$\overline{BU_{\bar{n}}} \subset BU_{2\bar{n}}\,. \tag{3b}$$

Především podmínka (3a) spolu s lemmatem 5 zaručují existenci V_δ takového, že $V_\delta \subset \overline{BU_{\bar{n}}}$; odtud dále pro $j = 1, 2, \ldots$ plyne $V_{\delta_j} \subset \overline{BU_{n_j}}$, kde $\delta_j := \delta/2^j$ a $n_j := \bar{n}/2^j$. Nechť $y \in \overline{BU_{\bar{n}}}$, takže každé okolí bodu y obsahuje prvky množiny $BU_{\bar{n}}$; konkrétně pro okolí $y + V_{\delta_1}$ lze najít $x_1 \in U_{\bar{n}}$ takové, že $Bx_1 \in y + V_{\delta_1}$, a tedy také $y - Bx_1 \in V_{\delta_1} \subset \overline{BU_{n_1}}$. Pomocí stejné úvahy zjistíme, že existuje $x_2 \in U_{n_1}$ splňující $y - Bx_1 - Bx_2 \in V_{\delta_2} \subset \overline{BU_{n_2}}$ atd. Lze tedy sestrojit posloupnost $\{x_j\} \subset \mathscr{X}$ takovou, že $x_j \in U_{n_{j-1}}$, tj.

$$\|x_j\|_1 < 2\bar{n}/2^j\,, \tag{4a}$$

přičemž

$$\|y - \sum_{k=1}^{j} Bx_k\|_2 < \delta_j\,. \tag{4b}$$

Z nerovnosti (4a) a věty 3.1.2 plyne existence $\lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} x_k \equiv x \in \mathscr{X}$ a dále díky spojitosti B a podmínce (4b) platí $y = Bx$. Nyní $\|x\|_1 \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_1 < 2\bar{n}$, a proto $y \in BU_{2\bar{n}}$. Tím je inkluze (3b) dokázána a z (3a) nyní vyplývá, že množina $BU_{2\bar{n}}$ má alespoň jeden vnitřní bod; z lemmatu potom plyne $0 \in (BU_\eta)^0$ pro každé $\eta > 0$. ■

Z principu otevřenosti zobrazení vyplývá často užívané tvrzení, jehož důkaz přenecháváme čtenáři (viz též cvičení 25):

3.4.7 Důsledek (věta o inverzním zobrazení): Jestliže $B \in \mathscr{B}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ je bijekce prostorů $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$, potom B^{-1} je spojitý lineární operátor z $\mathscr{Y}$ na $\mathscr{X}$.

3.4.8 Příklad: Uvažujme dva B-prostory $\mathscr{X}_r \equiv (V, \|.\|_r)$, $r = 1,2$, takové, že $\|x\|_2 \leqq c\|x\|_1$ pro všechna $x \in V$, takže identické zobrazení $e: \mathscr{X}_1 \to \mathscr{X}_2$, $e(x) := x$, je spojité. Vzhledem k tomu, že e je bijekce, je spojité i zobrazení e^{-1}, a proto existuje $d > 0$ takové, že $\|x\|_1 \leqq d\|x\|_2$. *Prostory* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ *jsou lineárně homeomorfní a normy* $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ *jsou ekvivalentní.*

Ve zbývající části tohoto paragrafu znamená T libovolný lineární operátor definovaný na podprostoru D_T B-prostoru $\mathcal{X}$ a zobrazující D_T do B-prostoru $\mathcal{Y}$; spojitost operátoru T se *nepředpokládá.*

Množina $\Gamma(T) := \{[x, Tx] \in \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}: x \in D_T\}$ se nazývá **grafem** operátoru T. Je zřejmé, že graf je podprostorem B-prostoru $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$. Obecně nazveme grafem každý podprostor $\Gamma \subset \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$, který má tu vlastnost, že každý prvek $[x, y] \in \Gamma$ je určen svou první komponentou. Daný graf Γ určuje lineární operátor T_Γ z $\mathcal{X}$ do $\mathcal{Y}$: $D(T_\Gamma) := \{x \in \mathcal{X}: [x, y] \in \Gamma\}$ a $T_\Gamma x := y$ pro každé $[x, y] \in \Gamma$. Je jasné, že

$$\Gamma(T_\Gamma) = \Gamma\,. \tag{5a}$$

Naopak daný lineární operátor T je jednoznačně určen svým grafem:

$$T_{\Gamma(T)} = T\,. \tag{5b}$$

Říkáme, že operátor T je **uzavřený,** jestliže $\Gamma(T)$ je uzavřená množina v B-prostoru $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$. Z definice direktního součtu plyne následující ekvivalence:

3.4.9 Tvrzení: Operátor T je uzavřený právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset D_T$ takovou, že $x_n \to x$ a $Tx_n \to y$, platí $x \in D_T$ a $y = Tx$.

Je zřejmé, že každý operátor $B \in \mathscr{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ je uzavřený; existují však uzavřené operátory, které nejsou omezené.

3.4.10 Příklad: Uvažujme operátor T z $\mathcal{X} = C[0, 1]$ do $\mathcal{Y} = C[0, 1]$ definovaný na $D_T := \{f \in \mathcal{X}: f' \in \mathcal{X}\}$ vztahem $Tf := f'$. Jelikož funkce $x \mapsto p_n(x) := x^n$ patří do D_T a $\|p_n\|_\infty = 1$ zatímco $\|p_n'\|_\infty = n$, není T spojitý. Nechť pro posloupnost $\{f_n\} \subset D_T$ platí $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ a $\|f_n' - g\|_\infty \to 0$, kde $f, g \in \mathcal{X}$. Protože f_n a f_n' konvergují stejnoměrně na $[0, 1]$ k funkcím f a g, platí $g = f'$ ([Jar 1], věta 57). Tedy $f \in D_T$, $Tf = g$ a operátor T je uzavřený.

Jestliže množina $\Gamma(T)$ není uzavřená, ale platí pro ni, že její uzávěr je graf (což nemusí být vždy splněno), říkáme, že *operátor T lze uzavřít*; uzavřený operátor

$$\overline{T} := T_{\overline{\Gamma(T)}} \tag{6a}$$

nazýváme **uzávěrem** operátoru T. Ze vztahu (5a) plyne

$$\Gamma(\overline{T}) = \overline{\Gamma(T)}\,. \tag{6b}$$

Výroky „operátor lze uzavřít“ a „existuje uzávěr operátoru“ jsou zjevně ekvivalentní. Vzhledem k tomu, že $\overline{\Gamma(T)}$ je minimální uzavřená množina obsahující $\Gamma(T)$, *je operátor* $\overline{T}$ *minimální uzavřené rozšíření operátoru* T.

Množina $\overline{\Gamma(T)}$ je podprostor, a proto je grafem právě tehdy, když platí implikace $[0, y] \in \overline{\Gamma(T)} \Rightarrow y = 0$. Odtud dostáváme následující sekvenční charakteristiku existence uzávěru:

3.4.11 Tvrzení: (a) Operátor T lze uzavřít právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset D_T$ takovou, že $x_n \to 0$ a $Tx_n \to y$, platí $y = 0$.
(b) K tomu, aby x patřilo do definičního oboru operátoru $\overline{T}$ je nutné a stačí, aby existovala posloupnost $\{x_n\} \subset D_T$ taková, že $x_n \to x$ a $\{Tx_n\}$ konverguje; jsou-li tyto podmínky splněny, platí $Tx_n \to \overline{T}x$.

Viděli jsme, že existují uzavřené operátory, které nejsou spojité. Z následující věty vyplývá, že tato situace může nastat jen pro takové operátory, které nejsou definovány na celém prostoru $\mathscr{X}$.

3.4.12 Věta (*o uzavřeném grafu*): Uzavřený lineární operátor $T\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ definovaný na celém prostoru $\mathscr{X}$ je spojitý.
Důkaz: Podle předpokladu je $\Gamma(T)$ uzavřený podprostor v $\mathscr{X} \oplus \mathscr{Y}$, takže $\Gamma(T)$ je B-prostor, pro jehož normu platí $\|[x, y]\|_\oplus = \|x\|_1 + \|y\|_2$. Zobrazení $S_1\colon \Gamma(T) \to \mathscr{X}$, $S_1([x, Tx]) := x$, je spojitá lineární bijekce prostorů $\Gamma(T)$ a $\mathscr{X}$; podle důsledku 7 je inverzní zobrazení S_1^{-1} spojité. Uvažujme dále spojité lineární zobrazení $S_2\colon \Gamma(T) \to \mathscr{Y}$, $S_2([x, Tx]) := Tx$. Složené zobrazení $S_2 \circ S_1^{-1}$ je definováno na celém $\mathscr{X}$ a pro každé $x \in \mathscr{X}$ máme $S_2(S_1^{-1}x) = Tx$. Tedy $T = S_2 \circ S_1^{-1}$ a ze spojitosti zobrazení S_1^{-1} a S_2 plyne spojitost operátoru T. ■

3.4.13 Poznámka: Kromě normy $\|\cdot\|_\oplus$ se na vektorovém prostoru $\mathscr{X} \oplus \mathscr{Y}$ zavádí také norma $|||\cdot|||$ vztahem $|||[x, y]||| := (\|x\|_1^2 + \|y\|_2^2)^{1/2}$. Z nerovností $2^{-1/2}\|[x, y]\|_\oplus \leqq |||[x, y]||| \leqq \|[x, y]\|_\oplus$ plyne, že $(\mathscr{X} \oplus \mathscr{Y}, |||\cdot|||)$ je B-prostor, přičemž topologie indukované normami $\|\cdot\|_\oplus$ a $|||\cdot|||$ jsou totožné (srv. příklad 8); pomocí tvrzení 2.3.5 dále zjistíme, že splývají s topologií $\tau_{\mathscr{X} \times \mathscr{Y}}$. Jak uvidíme v § 7.2, je někdy výhodné chápat graf daného operátoru T jako podprostor v B-prostoru $(\mathscr{X} \oplus \mathscr{Y}, |||\cdot|||)$; vzhledem k tomu, že ve výše uvedených tvrzeních se vlastnosti grafu charakterizují výhradně topologickými prostředky, zůstávají tato tvrzení v platnosti i pro normu $|||\cdot|||$.

3.5 SLABÁ TOPOLOGIE

Na daném topologickém vektorovém prostoru (V, τ) je účelné uvažovat kromě topologie τ, jíž se často říká silná topologie, také tzv. **slabou topologii** τ_w, která je definována pomocí duálního prostoru V' jako nejslabší topologie, vůči níž je spojité každé zobrazení $f\colon V \to \mathbb{C}$, $f \in V'$. V terminologii zavedené v § 2.3 jde o V'-slabou topologii.

Z definice slabé topologie především vyplývá

$$\tau_w \subset \tau\,, \tag{1}$$

protože každé $f \in V'$ je definitoricky spojité vzhledem k τ. Lokální báze topologie τ_w v bodě $x_0 \in V$ je tvořena konečnými průniky množin $f^{(-1)}(U_\varepsilon(f(x_0))) = \{x \in V\colon |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}$, což vzhledem k linearitě znamená že τ_w je totožná s topologií zadanou systémem seminorem $\mathscr{P}_w = \{p_f\colon f \in V'\}$, kde

$$p_f(x) := |f(x)|,\ x \in V\,. \tag{2}$$

3.5.1 Tvrzení: Jestliže (V, τ) je lokálně konvexní prostor, potom systém $\mathscr{P}_w$ odděluje body prostoru V.
Důkaz: Pro normovaný prostor tvrzení plyne z důsledku 3.3.4, v případě obecného lokálně konvexního prostoru odkazujeme čtenáře na ⟦DS 1⟧, § V.2. ■

3.5.2 Důsledek: Jestliže (V, τ) je lokálně konvexní prostor, potom prostor (V, τ_w) je rovněž lokálně konvexní.

V této souvislosti upozorňujeme čtenáře na to, že slabá topologie obecně nesplňuje první axiom spočetnosti, což mj. znamená, že není indukována žádnou metrikou, a to ani tehdy, když V je normovaný prostor.

Vyšetříme vlastnosti slabě konvergentních posloupností. Zajímavý je jen případ $\dim V = \infty$ (cvičení 30). Jestliže $x \in V$ je limitou posloupnosti $\{x_n\} \subset V$ vzhledem k τ_w, píšeme $x = \operatorname*{w\text{-}lim}_{n\to\infty} x_n$ nebo $x_n \xrightarrow{w} x$.

3.5.3 Věta: (a) $x_n \xrightarrow{w} x$ právě tehdy, když $f(x_n) \to f(x)$ pro všechna $f \in V^*$.
(b) Každá slabě konvergentní posloupnost v normovaném prostoru je omezená.
(c) Jestliže $\{x_n\}$ je omezená posloupnost v normovaném prostoru V a $g(x_n) \to g(x)$ pro všechna $g \in F$, kde F je totální množina ve V^*, potom $x_n \xrightarrow{w} x$.

Důkaz: Tvrzení (a) plyne přímo z definice slabé topologie.
(b) Jestliže $x_n \xrightarrow{w} x$, potom pro systém $\mathscr{F} := \{\varphi_n\} \subset V^{**}$, kde φ_n je definováno vztahem $\varphi_n(f) = f(x_n)$, $f \in V^*$, jsou splněny předpoklady principu stejnoměrné omezenosti, z něhož plyne $\|\varphi_n\| = \|x_n\| < c$ (viz tvrzení 3.3.8).
(c) Podle předpokladu platí $g(x_n) \to g(x)$ pro všechna $g \in F_{\text{lin}}$ a k daným $f \in V^*$, $\varepsilon > 0$ existuje $g \in F_{\text{lin}}$ a přirozené $n(\varepsilon)$ tak, že $\|f - g\| < \varepsilon$ a $|g(x_n) - g(x)| < \varepsilon$ pro $n > n(\varepsilon)$. Potom pro $n > n(\varepsilon)$ máme

$$|f(x_n) - f(x)| \leqq |f(x_n) - g(x_n)| + |g(x_n) - g(x)| + |g(x) - f(x)| \leqq$$
$$\leqq (\|x_n\| + \|x\| + 1)\,\varepsilon$$

a odtud vzhledem k omezenosti $\|x_n\|$ plyne $f(x_n) \to f(x)$. ■

3.5.4 Příklad (*slabá konvergence v l^p pro* $1 < p < \infty$): Množina $\{f_k\colon k = 1, 2, \dots\}$, $f_k(\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}) := \xi_k$, je totální v $(l^p)^*$ – viz příklady 3.1.6 a 3.3.5. Z věty 3 potom vyplývá, že posloupnost $\{X_n\} \subset l^p$, $X_n \equiv \{\xi_j^{(n)}\}_{j=1}^{\infty}$ slabě konverguje k $X \equiv \{\xi_j\}_{j=1}^{\infty} \in l^p$ právě tehdy, když je omezená a splňuje $\xi_j^{(n)} \underset{n\to\infty}{\to} \xi_j$ pro $j = 1, 2, \dots$. Například pro $X_n := \{\delta_{jn}\}_{j=1}^{\infty}$ máme $X_n \overset{w}{\to} 0$. Přitom tato posloupnost není silně konvergentní, protože není cauchyovská: pro jakákoliv $m, n, m \neq n$, platí $\|X_n - X_m\|_p = 2^{1/p}$. Slabá konvergence tedy není totožná se silnou.

Pomocí slabé konvergence se zavádějí následující dva pojmy, které jsou užitečné např. při studiu reflexivních B-prostorů. Topologický vektorový prostor (V, τ) je **slabě úplný,** jestliže každá posloupnost $\{x_n\} \subset V$, taková, že číselná posloupnost $\{f(x_n)\}$ je konvergentní pro každé $f \in V'$, slabě konverguje k nějakému $x \in V$. Množina $M \subset V$ je **slabě kompaktní,** jestliže z každé posloupnosti $\{x_n\} \subset M$ lze vybrat posloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, která slabě konverguje k nějakému $x \in V$.

3.5.5 Poznámka: Jestliže (V, τ_w) je topologický vektorový prostor, což je splněno např. když (V, τ) je lokálně konvexní, potom množina $M \subset V$ je slabě kompaktní právě tehdy, když její slabý uzávěr je spočetně kompaktní vzhledem k τ_w (za předpokladu, že (V, τ_w) je T_1-prostor – srv. cvičení 2.37). V *Banachově prostoru* $\mathcal{X}$ je slabá kompaktnost množiny $M \subset \mathcal{X}$ ekvivalentní požadavku, aby její slabý uzávěr byl *kompaktní* množinou v topologickém prostoru $(\mathcal{X}, \tau_w)$ – viz [[DS 1]], věta V.6.1 (připomeňme, že v topologickém prostoru $(\mathcal{X}, \tau_w)$ kompaktnost není obecně totožná se spočetnou kompaktností).

3.5.6 Věta: Jestliže $\mathcal{X}$ je reflexivní B-prostor, potom
(a) $\mathcal{X}$ je slabě úplný;
(b) množina $M \subset \mathcal{X}$ je slabě kompaktní právě tehdy, když je omezená.
Důkaz: (a) Nechť pro $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ platí, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ je konvergentní pro každé $f \in \mathcal{X}^*$. Stejně jako v důkazu věty 3b zjistíme, že pro posloupnost $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{X}^{**}$, $\varphi_n(f) := f(x_n)$ platí

$$|\varphi_n(f)| \leqq c\|f\|\,, \qquad n = 1, 2, \dots \tag{3}$$

pro všechna $f \in \mathcal{X}^*$. Podle předpokladu existuje pro každé $f \in \mathcal{X}^*$ komplexní číslo $\varphi(f) := \lim_{n\to\infty} \varphi_n(f)$; zobrazení $f \mapsto \varphi(f)$ je lineární a z nerovnosti (3) plyne

$\varphi \in \mathscr{X}^{**}$. Vzhledem k reflexivitě prostoru $\mathscr{X}$ existuje $x \in \mathscr{X}$ takové, že $\varphi(f) = f(x)$, pro všechna $f \in \mathscr{X}^*$, takže $x_n \xrightarrow{w} x$.

(b) Jestliže M není omezená, existuje posloupnost $\{x_n\} \subset M$ taková, že $\|x_n\| > n$; každá vybraná posloupnost je potom rovněž neomezená, a proto nemůže být slabě konvergentní. Předpokládejme nyní, že M je omezená, a vezměme libovolnou posloupnost $X \equiv \{x_n\} \subset M$. Budeme uvažovat jen netriviální případ, kdy množina hodnot posloupnosti X je nekonečná; potom lze bez újmy obecnosti předpokládat, že X je prostá posloupnost: $n \neq m \Rightarrow x_n \neq x_m$. Nechť $\mathscr{Y}$ je uzávěr lineárního obalu množiny $\{x_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$; potom $\mathscr{Y}$ je separabilní a reflexivní B-prostor (lemma 3.1.3 a věta 3.3.9), takže $\mathscr{Y}^{**}$ je rovněž separabilní a podle důsledku 3.3.4 je separabilní i prostor $\mathscr{Y}^*$. Nechť $\{g_j\colon j = 1, 2, \ldots\}$ je hustá množina v $\mathscr{Y}^*$. Vzhledem k tomu, že posloupnost X je omezená, je $\{g_1(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ omezená posloupnost v $\mathbb{C}$; existuje proto vybraná posloupnost $X_1 \equiv \{x_n^{(1)}\} \subset X$ taková, že $\{g_1(x_n^{(1)})\}$ konverguje. Dále $\{g_2(x_n^{(1)})\}$ je omezená, a proto lze najít vybranou posloupnost $X_2 \equiv \{x_n^{(2)}\} \subset X_1$, pro niž $\{g_2(x_n^{(2)})\}$ konverguje atd. Tímto způsobem získáme posloupnosti $X_j \equiv \{x_n^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}$, $j = 1, 2, \ldots$, $X \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots$ takové, že číselné posloupnosti $\{g_j(x_n^{(j)})\}_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergentní. Pro $n = 1, 2, \ldots$ položíme $y_n := x_n^{(n)}$; potom pro $n \geqq j$ platí $y_n \in X_j$, takže posloupnost $\{g_j(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní pro všechna j. V důsledku omezenosti posloupnosti $\{y_n\}$ a toho, že $\{g_j\colon j = 1, 2, \ldots\}$ je hustá v $\mathscr{Y}^*$, je $\{g(y_n)\}$ konvergentní posloupnost pro každé $g \in \mathscr{Y}^*$ (srv. důkaz věty 3c). Z reflexivity $\mathscr{Y}$ a již dokázaného tvrzení (a) plyne existence $y \in \mathscr{Y}$ splňujícího $g(y_n) \to g(y)$ pro všechna $g \in \mathscr{Y}^*$. Pro libovolné $f \in \mathscr{X}^*$ označíme $g_f = f \upharpoonright \mathscr{Y}$; potom $g_f \in \mathscr{Y}^*$, a jelikož $\{y_n\} \subset \mathscr{Y}$, $y \in \mathscr{Y}$, máme $f(y_n) = g_f(y_n) \to g_f(y) = f(y)$, takže $y_n \xrightarrow{w} y$. ■

Na daném topologickém vektorovém prostoru (V, τ) se často zavádějí také topologie, které jsou slabší než τ_w, následujícím způsobem. Nechť množina $F \subset V'$ odděluje body prostoru V, tj. ke každému nenulovému $x \in V$ existuje $f \in F$ tak, že $f(x) \neq 0$; pak systém seminorem $\{p_f\colon f \in F, p_f(x) := |f(x)|\}$ zadává na V lokálně konvexní topologii, která se nazývá *F-topologií prostoru V*. Čtenář se snadno přesvědčí o tom, že jde o nejslabší topologii, vzhledem k níž jsou spojité všechny lineární funkcionály $f \in F$. Jsou-li F_1, F_2 množiny ve V', které oddělují body prostoru V, a $F_1 \subset F_2$, potom F_1-topologie je slabší než F_2-topologie; speciálně pro každou vlastní podmnožinu $F \subset V'$, která odděluje body prostoru V, je F-topologie slabší než τ_w. Pro F-topologii na V se užívá označení $\sigma(V, F)$; pro slabou topologii speciálně máme $\tau_w = \sigma(V, V')$.

3.6 SPEKTRUM UZAVŘENÉHO LINEÁRNÍHO OPERÁTORU

Nechť $\mathscr{X}$ je komplexní Banachův prostor; symbolem $\mathscr{C}(\mathscr{X})$ označíme množinu všech uzavřených lineárních operátorů $T\colon \mathscr{X} \to \mathscr{X}$. V § 3.4 jsme viděli, že každý omezený operátor patří do $\mathscr{C}(\mathscr{X})$, avšak $\mathscr{B}(\mathscr{X}) \neq \mathscr{C}(\mathscr{X})$ (viz příklad 3.4.10); pro uzavřené operátory, které nejsou omezené, platí $D_T \neq \mathscr{X}$, a proto při práci s nimi je třeba dávat pozor na definiční obory.

Komplexní číslo λ nazveme **vlastní hodnotou** operátoru $T \in \mathscr{C}(\mathscr{X})$, jestliže operátor $T - \lambda I$ není injektivní, tj. existuje nenulový vektor $x \in D_T$ splňující $Tx = \lambda x$. Takových (lineárně nezávislých) vektorů může pro dané λ existovat víc; každý z nich nazýváme **vlastním vektorem** operátoru T (pro vlastní hodnotu λ). Tyto vektory tvoří netriviální podprostor $\operatorname{Ker}(T - \lambda I) \subset \mathscr{X}$, tzv. **vlastní podprostor** operátoru T pro vlastní hodnotu λ.

3.6.1 Tvrzení: Každý vlastní podprostor operátoru $T \in \mathscr{C}(\mathscr{X})$ je uzavřený.
Důkaz – viz tvrzení 3.4.9. ■

Říkáme, že podprostor $L \subset \mathscr{X}$ je **invariantním podprostorem** operátoru T (stručněji L je T-invariantní), jestliže pro všechna $x \in L \cap D_T$ platí $Tx \in L$. Příkladem T-invariantního podprostoru je každý vlastní podprostor operátoru T.

3.6.2 Poznámka: Vlastní hodnota a ostatní pojmy, které jsme právě zavedli, mají smysl pro každý lineární operátor na $\mathscr{X}$. Není-li však operátor T uzavřený, může mít neuzavřený vlastní podprostor: např. pro operátor T uvažovaný ve cvičení 29 je podprostor $\operatorname{Ker} T$ tvořen všemi $f \in C[0,1]$ splňujícími $f(0) = 0$, což není uzavřený podprostor vzhledem k normě $\|\cdot\|_p$, jestliže $p < \infty$ – stačí vzít třeba posloupnost $\{f_n\} \subset \operatorname{Ker} T$, $f_n(x) := nx$ pro $0 \leqq x \leqq 1/n$, resp. $f_n(x) := 1$ pro $1/n \leqq x \leqq 1$, která konverguje vzhledem k normě $\|\cdot\|_p$ ke konstantě $f = 1$, tj. $\lim_{n\to\infty} f_n \notin \operatorname{Ker} T$.

Pro daný operátor $T \in \mathscr{C}(\mathscr{X})$ zkoumejme otázku existence vektoru $x \in D_T$ vyhovujícího rovnici

$$(T - \lambda I)x = y \tag{1}$$

v závislosti na daných $y \in \mathscr{X}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Připomeňme nejprve, jak se tato úloha řeší v případě komplexního prostoru V_n konečné dimenze, kdy $D_T = V_n$. Základní důležitost má spektrum $\sigma(T)$ operátoru T, které je definováno jako množina všech vlastních hodnot:

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \ \text{existuje nenulové } x \in V_n, \quad Tx = \lambda x\}. \tag{2}$$

Vzhledem k tomu, že $\lambda \in \sigma(T)$ právě tehdy, když $\det(T - \lambda I) = 0$, je určení spektra čistě algebraická úloha; $\sigma(T)$ je neprázdná množina, která má nejvýše

n prvků. Podle definice (2) má rovnice (1) pro $y = 0$ netriviální řešení právě tehdy, když $\lambda \in \sigma(T)$. Odtud dále plyne, že podmínka $\lambda \notin \sigma(T)$ je nutná a postačující pro to, aby operátor $T - \lambda \equiv T - \lambda I$ byl bijekcí z V_n na V_n, tj.

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \varrho(T), \qquad \varrho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon (T - \lambda)^{-1} \in \mathscr{B}(V_n)\}, \tag{3}$$

což je dále ekvivalentní tomu, že rovnice (1) má právě jedno řešení pro každé $y \in V_n$ a toto řešení závisí spojitě na y.

V nekonečnědimenzionálním Banachově prostoru $\mathscr{X}$ nejsou definice (2) a (3) ekvivalentní: z toho, že λ není vlastní hodnota operátoru $T \in \mathscr{C}(\mathscr{X})$, sice vyplývá existence operátoru $(T - \lambda)^{-1}$, avšak tento operátor nemusí být definován na celém $\mathscr{X}$ a může být neomezený. Ukazuje se, že vhodné zobecnění pojmu spektra pro případ $\dim \mathscr{X} = \infty$ dává definice (3). Uvážíme-li ještě, že pro uzavřený operátor T, pro nějž existuje $(T - \lambda)^{-1}$, jsou podmínky $(T - \lambda)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{X})$ a $\operatorname{Ran}(T - \lambda) = \mathscr{X}$ ekvivalentní (viz cvičení 27 a větu 3.4.12), dospíváme k následující obecné definici. **Spektrum** $\sigma(T)$ uzavřeného operátoru T na B-prostoru $\mathscr{X}$ je množina komplexních čísel λ, pro něž operátor $T - \lambda$ není bijekcí podprostoru D_T na $\mathscr{X}$. To nastává ve dvou (vzájemně se vylučujících) případech:
(i) $T - \lambda$ není injektivní, tj. λ je vlastní hodnota operátoru T,
(ii) $T - \lambda$ je injektivní, avšak $\operatorname{Ran}(T - \lambda) \neq \mathscr{X}$.

Množina všech vlastních hodnot operátoru T tvoří jeho **bodové spektrum** $\sigma_p(T)$. V případě (ii) tvoří ta λ, pro něž je podprostor $\operatorname{Ran}(T - \lambda)$ hustý v $\mathscr{X}$, **spojité spektrum** $\sigma_c(T)$; zbývající λ, tj. ta, pro něž $\overline{\operatorname{Ran}(T - \lambda)} \neq \mathscr{X}$ tvoří **reziduální spektrum** $\sigma_r(T)$. Dostáváme tak vyjádření spektra ve tvaru sjednocení tří disjunktních množin:

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T). \tag{4}$$

3.6.3 Poznámka: Spektrum jsme definovali jen pro uzavřené operátory. Pro ostatní lineární operátory $T\colon \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ je totiž pojem spektra triviální: z předpokladu existence $\lambda \in \mathbb{C}$ takového, že $(T - \lambda)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{X})$ vyplývá $T \in \mathscr{C}(\mathscr{X})$ (viz cvičení 27), tj. pro každý neuzavřený operátor T je $\sigma(T) = \mathbb{C}$.

Množina

$$\varrho(T) := \mathbb{C} \setminus \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon (T - \lambda)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{X})\} \tag{5}$$

se nazývá **rezolventní množinou** operátoru T a její prvky **regulárními hodnotami.** Pro zobrazení $R_T\colon \varrho(T) \to \mathscr{B}(\mathscr{X})$ definované vztahem $R_T(\lambda) := (T - \lambda)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{X})$ se užívá názvu **rezolventní funkce** operátoru T a pro omezený operátor $R_T(\lambda)$ **rezolventa** operátoru T (v bodě λ).

Východiskem pro odvození základních vlastností spektra a rezolventy je následující jednoduché tvrzení, které je operátorovou analogií součtu geometrické řady.

3.6.4 Lemma: Jestliže $B \in \mathscr{B}(\mathscr{X})$ a $\|I - B\| < 1$, potom B je invertibilní, $B^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{X})$ a platí

$$B^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} (I - B)^j \equiv \sum_{j=0}^{\infty} (I - B)^j . \tag{6}$$

Důkaz: Pro libovolná přirozená $n, m, n > m$, dostáváme pomocí (3.2.6)

$$\Big\| \sum_{j=m+1}^{n} (I - B)^j \Big\| \leqq \sum_{j=m+1}^{n} \|I - B\|^j ,$$

takže podle předpokladu je posloupnost omezených operátorů $S_n := \sum_{j=0}^{n} (I - B)^j$ cauchyovská, a proto existuje $S := \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathscr{B}(\mathscr{X})$. Dále pro všechna n platí $BS_n = S_nB = S_n - S_{n+1} + I$; limitním přechodem dostaneme $BS = SB = I$, což znamená, že $S = B^{-1}$. ■

Nechť $T \in \mathscr{C}(\mathscr{X})$ a $\lambda_0 \in \varrho(T)$; pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ takové, že $|\lambda - \lambda_0| < \|R_T(\lambda_0)\|^{-1}$ splňuje operátor $B_\lambda := I - R_T(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)$ předpoklady lemmatu; proto operátor B_λ^{-1} existuje a je omezený. Pomocí zřejmých rovností $(T - \lambda) R_T(\lambda_0) = I - (\lambda - \lambda_0) R_T(\lambda_0) = B_\lambda$, resp. $R_T(\lambda_0)(T - \lambda) x = x - (\lambda - \lambda_0) R_T(\lambda_0) x$ pro všechna $x \in D_T$ ověříme, že operátor $(T - \lambda)^{-1}$ existuje a $(T - \lambda)^{-1} = R_T(\lambda_0) B_\lambda^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{X})$; proto $\lambda \in \varrho(T)$ a $R_T(\lambda_0) B_\lambda^{-1} = R_T(\lambda)$. Dosadíme-li za B_λ^{-1} ze vztahu (6) dospíváme k následujícímu závěru:

3.6.5 Věta: Rezolventní množina uzavřeného lineárního operátoru T na B-prostoru $\mathscr{X}$ je otevřená a s každým bodem λ_0 obsahuje i jeho okolí $U(\lambda_0) := \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \lambda_0| < \|R_T(\lambda_0)\|^{-1}\}$, přičemž pro všechna $\lambda \in U(\lambda_0)$ platí

$$R_T(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} R_T(\lambda_0)^{j+1} (\lambda - \lambda_0)^j . \tag{7}$$

3.6.6 Důsledek: Spektrum uzavřeného operátoru je uzavřená množina.

Pro omezené operátory platí silnější tvrzení. Především můžeme pomocí lemmatu 4 lokalizovat spektrum. Jestliže $|\lambda| > \|B\|$, jsou pro operátor $I - \frac{1}{\lambda} B$ splněny předpoklady lemmatu 4, takže $(B - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}(I - \frac{1}{\lambda} B)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{X})$, tj. $\lambda \in \varrho(B)$. Spektrum operátoru $B \in \mathscr{B}(\mathscr{X})$ tedy leží uvnitř kruhu o poloměru $\|B\|$. Dá se však ukázat podstatně víc:

3.6.7 Věta: Nechť B je omezený operátor na B-prostoru $\mathscr{X}$; potom (a) spektrum operátoru B je *neprázdná* kompaktní množina,
(b) pro poloměr $r(B)$ minimálního kruhu v $\mathbb{C}$ se středem v počátku, v němž leží spektrum, platí

$$r(B) \equiv \sup\{|\lambda|: \lambda \in \sigma(T)\} = \lim_{n\to\infty} \|B^n\|^{1/n}. \qquad (8)$$

3.6.8 Poznámka: Číslo $r(B)$ se nazývá **spektrálním poloměrem** operátoru B. Uvedená tvrzení jsou speciálním případem věty o vlastnostech spektra prvků Banachových algeber, která se dokazují pomocí teorie analytických funkcí s hodnotami v $\mathscr{X}$; důkaz uvádíme ve 12. kapitole (věta 12.2.5). Na tomto místě chceme čtenáře alespoň upozornit na to, že v důsledku omezenosti spektra je *množina* $\varrho(B)$ *neprázdná;* dále (b) zahrnuje tvrzení o existenci limity na pravé straně vztahu (8), přičemž z (3.2.6) vyplývá nerovnost $r(B) \leqq \|B\|$.

Jak ukazuje následující příklad, pro operátor $T \in \mathscr{C}(\mathscr{X}) \setminus \mathscr{B}(\mathscr{X})$ může platit $\varrho(T) = \emptyset$ nebo $\sigma(T) = \emptyset$.

3.6.9 Příklad: Uvažujme uzavřený operátor T na $C[0,1]$ z příkladu 3.4.10: $Tf = f'$ s definičním oborem $D_T = \{f \in C[0,1]: f' \in C[0,1]\}$. Pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ patří funkce $f_\lambda(x) := e^{\lambda x}$ do D_T a splňuje rovnici $Tf_\lambda = \lambda f_\lambda$, takže $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \mathbb{C}$ a $\varrho(T) = \emptyset$. Nechť dále $T^{(0)} := T \restriction D^{(0)}$, kde $D^{(0)} := \{f \in D_T: f(0) = 0\}$. Stejným postupem jako v příkladu 3.4.10 zjistíme, že $T^{(0)}$ je uzavřený operátor (navíc je třeba pouze ověřit, že platí-li pro $\{f_n\} \subset D^{(0)}$ a $f, g \in C[0,1]$ podmínky $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ a $\|f_n' - g\|_\infty \to 0$, potom $f(0) = 0$, což ihned plyne ze vztahů $f_n(0) = 0$. Pro dané $\lambda \in \mathbb{C}$ je vztahem $g \mapsto S_\lambda g$, kde $(S_\lambda g)(x) := \int_0^x e^{\lambda(x-t)} g(t)\,dt$, definován lineární operátor, který zobrazuje $C[0,1]$ do $D^{(0)}$. Jelikož $(T^{(0)} - \lambda) S_\lambda g = (S_\lambda g)' - \lambda(S_\lambda g) = g$ pro všechna $g \in C[0,1]$ a $S_\lambda(f' - \lambda f) = f$ pro všechna $f \in D^{(0)}$, platí $S_\lambda = (T^{(0)} - \lambda)^{-1}$; vzhledem k uzavřenosti $T^{(0)}$ a podmínce $D(S_\lambda) = C[0,1]$ je S_λ omezený operátor. Odtud vyplývá $\varrho(T^{(0)}) = \mathbb{C}$, tj. $\sigma(T^{(0)}) = \emptyset$. Tentýž závěr dostaneme, uvažujeme-li operátor $\tilde{P}: f \mapsto \tilde{P}f := -if'$ na $L^2(0,1)$ definovaný na podprostoru $AC[0,1]$ funkcí, které jsou absolutně spojité na intervalu $[0,1]$ a jejichž derivace patří do $L^2(0,1)$, resp. operátor $P^{(0)} := P \restriction \{f \in AC[0,1]: f(0) = 0\}$. Uzavřenost operátorů $\tilde{P}$ a $P^{(0)}$ se ovšem nyní dokazuje jinak – viz příklad 7.2.7 a cvičení 7.18.

3.7 BOCHNERŮV INTEGRÁL

Pomocí teorie, s níž jsme se seznámili v předchozích paragrafech, nyní vybudujeme základy integrálního počtu pro **vektorové funkce,** což jsou definitoricky zobrazení $F: Z \to \mathscr{X}$ nějaké množiny Z do B-prostoru $\mathscr{X}$[1]). Zavádějí se pro ně obvyklé bodové operace sčítání a násobení číslem podle vztahu (3.2.2); tím se množina vektorových funkcí $F: Z \to \mathscr{X}$ stane vektorovým prostorem, který označíme

[1]) Pro zjednodušení výkladu předpokládáme, že již známe teorii Lebesgueova integrálu číselných funkcí, tj. předpokládáme $\mathscr{X} \neq \mathbb{R}$ nebo $\mathscr{X} \neq \mathbb{C}$.

$\mathscr{V}(Z, \mathscr{X})$. Každému $F \in \mathscr{V}(Z, \mathscr{X})$ přiřadíme nezápornou funkci $\|F\|$ vztahem

$$\|F\|(t) := \|F(t)\|, \qquad t \in Z.$$

Symbolem μ označíme nezápornou σ-konečnou míru definovanou na jisté σ-algebře $\mathscr{A} \subset 2^Z$. Teorie Bochnerova integrálu vychází z pojmu **jednoduché funkce;** nazýváme tak každou vektorovou funkci S, pro niž existuje konečný disjunktní rozklad $\{M_j\}_{j=1}^n \subset \mathscr{A}$ množiny Z a vektory $y_1, \ldots, y_n \in \mathscr{X}$ takové, že

$$S = \sum_{j=1}^{n} y_j \chi_{M_j}. \tag{1}$$

Je zřejmé, že množina jednoduchých funkcí tvoří podprostor $\mathscr{S} \equiv \mathscr{S}(Z, \mathscr{X}) \subset \subset \mathscr{V}(Z, \mathscr{X})$. Dále z rovnosti $\chi_M \chi_N = \chi_{M \cap N}$ plyne pro každé $M \in \mathscr{A}$ implikace

$$S \in \mathscr{S} \Rightarrow \chi_M S \in \mathscr{S}. \tag{2}$$

Pro jednoduché funkce je integrál definován vztahy

$$\int_Z S \,\mathrm{d}\mu \equiv \int S \,\mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{n} y_j \mu(M_j), \tag{3a}$$

$$\int_M S \,\mathrm{d}\mu := \int \chi_M S \,\mathrm{d}\mu, \qquad M \in \mathscr{A}. \tag{3b}$$

3.7.1 Poznámka: Zápis funkce S ve tvaru (1) není jednoznačný, jestliže nepožadujeme, aby vektory y_j byly navzájem různé. Hodnota integrálu však zjevně na způsobu zápisu funkce S nezávisí.

3.7.2 Tvrzení: (a) Vztahem (3a) je definováno lineární zobrazení vektorového prostoru $\mathscr{S}$ do $\mathscr{X}$.

(b) Jestliže $\{M_k\}_{k=1}^K \subset \mathscr{A}$ je disjunktní systém a $M := \bigcup_{k=1}^{K} M_k$, potom

$$\int_M S \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{K} \int_{M_k} S \,\mathrm{d}\mu, \qquad S \in \mathscr{S}.$$

(c) Pro každé $S \in \mathscr{S}$ je $\|S\|$ nezáporná jednoduchá funkce a platí nerovnost

$$\left\| \int S \,\mathrm{d}\mu \right\| \leqq \int \|S\| \,\mathrm{d}\mu. \tag{3c}$$

Důkaz: přenecháváme čtenáři (cvičení 37).

Řekneme, že *vektorová funkce F je integrabilní* (vzhledem k míře μ), jestliže existuje posloupnost $\{S_n\} \subset \mathscr{S}$ taková, že pro μ-s. v. $t \in Z$ platí

$$S_n(t) \to F(t) \tag{4a}$$

a

$$\int \|F - S_n\| \,\mathrm{d}\mu \to 0\,.^{1}) \tag{4b}$$

Množinu všech integrabilních vektorových funkcí $F\colon Z \to \mathscr{X}$ označíme $\mathfrak{B}_{\mathscr{X}}(Z, \mathrm{d}\mu) \equiv \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$.

3.7.3 Lemma: Pro každou posloupnost $\{S_n\} \subset \mathscr{S}$ splňující podmínky (4) existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \int S_n \,\mathrm{d}\mu \in \mathscr{X}$. Její hodnota je pro všechny posloupnosti stejná a závisí (při daném μ) jen na funkci F. Uvedenou limitu značíme $\int\limits_Z F \,\mathrm{d}\mu \equiv \int F \,\mathrm{d}\mu$ a nazýváme **Bochnerovým integrálem (vektorové funkce** F**)**. Pro každou posloupnost $\{S_n\}$ splňující (4a, b) tedy definitoricky platí

$$\int F \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int S_n \,\mathrm{d}\mu\,. \tag{5}$$

Důkaz lemmatu: Z tvrzení 2 a vztahu (4b) je vidět, že posloupnost $\{\int S_n \,\mathrm{d}\mu\}$ je cauchyovská. Nezávislost limity na výběru $\{S_n\}$ plyne z toho, že libovolné dvě posloupnosti splňující (4a, b) lze spojit v jedinou posloupnost, jež také vyhovuje těmto podmínkám. ■

3.7.4 Věta: (a) Množina $\mathfrak{B}_{\mathscr{X}}(Z, \mathrm{d}\mu)$ je podprostor ve $\mathscr{V}(Z, \mathscr{X})$ a integrál je lineární zobrazení z $\mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$ do $\mathscr{X}$.

(b) Pro každé $M \in \mathscr{A}$ a $F \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$ patří $\chi_M F$ do $\mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$.

(c) Jestliže k vektorové funkci F existuje posloupnost $\{S_n\} \subset \mathscr{S}$ splňující (4a), jsou podmínky $F \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}(Z, \mathrm{d}\mu)$ a $\|F\| \in \mathscr{L}(Z, \mathrm{d}\mu)$ ekvivalentní, přičemž

$$\left\| \int F \,\mathrm{d}\mu \right\| \leqq \int \|F\| \,\mathrm{d}\mu\,. \tag{6}$$

Důkaz: Tvrzení (a) je přímým důsledkem vztahů (4), (5) a linearity integrálu jednoduchých funkcí; podobně (b) plyne z implikace (2). Jestliže $F \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$, potom z podmínek (4a, b) dostáváme jednak měřitelnost funkce $\|F\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|S_n\|$, jednak odhad

[1]) Měřitelnost funkcí $\|F - S_n\|$ plyne z podmínky (4a), neboť pro μ-s. v. $t \in Z$ platí $\|F(t) - S_n(t)\| = \lim\limits_{m\to\infty} \|S_m(t) - S_n(t)\|$ a funkce $t \mapsto \|S_m(t) - S_n(t)\|$ jsou jednoduché, a tudíž měřitelné.

$$\int \|F\| \,\mathrm{d}\mu \leqq \int \|F - S_n\| \,\mathrm{d}\mu + \int \|S_n\| \,\mathrm{d}\mu \,,$$

z nějž plyne $\|F\| \in \mathscr{L}(Z, \mathrm{d}\mu)$. Dále podmínka (4b) dává

$$\left| \int \|F\| \,\mathrm{d}\mu - \int \|S_n\| \,\mathrm{d}\mu \right| \leqq \int \big| \|F\| - \|S_n\| \big| \,\mathrm{d}\mu \leqq \int \|F - S_n\| \,\mathrm{d}\mu \to 0 \,,$$

tj.

$$\int \|F\| \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int \|S_n\| \,\mathrm{d}\mu$$

Nerovnost (6) nyní plyne z (3c).

Zbývá dokázat implikaci $\|F\| \in \mathscr{L}(Z, \mathrm{d}\mu) \Rightarrow F \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$. Z měřitelnosti funkce $\|F\|$ především plyne, že množina $Z_0 := \{t \in Z\colon \|F(t)\| = 0\}$ patří do $\mathscr{A}$. Dále podle předpokladu existuje posloupnost $\{S_n\} \subset \mathscr{S}$ splňující (4a); pomocí ní sestrojíme následující vektorové funkce T_n, $n = 1, 2, \ldots$:

$$T_n(t) := \begin{Bmatrix} 0\,, & t \in Z_0 \\ S_n(t)\, \chi_{Z_n}(t)\,, & t \in Z \setminus Z_0 \end{Bmatrix}, \tag{7a}$$

kde $Z_n := \{t \in Z \setminus Z_0\colon \|S_n(t)\| / \|F(t)\| \leqq 2\}$. Množiny Z_n patří do $\mathscr{A}$, neboť každá z funkcí $\|S_n(.)\| / \|F(.)\|$ na $Z \setminus Z_0$ je měřitelná; z implikace (2) pak plyne $T_n \in \mathscr{S}$. Ukážeme, že pro μ-s.v. $t \in Z$ platí

$$\lim_{n \to \infty} T_n(t) = F(t)\,. \tag{7b}$$

Jelikož pro $t \in Z_0$ je tento vztah zjevně splněn, stačí provést ověření pro $t \in (Z \setminus Z_0) \setminus N$, kde N je μ-nulová množina, na níž neplatí (4a). Nechť N_∞ je množina všech $t \in Z \setminus Z_0$ takových, že $\|S_n(t)\| > 2\|F(t)\|$ pro nekonečně mnoho n. Pro $t \in N_\infty$ nemůže platit (4a), neboť $F(t) \neq 0$ pro tato t; dostáváme tak inkluzi $N_\infty \subset N$. Dále pro každé $t \in (Z \setminus Z_0) \setminus N \subset (Z \setminus Z_0) \setminus N_\infty$ existuje n_t takové, že $n > n_t \Rightarrow \|S_n(t)\| \leqq 2\|F(t)\|$, tj. $T_n(t) = S_n(t)$; pro všechna $t \in (Z \setminus Z_0) \setminus N$ tedy platí $\lim_{n \to \infty} T_n(t) = \lim_{n \to \infty} S_n(t) = F(t)$. Nyní definiční vztah (7a) dává $\|T_n(t) - F(t)\| \leqq 3\|F(t)\|$; na základě Lebesgueovy věty z této nerovnosti, podmínky (7b) a integrability funkce $\|F\|$ plyne $\int \|F - T_n\| \,\mathrm{d}\mu \to 0$, tj. $F \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$. ■

3.7.5 Poznámky: (a) Pro zjištění integrability dané vektorové funkce je tedy podstatné ověřit podmínku (4a). To je obecně složitá úloha; v některých speciálních případech je však řešení snadné (cvičení 38).

(b) Podobně jako v případě jednoduchých funkcí pro libovolná $F \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$ a $M \in \mathscr{A}$ definujeme

$$\int_M F\,\mathrm{d}\mu := \int \chi_M F\,\mathrm{d}\mu\,. \tag{8}$$

(c) Nechť $\{M_k\} \subset \mathscr{A}$ je konečný disjunktní systém a $M := \bigcup_k M_k$; potom pro každé $F \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$ z rovnosti $\chi_M F = \sum_k \chi_{M_k} F$, věty (4a) a vztahu (8) plyne *aditivita Bochnerova integrálu:*

$$\int_M F\,\mathrm{d}\mu = \sum_k \int_{M_k} F\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Často se užívá následující vlastnost Bochnerova integrálu.

3.7.6 Tvrzení: Jestliže $\mathscr{Y}$ je B-prostor (obecně různý od $\mathscr{X}$) a $B\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ je omezené lineární zobrazení, potom z podmínky $F \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}(Z, \mathrm{d}\mu)$ plyne $BF \in \mathfrak{B}_{\mathscr{Y}}(Z, \mathrm{d}\mu)$, přičemž

$$\int (BF)\,\mathrm{d}\mu = B\left(\int F\,\mathrm{d}\mu\right). \tag{9}$$

Důkaz: Nechť posloupnost $\{S_n\} \subset \mathscr{S}(Z, \mathscr{X})$ splňuje (4a, b). Díky linearitě zobrazení B jsou vektorové funkce $BS_n\colon Z \to \mathscr{Y}$ jednoduché a ze spojitosti B a podmínky (4a) plyne $(BS_n)(t) \to (BF)(t)$ pro μ-s. v. $t \in Z$. Podobně podmínka (4b) dává

$$\int \|BF - BS_n\|\,\mathrm{d}\mu \leqq \|B\| \int \|F - S_n\|\,\mathrm{d}\mu \to 0\,,$$

takže $BF \in \mathfrak{B}_{\mathscr{Y}}$ a

$$\int BF\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int BS_n\,\mathrm{d}\mu\,. \tag{10}$$

Snadno nahlédneme, že rovnost (9) platí pro jednoduché funkce. K dokončení důkazu pak stačí užít (10) a spojitost zobrazení B. ■

Pomocí věty 4c lze pro Bochnerův integrál zobecnit řadu vlastností Lebesgueova integrálu, z nichž snad nejdůležitější je následující tvrzení (viz též cvičení 40).

3.7.7 Věta: Je dána posloupnost $\{F_n\} \subset \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}(Z, \mathrm{d}\mu)$ a nezáporná funkce $g \in \mathscr{L}(Z, \mathrm{d}\mu)$. Nechť pro μ-s. v. $t \in Z$ posloupnost $\{F_n(t)\}$ konverguje, přičemž

 $\|F_n(t)\| \leqq g(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, a nechť dále k limitní funkci $t \mapsto F(t) := \lim_{n\to\infty} F_n(t)$ existuje posloupnost $\{S_n\} \subset \mathscr{S}$ splňující podmínku (4a); potom $F \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$ a

$$\lim_{n\to\infty} \int F_n \, d\mu = \int F \, d\mu .$$

Důkaz: Posloupnost číselných funkcí $\|F_n\|$ zjevně splňuje předpoklady Lebesgueovy věty, takže $\|F\| \in \mathscr{L}(Z, d\mu)$; z věty 4c potom plyne $F \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$. Číselné funkce $f_n := \|F - F_n\|$ jsou integrabilní a mají společnou integrabilní majorantu $\|F\| + g$. Jelikož pro μ-s.v. $t \in Z$ platí $\varphi_n(t) \to 0$, dostaneme opětovným užitím Lebesgueovy věty vztah $\int \|F - F_n\| \, d\mu \to 0$. Konečně z linearity Bochnerova integrálu a nerovnosti (6) vyplývá

$$\left\| \int F \, d\mu - \int F_n \, d\mu \right\| = \left\| \int (F - F_n) \, d\mu \right\| \leqq \int \|F - F_n\| \, d\mu \to 0 . \ \blacksquare$$

Komentář

§ **3.1** • Uvedeme další příklad konstrukce Banachova prostoru z daných B-prostorů. Nechť $\mathscr{Z}$ je uzavřený podprostor B-prostoru $\mathscr{X}$. Na vektorovém prostoru $\tilde{\mathscr{X}} := \mathscr{X}/\mathscr{Z}$ definujeme funkcionál $\|\tilde{x}\|_{\mathscr{Z}} := \inf_{z\in\mathscr{Z}} \|x - z\|$. Je vidět, že $\|\tilde{x}\|_{\mathscr{Z}}$ nezávisí na volbě prvku reprezentujícího třídu $\tilde{x}$; z výsledků cvičení 12 dále plyne, že $\|\,.\,\|_{\mathscr{Z}}$ je norma na $\tilde{\mathscr{X}}$ (zde je podstatný požadavek uzavřenosti podprostoru $\mathscr{Z}$). Pomocí věty 3.1.2 se ověří, že normovaný prostor $(\tilde{\mathscr{X}}, \|\,.\,\|_{\mathscr{Z}})$ je úplný: k posloupnosti $\{\tilde{x}_k\} \subset \tilde{\mathscr{X}}$, pro niž platí $\sum_k \|\tilde{x}_k\|_{\mathscr{Z}} < \infty$, lze podle definice $\|\,.\,\|_{\mathscr{Z}}$ sestrojit posloupnost $\{z_k\} \subset \mathscr{Z}$ tak, aby $\|x_k - z_k\| < \|x_k\|_{\mathscr{Z}} + 2^{-k}$. Odtud dostáváme $\sum_k \|x_k - z_k\| < \infty$, a proto existuje $x \in \mathscr{X}$, pro něž $\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{k=1}^{n} (x_k - z_k)\| = 0$; pro odpovídající třídu $\tilde{x}$ potom platí

$$\|\tilde{x} - \sum_{k=1}^{n} \tilde{x}_k\|_{\mathscr{Z}} \leqq \|x - \sum_{k=1}^{n} (x_k - z_k)\| \to 0 \quad \text{pro} \quad n \to \infty .$$

§ **3.2** • Fourierova transformace $\mathscr{F}\colon L^1(\mathbb{R}^n) \to C_\infty(\mathbb{R}^n)$ je injektivní, což se dá ověřit následovně. Nechť pro nějaké $g \in L^1$ platí $\mathscr{F}g = 0$. Tuto rovnost vynásobíme libovolnou funkcí z $\mathscr{S}$ a zintegrujeme přes $\mathbb{R}^n$; po záměně pořadí integrací dostaneme vzhledem k bijektivitě zobrazení $f \mapsto \hat{f}$

$$\int f(x)\, g(x) \, dx = 0$$

pro všechna $f \in \mathscr{S}$. Odtud pomocí cvičení 7 a Lebesgueovy věty pro každý omezený interval $J \subset \mathbb{R}^n$ plyne $\nu(J) = 0$, kde ν je komplexní borelovská míra na $\mathbb{R}^n$ určená vztahem $d\nu = g\, dm_n$ a m_n je Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^n$. Podle důsledku A.5.7 platí $\nu(B) = 0$ pro všechna $B \in \mathscr{B}^n$, takže $g = 0$ (viz implikaci (A.6.20a)). Tím je injektivita dokázána. Poznamenejme, že $\mathscr{F}$ není surjektivní.

• V klasické teorii Fourierovy transformace se vyšetřuje, za jakých dodatečných podmínek splňuje funkce $f \in L^1$ vztah

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{i(x,y)} (\mathscr{F}f)(y)\, dy,$$

který lze chápat jako zobecnění Fourierovy řady pro neperiodické funkce. Uvedený vztah je samozřejmě splněn pro všechna $f \in \mathscr{S}$; některé výsledky pro netriviální případ $f \in L^1 \setminus \mathscr{S}$ lze najít v ⟦KF⟧, § VIII.4.7 (pro $n = 1$ viz též ⟦Jar 2⟧, § XIII.11).

• Součin funkcí $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ patří do $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$; pro jeho Fourierovu transformaci plyne z (3.2.10) vztah $\widehat{fg} = (2\pi)^{-n/2} \hat{f} * \hat{g}$, kde

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\, f(y)\, dy.$$

Zobrazení $[f, g] \mapsto f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ se nazývá **konvoluce**; je to binární operace na $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, která je zjevně *bilineární* a *komutativní:* Pomocí vztahu $f * g = (2\pi)^{n/2} \widehat{\check{f} \check{g}}$ se snadno ověří, že je též *asociativní*. Některá důležitá rozšíření konvoluce se probírají v ⟦Yo⟧, § VI.3, ⟦RS 2⟧, § IX.1.

§ **3.3** • Důležitým příkladem duálního prostoru k topologickému vektorovému prostoru, který není normovaný, je prostor $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)'$, jehož prvky nazýváme *temperovanými distribucemi* na $\mathbb{R}^n$. Při studiu parciálních diferenciálních rovnic na dané oblasti ($\equiv$ otevřené souvislé množině) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se často užívá duálního prostoru k úplnému lokálně konvexnímu prostoru $\mathscr{D}(\Omega) \equiv (C_0^\infty(\Omega), \tau)$. Prostor $\mathscr{D}(\Omega)$ je tzv. induktivní limitou lokálně konvexních prostorů $\mathscr{D}_{K_n}(\Omega) \equiv (C^\infty(K_n), \tau_n)$, kde $\{K_n\}$ je nějaká posloupnost kompaktních množin splňující $K_n \subset K_{n+1}$ a $\bigcup_n K_n = \Omega$, a topologie τ_n je určena seminormami $p_J^{(n)}(f) := \sup_{x \in K_n} |(D^J f)(x)|$ (srv. s (2.6.5)). Podrobný výklad je možno najít např. v ⟦RS 1⟧, § V.4 nebo ⟦Yo⟧, § I.1. Prvky prostoru $\mathscr{D}(\Omega)$ se nazývají *distribuce (zobecněné funkce)* na Ω. Poznamenejme ještě, že z konstrukce prostoru $\mathscr{D}(\Omega)$ vyplývá, že $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)' \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)'$. O teorii distribucí existuje obsáhlá literatura; kromě speciálních monografií ⟦Schw 1⟧, ⟦GŠ⟧ je o řadě vlastností prostorů $\mathscr{S}'$ a $\mathscr{D}'$ pojednáno např. v ⟦RS 1–2⟧, kap. V a IX, ⟦Yo⟧, § I.8 a kap. VI, ⟦KF⟧, § XIV.4 apod.

• Pro prostory $\mathscr{S}'$, $\mathscr{D}'$ a obecně pro duální prostor ke každému topologickému vektorovému prostoru, jehož topologie je určena systémem seminorem $\mathscr{P} \equiv \{p_\alpha\}$

platí analogie tvrzení 3.2.3 (viz též cvičení 2.47): $f \in V'$ právě tehdy, když existuje $c > 0$ a konečný podsystém $\{p_{\alpha_1}, \dots, p_{\alpha_n}\} \subset \mathscr{P}$ takový, že $|f(x)| \leqq c \sum_{j=1}^{n} p_{\alpha_j}(x)$ pro všechna $x \in V$. Pomocí tohoto kritéria např. zjistíme, že existuje přirozené vložení $f \mapsto T_f$ prostoru $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ do $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)'$ dané vztahem $T_f(g) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$, neboť funkcionál T_f je zjevně lineární a jeho spojitost plyne z odhadu $|T_f(g)| \leqq \|f\|_1 \|g\|_{0,0}$.

§ **3.4** • Tvrzení 3.4.2 lze aplikovat např. na reprezentace topologických grup na B-prostorech. Připomeňme, že pro danou topologickou grupu G a topologický vektorový prostor V nazýváme zobrazení $g \mapsto \pi(g)$, kde $\pi(g)\colon V \to V$ je pro každé $g \in G$ spojitý lineární operátor definovaný na celém V, spojitou *reprezentací grupy G na V*, jestliže jsou splněny tyto podmínky: (i) $\pi(e)\, x = x$, $\pi(g_1 g_2)\, x = \pi(g_1)\, \pi(g_2)\, x$ pro všechna $x \in V$,
(ii) zobrazení $[x, g] \mapsto \pi(g)\, x$ topologického součinu $V \times G$ do V je spojité. Jestliže G je lokálně kompaktní grupa a V je B-prostor, vyplývá z tvrzení 3.4.2, že podmínka (ii) je ekvivalentní požadavku spojitosti zobrazení $g \mapsto \pi(g)\, x$ pro každé $x \in V$.

§ **3.6** • Pro dané $B \in \mathscr{B}(\mathscr{X})$ lze postupem z důkazu lemmatu 4 každé funkci $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, pro niž existuje Taylorův rozvoj

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

s poloměrem konvergence $r > \|B\|$, přiřadit operátor

$$f(B) := \operatorname*{u-lim}_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} B^n \in \mathscr{B}(\mathscr{X}) .$$

Tak např. pro *každé* $B \in \mathscr{B}(\mathscr{X})$ máme

$$\exp(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n ;$$

o některých vlastnostech zobrazení $B \mapsto \exp(B)$ pojednává cvičení 36.

Cvičení

1. Dokažte větu 3.1.2.
Návod: Z cauchyovské posloupnosti $\{x_k\}$ je možno vybrat posloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ splňující $\|x_{k_{n+1}} - x_{k_n}\| < 2^{-n}$.

2. V Banachově prostoru mohou existovat posloupnosti $\{x_k\}$, pro něž existuje $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$, ale řada $\sum_k \|x_k\|$ diverguje.
Návod: Viz příklad 3.1.6.

3. Dokažte větu 3.1.4.

4. Je-li $(\tilde{V}, \varrho)$ úplný obal pre-Hilbertova prostoru V, lze na $\tilde{V}$ zavést skalární součin $(.,.)_*$ takový, že $\varrho(x, y)^2 = (x - y, x - y)_*$.
Návod: $(\tilde{V}, \varrho)$ je B-prostor, v němž je splněna rovnoběžníková rovnost.

5. Funkce $s: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $s \equiv \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{J_j}$, je schodovitá právě tehdy, když existuje disjunktní systém $\{K_l\colon l = 1, \ldots, m'\} \subset \mathscr{J}$ a komplexní čísla $\beta_1, \ldots, \beta_{m'}$ tak, že $s = \sum_{l=1}^{m'} \beta_l \chi_{K_l}$.

Návod: Uvažujte disjunktní systém $M_j := J_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} J_k$.

6. Jestliže μ je σ-konečná míra na σ-algebře $\mathscr{A} \subset 2^X$, potom množina $\{\chi_M\colon M \in \mathscr{A}, \mu(M) < \infty\}$ je totální v $L^p(X, d\mu)$ pro $1 \leqq p < \infty$.

Návod: Pro $\mu(X) < \infty$ jsou σ-jednoduché funkce husté v L^p (tvrzení A.2.6). Pro $\mu(X) = \infty$ užijte postup z příkladu 3.1.7.

7. Nechť μ je borelovská míra na $\mathbb{R}^n$; ke každému omezenému intervalu $J \subset \mathbb{R}^n$ existuje posloupnost $\{f_k\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ taková, že
(i) pro $k = 1, 2, \ldots$ platí $\operatorname{supp} f_k \subset J$ a $|f_k(x)| \leqq \chi_J(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$,
(ii) $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \chi_J(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$,
(iii) $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_k - \chi_J|^p \, d\mu = 0$ pro $p \geqq 1$.
Návod: Je-li $n = 1$ a J interval s hraničními body $a < b$, uvažujte posloupnost

$$f_k(x) := \chi_{(a,b)}(x) \exp\left(-\frac{1}{k}\left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-x}\right)\right).$$

Dále užijte indukce: k intervalu $J_{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ existují $J_n \subset \mathbb{R}^n$, $J \subset \mathbb{R}$ tak, že $J_{n+1} = J_n \times J$.

8. Prostor $(C_\infty(X), \|.\|_\infty)$ je úplný.
Návod: Cauchyovská posloupnost $\{f_n\} \subset C_\infty(X)$ stejnoměrně konverguje k nějaké funkci $f \in C(X)$, což je ve sporu s předpokladem existence $\varepsilon_0 > 0$ takového, že pro každou kompaktní množinu K a nějaké $x_K \notin K$ platí $|f(x_K)| \geqq \varepsilon_0$.

9. Ověřte úplnost direktního součtu B-prostorů.

10. Dokažte, že $\prod_{\alpha \in I} \mathscr{X}_\alpha$ je B-prostor (ověřte, že $\|.\|_\infty$ je norma a úplnost vůči této normě). Jak se liší prostory $\sum_{j=1}^{\infty}{}^{\oplus} \mathscr{X}_j$ a $\prod_{j=1}^{\infty} \mathscr{X}_j$?

11. Dokažte rovnosti (3.2.5).

12. Jestliže V_0 je podprostor normovaného prostoru V, potom zobrazení $x \mapsto d(x) := \inf_{y \in V_0} \|x - y\| \equiv \varrho(x, V_0)$ je seminorma na V, přičemž $d(x) = 0$ právě tehdy, když $x \in \overline{V_0}$.

13. Dokažte vztah (3.2.10).
Návod: Užijte Fubiniovy věty.

14. (i) Pro Fourierův-Plancherelův operátor platí $\operatorname{Ran} F = L^2(\mathbb{R}^n)$.
(ii) Operátor F^{-1} je spojitým rozšířením zobrazení $\mathscr{F}_0^{-1}$.
Návod: (i) Viz důkaz tvrzení 5.5.4.
(ii) Ukažte, že $F^{-1} \upharpoonright \mathscr{S} = \mathscr{F}_0^{-1}$ a $F^{-1} \in \mathscr{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$ – viz (i) a (3.2.14).

15. Pro každé $f \in L^p(J, d\mu)$, kde J je omezený interval v $\mathbb{R}^n$ a μ je borelovská míra, existuje posloupnost $\{f_k\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ taková, že $\operatorname{supp} f_k \subset J$ a $\|f_k - f\|_p \to 0$.
Návod: Množina schodovitých funkcí, jejichž nosič leží v J, je hustá v $L^p(J, d\mu)$; dále užijte výsledků cvičení 7.

16. Jestliže posloupnost $\{f_n\} \subset L^p(M, d\mu)$ konverguje k $f \in L^p$ vzhledem k normě $\|.\|_p$ a současně $f_n(x) \to g(x)$ pro s.v. $x \in M$, potom $g \in L^p$ a $f(x) = g(x)$ pro s.v. $x \in M$.
Návod: Užijte tvrzení uvedeného v komentáři k § 2.2.

17. Na každém normovaném prostoru V nekonečné dimenze existují lineární funkcionály, které nejsou omezené.
Návod: Pomocí Hammelovy báze $\{x_\alpha : \alpha \in I\} \subset V$ obsahující nekonečnou lineárně nezávislou množinu $\mathscr{E} \equiv \{e_j : \|e_j\| = 1, j = 1, 2, \ldots\}$ sestrojte funkcionál $f(e_j) := j$, $f(x_\alpha) := 0$, $x_\alpha \notin \mathscr{E}$.

18. Dokažte tvrzení (a), (b) důsledku 3.3.4.
Návod: Ve větě 3.3.2a položte $V_0 := \{\alpha x : \alpha \in \mathbb{C}\}$, $f_0(\alpha x) := \alpha\|x\|$.

19. Nechť $\mathscr{X}$ a $\mathscr{Y}$ jsou lineárně izometrické B-prostory; potom
(i) prostory $\mathscr{X}^*$ a $\mathscr{Y}^*$ jsou lineárně izometrické,
(ii) $\mathscr{X}$ je reflexivní právě tehdy, když $\mathscr{Y}$ je reflexivní.
Návod: (i) Jestliže $\vartheta : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ je lineární izometrie, uvažujte zobrazení $\vartheta^* : \mathscr{X}^* \to \mathscr{Y}^*$, kde $(\vartheta^*(f))(y) := f(\vartheta^{-1}(y))$ pro $y \in \mathscr{Y}$, $f \in \mathscr{X}^*$.

20. Pro každé $p \in (1, +\infty)$ jsou prostory l^p a $L^p(M, d\mu)$ reflexivní.
Návod: Viz návod ke cvičení 19(i) a zobrazení (3.3.3), resp. (3.3.9a).

21. Banachův prostor $\mathscr{X}$ je reflexivní právě tehdy, když $\mathscr{X}^*$ je reflexivní.
Návod: Uvažujte zobrazení $f \mapsto f \circ J^{-1}$ (viz (3.3.11) prostorů $\mathscr{X}^*$ a $\mathscr{X}^{***}$. K důkazu opačné implikace ukažte pomocí tvrzení 3.3.8, že Ran J je uzavřený podprostor v $\mathscr{X}^{**}$, užijte věty 3.3.9 a výsledků cvičení 19.

22. Je dán B-prostor $\mathscr{X}$, operátory $B, C \in \mathscr{B}(\mathscr{X})$ a posloupnosti $\{B_n\}$, $\{C_n\} \subset \mathscr{B}(\mathscr{X})$.
(i) Nechť pro všechna $x \in \mathscr{X}$ platí $B_n x \to Bx$ a $C_n x \to Cx$; potom $B_n C_n x \to BCx$.
(ii) Jestliže $B_n y \to By$ pro všechna $y \in M$, kde M je totální množina v $\mathscr{X}$, a jestliže posloupnost $\{\|B_n\|\}$ je omezená, potom $B_n x \to Bx$ pro všechna $x \in \mathscr{X}$.

23. Tvrzení 3.4.2 zůstane v platnosti, nahradíme-li předpoklad lokální kompaktnosti požadavkem, aby topologický prostor (Y, τ) splňoval první axiom spočetnosti.
Návod: Zobrazení F je pak spojité v bodě $[x_0, y_0]$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset \mathscr{X}$, $x_n \to x_0$, $\{y_n\} \subset Y$, $y_n \to y_0$, platí $F(x_n, y_n) \to F(x_0, y_0)$.

24. Jestliže $\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \eta_j$ konverguje (ne nutně absolutně) pro všechna $\{\xi_j\} \in l^p$, $1 \leqq p < \infty$, potom $\{\eta_j\} \in l^{p'}$, přičemž závislost p' na p je dána formulí (3.3.1).

25. Inverzní operátor k lineárnímu je lineární.

26. Lineární operátor $T: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ lze uzavřít, jestliže existuje uzavřený operátor $S: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ takový, že $\Gamma(T) \subset \Gamma(S)$; potom $\overline{T} \subset S$.

27. Jestliže lineární operátor $T: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ je uzavřený a invertibilní, potom:
(i) T^{-1} je uzavřený lineární operátor z $\mathscr{Y}$ do $\mathscr{X}$,
(ii) postačující podmínkou pro to, aby T byl neomezený, je existence posloupnosti $\{y_n\} \subset \operatorname{Ran} T$ takové, že $T^{-1} y_n \to 0$ a přitom $\{y_n\}$ nekonverguje k nule, a nutnou podmínkou je existence posloupnosti jednotkových vektorů $y_n \in \operatorname{Ran} T$, která nemá hromadné body a splňuje $T^{-1} y_n \to 0$.

28. Mějme B-prostory $\mathscr{X}, \mathscr{Y}, \mathscr{Z}$, uzavřený lineární operátor $S: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ a lineární operátor $T: \mathscr{Y} \to \mathscr{Z}$, který je invertibilní, přičemž $T^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{Z}, \mathscr{Y})$. Potom operátor $TS: \mathscr{X} \to \mathscr{Z}$ je uzavřený.

29. Pro libovolné $p \geqq 1$ má lineární operátor $T: L^p(0, 1) \to L^p(0, 1)$, $(Tf)(x) := f(0)\, x$ s definičním oborem $D_T := C[0, 1]$, tyto vlastnosti:
(i) T není uzavřený, (ii) neexistuje $\overline{T}$.
Návod: Uvažujte posloupnost $\{f_n\}$, kde $f_n(x) := 1 - (n - 1)\, x$ pro $x \in [0, 1/n)$, resp. $f_n(x) := 1/n$ pro $x \in [1/n, 1]$.

30. Na topologickém vektorovém prostoru V_n konečné dimenze jsou slabá a silná topologie totožné.

 Návod: Uvažujte nejprve normovaný prostor V_n s normou $\|.\|_{\mathscr{E}}$ (viz důkaz lemmatu 2.1.9) – užijte duální báze. V obecném případě aplikujte větu 2.6.6 s tím, že pro lineární homeomorfismus ϑ topologických vektorových prostorů V_n a $\tilde{V}_n$ je zobrazení $f \mapsto f \circ \vartheta^{-1}$ bijekcí duálních prostorů V'_n a $\tilde{V}'_n$.

31. Posloupnost $\{\varphi_n\} \subset C[a, b]$ konverguje slabě k funkci $\varphi \in C[a, b]$ právě tehdy, když $\sup_n \|\varphi_n\|_\infty < \infty$ a $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ pro všechna $x \in [a, b]$. Najděte příklad posloupnosti v $C[a, b]$, která konverguje slabě, ale nikoliv silně.
Návod: Pro každé $x \in [a, b]$ patří funkcionál δ_x, $\delta_x(\varphi) := \varphi(x)$ do $C[a, b]^*$. K důkazu postačující podmínky užijte Lebesgueovu větu.

32. Nechť T je uzavřený lineární operátor na B-prostoru $\mathscr{X}$; potom pro libovolná $\lambda, \mu \in \varrho(T)$ platí **první rezolventní formule** (Hilbertova identita) $R_T(\lambda) - R_T(\mu) = (\lambda - \mu)\, R_T(\lambda)\, R_T(\mu)$ a operátory $R_T(\lambda)$, $R_T(\mu)$ komutují.
Návod: Pro každé $x \in \mathscr{X}$ platí $x = (T - \lambda)\, y + (\lambda - \mu)\, y$, kde $y := R_T(\mu)\, x$.

33. Jestliže $T, S \in \mathscr{C}(\mathscr{X})$, $D_T \subset D_S$ a $\lambda \in \varrho(T) \cap \varrho(S)$, platí **druhá rezolventní formule** $R_T(\lambda) = R_S(\lambda) - R_S(\lambda)\,(T - S)\, R_T(\lambda)$. Nechť dále $T - S = UV$, přičemž $D_V = D_S$, $D_U = VD_T$, $\operatorname{Ran} V = \mathscr{X}$ a V je invertibilní; potom je invertibilní i operátor $I + VR_S(\lambda)\, U$ a platí $R_T(\lambda) = R_S(\lambda) - R_S(\lambda)\, U(I + VR_S(\lambda)\, U)^{-1}\, VR_S(\lambda)$.
Návod: Pro libovolné invertibilní operátory $A, B\colon \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ existuje $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; dále $(A^{-1})^{-1} = A$ a $A^{-1}A = I \upharpoonright D_A$.

34. Pro daný uzavřený lineární operátor T na B-prostoru $\mathscr{X}$ nazýváme *oblastí regularity* množinu všech $\lambda \in \mathbb{C}$, pro něž existuje $c(\lambda) > 0$ takové, že $\|(T - \lambda)\, x\| \geqq c(\lambda)\, \|x\|$, $x \in D_T$ (značení $\pi(T)$).
Dokažte: (i) $\pi(T)$ je otevřená množina, (ii) $\operatorname{Ran}(T - \lambda)$ je uzavřený podprostor v $\mathscr{X}$ pro každé $\lambda \in \pi(T)$, (iii) $\varrho(T) \subset \pi(T)$.
Návod: (i) Jestliže $\lambda_0 \in \pi(T)$, potom do $\pi(T)$ patří $c(\lambda_0)/2$ – okolí bodu λ_0. (ii) Užijte tvrzení 3.4.9. (iii) Pro $\lambda \in \varrho(T)$ lze položit $c(\lambda) = \|R_T(\lambda)\|^{-1}$.

35. Operátor Q na $C[0, 1]$, $(Qf)\,(x) := xf(x)$, je omezený, $\|Q\| = 1$, a pro jeho spektrum platí $\sigma_p(Q) = \sigma_c(Q) = \emptyset$, $\sigma_r(Q) = [0, 1]$.

36. Ověřte následující vlastnosti operátoru $\exp B \in \mathscr{B}(\mathscr{X})$ definovaného pro každé $B \in \mathscr{B}(\mathscr{X})$ vztahem $\exp B := \operatorname{u-lim}_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} (1/n!)\, B^n$:

(i) $\|\exp B\| \leqq \exp \|B\|$;
(ii) jestliže $BC = CB$, potom $\exp(B + C) = (\exp B)\,(\exp C) = (\exp C)\,(\exp B)$;
(iii) zobrazení $\mathbb{C} \ni z \mapsto \exp(Bz)$ je spojité vzhledem k operátorové normě.

Návod: (ii) Užijte rovnost

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{B^k}{k!} \sum_{l=0}^{N} \frac{C^l}{l!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(B+C)^j}{j!} + \sum_{j=N+1}^{2N} \sum_{k=j-N}^{N} \frac{B^k}{k!} \frac{C^{j-k}}{(j-k)!}.$$

(iii) Stačí dokázat spojitost v bodě $z = 0$ (viz (i)).

37. Dokažte tvrzení 3.7.2.
Návod: Pro libovolnou dvojici $S, S' \in \mathscr{S}$ existuje konečný disjunktní systém $\{M_j\} \in \mathscr{A}$ takový, že $S = \sum_j y_j \chi_{M_j}$ a $S' = \sum_j y'_j \chi_{M_j}$.

38. Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval s koncovými body a, b, přičemž $-\infty \leqq a < b \leqq \leqq +\infty$, a vektorová funkce $F: J \to \mathscr{X}$ je spojitá na J.
(i) Pro každý kompaktní interval $K \subset J$ a každou borelovskou míru μ patří F do $\mathfrak{B}_{\mathscr{X}}(K, \mathrm{d}\mu)$.
(ii) Jestliže interval J není kompaktní, avšak existují $\lim_{t \to a+} F(t)$ a $\lim_{t \to b-} F(t)$, potom lze sestrojit posloupnost $\{S_n\} \subset \mathscr{S}(J, \mathscr{X})$ takovou, že $\lim_{n \to \infty} \sup_{t \in J} \|S_n(t) - F(t)\| = = 0$, tj. pro F je splněno (3.7.4a).
Návod: Funkce F je stejnoměrně spojitá na K (viz komentář k § 2.5) a podmínky (3.7.4a, b) lze splnit pro vhodné schodovité funkce.

39. Jestliže vektorová funkce $F: \mathbb{R} \to \mathscr{X}$ je spojitá na intervalu $[a, b]$, potom pro každé $t \in (a, b)$ platí $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t) \int_a^t F(u)\, \mathrm{d}u = F(t)$.

40. Bochnerův integrál je *absolutně spojitý:* jestliže $F \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$, potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že z podmínek $N \in \mathscr{A}$, $\mu(N) < \delta$ plyne $\| \int_N F\, \mathrm{d}\mu \| < \varepsilon$.
Návod: Užijte absolutní spojitosti $\int \|F\|\, \mathrm{d}\mu$.

41. Je dána vektorová funkce $F: \mathbb{R} \to \mathscr{X}$, která je integrabilní na $\mathbb{R}$ vzhledem k Lebesgueově míře, a nenulová reálná čísla c, d. Potom pro funkci $w_{cd}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $w_{cd}(t) := ct + d$, a každé $M \in \mathscr{B}$ platí $F \circ w_{cd} \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}(\mathbb{R}, \mathrm{d}m)$ a $\int_M (F \circ w_{cd})(t)\, \mathrm{d}t = (1/|c|) \int_{w_{cd}(M)} F(t)\, \mathrm{d}t$.
Návod: Jestliže vektorová funkce S je jednoduchá, potom $S \circ w_{cd}$ je rovněž jednoduchá. Dále pro každé $f \in \mathscr{X}^*$ aplikujte na $\int f(F(ct + d))\, \mathrm{d}t$ větu o substituci.

42. Je dáno zobrazení $B(.)$: $\mathbb{R} \to \mathscr{B}(\mathscr{X})$ takové, že pro každé $x \in \mathscr{X}$ je vektorová funkce $t \mapsto B(t)\, x$ spojitá na $\mathbb{R}$. Nechť dále $K \subset \mathbb{R}$ je libovolný kompaktní interval a μ je borelovská míra na $\mathbb{R}$.

110 (i) Pro každou konvergentní posloupnost $\{x_n\} \subset \mathscr{X}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_K B(t)\, x_n \,\mathrm{d}\mu(t) = \int_K \lim_{n\to\infty} B(t)\, x_n \,\mathrm{d}\mu(t) .$$

(ii) Jestliže operátor $T \in \mathscr{C}(\mathscr{X})$ pro všechna $t \in K$ splňuje $B(t)\, T \subset TB(t)$, potom pro každé $y \in D_T$ patří $\int_K B(t)\, y \,\mathrm{d}\mu(t)$ do D_T a

$$T \int_K B(t)\, y \,\mathrm{d}\mu(t) = \int_K TB(t)\, y \,\mathrm{d}\mu(t) .$$

Návod: (i) Existuje $M > 0$ takové, že $\|B(t)\| \leqq M$ pro všechna $t \in K$.
(ii) Sestrojte posloupnost schodovitých funkcí S_n: $K \to \mathscr{X}$ takovou, že $\{S_n\} \subset D_T$, $\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in K} \|S_n(t) - B(t)\, y\| = 0$ a $\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in K} \|TS_n(t) - TB(t)\, y\| = 0$ (viz cvičení 38).

4.1 ÚVODNÍ POZNÁMKY

Pre-Hilbertův prostor, který je úplný vzhledem k metrice indukované skalárním součinem, se nazývá **Hilbertův prostor.** Každý Hilbertův prostor je tedy B-prostorem, a tudíž se na něj vztahuje vše, co bylo řečeno v předchozí kapitole. Jde ovšem o speciální případ B-prostoru; v důsledku toho, že norma je indukována skalárním součinem, mají Hilbertovy prostory řadu dalších vlastností, resp. některé věty z teorie B-prostorů pro ně platí v silnější formě. Abstraktní Hilbertovy prostory budeme značit symboly $\mathscr{H}, \mathscr{G}$ apod. Půjde přitom vždy o *komplexní* Hilbertovy prostory; s reálnými se setkáme jen výjimečně.

Východiskem pro studium Hilbertových prostorů je materiál § 1.4. Připomeneme zde znovu tři vlastnosti skalárního součinu, resp. normy, které mají základní význam pro další výklad. Jsou to Schwarzova nerovnost

$$|(x, y)| \leqq \|x\| \, \|y\| \,,$$

rovnoběžníková rovnost

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

a polarizační formule

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) - \frac{i}{4}(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2) \,.$$

V § 3.1 jsme ukázali, že dané dva B-prostory jsou ekvivalentní ve smyslu shodnosti všech metrických a algebraických vlastností právě tehdy, když jsou lineárně izometrické. Podobně mluvíme o *ekvivalenci Hilbertových prostorů,* jestliže existuje lineární bijekce, která zachovává skalární součin. Je zřejmé, že ekvivalentní Hilbertovy prostory jsou lineárně izometrické; z polarizační formule plyne, že platí i obrácená implikace.

4.1.1 Tvrzení: Jestliže f je lineární izometrie Hilbertových prostorů $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$, potom pro všechna $x, y \in \mathscr{H}_1$ platí $(f(x), f(y))_2 = (x, y)_1$.

Dále budeme často místo lineární izometrie užívat stručnějšího názvu **izomorfismus Hilbertových prostorů.**

Univerzálním prostředkem přechodu od pre-Hilbertových k Hilbertovým prostorům je opět standardní zúplňovací procedura. Pomocí cvičení 3.4 získáme následující analogii věty 3.1.4.

4.1.2 Věta: Úplný obal pre-Hilbertova prostoru V je Hilbertův prostor a je určen jednoznačně až na izomorfismy f takové, že $f(x) = x$ pro všechna $x \in V$.

Z již probraných B-prostorů patří mezi Hilbertovy prostory $\mathbb{C}^n$, l^2 a $L^2(M, d\mu)$; řadu dalších příkladů uvádíme v následujících paragrafech. Existuje opět mnoho způsobů konstrukce nových Hilbertových prostorů z daných; podrobně se jimi budeme zabývat v závěrečných paragrafech této kapitoly. Na tomto místě probereme pouze jednoduchý případ, který potřebujeme pro vyšetření spojitosti skalárního součinu.

Uvažujme Hilbertovy prostory $\mathscr{H}_r$, $r = 1, 2$; jejich direktní součet jakožto vektorových prostorů se stane pre-Hilbertovým prostorem, definujeme-li

$$([x_1, x_2], [y_1, y_2]) := (x_1, y_1)_1 + (x_2, y_2)_2 \,. \tag{1a}$$

Z výrazu pro normu indukovanou tímto skalárním součinem

$$\|[x_1, x_2]\| = (\|x_1\|_1^2 + \|x_2\|_2^2)^{1/2} \tag{1b}$$

snadno plyne, že uvažovaný pre-Hilbertův prostor je úplný. Nazýváme jej **direktním součtem Hilbertových prostorů** $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ a značíme $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$.

Popsanou konstrukci lze bezprostředně zobecnit na libovolný konečný systém. O direktním součtu nekonečných systémů Hilbertových prostorů pojednává § 4.5.

Vyšetříme nyní spojitost skalárního součinu. Pro pevné $y \in \mathscr{H}$ je zobrazení $f_y \colon \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ definované vztahem $f_y(x) := (x, y)$ spojité v důsledku Schwarzovy nerovnosti; totéž se týká zobrazení $y \mapsto g_x(y) := (x, y) = \overline{f_x(y)}$. Uvažujme dále zobrazení $h\colon \mathscr{H} \oplus \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ kde $h(x, y) := (x, y)$; vzhledem k tomu, že topologie indukovaná normou (1b) je totožná s topologií $\tau_{\mathscr{H} \times \mathscr{H}}$ a že $\mathscr{H}$ jakožto metrický prostor splňuje první axiom spočetnosti, *je zobrazení h spojité* podle tvrzení 3.4.2 a poznámky 3.4.3. K tomuto závěru lze ovšem dospět i zcela elementárně pomocí Schwarzovy nerovnosti.

Nechť M je nějaká množina v $\mathscr{H}$; v důsledku spojitosti skalárního součinu a vztahů (1.4.3–4) platí

$$M^{\perp} = \overline{(M^{\perp})_{\mathrm{lin}}} = (\overline{M_{\mathrm{lin}}})^{\perp} \,. \tag{2}$$

Z toho vyplývá, že *ortogonální doplněk libovolné množiny v Hilbertově prostoru je uzavřený podprostor.*

4.2 VĚTA O ORTOGONÁLNÍM ROZKLADU A JEJÍ DŮSLEDKY

V Hilbertově prostoru jsou prostřednictvím skalárního součinu axiomatizovány kromě metrických vlastností i vztahy ortogonality. Ukazuje se, že axiomy skalárního součinu spolu s podmínkou úplnosti jsou tak silné, že geometrie Hilbertova prostoru je založena na velmi názorných tvrzeních, která většinou představují bezprostřední zobecnění elementárních vlastností euklidovského prostoru konečné dimenze.

4.2.1 Tvrzení (*lemma o ortogonální projekci*): Nechť $\mathcal{G}$ je uzavřený podprostor v $\mathcal{H}$; ke každému $x \in \mathcal{H}$ existuje právě jeden vektor $y_x \in \mathcal{G}$ takový, že pro vzdálenost x od $\mathcal{G}$ platí $\varrho(x, \mathcal{G}) = \|x - y_x\|$.

Důkaz: Jelikož $d \equiv \varrho(x, \mathcal{G}) = \inf_{y \in \mathcal{G}} \|x - y\|$ (viz cvičení 2.3), existuje posloupnost $\{y_n\} \subset \mathcal{G}$ taková, že $d = \lim_{n \to 0} \|x - y_n\|$. Z rovnoběžníkové rovnosti plyne, že $\{y_n\}$ je cauchyovská:

$$\|y_n - y_m\|^2 = \|(y_n - x) + (x - y_m)\|^2 =$$

$$= 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4\|x - (y_n + y_m)/2\|^2 \leqq$$

$$\leqq 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4d^2 \to 0 \quad \text{pro } n, m \to \infty\,.$$

Vzhledem k uzavřenosti $\mathcal{G}$ platí $y_n \to y_x \in \mathcal{G}$, a potom $\lim_{n \to \infty} \|x - y_n\| = \|x - y_x\|$. Jednoznačnost se dokáže opět pomocí rovnoběžníkové rovnosti. ■

Vektor $y_x \in \mathcal{G}$ nazýváme **ortogonální projekcí** vektoru x do $\mathcal{G}$.

4.2.2 Příklad: Pro $\dim \mathcal{G} < \infty$ existuje jednoduché vyjádření ortogonální projekce libovolného vektoru x do $\mathcal{G}$ pomocí dané ortonormální báze $\{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathcal{G}$. Hledaný vektor y_x je určen komplexními čísly $\gamma_1^0, \dots, \gamma_n^0$, pro něž funkce $[\gamma_1, \dots, \gamma_n] \mapsto \left\| x - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j e_j \right\|^2$ nabývá minima. Rozpisem dostáváme

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j e_j \right\|^2 = \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{n} \bar{\gamma}_j \xi_j + \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^2 =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\xi_j - \gamma_j|^2\,, \tag{1}$$

kde $\xi_j := (e_j, x)$. Odtud je zřejmé, že $y_x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$.

4.2.3 Věta (*o ortogonálním rozkladu*): Jestliže $\mathscr{G}$ je uzavřený podprostor v $\mathscr{H}$, potom ke každému $x \in \mathscr{H}$ existuje právě jedno $y \in \mathscr{G}$ a $z \in \mathscr{G}^{\perp}$ tak, že $x = y + z$.

Důkaz: Tvrzení o jednoznačnosti je snadným důsledkem vztahu $\mathscr{G} \cap \mathscr{G}^{\perp} = \{0\}$ (viz cvičení 3). K tomu, abychom dokázali existenci, zvolíme za y ortogonální projekci vektoru x do $\mathscr{G}$; zbývá ověřit, že $z := x - y \in \mathscr{G}^{\perp}$, což je ekvivalentní podmínce $(e, z) = 0$ pro každý jednotkový vektor $e \in \mathscr{G}$. Podle lemmatu o ortogonální projekci platí $\|z\| = \inf_{y' \in \mathscr{G}} \|x - y'\|$; speciálně pro $y' = y + (e, z)\, e$ dostáváme $\|z\|^2 \leqq \|z - (e, z)\, e\|^2 = \|z\|^2 - |(e, z)|^2$, což je možné jen pro $(e, z) = 0$. ■

Význam dokázané věty spočívá v tom, že pro *libovolný* uzavřený podprostor $\mathscr{G} \subset \mathscr{H}$ zaručuje existenci rozkladu

$$\mathscr{H} = \mathscr{G} \oplus \mathscr{G}^{\perp} . \tag{2}$$

Tato vlastnost je charakteristickým rysem Hilbertových prostorů, který Banachovy prostory obecně nemají (viz [[DS 1]], § VI.12). Pomocí vztahu

$$M^{\perp\perp} = \overline{M_{\text{lin}}} \tag{3}$$

(viz cvičení 4) můžeme rozklad (2) zapsat pro libovolnou množinu $M \subset \mathscr{H}$ ve tvaru

$$\mathscr{H} = M^{\perp} \oplus \overline{M_{\text{lin}}} . \tag{4}$$

Odtud hned vyplývá následující často užívaná charakteristika totálních množin v Hilbertově prostoru (srv. též cvičení 3):

4.2.4 Tvrzení: Množina $M \subset \mathscr{H}$ je totální právě tehdy, když $M^{\perp} = \{0\}$.

V předchozí kapitole jsme se zabývali úlohou nalezení obecného tvaru lineárního funkcionálu na daném B-prostoru. Viděli jsme, že tuto úlohu je třeba řešit pro každý konkrétní B-prostor zvlášť, přičemž v některých případech jde o komplikovaný problém. V Hilbertových prostorech je situace mnohem jednodušší; pomocí věty o ortogonálním rozkladu dostáváme následující řešení pro libovolný Hilbertův prostor.

4.2.5 Věta (*Rieszovo lemma*): Ke každému $f \in \mathscr{H}^*$ existuje právě jeden vektor $y_f \in \mathscr{H}$ takový, že pro všechna $x \in \mathscr{H}$ platí

$$f(x) = (y_f, x) . \tag{5}$$

Takto definované zobrazení $f \mapsto y_f$ je izometrie prostorů $\mathscr{H}^*$ a $\mathscr{H}$.

Důkaz: Vzhledem ke spojitosti a linearitě f je množina $\operatorname{Ker} f$ uzavřený podprostor v $\mathscr{H}$. Jestliže $\operatorname{Ker} f = \mathscr{H}$, je $f = 0$ a rovnost (5) platí pro $y_f = 0$.

V opačném případě existuje jednotkový vektor $y \in (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$. Pro libovolné $x \in \mathscr{H}$ patří vektor $z_x := f(x)\,y - x\,f(y)$ do $\operatorname{Ker} f$, a proto platí $0 = (y, z_x) = f(x) - (y, x)\,f(y)$; vztah (5) je tedy splněn pro $y_f = \overline{f(y)}\,y$. Jednoznačnost určení y_f a injektivita zobrazení $f \mapsto y_f$ plynou z toho, že $\mathscr{H}^{\perp} = 0$. Vzhledem k tomu, že pro každé $y \in \mathscr{H}$ je $x \mapsto (y, x)$ omezený lineární funkcionál, je zobrazení $f \mapsto y_f$ surjektivní. Ze vztahu (5) a Schwarzovy nerovnosti dostáváme $\|f\| \leqq \|y_f\|$; položíme-li v (5) $x = y_f$, získáme nerovnost $\|y_f\|^2 = f(y_f) \leqq \|f\|\,\|y_f\|$, takže celkem platí $\|f\| = \|y_f\|$. ■

4.2.6 Důsledek: Každý Hilbertův prostor je reflexivní.

Důkaz: Užijeme výsledků cvičení 6 a označení tam zavedeného. Podle Rieszova lemmatu existuje k danému $\varphi \in \mathscr{H}^{**}$ prvek $g_\varphi \in \mathscr{H}^*$ takový, že pro všechna $f \in \mathscr{H}^*$ platí $\varphi(f) = (g_\varphi, f)_* = (y_f, y_{g_\varphi}) = f(y_{g_\varphi})$. ■

Z věty 3.5.3a a Rieszova lemmatu vyplývá pro slabou konvergenci v Hilbertově prostoru ekvivalence

$$x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow (y, x_n) \to (y, x) \quad \text{pro všechna } y \in \mathscr{H}. \tag{6}$$

Odtud snadno dostaneme následující užitečný vztah mezi slabou a silnou konvergencí v Hilbertově prostoru.

4.2.7 Tvrzení: Jestliže posloupnost $\{x_n\} \subset \mathscr{H}$ konverguje slabě k x a $\|x_n\| \to \|x\|$, potom $\{x_n\}$ konverguje k x i silně.

Budiž M totální množina v $\mathscr{H}$; pro každé $x \in \mathscr{H}$ tedy existuje posloupnost $\{x_n\} \subset M_{\text{lin}}$ taková, že $x_n \to x$. Obecně však není znám předpis udávající vyjádření vektorů x_n pomocí x a prvků množiny M. Situace se silně zjednoduší, budeme-li předpokládat, že množina M je ortonormální. Nechť $\mathscr{E} \equiv \{e_\alpha : \alpha \in I\}$ je ortonormální množina libovolné mohutnosti (ne nutně totální). Pro dané $x \in \mathscr{H}$ utvoříme čísla $\xi_\alpha := (e_\alpha, x)$, která nazýváme **Fourierovými koeficienty** vektoru x vzhledem k $\mathscr{E}$. Pomocí (1) zjistíme, že pro každou nejvýše spočetnou podmnožinu $\{\alpha_j : j = 1, 2, \ldots\} \subset I$ platí tzv. **Besselova nerovnost**

$$\sum_j |(e_{\alpha_j}, x)|^2 \leqq \|x\|^2, \tag{7}$$

z níž plynou následující vlastnosti ortonormálních množin.

4.2.8 Tvrzení: (a) Množina X nenulových Fourierových koeficientů vektoru x vzhledem k dané ortonormální množině $\mathscr{E}$ je nejvýše spočetná.

(b) Pro každou ortonormální množinu $\{e_j : 1 \leqq j \leqq \infty\}$ platí $\operatorname*{w-lim}_{j\to\infty} e_j = 0$.

Důkaz: (a) Nechť $X_n := \{\xi_\alpha : \alpha \in I, |\xi_\alpha| \geqq 1/n\}$, $n = 1, 2, \ldots$; podle (7) jsou všechny tyto množiny konečné, proto $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ je nejvýše spočetná.

 (b) Řada $\sum_{j=1}^{\infty} |(e_j, x)|^2$ konverguje, takže $\lim_{j\to\infty} (e_j, x) = 0$ pro každé $x \in \mathscr{H}$. ∎

Pro posloupnost $\{\xi_{\alpha_j}\}$ nenulových Fourierových koeficientů vektoru x vzhledem k ortonormální množině $\mathscr{E}$ z nerovnosti (7) plyne

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_{\alpha_j}|^2 \leqq \|x\|^2 ;$$

pomocí tohoto vztahu snadno zjistíme, že posloupnost vektorů $y_n := \sum_{j=1}^{n} \xi_{\alpha_j} e_{\alpha_j}$ je cauchyovská. Její limita, kterou označíme y, patří do uzavřeného podprostoru $\overline{\mathscr{E}_{\mathrm{lin}}}$ a dále pro libovolné $\alpha \in I$ platí $(e_\alpha, x - y) = \xi_\alpha - \lim_{n\to\infty} (e_\alpha, y_n)$. Jestliže $\xi_\alpha = 0$, tj. $\alpha \neq \alpha_j$, $j = 1, 2, \ldots$, potom z ortogonality plyne $(e_\alpha, y_n) = 0$ pro všechna n, tj. $(e_\alpha, x - y) = 0$; v opačném případě existuje přirozené j takové, že $\alpha = \alpha_j$, a potom $(e_{\alpha_j}, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi_{\alpha_j}$, takže opět $(e_\alpha, x - y) = 0$. To znamená, že $x - y \in \mathscr{E}^\perp$ a y je tudíž ortogonální projekcí x do $\overline{\mathscr{E}_{\mathrm{lin}}}$. Odtud dále plyne

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|x - y\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|y_n\|^2 + \|x - y\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_{\alpha_j}|^2 + \|x - y\|^2 .$$

Jestliže $\mathscr{E}$ je totální ortonormální množina, platí

$$x = y = \lim_{n\to\infty} y_n \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \xi_{\alpha_j} e_{\alpha_j} , \tag{8a}$$

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_{\alpha_j}|^2 . \tag{8b}$$

Význam totálních ortonormálních množin je především v tom, že umožňují jednoznačné vyjádření každého vektoru pomocí jeho Fourierových koeficientů podle (8a). Komplikace spočívající v tom, že podmnožina $\{e_{\alpha_j}: j = 1, 2, \ldots\} \subset \mathscr{E}$ v (8a) obecně závisí na x, odpadá, když $\mathscr{H}$ je separabilní, neboť v tom případě je každá ortonormální množina v $\mathscr{H}$ nejvýše spočetná (viz dále tvrzení 4.3.1). Formule (8a, b) potom nabývají velmi jednoduchého tvaru

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} (e_j, x)\, e_j , \tag{9a}$$

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(e_j, x)|^2 . \tag{9b}$$

Prvnímu z těchto vztahů se říká **Fourierův rozvoj** vektoru x, druhému **Parsevalova rovnost.** Poznamenejme, že i v neseparabilním případě platí formule (9a, b), nahradíme-li nekonečné řady limitami usměrněných souborů (viz dále tvrzení 5.4.10).

Uvedené vlastnosti totálních ortonormálních množin jsou bezprostředním zobecněním vlastností ortonormální báze v prostorech konečné dimenze. Je proto účelné pojem ortonormální báze rozšířit: **ortonormální bází** v libovolném Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ nazveme každou ortonormální množinu, která je totální v $\mathscr{H}$.

Podle tvrzení 4 je daná ortonormální množina $\mathscr{E}$ ortonormální bází právě tehdy, když $\mathscr{E}^{\perp} = \{0\}$, což je ekvivalentní podmínce, že $\mathscr{E}$ je maximální (není vlastní podmnožinou žádné ortonormální množiny).

4.2.9 Věta: (a) V každém Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ existuje ortonormální báze.
(b) Všechny ortonormální báze v daném $\mathscr{H}$ mají stejnou mohutnost.

Důkaz: Na systému $\mathscr{S}$ všech ortonormálních množin v $\mathscr{H}$ zavedeme částečné uspořádání pomocí inkluze a užitím Zornova lemmatu zjistíme, že existuje maximální prvek $\mathscr{E}$ systému $\mathscr{S}$. Z předpokladu existence nenulového vektoru $x \in \mathscr{E}^{\perp}$ plyne, že $\mathscr{E}' := \mathscr{E} \cup \{x/\|x\|\}$ je ortonormální množina splňující $\mathscr{E} \subset \mathscr{E}'$, $\mathscr{E} \neq \mathscr{E}'$, a to je spor. Platí tedy $\mathscr{E}^{\perp} = \{0\}$, tj. $\mathscr{E}$ je totální množina. Důkaz tvrzení (b) užívá tvrzení 8 a je poměrně dlouhý (viz např. [[DS 1]], § IV.4). ■

Tato věta umožňuje zavést pojem **hilbertovské dimenze** v prostoru $\mathscr{H}$: nazýváme tak mohutnost libovolné ortonormální báze v $\mathscr{H}$. Podle důsledku 1.4.4 je hilbertovská dimenze prostoru $\mathscr{H}$ totožná s jeho algebraickou dimenzí, pokud je konečná, jinak se tyto dvě dimenze obecně liší – viz cvičení 7.

Pro Hilbertovy prostory a jejich uzavřené podprostory rozumíme dále symbolem dim vždy hilbertovskou dimenzi.

4.2.10 Věta: Hilbertovy prostory $\mathscr{H}, \mathscr{H}'$ jsou izomorfní právě tehdy, když $\dim \mathscr{H} = \dim \mathscr{H}'$.

Důkaz: Nechť $\dim \mathscr{H} = \dim \mathscr{H}'$; v $\mathscr{H}$ a $\mathscr{H}'$ tedy existují ortonormální báze $\mathscr{E}, \mathscr{E}'$ stejné mohutnosti, a je proto možné sestrojit bijekci $V_0 \colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$. Lineárním rozšířením dostaneme lineární bijekci podprostorů $\mathscr{E}_{\mathrm{lin}}, \mathscr{E}'_{\mathrm{lin}}$, která v důsledku ortonormality zachovává skalární součin:

$$(V_0(x), V_0(y))_{\mathscr{H}'} = (x, y)_{\mathscr{H}} \quad \text{pro všechna } x, y \in \mathscr{E}_{\mathrm{lin}}\,. \tag{10}$$

Odtud plyne, že zobrazení V_0 je omezené; jelikož $\overline{\mathscr{E}_{\mathrm{lin}}} = \mathscr{H}$ existuje k němu podle věty 3.2.4 jednoznačné spojité rozšíření $V \in \mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{H}')$. Ukážeme, že V je hledaný izomorfismus. Nechť $V(x) = 0$ a nechť $\{x_n\} \subset \mathscr{E}_{\mathrm{lin}}$ konverguje k x. Potom $V(x_n) \to V(x)$, tj. $\|V(x_n)\|_{\mathscr{H}'} = \|x_n\|_{\mathscr{H}} \to 0$, a tudíž $x = 0$. Vezměme dále libovolné $x' \in \mathscr{H}'$: z podmínky $\overline{\mathscr{E}'_{\mathrm{lin}}} = \mathscr{H}'$ plyne existence $\{x'_n\} \subset \mathscr{E}'_{\mathrm{lin}}$, $x'_n \to x'$, a protože V_0 je bijekce podprostorů $\mathscr{E}_{\mathrm{lin}}$ a $\mathscr{E}'_{\mathrm{lin}}$, existuje $\{x_n\} \subset \mathscr{E}_{\mathrm{lin}}$ tak, že $x'_n = V_0(x_n)$. Pomocí podmínky (10) zjistíme, že $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost, takže $x_n \to x \in \mathscr{H}$. Potom $x'_n = V_0(x_n) \to V(x) = x'$. Zobrazení V je tedy lineární bijekce prostorů $\mathscr{H}$ a $\mathscr{H}'$. Konečně z (10) zjistíme na základě spojitosti skalárního součinu, že pro všechna $x \in \mathscr{H}$ platí $\|V(x)\|_{\mathscr{H}'} = \|x\|_{\mathscr{H}}$, takže prostory $\mathscr{H}$ a $\mathscr{H}'$ jsou izomorfní. Je-li naopak tento předpoklad splněn, tj. existuje izomorfismus $V: \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ a $\mathscr{E}$ je ortonormální báze v $\mathscr{H}$, je $V(\mathscr{E})$ ortonormální množina stejné mohutnosti jako $\mathscr{E}$. Dále je $V(\mathscr{E})$ totální, neboť z vlastností zobrazení V plyne $(V(\mathscr{E}))^\perp = V(\mathscr{E}^\perp) = \{0\}$. ■

4.3 SEPARABILNÍ HILBERTOVY PROSTORY

Naprostou většinu Hilbertových prostorů, s nimiž se setkáváme při aplikacích, tvoří separabilní prostory. Budeme se zde zabývat netriviálním nekonečnědimezionálním případem; termín „separabilní Hilbertův prostor" bez specifikace dimenze bude automaticky znamenat prostor nekonečné dimenze. Východiskem pro studium těchto prostorů jsou jejich následující dvě vlastnosti.

4.3.1 Tvrzení: (a) V separabilním $\mathscr{H}$ je každá ortonormální množina nejvýše spočetná.
(b) Hilbertův prostor $\mathscr{H}$ je separabilní právě tehdy, když v něm existuje spočetná ortonormální báze.
Důkaz: (a) Jestliže $\mathscr{E} \equiv \{e_\alpha: \alpha \in I\}$ je ortonormální množina, potom $\{U_{2^{-1/2}}(e_\alpha): \alpha \in I\}$ je množina disjunktních otevřených koulí v $\mathscr{H}$ stejné mohutnosti jako $\mathscr{E}$ a tvrzení plyne z cvičení 2.6.
(b) Existence spočetné ortonormální báze v separabilním $\mathscr{H}$ plyne z (a) a věty 4.2.9, opačná implikace z lemmatu 3.1.3. ■

V separabilním případě je možno větu 4.2.10 vyjádřit následovně:

4.3.2 Věta: Hilbertův prostor je separabilní právě tehdy, když je izomorfní prostoru l^2.

Prostor l^2 v tomto smyslu představuje kanonickou realizaci separabilního Hilbertova prostoru. Bylo by však mylné vyvozovat z toho, že je bezpředmětné zabývat se jinými konkrétními realizacemi separabilního $\mathscr{H}$. Výběr vhodné realizace má velký význam např. při studiu vlastností lineárních operátorů: ukazuje se, že některé třídy operátorů mají v jistých konkrétních prostorech význačně jednoduchou strukturu. To se týká třeba prostorů L^2 pro třídy Hilbertových-Schmidtových nebo samosdružených operátorů (viz §§ 6.3 a 10.9).

V následujících příkladech zkonstruujeme spočetné ortonormální báze v některých často užívaných Hilbertových prostorech, čímž současně ověříme jejich separabilitu.

4.3.3 Příklad (*prostor* $L^2(a, b)$ *pro* $b - a < \infty$): Vzhledem k tomu, že pro libovolná $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\alpha < \beta$, jsou prostory $L^2(a, b)$ a $L^2(\alpha, \beta)$ izomorfní (cvičení 10), můžeme položit např. $a = 0$, $b = 2\pi$. Množina

$\mathscr{E}_T \equiv \{e_k\colon k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, $e_k(x) := (2\pi)^{-1/2}\, \mathrm{e}^{ikx}$ je zjevně ortonormální; ukážeme, že je totální. Nechť $f \in \mathscr{E}_T^{\perp}$; pro funkci $g\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$,

$$g(x) := \int_0^x f(s)\, \mathrm{d}s + C\,, \tag{1}$$

která je absolutně spojitá v $[0, 2\pi]$, dostáváme z podmínek $(e_k, f) = 0$ integrací *per partes*: $0 = (2\pi)^{-1/2}(g(2\pi) - g(0)) - \mathrm{i}k(e_k, g)$, $k = 0, \pm 1, \ldots$. Speciálně pro $k = 0$ máme $g(2\pi) = g(0) = C$ a zvolíme-li C tak, aby

$$\int_0^{2\pi} g(x)\, \mathrm{d}x = 0\,,$$

dostaneme

$$(e_k, g) = 0\,, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\,. \tag{2}$$

Jelikož g je spojitá v $[0, 2\pi]$ a $g(0) = g(2\pi)$, existují podle Fejérovy věty ([[Jar 2]], věta 191) ke každému $\varepsilon > 0$ celé nezáporné n a komplexní α_k, $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$, taková, že $\max_{x \in [0, 2\pi]} |g(x) - T_\varepsilon(x)| < \varepsilon$, kde $T_\varepsilon := \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e_k$. Z podmínek (2) plyne $(T_\varepsilon, g) = 0$ a odtud

$$\|g\|^2 = |(g - T_\varepsilon, g)| \leqq \|g - T_\varepsilon\|\, \|g\| < \varepsilon (2\pi)^{1/2}\, \|g\|\,,$$

takže $g = 0$. Vzhledem k tomu, že g je spojitá, platí $g(x) = 0$ pro všechna $x \in [0, 2\pi]$; pomocí (1) pak dostáváme $f(x) = 0$ pro s.v. $x \in [0, 2\pi]$, tj. $f = 0$. Posloupnost $\{e'_j\}_{j=1}^{\infty}$, kde $e'_{2j-1} := e_{1-j}$, $e'_{2j} := e_j$ je ortonormální báze v $L^2(0, 2\pi)$; užívá se pro ni názvu **trigonometrická báze.**

Podobně se ověří, že množina $\{x^l\colon l = 0, 1, \ldots\}$ je totální v $L^2(a, b)$ (viz příklad 3.1.5). Zvolíme-li $a = -1$, $b = 1$, dostaneme pomocí Gramovy-Schmidtovy věty ortonormální bázi $\mathscr{E}_P \equiv \{(l + 1/2)^{1/2} P_l\colon l = 0, 1, \ldots\}$, kde P_l jsou **Legendreovy polynomy**, $P_l(x) := (2^l l!)^{-1} (\mathrm{d}^l/\mathrm{d}x^l)\,(x^2 - 1)^l$.

4.3.4 Příklad (*prostory* $L^2(\mathbb{R})$ *a* $L^2(\mathbb{R}^+)$):

(i) Vyšetříme nejprve prostor $L^2(\mathbb{R})$. Pro $\alpha > -1$ uvažujme množinu $\mathscr{T}^{(\alpha)} \equiv \{f_k^{(\alpha)}\colon k = 0, 1, \ldots\}$, kde $f_k^{(\alpha)}(x) := |x|^{\alpha + 1/2} \exp(-x^2/2)\, x^k$, $x \in \mathbb{R}$; je zřejmé, že $\mathscr{T}^{(\alpha)} \subset L^2(\mathbb{R})$. Ukážeme, že $\mathscr{T}^{(\alpha)}$ je totální. Nechť $g \in (\mathscr{T}^{(\alpha)})^{\perp}$; potom pro libovolné reálné λ a přirozené n máme $\left(g, \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{i}\lambda)^k f_k^{(\alpha)}/k!\right) = 0$, tj.

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-\mathrm{i}\lambda x)^k}{k!} f_0^{(\alpha)}(x)\, \mathrm{d}x = 0\,.$$

 Integrand, který označíme $F_n(x)$, splňuje pro všechna $x \in \mathbb{R}$ podmínky $|F_n(x)| \leqq \leqq |g(x)|\, f_0^{(\alpha)}(x)\, e^{|\lambda x|}$ a $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = g(x)\, e^{-i\lambda x} f_0^{(\alpha)}(x)$. Posloupnost $\{F_n\}$ má tedy majorantu, jež je součinem dvou funkcí z $L^2(\mathbb{R})$; proto patří do $L^1(\mathbb{R})$ a Lebesgueova věta potom dává

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x}\, g(x)\, f_0^{(\alpha)}(x)\, dx = 0\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R}\,. \tag{3}$$

Jelikož $gf_0^{(\alpha)} \in L^1(\mathbb{R})$, můžeme podmínku (3) zapsat jako $\mathscr{F}(gf_0^{(\alpha)}) = 0$; z injektivity $\mathscr{F}$ (viz komentář k § 3.2) potom plyne $gf_0^{(\alpha)} = 0$ s.v., a protože $f_0^{(\alpha)}(x) > 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, platí $g(x) = 0$ s.v. v $\mathbb{R}$. Tím je ověřeno, že množina $\mathscr{T}^{(\alpha)}$ je totální v $L^2(\mathbb{R})$ pro každé $\alpha > -1$.

Pomocí Gramovy-Schmidtovy věty získáme z $\mathscr{T}^{(\alpha)}$ ortonormální bázi $\mathscr{E}_L^{(\alpha)} \equiv \equiv \{g_n^{(\alpha)}\colon n = 0, 1, \ldots\}$, kde

$$g_{2k}^{(\alpha)}(x) := \left(\frac{k!}{\Gamma(k+\alpha+1)}\right)^{1/2} |x|^{\alpha+1/2} \exp\left(-x^2/2\right) L_k^{(\alpha)}(x^2)\,,$$

$$g_{2k+1}^{(\alpha)}(x) := \left(\frac{k!}{\Gamma(k+\alpha+2)}\right)^{1/2} |x|^{\alpha+1/2} \exp\left(-x^2/2\right) x\; L_k^{(\alpha+1)}(x^2)\,,$$

přičemž funkce $L_k^{(\alpha)}$ jsou **Laguerreovy polynomy**

$$L_k^{(\alpha)}(r) := \frac{e^r}{k!}\, r^{-\alpha} \frac{d^k}{dr^k}\left(e^{-r} r^{k+\alpha}\right).$$

V případě $\alpha = -1/2$, s nímž se často setkáváme, je zvykem pracovat s funkcemi $h_n := (-1)^{[n/2]}\, g_n^{(-1/2)}$, kde $[\,.\,]$ značí celou část; tyto funkce se vyjadřují pomocí **Hermiteových polynomů** H_n:

$$h_n(x) = (2^n n!)^{-1/2}\, \pi^{-1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_n(x)\,, \tag{4a}$$

$$H_n(x) := (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n}\left(\exp(-x^2)\right). \tag{4b}$$

Význačným rysem funkcí h_n, které zjevně patří do $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, je to, že jsou vlastními vektory Fourierova-Plancherelova operátoru (příklad 3.2.6):

$$Fh_n = \hat{h}_n = (-i)^n\, h_n\,, \qquad n = 0, 1, \ldots\,, \tag{5}$$

(viz cvičení 11).

(ii) V případě prostoru $L^2(\mathbb{R}^+)$ vezmeme pro $\alpha > -1$ množinu $\Phi^{(\alpha)} \equiv \equiv \{\varphi_k^{(\alpha)}\colon k = 0, 1, \dots\}$, kde $\varphi_k^{(\alpha)}(x) := x^{k+\alpha/2}\,e^{-x/2}$. Tvrdíme, že množina $\Phi^{(\alpha)}$ je totální v $L^2(\mathbb{R}^+)$; k důkazu užijeme totálnosti množiny $\mathcal{T}^{(\alpha)} \subset L^2(\mathbb{R})$. Nechť $\psi \in (\Phi^{(\alpha)})^\perp$; pomocí substituce $x \to y^2$ dostaneme podmínky

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(y^2) \exp(-y^2/2)\, |y|^{\alpha+2k+1}\, dy = 0\,, \qquad k = 0, 1, \dots. \tag{6}$$

Pro funkci $\tilde{\psi}$ na $\mathbb{R}$ definovanou vztahem $\tilde{\psi}(y) := |y|^{1/2}\,\psi(y^2)$ platí $\tilde{\psi} \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\|\tilde{\psi}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \tag{7}$$

a z (6) plyne $(f_{2k}^{(\alpha)}, \tilde{\psi}) = 0$, $k = 0, 1, \dots$. Vzhledem k tomu, že $\tilde{\psi}$ je sudá funkce, máme též $(f_{2k+1}^{(\alpha)}, \tilde{\psi}) = 0$, a proto $\tilde{\psi} = 0$. Z rovnosti (7) potom dostáváme $\psi = 0$. Pomocí Gramovy-Schmidtovy věty získáme pro každé $\alpha > -1$ z množiny $\Phi^{(\alpha)}$ ortonormální bázi $\{\psi_n^{(\alpha)}\colon n = 0, 1, \dots\}$, kde

$$\psi_n^{(\alpha)}(x) := \left(\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right)^{1/2} x^{\alpha/2} \exp(-x/2)\, L_n^{(\alpha)}(x)\,. \tag{8}$$

Z dané ortonormální báze v prostoru $L^2(\mathbb{R})$ je možno zkonstruovat báze v prostorech $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n = 2, 3, \dots$, a tím zároveň ověřit separabilitu těchto prostorů. Jde o speciální případ následující obecné situace.

4.3.5 Tvrzení: Nechť jsou dány množiny M, N, σ-algebry $\mathcal{A}_M \subset 2^M$, $\mathcal{A}_N \subset 2^N$ a σ-konečné nezáporné míry μ, ν definované na $\mathcal{A}_M$, resp. $\mathcal{A}_N$ takové, že prostory $L^2(M, d\mu)$, $L^2(N, d\nu)$ jsou separabilní (viz komentář). Potom $L^2_\otimes := = L^2(M \times N, d(\mu \otimes \nu))$ je separabilní, a jestliže $\mathcal{E} \equiv \{e_k\colon k = 1, 2, \dots\}$, resp. $\mathcal{F} \equiv \{f_l\colon l = 1, 2, \dots\}$ jsou ortonormální báze v $L^2(M, d\mu)$, resp. v $L^2(N, d\nu)$, je množina $\{g_{kl}\colon k, l = 1, 2, \dots\}$, kde $g_{kl} := e_k \times f_l$, tj. $g_{kl}(x, y) = e_k(x)\, f_l(y)$ pro všechna $[x, y] \in M \times N$, ortonormální bází v prostoru $L^2_\otimes$.

Důkaz: Z Fubiniovy věty a příkladu A.8.6 plyne, že $\{g_{kl}\colon k, l = 1, 2, \dots\}$ je ortonormální množina v $L^2_\otimes$; zbývá tedy dokázat, že je totální. Nechť pro nějaké $h \in L^2_\otimes$ platí

$$(g_{kl}, h)_\otimes = 0\,, \qquad k, l = 1, 2, \dots. \tag{9}$$

Předpoklad $h \in L^2_\otimes$ implikuje, že pro každé $y \in N \setminus R_0$, $\nu(R_0) = 0$, patří y-řez funkce h, tj. funkce $x \mapsto h^y(x) := h(x, y)$ do $L^2(M, d\mu)$ a dále $H \in L^1(N, d\nu)$, kde $H(y) := \|h^y\|^2$. Podmínku (9) lze pomocí Fubiniovy věty zapsat ve tvaru

$$\int_N H_k(y)\, \bar{f}_l(y)\, d\nu(y) = 0\,, \qquad k, l = 1, 2, \dots, \tag{10a}$$

kde

$$H_k(y) := \int_M h^y(x)\, \bar{e}_k(x)\, d\mu(x) = (e_k, h^y)\,. \tag{10b}$$

Schwarzova nerovnost potom dává odhad $|H_k(y)|^2 \leqq \|h^y\|^2 = H(y)$ pro $y \in N \setminus R_0$, z nějž plyne $H_k \in L^2(N, d\nu)$; je ovšem třeba ověřit měřitelnost funkce H_k. To je však důsledek σ-konečnosti míry ν: existuje nejvýše spočetný systém $N_1 \subset N_2 \subset \ldots$, $N_n \in \mathscr{A}_N$, $\nu(N_n) < \infty$, takový, že $N = \bigcup_n N_n$. Jelikož $h \in L^2_\otimes$ a $e_k \times \chi_{N_n} \in L^2_\otimes$, patří součin těchto funkcí do $L^1_\otimes$; z Fubiniovy věty pak plyne měřitelnost funkce $H_k \chi_{N_n}$, a protože $H_k \chi_{N_n} \to H_k$ s.v. v N, je H_k měřitelná.

Vzhledem k předpokládaným vlastnostem množin $\mathscr{E}$ a $\mathscr{F}$ dostáváme nejprve z (10a) vztahy $H_k(y) = 0$ pro $y \in N \setminus R_k$, kde $\nu(R_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, a potom z (10b) rovnosti $h^y = 0$ pro $y \in N \setminus N_0$, kde $N_0 := \bigcup_{k=0}^{\infty} R_k$; odtud $\|h\|^2_\otimes = \int_N \|h^y\|^2\, d\nu(y) = \int_{N \setminus N_0} \|h^y\|^2\, d\nu(y) = 0$, tj. $h = 0$. ■

Zbývající část tohoto paragrafu je věnována **Hilbertovým prostorům vektorových funkcí**, které představují často užívané zobecnění prostoru $L^2(X, d\mu)$.

4.3.6 Příklad: Je dán separabilní Hilbertův prostor $\mathscr{G}$ dimenze d, $2 \leqq d \leqq \infty$, a nezáporná σ-konečná míra μ definovaná na jisté σ-algebře $\mathscr{A} \subset 2^X$. Jak jsme uvedli v § 3.7, tvoří zobrazení $F\colon X \to \mathscr{G}$ vektorový prostor $\mathscr{V}(X, \mathscr{G}) \equiv \mathscr{V}$ s bodovými operacemi sčítání a násobení číslem.

Vektorová funkce F je **měřitelná**, jestliže komplexní funkce $x \mapsto (g, F(x))_{\mathscr{G}}$ je měřitelná pro každé $g \in \mathscr{G}$ (srv. s poznámkou 3.7.9). Množina měřitelných vektorových funkcí tvoří podprostor $\mathscr{V}_\mu \subset \mathscr{V}$. Z Parsevalovy rovnosti pro nějakou ortonormální bázi v $\mathscr{G}$ vyplývá, že pro každé $F \in \mathscr{V}_\mu$ je $x \mapsto \|F(x)\|^2_{\mathscr{G}}$ měřitelná funkce. Uvažujme množinu

$$\mathscr{L}^2_{\mathscr{G}}(X, d\mu) := \left\{ F \in \mathscr{V}_\mu\colon \int_X \|F(x)\|^2_{\mathscr{G}}\, d\mu(x) < \infty \right\};$$

z nerovnosti $\|F(x) + G(x)\|^2_{\mathscr{G}} \leqq 2(\|F(x)\|^2_{\mathscr{G}} + \|G(x)\|^2_{\mathscr{G}})$ plyne, že jde o podprostor ve $\mathscr{V}_\mu$. Dále $\mathscr{L}_0 := \{F \in \mathscr{V}_\mu\colon F(x) = 0\ \mu\text{-s.v. v } X\}$ je podprostor v $\mathscr{L}^2_{\mathscr{G}}(X, d\mu)$. Sestrojíme faktorový prostor

$$L^2_{\mathscr{G}}(X, d\mu) \equiv L^2_{\mathscr{G}} := L^2_{\mathscr{G}}(X, d\mu)/\mathscr{L}_0$$

(užívá se též označení $L^2(X, d\mu; \mathscr{G})$). Jeho prvky jsou třídy vektorových funkcí lišících se vzájemně na μ-nulové množině – rovnost dvou prvků z $L^2_{\mathscr{G}}$ znamená tedy rovnost μ-s.v. v X. Proto je budeme opět nazývat vektorovými funkcemi a užívat stejného označení jako pro prvky prostoru $\mathscr{L}^2(X, d\mu)$. Na $L^2_{\mathscr{G}}$ je pomocí skalárního součinu v $\mathscr{G}$ definována forma

$$(F, G) := \int_X (F(x), G(x))_{\mathscr{G}} \, d\mu(x) , \qquad (12)$$

která je zjevně skalárním součinem, takže $L^2_{\mathscr{G}}$ je pre-Hilbertův prostor. Tento prostor je navíc úplný (viz dále příklad 4.5.8); nazýváme jej **Hilbertovým prostorem vektorových funkcí** – pro $\mathscr{G} = \mathbb{C}$ je samozřejmě totožný s $L^2(X, d\mu)$.

4.4 HILBERTŮV PROSTOR ANALYTICKÝCH FUNKCÍ

Nechť μ je míra na $\mathbb{C}$, která je generována Lebesgueovou mírou a funkcí $(1/\pi) \exp(-|z|^2)$, tj. $d\mu(z) \equiv d\mu(x + iy) = (1/\pi) \exp(-x^2 - y^2)\, dx\, dy$. Symbolem $A^2(\mathbb{C}, d\mu) \equiv A^2$ označíme pre-Hilbertův prostor tvořený funkcemi, jež jsou analytické v celé komplexní rovině a patří do $\mathscr{L}^2(\mathbb{C}, d\mu)$, přičemž skalární součin je definován stejně jako v $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$:

$$(f, g) := \int_{\mathbb{C}} \overline{f(z)}\, g(z)\, d\mu(z) \qquad (1)$$

(implikace $(f, f) = 0 \Rightarrow f = 0$ je důsledkem spojitosti uvažovaných funkcí). Na rozdíl od L^2 jsou prvky prostoru A^2 funkce a podmínka $f = g$ znamená $f(z) = g(z)$ pro *všechna* $z \in \mathbb{C}$.

Naším prvním úkolem je ukázat, že A^2 je Hilbertův prostor, tj. že je úplný vzhledem k metrice indukované skalárním součinem (1). K tomu účelu budeme uvažovat podprostor $\mathscr{P} \subset A^2$ tvořený všemi polynomy na $\mathbb{C}$ a dokážeme, že Hilberův prostor $\tilde{\mathscr{P}}$, který vznikne jeho standardním zúplněním, je totožný s A^2.

Přímým výpočtem se ověří, že funkce $u_n \in \mathscr{P}$,

$$u_n(z) := z^n/(n!)^{1/2} , \qquad n = 0, 1, \dots ,$$

tvoří ortonormální množinu; vzhledem k tomu, že tato množina je Hammelovou bází v $\mathscr{P}$, a tedy totální množinou v $\tilde{\mathscr{P}}$, je prostor $\tilde{\mathscr{P}}$ separabilní.

4.4.1 Lemma: Pro každé $P \in \mathscr{P}$ a $w \in \mathbb{C}$ platí

$$P(w) = \int_{\mathbb{C}} P(z)\, \overline{e_w(z)}\, d\mu(z) \equiv (e_w, P) , \qquad (2a)$$

$$|P(w)| \leqq \|P\| \exp(|w|^2/2) , \qquad (2b)$$

kde $e_w(z) := e^{\bar{w}z}$.

 Důkaz: Přímým výpočtem integrálu ukážeme, že $\|e_w\| = \exp(|w|^2/2)$, z čehož je zřejmé, že $e_w \in A^2$. Nerovnost (2b) tedy plyne z (2a); tuto rovnost stačí dokázat pro $P = u_n$. Pro všechna $z \in \mathbb{C}$ a přirozená N platí odhad

$$\left| \sum_{k=0}^{N} \frac{\bar{w}^k z^k}{k!} \right| \leqq \exp(|wz|),$$

a jelikož funkce $z \mapsto e^{|wz|} |z|^n$ patří do $\mathscr{L}(\mathbb{C}, d\mu)$, plyne z Lebesgueovy věty

$$\int_{\mathbb{C}} u_n(z) \, \overline{e_w(z)} \, d\mu(z) = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{w^k}{\sqrt{k!}} \int_{\mathbb{C}} u_n(z) \, \overline{u_k(z)} \, d\mu(z) = u_n(w). \ \blacksquare$$

Nyní můžeme přistoupit k důkazu základních vlastností prostoru A^2.

4.4.2 Věta: (a) $\tilde{\mathscr{P}} = A^2$, tj. $A^2(\mathbb{C}, d\mu)$ je separabilní Hilbertův prostor.
(b) Pro každé $f \in A^2$ platí

$$f(w) = \int_{\mathbb{C}} f(z) \, \overline{e_w(z)} \, d\mu(z) = (e_w, f), \qquad w \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

(c) V prostoru A^2 plyne z konvergence podle normy bodová konvergence pro všechna $z \in \mathbb{C}$, tj. $\|f_n - f\| \to 0 \Rightarrow f_n(z) \to f(z)$.
(d) Do A^2 patří právě ty analytické funkce $z \mapsto f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k (k!)^{-1/2}$, pro něž

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < \infty. \tag{4}$$

Důkaz: (a) Nechť $\{P_n\} \subset \mathscr{P}$ je cauchyovská; posloupnost odpovídajících tříd μ-ekvivalentních funkcí je pak cauchyovská v $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$ a vzhledem k úplnosti tohoto prostoru existuje třída $[F] \in L^2$ tak, že $\|F - P_n\| \to 0$, přičemž jistá vybraná posloupnost $\{P_{n_k}\}$ konverguje k F bodově pro μ-s. v. $z \in \mathbb{C}$ (viz příklad 2.2.2). Dále z nerovnosti (2b) plyne

$$|P_n(w) - P_m(w)| \leqq \|P_n - P_m\| \exp(|w|^2/2),$$

odkud vidíme, že $\lim_{n \to \infty} P_n(w) = f(w)$ existuje pro každé $w \in \mathbb{C}$, přičemž $\{P_n\}$ konverguje k f stejnoměrně na každé kompaktní množině $K \subset \mathbb{C}$. V teorii analytických funkcí se dokazuje, že za těchto předpokladů je f analytická v $\mathbb{C}$ – viz např. [[Ru 1]], věta 10.28. Z podmínky $\lim_{k \to \infty} P_{n_k}(z) = F(z)$ pro μ-s. v. $z \in \mathbb{C}$ vidíme, že $f \in [F]$, a tudíž $\|f - P_n\| \to 0$ a $f \in A^2$.

Získali jsme tak inkluzi $\tilde{\mathscr{P}} \subset A^2$, z níž vyplývá, že $\tilde{\mathscr{P}}$ je uzavřeným podprostorem v Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$, který dostaneme standardním zúplněním A^2. Jelikož

$\mathscr{P} = \{u_n\colon n = 0, 1, \ldots\}_{\text{lin}}$, pro ortogonální doplněk podprostoru $\tilde{\mathscr{P}}$ v $\mathscr{H}$ platí $\tilde{\mathscr{P}}^\perp = \{u_n\colon n = 0, 1, \ldots\}^\perp$. Nechť funkce $f \in A^2$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, patří do $\tilde{\mathscr{P}}^\perp$, tj.

$$\int_{\mathbb{C}} f(z)\, \overline{u_n(z)}\, \mathrm{d}\mu(z) = 0\,, \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

Díky tomu, že $f\bar{u}_n \in \mathscr{L}(\mathbb{C}, \mathrm{d}\mu)$ a řada $\sum_k a_k z^k$ konverguje k funkci f stejnoměrně na každé kompaktní množině, dostáváme

$$0 = \int_{\mathbb{C}} f(z)\, \overline{u_n(z)}\, \mathrm{d}\mu(z) = \lim_{R\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{n!}} \int_{|z|\leq R} z^k \bar{z}^n\, \mathrm{d}\mu(z) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n!}} \int_0^{R^2} t^n \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t = a_n \sqrt{n!}\,.$$

To znamená, že $A^2 \cap \tilde{\mathscr{P}}^\perp = \{0\}$, což spolu s již dokázanou inkluzí $\tilde{\mathscr{P}} \subset A^2$ snadno dává tvrzení (a): každé $f \in A^2$ lze zapsat ve tvaru $f = g + h$, kde $g \in \tilde{\mathscr{P}}$, $h \in \tilde{\mathscr{P}}^\perp$. Odtud $h = f - g \in A^2$, tj. $f = g$, a proto $A^2 = \mathscr{H} = \tilde{\mathscr{P}}$.

(b) Podle tvrzení (a) existuje ke každému $f \in A^2$ posloupnost $\{P_n\} \subset \mathscr{P}$, pro niž $\|f - P_n\| \to 0$. Podle (2b) je číselná posloupnost $\{P_n(w)\}$ cauchyovská pro všechna $w \in \mathbb{C}$; pomocí argumentace užité v první části důkazu tvrzení (a) zjistíme, že $P_n(w) \to f(w)$. Rovnost (3) je pak důsledkem (2a) a spojitosti skalárního součinu; užitím Schwarzovy nerovnosti z ní získáme tvrzení (c).

(d) Z rovnosti $\tilde{\mathscr{P}} = A^2$ vyplývá, že $\{u_n\colon n = 0, 1, \ldots\}$ je ortonormální báze v A^2. Každé $f \in A^2$ lze proto zapsat ve tvaru Fourierova rozvoje

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n\,, \qquad \|f\|^2 = \sum_{n=0} |c_n|^2$$

a (4) je důsledkem tvrzení (c). Naopak, nechť pro funkci f, která je analytická v celém $\mathbb{C}$, platí (4); je třeba ukázat, že $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\mu)$. Nezáporné polynomy $P_n(z) := \left|\sum_{k=0}^{n} c_k\, u_k(z)\right|^2$ splňují $P_n(z) \to |f(z)|^2$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$, přičemž

$$\int_{\mathbb{C}} P_n(z)\, \mathrm{d}\mu(z) = \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 \leqq \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$$

a tvrzení plyne z Fatouova lemmatu. ■

Prostor $A^2(\mathbb{C}, d\mu)$, jejž nazýváme **Hilbertovým prostorem analytických funkcí**, byl zkonstruován V. Bargmannem a I. Segalem (viz komentář k § 16.1). Stejného názvu se užívá pro prostory funkcí, které jsou analytické v nějaké oblasti $G \subset \mathbb{C}$ a patří do $\mathscr{L}^2(G, dx\, dy)$; značíme je $A^2(G, dx\, dy)$ (viz komentář).

V jakém vztahu jsou prostory A^2 a $L^2 \equiv L^2(\mathbb{C}, d\mu)$? Uvažujme zobrazení $A^2 \to L^2$, které funkci f přiřazuje třídu $[f]$ funkcí rovných f μ-s.v. v $\mathbb{C}$. To je zjevně lineární, injektivní a zachovává normu; obrazem prostoru A^2 je proto uzavřený podprostor $\mathscr{G} \subset L^2$, který je lineárně izometrický s A^2. Vlastnosti L^2 se tedy přenášejí do A^2. Protože však $\mathscr{G} \neq L^2$, prostor A^2 má řadu speciálních vlastností – viz např. tvrzení (c) věty 2. Další takovou vlastnost dostáváme z formule (3):

4.4.3 Důsledek: Pro každé $w \in \mathbb{C}$ je zobrazení $f \mapsto F_w(f) := f(w)$ omezený lineární funkcionál na A^2, jehož norma je $\|F_w\| = \exp(|w|^2/2)$.

Z formule (3) je dále zřejmé, že množina $C := \{e_w : w \in \mathbb{C}\}$ je totální v A^2, neboť $C^\perp = \{0\}$. Není však ortonormální a nelze ji ani ortonormalizovat vzhledem k tomu, že jde o nespočetnou množinu v separabilním prostoru. Její prvky, kterým se někdy říká **koherentní stavy**, mají následující pozoruhodnou vlastnost. Dosadíme-li $f(z) = (e_z, f)$ do formule (3), dostaneme užitím rovnosti $\overline{e_w(z)} = e_z(w)$ vztah

$$f(w) = \int_{\mathbb{C}} (e_z, f)\, e_z(w)\, d\mu(z)\,, \tag{5}$$

který lze považovat za spojitou analogii Fourierova rozvoje $f = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n, f)\, u_n$ (připomeňme, že v důsledku tvrzení (c) věty 2 konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} (u_n, f)\, u_n(z)$ k $f(z)$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$).

4.4.4 Poznámka: Koherentní stavy se zavádějí i v jiných Hilbertových prostorech. Nejjednodušší je situace, kdy je lze definovat pomocí vhodného izomorfismu prostorů A^2 a $\mathscr{H}$. Vezměme např. prostor $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R})$, a nechť V je lineární operátor z $L^2(\mathbb{R})$ do A^2, který vznikne spojitým rozšířením zobrazení V_0, kde $V_0 h_n := u_n$, $n = 0, 1, \ldots$, a vektory $h_n \in L^2(\mathbb{R})$ jsou určeny vztahy (4.3.4). Z důkazu věty 4.2.10 vyplývá, že rozšíření V zobrazení V_0 je izomorfismus prostorů $L^2(\mathbb{R})$ a A^2. Pro vektory $\psi_w := \exp(-|w|^2/2)\, V^{-1} e_w$, $w \in \mathbb{C}$, platí $\|\psi_w\| = 1$ a

$$\psi_w(x) = \pi^{-1/4} \exp\left\{\frac{1}{2}\left[\bar{w}^2 - |w|^2 - (x - \sqrt{2}\bar{w})^2\right]\right\}. \tag{6}$$

Těmto vektorům říkáme opět koherentní stavy; jejich vlastnostem je věnováno např. cvičení 18 a příklady 16.1.10 a 17.3.2 a 17.3.8. Existují i jiné množiny koherentních stavů, jež nelze získat přenesením z prostoru A^2; o tom se podrobněji zmíníme v komentáři k § 16.1.

4.5 DIREKTNÍ SOUČET HILBERTOVÝCH PROSTORŮ

V teorii Hilbertových prostorů se často pracuje s direktními součty nějakého systému podprostorů daného $\mathscr{H}$. Většinou jde o systémy uzavřených vzájemně ortogonálních podprostorů (s tím jsme se již setkali ve větě 4.2.3). Tento případ je zajímavý mj. z toho důvodu, že podprostor $\mathscr{G}_1 \oplus \mathscr{G}_2 \oplus \ldots \oplus \mathscr{G}_N$ se dá velmi jednoduše charakterizovat topologicky; tato vlastnost dále umožňuje vypustit předpoklad konečnosti uvažovaného systému podprostorů a definovat prostor $\sum_{\alpha \in I}^{\oplus} \mathscr{G}_\alpha$ pro systém navzájem ortogonálních uzavřených podprostorů $\{\mathscr{G}_\alpha : \alpha \in I\}$, kde I je indexová množina libovolné mohutnosti. Uvidíme, že je to vždy uzavřený podprostor v $\mathscr{H}$; budeme ho nazývat **ortogonálním součtem** podprostorů $\mathscr{G}_\alpha$.

Přejděme nyní ke zmíněné topologické charakteristice.

4.5.1 Tvrzení: Nechť $\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2, \ldots, \mathscr{G}_N$ jsou uzavřené navzájem ortogonální podprostory daného $\mathscr{H}$. Potom $\mathscr{H}_N := \sum_{j=1}^{N\,\oplus} \mathscr{G}_j$ je minimální uzavřený podprostor obsahující všechna $\mathscr{G}_j$.

Důkaz: Podle definice v § 1.1 platí $\mathscr{H}_N = \{x \in \mathscr{H} : x = \sum_{j=1}^{N} x_j,\ x_j \in \mathscr{G}_j\}$, a odtud hned plyne, že každý podprostor obsahující všechna $\mathscr{G}_j$ obsahuje $\mathscr{H}_N$. Zbývá tedy dokázat uzavřenost, což je ekvivalentní podmínce, že pro každou cauchyovskou posloupnost $\{x^{(n)}\} \subset \mathscr{H}_N$ platí $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} \in \mathscr{H}_N$. Z rozkladu $x^{(n)} = \sum_{j=1}^{N} x_j^{(n)}$, $x_j \in \mathscr{G}_j$ a ortogonality dostáváme

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\|^2 = \sum_{j=1}^{N} \|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\|^2 .$$

Posloupnosti $\{x_j^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, $j = 1, 2, \ldots, N$, jsou tedy cauchyovské a z uzavřenosti $\mathscr{G}_j$ plyne $x_j^{(n)} \to x_j \in \mathscr{G}_j$. Pro $x := \sum_{j=1}^{N} x_j \in \mathscr{H}_N$ potom platí $\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)} - x\|^2 = = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \|x_j^{(n)} - x_j\|^2 = 0$. ■

Uvažujme nyní libovolný systém $\{\mathscr{G}_\alpha : \alpha \in I, \mathscr{G}_\alpha \neq \{0\}\}$ navzájem ortogonálních uzavřených podprostorů daného $\mathscr{H}$[1]). Na základě právě dokázaného tvrzení vyslovíme následující definici: ortogonální součet $\mathscr{H}_I \equiv \sum_{\alpha \in I}^{\oplus} \mathscr{G}_\alpha$ *je minimální uzavřený podprostor obsahující všechny podprostory* $\mathscr{G}_\alpha$. Užívá se též názvu **hilbertovský součet** podprostorů $\mathscr{G}_\alpha$.

Ortogonální součet je tedy definován pro systém libovolné mohutnosti, avšak jeho prvky musí být uzavřené navzájem ortogonální podprostory. Naproti tomu

[1]) Je-li $\mathscr{H}$ separabilní, je ovšem každý takový systém nejvýše spočetný – viz tvrzení 4.3.1.

 pojem direktního součtu z § 1.1 má smysl pro libovolné podprostory v $\mathscr{H}$, jejichž počet však musí být konečný. Tvrzení 1 lze nyní chápat jako větu o ekvivalenci obou pojmů pro konečné systémy uzavřených ortogonálních podprostorů. Je z něj dále vidět, že každý prvek konečného ortogonálního součtu je roven součtu svých projekcí do jednotlivých podprostorů. Ukážeme, že i v případě obecného ortogonálního součtu je možno charakterizovat jeho prvky pomocí projekcí.

Uvažujme podprostor $(\bigcup_{\alpha\in I}\mathscr{G}_\alpha)_{\mathrm{lin}}$; nazýváme jej **algebraickým součtem** podprostorů $\mathscr{G}_\alpha$. Užívá se pro něj též označení $\sum_{\alpha\in I}\mathscr{G}_\alpha$ (srv. s cvičením 1.5). Jestliže I je konečná množina, je tento podprostor samozřejmě totožný s $\mathscr{H}_I$; v obecném případě platí

$$\mathscr{H}_I = \overline{\sum_{\alpha\in I}\mathscr{G}_\alpha}\,. \tag{1}$$

Na pravé straně totiž máme uzavřený podprostor, který obsahuje všechna $\mathscr{G}_\alpha$, a proto podle definice obsahuje i $\mathscr{H}_I$; současně z podmínky $\mathscr{G}_\alpha \subset \mathscr{H}_I$ a toho, že $\mathscr{H}_I$ je uzavřený podprostor, plyne $\overline{\sum_{\alpha\in I}\mathscr{G}_\alpha} \subset \mathscr{H}_I$.

Přejdeme-li k ortogonálním doplňkům, získáme z podmínky $\mathscr{G}_\alpha \subset \mathscr{H}_I$ inkluzi $\bigcap_{\alpha\in I}(\mathscr{G}_\alpha^\perp) \supset \mathscr{H}_I^\perp$; dále podle (1) existuje pro každé $y\in\mathscr{H}_I$ posloupnost $\{y_n\}\subset$ $\subset \sum_{\alpha\in I}\mathscr{G}_\alpha$ taková, že $y_n \to y$. Jestliže $x\in\bigcap_{\alpha\in I}(\mathscr{G}_\alpha)^\perp$, potom $(y_n, x) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, a tedy $(x, y) = 0$ pro každé $y\in\mathscr{H}_I$, tj. $x\in\mathscr{H}_I^\perp$. Získali jsme tak rovnost

$$\Big(\sum_{\alpha\in I}{}^{\oplus}\mathscr{G}_\alpha\Big)^\perp = \bigcap_{\alpha\in I}(\mathscr{G}_\alpha)^\perp\,. \tag{2}$$

Dále budeme potřebovat dvě jednoduchá tvrzení, která snadno plynou z věty 4.2.3 a spojitosti skalárního součinu.

4.5.2 Lemma: Nechť $\{\mathscr{G}_\alpha\colon \alpha\in I\}$ je systém vzájemně ortogonálních uzavřených podprostorů daného $\mathscr{H}$.

(a) Jestliže pro dané $x\in\mathscr{H}$ je x_α projekce x do $\mathscr{G}_\alpha$, potom projekce x do podprostoru $\sum_{j=1}^{n}{}^{\oplus}\mathscr{G}_{\alpha_j}$ rovná se $\sum_{j=1}^{n}x_{\alpha_j}$ pro libovolnou konečnou podmnožinu $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}\subset I$.

(b) Pro danou spočetnou podmnožinu $\{\alpha_j\colon j = 1, 2, \ldots\}\subset I$ a posloupnost $\{x_j\}$ splňující $x_j\in\mathscr{G}_{\alpha_j}$ položíme $s_n := \sum_{j=1}^{n}x_j$. Posloupnost $\{s_n\}$ konverguje právě tehdy, když $\sum_{j=1}^{\infty}\|x_j\|^2 < \infty$; je-li tato podmínka splněna a $x := \lim_{n\to\infty}s_n$, potom x_j je projekce x do $\mathscr{G}_{\alpha_j}$ a platí

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\|x_j\|^2\,. \tag{3}$$

Odtud získáme užitím vztahů (1), (2) hledané vyjádření prvků prostoru $\mathscr{H}_I$ pomocí projekcí do $\mathscr{G}_\alpha$. Uvedeme jej pro nejčastěji se vyskytující spočetný případ (zobecnění viz cvičení 19).

4.5.3 Věta: Pro ortogonální součet systému $\{\mathscr{G}_j \subset \mathscr{H}: j = 1, 2, \dots\}$ uzavřených ortogonálních podprostorů platí

$$\mathscr{H}_\infty \equiv \sum_{j=1}^{\infty}{}^{\oplus}\mathscr{G}_j = \left\{x \in \mathscr{H}: x = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x_j,\ x_j \in \mathscr{G}_j\right\}. \tag{4}$$

Důkaz: Označme pravou stranu symbolem $\mathscr{G}$. Zřejmě $\mathscr{G} \subset \overline{\sum_{j=1}^{\infty} \mathscr{G}_j}$, takže podle (1) platí $\mathscr{G} \subset \mathscr{H}_\infty$. Pro ověření opačné inkluze vezměme $x \in \mathscr{H}_\infty$ a nechť x_j je projekce x do $\mathscr{G}_j$. Podle lemmatu je $s_n \equiv \sum_{j=1}^{n} x_j$ projekce x do $\sum_{j=1}^{n}{}^{\oplus}\mathscr{G}_j$, a proto $\|s_n\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2 \leqq \|x\|^2$, $n = 1, 2, \dots$. Z tvrzení (b) lemmatu a již dokázané inkluze $\mathscr{G} \subset \mathscr{H}_\infty$ dostáváme $s_n \to s \in \mathscr{G} \subset \mathscr{H}_\infty$, takže

$$x - s \in \mathscr{H}_\infty\,. \tag{5}$$

Pro libovolné $y \in \mathscr{G}_k$, $k = 1, 2, \dots$, máme $(x - s, y) = \lim_{n\to\infty}\left(x - \sum_{j=1}^{n} x_j, y\right) = (x - x_k, y) = 0$, neboť x_k je projekce x do $\mathscr{G}_k$; vztah (2) nyní dává $x - s \in \mathscr{H}_\infty^\perp$, což spolu s (5) znamená, že $x = s$, tj. $x \in \mathscr{G}$. ■

4.5.4 Poznámka: Jestliže $\mathscr{E} \equiv \{e_j: j = 1, 2, \dots\}$ je ortonormální množina v $\mathscr{H}$ a $\mathscr{G}_j \equiv \{e_j\}_{\text{lin}}$, potom algebraický součet podprostorů $\mathscr{G}_j$ je roven $\mathscr{E}_{\text{lin}}$, $\mathscr{H}_\infty = \overline{\mathscr{E}_{\text{lin}}}$ a pro projekci libovolného x do $\mathscr{G}_j$ platí $x_j = \xi_j e_j$, kde $\xi_j := (e_j, x)$, takže $\|x_j\|^2 = |\xi_j|^2$. Vztah (4) v tomto případě říká, že do $\mathscr{H}_\infty$ patří právě ty vektory, které se dají vyjádřit ve tvaru Fourierova rozvoje vzhledem k $\mathscr{E}$, a rovnost (3) je totožná s Parsevalovou rovností. Formule (3), (4) lze tedy považovat za zobecnění Parsevalovy rovnosti, resp. Fourierova rozvoje. Analogicky lze zobecnit Besselovu nerovnost: zapišme libovolné $z \in \mathscr{H}$ ve tvaru $z = x + y$, kde $x \in \mathscr{H}_\infty$, $y \in \mathscr{H}_\infty^\perp$. Ze vztahu (2) je vidět, že vektory x a z mají stejné projekce do $\mathscr{G}_j$: $x_j = z_j$, $j = 1, 2, \dots$. Hledanou nerovnost pak dostáváme ze vztahu (3): $\|z\|^2 \geqq \|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|z_j\|^2$, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $z \in \mathscr{H}_\infty$.

4.5.5 Příklad: V prostoru $L^2(X, d\mu)$, kde μ je σ-konečná nezáporná míra definovaná na σ-algebře $\mathscr{A} \subset 2^X$, uvažujme podprostory $\mathscr{G}_j$, které odpovídají rozkladu

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j \tag{6}$$

 na systém disjunktních podmnožin konečné míry: $\mathscr{G}_j := \{\chi_{X_j} f : f \in L^2\}$. Míra μ_j generovaná funkcí χ_{X_j} a mírou μ, $d\mu_j := \chi_{X_j} d\mu$, je konečná a je zřejmé, že podprostor $\mathscr{G}_j$ je izomorfní s $L^2(X_j, d\mu_j)$. Odtud plyne uzavřenost, $\overline{\mathscr{G}_j} = \mathscr{G}_j$; dále podmínky $X_j \cap X_k = \emptyset$, $j \neq k$, implikují $\mathscr{G}_j \perp \mathscr{G}_k$. Pro libovolné $f \in L^2(X, d\mu)$ sestrojíme posloupnost vektorů $f_n := \sum_{j=1}^{n} \chi_{X_j} f = \chi_{X^{(n)}} f$, kde $X^{(n)} := \bigcup_{j=1}^{n} X_j$, jež vzhledem k (6) konverguje bodově k $f(x)$ pro všechna $x \in X$. Dále zřejmě platí $\|f_n\| \leqq \|f\|$, tj. $\|f_n - f\|^2 \leqq 4\|f\|^2$, a podle Lebesgueovy věty máme $\|f_n - f\| \to 0$. Získali jsme tak vztah $L^2(X, d\mu) = \sum_{j=1}^{\infty}{}^{\oplus} \mathscr{G}_j$; rozkladu (6) tedy odpovídá vyjádření prostoru $L^2(X, d\mu)$ ve tvaru ortogonálního součtu podprostorů, z nichž každý je izomorfní prostoru $L^2(X_j, d\mu_j)$, kde $\mu_j(X_j) = \mu(X_j) < \infty$.

Ve zbývající části tohoto paragrafu se budeme zabývat zobecněním postupu popsaného v § 4.1, kde jsme pro danou dvojici Hilbertových prostorů $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ konstruovali nový Hilbertův prostor – jejich direktní součet $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$. Pomocí podprostorů $\mathscr{H}^{(r)} \subset \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$, $r = 1, 2$, definovaných vztahy $\mathscr{H}^{(1)} := \{[x_1, 0] : x_1 \in \mathscr{H}_1\}$, $\mathscr{H}^{(2)} := \{[0, x_2] : x_2 \in \mathscr{H}_2\}$, které jsou zjevně ortogonální a uzavřené, můžeme $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$ zapsat jako ortogonální součet podprostorů $\mathscr{H}^{(1)}$ a $\mathscr{H}^{(2)}$, které jsou jednoznačně určeny výchozími $\mathscr{H}_1$ a $\mathscr{H}_2$. Pro konečné systémy tedy existuje velmi úzká souvislost mezi direktním a ortogonálním součtem; z ní se vychází při konstrukci direktního součtu libovolného systému Hilbertových prostorů.

Nechť je dána neprázdná množina $\mathfrak{M} \equiv \{\mathscr{H}_\alpha : \alpha \in I\}$ Hilbertových prostorů, kde I je indexová množina libovolné mohutnosti. Přitom se nepožaduje, aby zobrazení $\alpha \mapsto \mathscr{H}_\alpha$ bylo injektivní – množina $\mathfrak{M}$ může obsahovat třeba jen jeden prostor. Nulový prvek, normu a skalární součin v $\mathscr{H}_\alpha$ označíme 0_α, $\|\cdot\|_\alpha$ a $(.,.)_\alpha$. Symbolem $\mathscr{H}$ označíme podmnožinu kartézského součinu $\mathop{\times}_{\alpha \in I} \mathscr{H}_\alpha$ (viz poznámku A.1.8b) tvořenou zobrazeními $\alpha \mapsto X(\alpha) \in \mathscr{H}_\alpha$, která splňují následující podmínky:

(i) $I(X) := \{\alpha : X(\alpha) \neq 0_\alpha\}$ je nejvýše spočetná množina,

(ii) $\sum_{\alpha \in I(X)} \|x(\alpha)\|_\alpha^2 < \infty$.

Množina $\mathscr{H}$ se stane komplexním vektorovým prostorem, položíme-li $(aX + Y)(\alpha) := aX(\alpha) + Y(\alpha)$, $a \in \mathbb{C}$. Lineární kombinace splňují podmínku (ii) v důsledku Minkowského nerovnosti, z níž stejně jako v případě prostoru l^2 plyne, že zobrazení

$$X \mapsto |||X||| := \Big(\sum_{\alpha \in I(X)} \|X(\alpha)\|_\alpha^2 \Big)^{1/2} \tag{7a}$$

je norma na $\mathscr{H}$. Každá z norem $\|.\|_\alpha$ splňuje rovnoběžníkovou rovnost, a proto norma $|||.|||$ je indukována skalárním sočinem

$$(X, Y) := \sum_{\alpha \in I(X) \cap I(Y)} (X(\alpha), Y(\alpha))_\alpha . \tag{7b}$$

Korektnost této definice plyne z následující úvahy. Vzhledem k podmínce (i) se sčítá, stejně jako v (7a), přes spočetnou podmnožinu v I; jde tedy o nekonečnou řadu, o níž se pomocí Schwarzovy a Hölderovy nerovnosti zjistí, že je absolutně konvergentní, takže nezáleží na pořadí členů.

Dokážeme, že prostor $(\mathscr{H}, |||.|||)$ je úplný. Nechť posloupnost $\{X_n\} \subset \mathscr{H}$ je cauchyovská; díky tomu, že množina $I_{\{X_n\}} \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} I(X_n)$ je spočetná, lze ji zapsat ve tvaru $\{\alpha_j : j = 1, 2, \dots\}$. Z podmínky $|||X_n - X_m||| < \varepsilon$ pro $n, m > n(\varepsilon)$ plyne pro každé j existence vektorů $X(\alpha_j) \in \mathscr{H}_{\alpha_j}$ takových, že $X_n(\alpha_j) \to X(\alpha_j)$, a dále nerovnost

$$\sum_{j=1}^{N} \|X_n(\alpha_j) - X_m(\alpha_j)\|_{\alpha_j}^2 < \varepsilon^2 , \qquad N = 1, 2, \dots .$$

Provedením limitního přechodu $m \to \infty$ a potom $N \to \infty$ dostaneme implikaci $n > n(\varepsilon) \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \|X_n(\alpha_j) - X(\alpha_j)\|_{\alpha_j}^2 \leqq \varepsilon^2$. Dodefinujeme $X(\alpha) := 0$ pro $\alpha \in I \setminus I_{\{X_n\}}$; potom $X \in \mathscr{H}$ a $X_n \to X$.

Hilbertův prostor, který jsme takto zkonstruovali, nazýváme **direktním součtem** prostorů $\mathscr{H}_\alpha$ a značíme $\sum_{\alpha \in I}^{\oplus} \mathscr{H}_\alpha$. Jestliže I je konečná množina, jsou podmínky (i), (ii) automaticky splněny a dostáváme totéž, co v § 4.1. Ve spočetně nekonečném případě odpadá pouze podmínka (i) a definice Hilbertova prostoru $\mathscr{H} \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \mathscr{H}_j \equiv \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2 \oplus \dots$ se zjednoduší následovně: $\mathscr{H}$ je množina všech posloupností $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ takových, že $x_j \in \mathscr{H}_j$ a $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_j^2 < \infty$, s algebraickými operacemi definovanými po složkách a skalárním součinem

$$(X, Y) := \sum_{j=1}^{\infty} (x_j, y_j)_j .$$

4.5.6 Poznámka: Direktní součet $\mathscr{H} \equiv \sum_{\alpha \in I}^{\oplus} \mathscr{H}_\alpha$ lze opět zapsat jako ortogonální součet podprostorů $\mathscr{H}^{(\alpha)} \subset \mathscr{H}$, $\alpha \in I$. Skutečně, pro každé $\beta \in I$ tvoří vektory $X \in \mathscr{H}$ splňující $X(\alpha) = 0_\alpha$ pro $\alpha \neq \beta$ uzavřený podprostor $\mathscr{H}^{(\beta)}$, který je izomorfní s $\mathscr{H}_\beta$, a podle (7b) platí $\mathscr{H}^{(\beta)} \perp \mathscr{H}^{(\gamma)}$ pro $\beta \neq \gamma$. Uvažujme libovolné $X \in \mathscr{H}$; každému prvku spočetné množiny $I(X) \equiv \{\alpha_k : k = 1, 2, \dots\}$ přiřadíme vektor $X_k \in \mathscr{H}$ takový, že $X_k(\alpha_k) := X(\alpha_k)$ a $X_k(\alpha) := 0$ pro $\alpha \neq \alpha_k$. Potom platí $X_k \in \mathscr{H}^{(\alpha_k)}$, $\|X - \sum_{k=1}^{n} X_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \|X(\alpha_k)\|_{\alpha_k}^2 \to 0$ pro $n \to \infty$, a z výsledku cvičení 19 vyplývá, že $\mathscr{H}$ je ortogonálním součtem podprostorů $\mathscr{H}^{(\alpha)}$.

4.5.7 Poznámka: Mějme nejvýše spočetný systém Hilbertových prostorů $\{\mathscr{H}_j\colon j = 1, 2, \ldots\}$. Každý prostor $\mathscr{H}_j$ je současně B-prostorem, a můžeme proto utvořit podle definice v § 3.1 Banachův prostor $\sum_{j=1}^{\infty}{}^{\oplus}\mathscr{H}_j$ s normou $\|\,.\,\|_{\oplus}$. Tento prostor se ovšem liší od Hilbertova prostoru $\sum_{j=1}^{\infty}{}^{\oplus}\mathscr{H}_j$; jsou to i různé množiny. Položíme-li např. $\mathscr{H}_j = \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \ldots$, dostáváme podle první definice prostor l^1, kdežto podle druhé l^2. Nejednoznačnost symbolu $\sum_j{}^{\oplus}\mathscr{H}_j$ v takovém případě odstraníme explicitním uvedením normy. Většinou je však z kontextu jasné, o jaký typ direktního součtu jde, a symbol $\sum_j{}^{\oplus}\mathscr{H}_j$ je proto fakticky jednoznačný; vyskytují se i situace, kdy na rozdílu mezi oběma typy direktního součtu nezáleží – viz poznámku 3.4.13.

4.5.8 Příklad: Budeme užívat označení z příkladu 4.3.6. Nechť $\mathscr{G}$ je separabilní Hilbertův prostor dimenze N, $2 \leqq N \leqq \infty$; ukážeme, že příslušný Hilbertův prostor vektorových funkcí $L^2_{\mathscr{G}}(X, d\mu)$ je izomorfní s $\sum_{j=1}^{N}{}^{\oplus}L^2(X, d\mu)$ – tím současně ověříme úplnost prostoru $L^2_{\mathscr{G}}(X, d\mu)$.

Budeme uvažovat jen případ $N = \infty$; jinak je většina následujících úvah triviální. Zvolíme pevně nějakou ortonormální bázi $\{e_j\} \subset \mathscr{G}$ a pro libovolnou měřitelnou vektorovou funkci F zavedeme komplexní funkce $x \mapsto F_j(x) := (e_j, F(x))_{\mathscr{G}}$. Je zřejmé, že tyto funkce jsou měřitelné a pro všechna $x \in X$ platí $\|F(x)\|_{\mathscr{G}}^2 = \sum_j |F_j(x)|^2 < \infty$. Naopak, z poslední podmínky a měřitelnosti funkcí F_j plyne, že předpisem $x \mapsto F(x) := \sum_j F_j(x)\, e_j$ je definována měřitelná vektorová funkce. Měřitelnost funkcí F_j a platnost vztahu $\sum_j |F_j(x)|^2 < \infty$ pro všechna $x \in X$ je tedy nutnou a postačující podmínkou pro to, aby F byla měřitelnou vektorovou funkcí. Na základě toho nyní ukážeme, že zobrazení $F \mapsto V(F) := \{F_j\}_{j=1}^{\infty} \equiv \{F_j\}$ je izomorfismus prostorů $L^2_{\mathscr{G}}$ a $\sum_j{}^{\oplus} L^2(X, d\mu)$. Nechť $F \in L^2_{\mathscr{G}}$; ze vztahu

$$\|F\|^2 = \int_X \sum_j |F_j(x)|^2\, d\mu(x)$$

plyne $F_j \in L^2(X, \mathrm{d}\mu)$ pro $j = 1, 2, \dots$ a $\int_X \Phi_n(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \leqq \|F\|^2$ pro $n = 1, 2, \dots$, kde $\Phi_n := \sum_{j=1}^{n} |F_j|^2$. Z Leviho věty pak dostáváme

$$\|F\|^2 = \sum_j \int_X |F_j(x)|^2\, \mathrm{d}\mu(x)\,,$$

takže $\operatorname{Ran} V \subset \sum_j^{\oplus} L^2(X, \mathrm{d}\mu)$ a zobrazení V zachovává normu.

Zbývá dokázat surjektivitu. Pro libovolné $\{F_j\} \in \sum_j^{\oplus} L^2(X, \mathrm{d}\mu)$ opět pro $n = 1, 2, \dots$, dostáváme $\int_X \Phi_n\, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} \int_X |F_j|^2\, \mathrm{d}\mu \leqq \|\{F_j\}\|_{\oplus}^2$. Podle Leviho věty pro μ-s. v. x platí $\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = \sum_j |F_j(x)|^2 < \infty$, takže $x \mapsto F(x) := \sum_j F_j(x)\, e_j$ je měřitelná vektorová funkce, přičemž

$$\int_X \|F(x)\|_{\mathscr{G}}^2\, \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \lim_{n\to\infty} \Phi_n\, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \Phi_n\, \mathrm{d}\mu = \|\{F_j\}\|_{\oplus}^2 < \infty\,,$$

tj. $F \in L^2_{\mathscr{G}}$ a $\{F_j\} = V(F)$.

4.6 TENZOROVÝ SOUČIN HILBERTOVÝCH PROSTORŮ

Nechť jsou dány Hilbertovy prostory $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$. **Realizací** jejich **tenzorového součinu** nazveme libovolnou dvojici $(\mathscr{H}, \varphi)$, kde $\mathscr{H}$ je Hilbertův prostor a $\varphi\colon \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}$ je bilineární zobrazení $\varphi(x, y) \equiv x \otimes_{\varphi} y \equiv x \otimes y$, které splňuje následující podmínky:

(ts 1) $(x \otimes y, x' \otimes y') = (x, x')_1\, (y, y')_2$ pro všechna $x, x' \in \mathscr{H}_1$, $y, y' \in \mathscr{H}_2$,

(ts 2) množina $\{x \otimes y\colon x \in \mathscr{H}_1,\ y \in \mathscr{H}_2\}$ je totální v $\mathscr{H}$.

Vyšetříme především otázku existence.

4.6.1 Věta: Ke každé dvojici $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ existuje alespoň jedna realizace jejich tenzorového součinu.

Důkaz: Uvažujme vektorový prostor $\mathscr{H}_1 \square \mathscr{H}_2$, jehož prvky jsou lineární kombinace „objektů“ $x \square y$, $x \in \mathscr{H}_1$, $y \in \mathscr{H}_2$; přitom rovnost $x \square y = x' \square y'$ je definována podmínkou $x = x'$, $y = y'$ a každá množina navzájem různých objektů je lineárně nezávislá, tj. $\{x \square y\colon x \in \mathscr{H}_1,\ y \in \mathscr{H}_2\}$ je Hammelova báze v prostoru $\mathscr{H}_1 \square \mathscr{H}_2$.[1])

[1]) Prostor $\mathscr{H}_1 \square \mathscr{H}_2$ se dá realizovat např. jako prostor funkcí $f\colon \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2 \to \mathbb{C}$ takových, že množina $f^{(-1)}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ je konečná. Každý objekt $x \square y$ je realizován funkcí $e_{x,y}$, kde $e_{x,y}(u, v) := 0$ pro $[u, v] \neq [x, y]$, resp. $e_{x,y}(x, y) := 1$.

 Nechť L je lineární obal prvků l tvaru

$$l = \sum_{jk} \alpha_j \beta_k x_j \,\square\, y_k - (\sum_j \alpha_j x_j) \,\square\, (\sum_k \beta_k y_k) \,.$$

Pro dané $[x, y] \in \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$ označíme symbolem $x \otimes y$ třídu všech $f \in \mathscr{H}_1 \,\square\, \mathscr{H}_2$ splňujících $f = x \,\square\, y$ (mod L); tím je definováno zobrazení φ: $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2 \to (\mathscr{H}_1 \,\square\, \mathscr{H}_2)/L$, jež je v důsledku vlastností podprostoru L bilineární. Každé $u \in (\mathscr{H}_1 \,\square\, \mathscr{H}_2)/L$ se dá zapsat jako $\sum_j x_j \otimes y_j$; množina $\{x \otimes y\}$ ovšem není lineárně nezávislá.

Na $(\mathscr{H}_1 \,\square\, \mathscr{H}_2)/L$ zavedeme skalární součin tak, aby byl splněn axiom (ts 1). Každé dvojici $x \,\square\, y$, $x' \,\square\, y'$, přiřadíme číslo $s(x \,\square\, y, x' \,\square\, y') := (x, x')_1 (y, y')_2$; vzhledem k tomu, že $\{x \,\square\, y\}$ je Hammelova báze v $\mathscr{H}_1 \,\square\, \mathscr{H}_2$, lze takto definované zobrazení jednoznačně rozšířit na seskvilineární formu s na $\mathscr{H}_1 \,\square\, \mathscr{H}_2$ (cvičení 1.20). Dále je vidět, že $s(f, g) = 0$, jestliže alespoň jedno z f, g patří do L. Odtud plyne, že pro daná $u, v \in (\mathscr{H}_1 \,\square\, \mathscr{H}_2)/L$ nezávisí $s(f_u, g_v)$ na výběru prvků $f_u \in u$, $g_v \in v$. Vztahem $\langle u, v\rangle := s(f_u, g_v)$ je tedy definována forma na $\mathscr{H}_1 \,\square\, \mathscr{H}_2/L$ a snadno ověříme, že je seskvilineární. Ukážeme, že je navíc striktně pozitivní. Vezměme libovolné $u = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j$ a v podprostorech $\{x_1, \dots, x_n\}_{\text{lin}} \subset \mathscr{H}_1$, $\{y_1, \dots, y_n\}_{\text{lin}} \subset \mathscr{H}_2$ zvolme ortonormální báze $\{e_1, \dots, e_{n_1}\}$, $\{f_1, \dots, f_{n_2}\}$. Pomocí rozvojů $x_j = \sum_r c_{jr} e_r$, $y_k = \sum_s d_{ks} f_s$ dostáváme

$$u = \sum_{rs} a_{rs} e_r \otimes f_s \,, \qquad \text{kde} \quad a_{rs} := \sum_j c_{jr} d_{js} \,. \tag{1}$$

Potom $\langle u, u\rangle = \sum_{r,s} |a_{rs}|^2 \geqq 0$, přičemž z (1) plyne, že rovnost nastává jen pro $u = 0$. Standardním zúplněním prostoru $(\mathscr{H}_1 \,\square\, \mathscr{H}_2)/L$ se skalárním součinem $\langle .\,, .\rangle$ dostaneme Hilbertův prostor $\mathscr{H}$, který splňuje (ts 1, 2), tj. $(\mathscr{H}, \varphi)$ je hledaná realizace. ■

Následující věta pojednává o vztahu mezi různými realizacemi a ukazuje, že podmínky (ts 1, 2) určují realizaci tenzorového součinu prostorů $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ v podstatě jednoznačně.

4.6.2 Věta: Nechť $(\mathscr{H}, \varphi)$ a $(\mathscr{H}', \varphi')$ jsou realizace tenzorového součinu prostorů $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$; potom existuje právě jeden izomorfizmus V: $\mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ takový, že pro všechna $[x, y] \in \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$ platí

$$x \otimes_{\varphi'} y = V(x \otimes_\varphi y) \,. \tag{2}$$

Důkaz: Vzhledem k tomu, že pro libovolná $[x, y], [\tilde{x}, \tilde{y}] \in \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$ platí $x \otimes_\varphi y = \tilde{x} \otimes_\varphi \tilde{y} \Rightarrow x \otimes_{\varphi'} y = \tilde{x} \otimes_{\varphi'} \tilde{y}$ (cvičení 22), je vztahem (2) definována bijekce V: $\varphi(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2) \to \varphi'(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$, která zachovává skalární součin. Rozšíříme ji nejprve lineárně; dále z axiomu (ts 2) vyplývá existence právě jednoho spojitého rozšíření, které je izomorfismem prostorů $\mathscr{H}, \mathscr{H}'$ – argumentace je stejná jako v důkazu věty 4.2.10. ■

4.6.3 Poznámky: (a) Věta 1 ukazuje, že množina realizací tenzorového součinu prostorů $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ není prázdná. Formuli (2) lze zapsat ve tvaru $\varphi' = V \circ \varphi$; na tomto vztahu a jednoznačnosti V je založena abstraktní definice tenzorového součinu pomocí teorie kategorií (viz např. [[KGv]], § I. 3 a cvičení 61). My se však bez ní obejdeme; **tenzorovým součinem prostorů** $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ *budeme rozumět libovolnou jeho realizaci* $(\mathscr{H}, \varphi)$. Tuto skutečnost budeme vyjadřovat zápisem

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \otimes_\varphi \mathscr{H}_2 .$$

V případě konkrétních prostorů budeme mít zpravidla na mysli určité standardní zobrazení φ; index φ budeme potom vynechávat. Také v obecném případě budeme psát $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$, pokud v úvahách bude vystupovat jediné zobrazení $\varphi: \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}$. Užití tohoto způsobu zápisu ilustruje hned následující poznámka.

(b) Pro libovolné množiny $M \subset \mathscr{H}_1$ a $N \subset \mathscr{H}_2$ označíme

$$M \odot N := \{x \otimes y \colon x \in M,\, y \in N\}_{\text{lin}} ; \tag{3a}$$

zřejmě platí

$$M \odot N = M_{\text{lin}} \odot N_{\text{lin}} . \tag{3b}$$

Jestliže L_r je podprostor v $\mathscr{H}_r$, $r = 1, 2$, nazýváme podprostor $L_1 \odot L_2$ **algebraickým tenzorovým součinem** podprostorů L_1 a L_2 (viz též komentář). Snadno se přesvědčíme o platnosti vztahu (cvičení 27)

$$\overline{L_1 \odot L_2} = \overline{L_1} \odot \overline{L_2} . \tag{3c}$$

Speciálně pro uzavřené podprostory $\mathscr{G}_r \subset \mathscr{H}_r$ máme $\overline{\mathscr{G}_1 \odot \mathscr{G}_2} = \mathscr{G}_1 \otimes \mathscr{G}_2$ (viz axiom (ts 2)).

4.6.4 Tvrzení: Jestliže M je totální v $\mathscr{H}_1$ a N je totální v $\mathscr{H}_2$, potom $\overline{M \odot N} = \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$.

Důkaz: Vzhledem k (ts 2) a (3b) stačí dokázat, že $x \otimes y \in \overline{M_{\text{lin}} \odot N_{\text{lin}}}$ pro každé $x \in \mathscr{H}_1$ a $y \in \mathscr{H}_2$. To je však snadný důsledek podmínek $\overline{M_{\text{lin}}} = \mathscr{H}_1$, $\overline{N_{\text{lin}}} = \mathscr{H}_2$ a implikace $x_n \to x$, $y_n \to y \Rightarrow x_n \otimes y_n \to x \otimes y$, která plyne z odhadu

$$\|x \otimes y - x_n \otimes y_n\| \leqq \|(x - x_n) \otimes y_n\| + \|x \otimes (y_n - y)\| =$$
$$= \|x - x_n\|_1 \, \|y_n\|_2 + \|x\|_1 \, \|y_n - y\|_2 . \; ■$$

4.6.5 Důsledek: Nechť $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ jsou separabilní a $\{e_r^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ je ortonormální báze v $\mathscr{H}_r$, $r = 1, 2$. Potom prostor $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ je separabilní a vektory $e_1^{(j)} \otimes e_2^{(k)}$, $j, k = 1, 2, \dots,$ v něm tvoří ortonormální bázi.

4.6.6 Příklad: Převezmeme označení a předpoklady z tvrzení 4.3.5. Definujeme zobrazení φ: $L^2(M, d\mu) \times L^2(N, d\nu) \to L^2_{\otimes}$ vztahem: $f \otimes_{\varphi} g \equiv f \otimes g := f \times g$; φ je zjevně bilineární. Z Fubiniovy věty plyne $(f \otimes g, \tilde{f} \otimes \tilde{g})_{\otimes} = (f, \tilde{f})_{\mu} (g, \tilde{g})_{\nu}$ a podle tvrzení 4.3.5 je $\{f \otimes g \colon f \in L^2(M, d\mu), g \in L^2(N, d\nu)\}$ totální množina v $L^2_{\otimes}$. Prostor $L^2_{\otimes}$ spolu s uvedeným zobrazením tedy splňuje axiomy (ts 1, 2), tj.

$$L^2_{\otimes} \equiv L^2(M \times N, d(\mu \otimes \nu)) = L^2(M, d\mu) \otimes L^2(N, d\nu) . \qquad (4)$$

Podobně zjistíme, že pro Hilbertův prostor $L^2_{\mathscr{G}}(X, d\mu)$ z příkladu 4.3.6 platí

$$L^2_{\mathscr{G}}(X, d\mu) = L^2(X, d\mu) \otimes \mathscr{G} ; \qquad (5)$$

příslušné bilineární zobrazení φ je určeno vztahem $(f \otimes_{\varphi} \gamma)(x) := f(x)\, \gamma$ (viz cvičení 17).

Komentář

§ **4.1** • Koncepci abstraktního (separabilního) Hilbertova prostoru vytvořil koncem dvacátých let J. von Neumann [vN 1,2]; zobecnění zahrnující i neseparabilní prostory provedli v polovině třicátých let H. Löwig a F. Rellich. Pojmenovány byly na počest D. Hilberta, který studoval počátkem století prostory l^2 a L^2.

§ **4.2** • Izometrie prostorů $\mathscr{H}, \mathscr{H}^*$ definovaná vztahem (4.2.5) je antilineární. Z Rieszova lemmatu dále vyplývá, že pro každé $f \in \mathscr{H}^*$ platí $\operatorname{Ker} f = \{y_f\}^{\perp}$, tj. $\operatorname{Ker} f^{\perp} = \{y_f\}_{\text{lin}}$.

• Pomocí dané ortonormální báze $\mathscr{E} \equiv \{e_{\alpha} \colon \alpha \in I\}$ se dá na prostoru $\mathscr{H}$ zavést involuce J (viz komentář k § 1.1), která navíc splňuje podmínku $\|Jx\| = \|x\|$ pro všechna $x \in \mathscr{H}$. Vyjdeme ze vztahu (4.2.8a) a položíme

$$Jx := \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_{\alpha_j})\, e_{\alpha_j} .$$

Přenecháváme čtenáři, aby ověřil, že tento předpis definuje zobrazení $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$, které má všechny požadované vlastnosti.

§ **4.3** • Tvrzení 4.3.1b říká, že každý Hilbertův prostor $\mathscr{H}$, v němž existuje nespočetná ortonormální množina, je neseparabilní. Toho lze užít ke konstrukci neseparabilního $\mathscr{H}$. Jako příklad uvažujme prostor $\mathscr{L}_c$, jehož prvky jsou všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, které mají nejvýše spočetný nosič S_f a splňují $\sum_{x \in S_f} |f(x)|^2 < \infty$. Dá se snadno ověřit, že vzhledem ke skalárnímu součinu $(f, g) := \sum_{x \in S_f \cap S_g} \overline{f(x)}\, g(x)$

je tento prostor úplný (viz též cvičení 21); charakteristické funkce jednobodových množin tvoří nespočetnou ortonormální množinu, a proto je $\mathscr{L}_c$ neseparabilní Hilbertův prostor.

• O separabilitě prostorů $L^2(X, d\mu)$ se dá rozhodnout na základě vlastností míry μ. Příslušnou σ-algebru označíme $\mathscr{A}$ a systém $\mathfrak{N} \subset \mathscr{A}$ nazveme *bází míry* μ, jestliže pro každé $M \in \mathscr{A}$ takové, že $\mu(M) < \infty$, je $\inf\{\mu(M \,\Delta\, N)\colon N \in \mathfrak{N}\} = 0$ (srv. s poznámkou A.3.1). Pro σ-konečnou míru μ je prostor $L^2(X, d\mu)$ separabilní právě tehdy, když μ má spočetnou bázi (cvičení 13). Přitom není podstatné, že jde o Hilbertův prostor – tvrzení platí i pro prostory L^p, $1 \leqq p < \infty$.

• Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, které tvoří uzávěr lineárního obalu množiny $\{e_\lambda\colon \lambda \in \mathbb{R}$, $e_\lambda(x) := e^{i\lambda x}\} \subset C(\mathbb{R})$, se nazývají *skoro-periodické;* vzhledem k normě $\|.\|_\infty$ v $C(\mathbb{R})$ tvoří tedy tyto funkce B-prostor, který označíme AP. Jak ukázal H. Bohr, lze skoro-periodické funkce charakterizovat také „vnitřně" v následujícím smyslu: funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je skoro-periodická právě tehdy, když je spojitá a když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $l > 0$ takové, že libovolný reálný interval délky l obsahuje alespoň jedno t splňující $|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

V prostoru AP se zavádí ještě další norma $p(.)$ vztahem

$$p(f)^2 := \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^2 \, dx\,,$$

(cvičení 14 a 15). Tato norma zjevně splňuje rovnoběžníkovou rovnost (a je proto různá od $\|.\|_\infty$); je indukována skalárním součinem

$$(f, g) := \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx\,.$$

V Hilbertově prostoru, který dostaneme standardním zúplněním prostoru AP s uvedeným skalárním součinem, je $\{e_\lambda\colon \lambda \in \mathbb{R}\}$ nespočetná ortonormální množina; jde proto o *neseparabilní prostor.* Základní vlastnosti skoro-periodických funkcí lze najít v ⟦DS 1⟧, § IV.7; ⟦RN⟧, §§ 101, 102.

§ **4.4** • Nechť m je Lebesgueova míra v $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$, tj. $dm(z) = dx\,dy$ a G je nějaká souvislá otevřená množina v $\mathbb{C}$. Funkce, které jsou analytické v G a patří do $\mathscr{L}^2(G, dm)$, tvoří Hilbertův prostor se skalárním součinem $(f, g) := = \int_G \overline{f(z)}\, g(z)\, dm(z)$; značíme jej $A^2(G)$. Speciálně pro $G = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\} \equiv \equiv K_1$ je $\{e_n(z) := z^n((n+1)/\pi)^{1/2}\colon n = 0, 1, \ldots\}$ ortonormální báze v $A^2(K_1)$ – viz např. ⟦Hal 2⟧, § 24, 25.

§ **4.6** • Konstrukce v důkazu věty 4.6.1 je v podstatě převzata z ⟦We⟧ § 3.4. Podobných konstrukcí realizací tenzorového součinu $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \otimes_\varphi \mathscr{H}_2$ existuje celá řada: např. v ⟦RS 1⟧, § II.4 se $\mathscr{H}$ konstruuje pomocí bilineárních forem na

 $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$, jiný postup užívá spojitých antilineárních operátorů $T: \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_1$ definovaných pro každé $x \in \mathscr{H}_1$, $y \in \mathscr{H}_2$ vztahem $T_{xy}z := (z, y)_2 x$ – viz příklad 6.3.5.

• Všechna tvrzení týkající se tenzorových součinů dvojice Hilbertových prostorů lze bez potíží ověřit pro případ libovolného konečného počtu prostorů. Příslušné zobrazení $[x_1, \ldots, x_n] \mapsto x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ je multilineární, splňuje podmínku $(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n, x_1' \otimes \ldots \otimes x_n') = \prod_{j=1}^{n} (x_j, x_j')_j$ a množina $\{x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \colon x_j \in \mathscr{H}_j\}$ je totální v $\mathscr{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}_n$. Pojem tenzorového součinu byl zobecněn i pro nekonečné systémy Hilbertových prostorů [vN 3]; v této knize se však s tímto případem nesetkáme.

• Mějme vektorové prostory V_1, V_2; realizací jejich *algebraického tenzorového součinu* nazveme každou dvojici tvořenou vektorovým prostorem V a bilineárním zobrazením φ: $V_1 \times V_2 \to V$, $\varphi(x, y) = x \otimes_\varphi y \equiv x \otimes y$, jež splňuje následující podmínky:

(a) $\{x \otimes y, x \in V_1, y \in V_2\}_{\mathrm{lin}} = V$;

(b) k libovolné jiné dvojici (V', φ') splňující podmínku (a) existuje právě jeden lineární operátor T: $V \to V'$ takový, že $x \otimes_{\varphi'} y = T(x \otimes_\varphi y)$ pro všechna $[x, y] \in V_1 \times V_2$.

Odtud je opět možno dospět k abstraktní definici algebraického tenzorového součinu – viz např. ⟦MB⟧, § IX.8. Lze však vystačit s tím, že algebraický tenzorový součin chápeme jako jeho libovolnou realizaci; budeme psát $V = V_1 \otimes_\varphi V_2$ nebo $V = V_1 \otimes V_2$. Ke splnění podmínky (b) zřejmě stačí, aby pro zobrazení $[x, y] \mapsto x \otimes y$ platily implikace (i), (ii) z cvičení 22 (tím je zaručena konzistence s definicí (3a)). Existence alespoň jedné realizace tenzorového součinu se ověří opět konstruktivně; lze aplikovat např. postup z první poloviny důkazu věty 4.6.1 a ověřit, že zobrazení $[x, y] \mapsto x \otimes y$ splňuje zmíněné implikace (i), (ii) (důkaz je nyní ovšem třeba provést jinak než ve cvičení 22, neboť nemáme k dispozici skalární součin – viz cvičení 26).

• Tenzorový součin se zavádí také pro B-prostory. Jsou-li $\mathscr{X}_1$ a $\mathscr{X}_2$ B-prostory s normami $\|.\|_1$, $\|.\|_2$, nazveme *přípustnou normou* (angl. cross-norm) každou normu na algebraickém tenzorovém součinu $\mathscr{X}_1 \otimes \mathscr{X}_2$ splňující podmínku $\|x \otimes y\| = \|x\|_1 \|y\|_2$ pro všechna $x \in \mathscr{X}_1$, $y \in \mathscr{X}_2$. Touto podmínkou není norma na $\mathscr{X}_1 \otimes \mathscr{X}_2$ určena jednoznačně – ukazuje se, že ke každé dvojici B-prostorů $\mathscr{X}_1$, $\mathscr{X}_2$ lze sestrojit nekonečně mnoho přípustných norem (v tom je situace odlišná od tenzorového součinu Hilbertových prostorů, kde axiom (ts 1) spolu s lineárním rozšířením plně určuje skalární součin na $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$). Vždy však existuje maximální přípustná norma $\|.\|_\pi$ definovaná vztahem $\|\sum_k x_k \otimes y_k\|_\pi := = \inf\{\sum_l \|x_l'\|_1 \|y_l'\|_2\}$, kde infimum se vztahuje k množině všech vektorů $\sum_l x_l' \otimes y_l' \in \mathscr{X}_1 \otimes \mathscr{X}_2$ splňujících $\sum_l x_l' \otimes y_l' = \sum_k x_k \otimes y_k$. Nechť $\|.\|_\alpha$ je daná přípustná norma na $\mathscr{X}_1 \otimes \mathscr{X}_2$; B-prostor, který vznikne zúplněním normovaného prostoru $(\mathscr{X}_1 \otimes \mathscr{X}_2, \|.\|_\alpha)$ se značí $\mathscr{X}_1 \otimes_\alpha \mathscr{X}_2$, přičemž pro $\mathscr{X}_1 \otimes_\pi \mathscr{X}_2$ se užívá též označení $\mathscr{X}_1 \hat{\otimes} \mathscr{X}_2$. Podrobnější poučení o této problematice viz [[Sch]] a rovněž [[KGv]], § III.1.4.

Cvičení

1. Dokažte spojitost skalárního součinu chápaného jako zobrazení $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ užitím Schwarzovy nerovnosti.

2. Ověřte vztahy (4.1.2).

3. Pro libovolnou množinu M v Hilbertově prostoru platí $M \cap M^\perp \subset \{0\}$; je-li speciálně množina M totální, potom $M^\perp = \{0\}$.

4. Jestliže $\mathscr{G}$ je uzavřený podprostor v $\mathscr{H}$, potom $\mathscr{G}^{\perp\perp} = \mathscr{G}$. Na základě toho a (4.1.2) dokažte vztah (4.2.3) a srovnejte jej s výsledkem cvičení 1.18.
Návod: Pro $x \in \mathscr{G}^{\perp\perp}$, $x = y + z$, kde $y \in \mathscr{G}$ a $z \in \mathscr{G}^\perp$, platí $z = 0$.

5. (i) Jsou dány podprostory $\mathscr{G}$ a L v $\mathscr{H}$, přičemž $\mathscr{G}$ je uzavřený a L je konečnědimenzionální. Potom algebraický součet $\mathscr{G} + L$ je uzavřený podprostor.
(ii) Nechť L_1, L_2 jsou podprostory v $\mathscr{H}$ a nechť $\dim L_2 < \infty$. Jestliže T je lineární operátor na $\mathscr{H}$ takový, že $L_1 + L_2 \subset D_T$ a podprostor TL_1 je uzavřený, potom existuje podprostor $M \subset (TL_1)^\perp$ splňující $\dim M \leqq \dim L_2$ a $T(L_1 + L_2) = TL_1 \oplus M$.
Návod: (i) Jestliže $L = \{e\}_{\text{lin}}$ a f je ortogonální projekce e do $\mathscr{G}$, potom $\mathscr{G} + L = \mathscr{G} \oplus \{e - f\}_{\text{lin}}$. Dále užijte indukce.
(ii) Jestliže $x_1, \ldots, x_n$ je báze v L_2, y_j je ortogonální projekce Tx_j do TL_1 a $z_j := Tx_j - y_j$, potom ta z_j, která jsou lineárně nezávislá, tvoří bázi v M.

6. Pro libovolné $\mathscr{H}$ je $\mathscr{H}^*$ Hilbertův prostor se skalárním součinem $(.,.)_*$, který je definován pomocí zobrazení (4.2.5) vztahem $(f, g)_* := (y_g, y_f)$.

7. Neexistuje Hilbertův prostor se spočetně nekonečnou Hammelovou bází.
Návod: Užijte Gramovy-Schmidtovy věty.

8. Dokažte existenci spočetné ortonormální báze v separabilním $\mathscr{H}$ bez užití Zornova lemmatu.
Návod: Ze spočetné množiny M, která je hustá v $\mathscr{H}$, vyberte lineárně nezávislou podmnožinu N takovou, že $M \subset N_{\text{lin}}$.

9. Ke každému podprostoru $\mathscr{G}$, který je hustý v separabilním $\mathscr{H}$, existuje ortonormální báze $\mathscr{E}$ v $\mathscr{H}$ taková, že $\mathscr{E} \subset \mathscr{G}$.
Návod: Pomocí množiny $\{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$, která je hustá v $\mathscr{H}$, sestrojte množinu $\{y_{nm} : n, m = 1, 2, \ldots\} \subset \mathscr{G}$ splňující $\|x_n - y_{nm}\| < 1/m$.

10. Pomocí lineární funkce zobrazující interval (a, b) na (α, β) sestrojte izomorfismus prostorů $L^2(a, b)$ a $L^2(\alpha, \beta)$.

11. Dokažte vztah (4.3.5).

Návod: Pro $J_n(k) := (2^n n!)^{1/2}\pi^{1/4}\exp(-k^2/2)\,\hat{h}_n(k)$ odvoďte pomocí (4.3.4) vztahy $J_n = \mathrm{i}J'_{n-1}$ a $J_0(k) = \exp(-k^2)$.

12. Pro posloupnost $\{f_n\}_{n=2}^{\infty} \subset C[0,1]$ danou předpisem $f_n(x) := 1 - nx$ pro $x \in [0, 1/n)$, $f_n(x) := nx - 1$ pro $x \in [1/n, 2/n)$ a $f_n(x) := 1$ pro $x \in [2/n, 1]$ platí $f_n \xrightarrow{w} 1$, $\|f_n\|_\infty \to 1$, tj. jsou splněny předpoklady tvrzení 4.2.7, avšak tato posloupnost nekonverguje podle normy.

13. Nechť $(X, \mathscr{A}, \mu)$ je prostor se σ-konečnou mírou. K tomu, aby $L^2(X, d\mu)$ byl separabilní je nutné a stačí, aby μ měla spočetnou bázi (viz komentář k § 4.3).

Návod: Jestliže $\mathfrak{N}$ je spočetná báze míry μ, pak množina $\{\chi(M)\colon M \in \mathfrak{N}\}$ je totální v $L^2(X, d\mu)$ – viz cvičení 3.6. Nechť naopak existuje množina $\{f_n\colon n = 1, 2, \ldots\} \subset L^2(X, d\mu)$ taková, že k libovolnému přirozenému m a dané množině $M \in \mathscr{A}$, pro niž $\mu(M) < \infty$, existuje f_n splňující $\|\chi_M - f_n\| < 1/m$; dále uvažujte množiny $M_{nm} := \{x\colon |f_n(x) - 1| < 1/2^m\}$, $n, m = 1, 2, \ldots$ a pomocí vztahu $\int_A |\chi_B - \chi_C|^2\, d\mu = \mu((B \,\Delta\, C) \cap A)$ platného pro libovolná $A, B, C \in \mathscr{A}$ ukažte, že $\mu(M \,\Delta\, M_{mn}) = \int_{N_{nm}(M)} |\chi_M - \chi_{M_{mn}}|^2\, d\mu < 1/m$, kde $N_{nm}(M) := \{x\colon |\chi_M(x) - f_n(x)| \geqq 1/m\}$.

14. Je dána skoro-periodická funkce f a posloupnost $\{f_n\} \subset \{e_\lambda\colon \lambda \in \mathbb{R}\}_{\text{lin}}$ splňující $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Označme

$$F_n(T) := \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f_n(x)|^2\, dx$$

a stejně je definováno $F(T)$ pomocí f.

Ověřte, že posloupnost $\{F_n\}$ konverguje stejnoměrně k F na $\mathbb{R}^+$, a na základě toho dokažte existenci vlastní limity

$$p(f)^2 \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(x)|^2\, dx$$

a vztahy $p(f) = \lim_{n\to\infty} p(f_n)$, $p(f_n)^2 = \lim_{T\to\infty} (1/2T)\int_{-T}^{T} |f_n(x + t)|^2\, dx$ pro libovolné $t \in \mathbb{R}$.

15. Jestliže skoro-periodická funkce f je nenulová, potom $p(f) > 0$.

Návod: Bez újmy na obecnosti lze předpokládat $|f(0)| = a > 0$. Pomocí spojitosti a Bohrova kritéria ukažte, že každý interval I délky l obsahuje bod t takový, že pro jisté $\delta > 0$ platí $U_\delta(t) \subset I$ a $\inf\{|f(x)|: x \in U_\delta(t)\} > 0$.

16. Vektorová funkce $F: X \to \mathscr{G}$ je měřitelná právě tehdy, jestliže pro všechny prvky nějaké ortonormální báze $\{\varepsilon_j\} \subset \mathscr{G}$ jsou funkce $x \mapsto (\varepsilon_j, F(x))_{\mathscr{G}}$ měřitelné.

17. Jestliže $\{f_\alpha: \alpha \in I\}$ je totální množina v $L^2(X, d\mu)$ a $\{\varepsilon_n\}$ je ortonormální báze v $\mathscr{G}$, potom vektorové funkce $x \mapsto F_{\alpha n}(x) := f_\alpha(x)\varepsilon_n$, $\alpha \in I$, $n = 1, 2, \ldots$, tvoří totální množinu v $L^2_{\mathscr{G}}(X, d\mu)$.

18. Odvoďte formule (4.4.6) pro koherentní stavy v $L^2(\mathbb{R})$ a ověřte vztahy

$$\int_{\mathbb{R}} x|\psi_w(x)|^2 \, dx = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\, w, \qquad \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi_w(x)}\, \frac{d\psi_w}{dx}(x) = -i\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\, w .$$

Návod: Užijte rozkladu $\psi_w = \exp(-|w|^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} (u_n, e_w)\, h_n$, vztahu (4.4.3) a vytvořující funkce pro Hermiteovy polynomy:

$$\exp(-z^2 + 2zx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} H_k(x), \qquad z \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R} .$$

19. Nechť $\{\mathscr{G}_\alpha: \alpha \in I\}$ je systém vzájemně ortogonálních uzavřených podprostorů daného $\mathscr{H}$, přičemž I je libovolná množina. Podprostor $\sum_{\alpha\in I}^{\oplus} \mathscr{G}_\alpha \subset \mathscr{H}$ je tvořen právě těmi vektory $x \in \mathscr{H}$, pro něž existuje nejvýše spočetná množina $\{\alpha_k: k = 1, 2, \ldots\} \subset I$ taková, že $x = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} x_j$, $x_j \in \mathscr{G}_{\alpha_j}$.

Návod: Jestliže x_α je projekce daného x do $\mathscr{G}_\alpha$, potom $I_x := \{\alpha \in I: x_\alpha \neq 0\}$ je nejvýše spočetná množina – to je snadné zobecnění tvrzení 4.2.8.

20. Nechť $\mathscr{E}_j$ je ortonormální báze v Hilbertově prostoru $\mathscr{H}_j$, $j = 1, 2, \ldots$; potom $\mathscr{E} := \bigcup_{j=1} \{0, \ldots, 0, \mathscr{E}_j, 0, \ldots\}$ je ortonormální báze v prostoru $\mathscr{H} \equiv \sum_{j=1}^{\oplus} \mathscr{H}_j$; jsou-li speciálně všechny prostory $\mathscr{H}_j$ separabilní, je $\mathscr{H}$ rovněž separabilní.

21. Neseparabilní Hilbertův prostor $\mathscr{L}_c$, který jsme zavedli v komentáři k § 4.3, se dá zapsat ve tvaru $\mathscr{L}_c = \sum_{x\in\mathbb{R}}^{\oplus} \mathbb{C}$.

22. Pro vektory $x \otimes y \in \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ platí:

(i) $x \otimes y = 0$ právě tehdy, když alespoň jeden z vektorů x, y je nulový,

(ii) je-li $x \otimes y \neq 0$ a platí $x \otimes y = x' \otimes y'$, potom existuje nenulové $\alpha \in \mathbb{C}$ takové, že $x' = \alpha x$, $y' = (1/\alpha)\, y$.

 Návod: Vyjádřete $x \otimes y$, $x' \otimes y'$ pomocí $e_j \otimes f_k$, kde $\{e_j\}$, resp. $\{f_k\}$ jsou ortonormální báze v prostorech $\{x, x'\}_{\mathrm{lin}} \subset \mathscr{H}_1$, resp. $\{y, y'\}_{\mathrm{lin}} \subset \mathscr{H}_2$.

23. Pro každý Hilbertův prostor $\mathscr{H}$ platí $\mathscr{H} = \mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$.

24. V aplikacích se často setkáme s tenzorovými součiny $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$, kde jeden z prostorů $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ má konečnou dimenzi. Jestliže např. $\dim \mathscr{H}_1 = n$, potom $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2 = \mathscr{H}_1 \odot \mathscr{H}_2$ a

$$\sum_{k=1}^{n}{}^{\oplus} \mathscr{H}_2 = \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2 .$$

Návod: Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je ortonormální báze v $\mathscr{H}_1$; potom $\{x \otimes y \colon x \in \mathscr{H}_1, y \in \mathscr{H}_2\}_{\mathrm{lin}} = \{\sum_{k=1}^{n} e_k \otimes y_k \colon y_k \in \mathscr{H}_2\}$ a zobrazení $\varphi \colon \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2 \to \sum_{k=1}^{n}{}^{\oplus} \mathscr{H}_2$, $\varphi(x, y) := [\xi_1 y, \dots, \xi_n y]$, $x \equiv \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$, splňuje axiomy (ts 1, 2).

25. Nechť $\mathscr{H}_1 = \sum_{j=1}^{N}{}^{\oplus} \mathscr{G}_j$, kde $\mathscr{G}_j$ jsou navzájem ortogonální uzavřené podprostory. Potom podprostory $\mathscr{G}_j \otimes \mathscr{H}_2 \subset \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ jsou navzájem ortogonální a platí

$$\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2 = \sum_{j=1}^{N}{}^{\oplus} (\mathscr{G}_j \otimes \mathscr{H}_2) .$$

Rozšiřte platnost tohoto tvrzení na ortogonální součet systému podprostorů libovolné mohutnosti.

Návod: Libovolné $z \in \mathscr{H}_1 \odot \mathscr{H}_2$, $z \equiv \sum_r x_r \otimes y_r$ zapište ve tvaru $z = \sum_{j=1}^{N} \sum_r x_r^{(j)} \otimes y_r$, kde $x_r^{(j)}$ je projekce x_r do $\mathscr{G}_j$.

26. Dokažte, že pro libovolné vektorové prostory V_1, V_2 splňuje zobrazení $[x, y] \to x \otimes y \in V_1 \square V_2 / L$ implikace (i, ii) z cvičení 22 (viz definici $V_1 \odot V_2$ v komentáři k § 4.6).
Návod: Najděte všechna $x \in V_1$, $y \in V_2$, resp. též $x' \in V_1$, $y' \in V_2$, splňující $x \square y \in L$, resp. $x \square y - x' \square y' \in L$.

27. Dokažte rovnost (4.6.3c).
Návod: Pro každé $x \in \overline{L_1}$ a $y \in \overline{L_2}$ patří $x \otimes y$ do $\overline{L_1 \odot L_2}$.

28. Nechť $\mathscr{F} \equiv \{f_k\}$ je ortonormální báze v $\mathscr{H}_2$ a pro každé k, $1 \leqq k \leqq \dim \mathscr{H}_2$, existuje ortonormální báze $\mathscr{E}^{(k)} = \{e_j^{(k)}\} \subset \mathscr{H}_1$. Potom

$$\mathscr{G} \equiv \{e_j^{(k)} \otimes f_k \colon j = 1, \dots, \dim \mathscr{H}_1,\ k = 1, \dots, \dim \mathscr{H}_2\}$$

je ortonormální báze v $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$.
Návod: Ukažte, že $\mathscr{H}_1 \odot \mathscr{H}_2 \subset \overline{\mathscr{H}_1 \odot \mathscr{F}}$ a $\mathscr{H}_1 \odot \mathscr{F} \subset \overline{\mathscr{G}_{\mathrm{lin}}}$.

5.1 ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI PROSTORU $\mathscr{B}(\mathscr{H})$

Prostor $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ tvořený omezenými lineárními operátory na daném Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ je speciálním případem prostorů $\mathscr{B}(V, V')$, jimiž jsme se zabývali v § 3.2. Vztahují se na něj proto všechny obecné věty tam uvedené, což především znamená, že *$\mathscr{B}(\mathscr{H})$ je B-prostor s normou* $\|.\|$ definovanou vztahem (3.2.3); tuto normu lze vyjádřit také užitím skalárního součinu (cvičení 1). Pomocí složeného zobrazení je na $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ definováno násobení: $[B, C] \mapsto BC := B \circ C$; díky tomu, že platí nerovnost $\|BC\| \leqq \|B\|\,\|C\|$, která plyne přímo z definice normy, je B-prostor $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ asociativní Banachovou algebrou (viz § 12.3), jejímž jednotkovým prvkem je identické zobrazení I.

Topologie indukovaná na $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ normou se nazývá **stejnoměrná topologie** a značí se τ_u. To, že posloupnost $\{B_n\} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ konverguje k B vzhledem k τ_u, se zapisuje ve tvaru $B_n \to B$, resp. $B = \operatorname{u-lim}_{n\to\infty} B_n$. Pomocí vlastností normy se elementárně ověří, že z podmínek $B_n \to B$, $C_n \to C$ plyne $B_nC_n \to BC$, a protože prostory $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ i $\mathscr{B}(\mathscr{H}) \oplus \mathscr{B}(\mathscr{H})$ jsou metrické, je násobení spojité, chápeme-li je jako zobrazení B-prostoru $\mathscr{B}(\mathscr{H}) \oplus \mathscr{B}(\mathscr{H})$ do $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ – viz cvičení 2.7. Tento závěr se vyjadřuje stručně v následujícím tvaru.

5.1.1 Věta: Násobení na $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ je spojité vzhledem ke stejnoměrné topologii.

Jestliže Ker $B = 0$, tj. B je injektivní, existuje operátor B^{-1}; ten je vždy lineární (cvičení 3.25), avšak obecně nemusí být omezený. Připomeňme, že k tomu, aby $B^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, je nutné a stačí, aby B byl regulární operátor, tj. bijekce $\mathscr{H}$ na $\mathscr{H}$ – viz důsledek 3.4.7; postačující podmínkou je rovněž $\|I - B\| < 1$ (lemma 3.6.4).

Z věty 3.2.4 vyplývá, že $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ obsahuje jednoznačně určená spojitá rozšíření všech prvků prostorů $\mathscr{B}(D, \mathscr{H})$, kde D je jakýkoli hustý podprostor v $\mathscr{H}$; v tomto smyslu můžeme považovat $\mathscr{B}(D, \mathscr{H})$ za podprostor v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Pomocí věty o ortogonálním rozkladu lze tento závěr rozšířit i na podprostory $D \subset \mathscr{H}$, pro něž $\bar{D} \neq \mathscr{H}$:

5.1.2 Tvrzení: Nechť podprostor $D \subset \mathscr{H}$ splňuje $\bar{D} \neq \mathscr{H}$ a nechť $B_0 \in \mathscr{B}(D, \mathscr{H})$. Potom existuje právě jeden operátor $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ takový, že $B \restriction D = B_0$, $B \restriction D^\perp = 0$ a $\|B\| = \|B_0\|$.

 Důkaz přenecháváme čtenáři jako snadné cvičení.

Rovnost operátorů $B, C \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ definitoricky znamená, že $Bx = Cx$ pro všechna $x \in \mathscr{H}$. Vzhledem ke spojitosti je možno tuto podmínku zeslabit: jestliže $Bx = Cx$ pro všechna $x \in L$, kde L je podprostor hustý v $\mathscr{H}$, potom $B = C$. Často se setkáváme se situací, kdy pro lineární operátory B, C na $\mathscr{H}$ a pro dané podprostory $L, L' \subset \mathscr{H}$ platí $(x, By) = (x, Cy)$ pro všechna $[x, y] \in L \times L'$. Pokud jsou oba uvažované operátory omezené, plyne odtud rovnost $B = C$ za velmi jednoduchých podmínek.

5.1.3 Tvrzení: Nechť L, L' jsou husté podprostory v $\mathscr{H}$ a nechť $B, C \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Jestliže $(x, By) = (x, Cy)$ pro všechna $[x, y] \in L \times L'$, nebo $(x, Bx) = (x, Cx)$ pro všechna $x \in L$, potom $B = C$.
Důkaz je elementární aplikací spojitosti, tvrzení 4.2.4 a polarizační formule.

V této souvislosti se zmíníme ještě o vztahu mezi operátory $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ a *omezenými seskvilineárními formami* na $\mathscr{H}$, tj. formami f, pro něž existuje $c > 0$ takové, že $|f(x, y)| \leqq c\|x\|\,\|y\|$ pro všechna $x, y \in \mathscr{H}$. Každému $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ odpovídá omezená seskvilineární forma f definovaná vztahem

$$f(x, y) := (x, By)\,; \tag{1}$$

za c lze volit $\|B\|$. Pomocí Rieszova lemmatu se snadno přesvědčíme, že toto tvrzení lze obrátit.

5.1.4 Tvrzení: K dané seskvilineární formě na $\mathscr{H}$ existuje $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ splňující pro všechna $x, y \in \mathscr{H}$ rovnost (1) právě tehdy, když f je omezená.

Nechť $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$; pro libovolné $y \in \mathscr{H}$ je vztahem $f_y(x) := (y, Bx)$ definován prvek $f_y \in \mathscr{H}^*$, a proto existuje právě jedno $y^* \in \mathscr{H}$ takové, že pro všechna $x \in \mathscr{H}$ platí $(y, Bx) = (y^*, x)$. Tím je definován lineární operátor $B^*\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, $B^*y := y^*$, který nazýváme operátorem **sdruženým** (adjungovaným) s B. Podle definice tedy splňují operátory B, B^* pro všechna $x, y \in \mathscr{H}$ rovnost

$$(y, Bx) = (B^*y, x)\,, \tag{2}$$

z níž vyplývají následující vlastnosti zobrazení $B \mapsto B^*$.

5.1.5. Věta: (a) $B \mapsto B^*$ je antilineární izometrie prostoru $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, tj. $B^* \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$,

$$(\alpha B + C)^* = \bar{\alpha}B^* + C^*\,, \tag{3a}$$

$$\|B^*\| = \|B\|\,, \tag{3b}$$

která navíc splňuje

$$(BC)^* = C^*B^*, \tag{3c}$$

$$B^{**} = B. \tag{3d}$$

(b) Jestliže B je regulární operátor, je i B^* regulární, a platí

$$(B^*)^{-1} = (B^{-1})^*. \tag{3e}$$

Důkaz: Vztahy (3a, c, d) bezprostředně plynou z (2) a tvrzení 3. Položíme-li v rovnosti (2) $x = B^*y$, dostáváme $\|B^*y\|^2 = \|y\|\,\|B\|\,\|B^*y\|$, takže $B^* \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $\|B^*\| \leqq \|B\|$; z (3d) potom plyne opačná nerovnost. K ověření (3e) stačí uvážit, že z regularity B vyplývá $B^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, užít vztahů $B^{-1}B = I$, $BB^{-1} = I$, $I^* = I$ a již dokázané rovnosti (3c). ■

5.1.6 Poznámka: Vztahy (3a – d) znamenají, že $B \mapsto B^*$ je involuce na Banachově algebře $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ (viz §§ 12.1, 3).

5.1.7 Příklad: Pro danou ortonormální bázi $\mathscr{E} \equiv \{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ v separabilním $\mathscr{H}$ definujeme lineární operátor S_0 na $\mathscr{E}_{\text{lin}}$ jako lineární rozšíření vztahů $S_0e_j := e_{j+1}$, $j = 1, 2, \ldots$. Pro každé $x \in \mathscr{E}_{\text{lin}}$ máme $\|S_0x\| = \|x\|$, takže S_0 je omezený; jeho spojité rozšíření S má jednotkovou normu a říká se mu *operátor pravého posunutí*. Pro sdružený operátor dostáváme pomocí (2) vztah $(S^*e_j, e_k) = \delta_{j,k+1}$, takže

$$S^*e_j = \sum_{k=1}^{\infty} (e_k, S^*e_j)\, e_k = \begin{cases} 0 & \text{pro } j = 1 \\ e_{j-1} & \text{pro } j = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

vzhledem ke spojitosti je operátor S^*, nazývaný též *operátorem levého posunutí*, těmito vztahy plně určen.

Ze základních vlastností sdruženého operátoru plyne následující užitečný vztah, jehož důkaz přenecháváme čtenáři.

5.1.8 Lemma: Jestliže $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, potom $\operatorname{Ker} B^* = (\operatorname{Ran} B)^{\perp}$.

Vlastností sdruženého operátoru se užívá k nalezení funkcionální realizace libovolného omezeného operátoru na $L^2(\mathbb{R})$.

5.1.9 Tvrzení: Ke každému $B \in \mathscr{B}(L^2(\mathbb{R}))$ existuje funkce $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ s následujícími vlastnostmi:

(a) pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $G_x \in L^2(\mathbb{R})$, kde $G_x(y) := \overline{G(x, y)}$; speciálně $G_0 = 0$;

(b) funkce $x \mapsto (G_x, f)$ je pro každé $f \in L^2(\mathbb{R})$ absolutně spojitá v $\mathbb{R}$.

146 (c) pro všechna $f \in L^2(\mathbb{R})$ a s.v. $x \in \mathbb{R}$ platí

$$(Bf)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{\mathbb{R}} G(x, y) f(y) \, \mathrm{d}y \, ; \tag{4}$$

(d) funkce G je určena podmínkami (a)–(c) jednoznačně až na množinu míry nula ve druhém argumentu, tj. jestliže $\tilde{G}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ splňuje (a)–(c), potom $\tilde{G}(x, y) = G(x, y)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a s.v. $y \in \mathbb{R}$.

Důkaz: Každému $x \in \mathbb{R}$ přiřadíme interval $J(x) \subset \mathbb{R}$, jehož jeden hraniční bod je x a druhý je 0. Pro $e_x = \operatorname{sgn}(x)\, \chi_{J(x)}$ potom platí $e_x \in L^2(\mathbb{R})$, $e_0 = 0$, a proto $G_x := B^* e_x$ splňuje podmínku (a); dále je

$$(G_x, f) = (e_x, Bf) = \operatorname{sgn}(x) \int_{J(x)} (Bf)(y) \, \mathrm{d}y$$

pro každé $f \in L^2(\mathbb{R})$. Uvažujme libovolný kompaktní interval $[a, b]$. Funkce

$$x \mapsto F(x) := \int_a^x (Bf)(y) \, \mathrm{d}y$$

je absolutně spojitá na $[a, b]$; vzhledem k tomu, že na $[a, b]$ platí $(G_x, f) = F(x) + \text{konst.}$, je splněno (b) a pro s.v. $x \in [a, b]$ dostáváme

$$(Bf)(x) = F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(G_x, f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{\mathbb{R}} G(x, y) f(y) \, \mathrm{d}y \, .$$

Interval $[a, b]$ je libovolný, a proto tento vztah platí pro s.v. $x \in \mathbb{R}$.

Předpokládejme, že funkce $\tilde{G}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ splňuje podmínky (a)–(c). Potom

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(G_x, f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tilde{G}_x, f)$$

pro s.v. $x \in \mathbb{R}$ a všechna $f \in L^2(\mathbb{R})$. Z absolutní spojitosti a podmínky $\tilde{G}_0 = G_0 = 0$ vyplývá $(G_x, f) = (\tilde{G}_x, f)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$; vzhledem k libovolnosti f jsou si vektory $G_x, \tilde{G}_x \in L^2(\mathbb{R})$ rovny, tj. $G_x(y) = \tilde{G}_x(y)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a s.v. $y \in \mathbb{R}$. ■

5.1.10 Poznámka: Ze závěrečné části důkazu je vidět, že tvrzení o jednoznačnosti lze zesílit. Nechť funkce $\tilde{G}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ splňuje podmínku (a) a nechť existuje množina D, která je totální v $L^2(\mathbb{R})$, taková že $\tilde{G}$ má vlastnosti (b), (c) pro každé $f \in D$. Potom $G(x,y) = \tilde{G}(x, y)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a s.v. $y \in \mathbb{R}$.

Jestliže pro omezený operátor B na $L^2(\mathbb{R})$ umíme najít explicitní tvar funkce $y \mapsto (B^* e_x)(y)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, dává formule (4) funkcionální realizaci daného operátoru.

5.1.11 Příklad (*funkcionální realizace Fourierova-Plancherelova operátoru F na $L^2(\mathbb{R})$*): Budeme užívat výsledků příkladu 3.2.6 a označení tam zavedených. Pomocí argumentace, jíž jsme užili při odvození formule (3.2.15), se ukáže, že pro každé $h \in L^2 \cap L^1$ platí

$$(F^{-1}h)(x) = (2\pi)^{-1/2} \int e^{ixy} h(y)\, dy. \tag{5}$$

Dále snadno nahlédneme, že $F^{-1} = F^*$. Skutečně, tvrzení 4.1.1 dává pro libovolná $f, g \in L^2$ rovnosti $(f, Fg) = (FF^{-1}f, Fg) = (F^{-1}f, g)$. Poznamenejme, že formule (5) i vztah $F^* = F^{-1}$ platí i pro $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geqq 2$, s tím, že faktor $(2\pi)^{-1/2}$ je nahrazen $(2\pi)^{-n/2}$ a místo e^{ixy} je nutno psát $e^{i(x,y)}$, kde (x, y) je skalární součin v $\mathbb{R}^n$.

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ patří e_x do $L^2 \cap L^1$, takže pro funkci G odpovídající podle (4) operátoru F platí

$$\overline{G(x,y)} = (F^* e_x)(y) = (2\pi)^{-1/2} \operatorname{sgn}(x) \int_{J(x)} e^{iyt}\, dt,$$

tj. $G(x, y) = (2\pi)^{-1/2}(e^{-ixy} - 1)/(-iy)$. Podobně pro funkci $G^*(x, y)$ odpovídající operátoru $F^* = F^{-1}$ dostaneme $G^*(x, y) = (2\pi)^{-1/2}(e^{ixy} - 1)/iy$. Akce operátorů F a F^{-1} na libovolné $\psi \in L^2(R)$ je tedy dána formulemi

$$(F\psi)(x) = (2\pi)^{-1/2} \frac{d}{dx} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ixy} - 1}{-iy} \psi(y)\, dy, \tag{6a}$$

$$(F^{-1}\psi)(x) = (2\pi)^{-1/2} \frac{d}{dx} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixy} - 1}{iy} \psi(y)\, dy, \tag{6b}$$

5.1.12 Poznámka: Z uvedených formulí je vidět, že funkce G^* je komplexně sdružená s G. To však v obecném případě pro dvojici funkcí odpovídajících podle (4) operátorům $B, B^* \in \mathscr{B}(L^2(\mathbb{R}))$ nemusí platit: jako protipříklad lze uvést třeba operátor $(P_{gh}f)(x) = g(x) \int_{\mathbb{R}} \overline{h(y)} f(y)\, dy$, $g, h, f \in L^2(\mathbb{R})$, ze cvičení 6.

Kromě stejnoměrné topologie se na prostoru $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ pracuje s několika slabšími lokálně konvexními topologiemi. Se dvěma z nich se teď seznámíme, další probereme v § 13.1.

Silná operátorová topologie τ_s na $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ je zadána pomocí systému seminorem $\mathscr{P}_s \equiv \{p_x \colon x \in \mathscr{H},\ p_x(B) := \|Bx\|\}$, který zjevně odděluje body. Řídící systém okolí nuly tvoří množiny

$$V_\varepsilon(M) := \{B \in \mathscr{B}(\mathscr{H}) \colon p_x(B) < \varepsilon,\ x \in M\} \tag{1}$$

pro všechna $\varepsilon > 0$ a všechny konečné množiny $M \subset \mathscr{H}$. Lokálně konvexní prostor $(\mathscr{B}(\mathscr{H}), \tau_s)$ budeme značit symbolem $\mathscr{B}_s(\mathscr{H})$.

Z definice (1) bezprostředně vyplývá, že v topologickém prostroru $\mathscr{B}_s(\mathscr{H})$ konverguje posloupnost $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ k B právě tehdy, když $B_n x \to Bx$ pro všechna $x \in \mathscr{H}$. Tuto konvergenci nazýváme *silnou operátorovou konvergencí* a značíme $B_n \xrightarrow{s} B$, resp. $B = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} B_n$. Uvedeme dvě její vlastnosti, které jsou přímým důsledkem principu stejnoměrné omezenosti (viz též cvičení 3.22).

5.2.1 Tvrzení: (a) Nechť posloupnost $\{B_n\} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ splňuje následující podmínku: pro každé $x \in \mathscr{H}$ tvoří vektory $B_n x$ cauchyovskou posloupnost v $\mathscr{H}$. Potom existuje $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ takové, že $B_n \xrightarrow{s} B$.

(b) Jestliže $B_n \xrightarrow{s} B$ a $C_n \xrightarrow{s} C$, potom $B_n C_n \xrightarrow{s} BC$.

První z uvedených vlastností se nazývá *silnou úplností prostoru* $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, druhá *sekvenční spojitostí násobení* vzhledem k τ_s. Na rozdíl od stejnoměrné topologie (věta 5.1.1) však odtud neplyne spojitost násobení.

5.2.2 Věta: Jestliže $\dim \mathscr{H} = \infty$, potom násobení, chápané jako zobrazení topologického součinu $\mathscr{B}_s(\mathscr{H}) \times \mathscr{B}_s(\mathscr{H})$ do $\mathscr{B}_s(\mathscr{H})$, není spojité.

Důkaz: Nechť $\mathscr{H}$ je separabilní a $\mathscr{E} \equiv \{e_j\}_{j=1}^\infty$ je ortonormální báze v $\mathscr{H}$. Stačí, abychom pro každou dvojici okolí $V_r \equiv V_{\varepsilon_r}(M_r)$, $r = 1, 2$, našli operátory B_r takové, že $B_r \in V_r$, zatímco $B_1 B_2 \notin V_{1/2}(\{x\})$, kde $x \in \mathscr{H}$ je nějaký jednotkový vektor. Uvažujme operátory posunutí z příkladu 5.1.7: pro libovolné $\delta > 0$, $n = 1, 2, \dots$ položíme $B_{n,\delta} := (1/\delta)(S^*)^n$ a $C_{n,\delta} := \delta S^n$. Potom $B_{n,\delta} C_{n,\delta} = I$ (cvičení 7), a proto $B_{n,\delta} C_{n,\delta}$ není prvkem množiny $V_{1/2}(\{x\})$ pro žádné přirozené n a $\delta > 0$. Jelikož $\|S^n\| = 1$, patří pro $\delta_2 := \varepsilon_2 / (2 \max_{y \in M_2} \|y\|)$ a všechna přirozená n operátor C_{n,δ_2} do $V_{\varepsilon_2}(M_2)$. Dále užijeme toho, že $(S^*)^n \xrightarrow{s} 0$; dá se proto najít přirozené n_1 (závisející na ε_1, δ_2 a množině M_1) takové, aby $\|(S^*)^{n_1} z\| < \varepsilon_1 \delta_2$ pro všechna $z \in M_1$. Pro $B_1 = B_{n_1,\delta_2}$, $B_2 = C_{n_1,\delta_2}$ potom máme $B_r \in V_r$, $r = 1, 2$ a $B_1 B_2 \notin V_{1/2}(\{x\})$. ■

5.2.3 Poznámka: Srovnání s tvrzením 1b ukazuje, že pro $\dim \mathscr{H} = \infty$ není v prostoru $\mathscr{B}_s(\mathscr{H})$ splněn první axiom spočetnosti.

Vyšetříme vztah topologií τ_s a τ_u. Jestliže pro dané $V_\varepsilon(M)$ položíme $\delta = \varepsilon / \max_{x \in M} \|x\|$, platí implikace $\|B\| < \delta \Rightarrow B \in V_\varepsilon(M)$; odtud plyne, že $\tau_s \subset \tau_u$ (viz tvrzení 2.3.5). Snadno se rovněž přesvědčíme o tom, že pro každý nekonečnědimenzionální prostor platí $\tau_s \neq \tau_u$.

5.2.4 Příklad: Nechť $\mathscr{H}$ je separabilní prostor s ortonormální bází $\{e_k\}_{k=1}^\infty$. Pro $n = 1, 2, \ldots$ definujeme operátory Q_n vztahem $Q_n x := \sum_{k=n+1}^{\infty} (e_k, x)\, e_k$; zjevně platí $\|Q_n\| = 1$ a $\|Q_n - Q_m\| = 1$ pro $n \neq m$, takže posloupnost $\{Q_n\}$ nekonverguje vzhledem k τ_u. Pro každé $x \in \mathscr{H}$ však platí $\|Q_n x\| \to 0$, tj. $Q_n \xrightarrow{s} 0$.

Slabá operátorová topologie τ_w na $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ je zadána systémem seminorem $\mathscr{P}_w \equiv \{p_{xy}\colon x, y \in \mathscr{H},\ p_{xy}(B) := |(y, Bx)|\}$, který opět odděluje body; odpovídající lokální báze v bodě 0 je tvořena množinami

$$W_\varepsilon(M, N) := \{B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})\colon p_{xy}(B) < \varepsilon,\ x \in M,\ y \in N\} \tag{2}$$

pro všechna $\varepsilon > 0$ a všechny konečné množiny $M, N \subset \mathscr{H}$. Lokálně konvexní prostor $(\mathscr{B}(\mathscr{H}), \tau_w)$ budeme značit $\mathscr{B}_w(\mathscr{H})$.

5.2.5 Poznámka: Vzhledem k tomu, že pro každá $x, y \in \mathscr{H}$ je zobrazení $B \mapsto f_{xy}(B) := (y, Bx)$ omezený lineární funkcionál na $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, je slabá operátorová topologie slabší než slabá topologie na $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, jež je určena všemi prvky prostoru $\mathscr{B}(\mathscr{H})^*$ (viz § 3.5 a cvičení 9). Výhodou slabé operátorové topologie je mj. to, že příslušné seminormy se velmi jednoduše vyjadřují pomocí vektorů z $\mathscr{H}$, zatímco podobné vyjádření pro obecný prvek prostoru $\mathscr{B}(\mathscr{H})^*$ není známo. Proto se slabá topologie na $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ prakticky neužívá.

Jestliže v prostoru $\mathscr{B}_w(\mathscr{H})$ konverguje posloupnost $\{B_n\}$ k operátoru B, mluvíme o *slabé operátorové konvergenci*; je ekvivalentní podmínkám $(y, B_n x) \to (y, Bx)$ pro všechna $x, y \in \mathscr{H}$ a užívá se pro ni označení $B_n \xrightarrow{w} B$, resp. $B = \operatorname{w-lim}_{n \to \infty} B_n$. Platí analogie tvrzení 1a.

5.2.6 Tvrzení: Nechť $\{B_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ a pro každou dvojici $x, y \in \mathscr{H}$, je číselná posloupnost $\{(y, B_n x)\}_{n=1}^\infty$ cauchyovská. Potom existuje $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ takové, že $B_n \xrightarrow{w} B$.

Důkaz: Pro dané $x \in \mathscr{H}$ označme $z_n(x) := B_n x$; ze slabé úplnosti prostoru $\mathscr{H}$ (věta 3.5.6) vyplývá, že posloupnost $\{z_n(x)\}$ slabě konverguje k nějakému $z(x) \in \mathscr{H}$ a je třeba ukázat existenci operátoru $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ takového, že $z(x) = Bx$ pro všechna $x \in \mathscr{H}$. Z toho, že $\{z_n(x)\}$ je slabě konvergentní, plyne, že je omezená; v důsledku toho množina $\{B_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$ splňuje předpoklady věty 3.4.1, což znamená, že $\|B_n\| < c$, $n = 1, 2, \ldots$. Vzhledem k linearitě operátorů B_n existuje lineární operátor B definovaný na celém $\mathscr{H}$, pro nějž $Bx = z(x)$. Dále $|(B_n x, Bx)| \leq c\|x\|\,\|Bx\|$ a současně z podmínky $B_n x \xrightarrow{w} Bx$ dostáváme $(B_n x, Bx) \to \|Bx\|^2$, a proto $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. ■

K danému $W_\varepsilon(M, N)$ snadno najdeme $\delta > 0$ takové, že pro množinu $V_\delta(M)$ určenou vztahem (1) platí $V_\delta(M) \subset W_\varepsilon(M, N)$; to znamená, že $\tau_w \subset \tau_s$, přičemž pro $\dim \mathscr{H} = \infty$ je opět $\tau_w \neq \tau_s$ (viz cvičení 10). Poznamenejme ještě, že v prostoru $\mathscr{B}_w(\mathscr{H})$ není násobení spojité ani sekvenčně (cvičení 11) a že pro $\dim \mathscr{H} < \infty$ platí $\tau_u = \tau_s = \tau_w$ (cvičení 12).

5.3 HERMITOVSKÉ OPERÁTORY

Operátor $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je **hermitovský**, jestliže $A = A^*$. Aplikací polarizační formule na seskvilineární formu $[x, y] \mapsto f_A(x, y) := (y, Ax)$ získáme následující ekvivalentní definici: operátor A je hermitovský, když $(x, Ax) \in \mathbb{R}$ pro všechna $x \in \mathscr{H}$. Z věty 5.1.5 plyne, že množina hermitovských operátorů tvoří *reálný* podprostor v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$; součin dvou hermitovských operátorů však obecně hermitovský není (cvičení 15).

Každé $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je možno zapsat pomocí dvojice hermitovských operátorů, které jsou určeny analogickými formulemi jako reálná a imaginární část komplexního čísla:

$$B = \operatorname{Re} B + \mathrm{i} \operatorname{Im} B\,, \qquad \operatorname{Re} B := \frac{1}{2}(B + B^*)\,, \qquad \operatorname{Im} B := \frac{1}{2\mathrm{i}}(B - B^*)\,. \tag{1}$$

Řada vlastností hermitovských operátorů se vyjadřuje pomocí tzv. číselného oboru hodnot. Obecně pro lineární operátor $T\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ s definičním oborem D_T nazýváme **číselným oborem hodnot** množinu

$$\Theta(T) := \{(x, Tx)\colon x \in D_T,\ \|x\| = 1\}\,.$$

Omezený operátor je tedy hermitovský právě tehdy, když jeho číselný obor hodnot je podmnožinou reálné osy. Čísla

$$M_A := \sup \Theta(A)\,, \qquad m_A := \inf \Theta(A) \tag{2}$$

nazýváme **horní**, resp. **dolní hranicí** hermitovského operátoru A.

5.3.1 Tvrzení: Pro každý hermitovský operátor A platí

$$\|A\| = \max(|m_A|, |M_A|) = \sup_{\|x\| = 1} |(x, Ax)|\,.$$

Důkaz: Označíme $c_A := \sup_{\|x\|=1} |(x, Ax)|$; rovnost $c_A = \max(|m_A|, |M_A|)$ je zřejmým důsledkem definičních vztahů (2). Dále pro každé $x \in \mathscr{H}$, $\|x\| = 1$, platí $|(x, Ax)| \leqq \|A\|$, takže $c_A \leqq \|A\|$. K ověření opačné nerovnosti stačí uvážit, že pro každý hermitovský operátor A plyne z polarizační formule vztah $\operatorname{Re}(y, Ax) = \frac{1}{4}(q_A(x+y) - q_A(x-y))$, kde $q_A(z) := (z, Az)$. Odtud dostáváme pro všechna $x, y \in \mathscr{H}$ odhad

$$|\operatorname{Re}(y, Ax)| \leqq \frac{1}{4}\, c_A(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = \frac{1}{2}\, c_A(\|x\|^2 + \|y\|^2)\,. \tag{3}$$

Nechť x je jednotkový vektor, pro nějž $Ax \neq 0$ (předpokládáme $A \neq 0$, jinak je vše triviální); dosadíme-li do (3) vektor $y = Ax/\|Ax\|$, nabude tato nerovnost tvaru $\|Ax\| \leqq c_A$, a odtud ihned plyne tvrzení. ■

5.3.2 Příklad: Operátor Q násobení nezávisle proměnnou na prostoru $L^2(a, b)$, kde $b - a < \infty$, je definován pro každé $f \in L^2(a, b)$ vztahem

$$(Qf)(x) := xf(x)\,.$$

Jelikož $(f, Qf) = \int_a^b x|f(x)|^2\,dx \in \mathbb{R}$ pro všechna $f \in L^2(a, b)$, je Q hermitovský a platí $\Theta(Q) \subset [a, b]$. Uvažujme posloupnost jednotkových vektorů $f_n = \sqrt{n}\chi_n$, kde χ_n je charakteristická funkce intervalu $(a, a + 1/n)$. Potom pro všechna n platí

$$m_Q \leqq (f_n, Qf_n) = n \int_a^{a+1/n} x\,dx = a + \frac{1}{2n}\,,$$

takže $m_Q = a$. Stejným postupem se zjistí, že $M_Q = b$, a proto $\|Q\| = \max(|a|, |b|)$; např. pro operátor Q na $L^2(0, 1)$ platí $\|Q\| = 1$.

Operátory $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, jejichž číselný obor hodnot je tvořen nezápornými, resp. kladnými čísly, se nazývají **pozitivní**, resp. **striktně pozitivní**; píšeme $A \geqq 0$, resp. $A > 0$. Příkladem pozitivního operátoru je Q na $L^2(a, b)$ pro $a \geqq 0$; jestliže $a > 0$, platí $Q > 0$. Každý pozitivní operátor je automaticky hermitovský; dále je zřejmé, že operátor A je pozitivní (striktně pozitivní) právě tehdy, když odpovídající seskvilineární forma $[x, y] \mapsto (y, Ax)$ je pozitivní (striktně pozitivní). Pro pozitivní operátory proto platí Schwarzova nerovnost

$$|(y, Ax)|^2 \leqq (x, Ax)\,(y, Ay) \tag{4}$$

a vztahy

$$m_A \geqq 0\,, \qquad M_A = \|A\|\,. \tag{5}$$

152 Pojem pozitivního operátoru umožňuje zavést nerovnosti mezi hermitovskými operátory A, B: píšeme $A \geqq B$, jestliže operátor $A - B$ je pozitivní. Odtud bezprostředně plynou následující jednoduchá pravidla:

$$A \geqq B,\ C \geqq D \Rightarrow A + C \geqq B + D\,, \tag{6a}$$

speciálně $A + C \geqq B + C$ pro každý hermitovský operátor C;

$$A \geqq 0,\ c \geqq 0 \Rightarrow cA \geqq 0\,, \tag{6b}$$

$$A \geqq B \Rightarrow -B \geqq -A\,, \tag{6c}$$

$$A \geqq B,\ B \geqq C \Rightarrow A \geqq C\,. \tag{6d}$$

Ze vztahu (5) je rovněž vidět, že *na množině pozitivních operátorů je norma neklesající funkcí*:

$$A \geqq B \geqq 0 \Rightarrow \|A\| \geqq \|B\|\,. \tag{7}$$

5.3.3 Příklad: Pro každé $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ platí $(x, B^*Bx) = \|Bx\|^2 \geqq 0$, tj. $B^*B \geqq 0$. Podle (5) dále dostáváme

$$\|B^*B\| = \sup_{\|x\|=1} (B^*Bx, x) = \sup_{\|x\|=1} \|Bx\|^2 = \|B\|^2\,. \tag{8}$$

Speciálně pro hermitovský operátor A odtud indukcí plyne $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$, což dává pro spektrální poloměr operátoru A (viz větu 3.6.7) vztah

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|A^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|A\|\,.$$

Rovnost (8) hraje důležitou roli při vyšetřování vlastností algebry $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ – viz § 12.3.

Nerovnosti mezi hermitovskými operátory umožňují zavést též pojem suprema a infima libovolné množiny $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ hermitovských operátorů: $A^{(s)} \equiv \equiv \sup_{\alpha\in I} A_\alpha$ je hermitovský operátor takový, že (i) $A_\alpha \leqq A^{(s)}$ pro všechna $\alpha \in I$, (ii) je-li B hermitovský operátor takový, že $A_\alpha \leqq B$, $\alpha \in I$, potom $A^{(s)} \leqq B$; analogicky se definuje $\inf_{\alpha\in I} A_\alpha$. Platí rovnost $\inf_{\alpha\in I} A_\alpha = -\sup_{\alpha\in I}\{-A_\alpha\}$, která představuje ekvivalentní definici infima.

Otázka existence suprema a infima množin hermitovských operátorů je komplikovanější než pro množiny v $\mathbb{R}$. Důvod je zřejmý: relace $\geqq$ definuje na množině hermitovských operátorů částečné uspořádání, existují ovšem hermitovské operátory $A \neq B$, pro které neplatí ani $A < B$, ani $B < A$. Pro uspořádané podmnožiny je však při vhodném výběru topologie v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ situace analogická jako v $\mathbb{R}$.

5.3.4 Věta: Nechť $\{A_n\}$ je neklesající posloupnost hermitovských operátorů a B je hermitovský operátor takový, že $A_n \leqq B$ pro $n = 1, 2, \ldots$. Potom existuje hermitovský operátor $A \equiv \operatorname{s-lim}_{n\to\infty} A_n$ a platí $A = \sup_n A_n$.

Důkaz: Označíme $f_n(x) := (x, A_n x)$, $x \in \mathscr{H}$; pro libovolná přirozená m, n, $m > n$ je operátor $A_{mn} := A_m - A_n$ pozitivní a položíme-li ve (4) $A = A_{mn}$, $y = A_{mn}x$, dostáváme nerovnost

$$\|A_{mn}x\|^4 \leqq |f_m(x) - f_n(x)|\, (A_{mn}x, A_{mn}^2 x)\,.$$

Pro skalární součin na pravé straně dává implikace (7) odhad $(A_{mn}x, A_{mn}^2 x) \leqq$ $\leqq \|A_{mn}\|^3 \|x\|^2 \leqq \|B - A_1\|^3 \|x\|^2$. Odtud vyplývá, že posloupnost $\{A_n x\}$ je cauchyovská pro všechna $x \in \mathscr{H}$, protože $\{f_n(x)\}$ je neklesající číselná posloupnost omezená shora číslem (x, Bx). Vzhledem k silné úplnosti prostoru $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ existuje $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ takové, že $A_n \xrightarrow{s} A$. Potom $f_n(x) = (x, A_n x) \to (x, Ax)$, tj. $(x, Ax) = \sup_n f_n(x)$ pro každé $x \in \mathscr{H}$. Odtud je především jasné, že $(x, Ax) \in \mathbb{R}$, tj. $A = A^*$; dále $(x, Ax) = \sup_n f_n(x)$, a proto $A = \sup_n A_n$. ∎

5.3.5 Poznámka: Analogické tvrzení platí pro nerostoucí posloupnosti hermitovských operátorů takové, že $A_n \geqq B$, $n = 1, 2, \ldots$: $\operatorname{s-lim}_{n\to\infty} A_n = \inf_n A_n$. Připomeňme, že *věta neplatí pro stejnoměrnou topologii*: jako protipříklad lze uvést třeba nerostoucí posloupnost $\{Q_n\}$, $Q_n \geqq 0$, z příkladu 5.2.4.

Věta, kterou jsme právě dokázali, se často užívá při konstrukci operátorů s jistými požadovanými vlastnostmi. Ptejme se například, zda k danému pozitivnímu operátoru A lze najít pozitivní operátor B vyhovující podmínce $B^2 = A$. Tato úloha je motivována analogií mezi nezápornými čísly a pozitivními operátory; hledaný operátor B proto nazveme **odmocninou** z A a označíme $\sqrt{A}$, resp. $A^{1/2}$.

5.3.6 Tvrzení: Ke každému pozitivnímu operátoru A existuje jednoznačně určená odmocnina $\sqrt{A}$, která má navíc následující vlastnost: pro každé $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ jsou podmínky

$$AB = BA\,, \qquad \sqrt{A}B = B\sqrt{A} \tag{9}$$

ekvivalentní.

Důkaz: Vyšetříme nejprve otázku existence odmocniny a ekvivalence podmínek (9). Jelikož případ $A = 0$ je triviální, můžeme se omezit na takové pozitivní operátory, pro něž $\|A\| = 1$. Vzhledem k (8) musí platit $\|\sqrt{A}\| = 1$, a tedy $0 \leqq A \leqq I$, $0 \leqq \sqrt{A} \leqq I$ (viz (5)). Označíme $X := I - A$ a $Y := I - \sqrt{A}$; podmínka $\sqrt{A}^2 = A$ je potom ekvivalentní rovnici $Y = \frac{1}{2}(X + Y^2)$, kterou budeme řešit iterací. Položíme

$$Y_1 := \frac{1}{2} X, \qquad Y_{n+1} := \frac{1}{2}(X + Y_n^2) \qquad \text{pro} \quad n = 1, 2, \ldots; \tag{10}$$

je zřejmé, že pro každý z operátorů Y_n platí $Y_n = \sum_{k=0}^{k_n} a_k X^k$, $a_k \geqq 0$. To mj. znamená, že $\{Y_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$ je množina komutujících operátorů: $Y_n Y_m = Y_m Y_n$, $n, m = 1, 2, \ldots$. Z (10) potom dostáváme $Y_{n+1} - Y_n = \frac{1}{2}(Y_n^2 - Y_{n-1}^2) = \frac{1}{2}(Y_n - Y_{n-1})(Y_n + Y_{n-1})$; odtud pomocí indukce ověříme, že také rozdíly $Y_{n+1} - Y_n$ jsou polynomiální funkce operátoru X s nezápornými koeficienty, takže posloupnost $\{Y_n\}$ je neklesající. Dále pro všechna přirozená n z (10) vyplývá nerovnost $\|Y_n\| \leqq 1$, což vzhledem k pozitivitě operátorů Y_n znamená, že $Y_n \leqq I$. Podle věty 4 existuje pozitivní operátor $Y = \operatorname{s-lim}_{n\to\infty} Y_n$, $Y \leqq I$, a provedeme-li v (10) limitní přechod (s využitím sekvenční spojitosti násobení v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$), vidíme, že $(I - Y)^2 = I - X = A$, tj. $\sqrt{A} = I - Y$.

Jestliže B komutuje s A, komutuje i s X, a potom $BY_n = Y_n B$ pro $n = 1, 2, \ldots$; limitní přechod dává $BY = YB$, takže operátory $\sqrt{A}$, B komutují. Implikace $\sqrt{A}B = B\sqrt{A} \Rightarrow AB = BA$ je triviální, a zbývá tedy dokázat jednoznačnost.

Předpokládejme, že B, C jsou pozitivní operátory splňující $B^2 = C^2 = A$; z toho, co jsme již dokázali, plyne $BC = CB$. Nechť $D := B - C$; pro libovolné $x \in \mathscr{H}$ položíme $y = Dx$. Potom $(y, By) + (y, Cy) = (y, (B^2 - C^2)\,x) = 0$, a protože B, C jsou pozitivní, musí platit $(y, By) = (y, Cy) = 0$. Z toho dále vyplývá $\sqrt{B}y = \sqrt{C}y = 0$, a tedy také $Dy = 0$. Potom $\|Dx\|^2 = (D^2x, x) = (Dy, x) = 0$, tj. $D = 0$. ■

5.3.7 Důsledek: (a) Jestliže $A \geqq 0$, potom pro každé $x \in \mathscr{H}$ platí implikace $(x, Ax) = 0 \Rightarrow Ax = 0$.

(b) Součin komutujících pozitivních operátorů je pozitivní.

Důkaz přenecháváme čtenáři.

Pomocí odmocniny se na základě analogie s vyjádřením absolutní hodnoty komplexního čísla ve tvaru $|z| = (\bar{z}z)^{1/2}$ definuje pro každé $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ pozitivní operátor

$$|B| := \sqrt{B^* B}\,. \tag{11}$$

Zobrazení $z \mapsto |z|$ a $B \mapsto |B|$ mají sice některé společné vlastnosti, např. $|\alpha B| = |\alpha|\,|B|$ pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$ nebo $B \geqq 0 \Rightarrow |B| = B$, avšak svou podstatou jsou značně odlišná (viz cvičení 18).

5.4 PROJEKTORY

Nechť $\mathscr{G}$ je nějaký uzavřený podprostor v $\mathscr{H}$; pro každé $x \in \mathscr{H}$ označíme y_x jeho ortogonální projekci do $\mathscr{G}$. Z věty o ortogonálním rozkladu vyplývá, že zobrazení $x \mapsto y_x$ je lineární operátor, který nazýváme **projektorem** (nebo projekčním operátorem – viz též komentář) a značíme $E_{\mathscr{G}}$. Z uvedené definice je zřejmé, že operátor $E_{\mathscr{G}}$ je omezený a že platí

$$\operatorname{Ran} E_{\mathscr{G}} = \mathscr{G}\,, \qquad \operatorname{Ker} E_{\mathscr{G}} = \mathscr{G}^{\perp} \tag{1a}$$

a $\|E_{\mathscr{G}}\| = 1$, pokud $\mathscr{G} \neq \{0\}$. Dále vidíme, že $I - E_{\mathscr{G}}$ je projektor na podprostor $\mathscr{G}^{\perp}$, takže pro libovolný uzavřený podprostor $\mathscr{G}$ platí

$$E_{\mathscr{G}} + E_{\mathscr{G}^{\perp}} = I\,. \tag{1b}$$

5.4.1 Příklad: Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je ortonormální množina v $\mathscr{H}$. Podle příkladu 4.2.2 je akce projektoru $E^{(n)}$ příslušejícího podprostoru $\{e_1, \dots, e_n\}_{\mathrm{lin}}$ na libovolné $x \in \mathscr{H}$ dána vztahem

$$E^{(n)}x = \sum_{j=1}^{n} (e_j, x)\, e_j\,. \tag{2}$$

Jiný jednoduchý příklad projektoru dostaneme, uvažujeme-li pro dané $t \in \mathbb{R}$ podprostor $\mathscr{G}_t \equiv \{f \in L^2(\mathbb{R}) \colon f(x) = 0$ pro s.v. $x > t\}$. To je uzavřený podprostor, protože se rovná ortogonálnímu doplňku podprostoru $\{g \in L^2(\mathbb{R}) \colon g(x) = 0$ pro s.v. $x \leqq t\}$. Odpovídající projektor E_t splňuje pro všechna $h \in L^2(\mathbb{R})$ vztah

$$(E_t h)(x) = \begin{cases} h(x) & \dots\ x \leqq t \\ 0 & \dots\ x > t \end{cases}. \tag{3}$$

5.4.2 Věta: Operátor E definovaný na celém $\mathscr{H}$ je projektor právě tehdy, když je hermitovský a platí $E^2 = E$. Jsou-li tyto podmínky splněny, je $\operatorname{Ran} E$ uzavřený podprostor a obsahuje právě ta $x \in \mathscr{H}$, pro něž platí $Ex = x$.

Důkaz: Nechť E je projektor; vztah $E^2 = E$ plyne přímo z definice a hermitovost je důsledkem toho, že E je definován pomocí ortogonálního rozkladu: pro libovolné $x \in \mathscr{H}$ platí $(Ex, (I - E)\,x) = 0$, tj. $(Ex, x) = \|Ex\|^2 \in \mathbb{R}$. Naopak, nechť E je hermitovský operátor splňující $E^2 = E$. Jestliže $y \in \overline{\operatorname{Ran} E}$, tj. $y = \lim_{n\to\infty} Ex_n$, potom ze spojitosti plyne $Ey = \lim_{n\to\infty} E^2 x_n = \lim_{n\to\infty} Ex_n = y$. Podprostor $\operatorname{Ran} E$ je tedy uzavřený a pro všechny jeho prvky platí $Ey = y$. Zapíšeme-li libovolné $x \in \mathscr{H}$ ve tvaru $x = y + z$, $y := Ex$ a $z := (I - E)\,x$, vidíme, že $y \in \operatorname{Ran} E$ a $(y, z) = 0$; y tedy je ortogonální projekce vektoru x do podprostoru $\operatorname{Ran} E$, a to znamená, že E je projektor na podprostor $\operatorname{Ran} E$. ■

156 **5.4.3 Důsledek:** Každý projektor je pozitivní operátor.

Říkáme, že projektor E je ortogonální k projektoru F, jestliže $\operatorname{Ran} E \perp \operatorname{Ran} F$, což je ekvivalentní podmínce $EF = FE = 0$. Pomocí ortogonality a nerovností lze zformulovat podmínky pro to, aby součet, resp. rozdíl dvojice projektorů byl projektor, a najít příslušné podpostory.

5.4.4 Tvrzení: Nechť E, F jsou projektory na $\mathscr{H}$.

(a) Operátor $E + F$ je projektor právě tehdy, když E je ortogonální k F; potom platí $\operatorname{Ran}(E + F) = \operatorname{Ran} E \oplus \operatorname{Ran} F$.

(b) Následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) $E - F$ je projektor,
(ii) $E \geqq F$,
(iii) $\operatorname{Ran} E \supset \operatorname{Ran} F$,
(iv) $EF = FE = F$.

Jsou-li splněny, je $\operatorname{Ran}(E - F)$ ortogonální doplněk podprostoru $\operatorname{Ran} F$ v $\operatorname{Ran} E$.

(c) Operátor EF je projektor právě tehdy, když $EF = FE$; potom $\operatorname{Ran}(EF) = \operatorname{Ran} E \cap \operatorname{Ran} F$.

Důkaz přenecháváme čtenáři (cvičení 22).

5.4.5 Poznámka: Z tvrzení (a) pomocí indukce pro projektory $E_1, E_2, \dots, E_n$ plyne: $\sum_{j=1}^{n} E_j$ je projektor právě tehdy, když $E_j E_k = \delta_{jk} E_k$, $j, k = 1, 2, \dots$. Např. pro projektor $E^{(n)}$ z příkladu 5.4.1 platí $E^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} E_j$, kde E_j je projektor na podprostor $\{e_j\}_{\text{lin}}$. Další zobecnění na libovolné systémy vzájemně ortogonálních projektorů probereme v závěru paragrafu.

5.4.6 Poznámka: Označme $\mathscr{E} \equiv \operatorname{Ran} E$, $\mathscr{F} \equiv \operatorname{Ran} F$; jestliže projektory E a F komutují, je projektor na podprostor $\mathscr{E} \cap \mathscr{F}$ roven jejich součinu. Avšak průnik $\mathscr{E} \cap \mathscr{F}$ je podprostor i tehdy, když E a F nekomutují; můžeme se tedy zeptat, zda existuje nějaké vyjádření projektoru na $\mathscr{E} \cap \mathscr{F}$ pomocí E a F i v tomto případě. Při řešení této úlohy se nejprve ověří, že pro pozitivní operátory $G_n := (EFE)^n$ existuje $G \equiv s\text{-}\lim_{n\to\infty} G_n$ splňující $0 \leqq G \leqq I$ (viz cvičení 20). Dále $G_n^2 = G_{2n}$, takže $G^2 = G$, a G je tedy projektor. Ukážeme, že $\operatorname{Ran} G = \mathscr{E} \cap \mathscr{F}$. K tomu užijeme vztahů $EG_n = G_n E = G_n$, z nichž limitním přechodem plyne $\operatorname{Ran} G \subset \mathscr{E}$ (viz tvrzení 4b). Podobně z $G_n F G_n = G_n EFE G_n = G_{2n+1}$ dostaneme $GFG = G$; potom $\|FG - G\|^2 = \|(FG - G)^* (FG - G)\| = \|G - GFG\| = 0$, a odtud $\operatorname{Ran} G \subset \mathscr{F}$. Platí tedy $\operatorname{Ran} G \subset \mathscr{E} \cap \mathscr{F}$; naopak pro každé $x \in \mathscr{E} \cap \mathscr{F}$ máme $G_n x = x$, $n = 1, 2, \dots$ a limitní přechod dává $Gx = x$, takže *G je hledaný projektor na podprostor* Ran $E \cap$ Ran F. Ze vztahu $FG = GF = G$ dostáváme pro G další limitní vztah:

$$G = \operatorname*{s\text{-}lim}_{n\to\infty} (EF)^n = \operatorname*{s\text{-}lim}_{n\to\infty} (FE)^n .$$

Nechť E, F jsou projektory na $\mathscr{H}$; pro každý vektor $x \in \mathscr{H}$ plyne z ortogonality vektorů $E(I - F)\,x$, $(E - I)\,Fx$ a z rozkladu

$$(E - F)\,x = E(I - F)\,x + (E - I)\,Fx \tag{4a}$$

vztah $\|(E-F)\,x\|^2 = \|E(I-F)\,x\|^2 + \|(E-I)\,Fx\|^2 \leqq \|(I-F)\,x\|^2 + \|Fx\|^2 = \|x\|^2$, takže každé dva projektory E, F na daném $\mathscr{H}$ splňují nerovnost

$$\|E - F\| \leqq 1 . \tag{4b}$$

Zajímavý je případ, kdy platí ostrá nerovnost. Dříve než jej vyšetříme, uvedeme následující pomocné tvrzení.

5.4.7 Lemma: Jestliže $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ jsou uzavřené podprostory v $\mathscr{H}$ takové, že $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}^\perp = \{0\}$, potom $\dim \mathscr{F} \leqq \dim \mathscr{G}$.

Důkaz: Budeme předpokládat, že $\mathscr{H}$ je separabilní (o obecném případu pojednává např. [[We]], Theorem 3.11). Pro $\dim \mathscr{G} = \infty$ je tvrzení triviální; nechť tedy $\dim \mathscr{G} = n$ a $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je ortonormální báze v $\mathscr{G}$. Kdyby $\dim \mathscr{F} > n$, existovala by v $\mathscr{F}$ ortonormální množina $\{f_1, \ldots, f_{n+1}\}$ a nenulový vektor $x \equiv \sum_{j=1}^{n+1} c_j f_j$ ortogonální ke $\mathscr{G}$ (neboť soustava rovnic $(e_k, x) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$ pro neznámé $c_1, \ldots, c_{n+1}$ má vždy netriviální řešení), což je spor. ■

5.4.8 Tvrzení: Jestliže projektory E, F na $\mathscr{H}$ splňují podmínku $\|E - F\| < 1$, potom $\dim \operatorname{Ran} E = \dim \operatorname{Ran} F$ a $\dim \operatorname{Ker} E = \dim \operatorname{Ker} F$.

Důkaz se snadno provede pomocí výsledku cvičení 24 a lemmatu 7.

Na závěr vyšetříme některé vlastnosti nekonečných množin projektorů. Začneme s posloupnostmi. Jelikož pro každý projektor platí $0 \leqq E \leqq I$, konverguje libovolná monotónní posloupnost projektorů vzhledem k silné operátorové topologii k jistému hermitovskému operátoru, $E_n \xrightarrow{s} E$. Pro operátor E dále z podmínek $E_n^2 = E_n$ plyne $E^2 = E$, tj. E je projektor. Je-li posloupnost $\{E_n\}$ neklesající, platí $E_n \leqq E$; pomocí tvrzení 4b a uzavřenosti podprostoru Ran E odtud dostáváme $\overline{\bigcup_n \operatorname{Ran} E_n} \subset \operatorname{Ran} E$; naopak podmínka $x = Ex$ znamená $x = \operatorname*{s\text{-}lim}_{n\to\infty} E_n x$, tj. $x \in \overline{\bigcup_n \operatorname{Ran} E_n}$, takže $\operatorname{Ran} E = \overline{\bigcup_n \operatorname{Ran} E_n}$. Analogickými úvahami zjistíme, že pro nerostoucí posloupnost $\{E_n\}$ platí $\operatorname{Ran} E = \bigcap_n \operatorname{Ran} E_n$. Shrneme získané výsledky.

 5.4.9 Věta: Ke každé monotónní posloupnosti projektorů $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ existuje projektor $E \equiv s\text{-}\lim_{n\to\infty} E_n$, přičemž pro nerostoucí posloupnost platí $\operatorname{Ran} E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ran} E_n$ a pro neklesající $\operatorname{Ran} E = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ran} E_n}$.

Nechť $\{E^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající posloupnost projektorů; položíme-li $E_1 := E^{(1)}$, $E_{n+1} := E^{(n+1)} - E^{(n)}$, $n=1,2,\ldots$, zjistíme pomocí tvrzení 4b, že $\{E_j : j=1,2,\ldots\}$ je množina navzájem ortogonálních projektorů. Ze vztahu $E^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} E_j$ plyne

$$\operatorname{Ran} E^{(n)} = \sum_{j=1}^{n}{}^{\oplus} \operatorname{Ran} E_j$$

(tvrzení 4a); dále se snadno ověří, že pro algebraický součet podprostorů $\operatorname{Ran} E_j$ platí

$$\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Ran} E_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ran} E^{(n)}$$

(viz § 4.5). Užijeme-li ještě rovnosti (4.5.1), vidíme, že

$$E := s\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} E_j \equiv \sum_{j=1}^{\infty} E_j \tag{5a}$$

je projektor na ortogonální součet podprostorů $\operatorname{Ran} E_j$, tj.

$$\operatorname{Ran} E = \sum_{j=1}^{\infty}{}^{\oplus} \operatorname{Ran} E_j . \tag{5b}$$

Tento vztah je východiskem pro definici součtu systému $\{E_\alpha : \alpha \in I\}$ vzájemně ortogonálních projektorů libovolné mohutnosti. Nechť E je projektor na podprostor $\sum_{\alpha\in I}^{\oplus} \operatorname{Ran} E_\alpha$ (viz cvičení 4.19); potom definujeme $\sum_{\alpha\in I} E_\alpha := E$. Jestliže speciálně $E = I$, říkáme, že $\{E_\alpha : \alpha \in I\}$ je *úplný systém projektorů*. Projektor $\sum_{\alpha\in I} E_\alpha$ můžeme vyjádřit jako limitu usměrněného souboru, což představuje přímé zobecnění formule (5a).

5.4.10 Tvrzení: Jestliže $\{E_\alpha : \alpha \in I\}$ je systém navzájem ortogonálních projektorů, potom pro každé $x \in \mathscr{H}$ platí

$$\sum_{\alpha\in I} E_\alpha x = \lim_{K\in\mathscr{S}} E_K x , \tag{6}$$

kde $\mathscr{S} \equiv \{K \subset I : K \text{ konečná}\}$ je usměrněná množina a $E_K := \sum_{\alpha\in I} E_\alpha$.

Důkaz si čtenář snadno provede sám za pomoci tvrzení 4b a cvičení 4.19. ∎

5.5 UNITÁRNÍ A IZOMETRICKÉ OPERÁTORY

Unitárním operátorem na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ nazveme každý izomorfismus $U\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$. Unitární operátor tedy splňuje podmínky $D_U = \operatorname{Ran} U = \mathscr{H}$ a $\|Ux\| = \|x\|$ pro všechna $x \in \mathscr{H}$. Užívají se také dvě další definice.

5.5.1 Tvrzení: Následující podmínky jsou ekvivalentní:

(a) U je unitární operátor na $\mathscr{H}$,

(b) zobrazení $U\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ je surjektivní a pro všechna $x, y \in \mathscr{H}$ platí $(Ux, Uy) = (x, y)$,

(c) U je omezený lineární operátor definovaný na celém $\mathscr{H}$ a platí $U^{-1} = U^*$.

Důkaz se snadno provede pomocí příslušných definic a polarizační formule (viz též cvičení 27).

5.5.2 Poznámka: Názvu unitární operátor se někdy užívá i pro izomorfismy různých Hilbertových prostorů, tj. pro operátory $V \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ splňující $\operatorname{Ran} V = \mathscr{H}_2$ a $\|Vx\|_2 = \|x\|_1$ pro všechna $x \in \mathscr{H}_1$; to je opět ekvivalentní požadavku, aby V bylo surjektivní zobrazení prostoru $\mathscr{H}_1$ na $\mathscr{H}_2$ splňující $(Vx, Vy)_2 = (x, y)_1$ pro všechna $x, y \in \mathscr{H}_1$.

5.5.3 Příklad: Na prostoru $L^2(\mathbb{R}^n)$ existuje třída unitárních operátorů, které mají jednoduchou funkcionální realizaci. Každý prvek této třídy se dostane pomocí spojité bijekce $\varphi \equiv [\varphi_1, \dots, \varphi_n]\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, která splňuje následující podmínky:

(i) každá z funkcí $\varphi_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má na $\mathbb{R}^n$ spojité parciální derivace $\partial_k \varphi_j \equiv \equiv \partial\varphi_j/\partial x_k$, $k = 1, 2, \dots, n$;

(ii) Jacobiho determinant zobrazení φ, tj. funkce $x \mapsto D_\varphi(x)$, kde $(D_\varphi(x))_{jk} := = (\partial_k \varphi_j)(x)$, nemá v $\mathbb{R}^n$ žádný nulový bod a existují kladná a, b taková, že pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ platí

$$b \leqq |D_\varphi(x)| \leqq a\,. \tag{1}$$

Množinu všech takových bijekcí označíme Φ. Každý její prvek je tedy regulární zobrazení $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^n$ (viz § A.7), který navíc splňuje podmínku (1). To mj. znamená, že pro ně platí věta o substituci, která má pro každé $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tvar

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\, d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} |f(\varphi(x))|^2\, |D_\varphi(x)|\, d^n x\,, \tag{2}$$

a že $\psi \equiv \varphi^{-1}$ je rovněž regulární. Ze vztahu $D_\varphi(\psi(x))\, D_\psi(x) = 1$ potom plyne, že i φ^{-1} patří do Φ.

Nechť $\varphi \in \Phi$; definujme „dosazovací“ operátor S_φ na podprostoru $D(S_\varphi)$ všech $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, pro něž $f \circ \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, vztahem $S_\varphi f := f \circ \varphi$, tj. v explicitním tvaru

$$(S_\varphi f)(x_1, \dots, x_n) := f(\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n)) .$$

Z formule (2) plyne, že pro každé $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ je $|f \circ \varphi|^2 \, |D_\varphi|$ měřitelná funkce; vzhledem ke spojitosti funkce $x \mapsto (D_\varphi(x))^{-1}$ je měřitelná i $|f \circ \varphi|^2$ a pomocí vztahů (1), (2) dostaneme

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(\varphi(x))|^2 \, |D_\varphi(x)| \, \mathrm{d}^n x \geqq b \int_{\mathbb{R}^n} |f(\varphi(x))|^2 \, \mathrm{d}^n x .$$

Vidíme tedy, že $D(S_\varphi) = L^2(\mathbb{R}^n)$ a že S_φ je omezený. Operátory S_φ a S_ψ, kde $\psi = \varphi^{-1}$, kromě toho splňují $S_\varphi S_\psi = I$, takže

$$\operatorname{Ran} S_\varphi = L^2(\mathbb{R}^n) . \tag{3a}$$

Uvažujme dále operátor T_D násobení funkcí $|D_\varphi|^{1/2}$: $(T_D f)(x) := |D_\varphi(x)|^{1/2} f(x)$. Z nerovností (1) je patrné, že T_D je omezený a invertibilní, přičemž $(T_D^{-1} f)(x) = |D_\varphi(x)|^{-1/2} f(x)$; odtud plyne

$$\operatorname{Ran} T_D = L^2(\mathbb{R}^n) . \tag{3b}$$

Akce operátoru $U_\varphi := T_D S_\varphi$ na libovolné $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ je dána vztahem

$$(U_\varphi f)(x) = |D_\varphi(x)|^{1/2} (f \circ \varphi)(x) , \tag{4}$$

z nějž vyplývá zachování normy:

$$\| U_\varphi f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |D_\varphi(x)| \, |f(\varphi(x))|^2 \, \mathrm{d}^n x = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}^n x = \|f\|^2 .$$

Konečně ze vztahů (3a, b) je vidět, že $\operatorname{Ran} U_\varphi = L^2(\mathbb{R}^n)$; *operátor U_φ je tedy unitární.*

Důležitým speciálním případem je *operátor zrcadlení* (parity) $R := U_{\varphi_R}$, kde $\varphi_R(x) := -x$, $x \in \mathbb{R}^n$. Jelikož $|D_{\varphi_R}(x)| = 1$, dostáváme

$$(Rf)(x) = f(-x) ;$$

odtud vyplývá vztah $R^2 = I$, tj. $R^{-1} = R$. Operátor R je proto současně unitární i hermitovský (viz cvičení 27). O některých dalších vlastnostech operátorů U pojednává cvičení 32.

Často se setkáme s úlohou sestrojit unitární operátor na $\mathscr{H}$ jako rozšíření zobrazení, které je definováno na jisté množině v $\mathscr{H}$ a zachovává normu, resp. skalární součin (srv. důkaz věty 4.2.10). Taková úloha nemusí mít vždy řešení (cvičení 29); existují však jednoduché podmínky, které zaručují nejen existenci řešení, ale i jeho jednoznačnost.

5.5.4 Tvrzení: Nechť U_0 je hustě definovaný lineární operátor na $\mathscr{H}$, tj. $\overline{D(U_0)} = \mathscr{H}$, splňující $\overline{\operatorname{Ran} U_0} = \mathscr{H}$ a $\|U_0x\| = \|x\|$ pro všechna $x \in D(U_0)$. Potom existuje právě jeden unitární operátor U takový, že $U \upharpoonright D(U_0) = U_0$.

Důkaz: Operátor U_0 je omezený, $\|U_0\| = 1$; podle věty 3.2.4 existuje jednoznačně určené $U \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ splňující $U \upharpoonright D(U_0) = U_0$ a $\|Ux\| \leqq \|x\|$ pro všechna $x \in \mathscr{H}$. Dále ukážeme, že libovolné $y \in \mathscr{H}$ lze zapsat ve tvaru $y = Ux$. V důsledku podmínky $\overline{\operatorname{Ran} U_0} = \mathscr{H}$ existuje posloupnost $\{x_n\} \subset \mathscr{H}$ taková, že $U_0x_n \to y$. Jelikož $\|U_0x_n - U_0x_m\| = \|x_n - x_m\|$, je $\{x_n\}$ cauchyovská, $x_n \to x$, a potom $y = \lim_{n\to\infty} U_0x_n = Ux$. Konečně platí $\|Ux\| = \lim_{n\to\infty} \|U_0x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$. ■

5.5.5 Důsledek: Nechť $M \subset \mathscr{H}$ je totální lineárně nezávislá množina a nechť $V: M \to \mathscr{H}$ je zobrazení takové, že VM je rovněž totální množina a $(Vx, Vy) = (x, y)$ pro všechna $x, y \in M$. Potom existuje právě jeden unitární operátor U splňující $U \upharpoonright M = V$.

Důkaz: Díky lineární nezávislosti množiny M určuje zobrazení V jednoznačně své lineární rozšíření; o něm se snadno ukáže, že splňuje předpoklady tvrzení 4. ■

Lineární operátor V na $\mathscr{H}$ se nazývá **izometrickým operátorem**, jestliže jeho definiční obor D_V je uzavřený podprostor v $\mathscr{H}$ a $\|Vx\| = \|x\|$ pro všechna $x \in D_V$. Z této definice bezprostředně vyplývají následující vlastnosti izometrických operátorů.

5.5.6 Tvrzení: Jestliže V je izometrický operátor na $\mathscr{H}$, potom

(a) $\operatorname{Ran} V$ je uzavřený podprostor v $\mathscr{H}$,

(b) $(Vx, Vy) = (x, y)$ pro všechna $x, y \in D_V$,

(c) operátor V^{-1} existuje a je izometrický.

Každý unitární operátor $U: \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ je izometrický. Příkladem izometrického operátoru, který není unitární, je operátor S pravého posunutí z příkladu 5.1.7, pro nějž $D_S = \mathscr{H}$ a $\operatorname{Ran} S = \{e_1\}^\perp$, nebo operátory $E_{xy} := P_{xy} \upharpoonright \{y\}_{\text{lin}}$ (viz cvičení 6), kde x, y jsou libovolné jednotkové vektory. Každý izometrický operátor V můžeme ovšem chápat jako prvek prostoru $\mathscr{B}(D_V, \operatorname{Ran} V)$; potom je V unitární ve smyslu poznámky 2.

Daný izometrický operátor V můžeme rozšířit na operátor W definovaný na celém $\mathscr{H}$ tak, že položíme $Wx := 0$ pro všechna $x \in D_V^\perp$ (tvrzení 5.1.2). Dospíváme tak k následujícímu pojmu: operátor $W \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ nazýváme **parciální (částečnou) izometrií,** jestliže jeho zúžení $V_W := W \upharpoonright (\operatorname{Ker} W)^\perp$ je izometrický operátor.[1]) Je zřejmé, že každý izometrický operátor V určuje právě jednu částečnou izometrii W splňující $V_W = V$.

Obory hodnot operátorů W a V_W jsou totožné, takže $\mathrm{Ran}\, W$ je uzavřený podprostor, který se nazývá **koncovým podprostorem** parciální izometrie W; **počátečním podprostorem** se nazývá uzavřený podprostor $(\mathrm{Ker}\, W)^{\perp}$, který budeme značit též $\mathscr{I}(W)$.

Každý projektor E je zřejmě parciální izometrií, přičemž $\mathscr{I}(E) = \mathrm{Ran}\, E = E\mathscr{H}$. Jako další příklady parciálních izometrií lze uvést operátory pravého a levého posunutí S, S^*, pro něž platí $\mathscr{I}(S) = \mathrm{Ran}\, S^* = \mathscr{H}$, resp. $\mathscr{I}(S^*) = \mathrm{Ran}\, S = \{e_1\}^{\perp}$, nebo operátory P_{xy} ze cvičení 6 pro $\|x\| = \|y\| = 1$ splňující $\mathscr{I}(P_{xy}) = \{y\}_{\mathrm{lin}}$ a $\mathrm{Ran}\, P_{xy} = \{x\}_{\mathrm{lin}}$.

Jestliže $\mathrm{Ker}\, W \neq 0$, neexistuje k parciální izometrii W inverzní operátor; nahrazuje jej však operátor W^* v následujícím smyslu. Nechť E_{i}, E_{f} jsou projektory na podprostory $\mathscr{I}(W)$, $\mathrm{Ran}\, W$. Pro libovolná $x, y \in \mathscr{H}$ máme $(Wx, y) = (V_W E_{\mathrm{i}} x, E_{\mathrm{f}} y) = (E_{\mathrm{i}} x, V_W^{-1} E_{\mathrm{f}} y) = (x, V_W^{-1} E_{\mathrm{f}} y)$, a proto $W^* = V_W^{-1} E_{\mathrm{f}}$. Dále z lemmatu 5.1.8 dostáváme $(\mathrm{Ker}\, W^*)^{\perp} = \mathrm{Ran}\, W = E_{\mathrm{f}}\mathscr{H}$, takže $W^* \upharpoonright (\mathrm{Ker}\, W^*)^{\perp} = V_W^{-1}$; získali jsme tak následující tvrzení.

5.5.7 Věta: Operátor sdružený s parciální izometrií W je rovněž parciální izometrie, přičemž $\mathscr{I}(W^*) = \mathrm{Ran}\, W$, $\mathrm{Ran}\, W^* = \mathscr{I}(W)$ a pro izometrické operátory V_W, V_{W^*} platí $V_{W^*} = V_W^{-1}$.

5.5.8 Důsledek: Operátory W^*W, resp. WW^* jsou projektory na počáteční, resp. koncový podprostor parciální izometrie W.

Důkaz: Libovolné $x \in \mathscr{H}$ zapíšeme ve tvaru $x = E_{\mathrm{i}} x + (I - E_{\mathrm{i}})\, x$. Platí $W^*Wx = W^* V_W E_{\mathrm{i}} x = V_W^{-1} V_W E_{\mathrm{i}} x = E_{\mathrm{i}} x$, takže $W^*W = E_{\mathrm{i}}$. Potom $WW^* = (W^*)^* W^*$ je projektor na $\mathscr{I}(W^*) = \mathrm{Ran}\, W$. ■

Nakonec se zmíníme o tzv. polárním rozkladu daného operátoru $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Jde o analogii vyjádření komplexního čísla ve tvaru $z = |z|\, e^{\mathrm{i}\arg z}$, v níž nezápornému číslu $|z|$ odpovídá pozitivní operátor $|B| \equiv \sqrt{B^*B}$. Chceme tedy najít operátorovou analogii W komplexního čísla $e^{\mathrm{i}\arg z}$ tak, aby pro každé $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ platilo $B = |B|\, W$ nebo $B = W|B|$. Operátor W nemůže být obecně unitární, protože např. pro operátor pravého posunutí S máme $S^*S = I$, tj. $|S| = I$, a příslušný operátor W musí být proto roven S, což není unitární operátor; je to však parciální izometrie. Dále se snadno přesvědčíme o tom, že hledaný polární rozklad nemůže mít v obecném případě tvar $B = |B|\, W$; např. pro operátor levého posunutí S^* platí $|S^*| = E_1$, kde E_1 je projektor na podprostor $\{e_1\}^{\perp}$, tj. $\mathrm{Ran}\, |S^*|\, W \subset \{e_1\}^{\perp}$, zatímco $\mathrm{Ran}\, S^* = \mathscr{H}$.

[1]) Přívlastek „částečný“ vyjadřuje tu okolnost, že W zachovává normu jen pro část vektorů z $\mathscr{H}$ – těch, které patří do $(\mathrm{Ker}\, W)^{\perp}$.

5.5.9 Věta: (*o polárním rozkladu*): Ke každému $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ existuje právě jedna parciální izometrie W_B taková, že $B = W_B|B|$ a $\operatorname{Ker} W_B = \operatorname{Ker} B$. Dále platí $\operatorname{Ran} W_B = \overline{\operatorname{Ran} B}$.

Důkaz: Definujeme W_0: $\operatorname{Ran}|B| \to \operatorname{Ran} B$ pro $y \equiv |B|\,x$ vztahem

$$W_0 y := Bx\,. \tag{5}$$

Vzhledem k tomu, že $|B|$ obecně nemusí být invertibilní, je třeba ověřit, zda tímto vztahem je definováno zobrazení, tj. zda každému $y \in \operatorname{Ran}|B|$ je přiřazen jediný vektor (tím bude současně zaručeno, že W_0 je lineární operátor na $\mathscr{H}$). To je však důsledkem rovnosti $\|Bx\| = \|\,|B|\,x\|$ (cvičení 19), z níž dále vyplývá, že operátor W_0 zachovává normu. Jeho spojité rozšíření je proto izometrický operátor, který zobrazuje podprostor $\overline{\operatorname{Ran}|B|} = (\operatorname{Ker}|B|)^{\perp} = (\operatorname{Ker} B)^{\perp}$ na $\overline{\operatorname{Ran} B}$, a ze vztahu (5) je vidět, že pro odpovídající parciální izometrii, kterou označíme W_B, věta platí.

K ověření jednoznačnosti uvažujme libovolnou parciální izometrii W splňující $\operatorname{Ker} W = \operatorname{Ker} B$ a $B = W|B|$, takže

$$(W_B - W)\,|B| = 0\,. \tag{6}$$

Ukážeme, že pro každé $x \in \mathscr{H}$ platí $(W_B - W)\,x = 0$. Pomocí rozkladu $x = y + z$, kde $y \in \operatorname{Ker} B$ a $z \in (\operatorname{Ker} B)^{\perp} = \overline{\operatorname{Ran}|B|}$, dostáváme $(W_B - W)\,x = (W_B - W)\,z = \lim_{n\to\infty} (W_B - W)\,|B|\,v_n$, kde $|B|\,v_n \to z$. Podle (6) je $(W_B - W)\,|B|\,v_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, takže $(W_B - W)\,x = 0$. ■

5.5.10 Poznámka: Polární rozklad hermitovských operátorů má některé speciální vlastnosti. Jestliže $A = A^*$ a $A = W|A|$, potom

$$W^* = W\,, \qquad W|A| = |A|\,W\,.$$

Dokážeme nejprve, že první rovnost plyne z druhé: jestliže $A = W|A| = |A|\,W$, potom z podmínky $A^* = A$ dostáváme $A = W^*|A|$; dále W^* je parciální izometrie s počátečním podprostorem $\operatorname{Ran} W = \overline{\operatorname{Ran} A} = (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$, což dává pro $\operatorname{Ker} W^* = (\operatorname{Ran} W)^{\perp}$ vyjádření $\operatorname{Ker} W^* = \operatorname{Ker} A$, a z jednoznačnosti polárního rozkladu potom plyne $W^* = W$. Stačí tedy ověřit rovnost $W|A| = |A|\,W$; vzhledem k tomu, že $|A| = (A^2)^{1/2}$, je tato rovnost ekvivalentní podmínce $WA^2 = A^2 W$ (viz (5.3.9)). Z hermitovosti plyne $A = |A|\,W^*$ a odtud

$$A^2 = W|A|^2\,W^* = WA^2W^*\,. \tag{7}$$

Dále W^*W je projektor na podprostor $(\operatorname{Ker} A)^{\perp}$, a proto $A = AW^*W$ (cvičení 23); vynásobíme-li tedy (7) zprava operátorem W, dostáváme $A^2 W = WA^2$.

Z lineární algebry je známo, že k danému lineárnímu operátoru B na konečně-dimenzionálním Hilbertově prostoru $\mathscr{H}_n$ existuje ortonormální báze tvořená jeho vlastními vektory právě tehdy, když B komutuje s B^*. Operátory na $\mathscr{H}_n$ s touto vlastností, tzv. normální operátory, mají tedy velmi jednoduché spektrální vlastnosti. Nyní tento pojem zobecníme pro omezené operátory na Hilbertových prostorech nekonečné dimenze; další zobecnění uvedeme v kapitole 7. Budeme užívat označení z § 3.6.

Operátor $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je **normální**, jestliže $B^*B = BB^*$. Množinu všech omezených normálních operátorů na $\mathscr{H}$ označíme $\mathscr{N}(\mathscr{H})$. Je zřejmé, že $\mathscr{N}(\mathscr{H})$ obsahuje reálný podprostor hermitovských operátorů a grupu $\mathscr{U}(\mathscr{H})$ unitárních operátorů; celá množina $\mathscr{N}(\mathscr{H})$ však není podprostor ani grupa.

5.6.1 Tvrzení: Následující podmínky jsou ekvivalentní:
(a) $B \in \mathscr{N}(\mathscr{H})$,
(b) $B^* \in \mathscr{N}(\mathscr{H})$,
(c) operátory $\operatorname{Re} B$, $\operatorname{Im} B$ komutují,
(d) $\|(B - \lambda)x\| = \|(B^* - \bar{\lambda})x\|$ pro všechna $x \in \mathscr{H}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.
Důkaz přenecháváme čtenáři.

Z podmínky (d) vyplývají dvě důležité vlastnosti operátorů $B \in \mathscr{N}(\mathscr{H})$. Za prvé pro množiny vlastních hodnot operátorů B, B^* platí

$$\lambda \in \sigma_p(B) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_p(B^*) ; \tag{1a}$$

speciálně $\sigma_p(B) = \emptyset$ právě tehdy, když $\sigma_p(B^*) = \emptyset$. Za druhé, nechť $\lambda \in \sigma_p(B)$; potom pro příslušný vlastní podprostor platí

$$\operatorname{Ker}(B - \lambda) = \operatorname{Ker}(B^* - \bar{\lambda}) . \tag{1b}$$

Odtud snadno zjistíme, že řada vlastností normálních operátorů na prostorech konečné dimenze zůstává zachována i pro $\dim \mathscr{H} = \infty$.

5.6.2 Věta: Nechť $B \in \mathscr{N}(\mathscr{H})$.
(a) Jestliže $\lambda, \mu \in \sigma_p(B)$, $\lambda \neq \mu$, potom $\operatorname{Ker}(B - \lambda) \perp \operatorname{Ker}(B - \mu)$.
(b) Podprostor $\operatorname{Ker}(B - \lambda)^\perp$ je B-invariantní pro každé $\lambda \in \sigma_p(B)$.
(c) Reziduální spektrum operátoru B je prázdné.
Důkaz: Tvrzení (a) a (b) bezprostředně plynou ze vztahů (1a, b). (c) Jestliže $\lambda \in \sigma_r(B)$, tj. $\operatorname{Ran}(B - \lambda)^\perp \neq \{O\}$, je $\bar{\lambda}$ vlastní hodnotou operátoru B^* (viz lemma 5.1.8) a potom podle (1a) platí $\lambda \in \sigma_p(B)$, což je spor. ■

5.6.3 Věta: Množina $\varrho(B)$ regulárních hodnot každého $B \in \mathscr{N}(\mathscr{H})$ je totožná s jeho oblastí regularity, tj. $\lambda \in \varrho(B)$ právě tehdy, když existuje $c(\lambda) > 0$ takové, že pro všechna $x \in \mathscr{H}$ platí

$$\|(B - \lambda)\, x\| \geqq c(\lambda)\, \|x\| \,. \tag{2}$$

Důkaz: Jestliže $\lambda \in \varrho(B)$, je podmínka (2) splněna pro $c(\lambda) = \|R_B(\lambda)\|^{-1}$: to plyne ze vztahu $\|y\| \geqq \|R_B(\lambda)\|^{-1}\, \|R_B(\lambda)\, y\|$ a toho, že každé $y \in \mathscr{H}$ lze zapsat ve tvaru $y = (B - \lambda)\, x$. Naopak z podmínky (2) vyplývá $\mathrm{Ker}\,(B - \lambda) = \{0\}$, takže existuje operátor $(B - \lambda)^{-1}$. Pomocí vztahu (1b) dostaneme $\mathrm{Ker}\,(B^* - \bar{\lambda}) = \{0\}$, tj. $\overline{\mathrm{Ran}\,(B - \lambda)} = \mathscr{H}$ (lemma 5.1.8), a zbývá dokázat, že podprostor $\mathrm{Ran}\,(B - \lambda)$ je uzavřený. Nechť posloupnost $\{y_n\} \subset \mathrm{Ran}\,(B - \lambda)$ konverguje k y; potom existuje $\{x_n\} \subset \mathscr{H}$, splňující $y_n = (B - \lambda)\, x_n$, $n = 1, 2, \ldots$ a z nerovnosti (2) vyplývá, že $\{x_n\}$ je cauchyovská. Potom pro $x \equiv \lim_{n\to\infty} x_n$, dostáváme užitím spojitosti $(B - \lambda)\, x = y$. ■

5.6.4 Důsledek: (a) Nechť $B \in \mathscr{N}(\mathscr{H})$; potom $\lambda \in \sigma(B)$ právě tehdy, když $\inf\{\|(B - \lambda)\, x\|\colon x \in \mathscr{H},\ \|x\| = 1\} = 0$, tj. když existuje posloupnost $\{x_n\} \subset \mathscr{H}$ jednotkových vektorů taková, že $(B - \lambda)\, x_n \to 0$.
(b) Spektrum unitárního, resp. hermitovského operátoru leží celé na kružnici $|\lambda| = 1$, resp. na reálné ose.
Důkaz: Tvrzení (a) je zřejmé; první část (b) je ekvivalentní tomu, že unitární operátor U splňuje podmínku (2), jakmile $|\lambda| \neq 1$, což je snadný důsledek unitarity:

$$\|(U - \lambda)\, x\|^2 = \|Ux\|^2 + |\lambda|^2\, \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(Ux, \lambda x) \geqq$$
$$\geqq (1 + |\lambda|^2)\, \|x\|^2 - 2|\lambda|\, \|x\|^2 = (1 - |\lambda|)^2\, \|x\|^2 \,.$$

Je-li A hermitovský, dostáváme pro každé $\lambda \equiv \lambda_1 + i\lambda_2$ vztah

$$\|(A - \lambda)\, x\|^2 = \|(A - \lambda_1)\, x\|^2 + |\lambda_2|^2\, \|x\|^2 \geqq |\lambda_2|^2\, \|x\|^2 \,, \tag{3}$$

takže $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \varrho(A)$ neboli $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. ■

Spektrum hermitovského operátoru lze dále lokalizovat (srv. s komentářem k § 5.3 o vztahu spektra a číselného oboru hodnot):

5.6.5 Tvrzení: Spektrum hermitovského operátoru A je podmnožinou intervalu $[m, M]$, jehož hraniční body jsou dolní a horní hranice operátoru A, přičemž m, M patří do $\sigma(A)$.
Důkaz: Vzhledem k tomu, že $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, je tvrzení $\sigma(A) \subset [m, M]$ ekvivalentní podmínce $(-\infty, m) \cup (M, +\infty) \subset \varrho(A)$. Jestliže např. $\lambda \in (M, +\infty)$, pak pro všechna $x \in \mathscr{H}$, $\|x\| = 1$, platí podle definice horní hranice $(x, (\lambda - A)\, x) \geqq \lambda - M$ a odtud $\|(A - \lambda)\, x\| \geqq |((A - \lambda)\, x, x)| \geqq \lambda - M$; z věty 3 pak plyne $\lambda \in \varrho(A)$. Ověříme dále, že $m \in \sigma(A)$; k tomu účelu aplikujeme na

pozitivní operátor $A - m$ nerovnost (5.3.4), v níž x bude libovolný jednotkový vektor a $y = (A - m)\,x$. Dostaneme tak vztah

$$\|(A - m)\,x\|^4 \leqq (x, (A - m)\,x)\,\|A - m\|\,\|(A - m)\,x\|^2$$

a z definice dolní hranice potom plyne

$$\inf\{\|(A - m)\,x\|^2 \colon x \in \mathscr{H},\ \|x\| = 1\} \leqq$$

$$\leqq \|A - m\|\,[\inf\{(x, Ax) \colon x \in \mathscr{H},\ \|x\| = 1\} - m] = 0\,.$$

Stejně se ověří, že $M \in \sigma(A)$. ■

5.6.6 Příklady: (a) Uvažujme jakýkoliv projektor E různý od 0, I. Je zřejmé, že $m_E = 0$ a $M_E = 1$, takže $\sigma(E) \subset [0, 1]$. Jestliže $0 < \lambda < 1$, potom

$$\|(E - \lambda)\,x\|^2 = \|(1 - \lambda)\,Ex - \lambda(I - E)\,x\|^2 =$$

$$= \|(1 - \lambda)\,Ex\|^2 + \|\lambda(I - E)\,x\|^2 \geqq \min\{(1 - \lambda)^2, \lambda^2\}\,\|x\|^2\,,$$

takže $\lambda \notin \sigma(E)$. Spektrum každého netriviálního projektoru tedy obsahuje jen čísla 0 a 1.

(b) Najdeme spektrum hermitovského operátoru Q násobení nezávisle proměnnou na prostoru $L^2(a, b)$, kde $b - a < \infty$. V příkladu 5.3.2 jsme ukázali, že $m_Q = a$, $M_Q = b$. Pro libovolné $\lambda \in (a, b)$ položíme $f_n := n^{1/2}\chi_{I_n}$, kde $I_n \equiv$ $\equiv (\lambda, \lambda + 1/n) \cap (a, b)$; potom pro všechna dosti velká n je $\|f_n\| = 1$ a

$$\|(Q - \lambda)\,f_n\|^2 = n \int_0^{1/n} x^2\,dx = \frac{1}{3n^2} \to 0\,,$$

což znamená, že $\sigma(Q) = [a, b]$. Přitom Q nemá žádné vlastní hodnoty (ověřte), a vzhledem k tomu, že $\sigma_r(Q) = \emptyset$ (viz větu 2), platí $\sigma(Q) = \sigma_c(Q)$.

Jak jsme uvedli na začátku, v případě $\dim \mathscr{H} < \infty$ je nutnou a postačující podmínkou pro to, aby daný lineární operátor B byl normální, existence ortonormální báze tvořené jeho vlastními vektory. Jestliže $\dim \mathscr{H} = \infty$, zůstává tato podmínka postačující (viz níže), ale není již nutná: existují normální operátory, které nemají dokonce vůbec žádné vlastní vektory (viz operátor Q z předchozího příkladu). V této souvislosti je užitečné zavést pojem omezeného operátoru s *čistě bodovým spektrem*: nazveme tak každý operátor $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, jehož vlastní vektory tvoří ortonormální bázi v $\mathscr{H}$. Triviálním příkladem je každý projektor. Jestliže $\dim \mathscr{H} < \infty$, je množina operátorů s čistě bodovým spektrem totožná s $\mathscr{N}(\mathscr{H})$; pro $\dim \mathscr{H} = \infty$ to neplatí. Následující věta udává základní charakteristiku operátorů s čistě bodovým spektrem na libovolném $\mathscr{H}$; je z ní patrný též původ názvu této třídy.

5.6.7 Věta: Každý operátor $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ s čistě bodovým spektrem je normální a platí $\sigma(B) = \overline{\sigma_p(B)}$.

Důkaz: Nechť $\mathscr{E}_B \equiv \{e_\alpha : \alpha \in I\}$ je ortonormální báze v $\mathscr{H}$ taková, že $Be_\alpha = \lambda_\alpha e_\alpha$ pro všechna $e_\alpha \in \mathscr{E}_B$. Přenecháme čtenáři, aby ověřil, že

$$B^* e_\alpha = \bar{\lambda}_\alpha e_\alpha ; \tag{4}$$

odtud ihned plyne, že B je normální. Pokud jde o druhé tvrzení věty, vzhledem k inkluzi $\sigma_p(B) \subset \sigma(B)$ a uzavřenosti spektra stačí dokázat, že $\sigma(B) \subset \overline{\sigma_p(B)}$. Předpokládejme, že $\lambda \notin \overline{\sigma_p(B)}$, takže $|\lambda - \lambda_\alpha| \geqq \delta$ pro nějaké $\delta > 0$ a všechna $\lambda_\alpha \in \sigma_p(B)$. Pro libovolné $x \in \mathscr{H}$ nechť $I_x \equiv \{\alpha_j : j = 1, 2, \ldots\}$ je nejvýše spočetná množina taková, že $(e_\alpha, x) = (e_\alpha, Bx) = 0$ pro $\alpha \notin I_x$ (viz tvrzení 4.2.8). Pomocí (4) dostáváme

$$\|(B - \lambda)\, x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(e_{\alpha_j}, (B - \lambda)\, x)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_{\alpha_j} - \lambda|^2\, |(e_{\alpha_j}, x)|^2 \geqq \delta^2 \|x\|^2 ;$$

z věty 3 potom plyne $\lambda \notin \sigma(B)$. ■

5.6.8 Příklad: Každé omezené posloupnosti $s \equiv \{\lambda_j\} \subset \mathbb{C}$ lze přiřadit omezený operátor s čistě bodovým spektrem na separabilním $\mathscr{H}$. Nechť $\mathscr{E} \equiv \{e_j\}$ je ortonormální báze v $\mathscr{H}$; definujme lineární operátor B_s na $\mathscr{E}_{\text{lin}}$ pomocí $B_s e_j := \lambda_j e_j$ a lineárního rozšíření. Pro všechna $x \in \mathscr{E}_{\text{lin}}$ platí $\|B_s x\|^2 \leqq \sup_j |\lambda_j|^2\, \|x\|^2$, takže B_s je omezený a $\|B_s\| = \sup_j |\lambda_j|$. Spojitým rozšířením dostaneme omezený operátor s čistě bodovým spektrem.

5.7 TENZOROVÝ SOUČIN OMEZENÝCH OPERÁTORŮ

V tomto paragrafu ukážeme, že každé n-tici omezených operátorů B_r na $\mathscr{H}_r$, $r = 1, 2, \ldots, n$, je přirozeným způsobem přiřazen omezený operátor $B_1 \otimes B_2 \otimes \ldots \otimes B_n$ na $\mathscr{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}_n$, který nazýváme tenzorovým součinem operátorů $B_1, \ldots, B_n$, a vyšetříme některé jeho vlastnosti. Budeme užívat označení zavedeného v § 4.6, které doplníme o symbol

$$\mathscr{H}_{12} := \{x \otimes y : x \in \mathscr{H}_1,\ y \in \mathscr{H}_2\}, \tag{1}$$

takže $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2 = (\mathscr{H}_{12})_{\text{lin}}$. Prvky prostoru $\mathscr{B}(\mathscr{H}_r)$ a jejich normu značíme příslušným dolním indexem a pro tenzorový součin operátorů užíváme kromě explicitního zápisu $B_1 \otimes \ldots \otimes B_n$ též jediného symbolu vytištěného tučně; speciálně $\boldsymbol{B}_r$ znamená tenzorový součin operátoru $B_r \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_r)$ s jednotkovými operátory I_s na prostorech $\mathscr{H}_s$, $s \neq r$; např. pro $n = 2$ máme $\mathbf{B}_1 = B_1 \otimes I_2$, $\mathbf{B}_2 = I_1 \otimes B_2$. Podobně jako v § 4.6 se budeme zabývat jen tenzorovými součiny dvojic operátorů; všechna tvrzení, která uvedeme, lze bezprostředně zobecnit pro případ tenzorového součinu libovolného konečného počtu omezených operátorů.

Pro danou dvojici operátorů $B_r \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_r)$ uvažujme zobrazení $B_{12}\colon \mathscr{H}_{12} \to \mathscr{H}_{12}$ definovaná vztahem

$$B_{12}(x \otimes y) := B_1 x \otimes B_2 y\,. \tag{2a}$$

Korektnost této definice plyne z vlastností vektorů $x \otimes y$ uvedených ve cvičení 4.22. Podobnou úvahou zjistíme, že zobrazení B_{12} lze jednoznačně rozšířit na lineární operátor $B_1 \odot B_2$ s definičním oborem $\mathscr{H}_1 \odot \mathscr{H}_2$ (viz cvičení 44). Zřejmě platí vztahy $\operatorname{Ran} B_1 \odot B_2 \subset \mathscr{H}_1 \odot \mathscr{H}_2$ a

$$B_1 \odot B_2 = \mathbf{B}_1^0 \mathbf{B}_2^0\,, \tag{2b}$$

kde $\mathbf{B}_1^0 := B_1 \odot I_2$ a $\mathbf{B}_2^0 := I_1 \odot B_2$, pomocí nichž dokážeme následující tvrzení.

5.7.1 Lemma: Operátor $B_1 \odot B_2$ je omezený, přičemž

$$\|B_1 \odot B_2\| \leqq \|B_1\|_1 \, \|B_2\|_2\,.$$

Důkaz: Vzhledem k (2b) a inkluzi $\operatorname{Ran} \mathbf{B}_2^0 \subset \mathscr{H}_1 \odot \mathscr{H}_2$, stačí dokázat, že pro libovolné $u \in \mathscr{H}_1 \odot \mathscr{H}_2$ a $r = 1, 2$ platí $\|\mathbf{B}_r^0 u\| \leqq \|B_r\|_r \, \|u\|$. Uvažujme třeba případ $r = 1$. Nechť $u = \sum_{j=1}^{N} x_j \otimes y_j$ a nechť $\{e_1, \ldots, e_n\}$, resp. $\{f_1, \ldots, f_m\}$ jsou ortonormální báze v podprostorech $\{x_1, \ldots, x_N\}_{\text{lin}} \subset \mathscr{H}_1$, resp. $\{y_1, \ldots, y_N\}_{\text{lin}} \subset \mathscr{H}_2$. Pomocí příslušných rozvojů vektorů x_j, y_j dostaneme (srv. (4.6.1)): $u = \sum_{r,s} a_{rs} e_r \otimes f_s$ a $\|\mathbf{B}_1^0 u\|^2 = \|\sum_s g_s \otimes f_s\|^2$, kde $g_s := \sum_r a_{rs} B_1 e_r$. Jelikož $\{g_s \otimes f_s\colon s = 1, \ldots, m\}$ je množina vzájemně ortogonálních vektorů, platí

$$\|\mathbf{B}_1^0 u\|^2 = \sum_s \|g_s\|_1^2 \leqq \|B_1\|_1^2 \sum_s \|\sum_r a_{rs} e_r\|_1^2 = \|B_1\|^2 \, \|u\|^2\,. \qquad \blacksquare$$

Podle věty 3.2.4 má operátor $B_1 \odot B_2$ právě jedno rozšíření $\mathbf{B} \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2)$, které nazýváme *tenzorovým součinem* omezených operátorů B_1, B_2 a značíme $B_1 \otimes B_2$. Tenzorový součin omezených operátorů tedy definitoricky patří do $\mathscr{B}(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2)$ a pro jeho normu platí (cvičení 44)

$$\|B_1 \otimes B_2\| = \|B_1\|_1 \, \|B_2\|_2\,. \tag{3}$$

5.7.2 Poznámka: Jak jsme uvedli v poznámce 4.6.3, symbolem $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ rozumíme kteroukoliv realizaci tenzorového součinu daných prostorů. Každé realizaci $\mathscr{H}$ potom odpovídá realizace operátoru $B_1 \otimes B_2$, což je jednoznačně určený omezený operátor na $\mathscr{H}$. Jsou-li $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B}'$ dvě různé realizace operátoru $B_1 \otimes B_2$ odpovídající různým realizacím $\mathscr{H}$ a $\mathscr{H}'$ tenzorového součinu $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$, pak

$$\boldsymbol{B}' = V\boldsymbol{B}V^{-1}, \tag{4}$$

kde V je izomorfizmus prostorů $\mathscr{H}$ a $\mathscr{H}'$ definovaný vztahem (4.6.2). K důkazu užijeme toho, že množina $\mathscr{H}_{12}^{(\varphi)} := \{x \otimes_\varphi y\colon x \in \mathscr{H}_1,\ y \in \mathscr{H}_2\}$ je totální v $\mathscr{H}$ a podobně $\mathscr{H}_{12}^{(\varphi')}$ je totální v $\mathscr{H}'$; vzhledem k omezenosti operátorů $\boldsymbol{B}'$ a $V\boldsymbol{B}V^{-1}$ stačí tedy ověřit, že (4) platí pro všechny vektory z $\mathscr{H}_{12}^{(\varphi)}$, což je snadný důsledek vztahů (4.6.2) a (2a).

Z rovnosti (4) plyne, že řada důležitých vlastností operátoru $B_1 \otimes B_2$ je na realizaci zcela nezávislá. Tato rovnost totiž vyjadřuje tzv. unitární ekvivalenci operátorů $\boldsymbol{B}'$ a $\boldsymbol{B}$ (viz § 7.4), a v důsledku toho mají všechny realizace operátoru $B_1 \otimes B_2$ shodná spektra, množiny vlastních hodnot včetně násobností, stejnou normu (což je patrné i přímo z formule (3)) atd.

Vzhledem k tomu, že operátor $B_1 \otimes B_2$ je jednoznačně určen pro každou dvojici $B_r \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_r)$, $r = 1, 2$, můžeme definovat zobrazení $\Phi\colon \mathscr{B}(\mathscr{H}_1) \times \mathscr{B}(\mathscr{H}_2) \to \mathscr{B}(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2)$

$$\Phi(B_1, B_2) := B_1 \otimes B_2\,. \tag{5}$$

Rovnost (3) lze nyní zapsat ve tvaru $\|\Phi(B_1, B_2)\| = \|B_1\|_1 \cdot \|B_2\|_2$; základní vlastnosti zobrazení Φ shrnuje následující věta (viz též cvičení 45).

5.7.3 Věta: Zobrazení Φ definované vztahem (5) je bilineární. Dále pro všechna $B_r, C_r \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_r)$, $r = 1, 2$, platí

$$B_1C_1 \otimes B_2C_2 = (B_1 \otimes B_2)(C_1 \otimes C_2)\,, \tag{6}$$

$$(B_1 \otimes B_2)^* = B_1^* \otimes B_2^*\,. \tag{7}$$

Důkaz: Stejně jako v případě rovnosti (4) stačí uvedená tvrzení ověřit pro vektory množiny $\mathscr{H}_{12}$. Bilinearita a vztah (6) potom přímo plynou z (2a) a bilinearity zobrazení $[x, y] \mapsto x \otimes y$. Rovnost (7) platí, jestliže

$$(x' \otimes y', (B_1 \otimes B_2)(x \otimes y)) = ((B_1^* \otimes B_2^*)(x' \otimes y'), x \otimes y)$$

pro všechna $x, x' \in \mathscr{H}_1$, $y, y' \in \mathscr{H}_2$, což je bezprostřední důsledek (2a) a axiomu (ts1). ■

5.7.4 Důsledek: Nechť operátory $B_r \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_r)$, $r = 1, 2$, jsou regulární; potom je regulární i $B_1 \otimes B_2$ a platí $(B_1 \otimes B_2)^{-1} = B_1^{-1} \otimes B_2^{-1}$.

Pomocí rovností (6), (7) se snadno přesvědčíme, že pro speciální třídy omezených operátorů, probírané v předcházejících paragrafech, platí následující tvrzení.

5.7.5 Věta: Jestliže operátory $B_r \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_r)$, $r = 1, 2$, jsou normální (unitární, hermitovské, projektory), potom operátor $B_1 \otimes B_2$ je normální (unitární, hermitovský, projektor).

5.7.6 Příklad: Nechť E_r je projektor na $\mathscr{H}_r$, $r = 1, 2$; ověříme rovnost

$$\operatorname{Ran} E_1 \otimes E_2 = \operatorname{Ran} E_1 \otimes \operatorname{Ran} E_2 . \tag{8}$$

Užijeme toho, že pro libovolný projektor E platí ekvivalence $x \in \operatorname{Ran} E \Leftrightarrow \Leftrightarrow Ex = x$. Nechť $u \in \operatorname{Ran} E_1 \otimes \operatorname{Ran} E_2$; podle (4.6.3c) platí $u = \lim_{n \to \infty} u_n$, kde $u_n \equiv \sum_r x_r^{(n)} \otimes y_r^{(n)}$, přičemž $x_r^{(n)} = E_1 x_r^{(n)}$ a $y_r^{(n)} = E_2 y_r^{(n)}$. Ze spojitosti potom plyne $(E_1 \otimes E_2)\, u = \lim_{n \to \infty} (E_1 \otimes E_2)\, u_n = \lim_{n \to \infty} \sum_r E_1 x_r^{(n)} \otimes E_2 y_r^{(n)} = = \lim_{n \to \infty} \sum_r x_r^{(n)} \otimes y_r^{(n)} = u$, takže $\operatorname{Ran} E_1 \otimes \operatorname{Ran} E_2 \subset \operatorname{Ran} E_1 \otimes E_2$. Naopak, pro každé $u \in \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ máme $u = \lim_{n \to \infty} u_n$, kde $u_n \equiv \sum_r x_r^{(n)} \otimes y_r^{(n)}$ pro $x_r^{(n)} \in \mathscr{H}_1$ a $y_r^{(n)} \in \mathscr{H}_2$; jestliže $(E_1 \otimes E_2)\, u = u$, potom $u = \lim_{n \to \infty} \sum_r E_1 x_r^{(n)} \otimes E_2 y_r^{(n)}$, tj. $u \in \operatorname{Ran} E_1 \otimes \operatorname{Ran} E_2$.

Komentář

§ **5.1** • Nechť $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ jsou Banachovy prostory. Operátorem sdruženým k danému $B \in \mathscr{B}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ nazýváme operátor $B^*\colon \mathscr{Y}^* \to \mathscr{X}^*$ definovaný pro všechna $x \in \mathscr{X}^*$ a $g \in \mathscr{Y}^*$ vztahem $(B^*g)(x) := g(Bx)$. Užívá se pro něj též názvu *duální* nebo *banachovsky sdružený* operátor a označení B'. Z uvedené definice je zřejmé, že B^* je lineární a že pro všechna $g \in \mathscr{Y}^*$ platí $\|B^*g\| \leqq \|B\|\, \|g\|$, což znamená, že $B^* \in \mathscr{B}(\mathscr{Y}^*, \mathscr{X}^*)$ a $\|B^*\| \leqq \|B\|$. Pro libovolný jednotkový vektor $x \in \mathscr{X}$ najdeme $g \in \mathscr{Y}^*$, takové, že $\|g\| = 1$ a $g(Bx) = \|Bx\|$ (viz důsledek 3.3.4); potom $\|Bx\| = |(B^*g)(x)| \leqq \|B^*g\|\, \|x\| \leqq \|B^*\|\, \|x\|$, a proto $\|B^*\| = \|B\|$. Povšimněme si toho, že zobrazení $B \mapsto B^*$ je lineární, zatímco pro sdružený operátor na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ je toto zobrazení antilineární. V případě Hilbertova prostoru totiž sdružený operátor nepatří do $\mathscr{B}(\mathscr{H}^*)$, nýbrž je definován jako prvek prostoru $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, což je umožněno tím, že prostory $\mathscr{H}, \mathscr{H}^*$ jsou antilineárně izometrické.

§ **5.2** • Analogicky jako v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ se zavádí silná a slabá operátorová topologie v prostoru $\mathscr{B}(\mathscr{X}, \mathscr{X}_1)$, kde $\mathscr{X}, \mathscr{X}_1$ jsou B-prostory, a to pomocí systémů seminorem $\mathscr{P}_s \equiv \{p_x\colon x \in \mathscr{X},\ p_x(B) := \|Bx\|_1\}$, resp.

$$\mathscr{P}_w \equiv \{p_{f,x}\colon x \in \mathscr{X},\ f \in \mathscr{X}_1^*,\ p_{f,x}(B) := |f(Bx)|\} .$$

Základní vlastnosti konvexních prostorů $(\mathscr{B}(\mathscr{X}, \mathscr{X}_1), \tau_s)$, resp. $(\mathscr{B}(\mathscr{X}, \mathscr{X}_1), \tau_w)$ lze najít v [[DS 1]], § VI.1.

5.3 • Místo hermitovský se říká také samosdružený (samoadjungovaný) nebo symetrický operátor. My těchto alternativních názvů pro omezené operátory neužíváme; zavádíme je až pro neomezené operátory v kapitole 7 – tam však už nejde o totožné pojmy.

• Číselný obor hodnot libovolného operátoru $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ má dvě význačné vlastnosti: (a) $\Theta(B)$ je konvexní množina v $\mathbb{C}$, obecně však není uzavřená ani otevřená (to vše se vztahuje i na neomezené lineární operátory na $\mathscr{H}$ – viz [[Sto]], § IV.2 nebo [[Hal 2]], § 166); (b) spektrum operátoru B leží v $\overline{\Theta(B)}$ (důkaz je založen na vlastnosti (a) a větě 8.1.2 – uvádí jej např. [[Ka]], § V.3.2).

• Pomocí číselného oboru hodnot lze charakterizovat také antihermitovské operátory: operátor $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je *antihermitovský,* jestliže $\Theta(B)$ je podmnožinou imaginární osy, což je ekvivalentní podmínce $B^* = -B$.

§ 5.4 • Projektor je možno definovat obecněji pro každý podprostor L (ne nutně uzavřený), k němuž existuje podprostor L' takový, že $L \oplus L' = \mathscr{H}$. Proto se někdy projektorům určeným *ortogonálním* rozkladem $\mathscr{H}$ podle daného uzavřeného podprostoru říká *ortogonální projektory* (*ortoprojektory*). V této knize pracujeme výhradně s tímto typem projektorů, a proto můžeme přívlastek „ortogonální“ vynechat.

• Pro normu rozdílu libovolné dvojice projektorů E, F na $\mathscr{H}$ platí

$$\|E - F\| = \max\{\sigma_{EF}, \sigma_{FE}\},$$

kde

$$\sigma_{EF} := \sup\{\|(I - F)\,x\| : x \in E\mathscr{H},\ \|x\| = 1\} =$$
$$= \sup\{\varrho(x, F\mathscr{H}) : x \in E\mathscr{H},\ \|x\| = 1\}.$$

Důkaz tohoto vztahu je založen na rozkladu (4a), z nějž pro každé $x \in \mathscr{H}$, $\|x\| = 1$ plyne $\|E - F\| \geqq \|(E - F)\,x\| = (\|E(I - F)\,x\|^2 + \|(E - I)\,Fx\|^2)^{1/2}$. Speciálně pro $x \in F\mathscr{H}$ dostáváme $\|E - F\| \geqq \|(E - I)\,x\|$, takže $\|E - F\| \geqq \sigma_{FE}$. Odtud plyne $\sigma_{EF} \leqq \|F - E\| = \|E - F\|$ a zbývá tedy ověřit, že $\|E - F\| \leqq \max\{\sigma_{EF}, \sigma_{FE}\} \equiv m(E, F)$. Pro každé $x \in \mathscr{H}$, $\|x\| = 1$ platí $\|(I - E)\,Fx\| \leqq \sigma_{FE}\|Fx\|$ a $\|E(I - F)\,x\|^2 = |(E(I - F)\,x, E(I - F)\,x)| = |((I - F)\,E(I - F)\,x, (I - F)\,x)| \leqq \sigma_{EF}\|E(I - F)\,x\|\ \|(I - F)\,x\|$, tj. $\|E(I - F)\,x\| \leqq \sigma_{EF}\|(I - F)\,x\|$. Potom $\|(E - F)\,x\| \leqq m(E, F)\,(\|Fx\|^2 + \|(I - F)\,x\|^2)^{1/2} = m(E, F)$.

§ 5.5 • Antilineární izometrii $U\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ nazýváme *antiunitárním operátorem*; téhož názvu se často užívá i pro antilineární izometrie různých Hilbertových prostorů, takže např. zobrazení (4.2.5) z $\mathscr{H}$ na $\mathscr{H}^*$ je antiunitární operátor. Užitečná ekvivalentní definice zní takto: zobrazení $U\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, které je surjektivní a splňuje $(Ux, Uy) = (y, x)$ pro všechna $x, y \in \mathscr{H}$, je antiunitární operátor (srv. cvičení 27).

§ 5.6 • Dokážeme, že rovnost $r(A) = \|A\|$, kterou jsme v příkladu 5.3.3 odvodili pro spektrální poloměr hermitovského operátoru, platí pro všechny omezené normální operátory (viz též cvičení 12.24). Nechť $B \in \mathscr{N}(\mathscr{H})$; stačí ověřit, že $\|B\| \leq r(B)$. K tomu užijeme vztahu $r(B) = r(B^*)$ a toho, že pro hermitovské operátory rovnost platí:

$$r(B)^2 = r(B^*)\, r(B) = \lim_{n \to \infty} (\|(B^*)^n\|\, \|B^n\|)^{1/n} \geqq \lim_{n \to \infty} \|(B^*)^n B^n\|^{1/n} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \|(B^* B)^n\|^{1/n} = r(B^* B) = \|B^* B\| = \|B\|^2 .$$

§ 5.7 • Uvažujme podprostor $\mathscr{B}_{12} := \{B_1 \otimes B_2 \colon B_r \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_r),\ r = 1, 2\}_{\mathrm{lin}} \subset \subset \mathscr{B}(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2)$. Vzhledem k tomu, že zobrazení Φ definované vztahem (5) je bilineární, plyne z výsledků cvičení 45, že $\mathscr{B}_{12}$ je realizací algebraického tenzorového součinu B-prostorů $\mathscr{B}(\mathscr{H}_1)$ a $\mathscr{B}(\mathscr{H}_2)$ (viz komentář k § 4.6). Kromě toho je podle vztahu (3) norma na prostoru $\mathscr{B}(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2)$ přípustnou normou na $\mathscr{B}_{12}$.

Cvičení

1. Pro každé $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ platí $\|B\| = \sup\limits_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} |(x, By)| = \sup\limits_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} |(x, By)|$.

2. Neexistují $B, C \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ taková, že $BC - CB = \alpha I$ pro nějaké nenulové $\alpha \in \mathbb{C}$.
Návod: Jestliže $BC - CB = \alpha I$, potom $B^n C - CB^n = \alpha n B^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$

3. Jestliže $\dim \mathscr{H} = \infty$, je prostor $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ neseparabilní.
Návod: Každé posloupnosti $s \equiv \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ tvořené nulami a jedničkami přiřaďte operátor B_s (viz příklad 5.6.8) a užijte cvičení 2.6.

4. Pro každé $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ a libovolnou množinu $M \subset \mathscr{H}$ platí $B\overline{M} \subset \overline{BM}$; je-li operátor B regulární, platí rovnost.

5. Nechť $\mathscr{H} = L^2(M, d\mu)$, kde μ je σ-konečná míra. Každému $k \in L^2(M \times M, d(\mu \otimes \mu))$ je vztahem $(Kf)(x) := \int_M k(x, y) f(y)\, d\mu(y)$, $f \in L^2(M, d\mu)$, přiřazen operátor $K \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, tzv. *Hilbertův-Schmidtův integrální operátor* s jádrem k, přičemž $\|K\|^2 \leq \int_{M \times M} |k|^2\, d(\mu \otimes \mu)$ a pro operátor K^* platí $(K^* f)(x) = \int_M \overline{k(y, x)}\, f(y)\, d\mu(y)$.
Návod: Z Fubiniovy věty plyne, že pro s.v. $x \in M$ platí $(Kf)(x) = (k_x, f)_{\mathscr{H}}$, kde $k_x(y) := \overline{k(x, y)}$; dále viz důkaz tvrzení 4.3.5.

6. Pro libovolná $x, y \in \mathscr{H}$ je vztahem $P_{xy}z := (y, z)\, x$ definován operátor s následujícími vlastnostmi:

(i) $P_{xy} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $\|P_{xy}\| = \|x\|\,\|y\|$,
(ii) $P_{xy}^* = P_{yx}$,
(iii) $P_{xy}P_{uv} = (y, u)\, P_{xv}$.

7. Uvažujme operátory pravého a levého posunutí z příkladu 5.1.7.
(i) Pro $n = 1, 2, \ldots$ platí $\|S^n\| = 1$, $\|(S^*)^n\| = 1$, $(S^*)^n S^n = I$, a označíme-li $\mathscr{G}_n := \{e_1, \ldots, e_n\}_{\text{lin}}$, potom $S^n(S^*)^n x = 0$ pro všechna $x \in \mathscr{G}_n$ a $S^n(S^*)^n y = y$ pro všechna $y \in \mathscr{G}_n^{\perp}$.
(ii) $\operatorname{s-lim}_{n\to\infty} (S^*)^n = 0$.
(iii) posloupnost $\{S^n\}_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje vzhledem k τ_s.

8. Dokažte silnou úplnost prostoru $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ (tvrzení 5.2.1a).

9. Sestrojte omezený lineární funkcionál f na $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ s následující vlastností: ke každé dvojici $x, y \in \mathscr{H}$ existuje $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, pro něž $f(B) \neq (x, By)$.
Návod: Nechť $\{u, v\}$ je ortonormální množina a $f(B) := (u, Bu) + (v, Bv)$; dosaďte jednak $B = I$, jednak $B = P_{xx}$ (viz cvičení 6).

10. Nechť $\dim \mathscr{H} = \infty$; zobrazení $B \mapsto B^*$ je spojité vzhledem ke stejnoměrné a slabé operátorové topologii, ale není spojité vzhledem k silné operátorové topologii.
Návod: Užijte výsledků cvičení 7 (ii), (iii).

11. Jestliže $\dim \mathscr{H} = \infty$, potom z podmínek $B_n \xrightarrow{w} B$, $C_n \xrightarrow{w} C$ nevyplývá $B_nC_n \xrightarrow{w} BC$.
Návod: Viz cvičení 7.

12. Jestliže $\dim \mathscr{H} < \infty$, potom topologie τ_u, τ_s a τ_w na $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ jsou totožné.
Návod: Užijte vztahů $\|Bx\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |(e_j, Bx)|^2$ a $\|B\|^2 \leqq \sum_{j=1}^{n} \|Be_j\|^2$, kde $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ je ortonormální báze v $\mathscr{H}$.

13. Nechť posloupnost $\{x_n\} \subset \mathscr{H}$ slabě konverguje k x; potom pro každý omezený operátor B platí $Bx_n \xrightarrow{w} Bx$.

14. Omezený operátor B na separabilním $\mathscr{H}$ je hermitovský právě tehdy, když pro libovolnou ortonormální bázi $\{e_j\} \subset \mathscr{H}$ platí $(e_j, Be_k) = \overline{(e_k, Be_j)}$, $j, k = 1, 2, \ldots$.

15. Součin hermitovských operátorů A, B je hermitovský právě tehdy, když $AB = BA$.

16. Jestliže A je hermitovský operátor, potom $A^{2k} \geqq 0$, $k = 1, 2, \ldots$; je-li $A \geqq 0$, platí $A^n \geqq 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

17. Nechť λ je vlastní hodnota operátoru $A \geqq 0$; potom $\sqrt{\lambda}$ je vlastní hodnota operátoru $\sqrt{A}$.
Návod: Jestliže $Ax = \lambda x$, $\|x\| = 1$, potom $\sqrt{A}$ komutuje s P_{xx} (viz cvičení 6).

18. Na prostoru $\mathbb{C}$ najděte lineární operátory B, C, pro něž:
(i) $|BC| \neq |B|\,|C|$,
(ii) $|B^*| \neq |B|$,
(iii) neplatí nerovnost $|B + C| \leqq |B| + |C|$.
Návod: (iii) Položte $B = \sigma_3 + I$, $C = \sigma_1 - I$, kde

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

19. Pro každé $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ platí $\|B\| = \||B|\|$ a $\operatorname{Ker} B = \operatorname{Ker}|B| = \operatorname{Ker}\sqrt{|B|}$.
Návod: $\|Bx\| = \||B|\,x\|$ po každé $x \in \mathscr{H}$; dále užijte důsledek 5.3.7.

20. Jestliže $0 \leqq A \leqq I$, potom existuje $\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} A^n = \tilde{A}$ a platí $0 \leqq \tilde{A} \leqq I$.
Návod: Pomocí důsledku 5.3.7 dokažte, že $A^n - A^{n+1} = A^n(I - A) \geqq 0$ a $I - A^n = (I - A)\sum_{k=0}^{n-1} A^k \geqq 0$.

21. Je dán podprostor $L \subset \mathscr{H}$ a nechť E je projektor na $\bar{L}$. Potom pro každé $x \in \mathscr{H}$ platí $\|Ex\| = \sup\{|(x, y)|\colon y \in L,\ \|y\| = 1\}$.
Návod: Jestliže $Ex \neq 0$, existuje $\{y_n\} \subset L$, $\|y_n\| = 1$, splňující $y_n \to Ex/\|Ex\|$.

22. Dokažte tvrzení 5.4.4.
Návod: (a) Při důkazu nutné podmínky vynásobte rovnost $EF + FE = 0$ nejprve zprava a potom zleva operátorem F.
(b) Jestliže $E \geqq F$, potom $(Ex, x) = \|Ex\|^2 \geqq \|Fx\|^2$; dále z podmínky $\|Ex\| = \|x\|$ plyne $x \in \operatorname{Ran} E$.

23. Pro každé $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ platí $B = BE = FB$, kde E, resp. F je projektor na podprostor $(\operatorname{Ker} B)^\perp$, resp. $(\operatorname{Ker} B^*)^\perp$.

24. Nechť E, F jsou libovolné projektory na $\mathscr{H}$.
(i) Jestliže $\operatorname{Ran} E \cap \operatorname{Ker} F \neq \{0\}$, potom $\|E - F\| = 1$.
(ii) Z podmínky $\dim \operatorname{Ran} E = \dim \operatorname{Ran} F$ neplyne $\|E - F\| < 1$.

25. Nechť $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost projektorů, která slabě konverguje k projektoru E (monotonie se nepředpokládá); potom $E = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} E_n$.
Návod: Ukažte, že $\|E_n x\| \to \|Ex\|$, a užijte tvrzení 4.2.7.

26. S označeními z tvrzení 5.4.10 platí $\sum_{\alpha \in I} E_\alpha = \sup_{K \in \mathscr{S}} E_K$.

27. (i) Jestliže zobrazení $U: \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ je surjektivní a zachovává skalární součin, potom je U lineární.
(ii) Unitární operátor U, pro nějž $U^2 = I$, je hermitovský; naopak pro každý operátor $U \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, který je současně unitární a hermitovský, platí $U^2 = I$.
Návod: (i) $\operatorname{Ran} U = \mathscr{H}$ implikuje $(x, U(\alpha y + z)) = (x, \alpha Uy + Uz)$.

28. Množina $\mathscr{U}(\mathscr{H})$ všech unitárních operátorů na daném $\mathscr{H}$ tvoří grupu vzhledem k operaci násobení v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ a topologický prostor $(\mathscr{U}(\mathscr{H}), \tau_u)$ je topologická grupa (viz komentář k § 2.6). Platí to také pro $(\mathscr{U}(\mathscr{H}), \tau_s)$, resp. $(\mathscr{U}(\mathscr{H}), \tau_w)$?

29. Nahradíme-li v důsledku 5.5.5 podmínku $(Vx, Vy) = (x, y)$ pro $x, y \in M$, požadavkem $\|Vx\| = \|x\|$, $x \in M$, potom nemusí existovat unitární U takové, že $U \upharpoonright M = V$.
Návod: Na separabilním $\mathscr{H}$ s ortonormální bází $\{e_j\}$ uvažujte zobrazení: $Ve_1 := e_1$, $Ve_j := e_{j-1}$ pro $j \geqq 2$.

30. Jestliže U je unitární operátor na $\mathscr{H}$, potom pro každý podprostor $L \subset \mathscr{H}$ platí $U(L^\perp) = (UL)^\perp$.

31. Každý nenulový hermitovský operátor lze zapsat jako lineární kombinaci dvou unitárních operátorů.
Návod: Jestliže A je hermitovský operátor s jednotkovou normou, potom operátory $A \pm \mathrm{i}\sqrt{I - A^2}$ jsou unitární.

32. Užijeme označení z příkladu 5.5.3. Ověřte, že množina Φ je grupa vzhledem k binární operaci $[\varphi, \psi] \mapsto \varphi \circ \psi$ a na základě toho dokažte, že $\{U_\varphi : \varphi \in \Phi\}$ je podgrupa v grupě $\mathscr{U}(L^2(\mathbb{R}^n))$ (viz cvičení 28).
Návod: Užijte vztahu $D_{\varphi \circ \psi}(x) = D_\varphi(\psi(x))\, D_\psi(x)$.

33. Pomocí vztahu $\hat{h}_n = (-\mathrm{i})^n h_n$ (viz 4.3.5) zkonstruujte Fourierův-Plancherelův operátor na $L^2(\mathbb{R})$ a odvoďte formule (5.1.6a, b) bez užití výsledků z příkladu 3.2.6 a vztahu (5.1.5).
Návod: Lineární rozšíření zobrazení $h_n \mapsto \hat{h}_n$ je bijekce $L \to L$, kde $L := \{h_n : n = 0, 1, \ldots\}_{\text{lin}}$, která zachovává normu. Dále ověřte, že $G(x, y) := (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} - 1)/(-\mathrm{i}y)$ splňuje podmínky (a)–(c) tvrzení 5.1.9 pro všechna h_n a užijte poznámky 5.1.10.

34. Pro Fourierův-Plancherelův operátor F na $L^2(\mathbb{R}^n)$ platí $F^2 = R$, $F^4 = I$, kde R je operátor zrcadlení z příkladu 5.5.3.
Návod: Pro všechna $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ platí $Ff = F^{-1}Rf$.

35. Jestliže k danému projektoru E existuje $W \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ tak, že $E = W^*W$, potom je W parciální izometrie s počátečním podprostorem $E\mathscr{H}$.
Návod: Pro $x \in E\mathscr{H}$ platí $\|Wx\|^2 = \|Ex\|^2 = \|x\|^2$.

36. Nechť V je izometrický operátor a $\mathscr{G}$ je uzavřený podprostor v D_V. Potom $\dim \mathscr{G} = \dim V\mathscr{G}$; speciálně $\dim D_V = \dim \operatorname{Ran} V$. Podprostory $D_V^\perp$ a $(\operatorname{Ran} V)^\perp$ však mohou mít různou dimenzi, pokud $\dim \mathscr{H} = \infty$.
Návod: Jestliže $\mathscr{E}$ je totální ortonormální množina v $\mathscr{G}$, je $V\mathscr{E}$ totální ortonormální množina ve $V\mathscr{G}$. Dále uvažujte např. operátor pravého posunutí.

37. Nechť V_r, $r = 1, 2$, je izometrický operátor s definičním oborem D_r a nechť E_r je projektor na D_r. Jestliže platí $D_1 \perp D_2$ a $\operatorname{Ran} V_1 \perp \operatorname{Ran} V_2$, je $W := V_1E_1 + V_2E_2$ parciální izometrie s počátečním podprostorem $D_1 \oplus D_2$ a koncovým $\operatorname{Ran} V_1 \oplus \operatorname{Ran} V_2$.

38. Je-li $W|B|$ polární rozklad operátoru $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, potom $|B| = W^*B$.

39. Je dáno zobrazení $x \mapsto U(x)$ z $\mathbb{R}^n$ do množiny unitárních operátorů na daném $\mathscr{H}$ splňující $U(x+y) = U(x)\,U(y)$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^n$. Je-li toto zobrazení slabě spojité, je spojité i silně.

40. Každý operátor $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ s čistě bodovým spektrem je normální.
Návod: Ověřte implikaci $Be_\alpha = \lambda_\alpha e_\alpha \Rightarrow B^*e_\alpha = \bar{\lambda}_\alpha e_\alpha$.

41. Najděte příklad omezeného normálního operátoru, který není hermitovský ani unitární.
Návod: Uvažujte nenulové komutující hermitovské operátory A, B takové, že $A^2 + B^2 \neq I$.

42. Pro operátor $B \in \mathscr{N}(\mathscr{H})$ splňující podmínku $0 \in \sigma(B) \setminus \sigma_p(B)$ není podprostor $\operatorname{Ran} B$ uzavřený; najděte příklad takového operátoru.
Návod: Užijte větu 5.6.2c; dále uvažujte operátor Q z příkladu 5.3.2.

43. Je dána posloupnost $\{B_n\} \subset \mathscr{N}(\mathscr{H})$, která silně konverguje k $B \in \mathscr{N}(\mathscr{H})$; potom $B_n^* \xrightarrow{s} B^*$ (srv. s tvrzením cvičení 10).
Návod: Platí $B_n^* \xrightarrow{w} B^*$ a $\|B_n^*x\| \to \|B^*x\|$ pro každé $x \in \mathscr{H}$.

44. (i) Ověřte existenci a jednoznačnost lineárního rozšíření zobrazení (5.7.2a).
(ii) Dokažte rovnost (5.7.3).
Návod: (i) Viz návod ke cvičení 4.22.
(ii) Pro libovolné jednotkové vektory $x \in \mathscr{H}_1$ a $y \in \mathscr{H}_2$ platí $\|B_1 \otimes B_2\| \geq$ $\geq \|B_1x \otimes B_2y\| = \|B_1x\|_1 \|B_2y\|_2$.

45. Pro libovolné omezené operátory B_r a C_r na $\mathscr{H}_r$, kde $r = 1, 2$, platí následující tvrzení:

(i) $B_1 \otimes B_2 = 0$ právě tehdy, když alespoň jeden z operátorů B_1, B_2 je nulový;
(ii) jestliže $B_1 \otimes B_2 \neq 0$ a $B_1 \otimes B_2 = C_1 \otimes C_2$, potom platí $C_1 = \alpha B_1$, $C_2 = (1/\alpha)\, B_2$ pro nějaké nenulové $\alpha \in \mathbb{C}$.
Návod: (ii) Existují vektory $z_r \in \mathscr{H}_r$ takové, že $B_1z_1 \otimes B_2z_2 = C_1z_1 \otimes C_2z_2 \neq 0$. Z axiomu (ts1) pak plyne $\alpha = (B_1z_1, C_1z_1)_1 / \|B_1z_1\|_1^2$.

46. Dokažte následující vlastnosti tenzorových součinů omezených operátorů:
(i) Pro operátory $\boldsymbol{B}_1 \equiv B_1 \otimes I_2$ a $\boldsymbol{B}_2 \equiv I_1 \otimes B_2$ platí $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_1 = B_1 \otimes B_2$.
(ii) Jsou-li A_1, A_2 pozitivní, je i $A_1 \otimes A_2$ pozitivní a platí $\sqrt{A_1 \otimes A_2} = \sqrt{A_1} \otimes \sqrt{A_2}$.
(iii) Jestliže $A_r \geqq A'_r \geqq 0$, $r = 1, 2$, potom $A_1 \otimes A_2 \geqq A'_1 \otimes A'_2 \geqq 0$.
Návod: (iii) $A_1 \otimes A_2 - A'_1 \otimes A'_2 = (A_1 - A'_1) \otimes A_2 + A'_1 \otimes (A_2 - A'_2)$.

47. Nechť E_r, F_r jsou nenulové projektory na $\mathscr{H}_r$, $r = 1, 2$. Potom projektory $\boldsymbol{E} := E_1 \otimes E_2$, $\boldsymbol{F} := F_1 \otimes F_2$ jsou rovněž nenulové a platí následující analogie tvrzení 5.4.4:
(i) $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{F}$ je projektor právě tehdy, když $E_1 + F_1$ *nebo* $E_2 + F_2$ je projektor.
(ii) $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{F}$ je projektor právě tehdy, když $E_1 - F_1$ *a* $E_2 - F_2$ jsou projektory.
(iii) $\boldsymbol{EF}$ je nenulový projektor právě tehdy, když E_1F_1 a E_2F_2 jsou nenulové projektory. Potom platí $(\mathrm{Ran}\, E_1 \otimes \mathrm{Ran}\, E_2) \cap (\mathrm{Ran}\, F_1 \otimes F_2) = (\mathrm{Ran}\, E_1 \cap \mathrm{Ran}\, F_1) \otimes (\mathrm{Ran}\, E_2 \cap \mathrm{Ran}\, F_2)$.
Návod: (i) $E_1F_1 \otimes E_2F_2 = 0$ právě tehdy, když $E_1F_1 = 0$ nebo $E_2F_2 = 0$.
(ii) Jestliže $\boldsymbol{EF} = \boldsymbol{F} \neq 0$, potom $E_1F_1 = \alpha F_1$; tuto rovnost vynásobte zleva E_1 a využijte nenulovosti E_1F_1.
(iii) Je-li $\boldsymbol{EF}$ nenulový projektor, potom $E_rF_r \neq 0$, $r = 1, 2$; z komutativity $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{F}$ pak plyne $E_1F_1 = \alpha F_1E_1$ a odtud $\alpha = 1$. Dále viz (5.7.8).

48. Pro Fourierův-Plancherelův operátor F_2 na $L^2(\mathbb{R}^2)$ platí $F_2 = F \otimes F$.
Návod: Funkce h_n (viz (4.3.4a)) splňují $F_2(h_j \times h_k) = Fh_j \times Fh_k$; dále užijte příklad 4.6.6 a tvrzení 4.3.5.

49. Pro omezené operátory B_r na $\mathscr{H}_r$, $r = 1, 2$, platí $|B_1 \otimes B_2| = |B_1| \otimes |B_2|$.

6.1 STRUKTURA MNOŽINY KOMPAKTNÍCH OPERÁTORŮ

Lineární operátor C definovaný na celém Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ je *kompaktní,* jestliže zobrazuje libovolnou omezenou množinu v $\mathscr{H}$ na množinu prekompaktní. Vzhledem k tomu, že $\mathscr{H}$ je metrický prostor, je uvedená podmínka ekvivalentní požadavku, aby každá omezená posloupnost $\{x_n\} \subset \mathscr{H}$ obsahovala vybranou posloupnost $\{x_{n_k}\}$, pro niž $\{Cx_{n_k}\}$ je konvergentní (viz důsledek 2.5.8). Množinu všech kompaktních operátorů na daném $\mathscr{H}$ značíme $\mathscr{K}(\mathscr{H})$; alternativně budeme užívat též symbolu $\mathscr{J}_\infty(\mathscr{H})$ nebo jen $\mathscr{J}_\infty$ (viz komentář k § 6.3).

Z uvedené definice snadno plyne, že kompaktní operátor nemůže být neomezený; platí tedy

$$\mathscr{K}(\mathscr{H}) \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})\,. \tag{1}$$

Pokud $\dim \mathscr{H} = \infty$, existují omezené operátory, které nejsou kompaktní, tj. $\mathscr{K}(\mathscr{H}) \neq \mathscr{B}(\mathscr{H})$: triviálním příkladem je jednotkový operátor nebo projektor na jakýkoli nekonečnědimenzionální podprostor. Jestliže $\dim \mathscr{H} < \infty$, je každá omezená množina prekompaktní (viz důsledek 2.5.10), a ve vztahu (1) tudíž platí rovnost.

6.1.1 Příklad: Omezenému operátoru T, který splňuje podmínku $\dim \operatorname{Ran} T < \infty$, se říká *konečnědimenzionální operátor* (viz též cvičení 1). Nechť $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je konečnědimenzionální; pro libovolnou omezenou množinu $M \subset \mathscr{H}$ je TM omezená množina v $\operatorname{Ran} T$, a je tudíž prekompaktní. Každý konečnědimenzionální operátor je tedy kompaktní.

6.1.2 Věta: Operátor C je kompaktní právě tehdy, když C-obraz každé slabě konvergentní posloupnosti je posloupnost konvergentní, tj. $x_n \xrightarrow{w} x$ implikuje $Cx_n \to Cx$.

Důkaz: Nechť $C \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$ a předpokládejme, že $x_n \xrightarrow{w} x$ neimplikuje $\|Cx_n - Cx\| \to 0$. Existuje tedy $\varepsilon > 0$ a rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}$ taková, že pro $y_k := Cx_{n_k}$ je

$$\|Cx - y_k\| \geqq \varepsilon \tag{2}$$

pro všechna $k = 1, 2, \ldots$. Vzhledem k tomu, že $\{x_n\}$ je omezená (viz větu 3.5.3), lze z $\{y_k\}$ vybrat konvergentní posloupnost $\{y_{k_j}\}$ takovou, že

$$\lim_{j \to \infty} \|y_{k_j} - y\| = 0 . \tag{3}$$

Potom také $\operatorname{w-lim}_{j \to \infty} y_{k_j} = y$; nyní z podmínky $x_n \xrightarrow{w} x$ plyne $y = Cx$ (viz cvičení 5.13) a vztahy (2), (3) jsou ve sporu.

Obrácená implikace je přímým důsledkem věty 3.5.6: protože každý Hilbertův prostor je reflexivní, lze z každé omezené posloupnosti $\{x_n\} \subset \mathscr{H}$ vybrat slabě konvergentní $\{x_{n_k}\}$; potom $\{Cx_{n_k}\}$ je konvergentní. ■

Shrneme nyní nejdůležitější vlastnosti množiny $\mathscr{K}(\mathscr{H})$.

6.1.3 Věta: (a) $\mathscr{K}(\mathscr{H})$ je podprostor v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ uzavřený vzhledem ke stejnoměrné topologii.

(b) Jestliže $C \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$, potom pro libovolný omezený operátor B jsou operátory CB a BC kompaktní.

(c) Operátor sdružený s kompaktním operátorem je kompaktní.

Důkaz: Tvrzení (b) a to, že $\mathscr{K}(\mathscr{H})$ je podprostor, dostaneme snadno z věty 2. Jestliže dále $C \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$ a $x_n \xrightarrow{w} x$, potom $\|C^*x_n - C^*x\|^2 = |(x_n - x, CC^*(x_n - x))| \leq \|x_n - x\| \, \|CC^*(x_n - x)\|$. Nyní $\{x_n\}$ je omezená a operátor CC^* je podle (b) kompaktní, takže $CC^*x_n \to CC^*x$; potom $\|C^*x_n - C^*x\| \to 0$, a operátor C^* je tudíž kompaktní.

Zbývá dokázat, že $\mathscr{K}(\mathscr{H})$ je uzavřená. Nechť pro posloupnost $\{C_n\} \subset \mathscr{K}(\mathscr{H})$ a nějaké $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ platí $\|C_n - B\| \to 0$ a nechť M je omezená množina v $\mathscr{H}$, tj. $\|x\| \leq k_M$ pro všechna $x \in M$. Stačí, abychom ke každému $\varepsilon > 0$ našli konečnou ε-síť pro množinu BM (viz důsledek 2.5.10). Nechť $\|C_{n(\varepsilon)} - B\| < \varepsilon/2k_M$; jelikož $C_{n(\varepsilon)}$ je kompaktní, existuje konečná $\varepsilon/2$-síť N pro množinu $C_{n(\varepsilon)}M$, tj. ke každému $x \in M$ umíme najít $y \in N$ tak, že $\|C_{n(\varepsilon)}x - y\| < \varepsilon/2$. Potom $\|Bx - y\| \leq \|B - C_{n(\varepsilon)}\| \, \|x\| + \|C_{n(\varepsilon)}x - y\| < \varepsilon$, a proto N je hledaná konečná ε-síť pro BM. ■

6.1.4 Poznámka: Předchozí věta má (s výjimkou tvrzení o uzavřenosti) čistě algebraický charakter, a lze ji proto zformulovat pomocí příslušných algebraických pojmů (viz § 12.1). Vlastnost (b) znamená, že podprostor $\mathscr{K}(\mathscr{H})$ je oboustranný ideál v algebře $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, a (c) vyjadřuje, že jde o $*$-ideál vzhledem k involuci $B \mapsto B^*$ na $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Celkem tedy můžeme větu přeformulovat takto: Množina $\mathscr{K}(\mathscr{H})$ je uzavřený oboustranný $*$-ideál v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Poznamenejme v této souvislosti, že pro separabilní $\mathscr{H}$ neexistují v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ jiné netriviální oboustranné ideály uzavřené vzhledem ke stejnoměrné topologii (viz např. [[Si 3]], kap. 2).

 6.1.5 Důsledek: Jestliže C je kompaktní operátor na nekonečnědimenzionálním $\mathscr{H}$, potom $0 \in \sigma(C)$.
Důkaz: Pokud existuje C^{-1}, potom z tvrzení (b) věty 3 vyplývá, že $C^{-1} \notin \mathscr{B}(\mathscr{H})$, takže $0 \in \sigma(C)$. ■

Konečnědimenzionální operátory nepředstavují jen jednoduchý příklad kompaktních operátorů. Jak ukazuje následující věta, lze pomocí nich aproximovat každý kompaktní operátor (ve smyslu stejnoměrné topologie).

6.1.6 Věta: Omezený operátor je kompaktní právě tehdy, když existuje posloupnost konečnědimenzionálních operátorů, která k němu konverguje podle normy.
Důkaz: Nechť $C \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$ a E je projektor na podprostor $\mathscr{G}_C := (\mathrm{Ker}\, C^*)^{\perp} = \overline{\mathrm{Ran}\, C}$. Jestliže $\dim \mathscr{G}_C < \infty$, je operátor C konečnědimenzionální a vše je triviální. Nechť nyní $\dim \mathscr{G}_C = \infty$ a $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ je ortonormální báze v $\mathscr{G}_C$ (tento podprostor je vždy separabilní – viz cvičení 4). Označme jako E_n projektor na $\{e_1, \ldots, e_n\}_{\mathrm{lin}}$, potom $E_n \xrightarrow{s} E$, a odtud plyne $E_n C \to EC$ (cvičení 3). Pro každé $x \in \mathscr{H}$ patří Cx do $\mathscr{G}_C$, takže $EC = C$, a jako hledanou posloupnost konečnědimenzionálních operátorů můžeme tedy zvolit $\{E_n C\}$.

Opačná implikace vyplývá ze stejnoměrné uzavřenosti $\mathscr{K}(\mathscr{H})$. ■

6.2 SPEKTRUM KOMPAKTNÍHO OPERÁTORU

Nechť C je kompaktní operátor na $\mathscr{H}$; východiskem pro vyšetřování jeho spektra je následující tvrzení.

6.2.1 Lemma: Pro každé nenulové $\lambda \in \mathbb{C}$ je $\mathrm{Ran}\,(C-\lambda)$ uzavřený podprostor.
Důkaz: Nechť posloupnost $y_n \equiv (C-\lambda)\, x_n$ konverguje k y; lze zjevně předpokládat, že

$$\{x_n\} \subset \mathrm{Ker}\,(C-\lambda)^{\perp} . \tag{1}$$

Jestliže $\{x_n\}$ je omezená, potom kompaktnost C zaručuje existenci vybrané posloupnosti $\{x_{n_k}\}$ takové, že $\{Cx_{n_k}\}$ je konvergentní a tudíž $x_{n_k} = (1/\lambda)\,(Cx_{n_k} - y_{n_k})$ konverguje k nějakému $x \in \mathscr{H}$. Odtud plyne, že $y = \lim_{k\to\infty} (C-\lambda)\, x_{n_k} = (C-\lambda)\, x$, tj. $y \in \mathrm{Ran}\,(C-\lambda)$.

Stačí tedy dokázat, že $\{x_n\}$ je omezená. Předpokládejme, že existuje vybraná posloupnost $\{x_{n_k}\}$, pro niž $\lim_{k\to\infty} \|x_{n_k}\| = \infty$. Položíme $z_k := x_{n_k}/\|x_{n_k}\|$; opět najdeme vybranou posloupnost $\{z_{k(l)}\}_{l=1}^{\infty}$, pro niž posloupnost $\{Cz_{k(l)}\}$ konverguje, a stejnou úvahou jako v první části důkazu zjistíme, že $z_{k(l)} \to z$, přičemž $z \in \mathrm{Ker}\,(C-\lambda)^{\perp}$ (viz (1)) a $\|z\| = 1$. Současně

$$(C-\lambda)\, z = \lim_{l\to\infty} (C-\lambda)\, z_{k(l)} = \lim_{l\to\infty} \|x_{n_{k(l)}}\|^{-1}\, y_{n_{k(l)}} = 0 ,$$

což je spor. ■

6.2.2 Věta (*Riesz-Schauder*): Jestliže C je kompaktní operátor na $\mathcal{H}$, potom

(a) každý nenulový bod spektra je vlastní hodnota, tj.

$$\sigma_p(C) \setminus \{0\} = \sigma(C) \setminus \{0\},$$

(b) každá nenulová vlastní hodnota má konečnou násobnost,

(c) spektrum má nejvýše jeden hromadný bod $\lambda = 0$,

(d) množina vlastních hodnot je nejvýše spočetná:

$$\sigma_p(C) = \{\lambda_j : j = 1, 2, \ldots, N\}, \qquad N \leqq \infty,$$

a lze vždy docílit toho, aby $|\lambda_j| \geqq |\lambda_{j+1}|$, $j = 1, 2, \ldots$; jestliže $N = \infty$, potom $\lim_{j \to \infty} \lambda_j = 0$.

Důkaz: (a) Předpokládejme, že $\sigma(C)$ obsahuje nenulové λ, které není vlastní hodnotou, takže existuje $(C - \lambda)^{-1}$ a $\operatorname{Ran}(C - \lambda) \neq \mathcal{H}$, a uvažujme posloupnost podprostorů $\mathcal{G}_n := (C - \lambda)^n \mathcal{H}$, $n = 0, 1, \ldots$. Operátor $(C - \lambda)^n - (-\lambda)^n$ je polynom v C bez absolutního členu; je proto kompaktní a z lemmatu plyne, že $\mathcal{G}_n$ je uzavřený. Dále $\mathcal{G}_{n+1} = (C - \lambda)^n \mathcal{G}_1 \subset (C - \lambda)^n \mathcal{H} = \mathcal{G}_n$, přičemž pro všechna n platí $\mathcal{G}_{n+1} \neq \mathcal{G}_n$; to plyne ze vztahu $\mathcal{G}_1 = \operatorname{Ran}(C - \lambda) \neq \mathcal{H}$ a existence operátoru $(C - \lambda)^{-n}$. Existují tudíž jednotkové vektory x_n takové, že $x_n \in \mathcal{G}_{n-1} \cap \mathcal{G}_n^{\perp}$ pro $n = 1, 2, \ldots$; množina x_n: $n = 1, 2, \ldots$ je tedy ortonormální; pak z tvrzení 4.2.8 plyne $x_n \xrightarrow{w} 0$ a odtud $Cx_n \to 0$. Nyní v rozkladu $Cx_n = \lambda x_n + (C - \lambda) x_n$ je vektor $(C - \lambda) x_n \in \mathcal{G}_n$ ortogonální k x_n, a proto pro všechna n platí $\|Cx_n\| \geqq |\lambda| \, \|x_n\| = |\lambda|$, což je ve sporu s podmínkou $Cx_n \to 0$.

(b) Nechť $\lambda \in \sigma_p(C) \setminus \{0\}$; podprostor $\operatorname{Ker}(C - \lambda)$ musí mít konečnou dimenzi, protože kompaktní operátor $C \upharpoonright \operatorname{Ker}(C - \lambda)$ je roven λ-násobku jednotkového operátoru na $\operatorname{Ker}(C - \lambda)$.

(c) Stačí ukázat, že $\sigma_p(C)$ nemá žádné nenulové hromadné body, neboť podle (a) každý nenulový hromadný bod spektra je zároveň hromadným bodem množiny $\sigma_p(C)$. Předpokládejme, že existuje posloupnost $\{\lambda_n\} \subset \sigma_p(C)$ taková, že $\lambda_n \neq \lambda_m$ pro $n \neq m$ a $\lambda_n \to \lambda \neq 0$. Odpovídající vlastní vektory označíme x_n; z podmínky $\lambda_n \neq \lambda_m$ plyne, že množina $\{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ je lineárně nezávislá. Aplikací ortonormalizačního procesu (věta 1.4.3) z ní dostaneme nekonečnou ortonormální množinu $\{y_n : n = 1, 2, \ldots\}$, pro niž platí $(C - \lambda_n) y_n \in \{y_1, \ldots, y_{n-1}\}_{\text{lin}}$. Potom v identitě $Cy_n = \lambda_n y_n + (C - \lambda_n) y_n$ jsou vektory na pravé straně ortogonální, takže $\|Cy_n\| \geqq |\lambda_n| \, \|y_n\| = |\lambda_n| \to |\lambda| \neq 0$, a to je ve sporu s podmínkou $Cy_n \to 0$, která je důsledkem ortonormality množiny $\{y_n\}$.

(d) Pro $n = 1, 2, \ldots$ uvažujme množiny $M_n := \{\lambda \in \sigma_p(C) : |\lambda| \geqq 1/n\}$. Ty podle tvrzení (c) nemají žádné hromadné body, a protože jsou omezené ($|\lambda| \leqq \|C\|$), musí být konečné. Množina $\sigma_p(C) \setminus \{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ je tudíž nejvýše spočetná a pokud je nekonečná, platí $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = 0$ při libovolném očíslování. Přejdeme-li k disjunktním množinám $N_1 := M_1$, $N_{n+1} := M_{n+1} \setminus M_n$, pro něž opět $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n = \sigma_p(C) \setminus \{0\}$, vidíme, že vlastní hodnoty lze očíslovat tak, aby $|\lambda_j| \geqq |\lambda_{j+1}|$ pro $j = 1, 2, \ldots$. ■

6.2.3 Důsledek (*Fredholmova alternativa*): Pro daný kompaktní operátor C, komplexní λ a $y \in \mathscr{H}$ hledejme řešení rovnice

$$x - \lambda C x = y .$$

Nastává právě jedna ze dvou možností:
(i) rovnice má jediné řešení x_y pro každé $y \in \mathscr{H}$, speciálně $x_0 = 0$,
(ii) rovnice bez pravé strany má netriviální řešení.
Důkaz: Vše plyne z tvrzení (a) předchozí věty: jestliže $1/\lambda \notin \sigma(C)$, nastává možnost (i); v opačném případě je $1/\lambda$ vlastní hodnota. ■

V § 5.6 jsme ukázali, že každý omezený operátor s čistě bodovým spektrem je normální. Na množině kompaktních operátorů platí i obrácená implikace.

6.2.4 Věta (*Hilbert-Schmidt*): Ke každému normálnímu kompaktnímu operátoru D na $\mathscr{H}$ existuje ortonormální báze tvořená jeho vlastními vektory, tj. D má čistě bodové spektrum.
Důkaz: Nechť $\{\lambda_n : n = 1, \ldots, N\}$, $N \leqq \infty$, je množina nenulových vlastních hodnot operátoru D, m_n je násobnost vlastní hodnoty λ_n a L_n odpovídající vlastní podprostor, takže $\dim L_n = m_n < \infty$. Podle věty 5.6.2 jsou podprostory L_n navzájem ortogonální a platí

$$L_n \subset \operatorname{Ker} D^{\perp} , \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

V každém podprostoru L_n vybereme ortonormální bázi $\{e_k^{(n)}\}_{k=1}^{m_n}$; sjednocením těchto bází získáme ortonormální bázi $\mathscr{E}$ v podprostoru

$$\mathscr{G} := \sum_{n=1}^{N}{}^{\oplus} L_n .$$

Ověříme-li, že $\mathscr{G} = \operatorname{Ker} D^{\perp}$, bude tvrzení dokázáno: hledaná báze tvořená vlastními vektory operátoru D vznikne sjednocením $\mathscr{E}$ a libovolné ortonormální báze v podprostoru $\operatorname{Ker} D$.

Ze vztahů (2) plyne, že $\mathscr{G} \subset \operatorname{Ker} D^{\perp}$. K důkazu opačné inkluze vyjdeme z toho, že každý z podprostorů L_n je též vlastním podprostorem operátoru D^* odpovídajícím vlastní hodnotě $\bar{\lambda}_n$; protože množina $\{\lambda_n\}$ je omezená, dostáváme z věty 4.5.3, že $\mathscr{G}$ je D^*-invariantní podprostor. Odtud ihned plyne, že podprostor $\mathscr{G}^{\perp}$ je D-invariantní, $D \restriction \mathscr{G}^{\perp}$ je tudíž normální kompaktní operátor na $\mathscr{G}^{\perp}$, který nemá žádné nenulové vlastní hodnoty. Pak podle věty 2a má operátor $D \restriction \mathscr{G}^{\perp}$ nulový spektrální poloměr, takže $D \restriction \mathscr{G}^\perp = 0$ (viz komentář k § 5.6). To znamená, že $\mathscr{G}^\perp \subset \operatorname{Ker} D$, tj. $\mathscr{G} \supset \operatorname{Ker} D^\perp$. ■

Na základě věty 2 lze předpokládat, že vlastní hodnoty normálního kompaktního operátoru D jsou uspořádány v sestupném pořadí: $|\lambda_n| \geqq |\lambda_{n+1}|$, pro $n = 1, 2, \dots, N$. Označíme $J_D := \dim (\operatorname{Ker} D)^\perp$, tj. $J_D \leqq \infty$, a sestavíme z nenulových vlastních hodnot posloupnost $\{\lambda(j)\}_{j=1}^{J_D}$, v níž každá vlastní hodnota se opakuje tolikrát, kolik činí její násobnost, přičemž

$$|\lambda(j)| \geqq |\lambda(j+1)|\,, \qquad j = 1, 2, \dots, J_D\,. \tag{3a}$$

Odpovídající vlastní vektory, které tvoří ortonormální bázi v separabilním prostoru $\operatorname{Ker} D^\perp$, lze potom očíslovat tak, aby platilo

$$De_j = \lambda(j)\, e_j\,, \qquad j = 1, 2, \dots, J_D\,. \tag{3b}$$

6.2.5 Důsledek: S výše uvedeným označením platí pro nenulové vlastní hodnoty normálního kompaktního operátoru $D \neq 0$ následující formule

$$|\lambda(j)| = \min_{\mathscr{G}_j} l_D(\mathscr{G}_j)\,, \qquad j = 1, 2, \dots, J_D\,, \tag{4a}$$

kde $\mathscr{G}_j \subset \mathscr{H}$ je libovolný podprostor, jehož dimenze není větší než $j-1$, a

$$l_D(\mathscr{G}_j) := \sup \{\|Dx\| : \|x\| = 1,\ x \in \mathscr{G}_j^\perp\}\,. \tag{4b}$$

Speciálně platí $|\lambda(1)| = \|D\|$.

Důkaz: Pro dané j označme $\mathscr{F}_j := \{e_1, \dots, e_j\}_{\text{lin}}$; podle lemmatu 5.4.7 existuje jednotkový vektor $x \in \mathscr{F}_j \cap \mathscr{G}_j^\perp$, pro nějž pomocí (3a, b) dostáváme

$$l_D(\mathscr{G}_j)^2 \geqq \|Dx\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{j} (e_k, x)\, De_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{j} |\lambda(k)\,(e_k, x)|^2 \geqq |\lambda(j)|^2\,.$$

Naopak pro každý jednotkový vektor $x \in \mathscr{F}_{j-1}^\perp$ platí podle (5.6.1a) nerovnost

$$\|Dx\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(D^* e_k, x)|^2 = \sum_{k=j}^{\infty} |\lambda(k)|^2\, |(e_k, x)|^2 \leqq |\lambda(j)|^2$$

a odtud plyne: $\min\limits_{\mathscr{G}_j} l_D(\mathscr{G}_j) = l_D(\mathscr{F}_{j-1}) = |\lambda(j)|$. ■

Pomocí ortonormální báze (3b) v podprostoru $\operatorname{Ker} D^\perp$ a posloupnosti $\{\lambda(j)\}_{j=1}^{J_D}$ můžeme vyjádřit akci normálního kompaktního operátoru D na libovolné $x \in \mathscr{H}$. Jestliže y je projekce vektoru x do $\operatorname{Ker} D^\perp$, platí $Dx = Dy$ a $(e_j, x) = (e_j, y)$ pro všechna j; potom

$$Dx = Dy = \sum_{j=1}^{J_D} (e_j, y)\, De_j = \sum_{j=1}^{J_D} (e_j, x)\, \lambda(j)\, e_j\,. \tag{5}$$

 Ukazuje se, že rozvoj podobného tvaru existuje pro libovolný kompaktní operátor C. K jeho odvození užijeme toho, že hermitovský operátor $|C|$ je také kompaktní (cvičení 6), takže pro každé $x \in \mathscr{H}$ platí

$$|C|\, x = \sum_{j=1}^{J_C} (e_j, x)\, \mu(j)\, e_j\,, \tag{6}$$

kde $J_C = \dim (\mathrm{Ker}\,|C|)^{\perp} = \dim (\mathrm{Ker}\, C)^{\perp}$. Kladná čísla $\mu(j)$, tj. nenulové vlastní hodnoty operátoru $|C|$, nazýváme **singulárními hodnotami** kompaktního operátoru C; budeme pro ně užívat také explicitního označení $\mu_C(j)$. Vždy se předpokládá, že singulární hodnoty spolu s vlastními vektory e_j splňují vztahy $\mu(j) \geqq \mu(j+1)$, $|C|\, e_j = \mu(j)\, e_j$, $j = 1, 2, \ldots, J_C$ (srv. se vztahem (3)). Užijeme-li dále rovnost $\|Cx\| = \||C|\, x\|$, která platí pro všechna $x \in \mathscr{H}$, dostaneme z formulí (4a, b) následující vyjádření singulárních hodnot:

$$\mu_C(j) = \min_{\mathscr{G}_j} \left(\sup \{\|Cx\| \colon \|x\| = 1,\ x \in \mathscr{G}_j^{\perp}\}\right), \qquad j = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Vektory e_j v rozvoji (6) patří do $\mathrm{Ker}\,|C|^{\perp} = \mathrm{Ker}\, C^{\perp}$, což je počáteční podprostor parciální izometrie v polárním rozkladu $C = W|C|$. Potom vektory

$$f_j := We_j\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, J_C\,, \tag{8a}$$

tvoří ortonormální bázi v podprostoru $\overline{\mathrm{Ran}\, C}$. Lze je vyjádřit též bez užití W:

$$f_j = \mu(j)^{-1}\, Ce_j\,. \tag{8b}$$

Aplikujeme-li nyní na rovnost (6) operátor W, dostaneme hledaný rozvoj

$$Cx = \sum_{j=1}^{J_C} (e_j, x)\, \mu(j)\, f_j\,, \tag{9a}$$

který zapisujeme též v symbolickém tvaru

$$C = \sum_{j=1}^{J_C} (e_j, .)\, \mu(j)\, f_j\,, \tag{9b}$$

a nazýváme *kanonickým tvarem* kompaktního operátoru C.

6.2.6 Poznámka: Kompaktní operátor C je tedy plně určen svými singulárními hodnotami, vlastními vektory e_j operátoru $|C|$, které tvoří ortonormální bázi v podprostorou $\mathrm{Ker}\, C^{\perp}$, a ortonormální bází $\{f_j\} \subset \overline{\mathrm{Ran}\, U}$ určenou vztahy (8). Jestliže operátor C není konečnědimenzionální, tj. $J_C = \infty$, můžeme pomocí těchto veličin sestrojit posloupnost $\{C_n\}$ konečnědimenzionálních operátorů

$$C_n x := \sum_{j=1}^{n} (e_j, x)\, \mu(j)\, f_j\,.$$

Nyní podle (9a) platí

$$\|(C - C_n)\,x\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} (\mu(j))^2\,|(e_j, x)|^2 \leqq a_n^2\|x\|^2\,,$$

kde $a_n := \sup_{j>n} \mu(j)$, tj. $\|C - C_n\| \leqq a_n$. Nyní z tvrzení (d) věty 2 plyne $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, takže $C_n \to C$. Kanonický tvar (9) tedy udává konkrétní posloupnost konečnědimenzionálních operátorů, která stejnoměrně konverguje k danému $C \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$ (srv. s existenčním tvrzením věty 6.1.6).

6.3 HILBERTOVY-SCHMIDTOVY OPERÁTORY

V tomto paragrafu znamená $\mathscr{H}$ nekonečnědimenzionální separabilní Hilbertův prostor. Operátor $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je **Hilbertův-Schmitdův**, jestliže v $\mathscr{H}$ existuje ortonormální báze $\mathscr{E}(B) \equiv \{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ taková, že $\sum_{j=1}^{\infty} \|Bf_j\|^2 < \infty$. Množinu všech Hilbertových-Schmidtových operátorů na daném $\mathscr{H}$ značíme $\mathscr{J}_2(\mathscr{H})$, resp. $\mathscr{J}_2$.

6.3.1 Lemma: Jestliže $B \in \mathscr{J}_2$, potom $B^* \in \mathscr{J}_2$ a pro libovolnou ortonormální bázi $\mathscr{E} \equiv \{e_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathscr{H}$ platí

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|Be_j\|^2 < \infty\,, \tag{1}$$

přičemž součet řady nezávisí na $\mathscr{E}$.

Důkaz: Normy vektorů $\|Be_j\|$ vyjádříme pomocí Fourierových koeficientů vzhledem k bázi $\mathscr{E}(B)$: $\|Be_j\|^2 = \sum_k |(f_k, Be_j)|^2 = \sum_k |(B^*f_k, e_j)|^2$. Označíme-li $N_{\mathscr{E}}(B)$ součet řady (1) a užijeme toho, že pro řadu s nezápornými členy nezávisí její součet na pořadí sčítání, dostaneme

$$N_{\mathscr{E}}(B) = \sum_j \sum_k |(B^*f_k, e_j)|^2 = \sum_k \sum_j |(e_j, B^*f_k)|^2 = \sum_k \|B^*f_k\|^2 = N_{\mathscr{E}(B)}(B^*)\,.$$

Odtud nejprve pro $\mathscr{E} = \mathscr{E}(B)$ zjistíme, že $B^* \in \mathscr{J}_2$, neboť $N_{\mathscr{E}(B)}(B^*) = N_{\mathscr{E}(B)}(B) < \infty$, a potom pro libovolné $\mathscr{E}$ dostáváme $N_{\mathscr{E}}(B) = N_{\mathscr{E}(B)}(B)$. ■

Společná hodnota čísel $\sqrt{N_{\mathscr{E}}(B)}$ pro všechny ortonormální báze $\mathscr{E} \subset \mathscr{H}$ se značí $\|B\|_2$ a nazývá *Hilbertovou-Schmidtovou normou* operátoru B

$$\|B\|_2 := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|Be_j\|^2\right)^{1/2}; \tag{2}$$

důvod pro takové označení je patrný z následujícího tvrzení.

6.3.2 Věta: (a) Množina $\mathscr{I}_2$ je oboustranný $*$-ideál v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ a $\|\,.\,\|_2$ je norma na $\mathscr{I}_2$, přičemž pro všechna $B \in \mathscr{I}_2$ platí

$$\|B\|_2 \geqq \|B\| \,. \tag{3}$$

(b) Každý Hilbertův-Schmidtův operátor je kompaktní, tj. $\mathscr{I}_2(\mathscr{H}) \subset \mathscr{K}(\mathscr{H})$.

Důkaz: Nechť $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ je libovolná ortonormální báze v $\mathscr{H}$ a $B \in \mathscr{I}_2$.

(a) Pro libovolné $C \in \mathscr{I}_2$ dostaneme pomocí vztahů $\|(B+C)\,e_j\|^2 \leqq \|Be_j\|^2 + 2\|Be_j\|\,\|Ce_j\| + \|Ce_j\|^2$ a Hölderovy nerovnosti: $\|B+C\|_2 \leqq \|B\|_2 + \|C\|_2$. Dále je zřejmé, že $\|\alpha B\|_2 = |\alpha|\,\|B\|_2$ pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$. Jestliže $\|B\|_2 = 0$, platí $Be_j = 0$ pro $j = 1, 2, \ldots$, a ze spojitosti plyne $B = 0$. Tím je ověřeno, že $(\mathscr{I}_2, \|\,.\,\|_2)$ je normovaný prostor. Jestliže nyní $D \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, platí $\|DBe_j\| \leqq \|D\|\,\|Be_j\|$ pro $j = 1, 2, \ldots$; odtud je zřejmé, že $DB \in \mathscr{I}_2$, a pomocí implikace $B \in \mathscr{I}_2 \Rightarrow B^* \in \mathscr{I}_2$ (viz lemma 1) dostáváme $D^*B^* \in \mathscr{I}_2$ a $BD = (D^*B^*)^* \in \mathscr{I}_2$.

K ověření nerovnosti (3) stačí uvážit, že ke každému jednotkovému vektoru $x \in \mathscr{H}$ lze sestrojit ortonormální bázi $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathscr{H}$ takovou, že $x = f_1$. Potom $\|Bx\| \leqq (\sum_k \|Bf_k\|^2)^{1/2} = \|B\|_2$.

(b) Nechť E_n je projektor na podprostor $\{e_1, \ldots, e_n\}_{\text{lin}}$; potom $B_n := E_nB$ je konečnědimenzionální operátor a pro libovolné $x \in \mathscr{H}$ platí

$$\|(B - B_n)\,x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(e_j, (I - E_n)\,Bx)|^2 =$$

$$= \sum_{j=n+1}^{\infty} |(e_j, Bx)|^2 \leqq \|x\|^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \|B^*e_j\|^2 \,. \tag{4}$$

Jelikož $\sum_j \|B^*e_j\|^2 < \infty$, dostáváme $\|B - B_n\|^2 \leqq \sum_{j=n+1}^{\infty} \|B^*e_j\|^2 \to 0$, a proto $B \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$ (viz větu 6.1.3). ■

6.3.3 Poznámky: (a) Normě $\|\,.\,\|_2$ na $\mathscr{I}_2$ se říká také *absolutní norma* ([[AG]], § 31) a prvkům množiny $\mathscr{I}_2$ operátory s konečnou absolutní normou.

(b) Existují kompaktní operátory, které nepatří do $\mathscr{I}_2$, takže $\mathscr{I}_2(\mathscr{H}) \neq \mathscr{K}(\mathscr{H})$ (viz cvičení 13).

(c) Díky tomu, že každý Hilbertův-Schmidtův operátor je kompaktní, existuje ortonormální báze tvořená vlastními vektory operátoru $|B|$. Užijeme-li této báze k výpočtu $\|B\|_2$, dostaneme následující vyjádření pomocí singulárních hodnot operátoru B:

$$\|B\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mu_B(j)^2\right)^{1/2} . \tag{5}$$

Z definice (2) je vidět, že norma $\|\,.\,\|_2$ splňuje rovnoběžníkovou rovnost. Je proto indukována skalárním součinem $(\,.\,,\,.\,)_2$, pro nějž platí (viz § 1.4) vztah

$(B, C)_2 = \frac{1}{4}(\|B + C\|_2^2 - \|B - C\|_2^2) - (i/4)(\|B + iC\|_2^2 - \|B - iC\|_2^2)$, tj.

$$(B, C)_2 = \sum_{j=1}^{\infty} (Be_j, Ce_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (e_j, B^*Ce_j) . \tag{6}$$

Z této formule mj. plyne, že pro každou dvojici $B, C \in \mathscr{I}_2$ a libovolnou bázi $\mathscr{E} \equiv \{e_j\}$ řada $\sum_j (e_j, B^*Ce_j)$ konverguje (dokonce absolutně – ověřte!) a její součet nezávisí na $\mathscr{E}$.

Uvažujme posloupnost $\{B_n\} \subset \mathscr{I}_2$, která je cauchyovská vzhledem k $\|.\|_2$. V důsledku nerovnosti (3) je $\{B_n\}$ cauchyovská i ve stejnoměrné topologii, a tudíž existuje $B := \text{u-}\lim_{n\to\infty} B_n \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$. Zvolme nějakou ortonormální bázi $\{e_j\} \subset \mathscr{H}$ a libovolné $\varepsilon > 0$; potom pro všechna dosti velká n, m a všechna $N = 1, 2, \ldots$ platí

$$\sum_{j=1}^{N} \|(B_n - B_m) e_j\|^2 \leqq \|B_n - B_m\|_2^2 < \varepsilon^2 . \tag{7}$$

Dále z $B_n \to B$ plyne $\lim_{n\to\infty} \|(B_n - B_m) e_j\|^2 = \|(B - B_m) e_j\|^2$ pro $j = 1, 2, \ldots$. Provedeme-li v nerovnosti (7) limitní přechod nejprve vzhledem k n a potom k N, dostáváme $B \in \mathscr{I}_2$ a $\|B - B_m\|_2 < \varepsilon$ pro všechna dosti velká m, tj. $\lim_{m\to\infty} \|B - B_m\|_2 = 0$. Dospěli jsme tak k následujícímu závěru.

6.3.4 Tvrzení: Prostor $\mathscr{I}_2$ se skalárním součinem (6) je Hilbertův.

V této souvislosti upozorňujeme na to, že $\mathscr{I}_2$ není úplný vzhledem k normě $\|.\|$ (viz poznámky 6.1.4 a 3b).

6.3.5 Příklad: Abychom ilustrovali, jak lze využít toho, že $\mathscr{I}_2(\mathscr{H})$ je Hilbertův prostor, ukážeme, že pomocí něj lze realizovat tenzorový součin $\mathscr{H}^* \otimes \mathscr{H}$ pro libovolné separabilní $\mathscr{H}$. Nechť $x \mapsto \bar{x}$ je antilineární izomorfismus prostorů $\mathscr{H}, \mathscr{H}^*$, takže pro libovolná $x, y \in \mathscr{H}$ platí $(x, y) = (\bar{y}, \bar{x})_*$ (srv. cvičení 4.6). Zobrazení $\varphi: \mathscr{H}^* \times \mathscr{H} \to \mathscr{I}_2(\mathscr{H})$ definované vztahem $\varphi(\bar{x}, y) := P_{yx} = (x, .)\, y$ (srv. cvičení 5.6), je potom bilineární a splňuje axiom (ts 1) z § 4.6:

$$(P_{y_1x_1}, P_{y_2x_2})_2 = \sum_j (P_{y_1x_1}e_j, P_{y_2x_2}e_j) = \sum_j (y_1, y_2)(x_2, e_j)(e_j, x_1) = (y_1, y_2)(\bar{x}_1, \bar{x}_2)_* .$$

Axiom (ts 2) je splněn díky tomu, že $\{P_{yx}\colon x, y \in \mathscr{H}\}$ je totální množina v $\mathscr{I}_2(\mathscr{H})$ (cvičení 14). Pro každý separabilní Hilbertův prostor $\mathscr{H}$ tedy platí ve smyslu poznámky 4.6.3

$$\mathscr{I}_2(\mathscr{H}) = \mathscr{H}^* \otimes \mathscr{H} .$$

Na závěr uvedeme větu, která udává funkcionální realizaci Hilberových-Schmidtových operátorů na prostorech $L^2(M, d\mu)$ se σ-konečnou mírou μ takovou, že prostor $L^2(M, d\mu)$ je separabilní. Užijeme výsledků cvičení 5.5 a zkráceného označení $L^2 \equiv L^2(M, \mathrm{d}\mu)$, resp. $L^2_\otimes \equiv L^2(M \times M, \mathrm{d}(\mu \otimes \mu))$; integrační obor ve všech integrálech vzhledem k míře μ je M, vzhledem k $\mu \otimes \mu$ množina $M \times M$.

6.3.6 Věta: Operátor $B \in \mathscr{B}(L^2)$ je Hilbertův-Schmidtův právě tehdy, když existuje $k_B \in L^2_\otimes$ tak, že pro všechna $f \in L^2$ platí

$$(Bf)(x) = \int k_B(x, y)\, f(y)\, \mathrm{d}\mu(y), \tag{8}$$

tj. množina $\mathscr{J}_2(L^2)$ je tvořena právě všemi Hilbertovými-Schmidtovými *integrálními* operátory. Kromě toho platí

$$\|B\|_2^2 = \|k_B\|_\otimes^2 = \int |k_B(x, y)|^2\, \mathrm{d}(\mu \otimes \mu)(x, y). \tag{9}$$

Důkaz: Nechť $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ je ortonormální báze v L^2; pro $m, n = 1, 2, \ldots$ tvoří vektory h_{mn}, definované vztahem $h_{mn}(x, y) := g_m(x)\, \overline{g_n(y)}$ ortonormální bázi v $L^2_\otimes$ (tvrzení 4.3.5). Pro dané $B \in \mathscr{J}_2(L^2)$ označme

$$b_{mn} := (g_m, Bg_n), \tag{10a}$$

takže $\|B\|_2^2 = \sum_n \|Bg_n\|^2 = \sum_{m,n} |b_{mn}|^2$. V důsledku toho je vztahem

$$k_B := \sum_{m,n} b_{mn} h_{mn}, \tag{10b}$$

v němž limitní přechod se vztahuje k normě $\|.\|_\otimes$, definován prvek prostoru $L^2_\otimes$. Jemu odpovídá podle výsledku cvičení 5.5 Hilbertův-Schmidtův integrální operátor, který označíme K_B; potom pro všechna $m, n = 1, 2, \ldots$ dostáváme pomocí Fubiniovy věty a vztahů (10)

$$(g_m, K_B g_n) = \int \overline{g_m(x)} \left[\int k_B(x, y)\, g_n(y)\, \mathrm{d}\mu(y) \right] \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int \overline{h_{mn}(x, y)}\, k_B(x, y)\, \mathrm{d}(\mu \otimes \mu)(x, y) = (h_{mn}, k_B)_\otimes = b_{mn} = (g_m, Bg_n).$$

Jelikož oba operátory B, K_B jsou omezené, plyne odtud $B = K_B$.

Opačnou implikaci a vztah (9) dostaneme, když napíšeme pro dané $k \in L^2_\otimes$ Parsevalovu rovnost vzhledem k bázi $\{h_{mn}\}$, označíme B_k operátor přiřazený funkci k podle (8) a opět užijeme Fubiniovu větu

$$\|k\|^2 = \sum_{m,n} |(h_{mn}, k)_{\otimes}|^2 = \sum_{m,n} \left| \int \overline{g_m(x)} \left[\int k(x, y)\, g_n(y)\, \mathrm{d}\mu(y) \right] \mathrm{d}\mu(x) \right|^2 =$$

$$= \sum_{m,n} |(g_m, B_k g_n)|^2 = \sum_n \|B_k g_n\|^2 = \|B_k\|_2^2 . \qquad \blacksquare$$

6.3.7 Poznámka: Vztahy (10a, b) definují lineární zobrazení $B \mapsto k_B$ prostoru $\mathscr{J}_2(L^2)$ do $L^2_{\otimes}$. Z věty vyplývá, že toto zobrazení je izomorfismem uvedených Hilbertových prostorů, přičemž inverzní zobrazení je dáno formulí (8).

6.4 JADERNÉ OPERÁTORY

Stejně jako v předchozím paragrafu rozumíme symbolem $\mathscr{H}$ nekonečnědimenzionální separabilní Hilbertův prostor. Abychom mohli definovat jaderný operátor, musíme nejprve zobecnit pojem stopy operátoru známý z lineární algebry. Zvolíme nějakou ortonormální bázi $\mathscr{E} \equiv \{e_j\}$ v $\mathscr{H}$ a pro daný *pozitivní* operátor $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ utvoříme posloupnost nezáporných čísel $\{(e_j, Ae_j)\}$. Součet odpovídající nekonečné řady

$$\operatorname{Tr} A := \sum_j (e_j, Ae_j) \tag{1}$$

má vždy smysl: je buď konečný nebo $\operatorname{Tr} A = +\infty$. Dále je podstatné, že $\operatorname{Tr} A$ nezávisí na volbě báze, což je ihned patrné z lemmatu 6.3.1, užijeme-li vztahu $(e_j, Ae_j) = \|\sqrt{A}e_j\|^2$. To zjevně stačí k tomu, abychom vztah (1) prohlásili za hledané rozšíření definice stopy na všechny pozitivní operátory na $\mathscr{H}$. Naším cílem je další zobecnění tohoto pojmu na třídu operátorů z $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, která zahrnuje i operátory, jež nejsou pozitivní, a odvození některých vlastností této třídy.

Operátor $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je **jaderný**, jestliže $\operatorname{Tr}|B| < \infty$. Množinu všech jaderných operátorů na daném $\mathscr{H}$ označíme $\mathscr{J}_1(\mathscr{H})$, resp. $\mathscr{J}_1$.

6.4.1 Tvrzení: (a) Každý jaderný operátor B je Hilbertův-Schmidtův, a tedy kompaktní, tj.

$$\mathscr{J}_1(\mathscr{H}) \subset \mathscr{J}_2(\mathscr{H}) \subset \mathscr{K}(\mathscr{H}) , \tag{2}$$

a splňuje vztahy

$$\operatorname{Tr}|B| = \|\sqrt{|B|}\|_2^2 = \sum_j \mu_B(j) , \tag{3}$$

$$\operatorname{Tr}|B| \geqq \|B\|_2 \geqq \|B\| . \tag{4}$$

(b) Operátor $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je jaderný právě tehdy, když je součinem dvou Hilbertových-Schmidtových operátorů.

Důkaz: (a) viz cvičení 15.

(b) Podle vztahu (3) pro každé $B \in \mathscr{J}_1$ platí $\sqrt{|B|} \in \mathscr{J}_2$. Nyní z polárního rozkladu $B = W|B|$ plyne, že B se rovná součinu Hilbertových-Schmidtových operátorů $W\sqrt{|B|}$ a $\sqrt{|B|}$. Naopak nechť $C, D \in \mathscr{I}_2$; ukážeme, že $\operatorname{Tr}|CD| < \infty$. Užijeme k tomu polárního rozkladu $CD = W|CD|$, z nějž plyne $|CD| = W^*CD$ (viz cvičení 5.38). Dostaneme tak odhad

$$\operatorname{Tr}|CD| = \sum_j |(e_j, W^*CDe_j)| = \sum_j |(C^*We_j, De_j)| \leqq$$
$$\leqq \left(\sum_j \|C^*We_j\|^2 \sum_j \|De_j\|^2\right)^{1/2} = \|D\|_2 \, \|C^*W\|_2 < \infty\,,$$

neboť $C^*W \in \mathscr{I}_2$. ■

6.4.2 Věta: Množina $\mathscr{I}_1$ je oboustranný $*$-ideál v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ a zobrazení $B \mapsto \operatorname{Tr}|B|$ je norma na $\mathscr{I}_1$.

Důkaz: Pomocí části (b) předchozího tvrzení a věty 6.3.2 se přímo ověří, že z podmínky $B \in \mathscr{I}_1$ plyne $B^* \in \mathscr{I}_1$ a $BC, CB \in \mathscr{I}_1$ pro všechna $C \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Dále ze vztahu (1) dostaneme $\operatorname{Tr}|\alpha B| = |\alpha| \operatorname{Tr}|B|$ pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$ a pomocí (4) zjistíme, že $\operatorname{Tr}|B| = 0$ jen pro $B = 0$.

K dokončení důkazu stačí ověřit, že pro $B, C \in \mathscr{I}_1$ platí $\operatorname{Tr}|B + C| \leqq \leqq \operatorname{Tr}|B| + \operatorname{Tr}|C|$. Tento vztah je přímý důsledek vyjádření stopy jaderného operátoru pomocí singulárních hodnot (viz (3)) a nerovností

$$\mu_{B+C}(j) \leqq \mu_B(j) + \mu_C(j)\,,$$

které plynou z formule (6.2.7). ■

6.4.3 Poznámka: Podle analogie s označením zavedeným pro $\mathscr{I}_2$ se norma $\operatorname{Tr}|\,.\,|$ značí též $\|\,.\,\|_1$. Ze stejných důvodů jako v případě $\mathscr{I}_2$ není podprostor $\mathscr{I}_1$ uzavřený vzhledem ke stejnoměrné topologii (viz poznámku za tvrzením 6.3.4). Je však úplný vzhledem k normě $\|\,.\,\|_1$, tj. $(\mathscr{I}_1, \|\,.\,\|_1)$ je Banachův prostor. K důkazu se užije nerovnosti (4) a spojitosti singulárních hodnot ve stejnoměrné topologii (viz cvičení 9); dále se postupuje úplně stejně jako při odvození tvrzení 6.3.4.

Vraťme se nyní k problému rozšíření definice stopy na operátory $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, které nejsou pozitivní. Je přirozené opět požadovat, aby veličina $\operatorname{Tr} B$ byla vyjádřena řadou $\sum_j (e_j, Be_j)$, jejíž součet nezávisí na bázi. Ukazuje se, že tyto podmínky jsou splněny pro každý jaderný operátor.

6.4.4 Věta: (a) Jestliže operátor B je jaderný, potom definice

$$\operatorname{Tr} B := \sum_j (e_j, Be_j) \tag{5}$$

je korektní v tom smyslu, že řada vpravo absolutně konverguje a její součet nezávisí na volbě ortonormální báze $\{e_j\}$.

(b) Zobrazení $B \mapsto \operatorname{Tr} B$ je omezený lineární funkcionál na Banachově prostoru $(\mathscr{I}_1, \|\,.\,\|_1)$; navíc platí $\|\operatorname{Tr}(\,.\,)\| = 1$.

(c) Pro každé $B \in \mathscr{J}_1$, $C \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ jsou splněny rovnosti

$$\operatorname{Tr} B^* = \overline{\operatorname{Tr} B}\,, \tag{6a}$$

$$\operatorname{Tr}(BC) = \operatorname{Tr}(CB)\,. \tag{6b}$$

Důkaz: Nechť $\{f_j\}$ je ortonormální báze v $\mathscr{H}$ tvořená vlastními vektory operátoru $|B|$, $\{e_j\}$ je libovolná ortonormální báze v $\mathscr{H}$ a W_B je parciální izometrie vystupující v polárním rozkladu operátoru B.

(a) Ověříme nejprve absolutní konvergenci řady (5):

$$\sum_j |(e_j, Be_j)| = \sum_j |(B^* e_j, e_j)| \leqq$$
$$\leqq \sum_j \sum_k |(B^* e_j, f_k)\,(f_k, e_j)| = \sum_j \sum_k |(e_j, Bf_k)\,(f_k, e_j)|\,.$$

Jelikož jde o řadu s nezápornými členy, můžeme zaměnit pořadí sčítání podle j a k, čímž dostaneme odhad

$$\sum_j |(e_j, Be_j)| \leqq \sum_k \Big(\sum_j |(e_j, Bf_k)|^2 \sum_j |(e_j, f_k)|^2\Big)^{1/2} =$$
$$= \sum_k \|Bf_k\| = \sum_k \||B|\,f_k\| = \sum_k \mu_B(k) = \operatorname{Tr}|B| < \infty\,.$$

Současně jsme dokázali, že dvojnásobná řada

$$\sum_j \sum_k (e_j, Bf_k)\,(f_k, e_j) = \sum_j (e_j, Be_j) \tag{7}$$

absolutně konverguje, takže lze zaměnit pořadí sčítání:

$$\sum_j (e_j, Be_j) = \sum_k \sum_j (f_k, e_j)\,(e_j, Bf_k) = \sum_k (f_k, Bf_k)\,.$$

Díky libovolnosti báze $\{e_j\}$ vyplývá z posledních rovností nezávislost formule (5) na bázi.

(b) Linearita je zřejmá. Z odhadu

$$|\operatorname{Tr} B| \leqq \sum_j |(f_j, W_B|B|\,f_j)| = \sum_j \mu_B(j)\,|(f_j, W_B f_j)| \leqq \sum_j \mu_B(j) = \operatorname{Tr}|B|$$

plyne, že $\operatorname{Tr}(\,.\,)$ je omezený funkcionál splňující $\|\operatorname{Tr}(\,.\,)\| \leqq 1$. Současně pro libovolný jednodimenzionální projektor E platí $1 = \operatorname{Tr} E \leqq \|\operatorname{Tr}(\,.\,)\|$, tj. $\|\operatorname{Tr}(\,.\,)\| = 1$.

(c) Rovnost (6a) plyne přímo z definice (5). K ověření (6b) užijeme toho, že každý omezený operátor lze vyjádřit jako lineární kombinaci unitárních operátorů (viz cvičení 5.31). Stačí tedy ověřit, že $\mathrm{Tr}\,(BU) = \mathrm{Tr}\,(UB)$ pro libovolný unitární operátor U:

$$\mathrm{Tr}\,(BU) = \sum_j (e_j, BUe_j) = \sum_j (Ue_j, UBUe_j) = \mathrm{Tr}\,(UB)\,,$$

neboť $\{Ue_j\}$ je ortonormální báze. ∎

Na závěr se seznámíme se základními vlastnostmi tzv. statistických operátorů, s nimiž budeme v pozdějších kapitolách často pracovat. Jaderný operátor W nazýváme **statistickým operátorem**, jestliže W je pozitivní a splňuje normalizační podmínku $\mathrm{Tr}\, W = 1$. Z této definice je ihned patrné, že *statistické operátory tvoří konvexní podmnožinu* $\mathscr{W} \subset \mathscr{J}_1$: jestliže $W, W' \in \mathscr{W}$ a $0 \leqq \alpha \leqq 1$, potom $\alpha W + (1-\alpha)\, W' \geqq 0$ a $\mathrm{Tr}\,(\alpha W + (1-\alpha)\, W') = \alpha\, \mathrm{Tr}\, W + (1-\alpha)\, \mathrm{Tr}\, W' = 1$, takže $\alpha W + (1-\alpha)\, W' \in \mathscr{W}$.

Díky tomu, že statistický operátor je pozitivní, jsou jeho singulární hodnoty totožné s vlastními hodnotami. Je zvykem značit je w_j, přičemž posloupnost $\{w_j\}$ je sestavena z množiny všech vlastních hodnot (tedy i případných nul) tak, že každá vlastní hodnota se opakuje podle toho, jaká je její násobnost. Pro $j = 1, 2, \ldots$ tedy platí

$$0 \leqq w_j \leqq 1 \tag{9a}$$

a z normalizační podmínky plyne (viz (3))

$$\sum_j w_j = 1\,. \tag{9b}$$

Připomeňme ještě, že podle věty 6.2.4 existuje ortonormální báze $\{e_j\}$ tvořená vlastními vektory operátoru W:

$$We_j = w_j e_j\,, \qquad j = 1, 2, \ldots\,.$$

Z podmínek (9) je zřejmé, že v posloupnosti $\{w_j\}$ může platit $w_j = 1$ nejvýše pro jednu hodnotu j, a to nastane právě tehdy, když $\sum_j w_j^2 = \sum_j w_j$. V tom, a jedině v tom případě je W projektor, a to jednodimenzionální – $\mathrm{Ran}\, W = \{e_j\}_{\mathrm{lin}}$; platí tedy ekvivalence

$$W^2 = W \Leftrightarrow \mathrm{Tr}\, W^2 = \mathrm{Tr}\, W\,. \tag{10}$$

Existuje ještě jeden způsob, jak charakterizovat projektory patřící do množiny $\mathscr{W}$.

6.4.5 Tvrzení: Statistický operátor je (jednodimenzionální) projektor právě tehdy, když je extremálním bodem množiny $\mathscr{W}$, tj. když z podmínek $W = \alpha W_1 + (1-\alpha)\, W_2$ pro $0 < \alpha < 1$ a $W_1, W_2 \in \mathscr{W}$ plyne $W = W_1 = W_2$.
Důkaz přenecháváme čtenáři (cvičení 26).

§ **6.1** • Uvedenou definici kompaktního operátoru lze zobecnit na zobrazení mezi Banachovými prostory $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$: operátor $C \in \mathscr{B}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ je kompaktní, jestliže pro každou omezenou množinu $M \subset \mathscr{X}$ je CM prekompaktní množina v $\mathscr{Y}$. Z příslušných důkazů je zřejmé, že tvrzení (a) věty 3 a nutná podmínka ve větě 2 zůstávají v platnosti i pro tento obecnější případ. Platí i tvrzení (c) věty 3 – v literatuře se uvádí jako Schauderova věta (viz ⟦Ka⟧, § III.4, ⟦Yo⟧, § X.5). Je-li prostor $\mathscr{X}$ reflexivní, platí věta 2 v obou směrech (viz větu 3.5.6).

§§ **6.3.4** • Hilbertovy-Schmidtovy, resp. jaderné operátory lze alternativně definovat pomocí singulárních hodnot (cvičení 11 a 16). To umožňuje zavést množiny $\mathscr{I}_p$ pro všechna reálná $p \geqq 1$: do $\mathscr{I}_p$ patří všechny kompaktní operátory C, pro jejichž singulární hodnoty platí $\{\mu_C(j)\}_{j=1}^{\infty} \in l^p$. Pomocí vlastností singulárních hodnot uvedených ve cvičeních 7 a 9 lze snadno dokázat, že pro každé $p \geqq 1$ je $\mathscr{I}_p$ oboustranný $*$-ideál, $\mathscr{I}_p \subset \mathscr{K}(\mathscr{H})$ a zobrazení $B \mapsto \|B\|_p := \left(\sum_j \mu_B(j)^p\right)^{1/p}$ je norma na $\mathscr{I}_p$ taková, že $(\mathscr{I}_p, \|\cdot\|_p)$ je B-prostor.

Uvedené vlastnosti prostorů $\mathscr{I}_p$ jsou součástí obecné teorie oboustranných ideálů v prostoru $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, která byla vytvořena J. W. Calkinem; lze se o ní poučit např. v ⟦Si 3⟧.

• Pojem jaderného operátoru lze zavést i v prostoru $\mathscr{B}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, kde $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ jsou libovolné B-prostory: operátor $C \in \mathscr{B}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ je jaderný, jestliže existují omezené posloupnosti $\{f_n\} \subset \mathscr{X}^*$, $\{y_n\} \subset \mathscr{Y}$ a posloupnost komplexních čísel splňující $\sum_n |c_n| < \infty$ tak, že pro každé $x \in \mathscr{X}$ platí $Cx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)\, y_n$. Odtud se snadno zjistí, že C je limitou posloupnosti konečnědimenzionálních operátorů vzhledem k normě v $\mathscr{B}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, a je proto kompaktní. Obdobně se definují jaderné operátory zobrazující daný lokálně konvexní prostor do B-prostoru; pomocí nich zavedl Grothendieck důležitý pojem jaderného (nukleárního) prostoru (viz ⟦Yo⟧, dodatek ke kap. X.).

• Z výsledku cvičení 17 (ii) plyne následující vyjádření veličiny $\|B\|$, jež je zajímavým doplňkem vztahu (3.2.3) a formulí ze cvičení 5.1:

$$\|B\| = \sup\{|\mathrm{Tr}\,(BC)|:\ \mathrm{Tr}\,|C| = 1\}.$$

• Prostor $\mathscr{I}_2$ je Hilbertův, a proto každý omezený lineární funkcionál f na $\mathscr{I}_2$ má tvar $f(.) = (C_f, .)_2 = \mathrm{Tr}\,(C_f, .)$ pro nějaké $C_f \in \mathscr{I}_2$, přičemž $\|f\| = \|C_f\|_2$. Probereme analogickou úlohu pro $\mathscr{I}_1 \equiv (\mathscr{I}_1, \|\cdot\|_1)$. Nechť $g \in \mathscr{I}_1^*$; operátor P_{xy} zavedený ve cvičení 5.6 patří do $\mathscr{I}_1$ pro všechna $x, y \in \mathscr{H}$, přičemž $\|P_{xy}\|_1 = \|P_{xy}\| = \|x\|\,\|y\|$. Potom $[x, y] \mapsto F(y, x) := g(P_{xy})$ je omezená seskvilineární forma na $\mathscr{H}$ a podle tvrzení 5.1.4 existuje $B_g \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ takové, že $g(P_{xy}) = (y, B_g x) = \mathrm{Tr}\,(B_g P_{xy})$. Nyní $g(.)$ i $\mathrm{Tr}\,(B_g .)$ jsou spojité na $\mathscr{I}_1$ a vzhledem k tomu, že $\{P_{xy}\colon x, y \in \mathscr{H}\}$ je totální v $\mathscr{I}_1$ (viz cvičení 24), platí $g(.) = \mathrm{Tr}\,(B_g .)$. S přihlédnutím k výsledkům cvičení 17 dospíváme k následujícímu závěru: $g \in \mathscr{I}_1^*$ právě tehdy, když existuje $B_g \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ takové, že $g(.) = \mathrm{Tr}\,(B_g .)$, přičemž $\|g\| = \|B_g\|$. Zobrazení $g \mapsto B_g$ je tedy lineární izometrie prostorů $\mathscr{I}_1^*$ a $\mathscr{B}(\mathscr{H})$.

Cvičení

1. (i) Nechť $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$; ke splnění podmínky $\dim \mathrm{Ran}\, T = m < \infty$ je nutné a stačí, aby existovaly lineárně nezávislé množiny $\{f_1, \dots, f_m\}, \{g_1, \dots, g_m\} \subset \mathscr{H}$ takové, že

$$Tx = \sum_{j=1}^{m} (f_j, x)\, g_j$$

pro všechna $x \in \mathscr{H}$.
(ii) Jestliže pro omezený operátor T platí $\dim \mathrm{Ran}\, T = m$, potom $\dim \mathrm{Ran}\, T^* = m$.
Návod: (i) Při ověřování postačující podmínky uvažte, že v důsledku lineární nezávislosti vektorů $f_1, \dots, f_m$ existuje pro každé j, $1 \leqq j \leqq m$, vektor $x_j \in \{f_1, \dots, f_m\}_{\mathrm{lin}}$ takový, že $Tx_j = g_j$.

2. Pro $\dim \mathscr{H} = \infty$ není množina $\mathscr{K}(\mathscr{H})$ uzavřená vzhledem k silné operátorové topologii (a tedy ani vzhledem k τ_w).
Návod: Viz větu 5.4.9 a příklad 5.4.1.

3. Je dána posloupnost $\{B_n\} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ a nechť $B_n \xrightarrow{s} B$. Potom pro libovolné $C \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$ platí $\|B_n C - BC\| \to 0$.
Návod: Nechť K_1 je jednotková koule v $\mathscr{H}$: pomocí konečné ε-sítě pro množinu CK_1 a omezenosti posloupnosti $\{B_n\}$ ukažte, že pro všechna $n > n(\varepsilon)$ a všechna $x \in K_1$ platí $\|(B_n C - BC)\, x\| <$ konst. ε.

4. Pro každý kompaktní operátor C je podprostor $(\mathrm{Ker}\, C)^\perp$ separabilní.
Návod: Nechť $\mathscr{E} \equiv \{e_\alpha\}$ je ortonormální báze v $(\mathrm{Ker}\, C)^\perp$; platí $\mathscr{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{E}_n$, kde $\mathscr{E}_n := \{e_\alpha \in \mathscr{E}\colon \|Ce_\alpha\| \geqq 1/n\}$. Ukažte, že všechny množiny $\mathscr{E}_n$ jsou konečné (viz tvrzení 4.2.8b).

5. Normální kompaktní operátor $D \neq 0$ má alespoň jednu nenulovou vlastní hodnotu.
Návod: Nejprve vyřešte pomocí tvrzení 5.6.5 speciální případ $D^* = D$; v obecném případě uvažte, že z komutativity operátorů $\mathrm{Re}\, D$ a $\mathrm{Im}\, D$ plyne, že každý vlastní podprostor jednoho z nich je invariantním podprostorem druhého.

6. (i) Operátor $C \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je kompaktní právě tehdy, když $|C|$ je kompaktní.
(ii) Pozitivní operátor A je kompaktní právě tehdy, když $\sqrt{A}$ je kompaktní.
(iii) Nechť $B \geqq A \geqq 0$ a $B \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$; potom $A \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$.

Návod: (i) Viz cvičení 5.38, (ii) užijte postupu z důkazu tvrzení (c) věty 6.1.3, (iii) dokažte, že $\sqrt{A}$ je kompaktní.

7. Dokažte následující vlastnosti singulárních hodnot kompaktního operátoru C:
(i) $\mu_C(j) = \mu_{C^*}(j)$,
(ii) $\mu_{BC}(j) \leqq \|B\|\, \mu_C(j)$, $\mu_{CB}(j) \leqq \|B\|\, \mu_C(j)$, $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$.
Návod: (i) Ze vztahu (6.2.8a) plyne $W^* f_j = e_j$, odtud $CC^* f_j = \mu_C(j)^2 f_j$ a užije se výsledku cvičení 5.17, (ii) viz formule (6.2.7).

8. Nechť pro daný kompaktní operátor C a uzavřený podprostor $\mathscr{G} \subset \mathscr{H}$ platí $\lambda \equiv \sup\{\|Cx\|: x \in \mathscr{G}, \|x\| = 1\} > 0$. Potom existuje jednotkový vektor $y \in \mathscr{G}$ takový, že $\lambda = \|Cy\|$.
Návod: Užijte slabé kompaktnosti omezených množin v $\mathscr{H}$.

9. Singulární hodnoty daného kompaktního operátoru C tvoří nerostoucí posloupnost kladných čísel $\{\mu_C(j)\}_{j=1}^{J_C}$, kde $J_C := \dim(\operatorname{Ker} C)^\perp$. Jestliže $J_C < \infty$, dodefinujeme $\mu_C(j) := 0$ pro $j > J_C$, což je konzistentní s formulí (6.2.7). Potom pro libovolná $C, D \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$ platí

$$|\mu_C(j) - \mu_D(j)| \leqq \mu_{C-D}(j) \leqq \mu_{C-D}(1) = \|C - D\| \,.$$

Ve speciálním případě, kdy operátor $C - D$ je konečnědimenzionální, $\dim \operatorname{Ran}(C - D) = m$, platí $\mu_C(j) = \mu_D(j)$ pro všechna $j \geqq m + 1$.
Návod: Z (6.2.4b) a cvičení 5.19 plyne $l_C(\mathscr{G}_j) \leqq l_{C-D}(\mathscr{G}_j) + l_D(\mathscr{G}_j)$.

10. Nechť $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ a $\dim \operatorname{Ker} B^\perp = \infty$; pak B je kompaktní, jestliže pro každou ortonormální množinu $\{e_j\}_{j=1}^\infty \subset \operatorname{Ker} B^\perp$ platí $Be_j \to 0$.
Návod: Sestrojte rekurentně ortonormální množinu $\{e_j\} \subset \operatorname{Ker} B^\perp$ takovou, že $\|Be_{n+1}\| \geqq \frac{1}{2}\sup\{\|Bx\|: \|x\| = 1,\ x \in \operatorname{Ker} B^\perp \cap \{e_1, \dots, e_n\}^\perp\} = \frac{1}{2}\|B - BE_n\|$, kde E_n je projektor na $\{e_1, \dots, e_n\}_{\text{lin}}$.

11. Operátor $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je Hilbertův-Schmidtův právě tehdy, když je kompaktní a pro posloupnost jeho singulárních hodnot platí $\{\mu_B(j)\}_{j=1}^\infty \subset l^2$.

12. Množina konečnědimenzionálních operátorů je všude hustá v Hilbertově prostoru $\mathscr{J}_2$.

13. Na separabilním $\mathscr{H}$ sestrojte kompaktní operátor, který není Hilbertův-Schmidtův.
Návod: Viz příklad 5.6.8.

14. Pro každou dvojici $x, y \in \mathscr{H}$ patří operátor $P_{xy} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ (viz cvičení 5.6) do $\mathscr{J}_2(\mathscr{H})$. Je-li $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ ortonormální báze v $\mathscr{H}$, potom $\{P_{e_j e_k}: j, k = 1, 2, \dots\}$ je ortonormální báze v Hilbertově prostoru $\mathscr{J}_2(\mathscr{H})$, a tento prostor je tudíž separabilní.

196 15. Dokažte tvrzení 6.4.1(a).
Návod: Pro libovolnou bázi $\{e_j\} \subset \mathscr{H}$ platí $|(e_j, |B|\, e_k)|^2 \leqq (e_j, |B|\, e_j)\,(e_k, |B|\, e_k)$.

16. (i) Operátor $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je jaderný právě tehdy, když je kompaktní a pro posloupnost jeho singulárních hodnot platí $\{\mu_B(j)\} \subset l^1$.
(ii) Množina konečnědimenzionálních operátorů je všude hustá v B-prostoru $(\mathscr{J}_1, \|\cdot\|_1)$.

17. (i) Pro daný jaderný operátor C je zobrazení $B \mapsto f_C(B) := \mathrm{Tr}\,(BC)$ omezený lineární funkcionál na $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, přičemž platí $\|f_C\| = |C|_1 = \mathrm{Tr}\,|C|$.
(ii) Pro dané $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je zobrazení $C \mapsto g_B(C) := \mathrm{Tr}\,(BC)$ omezený lineární funkcionál na prostoru $(\mathscr{J}_1, \|\cdot\|_1)$ a platí $\|g_B\| = \|B\|$.
Návod: (i) Užijte polárního rozkladu $C = W_C|C|$.
(ii) Jestliže $x \in \mathscr{H}$ je jednotkový vektor, potom platí (viz cvičení 5.6) $\mathrm{Tr}\,(BP_{x,Bx}) = \|Bx\|^2$ a $\mathrm{Tr}\,|P_{x,Bx}| = \|Bx\|$.

18. Nechť $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ a $C \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$; potom
(i) $\mathrm{Tr}\,|BC| \leqq \|B\|\,\mathrm{Tr}\,|C|$,
(ii) $\mathrm{Tr}\,|C| = \mathrm{Tr}\,|C^*|$.
Návod: (i) Užijte polárního rozkladu operátorů BC a C; (ii) – viz cvičení 7.

19. Je dán jaderný operátor C a slabě konvergentní posloupnost $\{B_n\} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Jestliže $B := \operatorname*{w-lim}_{n\to\infty} B_n$, potom $\mathrm{Tr}\,(B_nC) \to \mathrm{Tr}\,(BC)$.
Návod: Posloupnost $\{\|B_n\|\}$ je omezená (viz důkaz tvrzení 5.2.6), takže řada $\sum_j (e_j, (B - B_n)\, Ce_j)$ konverguje stejnoměrně vzhledem k n.

20. Libovolné statistické operátory W_1, W_2 splňují $0 \leqq \mathrm{Tr}\,(W_1W_2) \leqq 1$.

Následující tři cvičení jsou věnována tenzorovým součinům kompaktních, Hilbertových-Schmidtových a jaderných operátorů na prostoru $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$. Index r nabývá hodnot 1, 2; normu na $\mathscr{B}(\mathscr{H}_r)$ značíme $\|\cdot\|^{(r)}$, podobně $\|\cdot\|_1^{(r)}$, resp. $\|\cdot\|_2^{(r)}$ je Tr-norma na $\mathscr{J}_1(\mathscr{H}_r)$, resp. Hilbertova-Schmidtova norma na $\mathscr{J}_2(\mathscr{H}_r)$.

21. Tenzorový součin konečnědimenzionálních operátorů $B_r \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_r)$ je konečnědimenzionální.

22. Jestliže $C_r \in \mathscr{K}(\mathscr{H}_r)$, potom $C_1 \otimes C_2$ je kompaktní.
Návod: Užijte větu 6.1.6, vztah (5.7.3) a předchozí cvičení.

23. (i) Pro $p = 1, 2$ platí: jestliže $B_r \in \mathscr{J}_p(\mathscr{H}_r)$, potom $B_1 \otimes B_2 \in \mathscr{J}_p(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2)$ a $\|B_1 \otimes B_2\|_p = \|B_1\|_p^{(1)}\,\|B_2\|_p^{(2)}$.
(ii) Jsou-li C_r jaderné operátory na $\mathscr{H}_r$ a $B_r \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_r)$, potom pro jaderný operátor $(B_1 \otimes B_2)(C_1 \otimes C_2)$ platí

$$\mathrm{Tr}\,(B_1 \otimes B_2)(C_1 \otimes C_2) = \mathrm{Tr}^{(1)}(B_1C_1)\,\mathrm{Tr}^{(2)}(B_2C_2)\,.$$

(iii) Tenzorový součin statistických operátorů $W_r \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_r)$ je statistický operátor na prostoru $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$.

24. S označením z cvičení 14 a komentáře k §§ 3, 4 platí pro každé $p \in [1, \infty)$: množina $\{P_{xy}\colon x, y \in \mathscr{H}\}$ je totální v B-prostoru $\mathscr{J}_p \equiv (\mathscr{J}_p, \|\,.\,\|_p)$.
Návod: Kanonický rozklad daného $C \in \mathscr{J}_p$ lze zapsat ve tvaru $C = \text{u-}\lim_{n \to \infty} C_n$, kde $C_n := \sum_{j=0}^{n} \mu_C(j)\, P_{f_j e_j}$, přičemž platí $|C - C_n| = \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu_C(j)\, E_j$, kde E_j je projektor na $\{e_j\}_{\text{lin}}$.

25. Nechť $\{E_j\colon 1 \leqq j \leqq \infty\}$ je množina libovolných jednodimenzionálních projektorů na separabilním $\mathscr{H}$ a množina $\{w_j\colon 1 \leqq j \leqq \infty\} \subset \mathbb{R}^+$ splňuje $\sum_j w_j = 1$. Pak posloupnost $W_n := \sum_{j=1}^{n} w_j E_j$ stejnoměrně konverguje a její limita je statistický operátor.

26. Dokažte tvrzení 6.4.5.
Návod: Užijte cvičení 20 a vlastností stopy.

7.1 MNOŽINA $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. SDRUŽENÝ OPERÁTOR

Symbolem $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ označíme množinu všech lineárních operátorů $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, pro něž platí $\overline{D_T} = \mathcal{H}$ – nazýváme je **hustě definovanými** operátory. Platí inkluze $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$, množina $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ však obsahuje i neomezené operátory: příkladem je operátor Q násobení nezávisle proměnnou na $L^2(\mathbb{R})$ (viz dále příklad 5): pro jednotkové vektory φ_n, $n = 0, 1, \ldots$, kde $\varphi_n(x) := (2(2n)!)^{-1/2}\, x^n e^{-|x|/2}$, platí $\|Q\varphi_n\|^2 = (2n+1)(2n+2)$.

Je-li operátor T neomezený, nedává podmínka $\overline{D_T} = \mathcal{H}$ možnost rozšířit jej nějakým standardním způsobem na celý prostor $\mathcal{H}$. Důvod je zřejmý: z toho, že ke každému $x \in \mathcal{H}$ existuje posloupnost $\{x_n\} \subset D_T$, která konverguje k x, obecně neplyne, že $\{Tx_n\}$ je cauchyovská. Navíc i pro ta x, pro něž $\{Tx_n\}$ cauchyovská je, se může stát, že pro jinou posloupnost $\{x_n'\} \subset D_T$, která také konverguje k x, bude $\lim Tx_n' \neq \lim Tx_n$; to souvisí s existencí uzávěru operátoru T (viz tvrzení 3.4.11).

Z těchto úvah je patrné, že pro neomezené operátory lze z podmínky $\overline{D_T} = \mathcal{H}$ odvodit méně než v případě operátorů omezených. Její význam spočívá především v tom, že umožňuje rozšířit pojem sdruženého operátoru na celou množinu $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Vzhledem k tomu, že definice operátoru sdruženého s daným $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je založena na spojitosti (viz § 5.1), je třeba ji vhodně zobecnit. K tomu užijeme následujícího zřejmého tvrzení.

7.1.1 Lemma: Jestliže $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, pak k danému $y \in \mathcal{H}$ existuje nejvýše jedno y^* takové, že pro všechna $x \in D_T$ platí

$$(y, Tx) = (y^*, x)\,. \tag{1}$$

Rozdíl proti případu, kdy T je omezený, je tedy pouze v otázce existence vektoru y^*; to nás přivádí k následující definici. **Sdruženým (adjungovaným) operátorem** k danému $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ nazýváme operátor T^*, jehož definiční obor $D(T^*)$ je tvořen právě všemi y, pro něž existuje y^* splňující (1), přičemž $T^*y := y^*$. Je zřejmé, že pro $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je tato definice totožná s definicí z § 5.1.

Shrneme základní vlastnosti sdruženého operátoru.

7.1.2 Tvrzení: Nechť $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$; potom

(a) operátor T^* je lineární a pro všechna $x \in D_T$ a $y \in D(T^*)$ platí

$$(y, Tx) = (T^*y, x)\,; \tag{2}$$

(b) $\mathrm{Ker}\, T^* = (\mathrm{Ran}\, T)^{\perp}$, což mj. znamená, že $\mathrm{Ker}\, T^*$ je uzavřený podprostor;

(c) jestliže $S \supset T$, potom $S^* \subset T^*$.

Důkaz: Tvrzení (a), (c) jsou evidentní. Jestliže $y \in \mathrm{Ker}\, T^*$, platí podle (2) rovnost $(y, Tx) = 0$ pro všechna $x \in D_T$, takže $y \in (\mathrm{Ran}\, T)^{\perp}$. Naopak z této podmínky vyplývá, že $y \in D(T^*)$ a $T^*y = 0$. ■

Součet, resp. součin operátorů $T, S \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ nemusí být hustě definovaný; v souvislosti s tím platí místo věty 5.1.5 podstatně slabší tvrzení.

7.1.3 Tvrzení: Pro každé $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ platí

(a) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$;

(b) jestliže $T^* \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, potom $T^{**} \supset T$;

(c) nechť T je invertibilní a $T^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$; potom je i T^* invertibilní a platí $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$;

(d) nechť S je hustě definovaný operátor takový, že $(S + T) \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$; potom $(S + T)^* \supset S^* + T^*$, přičemž rovnost platí, je-li alespoň jeden z operátorů T, S omezený;

(e) jestliže operátory S a TS jsou hustě definované, potom $(TS)^* \supset S^*T^*$ a rovnost nastává, je-li $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$.

Důkaz vychází přímo z definice a poskytuje vhodnou příležitost k tomu, aby si čtenář zvykl zacházet s neomezenými operátory. Pro ilustraci dokážeme část (c). Stačí ověřit splnění předpokladů tvrzení A.6.1a pro $f = T^*$ a $g = (T^{-1})^*$. Nechť $y \in D((T^*)^{-1}) = \mathrm{Ran}\, T^*$, tj. $y = T^*u$, kde $u \in D(T^*)$. Pak pro všechna $x \in D_T$ platí $(u, Tx) = (y, x)$, neboli $(u, z) = (y, T^{-1}z)$ pro všechna $z \in \mathrm{Ran}\, T$; odtud plyne $y \in D((T^{-1})^*)$ a $u = (T^{-1})^*y = (T^{-1})^*T^*u$. Podobně se dokáže inkluze $D((T^{-1})^*) \subset \mathrm{Ran}\, T^*$. ■

7.1.4 Poznámky: (a) V § 7.2 ukážeme, že $T^{**} = T$ právě tehdy, když T je hustě definovaný uzavřený operátor.

(b) Podmínky uvedené v tvrzeních 3d, 3e jsou pro platnost příslušných rovností pouze postačující. Ve tvrzení 3e vystupují operátory T, S nesymetricky: všimněte si, že $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ implikuje $TS \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ pro jakékoli $S \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Podmínka $S \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ není postačující pro to, aby $(TS)^* = S^*T^*$ (viz cvičení 10).

Pomocí zobrazení $T \mapsto T^*$ se definují podmnožiny symetrických a samosdružených operátorů. Operátor $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ je **symetrický**, jestliže $A \subset A^*$, což je ekvivalentní podmínce

$$(y, Ax) = (Ay, x)$$

pro všechna $x, y \in D_A$. Hustě definovaný operátor A splňující podmínku $A = A^*$ se nazývá **samosdružený** (samoadjungovaný). Množinu všech symetrických, resp. samosdružených operátorů na daném $\mathscr{H}$ značíme $\mathscr{L}_s(\mathscr{H})$, resp. $\mathscr{L}_{sa}(\mathscr{H})$.

Každý samosdružený operátor je symetrický; obrácené tvrzení evidentně neplatí, takže $\mathscr{L}_{sa}(\mathscr{H}) \subset \mathscr{L}_s(\mathscr{H})$, přičemž $\mathscr{L}_{sa}(\mathscr{H}) \neq \mathscr{L}_s(\mathscr{H})$. Pro omezené operátory jsou ovšem pojmy symetrický, samosdružený a hermitovský totožné.

7.1.5 Příklad (*operátor Q na $L^2(\mathbb{R})$*): Budeme užívat zkráceného označení $L^2 \equiv L^2(\mathbb{R})$; integrační obor ve všech integrálech je $\mathbb{R}$. Operátor Q definovaný vztahem $(Q\psi)(x) := x\psi(x)$ na množině $D_Q := \{\psi \in L^2\colon \int x^2|\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty\}$ je hustě definovaný, neboť D_Q obsahuje např. Schwartzův prostor $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, který je hustý v L^2. Přímo z definice vyplývá, že $(\varphi, Q\psi) = (Q\varphi, \psi)$ pro všechna $\varphi, \psi \in D_Q$, takže Q je symetrický.

Ukážeme, že $D(Q^*) = D_Q$. Nechť $\psi \in D(Q^*)$; existuje tedy $\psi^* \in L^2$ takové, že pro všechna $\varphi \in D_Q$ platí $(\psi, Q\varphi) = (\psi^*, \varphi)$, tj.

$$\int \varphi(x)\,\overline{[x\,\psi(x) - \psi^*(x)]}\,\mathrm{d}x = 0\,. \tag{3}$$

Dále užijeme toho, že pro libovolné $\eta \in L^2$ platí $\eta\chi_n \in D_Q$, $n = 1, 2, \ldots$ kde χ_n je charakteristická funkce intervalu $(-n, n)$; v rovnosti (3) můžeme tedy nahradit φ funkcí $\varphi\chi_n$, čímž pro všechna $\varphi \in D_Q$ dostaneme

$$\int \varphi(x)\,\overline{\psi_n(x)}\,\mathrm{d}x = 0\,,$$

kde $\psi_n(x) := \chi_n(x)\,[x\,\psi(x) - \psi^*(x)]$. Nyní $\psi_n \in L^2$ a z podmínky $\overline{D_Q} = L^2$ plyne $x\,\psi(x) = \psi^*(x)$ pro s.v. $x \in (-n, n)$, $n = 1, 2, \ldots$; to je ekvivalentní rovnosti $x\,\psi(x) = \psi^*(x)$ pro s.v. $x \in \mathbb{R}$. Díky tomu, že $\psi^* \in L^2$, plyne odtud $\psi \in D_Q$. Operátor Q je tedy samosdružený.

Nechť A je symetrický operátor; každý symetrický operátor A' takový, že $A \subset A'$, nazýváme **symetrickým rozšířením** operátoru A. Z této definice a tvrzení 2c plyne

$$A \subset A' \subset A'^* \subset A^*\,. \tag{4}$$

Každé symetrické rozšíření daného symetrického operátoru A je tedy částí operátoru A^*. Symetrický operátor A je *maximální*, jestliže nemá žádná vlastní symetrická rozšíření, tj. z podmínek A' je symetrický a $A \subset A'$ plyne $A' = A$. Z inkluzí (4) je hned vidět, že *každý samosdružený operátor je maximální*; existují však maximální symetrické operátory, které nejsou samosdružené (viz dále příklad 7.2.7).

7.1.6 Příklad: Nechť $\mathscr{E} \equiv \{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ je ortonormální báze v separabilním $\mathscr{H}$ a $s \equiv \{s_j\}_{j=1}^{\infty}$ posloupnost komplexních čísel. Vztahy

$$\dot{T}_s e_j := s_j e_j, \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

určují lineární operátor $\dot{T}_s$ s definičním oborem $D(\dot{T}_s) = \mathscr{E}_{\text{lin}}$. Operátor $\dot{T}_s$ je hustě definovaný; je zřejmé, že je omezený právě tehdy, když je omezená posloupnost s (srv. s příkladem 5.6.8). Bude nás nyní zajímat hlavně případ, kdy s není omezená. Označíme

$$D_s := \left\{ x \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j \in \mathscr{H} : \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j s_j|^2 < \infty \right\}; \tag{6a}$$

z rovnoběžníkové rovnosti a inkluze $\mathscr{E} \subset D_s$ plyne, že D_s je vždy podprostor, který je hustý v $\mathscr{H}$.

Najdeme operátor $\dot{T}_s^*$. Nechť $y \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j e_j \in D(\dot{T}_s^*)$; existuje tedy vektor $z \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j$ takový, že pro všechna $x \in \mathscr{E}_{\text{lin}}$ platí $(z, x) = (y, \dot{T}_s x)$. Speciálně pro $x = e_j$, $j = 1, 2, \ldots$, dostáváme $\bar{s}_j \eta_j = \xi_j$ a Parsevalova rovnost pro vektor z dává $\sum_{j=1}^{\infty} |s_j \eta_j|^2 < \infty$, tj. $D(\dot{T}_s^*) \subset D_s$. Naopak pro libovolná $y \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j e_j \in D_s$ a $x \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j \in \mathscr{E}_{\text{lin}}$ máme

$$(y, \dot{T}_s x) = \sum_{j=1}^{n} \bar{\eta}_j s_j \xi_j . \tag{7}$$

Vzhledem k nerovnosti (6a) je řada $\sum \eta_j \bar{s}_j e_j$ konvergentní a určuje vektor $y_s \in \mathscr{H}$. Rovnost (7) má potom tvar $(y, \dot{T}_s x) = (y_s, x)$ pro všechna $x \in \mathscr{E}_{\text{lin}}$, což znamená, že $y \in D_s$. Tím je operátor $\dot{T}_s^*$ nalezen: pro jeho definiční obor platí $D(\dot{T}_s^*) = D_s$ a jeho akce na dané $y \equiv \sum \eta_j e_j \in D_s$ je dána vztahem

$$\dot{T}_s^* y = y_s \equiv \sum_j \eta_j \bar{s}_j e_j . \tag{6b}$$

Jelikož $D_s \neq \mathscr{E}_{\text{lin}}$, není $\dot{T}_s$ samosdružený; dále je ze vztahů (6b) a (7) patrné, že $\dot{T}_s$ je symetrický právě tehdy, když $\{s_j\} \subset \mathbb{R}$. Z předchozích úvah je také zřejmé, že operátor $\dot{T}_s$ můžeme standardním způsobem rozšířit: označíme-li jako T_s lineární operátor definovaný pro všechna $x \in D(T_s) := D_s$ předpisem

$$T_s x \equiv T_s \left(\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j \right) := \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j s_j e_j , \tag{8}$$

vidíme, že T_s je vlastním rozšířením operátoru $\dot{T}_s$. Srovnání vztahů (8) a (6a, b) ukazuje, že $\dot{T}_s^* = T_{\bar{s}}$, kde $\bar{s} := \{\bar{s}_j\}$. Doslovným zopakováním postupu užitého pro nalezení $\dot{T}_s^*$ zjistíme, že $T_s^* = \dot{T}_s^*$, což lze zapsat ve tvaru $T_s^* = T_{\bar{s}}$. Odtud je zřejmé, že T_s je samosdružený právě tehdy, když s je reálná posloupnost.

Shrňme odvozené poznatky o operátorech T_s. Pro danou ortonormální bázi v separabilním $\mathscr{H}$ je vztahy (8) a (6a) definováno injektivní zobrazení $s \mapsto T_s$ množiny všech komplexních posloupností do $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ s následujícími vlastnostmi (viz též cvičení 9):

(i) $T_s^* = T_{\bar{s}}$,

(ii) $T_s \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ právě tehdy, když s je omezená,

(iii) T_s je samosdružený právě tehdy, když s je reálná.

Operátor Q z příkladu 5 není definován na celém $L^2(\mathbb{R})$: do $L^2 \setminus D_Q$ patří např. vektor ψ, kde $\psi(x) := (1 + x^2)^{-1/2}$. Podobně pro každý neomezený samosdružený operátor T_s z příkladu 6 máme $D_s \neq \mathscr{H}$ (viz cvičení 8). Jak ukazuje následující věta, jde o obecnou vlastnost všech neomezených symetrických operátorů, z níž vyplývá záporná odpověď na otázku existence jejich symetrického rozšíření na celé $\mathscr{H}$.

7.1.7 Věta (*Hellinger-Toeplitz*): Nechť A je symetrický operátor na $\mathscr{H}$; jestliže $D_A = \mathscr{H}$, pak A je omezený.

Důkaz: Každý symetrický operátor definovaný na celém $\mathscr{H}$ je nutně samosdružený, a tudíž uzavřený (viz dále příklad 7.2.1); z věty 3.4.12 potom plyne $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$.[1]) ■

7.2 UZAVŘENÉ OPERÁTORY

V tomto paragrafu užijeme základních pojmů a vět o uzavřených operátorech na Banachově prostoru, které jsme odvodili v závěru § 3.4, ke studiu vlastností množiny $\mathscr{C}(\mathscr{H})$ uzavřených operátorů na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$. Začneme s jednoduchým příkladem, z nějž je vidět souvislost této problematiky s vlastnostmi sdruženého operátoru.

7.2.1 Příklad: Nechť T je hustě definovaný operátor na $\mathscr{H}$ a $\{y_n\} \subset D(T^*)$ libovolná posloupnost taková, že $y_n \to y$ a $T^*y_n \to z$. Pro všechna $x \in D_T$ tudíž platí $(y_n, Tx) = (T^*y_n, x)$ a limitní přechod dává $(y, Tx) = (z, x)$, takže $y \in D(T^*)$ a $z = T^*y$. To znamená, že *pro každé* $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ *je* T^* *uzavřený operátor.*

Uvažujme nyní symetrický operátor A. Jelikož A^* je uzavřený, plyne z inkluze $A \subset A^*$ existence uzávěru: $A \subset \bar{A} \subset A^*$. Nechť $x, y \in D(\bar{A})$; podle tvrzení 3.4.11b existuje posloupnost $\{x_n\} \subset D_A$ splňující $x_n \to x$, $Ax_n \to \bar{A}x$; analogic-

[1]) Větu lze dokázat i bez použití věty 3.4.12 – viz cvičení 11.

ky pro vektor y. Z rovností $(y_n, Ax_n) = (Ay_n, x_n)$ dostaneme limitním přechodem $(y, \bar{A}x) = (\bar{A}y, x)$. *Každý symetrický operátor má tudíž uzávěr, který je rovněž symetrický.* Speciálně *každý samosdružený operátor je uzavřený*: $A = A^* = \bar{A}$.

Na začátku předchozího paragrafu jsme se zmínili v souvislosti se zavedením množiny $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ o otázce rozšíření neomezených operátorů. Analogií spojitého rozšíření je uzávěr (pro omezené operátory tyto pojmy splývají); jeho existence však obecně není zaručena ani pro operátory $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ (viz cvičení 3.29). Další nepříjemnou vlastností neomezených operátorů je to, že obecně $D(\bar{T}) \neq \mathscr{H}$, což se opět týká i hustě definovaných operátorů. Například pro každý neomezený symetrický operátor A je $\bar{A}$ rovněž neomezený a symetrický a podle věty 7.1.7 musí být $D(\bar{A}) \neq \mathscr{H}$.

Pro třídy operátorů, u nichž je existence uzávěru zaručena, nicméně představuje přechod k uzávěru standardní a jednoznačný postup. V důsledku toho má dobrý smysl následující pojem: symetrický operátor A nazýváme operátorem **v podstatě samosdruženým**, jestliže $\bar{A}$ je samosdružený. Jelikož každé samosdružené rozšíření A' daného symetrického operátoru A je uzavřené, platí $\bar{A} \subset A'$; pokud je A v podstatě samosdružený, dostáváme $A' = \bar{A}$, takže $\bar{A}$ je *jediným samosdruženým rozšířením* – viz též cvičení 7. Platí i obrácené tvrzení: symetrický operátor, který má právě jedno samosdružené rozšíření, je v podstatě samosdružený (viz cvičení 8.11). V této souvislosti zavedeme další pojem: pro daný samosdružený operátor A nazveme podprostor $D \subset D_A$ **oborem podstatné samosdruženosti**, je-li operátor $A \restriction D$ v podstatě samosdružený.

7.2.2 Příklad (*pokračování o operátorech T_s z příkladu* 7.1.6): Ze vztahu $T_s = T_{\bar{s}}^*$ vyplývá, že *pro každou posloupnost s je T_s uzavřený operátor.* Dále $\dot{T}_s \subset T_s$, a proto $\overline{\dot{T}_s} \subset T_s$. Naopak každé $x \in D(T_s) \equiv D_s$ můžeme zapsat ve tvaru $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, kde $x_n := \sum_{j=1}^{n} (e_j, x)\, e_j$. Potom $T_s x_n = \sum_{j=1}^{n} s_j (e_j, x)\, e_j \to T_s x$, což znamená, že $x \in D(\overline{\dot{T}_s})$. Pro každou posloupnost s tedy platí $\overline{\dot{T}_s} = T_s$; je-li speciálně s reálná posloupnost, je operátor $\dot{T}_s$ v podstatě samosdružený.

Vyšetříme nyní podrobněji vlastnosti uzávěru a souvislost se sdruženým operátorem. Použijeme k tomu unitárního operátoru U na $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$ definovaného vztahem

$$U[x, y] := [-y, x]\,. \tag{1}$$

V souvislosti s tím budeme chápat graf daného operátoru T na $\mathscr{H}$ jako podprostor Hilbertova prostoru $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$ (viz poznámku 3.4.13).

7.2.3 Lemma: Lineární operátor T na $\mathscr{H}$ je hustě definovaný právě tehdy, když $(U\Gamma(T))^{\perp}$ je graf. Je-li tato podmínka splněna, pak

$$\Gamma(T^*) = (U\,\Gamma(T))^{\perp}\,. \tag{2}$$

Důkaz: Z identity $(y^*, x) - (y, Tx) = ([y, y^*], [-Tx, x])$ plyne, že $[y, y^*] \in (U\Gamma(T))^\perp$ právě tehdy, když $(y, Tx) = (y^*, x)$ pro všechna $x \in D_T$; speciálně platí $[0, z] \in (U\Gamma(T))^\perp$ pro každé $z \in D_T^\perp$. Jestliže $\overline{D_T} \neq \mathscr{H}$, existuje nenulové $z \in D_T^\perp$, a proto $(U\Gamma(T))^\perp$ není graf. V opačném případě pro každé $[y, y^*] \in (U\Gamma(T))^\perp$ platí $y \in D(T^*)$ a $y^* = T^*y$, takže $(U\Gamma(T))^\perp$ je grafem operátoru T^*. ■

Vzhledem k tomu, že podprostor $(U\Gamma(T))^\perp$ je vždy uzavřený v $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$, dostáváme znovu tvrzení o uzavřenosti operátoru T^*, které jsme jiným postupem odvodili v příkladu 1.

7.2.4 Věta: Jestliže $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, pak $\bar{T}$ existuje právě tehdy, když T^* je hustě definovaný. Jsou-li tyto podmínky splněny, platí
(a) $T^{**} = \bar{T}$,
(b) $(\bar{T})^* = T^*$.
Důkaz: Jestliže $T^* \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, je $T^{**} \supset T$, a protože T^{**} je uzavřený, existuje $\bar{T}$. Nechť naopak existuje $\bar{T}$, tj. $\Gamma(\bar{T}) = \overline{\Gamma(T)}$. Pomocí vztahů $U^2\Gamma = \Gamma$ a $U(\Gamma^\perp) = (U\Gamma)^\perp$, které platí pro každý podprostor $\Gamma \subset \mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$ (viz (1) a cvičení 5.30), dostáváme následující řetěz rovností:

$$\Gamma(\bar{T}) = \overline{\Gamma(T)} = \overline{U^2\Gamma(T)} = (U^2\Gamma(T))^{\perp\perp} = (U(U\Gamma(T))^\perp)^\perp .$$

Dosadíme-li $\Gamma(T^*)$ za $(U\Gamma(T))^\perp$, dostáváme $\Gamma(\bar{T}) = (U\Gamma(T^*))^\perp$; vzhledem k tomu, že $\Gamma(\bar{T})$ je graf, plyne nyní z lemmatu, že T^* je hustě definovaný a $\Gamma(\bar{T}) = \Gamma(T^{**})$. Tvrzení (b) plyne z (a) a uzavřenosti operátoru T^*, neboť $(\bar{T})^* = T^{***} = (T^*)^{**} = \overline{T^*} = T^*$. ■

7.2.5 Poznámka: Pomocí této věty lze pro uzavřené operátory na $\mathscr{H}$ dokázat větu 3.4.12 o uzavřeném grafu bez užití věty o inverzním zobrazení (viz cvičení 13).

Z věty 4 vyplývají následující jednoduché vztahy mezi základními spektrálními charakteristikami operátorů T a T^*.

7.2.6 Důsledek: Jestliže T je hustě definovaný uzavřený operátor, potom
(a) $\lambda \in \sigma(T)$ právě tehdy, když $\bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$,
(b) $R_T(\mu)^* = R_{T^*}(\bar{\mu})$ pro všechny regulární hodnoty operátoru T.
Důkaz: Jestliže $\mu \in \varrho(T)$, potom z tvrzení 7.1.3c plyne $\bar{\mu} \in \varrho(T^*)$ a rovnost $(R_T(\mu))^* = R_{T^*}(\bar{\mu})$. Platí tedy (b) a implikace $\mu \in \varrho(T) \Rightarrow \bar{\mu} \in \varrho(T^*)$, neboli $\bar{\lambda} \in \sigma(T^*) \Rightarrow \lambda \in \sigma(T)$. Nyní podle věty 4 platí $T^* \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ a $T^{**} = T$; zopakováním předchozí úvahy pro operátor T^* pak získáme tvrzení (a). ■

7.2.7 Příklad (*operátor P*): Na prostoru $L^2(J)$, kde $J \subset \mathbb{R}$ je libovolný otevřený interval s hraničními body a, b, $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$, chceme zkonstruovat uzavřený symetrický operátor určený diferenciálním výrazem $\alpha\, \mathrm{d}/\mathrm{d}x$, kde α je nějaké komplexní číslo, které budeme za okamžik specifikovat.

Úloha tedy spočívá v nalezení vhodného definičního oboru. Do něj mohou patřit jen ta $\psi \in L^2$, pro něž

(i) existuje konečná derivace $\psi'(x)$ s. v. v J,

(ii) $\psi' \in L^2(J)$.

Dále budeme požadovat, aby ψ byla absolutně spojitá v J, tj. absolutně spojitá na každém kompaktním intervalu $K \subset J$. Tím bude automaticky splněna podmínka (i) a zaručena platnost pravidla o integraci *per partes*. Množina všech ψ splňujících uvedené podmínky je podprostor, který je hustý v $L^2(J)$, neboť obsahuje např. množinu $C_0^\infty(J)$ (viz cvičení 3.15). Označíme jej $AC(J)$, tj.

$$AC(J) := \{\psi \in L^2(J) \colon \psi \text{ je absolutně spojitá v } J,\ \psi' \in L^2(J)\}\,. \tag{3}$$

Pro libovolná $\varphi, \psi \in AC$,[1] $\alpha \in \mathbb{C}$ dostáváme

$$(\varphi, \alpha\psi') = \alpha \int \bar\varphi\psi' \,\mathrm{d}x = \alpha[\varphi, \psi] - \alpha \int \bar\varphi'\psi \,\mathrm{d}x = \alpha[\varphi, \psi] - (\bar\alpha\varphi', \psi)\,, \tag{4a}$$

kde $[\varphi, \psi] := \lim_{x \to b-} \bar\varphi(x)\,\psi(x) - \lim_{x \to a+} \bar\varphi(x)\,\psi(x)$. Z tohoto vztahu je zřejmé, že nutnou podmínkou symetričnosti je $\operatorname{Re}\alpha = 0$; zvolíme $\alpha = -\mathrm{i}$ a označíme symbolem $\tilde P$ následující operátor na L^2

$$\tilde P\psi := -\mathrm{i}\psi'\,, \qquad D(\tilde P) := AC\,. \tag{5}$$

Operátor $\tilde P$ je hustě definovaný, ale není symetrický. To je vidět z rovnosti (4a), která má nyní tvar

$$(\varphi, \tilde P\psi) = -\mathrm{i}[\varphi, \psi] + (\tilde P\varphi, \psi)\,. \tag{4b}$$

Požadavek $\varphi, \psi \in AC$ sice zaručuje, že $[\varphi, \psi]$ je konečná veličina, avšak nevyplývá z něj $[\varphi, \psi] = 0$, kromě případu $J = \mathbb{R}$ (cvičení 16). Zároveň je jasné, že každý hustě definovaný operátor $\dot P \subset \tilde P$ takový, že pro všechna φ, ψ z jeho definičního oboru platí $[\varphi, \psi] = 0$, je symetrický. Uvidíme, že lze docílit toho, aby $\dot P^* = \tilde P$. Tím bude dokázána uzavřenost operátoru $\tilde P$ a současně zaručena jednoznačnost uzavřeného symetrického operátoru $P := \overline{\dot P} \subset \tilde P$ v následujícím smyslu: jestliže $P_{\mathrm{c}} \subset \tilde P$ je jakýkoli uzavřený symetrický operátor, pro nějž $P_{\mathrm{c}}^* = \tilde P$, potom

$$P_{\mathrm{c}} = P_{\mathrm{c}}^{**} = \tilde P^* = \dot P^{**} = \overline{\dot P} = P\,. \tag{6}$$

Existenci symetrického operátoru $\dot P \subset \tilde P$ splňujícího $\dot P^* = \tilde P$ dokážeme konstruktivně. Jako $\dot D$ označíme množinu všech funkcí $\psi \in AC$, jejichž nosič je kompaktní a leží v J. Operátor $\dot P := \tilde P \restriction \dot D$ je hustě definován, protože

[1]) Užíváme zkráceného označení $AC \equiv AC(J)$ atd.; podobně $\int \ldots \mathrm{d}x \equiv \int_J \ldots \mathrm{d}x$.

 $C_0^\infty(J) \subset \dot{D}$. Výraz $[\varphi, \psi]$ je roven nule nejen pro všechna $\varphi, \psi \in \dot{D}$, nýbrž i pro každou dvojici $\varphi \in AC$, $\psi \in \dot{D}$. Pro takovéto vektory lze rovnost (4b) zapsat ve tvaru $(\varphi, \dot{P}\psi) = (\tilde{P}\varphi, \psi)$, což ukazuje, že $\tilde{P} \subset \dot{P}^*$. Rovnost bude platit, dokážeme-li následující implikaci: *je-li pro nějaké* $\varphi, \eta \in L^2$ *a všechna* $\psi \in \dot{D}$ *splněno*

$$(\varphi, \dot{P}\psi) = (\eta, \psi)\,, \tag{7}$$

potom $\varphi \in AC$.

Vezměme libovolný kompaktní interval $K \equiv [\alpha, \beta] \subset J$ a označíme $\varphi_K := \chi_K \varphi$. Na K definujme

$$\eta_K^*(x) := \int_\alpha^x \eta(t)\, \mathrm{d}t + c\,, \tag{8}$$

kde c je konstanta, která bude za okamžik specifikována. Funkce η^* je absolutně spojitá na K a ve smyslu rovnosti v L^2 platí

$$\eta_K^{*\prime} = \eta_K\,, \tag{9}$$

takže celkem $\eta_K^* \in AC(K)$. Nechť nyní ψ_K je libovolná funkce z $\dot{D}$, jejíž nosič leží v K; pomocí (8) a integrace per partes dostáváme ze (7)

$$(\varphi_K, \dot{P}\psi_K) = -\int_K \overline{\eta_K^*}\psi_K'\, \mathrm{d}x\,,$$

což přepíšeme ve tvaru

$$(\eta_K^* + \mathrm{i}\varphi_K, \psi_K') = 0\,. \tag{10}$$

Uvažujme funkci η_K^{**} na J, která je rovna nule vně intervalu K a pro $x \in K$ je definována vztahem

$$\eta_K^{**}(x) := \int_\alpha^x (\eta_K^*(t) + \mathrm{i}\varphi_K(t))\, \mathrm{d}t\,.$$

Zvolíme-li konstantu c v (8) tak, aby $\eta_K^{**}(\beta) = 0$, patří η_K^{**} do $\dot{D}$, a můžeme proto v (10) dosadit $\psi_K = \eta_K^{**}$; odtud dostaneme $\eta_K^* = -\mathrm{i}\varphi_K$, což znamená, že φ_K je absolutně spojitá na K a $(\varphi_K)'(x) = \mathrm{i}\eta_K(x)$ (viz (9)) pro s. v. $x \in K$. Vzhledem k libovolnosti intervalu K odtud plyne $\varphi' = \mathrm{i}\eta$ s. v. v J, a protože $\eta \in L^2(J)$ dostáváme celkem $\varphi \in AC(J)$. Tím je rovnost $\dot{P}^* = \tilde{P}$ dokázána; z ní dále pro operátor $P \equiv \overline{\dot{P}}$ plyne $P = \dot{P}^{**} = \tilde{P}^*$.

Definiční obor D_P operátoru P lze jednoduše popsat pomocí okrajových podmínek pro libovolný interval J. Uděláme to (i) pro libovolný konečný interval $J = (a, b)$, (ii) pro $J = (0, \infty)$ reprezentující všechny „polonekonečné“ intervaly a (iii) pro $J = \mathbb{R}$. V koncových bodech existují vlastní jednostranné limity pro každé $\psi \in AC(J)$ (viz cvičení 16); užíváme pro ně označení $\psi(a)$, $\psi(b)$ atd. Nechť

$$D := \begin{cases} \{\psi \in AC(a, b)\colon\ \psi(a) = \psi(b) = 0\} \\ \{\psi \in AC(0, \infty)\colon\ \psi(0) = 0\} \\ \{\psi \in AC(\mathbb{R})\} \end{cases} ; \tag{11a}$$

ukážeme, že $D_P = D$. Z rovnosti (4b) a cvičení 16 plyne, že $P_D := \tilde{P} \restriction D$ je symetrický operátor vyhovující inkluzi $\tilde{P} \subset P_D^*$; pomocí vztahů $\dot{P} \subset P_D$ a $\dot{P}^* = \tilde{P}$ dále dostáváme $\tilde{P} = P_D^*$. Pro $J = \mathbb{R}$ je $P_D = \tilde{P}$, takže v tomto případě je operátor P_D samosdružený, tj. uzavřený, a podle (6) platí $P_D = P$. Abychom mohli stejné argumentace užít i ve zbývajících dvou případech, stačí ověřit, že P_D je uzavřený, což bude splněno, když $D(P_D^{**}) \subset D$. Nechť $\varphi \in D(P_D^{**})$, tj. $(\varphi, P_D^*\psi) = (P_D^{**}\varphi, \psi)$ pro všechna $\psi \in D(P_D^*) = AC$. Jelikož $P_D^* = \tilde{P}$, a inkluze $P_D \subset \tilde{P}$ spolu s uzavřeností $\tilde{P}$ implikuje $P_D^{**} \subset \tilde{P}$, můžeme tuto podmínku zapsat jako $(\varphi, \tilde{P}\psi) = (\tilde{P}\varphi, \psi)$ a srovnáním s rovností (4b) vidíme, že pro všechna $\psi \in AC$ musí platit $[\varphi, \psi] = 0$. V případě konečného intervalu (a, b) mohou nabývat funkce $\psi \in AC$ v hraničních bodech libovolných hodnot, a proto uvedená podmínka je splněna jen tehdy, když $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, tj. když $\varphi \in D$. V případě intervalu $(0, \infty)$ je $[\varphi, \psi] = 0$ ekvivalentní rovnosti $\overline{\varphi(0)}\, \psi(0) = 0$, což je vzhledem k libovolnosti $\psi(0)$ splněno jen pro $\varphi(0) = 0$. Tím je uzavřenost operátoru P_D ověřena, a pro všechny intervaly $J \subset \mathbb{R}$ tedy platí

$$P = \tilde{P} \restriction D\,. \tag{11b}$$

Souhrnně lze říci, že *pro libovolný interval* $J \subset \mathbb{R}$ *určuje diferenciální výraz* $-\mathrm{i}\,\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ *právě jeden neomezený*[1]) *uzavřený symetrický operátor* $P \subset \tilde{P}$, *který splňuje podmínku* $P^* = \tilde{P}$; jeho definiční obor je určen vztahem (11a).

Vyšetříme ještě otázku symetrických rozšíření P' operátoru P. Podle vztahu (7.1.4) platí $P' \subset P'^* \subset \tilde{P}$, takže jde jen o nalezení definičního oboru splňujícího $D \subset D(P') \subset AC$, přičemž $D \neq D(P')$. Jestliže $J = \mathbb{R}$, je P samosdružený, a tudíž žádná symetrická rozšíření nemá. Stejná situace je i pro $J = (0, \infty)$: jestliže $\psi_0 \in D(P') \setminus D$, musí být $\psi_0(0) \neq 0$; položíme-li však ve vztahu (4b) $\varphi = \psi = \psi_0$, dostaneme spor s podmínkou, že P' je symetrický. Operátor P na $L^2(0, \infty)$ je tak *příkladem maximálního symetrického operátoru, který není samosdružený*. Nechť nyní $J = (a, b)$ a $\psi_0 \in D(P') \setminus D$; předpokládejme třeba, že $\psi_0(a) \neq 0$. Položíme-li ve vztahu (4b) $\psi = \varphi = \psi_0$, vede požadavek symetričnosti operátoru P' k podmínce $|\psi_0(b)|^2 = |\psi_0(a)|^2$, takže $\psi_0(b) = \vartheta\, \psi_0(a)$, $|\vartheta| = 1$. Podobně pro $\psi = \psi_0$ a libovolné $\varphi \in D(P'^*)$ dostáváme vzhledem k tomu, že $P'^* \subset \tilde{P}$ rovnosti $\overline{\varphi(a)}\, \psi_0(a) = \overline{\varphi(b)}\, \psi_0(b) = \vartheta\, \overline{\varphi(b)}\, \psi_0(a)$, tj. $\varphi(b) = \vartheta\, \varphi(a)$. Odtud plyne, že $P' = P'^*$ a $D(P') = \{\psi \in AC\colon\ \psi(b) = \vartheta\, \psi(a)\}$.

[1]) Z omezenosti P by plynula omezenost $\dot{P}$ a odtud $D = D(\overline{\dot{P}}) = L^2$. To, že je operátor P neomezený, lze ověřit i přímo (cvičení 17).

Tím jsou nalezena všechna symetrická rozšíření operátoru P na $L^2(a, b)$ pro $b - a < \infty$: jsou vzájemně jednoznačně přiřazena komplexním číslům splňujícím $|\vartheta| = 1$, přičemž pro definiční obor symetrického rozšíření odpovídajícího danému ϑ platí

$$D_\vartheta = \{\psi \in AC\colon\ \psi(b) = \vartheta\,\psi(a)\}$$

a operátor $P'_\vartheta := \tilde{P} \restriction D_\vartheta$ je samosdružený.

V § 3.6 jsme zavedli základní klasifikaci bodů spektra uzavřeného operátoru na B-prostoru. Pro uzavřené operátory na Hilbertově prostoru je účelné uvažovat další podmnožinu spektra. Nazývá se **esenciálním spektrem** (značení $\sigma_{\mathrm{ess}}(T)$) a patří do ní právě ta $\lambda \in \mathbb{C}$, pro něž existuje posloupnost jednotkových vektorů $x_n \in D_T$, z níž nelze vybrat konvergentní podposloupnost a přitom $(T - \lambda)\, x_n \to 0$.

7.2.8 Tvrzení: Pro každé $T \in \mathscr{C}(\mathscr{H})$ platí

$$\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{r}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{ess}}(T)\,, \tag{12a}$$

$$\sigma_{\mathrm{c}}(T) = \sigma_{\mathrm{ess}}(T) \setminus (\sigma_{\mathrm{p}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{r}}(T))\,. \tag{12b}$$

Důkaz: Jestliže $\lambda \notin \sigma(T)$, tj. $\lambda \in \varrho(T)$, potom v důsledku omezenosti rezolventy $R_T(\lambda)$ pro všechny vektory $x \in D_T$ máme $\|(T - \lambda)\, x\| \geqq \|R_T(\lambda)\|^{-1}\, \|x\|$, a odtud je zřejmé, že $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(T)$; platí tudíž inkluze $\sigma_{\mathrm{ess}}(T) \subset \sigma(T)$. Nechť nyní λ je libovolný bod spektra; jestliže existuje $c_\lambda > 0$ splňující $\|(T - \lambda)\, x\| \geqq c_\lambda \|x\|$ pro každé $x \in D_T$, je $\mathrm{Ran}\,(T - \lambda)$ uzavřený podprostor (cvičení 3.34); pak podmínka $\lambda \in \sigma(T)$ implikuje $\mathrm{Ran}\,(T - \lambda) \neq \mathscr{H}$, tj. $\lambda \in \sigma_{\mathrm{r}}(T)$. V opačném případě je $\inf\{\|(T - \lambda)\, x\|\colon x \in D_T,\ \|x\| = 1\} = 0$, takže existuje posloupnost jednotkových vektorů $x_n \in D_T$ taková, že $(T - \lambda)\, x_n \to 0$. Jestliže pro nějakou vybranou posloupnost platí $x_{n_k} \to x$, potom $\|x\| = 1$, $Tx_{n_k} \to \lambda x$ a z uzavřenosti operátoru T dostáváme $x \in D_T$ a $Tx = \lambda x$, tj. $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$. Jestliže naopak z $\{x_n\}$ nelze vybrat konvergentní podposloupnost, platí $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(T)$. Tím je ověřen rozklad (12a). Vztah (12b) plyne z (12a) s využitím toho, že rozklad (3.6.4) je disjunktní. ■

7.2.9 Důsledek: Jestliže $T \in \mathscr{C}(\mathscr{H})$, potom pro oblast regularity $\pi(T)$ definovanou ve cvičení 3.34 platí

$$\mathbb{C} \setminus \pi(T) = \sigma(T) \setminus \pi(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{ess}}(T)\,.$$

Důkaz: Vzhledem k tomu, že $\varrho(T) \subset \pi(T)$, platí $\mathbb{C} \setminus \pi(T) = \sigma(T) \setminus \pi(T)$. Přímo z příslušných definic je zřejmé, že $\sigma_{\mathrm{p}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{ess}}(T) \subset \mathbb{C} \setminus \pi(T)$. Jestliže naopak $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \pi(T)$, tj. existuje posloupnost jednotkových vektorů $x_n \in D_T$ taková, že $(T - \lambda)\, x_n \to 0$, potom buď $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$, nebo $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(T)$. ■

7.2.10 Poznámky: (a) Rozklad (12a) obecně není disjunktní; např. každá vlastní hodnota uzavřeného operátoru T, která má nekonečnou násobnost, patří do $\sigma_{ess}(T)$, neboť příslušné normalizované vlastní vektory tvoří nekonečnou ortonormální množinu.

(b) O esenciálním spektru uzavřeného symetrického operátoru pojednává § 8.4; vlastnostem množiny $\sigma_{ess}(A)$ pro $A \in \mathscr{L}_{sa}(\mathscr{H})$ je věnována část § 10.4.

(c) V definici množiny σ_{ess} můžeme požadavek neexistence vybrané konvergentní posloupnosti $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ nahradit podmínkou nekompaktnosti množiny $\{x_n\colon n = 1, 2, \dots\}$. Skutečně, jestliže z $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nelze vybrat konvergentní posloupnost, je množina $\{x_n\colon n = 1, 2, \dots\}$ zjevně nekompaktní. Naopak, je-li tato množina nekompaktní, tj. existuje nekonečná podmnožina $\{x_{n_k}\colon k = 1, 2, \dots\}$, která nemá hromadný bod (viz důsledek 2.5.8), neobsahuje posloupnost $\{x_{n_k}\}$ konvergentní posloupnost.

Na závěr uvedeme jednu pozoruhodnou vlastnost množiny $\mathscr{L}_c(\mathscr{H})$ hustě definovaných uzavřených operátorů.

7.2.11 Věta: Jestliže $T \in \mathscr{L}_c(\mathscr{H})$, potom T^*T je pozitivní samosdružený operátor, a označíme-li $T_D := T \restriction D(T^*T)$, platí $\overline{T_D} = T$.

Důkaz: Pro každé $x \in D(T^*T)$ máme $(x, T^*Tx) = \|Tx\|^2 \geqq 0$, takže operátor T^*T je pozitivní. Užijeme-li rovnosti (2) pro T^* a vztahu $T^{**} = T$, dostaneme $\Gamma(T) \oplus U\Gamma(T^*) = \mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$. Pro libovolné $x \in \mathscr{H}$ tedy existují vektory $u \in D_T$, $v \in D(T^*)$ takové, že $[x, 0] = [u, Tu] + [-T^*v, v]$. Po rozepsání do složek a vyloučení vektoru v dostáváme $u \in D(T^*T)$ a $x = (I + T^*T)\,u$. Jelikož vektor x je libovolný, plyne odtud, že oborem hodnot operátoru $S := I + T^*T$ je celý prostor $\mathscr{H}$. Díky pozitivitě operátoru T^*T je S invertibilní: jestliže $Sx = 0$, potom $0 = (x, Sx) = \|x\|^2 + (x, T^*Tx)$, což implikuje $x = 0$. Dále pro všechna $x, y \in D(T^*T)$ platí $(y, Sx) = (Sy, x)$ a pomocí toho se snadno ověří, že operátor S^{-1} je symetrický. Nyní $D(S^{-1}) = \operatorname{Ran} S = \mathscr{H}$, a proto je S^{-1} omezený symetrický operátor, tj. $(S^{-1})^* = S^{-1}$. Operátor S je potom samosdružený a totéž platí o T^*T (viz cvičení 4 a 7).

Druhé tvrzení věty je ekvivalentní rovnosti $\Gamma(T) = \overline{\Gamma(T_D)}$, což je vzhledem k inkluzi $T_D \subset T$ a uzavřenosti operátoru T ekvivalentní požadavku, aby ortogonální doplněk podprostoru $\Gamma(T_D)$ v Hilbertově prostoru $\Gamma(T)$ obsahoval jen nulový vektor (viz tvrzení 4.2.4). Nechť pro nějaké $x \in D_T$ a všechna $y \in D(T^*T)$ platí $([x, Tx], [y, Ty]) = 0$; odtud plyne $0 = (x, (I + T^*T)\,y) = (x, Sy)$, a protože $\operatorname{Ran} S = \mathscr{H}$, je $x = 0$. ∎

7.2.12 Poznámky: (a) Pro $T \in \mathscr{L}_c(\mathscr{H})$ je $T^* \in \mathscr{L}_c(\mathscr{H})$ a $T^{**} = T$; věta proto zůstává v platnosti při záměně $T \leftrightarrow T^*$.

(b) Věta implicitně zahrnuje následující netriviální tvrzení: pro každé $T \in \mathscr{L}_c(\mathscr{H})$ jsou podprostory $D(T^*T)$ a $D(TT^*)$ husté v $\mathscr{H}$.

Pojem normálního operátoru, který jsme zavedli v § 5.6, je účelné zobecnit i pro neomezené operátory. Říkáme, že lineární operátor T na $\mathscr{H}$ je **normální**, jestliže T je hustě definovaný, uzavřený a platí

$$T^*T = TT^* . \tag{1}$$

Množinu normálních operátorů na daném $\mathscr{H}$ značíme $\mathscr{L}_n(\mathscr{H})$. Je zřejmé, že každý samosdružený operátor je normální, tj.

$$\mathscr{L}_{sa}(\mathscr{H}) \subset \mathscr{L}_n(\mathscr{H}) \subset \mathscr{L}_c(\mathscr{H}) .$$

V uvedené definici je samozřejmě zahrnuta rovnost definičních oborů $D(T^*T) = D(TT^*)$, což je podmínka, jejíž ověřování může být dosti komplikovaná záležitost. To je jeden z důvodů, proč je užitečné následující kritérium normálnosti.

7.3.1 Věta: Hustě definovaný uzavřený operátor T je normální právě tehdy, když $D(T) = D(T^*)$ a pro všechna $x \in D(T)$ platí

$$\|Tx\| = \|T^*x\| . \tag{2}$$

Důkaz: Předpokládejme, že platí rovnost (1) a označme $D := D(T^*T) = D(TT^*)$. Podle věty 7.2.11 a poznámky 7.2.12 je $\overline{T \restriction D} = T$ a $\overline{T^* \restriction D} = T^*$; dále z (1) dostáváme $\|Tx\| = \|T^*x\|$ pro všechna $x \in D$. Odtud již snadno plyne (2) (viz cvičení 20).

Nechť naopak $\|Tx\| = \|T^*x\|$ pro každé $x \in \tilde{D} := D(T) = D(T^*)$. Z polarizační formule plyne, že všechna $x, y \in \tilde{D}$ splňují $(Tx, Ty) = (T^*x, T^*y)$. Nechť $x \in D(T^*T)$, tj. $x \in \tilde{D}$ a $Tx \in \tilde{D}$; potom $(Tx, Ty) = (T^*Tx, y)$. Pro každé $y \in \tilde{D} = D(T^*)$ tedy platí $(T^*x, T^*y) = (Tx, Ty) = (T^*Tx, y)$, což znamená, že $T^*x \in D(T^{**}) = D(T) = \tilde{D}$ a $TT^*x = T^*Tx$, neboli $T^*T \subset TT^*$. Vyměníme-li role operátorů T a T^*, dostaneme rovnost (1). ■

7.3.2 Poznámky: (a) Ve větě 1 lze vypustit předpoklad uzavřenosti operátoru T, jež je důsledkem podmínky (2) (viz cvičení 15).

(b) V definici normálního operátoru vystupují T a T^* symetricky; je-li T normální, platí proto totéž o operátoru T^* a naopak.

(c) Každý normální operátor T je maximální v tom smyslu, že z podmínek $T \subset S$, $S \in \mathscr{L}_n(\mathscr{H})$ plyne $T = S$; to je zřejmé ze vztahů $D(S) = D(S^*) \subset \subset D(T^*) = D(T)$.

7.3.3 Příklad (*operátory násobení funkcí*): Nechť $(X, \mathscr{A}, \mu)$ je prostor se σ-konečnou mírou. Každé měřitelné funkci $f\colon X \to \mathbb{C}$ lze přiřadit operátor T_f

na $L^2(X, d\mu)$ s definičním oborem

$$D(T_f) \equiv D_f := \left\{ \psi \in L^2(X, d\mu) \colon \int_X |f|^2 \, |\psi|^2 \, d\mu < \infty \right\}, \tag{3a}$$

jehož akce na vektory $\psi \in D_f$ je dána předpisem

$$(T_f \psi)(x) := f(x) \, \psi(x) \, ; \tag{3b}$$

nazýváme jej **operátorem násobení funkcí** f. Operátory T_f hrají důležitou roli v obecné teorii – viz § 10.9. Odvodíme základní vlastnosti operátorů T_f, které vyplývají z dosud probraných vět o neomezených operátorech; spektrálním vlastnostem je věnován příklad 8. Budeme užívat obvyklého zkráceného označení $L^2 \equiv L^2(X, d\mu)$, $\int \varphi \, d\mu \equiv \int_X \varphi \, d\mu$ apod.

(a) *Operátor T_f je hustě definován.*

K ověření tohoto tvrzení zavedeme měřitelné množiny

$$M_n := \{x \in X \colon |f(x)| \leqq n\}, \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{4}$$

pro něž zjevně platí $M_n \subset M_{n+1}$ a $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = X$. Nechť χ_n je charakteristická funkce množiny M_n; pro libovolný vektor $\psi \in L^2$ dostáváme z Lebesgueovy věty $\|\chi_n \psi - \psi\| \to 0$; současně z nerovnosti $\int |f \psi \chi_n|^2 \, d\mu \leqq n^2 \|\psi\|^2$ plyne, že $\psi \chi_n \in D_f$, takže $\overline{D_f} = L^2$.

(b) *Rovnost $T_f = T_g$ platí právě tehdy, když $f(x) = g(x)$ pro μ-s. v. $x \in X$.* Postačující podmínka je zřejmá. K ověření nutné podmínky zavedeme množiny $N_n := \{x \in X \colon |f(x)| \leqq n, \, |g(x)| \leqq n\}$; charakteristické funkce všech těchto množin opět patří do $D_f = D_g$. Jelikož $\bigcup_n N_n = X$, stačí ukázat, že pro $n = 1, 2, \dots$ platí $f(x) = g(x)$ pro μ-s. v. $x \in N_n$; to však ihned plyne ze vztahu $\|(T_f - T_g) \chi_{N_n}\| = 0$ (viz příklad A.6.3).

(c) Z tvrzení (a) vyplývá existence T_f^*; zopakujeme-li postup, který jsme užili v příkladu 7.1.5 při důkazu samosdruženosti operátoru Q, s tím, že χ_n jsou nyní charakteristické funkce množin (4), zjistíme, že

$$T_f^* = T_{\bar{f}} \, . \tag{5}$$

Z evidentních rovností $D_f = D_{\bar{f}}$ a $\|T_f \psi\| = \|T_{\bar{f}} \psi\|$ pro $\psi \in D_f$, formule (5) a tvrzení (b) plyne

(i) *T_f je normální,*

(ii) *T_f je samosdružený právě tehdy, když $f(x) \in \mathbb{R}$ pro s. v. $x \in X$.*

(d) Jestliže $f \in L^{\infty}(X, \mathrm{d}\mu)$, je $D_f = L^2$ a pro každé ψ platí

$$\|T_f\psi\|^2 = \int |f|^2\,|\psi|^2\,\mathrm{d}\mu \leqq \|f\|_{\infty}^2\,\|\psi\|^2\,;$$

operátor T_f je proto omezený a $\|T_f\| \leqq \|f\|_{\infty}$. Toto tvrzení lze obrátit. Pro dané $T_f \in \mathscr{B}(L^2)$ označme $N := \{x \in X\colon |f(x)| > \|T_f\|\}$; ukážeme-li, že $\mu(N) = 0$, bude platit $f \in L^{\infty}(X, \mathrm{d}\mu)$ a $\|f\|_{\infty} \leqq \|T_f\|$ (viz příklad 1.3.3). Nechť R je libovolná množina taková, že $\mu(R) < \infty$. Potom $\|T_f\chi(R \cap N)\|^2 \leqq \|T_f\|^2\,\mu(R \cap N)$, tj.

$$\int (|f|^2 - \|T_f\|^2)\,\chi(R \cap N)\,\mathrm{d}\mu \leqq 0\,.$$

Aby tato nerovnost nebyla ve sporu s tím, že $|f(x)| > \|T_f\|$ na N, musí platit $\mu(N \cap R) = 0$. Díky tomu, že μ je σ-konečná, dostáváme dále $\mu(N) = 0$, což vede k následujícímu závěru: *podmínka $f \in L^{\infty}$ je nutná a postačující pro to, aby T_f byl omezený*; je-li splněna, platí $\|T_f\| = \|f\|_{\infty}$.

7.3.4 Poznámky: (a) Pro míru μ_c definovanou na σ-algebře 2^X pomocí spočetných množin $\{x_j \in X\colon j = 1, 2, \ldots\}$ a $\{\mu_j > 0\colon j = 1, 2, \ldots\}$ vztahem $\mu_c(M) := \sum_{j=1}^{\infty} \chi_M(x_j)\,\mu_j$ je každá funkce $f\colon X \to \mathbb{C}$ měřitelná a příslušný operátor T_f na $L^2(X, \mathrm{d}\mu_c)$ splňuje $T_f = U^{-1}T_{s_f}U$. Zde T_{s_f} je operátor na separabilním $\mathscr{H}$ definovaný vztahem (7.1.8) pro posloupnost $s_f := \{f(x_j)\}_{j=1}^{\infty}$ a U je izomorfismus prostorů $L^2(X, \mathrm{d}\mu_c)$ a $\mathscr{H}$ určený pomocí ortonormální báze $\{e_j\} \subset \mathscr{H}$ takto: $U\psi := \sum_{j=1}^{\infty} \psi(x_j)\,\mu_j e_j$.

(b) Tvrzení uvedené ve cvičení 9 platí pro operátory násobení funkcí na libovolném prostoru $L^2(X, \mathrm{d}\mu)$ s následující modifikací pro inverzní operátor: T_f^{-1} existuje právě tehdy, když $f(x) \neq 0$ pro s.v. $x \in X$; je-li tato podmínka splněna a položíme-li $g(x) := 1/f(x)$ pro $x \in f^{(-1)}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, platí $T_f^{-1} = T_g$ (funkce g je měřitelná a na μ-nulové množině $f^{(-1)}(\{0\})$ ji lze dodefinovat libovolně).

Vyšetříme základní vlastnosti spektra normálního operátoru. Stejně jako v § 5.6 plyne z podmínky (2) pro vlastní hodnoty každého $T \in \mathscr{L}_{\mathrm{n}}(\mathscr{H})$ ekvivalence

$$\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_{\mathrm{p}}(T^*)\,, \tag{6a}$$

přičemž odpovídající vlastní podprostory jsou totožné

$$\operatorname{Ker}(T - \lambda) = \operatorname{Ker}(T^* - \bar{\lambda})\,. \tag{6b}$$

Vlastní podprostory příslušející různým vlastním hodnotám jsou ortogonální,

$$\lambda, \mu \in \sigma_{\mathrm{p}}(T), \ \lambda \neq \mu \ \Leftrightarrow \ \operatorname{Ker}(T - \lambda) \perp \operatorname{Ker}(T - \mu) . \tag{6c}$$

Pomocí ekvivalence (6a) a tvrzení 7.1.2(b) zjistíme, že reziduální spektrum je prázdné,

$$\sigma_{\mathrm{r}}(T) = \emptyset , \tag{7a}$$

a ověříme platnost ekvivalence

$$\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T) \ \Leftrightarrow \ \overline{\operatorname{Ran}(T - \lambda)} \neq \mathscr{H} . \tag{7b}$$

V platnosti zůstává i věta 5.6.3; vzhledem k jejímu významu (zejména pro samosdružené operátory) ji zde znovu uvedeme.

7.3.5 Věta: Množina regulárních hodnot normálního operátoru T je totožná s jeho oblastí regularity, tj. $\lambda \in \varrho(T)$ právě tehdy, když existuje $c(\lambda) > 0$ takové, že

$$\|(T - \lambda)\, x\| \geqq c(\lambda)\, \|x\| \tag{8a}$$

pro všechna $x \in D_T$, což je dále ekvivalentní podmínce

$$\operatorname{Ran}(T - \lambda) = \mathscr{H} . \tag{8b}$$

Důkaz je stejný jako v případě věty 5.6.3 až na ověření uzavřenosti podprostoru $\operatorname{Ran}(T - \lambda)$; zde je nutno užít toho, že T je uzavřený (viz cvičení 3.34). Z uzavřenosti operátoru T rovněž plyne, že (8b) implikuje $(T - \lambda)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. ■

7.3.6 Důsledek: (a) Pro každé $T \in \mathscr{L}_{\mathrm{n}}(\mathscr{H})$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) $\lambda \in \sigma(T)$,
(ii) $\inf\{\|(T - \lambda)\, x\| : x \in D_T,\ \|x\| = 1\} = 0$,
(iii) existuje posloupnost jednotkových vektorů $x_n \in D_T$ taková, že $(T - \lambda)\, x_n \to 0$,
(iv) $\operatorname{Ran}(T - \lambda) \neq \mathscr{H}$.

(b) Spektrum samosdruženého operátoru A je podmnožinou reálné osy; je-li speciálně operátor A omezený zdola, pak $\inf \sigma(A) \geqq \inf\{(x, Ax) : x \in D_A,\ \|x\| = 1\}$.[1]

7.3.7 Příklad: Nechť μ je regulární hodnota normálního operátoru T. Vzhledem k tomu, že rezolventa normálního operátoru je normální (cvičení 23), můžeme použít předchozích výsledků k určení spektra operátoru $R_T(\mu)$. Především je ze vztahu (8b) jasné, že $0 \in \varrho(R_T(\mu))$ právě tehdy, když $\mathscr{H} = \operatorname{Ran} R_T(\mu)$, tj. $\mathscr{H} = D_T$, což je ekvivalentní podmínce $T \in \mathscr{N}(\mathscr{H})$. Pro každý normální

[1]) Viz důkaz tvrzení 5.6.5; v § 10.4 uvidíme, že platí rovnost.

operátor T a každé $\mu \in \varrho(T)$ tedy platí ekvivalence

$$0 \in \sigma(R_T(\mu)) \Leftrightarrow T \notin \mathcal{N}(\mathcal{H}). \tag{9a}$$

Vyšetříme dále, které nenulové body obsahuje množina $\sigma(R_T(\mu))$. Nechť $\lambda \neq 0$ a $y \in \operatorname{Ran}(R_T(\mu) - \lambda)$, tj. $y = (R_T(\mu) - \lambda)\,x$ pro nějaké $x \in \mathcal{H}$; pomocí vektoru $z := -\lambda\, R_T(\mu)\, x \in D_T$ získáme rovnost $y = (T - \mu - 1/\lambda)\, z$, tj. $y \in \operatorname{Ran}(T - \mu - 1/\lambda)$. Obrátíme-li pořadí kroků, dostaneme $\operatorname{Ran}(R_T(\mu) - \lambda) = \operatorname{Ran}(T - \mu - 1/\lambda)$. Potom z důsledku 6a plyne ekvivalence $\lambda \in \sigma(R_T(\mu)) \Leftrightarrow \mu + 1/\lambda \in \sigma(T)$, což spolu se vztahem (9a) dává

$$\sigma(R_T(\mu)) = \begin{cases} \{\lambda:\ \lambda = (\nu - \mu)^{-1},\ \nu \in \sigma(T)\} & \text{pro } T \in \mathcal{N}(\mathcal{H}), \\ \{\lambda:\ \lambda = (\nu - \mu)^{-1},\ \nu \in \sigma(T)\} \cup \{0\} & \text{pro } T \in \mathcal{L}_n(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{N}(\mathcal{H}). \end{cases} \tag{9b}$$

Užijeme-li dále toho, že spektrální poloměr omezeného normálního operátoru je roven normě (viz komentář k § 5.6), dostáváme

$$\| R_T(\mu) \| = \sup_{\nu \in \sigma(T)} |\nu - \mu|^{-1}. \tag{10a}$$

Uvažujme dále operátor $TR_T(\mu) = I + \mu R_T(\mu)$, který je rovněž normální a omezený; pomocí důsledku 6 zjistíme, že

$$\sigma(TR_T(\mu)) = \{\lambda:\ \lambda = 1 + \mu x,\ x \in \sigma(R_T(\mu))\}$$

a z formule (9b) potom plyne

$$\| TR_T(\mu) \| = \sup_{\nu \in \sigma(T)} \left| \frac{\nu}{\nu - \mu} \right|. \tag{10b}$$

7.3.8 Příklad: Najdeme spektrum operátorů T_f z příkladu 3. Pro danou měřitelnou funkci $f\colon X \to \mathbb{C}$ označíme

$$R_{\mathrm{ess}}^{(\mu)}(f) \equiv R_{\mathrm{ess}}(f) := \{\lambda \in \mathbb{C}:\ \mu(M_\varepsilon(\lambda)) \neq 0 \ \text{ pro každé } \varepsilon > 0\},$$

kde $M_\varepsilon(\lambda) := \{x \in X:\ |f(x) - \lambda| < \varepsilon\}$. Tuto množinu nazýváme *podstatným oborem hodnot funkce f.* Dokážeme následující tvrzení:

$$\sigma(T_f) = R_{\mathrm{ess}}(f). \tag{11}$$

Díky tomu, že T_f je normální, můžeme užít věty 5 a jejího důsledku. Nechť $\lambda \in R_{\mathrm{ess}}(f)$; pro každé $\varepsilon > 0$ tedy platí $\mu(M_\varepsilon) > 0$ (píšeme stručněji M_ε místo $M_\varepsilon(\lambda)$) a vzhledem k σ-konečnosti míry μ lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\mu(M_\varepsilon) < \infty$. Pro $x \in M_\varepsilon$ je $|f(x)| < |\lambda| + \varepsilon$, a proto patří funkce $\psi_\varepsilon := (\mu(M_\varepsilon))^{-1/2}\chi(M_\varepsilon)$ do D_f. Nyní $\|\psi_\varepsilon\| = 1$ a $\|(T_f - \lambda)\psi_\varepsilon\|^2 = (\mu(M_\varepsilon))^{-1}\int_{M_\varepsilon} |f - \lambda|^2 \, d\mu < \varepsilon^2$; podle tvrzení (a) důsledku 6 tedy $\lambda \in \sigma(T_f)$. Jestliže naopak $\lambda \notin R_{\mathrm{ess}}(f)$, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\mu(M_\varepsilon) = 0$. Pro každé $\psi \in L^2$ tedy platí $\int |\psi|^2 \, d\mu = \int_{X \setminus M_\varepsilon} |\psi|^2 \, d\mu$. Užijeme-li ještě toho, že na $X \setminus M_\varepsilon$ je $|f(x) - \lambda| \leqq \varepsilon$, dostáváme pro všechna $\psi \in D_f$ nerovnost

$$\|(T_f - \lambda)\psi\|^2 = \int_{X \setminus M_\varepsilon} |f - \lambda|^2 |\psi|^2 \, d\mu \geqq \varepsilon^2 \int_{X \setminus M_\varepsilon} |\psi|^2 \, d\mu = \varepsilon^2 \|\psi\|^2$$

a z věty 5 plyne $\lambda \notin \sigma(T_f)$. Speciálně pro Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}^n$ platí: je-li f spojitá na $\mathbb{R}^n$, potom $\sigma(T_f) = \overline{\mathrm{Ran}\, f}$.

V § 5.6 jsme definovali omezené operátory s čistě bodovým spektrem; každý takový operátor je normální a jeho spektrum je uzávěr množiny vlastních hodnot. V případě neomezených operátorů vznikají opět potíže s definičním oborem: daná ortonormální báze $\{e_j\}$ a neomezená posloupnost $\{\lambda_j\}$ neurčují jednoznačně lineární operátor T takový, že $Te_j = \lambda_j e_j$ pro $j = 1, 2, \ldots$ – tuto podmínku splňují pro $s = \{\lambda_j\}$ operátory $\dot{T}_s$ a T_s z příkladu 7.1.6, přičemž $\dot{T}_s \neq T_s$. Abychom tuto nejednoznačnost odstranili, zavedeme pojem neomezeného operátoru s čistě bodovým spektrem jen pro normální operátory. Budeme říkat, že *operátor* $T \in \mathscr{L}_{\mathrm{n}}(\mathscr{H})$ *má čistě bodové spektrum,* jestliže existuje ortonormální báze $\mathscr{E} \equiv \{e_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset D_T$ tvořená vlastními vektory operátoru T.

7.3.9 Tvrzení: V uvedeném označení platí pro každý normální operátor s čistě bodovým spektrem $\sigma(T) = \overline{\sigma_{\mathrm{p}}(T)}$, přičemž

$$D_T = \{x \in \mathscr{H} : \sum_{\alpha \in I} |(e_\alpha, x)|^2 \, |\lambda_\alpha|^2 < \infty\}. \tag{12}$$

Důkaz: Tvrzení o spektru se ověří úplně stejným postupem jako ve větě 5.6.7. Označme pravou stranu vztahu (12) jako $D_{\mathscr{E}}$. Jestliže $x \in D_T$, potom z ekvivalence (6a) plyne $\|Tx\|^2 = \sum_\alpha |(e_\alpha, Tx)|^2 = \sum_\alpha |(T^* e_\alpha, x)|^2 = \sum_\alpha |\lambda_\alpha|^2 \, |(e_\alpha, x)|^2$, takže $D_T \subset D_{\mathscr{E}}$. Z tvrzení 4.2.8 a Hölderovy nerovnosti vyplývá, že $D_{\mathscr{E}}$ je podprostor; vztahem $\tilde{T}x := \sum_\alpha \lambda_\alpha (e_\alpha, x)\, e_\alpha$ je na $D_{\mathscr{E}}$ definován lineární operátor splňující $\tilde{T} \supset T$. Stejně jako v příkladu 7.1.6 se ověří, že $D(\tilde{T}^*) = D_{\mathscr{E}}$ a $\tilde{T}^* x = \sum_\alpha \bar{\lambda}_\alpha (e_\alpha, x)\, e_\alpha$, takže $\|\tilde{T}x\| = \|\tilde{T}^* x\|$ pro všechna $x \in D_{\mathscr{E}}$. Operátor $\tilde{T}$ je tedy normální, a proto $\tilde{T} = T$, tj. $D_T = D_{\mathscr{E}}$ (viz poznámku 2c). ■

Důležitou aplikaci věty 5 představují kritéria samosdruženosti a podstatné samosdruženosti, která nyní odvodíme.

7.3.10 Věta (*kritérium samosdruženosti*): Nechť A je symetrický operátor; potom následující podmínky jsou ekvivalentní:
(a) A je samosdružený,
(b) A je uzavřený a $\operatorname{Ker}(A \pm i)^* = \{0\}$,
(c) $\operatorname{Ran}(A \pm i) = \mathscr{H}$.
Důkaz: (a) $\Rightarrow$ (b): Samosdružený operátor A je uzavřený a platí pro něj $\operatorname{Ker}(A \pm i)^* = \{0\}$, protože $(A \pm i)^* = A \mp i$ a $\sigma_p(A) \subset \sigma(A) \subset \mathbb{R}$.
(b) $\Rightarrow$ (c): Podle tvrzení 7.1.2b je $\overline{\operatorname{Ran}(A \pm i)} = \mathscr{H}$; dále $\|(A \pm i)\, x\| \geqq \|x\|$ pro všechna $x \in D_A$ (cvičení 6); z toho a uzavřenosti operátoru A plyne uzavřenost podprostoru $\operatorname{Ran}(A \pm i)$ (viz cvičení 3.34).
(c) $\Rightarrow$ (a): Pro libovolné $y \in D(A^*)$ označme $z := (A^* + i)\, y$. Jelikož $\operatorname{Ran}(A + i) = \mathscr{H}$ a $A \subset A^*$, existuje $y_0 \in D_A$ takové, že $z = (A^* + i)\, y_0$. Potom $y - y_0 \in \operatorname{Ker}(A - i)^* = \operatorname{Ran}(A - i)^\perp = \{0\}$, tj. $y = y_0$; proto $D(A^*) = D(A)$. ■

7.3.11 Důsledek (*kritérium podstatné samosdruženosti*): Pro symetrický operátor A jsou následující podmínky ekvivalentní:
(a) A je v podstatě samosdružený,
(b) $\operatorname{Ker}(A \pm i)^* = \{0\}$,
(c) $\overline{\operatorname{Ran}(A \pm i)} = \mathscr{H}$.
Důkaz ponecháváme jako cvičení.

7.3.12 Poznámka: Z důkazu věty 10 je patrné, že čísla $\pm i$ lze nahradit dvojicí $z, \bar{z}$ pro jakékoli $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

7.3.13 Příklad: Ke každému $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ a $\varepsilon > 0$ existuje $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ takové, že $\|\psi - \varphi\| < \varepsilon$ (viz příklad 3.1.7). Funkce $x \mapsto \eta_\pm(x) := \varphi(x)/(x \pm i)$ patří rovněž do $C_0^\infty(\mathbb{R})$ (ověřte!) a odtud pro zúžení operátoru Q z příkladu 7.1.5 na $C_0^\infty(\mathbb{R})$, jež označíme Q_c, máme $\|\psi - (Q_c \pm i)\, \eta_\pm\| = \|\psi - \varphi\| < \varepsilon$, tj. $\overline{\operatorname{Ran}(Q_c \pm i)} = L^2(\mathbb{R})$. Operátor $Q_c = Q \restriction C_0^\infty(\mathbb{R})$ je tedy v podstatě samosdružený (srv. s obecnějším tvrzením ve cvičení 22).

Často se vyskytuje úloha ověřit samosdruženost operátorů typu $T = A + S$, kde A je samosdružený a S symetrický; jde o tzv. problém *stability samosdruženosti vůči symetrickým poruchám*. Postačující podmínky stability se formulují pomocí následujícího pojmu. Nechť A, S jsou lineární operátory na $\mathscr{H}$; budeme říkat, že *operátor S je A-omezený* (nebo relativně omezený vůči A), jestliže $D_S \supset D_A$ a existují nezáporná a, b taková, že pro všechna $x \in D_A$ platí

$$\|Sx\| \leqq a\|x\| + b\|Ax\| \,. \tag{13a}$$

Infimum množiny čísel $b \geqq 0$, pro něž existuje $a \geqq 0$ takové, že platí nerovnost (13a), se nazývá *A-mezí operátoru S*. Poznamenejme, že nerovnost (13a) nemusí být splněna pro žádné $a \geqq 0$, dosadíme-li A-mez za číslo b (viz cvičení 26).

Někdy je výhodnější pracovat s kvadráty norem. Je zřejmé, že pro $\alpha = a$, $\beta = b$ je podmínka

$$\|Sx\|^2 \leqq \alpha^2\|x\|^2 + \beta^2\|Ax\|^2 \tag{13b}$$

postačující pro platnost (13a). Naopak pro libovolné $\varepsilon > 0$ můžeme položit $\alpha^2 = (1 + 1/\varepsilon)\, a^2$, $\beta^2 = (1 + \varepsilon)\, b^2$, čímž dostáváme z (13a) pomocí $2\sqrt{\varepsilon}\alpha\beta\|x\|\,\|Ax\| \leqq \alpha^2\|x\|^2 + \varepsilon\beta^2\|Ax\|^2$ nerovnost (13b). Z této úvahy dále plyne, že A-mez operátoru S je rovna též infimu množiny všech $\beta \geqq 0$, pro něž existuje $\alpha \geqq 0$ tak, že platí (13b).

7.3.14 Věta (*Kato-Rellich*): Nechť A je samosdružený a S je symetrický, A-omezený operátor s A-mezí menší než 1; potom

(a) $A + S$ je samosdružený;

(b) jestliže pro nějaký podprostor $D \subset D_A$ je $A \upharpoonright D$ v podstatě samosdružený, je i $(A + S) \upharpoonright D$ v podstatě samosdružený.

Důkaz: Podle předpokladu je operátor $A + S$ symetrický, $D(A + S) = D_A$ a platí (13b) pro nějaké $\beta < 1$.

(a) Pro $\beta = 0$ je S omezený, $\bar{S}$ je hermitovský a operátor $A + S = A + \bar{S}$ je samosdružený (cvičení 7). Nechť tedy $\beta \neq 0$; položíme $\gamma := \alpha/\beta$ a podmínku (13b) zapíšeme ve tvaru

$$\|Sx\|^2 \leqq \beta^2(\|Ax\|^2 + \gamma^2\|x\|^2) = \beta^2\|(A \mp \mathrm{i}\gamma)\, x\|^2 \tag{14}$$

(viz cvičení 6). Čísla $\pm\mathrm{i}\gamma$ jsou regulárními hodnotami operátoru A a pomocí rezolventy dostáváme $D_A = R_A(\pm\mathrm{i}\gamma)\mathscr{H}$. Dosadíme-li $x = R_A(\pm\mathrm{i}\gamma)\, y$ do nerovnosti (14), platí pro všechna $y \in \mathscr{H}$ vztah $\|SR_A(\pm\mathrm{i}\gamma)\, y\| \leqq \beta\|y\|$. Operátory $B_\pm := SR_A(\pm\mathrm{i}\gamma)$ jsou tudíž omezené, přičemž $\|B_\pm\| \leqq \beta < 1$; z lemmatu 3.6.4 nyní vyplývá, že $B_\pm + I$ jsou regulární. Ke každému $z \in \mathscr{H}$ tedy existují $y_\pm \in \mathscr{H}$ taková, že $z = (B_\pm + I)\, y_\pm$ a dále vektory $x_\pm \in D_A$ splňující $(A \mp \mathrm{i}\gamma)\, x_\pm = y_\pm$. Potom $z = (SR_A(\pm\mathrm{i}\gamma) + I)\,(A \mp \mathrm{i}\gamma)\, x_\pm = (S + A \mp \mathrm{i}\gamma)\, x_\pm$ tj. $\mathrm{Ran}\,(S + A \mp \mathrm{i}\gamma) = \mathscr{H}$. Samosdruženost operátoru $A + S$ nyní plyne z věty 10 a poznámky 12.

(b) Nechť $\overline{A \upharpoonright D} = A$; potom ke každému $x \in D_A$ existuje posloupnost $\{x_n\} \subset D$ taková, že $x_n \to x$ a $Ax_n \to Ax$. Ze vztahu (13b) potom dostáváme

$$\|(A + S)\,(x_n - x)\|^2 \leqq 2\|A(x_n - x)\|^2 + 2\|S(x_n - x)\|^2 \leqq$$
$$\leqq 2(1 + \beta^2)\, \|A(x_n - x)\|^2 + 2\alpha^2\|x_n - x\|^2,$$

a protože $D(A + S) = D(A)$, platí $\overline{(A + S) \upharpoonright D} \supset A + S$. Opačná inkluze plyne ze vztahu $(A + S) \upharpoonright D \subset A + S$ a toho, že operátor $A + S$ je podle již dokázaného tvrzení (a) samosdružený. ■

O některých dalších výsledcích týkajících se stability vůči symetrickým poruchám se zmiňujeme v komentáři.

7.4 REDUCIBILITA. UNITÁRNÍ EKVIVALENCE

Nechť T je lineární operátor na $\mathscr{H}$ s definičním oborem D_T, přičemž obecně $D_T \neq \mathscr{H}$. Je-li $\mathscr{G}$ uzavřený T-invariantní podprostor (viz § 3.6), je $T \restriction \mathscr{G}$ operátor na Hilbertově prostoru $\mathscr{G}$ s definičním oborem $D_T \cap \mathscr{G}$; nazýváme jej *částí T ležící v $\mathscr{G}$*. Předpokládejme, že i $\mathscr{G}^\perp$ je T-invariantní, a nechť T_1, T_2 jsou části T ležící v $\mathscr{G}$, resp. $\mathscr{G}^\perp$. Symbolem $T_1 \oplus T_2$ označíme lineární operátor s definičním oborem $D(T_1 \oplus T_2) := (D_T \cap \mathscr{G}) \oplus (D_T \cap \mathscr{G}^\perp)$, jehož působení je určeno vztahem

$$(T_1 \oplus T_2)(x_1 + x_2) := T_1 x_1 + T_2 x_2 \tag{1}$$

pro $x_1 \in D_T \cap \mathscr{G}$ a $x_2 \in D_T \cap \mathscr{G}^\perp$; nazýváme jej *ortogonálním součtem operátorů T_1, T_2*. Jestliže $D_T = \mathscr{H}$, je zřejmé, že $T = T_1 \oplus T_2$; v opačném případě není zaručeno, že projektor E na podprostor $\mathscr{G}$ splňuje podmínku $ED_T \subset D_T$, a pokud tato inkluze neplatí, potom $T_1 \oplus T_2 \subset T$, ale $T_1 \oplus T_2 \neq T$.

7.4.1 Příklad: Uvažujme operátor P na $L^2(-1, 1)$ (viz příklad 7.2.7) a nechť projektor E je operátor násobení charakteristickou funkcí intervalu $(0, 1)$. Podprostory $\operatorname{Ran} E$ a $(\operatorname{Ran} E)^\perp$ jsou zjevně P-invariantní, ale např. pro funkci $x \mapsto \psi(x) := 1 - x^2$ patřící do D_P platí $E\psi \notin D_P$.

Je proto účelné zavést následující pojem: lineární operátor T na $\mathscr{H}$ je **reducibilní**, jestliže existuje netriviální projektor E (tj. $E \neq 0$, $E \neq I$) takový, že
(i) $ED_T \subset D_T$,
(ii) podprostory $E\mathscr{H}$ a $(I - E)\mathscr{H}$ jsou T-invariantní; v opačném případě je T **ireducibilní**.

O operátoru, který splňuje uvedené podmínky, se alternativně říká, že je *redukován projektorem E*, resp. *podprostorem $E\mathscr{H}$*. Je zřejmé, že operátor T je redukován podprostorem $E\mathscr{H}$ právě tehdy, když je redukován podprostorem $E\mathscr{H}^\perp$. Následující tvrzení bezprostředně plyne z uvedených definic.

7.4.2 Tvrzení: S označením (1) platí $T = T_1 \oplus T_2$ právě tehdy, když podprostor $\mathscr{G} \equiv E\mathscr{H}$ redukuje operátor T; je-li tato podmínka splněna, potom $D(T_1) \equiv D_T \cap \mathscr{G} = ED_T$ a $D(T_2) \equiv D_T \cap \mathscr{G}^\perp = (I - E)\, D_T$.

7.4.3 Příklad: Nechť λ je vlastní hodnota normálního operátoru T. Díky tomu, že T je uzavřený, je příslušný vlastní podprostor $\operatorname{Ker}(T - \lambda)$ rovněž uzavřený (ověřte!); dále z $\operatorname{Ker}(T - \lambda) \subset D_T$ plyne, že projektor $E(\lambda)$ na $\operatorname{Ker}(T - \lambda)$ splňuje $E(\lambda)\, D_T \subset D_T$. Podprostor $\operatorname{Ker}(T - \lambda)$ je zjevně T-invariantní, a protože podle (7.3.6b) pro každé $y \in \operatorname{Ker}(T - \lambda)^\perp \cap D_T$ a $x \in \operatorname{Ker}(T - \lambda)$

platí $(Ty, x) = (y, T^*x) = \bar{\lambda}(y, x) = 0$, je $\mathrm{Ker}\,(T - \lambda)^{\perp}$ rovněž T-invariantní. Každý normální operátor je tedy redukován kterýmkoli ze svých vlastních podprostorů.

7.4.4 Věta (*kritérium reducibility*): Lineární operátor T je redukován projektorem E právě tehdy, když

$$ET \subset TE\,, \tag{2}$$

což je ekvivalentní podmínkám $ED_T \subset D_T$ a $ETx = TEx$ pro všechna $x \in D_T$.

Důkaz: Nechť T je redukován projektorem E; libovolné $x \in D_T$ zapíšeme ve tvaru $x = y + z$, kde $y := Ex$ a $z := (I - E)\,x$. Podle předpokladu je $y, z \in D_T$, dále $Ty \in E\mathscr{H}$ a $Tz \in E\mathscr{H}^{\perp}$, takže $ETx = ETy = Ty = TEx$. Naopak, z podmínky (2) plyne T-invariance podprostoru $E\mathscr{H}$, neboť pro $x \in E\mathscr{H} \cap D_T$ je $Tx = TEx = ETx \in E\mathscr{H}$. Stejně se ověří T-invariance podprostoru $(I - E)\,\mathscr{H}$. ■

7.4.5 Příklad: Nechť T je normální operátor, jehož množina vlastních hodnot je neprázdná. Pro dané $\lambda \in \sigma_p(T)$ označíme $E(\lambda)$ projektor na příslušný vlastní podprostor; podle vztahu (7.3.6c) platí $E(\lambda)\,E(\mu) = 0$, jestliže $\lambda \neq \mu$. V případě konečné množiny $\sigma_p(T) \equiv \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ je $E_n := \sum_{j=1}^{n} E(\lambda_j)$ projektor na $\sum_{j=1}^{n}{}^{\oplus}\,\mathrm{Ker}\,(T - \lambda_j)$, a protože každý z projektorů $E(\lambda_j)$ redukuje operátor T, vyplývá z věty 4, že E_n rovněž redukuje T. Je-li $\sigma_p(T)$ spočetně nekonečná, $\sigma_p(T) \equiv \{\lambda_j\colon j = 1, 2, \dots\}$, označíme jako E projektor na $\mathscr{H}_p := \sum_{j=1}^{\infty}{}^{\oplus}\,\mathrm{Ker}\,(T - \lambda_j)$. Podle vztahů (5.4.5) platí $E = \sum_{j=1}^{\infty} E(\lambda_j) \equiv \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} E_n$. Nechť $x \in D_T$, $y := Ex$; pro každé přirozené n je $E_nE = EE_n = E_n$, takže $y_n := E_ny = E_nx \in D_T$ a $y_n \to y$. Díky tomu, že E_n redukuje T, platí $Ty_n = TE_nx = E_nTx \to ETx$, a z uzavřenosti operátoru T vyplývá $y \in D_T$, tj. $ED_T \subset D_T$, a $TEx = ETx$. Podprostor $\mathscr{H}_p$ tedy redukuje operátor T, a proto $T_p := T \restriction \mathscr{H}_p$, resp. $T_c := T \restriction \mathscr{H}_p^{\perp}$ jsou normální operátory na Hilbertových prostorech $\mathscr{H}_p$, resp. $\mathscr{H}_p^{\perp}$ (cvičení 29). Z konstrukce prostoru $\mathscr{H}_p$ je zřejmé, že v tomto podprostoru existuje ortonormální báze tvořená vlastními vektory operátoru T; naproti tomu T_c nemá žádné vlastní hodnoty. Poznamenejme ještě, že předpoklad spočetnosti množiny $\sigma_p(T)$ není podstatný: pomocí tvrzení 5.4.10 snadno zjistíme, že podprostor $\sum_{\lambda \in \sigma_p(T)}{}^{\oplus}\, N(\lambda)$ redukuje operátor T pro množinu $\sigma_p(T)$ libovolné mohutnosti.

220 Shrneme závěry, k nimž jsme dospěli: každý normální operátor T lze vyjádřit ve tvaru ortonormálního součtu

$$T = T_{\mathrm{p}} \oplus T_{\mathrm{c}}\,, \tag{3a}$$

kde T_{p} je normální operátor s čistě bodovým spektrem, zatímco $\sigma_{\mathrm{p}}(T_{\mathrm{c}}) = \emptyset$. Dále platí (viz cvičení 29 a tvrzení 7.3.9)

$$\sigma(T) = \sigma(T_{\mathrm{p}}) \cup \sigma(T_{\mathrm{c}}) = \overline{\sigma_{\mathrm{p}}(T)} \cup \sigma(T_{\mathrm{c}})\,. \tag{3b}$$

Speciálně platí tyto formule pro každý samosdružený operátor A, přičemž operátory A_{p} a A_{c} jsou rovněž samosdružené.

Vraťme se ke kritériu reducibility. Pro $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ má podmínka (2) tvar $ET = TE$ a vyjadřuje, že operátory T, E komutují. To poskytuje motivaci k následujícímu zobecnění pojmu komutativity. Nechť T je libovolný lineární operátor na $\mathscr{H}$ a $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$; budeme říkat, že operátory T a B komutují, jestliže

$$BT \subset TB\,, \tag{4}$$

což můžeme opět rozepsat jako $BD_T \subset D_T$ a $BTx = TBx$ pro všechna $x \in D_T$. Je jasné, že pro $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ přechází (4) na $BT = TB$. Vhodnost uvedené definice ilustruje např. to, že z ní vyplývá komutativita každého invertibilního omezeného operátoru B s B^{-1} (viz též cvičení 31); přitom $BB^{-1} \neq B^{-1}B$, jakmile $\operatorname{Ran} B \neq \mathscr{H}$.

Pro širokou třídu neomezených operátorů lze podmínku (4) vyjádřit pomocí rezolventy operátoru T.

7.4.6 Věta: Nechť T je uzavřený lineární operátor s neprázdnou rezolventní množinou. Postačující podmínkou komutativity T s omezeným operátorem B je, aby

$$R_T(\mu)\, B = BR_T(\mu) \tag{5}$$

alespoň pro jedno $\mu \in \varrho(T)$; nutnou podmínkou je platnost této rovnosti pro všechna $\mu \in \varrho(T)$.

Důkaz: Při ověření postačující podmínky vyjdeme z toho, že libovolné $x \in D_T$ lze zapsat ve tvaru $x = R_T(\mu)\, y$. Pomocí (5) dostáváme $Bx = BR_T(\mu)\, y = R_T(\mu)\, By$, takže $Bx \in \operatorname{Ran} R_T(\mu) = D_T$. Dále $BTx = B(T-\mu+\mu)\, R_T(\mu)\, y = By+\mu Bx$ a $TBx = (T-\mu)\, BR_T(\mu)\, y + \mu Bx = By + \mu Bx$, tj. $BTx = TBx$ pro všechna $x \in D_T$.

Jestliže naopak $BT \subset TB$, potom pro každé $\mu \in \mathbb{C}$ platí $B(T-\mu) \subset (T-\mu)\, B$; speciálně pro $\mu \in \varrho(T)$ odtud plyne $BR_T(\mu) = R_T(\mu)\, B$ (viz cvičení 30). ■

7.4.7 Důsledek: Nechť T, S jsou uzavřené operátory, jejichž rezolventní množiny jsou neprázdné. Jestliže existují $\lambda_0 \in \varrho(T)$, $\mu_0 \in \varrho(S)$ taková, že $R_T(\lambda_0)$ komutuje s $R_S(\mu_0)$, potom operátory $R_T(\lambda)$, $R_S(\mu)$ komutují pro všechna $\lambda \in \varrho(T)$, $\mu \in \varrho(S)$.

7.4.8 Poznámka: Pojem komutativity dvojice neomezených operátorů budeme potřebovat jen v případě, kdy oba uvažované operátory jsou samosdružené. Příslušnou definici uvádíme v § 10.3; vyplývá z ní, že samosdružené operátory A, B komutují právě tehdy, když $R_A(\lambda)\, R_B(\mu) = R_B(\mu)\, R_A(\lambda)$ pro všechna $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Zbývající část tohoto paragrafu je věnována unitární ekvivalenci. Budeme říkat, že lineární operátory T, S na $\mathscr{H}$ jsou **unitárně ekvivalentní**, jestliže existuje unitární operátor U takový, že

$$T = USU^{-1}. \tag{6a}$$

Tato podmínka zahrnuje následující vztah mezi definičními obory:

$$D_T = D(USU^{-1}) = UD_S, \tag{6b}$$

a plyne z ní

$$\operatorname{Ran} T = U \operatorname{Ran} S. \tag{6c}$$

7.4.9 Poznámky: (a) Díky tomu, že unitární operátory tvoří grupu vůči násobení v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ (viz cvičení 5.28), je vztah unitární ekvivalence reflexivní, symetrický a tranzitivní.

(b) Ve smyslu poznámky 5.5.2 mluvíme o unitární ekvivalenci i v případě operátorů T_1, T_2 na různých Hilbertových prostorech $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$, jestliže existuje izomorfismus $V\colon \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ takový, že $T_2 = VT_1V^{-1}$.

Unitárně ekvivalentní operátory mají řadu shodných charakteristik – nejdůležitější z nich nyní uvedeme (viz též cvičení 32, 33).

7.4.10 Tvrzení: Z unitární ekvivalence operátorů T, S plyne: (a) Je-li S hustě definovaný, je $T = USU^{-1}$ hustě definovaný a $T^* = US^*U^{-1}$. Je-li speciálně S symetrický (samosdružený), je T symetrický (samosdružený).

(b) Je-li S invertibilní, je T invertibilní, přičemž $T^{-1} = US^{-1}U^{-1}$.

(c) Je-li S uzavřený, je T uzavřený, platí $\sigma(T) = \sigma(S)$ a $\Gamma(T) = U_\oplus \Gamma(S)$, kde

$$U_\oplus[x, y] := [Ux, Uy]. \tag{7}$$

Důkaz: (a) Implikace $\overline{D_S} = \mathscr{H} \Rightarrow \overline{UD_S} = \mathscr{H}$ plyne z výsledků cvičení 5.4. Vztah $T^* = US^*U^{-1}$ dostaneme z cvičení 2 a tvrzení 7.1.3e. Je tedy $D(T^*) = UD(S^*)$ a odtud plyne zbytek tvrzení (a).

 (b) Označme $T' := US^{-1}U^{-1}$; podle (6b, c) platí $D(T') = U\,\mathrm{Ran}\,S = \mathrm{Ran}\,T$, pro každé $x \in D_T$ je $T'Tx = x$ a z tvrzení A.1.6a plyne $T' = T^{-1}$.
(c) Operátor $U_\oplus$ definovaný na Hilbertově prostoru $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$ vztahem (7) je unitární a přímo z definičního vztahu plyne $U_\oplus\,\Gamma(S) = \Gamma(T)$. Dále pro $S \in \mathscr{C}(\mathscr{H})$ platí $U_\oplus\,\Gamma(S) = U_\oplus\,\overline{\Gamma(S)} = \overline{U_\oplus\,\Gamma(S)}$, a proto $T \in \mathscr{C}(\mathscr{H})$. Pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ jsou operátory $T - \lambda$ a $S - \lambda$ unitárně ekvivalentní. Je-li $\lambda \in \varrho(S)$, potom ze vztahu (6c) a zřejmé rovnosti $\mathrm{Ker}\,(T - \lambda) = U\,\mathrm{Ker}\,(S - \lambda)$ plyne $\lambda \in \varrho(T)$; záměnou operátorů T, S dostáváme $\varrho(S) = \varrho(T)$, a tedy též $\sigma(S) = \sigma(T)$. ■

7.4.11 Poznámka: Z provedeného důkazu je patrné, že tvrzení platí i v případě, kdy T, S jsou unitárně ekvivalentní operátory na různých Hilbertových prostorech.

7.4.12 Příklad: Uvažujme operátor $T := F^{-1}QF$ na $L^2(\mathbb{R})$, kde Q je samosdružený operátor násobení nezávisle proměnnou z příkladu 7.1.5 a F je Fourierův-Plancherelův operátor. Operátor T je tudíž samosdružený a pro každé $\psi \in D_T$ platí $\psi = F^{-1}\varphi$, kde $\varphi \in D_Q \subset L^1(\mathbb{R})$ (viz cvičení 5). Pak ze vztahu (5.1.5) dostáváme

$$(2\pi)^{1/2}\,\psi(x) = \int e^{ixy}\,\varphi(y)\,dy = i\int \frac{e^{ixy} - 1}{iy}\,y\,\varphi(y)\,dy + \int \varphi(y)\,dy\,.$$

Odtud na základě tvrzení 5.1.9b a formule (5.1.6b) vyplývá, že ψ je absolutně spojitá v $\mathbb{R}$, přičemž

$$-i\,\psi'(x) = (2\pi)^{-1/2}\,\frac{d}{dx}\int \frac{e^{ixy} - 1}{iy}\,(Q\varphi)(y)\,dy = (F^{-1}Q\varphi)(x)\,.$$

To znamená, že $\psi' \in L^2(\mathbb{R})$ a $-i\psi' = F^{-1}QF\psi$. Vidíme tedy, že každá funkce $\psi \in D_T$ je absolutně spojitá v $\mathbb{R}$, přičemž $\psi' \in L^2$ a $T\psi = -i\psi'$, což můžeme pomocí samosdruženého operátoru P na $L^2(\mathbb{R})$ z příkladu 7.2.7 zapsat ve tvaru $T \subset P$. Nyní T i P jsou samosdružené, a proto jsou si rovny. Operátory P a Q na $L^2(\mathbb{R})$ jsou tedy unitárně ekvivalentní:

$$P = F^{-1}QF\,. \tag{8}$$

Odtud např. vyplývá, že $\sigma(P) = \sigma(Q) = \mathbb{R}$ (viz příklad 7.3.8).

7.5 NEOMEZENÉ SESKVILINEÁRNÍ FORMY

Mezi omezenými operátory a omezenými seskvilineárními formami na daném $\mathscr{H}$ existuje vzájemně jednoznačná korespondence vyjádřená vztahem (5.1.1). Podobná korespondence existuje i mezi neomezenými operátory a formami; vztahuje se však jen na určitou třídu neomezených operátorů a souvislost mezi operátorem a odpovídající formou je složitější. Omezíme se zde na symetrické zdola omezené formy, které jsou pro nás důležité z hlediska dalších aplikací; o některých zobecněních získaných výsledků se lze poučit např. v [[Ka]], kap. VI.

Budeme vycházet z definic uvedených v § 1.2. Nechť D je podprostor v $\mathscr{H}$; seskvilineární formu $f\colon D \times D \to \mathbb{C}$ budeme stručně nazývat formou na $\mathscr{H}$ a podprostor $D \equiv D(f)$ jejím definičním oborem. Jestliže $\overline{D(f)} = \mathscr{H}$, říkáme, že *forma je hustě definovaná.* Pro kvadratickou formu q_f generovanou formou f budeme užívat jednoduššího označení

$$f[x] := q_f(x) = f(x, x)\,, \qquad x \in D(f)\,.$$

Z linearity vyplývá, že f je jednoznačně určena příslušnou kvadratickou formou pomocí polarizační formule. Pro formy se definují běžné operace bodového sčítání a násobení skalárem; výsledkem je opět forma, pro jejíž definiční obor platí stejná pravidla jako pro sčítání neomezených operátorů. Rovněž operace rozšíření a zúžení mají obvyklý význam a užívá se pro ně stejných symbolů jako v případě operátorů.

Jednotkovému operátoru přiřazuje vztah (5.1.1) skalární součin; pro tuto formu budeme někdy užívat označení e, tj. e je forma definovaná na celém $\mathscr{H}$ vztahem $e(x, y) := (x, y)$.

Množina $\Theta(f) := \{f[x]\colon x \in D(f),\ \|x\| = 1\}$ se nazývá *číselným oborem hodnot formy f.* Stejně jako v případě operátorů z polarizační formule plyne, že forma f je symetrická právě tehdy, když $\Theta(f) \subset \mathbb{R}$. Symetrická forma s je *zdola omezená,* jestliže

$$m_s := \inf \Theta(s) > -\infty\,.$$

Je zřejmé, že forma s je *pozitivní* právě tehdy, když $m_s \geqq 0$. Každé symetrické zdola omezené formě odpovídá pozitivní forma

$$s_0 := s - m_s e\,. \tag{1}$$

Jestliže s je pozitivní forma, potom pro všechna $x, y \in D(s)$ platí Schwarzova nerovnost

$$|s(x, y)| \leqq (s[x]\, s[y])^{1/2}\,, \tag{2}$$

z níž plynou nerovnosti (viz cvičení 1.9)

$$s[x + y]^{1/2} \leqq s[x]^{1/2} + s[y]^{1/2}\,, \qquad |s[x]^{1/2} - s[y]^{1/2}| \leqq s[x - y]^{1/2}\,. \tag{3}$$

7.5.1 Příklady: (a) Nechť T je lineární operátor na $\mathscr{H}$ s definičním oborem D_T. Formu f_T, pro niž $D(f_T) := D_T$ a $f_T(x, y) := (x, Ty)$, nazýváme *formou generovanou operátorem T.* Je zřejmé, že množina $\Theta(f_T)$ je totožná s číselným oborem hodnot operátoru T. Je-li speciálně T zdola omezený symetrický operátor, je f_T zdola omezená symetrická forma.

224 (b) Pro lineární operátor $S: \mathscr{H} \to \mathscr{H}_1$, kde $\mathscr{H}_1$ je libovolný Hilbertův prostor, je vztahem

$$p(x, y) := (Sx, Sy)_1,$$

definována pozitivní forma s definičním oborem $D(p) := D_S$.

(c) Pro $\mathscr{H} = L^2(a, b)$, $b - a < \infty$, danou reálnou funkci $q \in L^2(a, b)$ splňující $q(x) \geqq m_q$ pro s.v. $x \in (a, b)$ a konstanty $h_a, h_b \in \mathbb{R}$ položíme $D(t) := = AC(a, b)$ a

$$t(\varphi, \psi) := \int_a^b (\overline{\varphi'(x)}\, \psi'(x) + q(x)\, \overline{\varphi(x)}\, \psi(x))\, \mathrm{d}x + h_b\, \overline{\varphi(b)}\, \psi(b) + h_a\, \overline{\varphi(a)}\, \psi(a).$$

Forma t je hustě definovaná a symetrická. Pro dané $\varphi \in AC$ dává integrace *per partes*

$$\varphi(b) = (g_n, \varphi') + (g_n', \varphi), \quad \text{kde } g_n(x) := \frac{(x - a)^n}{(b - a)^n}, \quad n = 1, 2, \dots. \tag{4a}$$

Podobně platí $\varphi(a) = (h_n, \varphi') + (h_n', \varphi)$ pro funkci

$$x \mapsto h_n(x) := -(x - b)^n (a - b)^{-n},$$

přičemž

$$\|g_n\| = \|h_n\| = \left(\frac{b - a}{2n + 1}\right)^{1/2}, \qquad \|g_n'\| = \|h_n'\| = \frac{n}{((b - a)(2n - 1))^{1/2}}. \tag{4b}$$

Potom $t[\varphi] \geqq \|\varphi'\|^2 + m_q\|\varphi\|^2 - |h_b|\,|\varphi(b)|^2 - |h_a|\,|\varphi(a)|^2 \geqq A\|\varphi'\|^2 - B\|\varphi\|^2$, kde $A := 1 - 2(|h_a| + |h_b|)\,\|g_n\|^2$ a $B := 2(|h_a| + |h_b|)\,\|g_n'\|^2 - m_q$. Jelikož $\|g_n\| \to 0$ pro $n \to \infty$, lze docílit, aby $A > 0$. Forma t je proto omezená zdola, přičemž $m_t \geqq -B$.

V dalším bude s označovat symetrickou zdola omezenou formu a s_0 odpovídající pozitivní formu (1). Na podprostoru $D(s)$ zavedeme skalární součin

$$(x, y)_s := s(x, y) + (1 - m_s)(x, y) = s_0(x, y) + (x, y) = (x, y)_{s_0}.$$

Tím se $D(s)$ stane pre-Hilbertovým prostorem, který označíme $\mathscr{H}_s$; zřejmě platí $\mathscr{H}_s = \mathscr{H}_{s_0}$. Budeme říkat, že forma s je **uzavřená**, jestliže $\mathscr{H}_s$ je Hilbertův prostor.

Nechť posloupnost $\{x_n\} \subset D(s)$ je cauchyovská vzhledem k normě $\|\cdot\|_s$; snadno nahlédneme, že to je splněno právě tehdy, když $x_n \to x \in \mathscr{H}$ a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_ε takové, že $n > n_\varepsilon$ a $m > n_\varepsilon$ implikuje $|s[x_n - x_m]| < \varepsilon$. Tyto dvě podmínky se zapisují jako $x_n \xrightarrow{(s)} x$.

7.5.2 Tvrzení: Následující výroky jsou ekvivalentní:

(a) s je uzavřená forma,
(b) pro každou posloupnost $\{x_n\}$ takovou, že $x_n \xrightarrow{(s)} x$, platí $x \in D(s)$ a $s[x_n - x] \to 0$,
(c) $s + ae$ je uzavřená pro každé $a \in \mathbb{R}$.
Důkaz přenecháváme čtenáři.

7.5.3 Příklad: Pro formu p z příkladu 1b platí $x_n \xrightarrow{(p)} x$ právě tehdy, když $x_n \to x$ a $\{Sx_n\}$ je konvergentní posloupnost v $\mathscr{H}_1$. To znamená, že nutnou a postačující podmínkou uzavřenosti formy p je uzavřenost operátoru S. Např. pro $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H} = L^2(a, b)$ a operátor $S = -\mathrm{i}\, \mathrm{d}/\mathrm{d}x$, s definičním oborem $D_S = AC(a, b)$, tj. $S = P^*$ (viz příklad 7.2.7), je $p(\varphi, \psi) = \int_a^b \overline{\varphi'(x)}\, \psi'(x)\, \mathrm{d}x$ uzavřená forma.

7.5.4 Lemma: Jestliže $x_n \xrightarrow{(s)} x$, $y_n \xrightarrow{(s)} y$, potom posloupnost $\{s(x_n, y_n)\}$ je cauchyovská; je-li speciálně forma s uzavřená, platí $s(x_n, y_n) \to s(x, y)$.
Důkaz: Z podmínek $x_n \xrightarrow{(s)} x$, $y_n \xrightarrow{(s)} y$ plyne $(x_n, y_n) \to (x, y)$; proto můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že s je pozitivní. Dokazované tvrzení potom plyne z odhadu

$$\begin{aligned} |s(x_n, y_n) - s(x_m, y_m)| &\leqq |s(x_n - x_m, y_n)| + |s(x_m, y_n - y_m)| \leqq \\ &\leqq s[x_n - x_m]^{1/2}\, s[y_n]^{1/2} + s[y_n - y_m]^{1/2}\, s[x_n]^{1/2} \end{aligned} \tag{5}$$

a z toho, že posloupnosti $\{s[x_n]\}$, $\{s[y_n]\}$ jsou cauchyovské (viz (3)), a tudíž omezené. V případě, že forma s je uzavřená, z podmínek $x_n \xrightarrow{(s)} x$, $y_n \xrightarrow{(s)} y$ plyne $s[x_n - x] \to 0$, $s[y_n - y] \to 0$, a vztah $s(x_n, y_n) \to s(x, y)$ dostaneme, položíme-li v nerovnosti (5) $x_m = x$, $y_m = y$. ■

Ne každá symetrická forma je uzavřená; vzniká tedy otázka existence uzavřených rozšíření. Na rozdíl od operátorů, kde díky pojmu grafu jsou úvahy související s uzávěrem velmi názorné, je u forem situace poněkud složitější a tvrzení jsou slabší; jak za okamžik uvidíme, existují např. symetrické zdola omezené formy, které nemají žádné uzavřené rozšíření.

Budeme říkat, že *formu s lze uzavřít*, jestliže existuje uzavřená forma $s_1 \supset s$. Jak ukazuje následující věta, vyplývá z této podmínky existence *minimálního uzavřeného rozšíření formy s* které nazýváme jejím **uzávěrem** a značíme $\bar{s}$.

7.5.5 Věta: K tomu, aby symetrickou zdola omezenou formu s bylo možno uzavřít, je nutné a stačí, aby z podmínky $x_n \xrightarrow{(s)} 0$ vyplývalo $s[x_n] \to 0$. Jestliže tato implikace platí a označíme-li jako $D(\bar{s})$ podprostor tvořený právě těmi vektory $x \in \mathscr{H}$, pro něž existuje $\{x_n\} \subset D(s)$ splňující $x_n \xrightarrow{(s)} x$, potom je na podprostoru $D(\bar{s})$ vztahem

$$\bar{s}(x, y) := \lim_{n \to \infty} s(x_n, y_n)\,, \tag{6}$$

 pro $x_n \xrightarrow{(s)} x$, $y_n \xrightarrow{(s)} y$ definovaná forma $\bar{s}$, která je minimálním uzavřeným rozšířením formy s. Dále platí

$$m_{\bar{s}} = m_s . \tag{7}$$

Důkaz: Jestliže $s_1 \supset s$ je uzavřená forma, potom $x_n \xrightarrow{(s)} 0$ implikuje $x_n \xrightarrow{(s_1)} 0$, a odtud díky uzavřenosti vyplývá $0 = \lim_{n\to\infty} s_1[x_n] = \lim_{n\to\infty} s[x_n]$.

Předpokládejme naopak, že platí implikace $x_n \xrightarrow{(s)} 0 \Rightarrow s[x_n] \to 0$; ukážeme, že vztahem (6) je na $D(\bar{s})$ definována uzavřená forma, a že pro libovolnou uzavřenou formu $s_1 \supset s$ platí $s_1 \supset \bar{s}$. Existence limity (6) plyne z lemmatu a její nezávislost na posloupnostech $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ z cvičení 37 a odhadu (5). Dále z tohoto cvičení vyplývá, že $D(\bar{s})$ je podprostor; pak díky linearitě limitního přechodu dostáváme ze vztahu (6), že $\bar{s}$ je forma, přičemž $\bar{s} \supset s$. Kromě toho je z tohoto vztahu patrné, že $\bar{s}$ je symetrická, omezená zdola a $m_{\bar{s}} \geqq m_s$, což spolu s inkluzí $\bar{s} \supset s$ dává rovnost (7). Zbývá ověřit, že $\bar{s}$ je minimální uzavřené rozšíření.

Nechť $x \in D(\bar{s})$ a $x_n \xrightarrow{(s)} x$; ke každému $\varepsilon > 0$ tedy existuje přirozené n_ε takové, že $n, m > n_\varepsilon \Rightarrow |s[x_n - x_m]| < \varepsilon$. Provedeme-li zde limitní přechod vzhledem k m, zjistíme pomocí (6), že $|\bar{s}[x_n - x]| \leqq \varepsilon$, jakmile $n > n_\varepsilon$. Odtud plynou následující závěry:

(i) $D(s)$ je hustý podprostor v pre-Hilbertově prostoru $\mathscr{H}_{\bar{s}} = D(\bar{s})$;

(ii) ke každé posloupnosti $\{x_n\} \subset D(s)$, která je cauchyovská vzhledem k $\|.\|_s$, existuje $x \in \mathscr{H}_{\bar{s}}$ takové, že $\|x_n - x\|_{\bar{s}} \to 0$.

Na základě těchto závěrů ověříme, že $\mathscr{H}_{\bar{s}}$ je úplný. Nechť posloupnost $\{y_n\} \subset \mathscr{H}_{\bar{s}}$ je cauchyovská vzhledem k $\|.\|_{\bar{s}}$. Podle (i) existuje posloupnost $\{x_n\} \subset D(s)$ taková, že $\|x_n - y_n\|_{\bar{s}} < 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$. Posloupnost $\{x_n\}$ je potom cauchyovská vzhledem k $\|.\|_{\bar{s}}$, tj. také vzhledem k $\|.\|_s$, a z tvrzení (ii) plyne $\|x_n - x\|_{\bar{s}} \to 0$. Potom $\|y_n - x\|_{\bar{s}} \leqq \|x_n - x\|_{\bar{s}} + 1/n \to 0$; prostor $\mathscr{H}_{\bar{s}}$ je tedy úplný, takže $\bar{s}$ je uzavřená forma. Uvažujme konečně uzavřenou formu $s_1 \supset s$ a libovolné $x \in D(\bar{s})$; podle předpokladu existuje posloupnost $\{x_n\} \subset D(s)$, pro niž $x_n \xrightarrow{(s)} x$. Potom $x_n \xrightarrow{(s_1)} x$; z uzavřenosti formy s_1 plyne $x \in D(s_1)$ a vztah (6) spolu s lemmatem dává $\bar{s}[x] = \lim_{n\to\infty} s[x_n] = \lim_{n\to\infty} s_1[x_n] = s_1[x]$, takže $s_1 \supset \bar{s}$. ∎

7.5.6 Příklad: Uvažujme znovu formu p z příkladu 1b. Implikace $x_n \xrightarrow{(p)} 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow p[x_n] \to 0$ platí právě tehdy, když operátor S lze uzavřít (viz tvrzení 3.4.11). Každému operátoru, který nelze uzavřít, tudíž odpovídá pozitivní forma, která nemá uzávěr. Taková je např. forma p, již dostaneme, zvolíme-li $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R})$, $\mathscr{H}_1 = \mathbb{C}$ a $(S\psi)(x) := \psi(0)$ pro $\psi \in AC(\mathbb{R})$, tj. $p(\varphi, \psi) = \overline{\varphi(0)}\,\psi(0)$: podmínka $\varphi_n \xrightarrow{(p)} 0$ znamená $\varphi_n \in AC(\mathbb{R})$, $\varphi_n \to 0$ a $\varphi_n(0) \to \alpha \in \mathbb{C}$; z toho však nevyplývá, že $\alpha = 0$ (srov. se cvičením 3.29).

Existují tedy symetrické zdola omezené formy (dokonce hustě definované), které nelze uzavřít. Tato situace však nemůže nastat pro formu, která je generována zdola omezeným symetrickým operátorem.

7.5.7 Tvrzení: Forma $s \equiv f_A$ generovaná symetrickým zdola omezeným operátorem A má uzávěr a pro všechna $x \in D(\bar{s})$, $y \in D_A \equiv D(s)$ platí $\bar{s}(x, y) = (x, Ay)$.

Důkaz: Podle věty 5 stačí ověřit implikaci $x_n \xrightarrow{(s)} 0 \Rightarrow s[x_n] \to 0$. Předpokládejme nejprve, že A je pozitivní, takže s je rovněž pozitivní. Nyní z podmínky $x_n \xrightarrow{(s)} 0$ a (3) plyne, že $\{s[x_n]\}$ je cauchyovská, tj. omezená, $s[x_n] < M$ pro všechna n; dále Schwarzova nerovnost dává

$$s[x_n] = s(x_n, x_n - x_m) + s(x_n, x_m) \leqq$$

$$\leqq s[x_n]^{1/2} s[x_n - x_m]^{1/2} + (Ax_n, x_m) < (M\varepsilon)^{1/2} + \|Ax_n\| \, \|x_m\|$$

pro všechna $n, m > n_\varepsilon$. Jelikož $x_n \xrightarrow{(s)} 0$ zahrnuje podmínku $x_n \to 0$, dostáváme limitním přechodem $m \to \infty$ nerovnost $s[x_n] \leqq (M\varepsilon)^{1/2}$ pro všechna $n > n_\varepsilon$, tj. $s[x_n] \to 0$. Jestliže $\inf \Theta(A) \equiv m_A < 0$, je forma $s_0 := s - m_A e$ pozitivní, a protože z $x_n \xrightarrow{(s)} 0$ plyne $x_n \xrightarrow{(s_0)} 0$, platí $s_0[x_n] \to 0$. Potom $|s[x_n]| \leqq s_0[x_n] + |m_A| \, \|x_n\|^2 \to 0$. Tím je existence uzávěru dokázána. Nyní k libovolnému $x \in D(\bar{s})$ existuje podle věty 5 posloupnost $\{x_n\} \subset D_A$ taková, že $x_n \xrightarrow{(s)} x$; potom vztah (6) pro každé $y \in D_A$ dává $\bar{s}(x, y) = \lim_{n\to\infty} s(x_n, y) = \lim_{n\to\infty} (x_n, Ay) = (x, Ay)$. ■

Následující věta má základní význam pro teorii neomezených forem.

7.5.8 Věta (*o reprezentaci*): Nechť s je hustě definovaná uzavřená symetrická a zdola omezená forma na $\mathscr{H}$. Potom existuje samosdružený operátor A takový, že

(a) $D_A \subset D(s)$ a pro všechna $x \in D(s)$, $y \in D_A$ platí

$$s(x, y) = (x, Ay)\,; \tag{8}$$

(b) $\overline{s \upharpoonright D_A} = s$;

(c) jestliže existují vektory $x \in D(s)$ a $z \in \mathscr{H}$ takové, že pro všechna $y \in D(s)$ platí

$$s(x, y) = (z, y)\,, \tag{9}$$

potom $x \in D_A$ a $z = Ax$;

(d) jestliže lineární operátor T splňuje $D_T \subset D(s)$ a $(Tx, y) = s(x, y)$ pro všechna $x \in D_T$ a $y \in D(s)$, potom $T \subset A$; je-li speciálně operátor T samosdružený, platí $T = A$, takže podmínka (a) určuje samosdružený operátor A jednoznačně;

 (e) operátor A je omezený zdola, přičemž $\inf \Theta(A) = m_s$.

Důkaz: Předpokládejme nejprve, že $m_s = 0$. Díky tomu, že s je uzavřená, je $\mathscr{H}_s$ Hilbertův prostor. Pro libovolné $y \in \mathscr{H}$ uvažujme antilineární funkcionál l_y na $\mathscr{H}_s$, $l_y(x) := (x, y)$. Z nerovnosti $\|x\| \leqq \|x\|_s$ plyne, že l_y je spojitý na $\mathscr{H}_s$; snadnou modifikací důkazu věty 4.2.5 zjistíme, že existuje právě jedno $y' \in \mathscr{H}_s$ takové, že

$$(x, y) = (x, y')_s\,, \tag{10}$$

přičemž zobrazení $C\colon y \mapsto y'$ je lineární. Speciálně pro $x = y'$ platí $\|y'\|_s^2 \leqq \leqq \|y'\|\,\|y\| \leqq \|y'\|_s\|y\|$, tj. $\|Cy\| \leqq \|Cy\|_s \leqq \|y\|$, takže $C \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Rovnost (10) zapíšeme ve tvaru

$$(x, y) = (x, Cy)_s = s(x, Cy) + (x, Cy)\,. \tag{11a}$$

Pro všechna $x \in D(s)$, $y \in \mathscr{H}$ tedy platí

$$s(x, Cy) = (x, y - Cy)\,. \tag{11b}$$

Z podmínky $Cy = 0$ potom plyne $(x, y) = 0$ pro každé $x \in D(s)$, a jelikož tato množina je hustá v $\mathscr{H}_s$, musí být $y = 0$; operátor C je proto invertibilní. Dále pro každou dvojici $u, v \in \mathscr{H}$ z (11a) dostáváme $(Cu, v) = (Cu, Cv)_s = = \overline{(Cv, Cu)_s} = \overline{(Cv, u)} = (u, Cv)$, tj. operátor C je hermitovský, a proto C^{-1} je samosdružený (viz cvičení 4). Označíme-li v (11b) $z = Cy$, tj. $y = C^{-1}z$, dostáváme pro samosdružený operátor $A := C^{-1} - I$ vztah $s(x, y) = (x, Az)$ pro všechna $x \in D(s)$ a $z \in D_A = \operatorname{Ran} C \subset D(s)$. V obecném případě, kdy $m_s \neq 0$, je hledaný operátor A roven $A_0 + m_s I$, kde A_0 je samosdružený operátor odpovídající pozitivní formě $s_0 := s - m_s e$; tím je dokázáno tvrzení (a).

K ověření (b) stačí ukázat, že podprostor $D_A = \operatorname{Ran} C$ je hustý v $\mathscr{H}_s$ (viz cvičení 38). Z (11a) pro všechna $x \in D(s)$ plyne $\|x\|^2 = (x, Cx)_s$; odtud je vidět, že každý vektor patřící do ortogonálního doplňku podprostoru $\operatorname{Ran} C$ v $\mathscr{H}_s$ je nulový, a proto $(\overline{D_A})_s = \mathscr{H}_s$.

Tvrzení (c) dostaneme, přepíšeme-li podmínku (9) pro $y \in D_A$ pomocí (8) do tvaru $(x, Ay) = (z, y)$; odtud plyne $x \in D(A^*) = D_A$ a $z = A^*x = Ax$. Konečně tvrzení (d) plyne z (c); (e) plyne z (b) a formule (7). ■

7.5.9 Důsledek: Věta o reprezentaci definuje bijekci $s \mapsto A_s$ množiny všech hustě definovaných uzavřených symetrických forem omezených zdola a množiny všech samosdružených zdola omezených operátorů, přičemž A_s je omezený právě tehdy, když forma s je omezená.

Důkaz: Nechť $A_s = A_{s'}$ a označme $D \equiv D(A_s) = D(A_{s'})$. Pro formy s, s' tedy platí $s \upharpoonright D = s' \upharpoonright D$ a z tvrzení (b) plyne $s = s'$; zobrazení $s \mapsto A_s$ je tedy injektivní. K ověření surjektivity uvažujme formu s_A generovanou samosdruženým zdola omezeným operátorem A. Podle tvrzení 7 má tato forma uzávěr $\overline{s_A}$ splňující

$\overline{s_A}(x, y) = (x, Ay)$ pro všechna $x \in D(s_A)$, $y \in D_A$ a z tvrzení (d) dostáváme $A = A_{\overline{s_A}}$. ■

Pro A_s se užívá názvu *operátor asociovaný s formou s.*

7.5.10 Příklad: Jestliže $S \in \mathscr{L}_c(\mathscr{H})$, je pozitivní forma p z příkladu 1b hustě definovaná a uzavřená. Pro všechna $x \in D_S$ a $y \in D(A_p) \subset D_S$ platí $(Sx, Sy) = (x, A_p y)$; to znamená, že $Sy \in D(S^*)$ a $S^*Sy = A_p y$, neboli $A_p \subset S^*S$. Vzhledem k tomu, že S^*S je samosdružený (viz větu 7.2.11), platí $A_p = S^*S$.

7.5.11 Věta (*Friedrichsovo rozšíření*): Nechť A_0 je symetrický zdola omezený operátor, s je uzávěr formy generované operátorem A_0 a A_s je samosdružený operátor asociovaný s formou s. Pak
(a) $A_0 \subset A_s$ a $D(A_s) \subset D(s)$.
(b) $\inf \Theta(A_s) = \inf \Theta(A_0)$,
přičemž každý samosdružený operátor splňující podmínky (a) je totožný s A_s.
Důkaz: Forma s_0 generovaná operátorem A_0 má podle tvrzení 7 uzávěr $s \equiv \overline{s_0}$, přičemž pro všechna $x \in D(s)$ a $y \in D(A_0) \equiv D(s_0)$ platí $s(x, y) = (x, A_0 y)$. Odtud pro operátor A_s plyne $A_s \supset A_0$ (viz větu 8d); dále $D(A_s) \subset D(s)$ a podle rovnosti (7) a věty 8e máme $\inf \Theta(A_s) = m_s = m_{s_0} = \inf \Theta(A_0)$.

Nechť $A \supset A_0$ je samosdružený operátor splňující $D_A \subset D(s)$ a nechť s' je forma generovaná operátorem A. Jelikož $s' \supset s_0$, platí $\overline{s'} \supset s$, přičemž podle věty 8d a tvrzení 7 $A = A_{\overline{s'}}$. Potom pro každé $x \in D(s)$, $y \in D_A$ z věty o reprezentaci plyne $s(x, y) = \overline{s'}(x, y) = (x, Ay)$, což podle věty 8d znamená $A \subset A_s$; vzhledem k tomu, že oba operátory jsou samosdružené, platí $A = A_s$. ■

7.5.12 Poznámka: Uvažujme samosdružené zdola omezené operátory A_1 a A_2; označíme s_1 a s_2 odpovídající formy, tj. $A_r = A_{s_r}$ pro $r = 1, 2$. Obě tyto formy jsou hustě definované, symetrické, zdola omezené a uzavřené a tytéž vlastnosti, kromě první, má forma $s := s_1 + s_2$ (viz cvičení 39). Jestliže s je hustě definovaná, potom samosdružený operátor A_s nazýváme *součtem operátorů* A_1, A_2 *ve smyslu forem.* Jelikož $D(A_1 + A_2) \subset D(s_1) \cap D(s_2) = D(s)$ a pro všechna $x \in D(s)$ a $y \in D(A_1 + A_2)$ platí $s(x, y) = s_1(x, y) + s_2(x, y) = (x, (A_1 + A_2)\, y)$, plyne z věty 8d inkluze $A_1 + A_2 \subset A_s$ (přitom není vyloučen případ $A_1 + A_2 \notin \mathscr{L}_s(\mathscr{H})$, tj. tento operátor nemusí být symetrický). Poznamenejme ještě, že když operátor $A_1 + A_2$ je symetrický, pak existuje jeho Friedrichsovo rozšíření A^{F}, obecně však $A^{\mathrm{F}} \neq A_s$ (viz [[Ka]], § VI.2.5).

7.6 TENZOROVÝ SOUČIN NEOMEZENÝCH OPERÁTORŮ

Pojem tenzorového součinu, který jsme v § 5.7 zavedli pro omezené operátory, nyní zobecníme pro libovolnou dvojici lineárních operátorů T_r definovaných na podprostoru D_r Hilbertova prostoru $\mathscr{H}_r$, $r = 1, 2$.

Stejně jako v § 5.7 vyjdeme ze zobrazení T_{12}, které je definováno pro všechna $[x, y] \in D_1 \times D_2$ vztahem $T_{12}(x \otimes y) := T_1 x \otimes T_2 y$; jeho lineární rozšíření na podprostor $D_1 \odot D_2$ označíme $T_1 \otimes T_2$ a nazveme **tenzorovým součinem** operátorů T_1, T_2, tj.

$$(T_1 \otimes T_2)\left(\sum_j x_j \otimes y_j\right) := \sum_j T_1 x_j \otimes T_2 y_j \tag{1}$$

pro všechna $x_j \in D_1$, $y_j \in D_2$.

7.6.1 Poznámky: (a) S ohledem na označení zavedené v § 5.7 bychom měli pro rozšíření zobrazení T_{12} na $D_1 \odot D_2$ užít spíše symbolu $T_1 \odot T_2$ a jako $T_1 \otimes T_2$ označit uzávěr operátoru $T_1 \odot T_2$. V případě omezených operátorů má $B_1 \odot B_2$ jen pomocný charakter a prakticky se s tímto operátorem nepracuje, zatímco u neomezených operátorů je situace odlišná. Např. pro neomezené samosdružené operátory A_1, A_2 je $A_1 \otimes A_2$ v podstatě samosdružený (viz níže příklad 3) a často je výhodnější pracovat s ním než se složitějším operátorem $\overline{A_1 \otimes A_2}$. Kromě toho je označení (1) obvyklé v literatuře, i když se někdy nečiní rozdíl mezi $T_1 \otimes T_2$ a $\overline{T_1 \otimes T_2}$.
(b) Stejně jako v případě omezených operátorů odpovídají jednotlivým realizacím $\mathscr{H}$ a $\mathscr{H}'$ tenzorového součinu $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ realizace T a T' operátoru $T_1 \otimes T_2$ takové, že $T' = VTV^{-1}$, kde V je izomorfismus (4.6.2). To se dokáže stejně jako v případě omezených operátorů (viz poznámku 5.7.2) s tím, že navíc musí platit rovnost $D_{T'} = VD_T$, jež však plyne ze snadno ověřitelných inkluzí $VD_T \subset D_{T'}$, resp. $V^{-1}D_{T'} \subset D_T$.

7.6.2 Věta: Předpokládejme, že operátory T_r, $r = 1, 2$, jsou hustě definovány; potom
(a) $T_1 \otimes T_2$ je hustě definován a platí

$$(T_1 \otimes T_2)^* \supset T_1^* \otimes T_2^* ; \tag{2}$$

(b) jestliže operátory T_r lze uzavřít, existuje $\overline{T_1 \otimes T_2}$, přičemž $\overline{T_1 \otimes T_2} = (T_1 \otimes T_2)^{**} \supset T_1^{**} \otimes T_2^{**} = \bar{T}_1 \otimes \bar{T}_2$.
Důkaz: Z podmínek $\overline{D_r} = \mathscr{H}_r$, $r = 1, 2$, a tvrzení 4.6.4 plyne, že operátor $T_1 \otimes T_2$ je hustě definován. Vztah (2) vyplývá z (1) a definice sdruženého operátoru. Existence $\overline{T_1 \otimes T_2}$ je důsledkem věty 7.2.4 a inkluze (2); vztah $\overline{T_1 \otimes T_2} \supset \bar{T}_1 \otimes \bar{T}_2$ pak dostaneme z tvrzení 3.4.11 a (1), užijeme-li implikaci $\|x_n - x\|_1 \to 0$, $\|y_n - y\|_2 \to 0 \Rightarrow \|x_n \otimes y_n - x \otimes y\| \to 0$. ■

7.6.3 Příklad: Ve formuli (2) nemusí platit rovnost ani tehdy, když jeden z operátorů je omezený. Uvažujme třeba tenzorový součin samosdruženého neomezeného operátoru A na $\mathscr{H}_1$ a jednorozměrného projektoru E na $\mathscr{H}_2$; pro jednoduchost předpokládejme, že $\dim \mathscr{H}_2 = 2$ a zvolme v $\mathscr{H}_2$ ortonormální bázi $\{e, f\}$ tak, že $Ee = e$, $Ef = 0$. Potom platí (viz cvičení 4.24) $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2 =$

$= \{x \otimes e + y \otimes f\colon x, y \in \mathscr{H}_1\}$ a speciálně

$$D(A \otimes E) = \{x \otimes e + y \otimes f\colon x, y \in D_A\}.$$

Podle vztahu (2) je operátor $A \otimes E$ symetrický; ukážeme, že $D(A \otimes E) \neq \neq D((A \otimes E)^*)$. Nechť $z \equiv u \otimes e + v \otimes f \in D((A \otimes E)^*)$; existují tedy vektory $u^*, v^* \in \mathscr{H}_1$ takové, že

$$(u \otimes e + v \otimes f, (A \otimes E)(x \otimes e + y \otimes f)) =$$
$$= (u^* \otimes e + v^* \otimes f, x \otimes e + y \otimes f)$$

pro všechna $x, y \in D_A$. Užijeme-li podmínek $Ee = e$ a $Ef = 0$, přejde tato rovnost na $(u, Ax)_1 = (u^*, x)_1 + (v^*, y)_1$. Speciálně pro $y = 0$ ze samosdruženosti operátoru A plyne $u \in D_A$, čímž dostáváme inkluzi $D((A \otimes E)^*) \subset \subset \{x \otimes e + y \otimes f\colon x \in D_A,\ y \in \mathscr{H}_1\}$. Naopak, pro každou dvojici $x \in D_A$, $y \in \mathscr{H}_1$ a všechna $x', y' \in D_A$ máme

$$(x \otimes e + y \otimes f, (A \otimes E)(x' \otimes e + y' \otimes f)) =$$
$$= (x, Ax')_1 = (Ax, x')_1 = (Ax \otimes e, x' \otimes e + y' \otimes f).$$

Platí tudíž rovnost

$$D((A \otimes E)^*) = \{x \otimes e + y \otimes f\colon x \in D_A,\ y \in \mathscr{H}_1\}, \tag{3a}$$

přičemž akce operátoru $(A \otimes E)^*$ je dána vztahem

$$(A \otimes E)^*(x \otimes e + y \otimes f) = Ax \otimes e. \tag{3b}$$

Nyní díky neomezenosti operátoru A je množina $\mathscr{H}_1 \setminus D_A$ neprázdná, takže $D(A \otimes E) \neq D((A \otimes E)^*)$. Operátor $A \otimes E$ tedy není samosdružený; ukážeme, že je však v podstatě samosdružený. Podle cvičení 12 stačí ověřit, že $(A \otimes E)^*$ je symetrický. Ze vztahu (3a) je vidět, že je hustě definovaný, a rovnost (3b) pak pro libovolná $x, x' \in D_A$ a $y, y' \in \mathscr{H}_1$ dává

$$(x \otimes e + y \otimes f, (A \otimes E)^*(x' \otimes e + y' \otimes f)) =$$
$$= ((A \otimes E)^*(x \otimes e + y \otimes f), x' \otimes e + y' \otimes f).$$

Operátor $A \otimes E$ je tedy v podstatě samosdružený; tento závěr zobecníme v § 10.8.

232 Při provádění algebraických operací s tenzorovými součiny neomezených operátorů je třeba dávat opět pozor na definiční obory. Jestliže např. A_1 je neomezený symetrický operátor na $\mathscr{H}_1$ a $\operatorname{Ker} T_2 \neq \{0\}$, potom existuje $x \in \mathscr{H}_1 \setminus D(A_1)$ a nenulové $y \in \operatorname{Ker} T_2$; vektor $x \otimes y$ nepatří do $D(A_1 \otimes T_2)$, avšak $x \otimes y \in D((A_1 \otimes I_2)(I_1 \otimes T_2))$, neboť $(I_1 \otimes T_2)(x \otimes y) = 0 \in D(A_1 \otimes I_2)$. To znamená, že $A_1 \otimes T_2 = A_1 I_1 \otimes I_2 T_2 \neq (A_1 \otimes I_2)(I_1 \otimes T_2)$ (srv. s (5.7.6)).

7.6.4 Tvrzení: Pro libovolné lineární operátory S_r, T_r na $\mathscr{H}_r$, $r = 1, 2$, platí následující „aritmetická" pravidla:

$$\begin{aligned} (T_1 + S_1) \otimes T_2 &= T_1 \otimes T_2 + S_1 \otimes T_2 \,, \\ T_1 \otimes (T_2 + S_2) &= T_1 \otimes T_2 + T_1 \otimes S_2 \,, \end{aligned} \tag{4}$$

$$(T_1 S_1) \otimes (T_2 S_2) \subset (T_1 \otimes T_2)(S_1 \otimes S_2) \,. \tag{5}$$

Jestliže speciálně S_2 je invertibilní a $\operatorname{Ran} S_2 \subset D(T_2)$ (nebo když existuje S_1^{-1} a $\operatorname{Ran} S_1 \subset D(T_1)$), potom ve vztahu (5) platí rovnost.

Důkaz: Snadno nahlédneme platnost inkluze $(T_1 + S_1) \otimes T_2 \subset T_1 \otimes T_2 + S_1 \otimes T_2$. Nechť $x \in (D(T_1) \otimes D(T_2)) \cap (D(S_1) \otimes D(T_2))$, tj. existují $x_j \in D(T_1)$, $y_j \in D(T_2)$ tak, že $x = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j$ a současně $x = \sum_{k=1}^{m} x'_k \otimes y'_k$ pro $x'_k \in D(S_1)$, $y'_k \in D(T_2)$. Nechť $\{e_l\}_{l=1}^N$ je ortonormální báze v podprostoru $\{y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_m\}_{\text{lin}} \subset D(T_2)$, takže $y_j = \sum_l c_{jl} e_l$, $y'_k = \sum_l d_{kl} e_l$. Potom pro vektory $\tilde{x}_l := \sum_{j=1}^{n} c_{jl} x_j \in D(T_1)$ a $\tilde{x}'_l := \sum_{k=1}^{m} d_{kl} x'_k \in D(S_1)$ platí $\sum_l (\tilde{x}_l - \tilde{x}'_l) \otimes e_l = 0$. Díky ortogonalitě vektorů e_l odtud plyne $\tilde{x}_l = \tilde{x}'_l$, $l = 1, 2, \dots N$, tj. $\tilde{x}_l \in D(T_1) \cap D(S_1)$; jelikož $e_l \in D(T_2)$, patří $x = \sum_l \tilde{x}_l \otimes e_l$ do $D(T_1 + S_1) \otimes D(T_2)$. Tím je první z rovností (4) dokázána; druhá se ověří stejným způsobem.

Platnost vztahu (5) plyne přímo z definice (1). Důkaz postačujících podmínek pro to, aby platila rovnost, přenecháváme čtenáři (cvičení 40). ■

Komentář

§ **7.1** • Stejně jako v případě omezených operátorů jsou některé třídy neomezených hustě definovaných operátorů charakterizovány pomocí číselného oboru hodnot (viz § 5.3). To se týká především symetrických operátorů, pro něž $\Theta(A) \subset \mathbb{R}$ (cvičení 3). Říkáme, že symetrický operátor je *omezený zdola*, resp. *shora*, jestliže jeho obor hodnot splňuje podmínku $\inf \Theta(A) > -\infty$, resp. $\sup \Theta(A) < \infty$; je-li speciálně $\Theta(A) \subset [0, +\infty)$, je operátor A *pozitivní*.

§ **7.2** • Někdy se zavádí pojem esenciálního spektra uzavřeného operátoru T poněkud odlišně. Rozdíl proti definici uvedené v hlavním textu je pouze v tom, že podmínka $\|x_n\| = 1$ pro $n = 1, 2, \ldots$ je nahrazena požadavkem, aby posloupnost $\{x_n\}$ byla omezená. Jelikož každá posloupnost jednotkových vektorů je omezená, stačí k ověření ekvivalence ukázat toto: jestliže posloupnost $\{x_n\} \subset D_T$ splňuje podmínky druhé definice, potom posloupnost $\{e_n\}$, kde $e_n := x_n / \|x_n\|$, vyhovuje definici první. Z toho, že neexistuje konvergentní podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ plyne $x_n \neq 0$ pro všechna n větší než jisté n_0 a dále nerovnost $c \equiv \inf \|x_n\| > 0$. Vektory e_n jsou tedy definovány pro všechna $n > n_0$; dále platí $\|(T - \lambda)\, e_n\| \leq$ $\leq (1/c)\, \|(T - \lambda)\, x_n\| \to 0$. Předpokládejme nyní, že nějaká podposloupnost $\{e_{n_k}\}$ je konvergentní. Díky tomu, že množina $\{\|x_{n_k}\|\}$ je omezená, existuje konvergentní podposloupnost $\{\|x^{(l)}\|\}$, kde $x^{(l)} := x_{n_{k_l}}$; potom $\{x^{(l)}\} = \{e^{(l)} \|x^{(l)}\|\}$ je konvergentní posloupnost, což je ve sporu s výchozími předpoklady.

§ **7.3** • Problém stability samosdruženosti je podrobně diskutován v [Ka], § V.4, kde se mj. probírá případ symetrické poruchy S samosdruženého operátoru A s A-mezí rovnou 1. Potom $A + S$ je v podstatě samosdružený operátor a toto tvrzení platí i v případě, kdy A je pouze v podstatě samosdružený. Další vlastností, která je stabilní vůči symetrickým poruchám, je omezenost zdola. Jestliže operátory A, S splňují předpoklady Katovy-Rellichovy věty a A je navíc omezený zdola, potom $A + S$ je rovněž omezený zdola a pro jeho dolní hranici $m_{A+S} \equiv$ $\equiv \inf \Theta(A + S)$ platí odhad

$$m_{A+S} \geqq m_A - \max\left\{\frac{a}{1-b},\ a + b|m_A|\right\},$$

kde a, b jsou konstanty vystupující v nerovnosti (13a).

§ **7.4** • Jestliže k danému lineárnímu operátoru T na $\mathscr{H}$ existuje úplný systém $\{E_\alpha \colon \alpha \in I\}$ vzájemně ortogonálních projektorů takový, že pro každé $\alpha \in I$ platí $E_\alpha T \subset T E_\alpha$, potom pro všechna $x \in D_T$ z podmínky úplnosti, tj. $\sum_{\alpha \in I} E_\alpha x = x$, plyne $Tx = \sum_{\alpha \in I} E_\alpha T x = \sum_{\alpha \in I} T E_\alpha x$, což se píše ve tvaru

$$T = \sum_{\alpha \in I}^{\oplus} T_\alpha\,, \quad \text{kde } T_\alpha := T \upharpoonright E_\alpha D_T\,,$$

a představuje zobecnění tvrzení 2. V této souvislosti se zmíníme o obráceném postupu, který spočívá v tom, že pomocí daných operátorů T_α na Hilbertových prostorech $\mathscr{H}_\alpha$ konstruujeme operátor na $\mathscr{H} \equiv \sum_{\alpha \in I}^{\oplus} \mathscr{H}_\alpha$. Vektory $X \in \mathscr{H}$ jsou podle § 4.5 zobrazení $\alpha \mapsto X(\alpha) \in \mathscr{H}_\alpha$ taková, že každé X má jen spočetně mnoho nenulových „komponent“ $X(\alpha)$, pro něž platí $|||X|||^2 \equiv \sum_{\alpha \in I} \|X(\alpha)\|_\alpha^2 < \infty$. Nechť $D_\alpha \subset \mathscr{H}_\alpha$ je definiční obor operátoru T_α; položme

 $D := \{X \in \mathscr{H}\colon X(\alpha) \in D_\alpha, \sum_\alpha \|T_\alpha X(\alpha)\|_\alpha^2 < \infty\}$ a pro $X \in D$ definujme $(TX)(\alpha) := T_\alpha X(\alpha)$. Snadno zjistíme, že D je podprostor v $\mathscr{H}$ a zobrazení T s definičním oborem $D_T = D$ je lineární operátor na $\mathscr{H}$; nazýváme jej *direktním součtem operátorů* T_α a značíme $T = \sum_{\alpha \in I}^{\oplus} T_\alpha$.

Je zřejmé, že každý z uzavřených podprostorů $\mathscr{H}^{(\alpha)} := \{X\colon X(\beta) = 0 \text{ pro } \beta \neq \alpha\}$ redukuje operátor T a platí $T^{(\alpha)} \equiv T \restriction \mathscr{H}^{(\alpha)} = U_\alpha T_\alpha U_\alpha^{-1}$, kde U_α je izomorfismus prostorů $\mathscr{H}_\alpha, \mathscr{H}^{(\alpha)}$, který danému $x \in \mathscr{H}_\alpha$ přiřazuje $X \in \mathscr{H}$ s jedinou nenulovou komponentou $X(\alpha) := x$. Direktní součet T operátorů T_α je tedy roven ortogonálnímu součtu operátorů $T^{(\alpha)}$; proto pro oba pojmy užíváme stejného symbolu.

Jsou-li všechny operátory T_α omezené a $\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\|_\alpha < \infty$, *potom je* $T \equiv \sum_{\alpha \in I}^{\oplus} T_\alpha$ *omezený* a $\|T\| = \sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\|_\alpha$. Nerovnost $\|T\| \leqq \sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\|_\alpha$ plyne z toho, že $|||TX|||^2 = \sum_{\alpha \in I} \|T_\alpha X(\alpha)\|_\alpha^2$; naopak pro každé $\alpha \in I$ platí $\|T\| = \sup_{|||X|||=1} |||TX||| \geqq \sup\{|||TX|||\colon X \in \mathscr{H}^{(\alpha)}, |||X||| = 1\} = \|T_\alpha\|_\alpha$.

Předpokládejme nyní, že všechny operátory T_α, $\alpha \in I$, jsou hustě definované, a nechť $x_j \equiv X(\alpha_j)$, $j = 1, 2, \ldots$, jsou nenulové komponenty daného $X \in \mathscr{H}$. Z definice normy v $\mathscr{H}$ vyplývá, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_ε takové, že $\sum_{j=n_\varepsilon+1}^{\infty} \|x_j\|_{\alpha_j}^2 < \varepsilon/2$; dále ke každému x_j *existuje* $y_j \in D_{\alpha_j}$, pro něž $\|x_j - y_j\|_{\alpha_j}^2 < 2^{-(j+1)}\varepsilon$. Položíme-li $Y(\alpha_j) := y_j$ pro $j = 1, 2, \ldots, n_\varepsilon$ a $Y(\alpha) := 0$ pro ostatní $\alpha \in I$, je zřejmě $Y \in D_T$ a přitom $|||X - Y|||^2 \leqq \sum_{j=1}^{n_\varepsilon} \|x_j - y_j\|_{\alpha_j}^2 + \varepsilon/2 < \varepsilon$. *Z podmínky* $T_\alpha \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_\alpha)$, $\alpha \in I$, *tedy plyne* $T \in \mathscr{L}(\sum_{\alpha \in I}^{\oplus} \mathscr{H}_\alpha)$.

Za těchto předpokladů dále platí

$$T^* = \sum_{\alpha \in I}^{\oplus} T_\alpha^* .$$

Skutečně, jestliže $X \in D(T^*)$, tj. $(X, TY) = (Z, Y)$ pro všechna $Y \in D_T$ a nějaké $Z \in \mathscr{H}$, a $E^{(\alpha)}$ je projektor na podprostor $\mathscr{H}^{(\alpha)}$, potom $E^{(\alpha)} Y \in D_T$ a $(X, TE^{(\alpha)}Y) = (X, E^{(\alpha)}TY) = (X(\alpha), T_\alpha Y(\alpha))_\alpha = (Z(\alpha), Y(\alpha))_\alpha$. Proto $X(\alpha) \in D(T_\alpha^*)$, $T_\alpha^* X(\alpha) = Z(\alpha)$ a z podmínky $Z \in \mathscr{H}$, tj. $\sum_{\alpha \in I} \|Z(\alpha)\|_\alpha^2 < \infty$, plyne $X \in D(\sum_{\alpha \in I}^{\oplus} T_\alpha^*)$ a $T^*X = \sum_{\alpha \in I}^{\oplus} T_\alpha^* X$, takže $T^* \subset \sum_{\alpha \in I}^{\oplus} T_\alpha^*$. Naopak pro $X \in D(\sum_{\alpha \in I}^{\oplus} T_\alpha^*)$ a pro všechna $Y \in D_T$ máme $(X, TY) = (Z, Y)$, kde $Z(\alpha) := T_\alpha^* X(\alpha)$, tj. $X \in D(T^*)$. Odtud vyplývá důležité tvrzení: *jestliže pro všechna $\alpha \in I$ jsou operátory T_α symetrické (v podstatě samosdružené, samosdru-*

žené), je i $\sum_{\alpha\in I}^{\oplus} T_\alpha$ *symetrický (v podstatě samosdružený, samosdružený).* Platí též implikace $T_\alpha \in \mathscr{C}(\mathscr{H}_\alpha),\ \alpha \in I \Rightarrow \sum_{\alpha\in I}^{\oplus} T_\alpha \in \mathscr{C}(\sum_{\alpha\in I}^{\oplus}\mathscr{H}_\alpha)$ (srv. s cvičením 27).

• Tvrzení 10c říká, že spektrum daného uzavřeného operátoru se nezmění při přechodu k operátoru UTU^{-1}, kde U je libovolný unitární operátor. Říkáme, že spektrum je *unitární invariant*; podobně je unitárním invariantem každá vlastní hodnota a její násobnost. V této souvislosti vzniká úloha najít pro dvojici operátorů T, S daného typu (např. samosdružených) systém jejich charakteristik $\{p_\alpha\colon \alpha \in I\}$ takový, aby rovnost $p_\alpha(T) = p_\alpha(S)$ pro všechna $\alpha \in I$ implikovala unitární ekvivalenci operátorů T a S. Např. jsou-li T a S normální operátory s čistě bodovým spektrem, které mají stejnou množinu vlastních hodnot včetně násobností, potom pro každou vlastní hodnotu λ existuje izometrický operátor V_λ, který zobrazuje podprostor $\operatorname{Ker}(T-\lambda)$ na $\operatorname{Ker}(S-\lambda)$; dále $\mathscr{H} = \sum_{\lambda\in\sigma_p}^{\oplus} \operatorname{Ker}(T-\lambda) = \sum_{\lambda\in\sigma_p}^{\oplus} \operatorname{Ker}(S-\lambda)$, a pak $U := \sum_{\lambda\in\sigma_p}^{\oplus} V_\lambda$ je unitární operátor, pro nějž $S = UTU^{-1}$.

§ **7.5** • Jako součty ve smyslu forem se např. definují kvantověmechanické hamiltoniány pro některé třídy singulárních potenciálů, pro něž obyčejný operátorový součet $H_0 + V$ není v podstatě samosdružený (viz např. ⟦RS 2⟧, kap. X; ⟦Si 1⟧, kap. II).

Cvičení

1. (i) Dokažte tvrzení 7.1.3.
(ii) Jestliže $\mathscr{H}$ je separabilní, potom ke každému $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ existuje spočetná množina $\{x_n\} \subset D_T$ taková, že $\overline{\{x_n\}} = \mathscr{H}$.

2. Nechť $T, S \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, S je invertibilní a $S^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$; potom $TS \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ a platí $(TS)^* = S^*T^*$.
Návod: $D(TS) = S^{-1}(D_T)$; dále $y \in D(TS)^* \Rightarrow y \in D(T^*)$ a $T^*y = (S^*)^{-1} z,\ z \in \mathscr{H}$.

3. Operátor $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ je symetrický právě tehdy, když jeho číselný obor hodnot leží na reálné ose.

4. (i) Jestliže A je samosdružený a invertibilní, potom A^{-1} je samosdružený.
(ii) Symetrický operátor A splňující $\operatorname{Ran} A = \mathscr{H}$ je samosdružený.

5. Pro definiční obor operátoru Q na $L^2(\mathbb{R})$ platí $D_Q \subset L^1(\mathbb{R})$.
Návod: Aplikujte Hölderovu nerovnost na $\int_1^\infty (1/x)\,|x\,\psi(x)|\,dx$.

6. Jestliže A je symetrický operátor, potom pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ a všechna $x \in D_A$ platí $\|(A-\lambda)x\|^2 = \|(A - \operatorname{Re}\lambda)x\|^2 + |\operatorname{Im}\lambda|^2\,\|x\|^2$.

7. (i) Součet samosdruženého a hermitovského operátoru je samosdružený.
(ii) Je-li operátor A v podstatě samosdružený, platí totéž o jeho každém symetrickém rozšíření A', přičemž $\overline{A'} = \bar{A}$,

8. Pro danou neomezenou posloupnost $\{s_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ najděte vektor $\{\xi_j\} \subset l^2$ takový, že $\{s_j \xi_j\} \notin l^2$.
Návod: Existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ taková, že $|s_{n_j}| > j$.

9. Dokažte následující vlastnosti operátorů T_s z příkladu 7.1.6: (i) $T_{s+t} \supset \supset T_s + T_t$ a rovnost nastává právě tehdy, když $D_s \supset D_{s+t}$ nebo $D_t \supset D_{s+t}$ (zde $(s+t)_j := s_j + t_j$, $j = 1, 2, \ldots$);
(ii) $T_{st} \supset T_s T_t$ a rovnost nastává právě tehdy, když $D_t \supset D_{st}$.
(iii) T_s^{-1} existuje právě tehdy, když $s_j \neq 0$ pro všechna j: je-li tato podmínka splněna a označíme-li $s^{-1} := \{s_j^{-1}\}_{j=1}^{\infty}$, platí $T_s^{-1} = T_{s^{-1}}$.
Návod: Dokažte rovnosti $D_s \cap D_t = D_{s+t} \cap D_s = D_{s+t} \cap D_t$, resp. $D_{st} \cap D_t = D(T_s T_t)$.

10. Ukažte, že následující tvrzení *neplatí* (srv. s tvrzením 7.1.3e): jestliže $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, $S \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ a $TS \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, potom $(TS)^* = S^* T^*$.
Návod: Položte $T = T_t$, $S = T_{t^{-1}}$, kde $t = \{j\}_{j=1}^{\infty}$.

11. Dokažte větu 7.1.7 bez užití věty o uzavřeném grafu.
Návod: Aplikujte princip stejnoměrné omezenosti na množinu

$$\{f_y \colon y \in \mathscr{H}, \|y\| = 1\} \subset \mathscr{H}^* \ , \quad \text{kde } f_y(x) := (y, Ax) = (Ay, x) \, .$$

12. Jestliže A je symetrický operátor, potom následující podmínky jsou ekvivalentní:
(i) A^* je symetrický
(ii) A^* je samosdružený.
(iii) A je v podstatě samosdružený.

13. Dokažte pomocí věty 7.2.4, že uzavřený operátor T splňující podmínku $D_T = \mathscr{H}$ je omezený.
Návod: Stejným postupem jako ve cvičení 11 dokažte, že T^* je omezený; potom z věty 7.2.4 plyne $D(T^*) = D(\overline{T^*}) = \mathscr{H}$.

14. Pomocí unitárního operátoru V na $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$, $V[x, y] := [y, x]$ dokažte:
(i) operátor T je invertibilní právě tehdy, když $V\Gamma(T)$ je graf, potom $\Gamma(T^{-1}) = V\Gamma(T)$;
(ii) je-li T invertibilní a uzavřený, je i T^{-1} uzavřený (srv. s cvičením 3.27);
(iii) je-li T invertibilní a $T^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, potom $\Gamma((T^{-1})^*) = V\Gamma(T^*)$. Pomocí (i) a (iii) dostáváme znovu tvrzení 7.1.3c.
Návod: (iii) Pro operátor U definovaný vztahem (7.2.1) a libovolný podprostor $\Gamma \subset \mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$ platí $UV\Gamma = VU\Gamma$.

15. Pro lineární operátor T na $\mathscr{H}$ je definován vztahem $(x, y)_T := (x, y) + (Tx, Ty)$ skalární součin na D_T. Dostáváme tak pre-Hilbertův prostor, který označíme $\mathscr{H}_T$. Dokažte, že operátor T je uzavřený právě tehdy, když $\mathscr{H}_T$ je Hilbertův prostor. Z tohoto kritéria vyplývá dále následující tvrzení: jestliže k T existuje uzavřený operátor S takový, že $D_T = D_S$ a $\|Tx\| = \|Sx\|$ pro všechna $x \in D_T$, potom je T uzavřený.

Následující čtyři cvičení doplňují materiál příkladu 7.2.7.

16. (i) Jestliže $\varphi \in AC(a, +\infty)$, potom $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$; analogické tvrzení platí pro $\varphi \in AC(-\infty, b)$.
(ii) Pro každý interval $J \subset \mathbb{R}$ platí $AC(J) = AC(\bar{J})$.
Návod: (i) Užijte vztahu $\int_a^x (\varphi'\bar{\varphi} + \varphi\bar{\varphi}')\,\mathrm{d}t = |\varphi(x)|^2 - |\varphi(a)|^2$.
(ii) Nechť $b \equiv \sup_{t \in J} t < \infty$; pro každé $\varphi \in AC(J)$ existuje konečná limita $\varphi(b-0) \equiv \lim_{x \to b^-} \varphi(x)$. Položíme-li $\varphi(b) := \varphi(b-0)$, je φ absolutně spojitá na $[c, d]$ pro libovolné $c \in J$.

17. Pro každý z intervalů $J = (0, 1), (0, +\infty), \mathbb{R}$ sestrojte posloupnost jednotkových vektorů $\{\psi_n\} \subset D_P$ takovou, že $\lim_{n \to \infty} \|P\psi_n\| = +\infty$.

18. Dokažte, že operátor $P^{(0)}$ na $L^2(0, 1)$ definovaný vztahem $P^{(0)} := \tilde{P} \upharpoonright D^{(0)}$, kde $D^{(0)} := \{\psi \in AC\colon \psi(0) = 0\}$, je uzavřený, není symetrický a platí $D(P^{(0)*}) = \{\psi \in AC\colon \psi(1) = 0\}$ a $P^{(0)*}\psi = -\mathrm{i}\psi'$.
Návod: Jestliže $\varphi \in D(P^{(0)*})$ a $\eta = P^{(0)*}\varphi$, pak $\psi(x) := \int_0^x (\eta^*(t) + \mathrm{i}\varphi(t))\,\mathrm{d}t$, kde $\eta^*(t) := -\int_t^1 \eta(u)\,\mathrm{d}u$, patří do $D^{(0)}$.

19. Pro libovolný interval $J \subset \mathbb{R}$ označíme

$$AC^2(J) := \{\psi \in L^2(J)\colon \psi' \in AC(J)\};$$

potom $AC^2 = D(\tilde{P}^2) = D_2$, kde $D(\tilde{P}^2) \equiv \{\psi \in AC\colon \psi' \in AC\}$ (srv. s (7.2.5)) a $D_2 := \{\psi \in L^2;\ \psi, \psi'$ absolutně spojité v J, $\psi'' \in L^2\}$.
Návod: Pro $\psi \in D_2$ plyne z identity $(\psi\bar{\psi}' + \psi'\bar{\psi})' = 2|\psi'|^2 + \psi\bar{\psi}'' + \psi''\bar{\psi}$ a předpokladu $\psi' \notin L^2$ spor s podmínkou $\psi \in L^2$ (viz cvičení 16).

20. Nechť $T, S \in \mathscr{C}(\mathscr{H})$ a existuje podprostor $D \subset D_T \cap D_S$ takový, že
(i) $\|Tx\| = \|Sx\|$ pro všechna $x \in D$;
(ii) $\overline{T \upharpoonright D} = T$, $\overline{S \upharpoonright D} = S$.
Potom $D_T = D_S$ a $\|Tx\| = \|Sx\|$ pro všechna $x \in D_T$.
Návod: Užijte tvrzení 3.4.11b.

21. Nechť T_f je operátor násobení funkcí na prostoru $L^2(X, \mathrm{d}\mu)$ s konečnou mírou, $\mu(X) < \infty$.

(i) Jestliže míra ν je definována pomocí funkce $x \mapsto g(x) := \exp(-|f(x)|^2)$ vztahem $\nu(M) := \int_M g\,\mathrm{d}\mu$, potom pro všechna $p \geqq 1$ platí $f \in L^p(X, \mathrm{d}\nu)$, zobrazení $\psi \mapsto V\psi := T_{g^{-1/2}}\psi$ je izomorfismus prostorů $L^2(X, \mathrm{d}\mu)$ a $L^2(X, \mathrm{d}\nu)$ a VT_fV^{-1} je operátor násobení funkcí f na prostoru $L^2(X, \mathrm{d}\nu)$.
(ii) Předpokládejme, že $f \in L^p(X, \mathrm{d}\mu)$ pro nějaké $p > 2$ a položme $r := 2p/(p-2)$. Potom $L^r(X, \mathrm{d}\mu) \subset D(T_f)$ a pro libovolnou množinu D, která je totální v $L^r(X, \mathrm{d}\mu)$, platí $\overline{T_f \upharpoonright D_{\text{lin}}} = T_f$.
Návod: (ii) Každé $\psi \in D(T_f)$ splňuje $\|\psi\|_2 \leqq \|\psi\|_r (\mu(X))^{1/p}$ a $\|T_f\psi\|_2 \leqq \|\psi\|_r \|f\|_p$. Dále pomocí posloupnosti $\{\chi_{M_n}\psi\}_{n=1}^{\infty}$, kde $M_n := \{x\colon |\psi(x)| \leqq n\}$ ověřte, že $\overline{T_f \upharpoonright L^r} = T_f$; konečně z předchozích nerovností plyne $\Gamma(T_f \upharpoonright L^r) \subset \subset \overline{\Gamma(T_f \upharpoonright D_{\text{lin}})}$.

22. Nechť μ je borelovská míra na $\mathbb{R}^N$ a $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N, \mathrm{d}\mu)$. Potom pro operátor násobení funkcí f na $L^2(\mathbb{R}^N, \mathrm{d}\mu)$ platí

$$\overline{T_f \upharpoonright C_0^\infty(\mathbb{R}^N)} = T_f\,.$$

Návod: Nejprve ukažte, že $\overline{T_f \upharpoonright K_N} = T_f$, kde K_N je podprostor tvořený funkcemi $\psi\chi_J$ pro všechna $\psi \in D_f$ a všechny kompaktní intervaly $J \subset \mathbb{R}^N$. Dále pro každé $\psi\chi_J$ sestrojte posloupnost $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(J)$ splňující $|\varphi_n(x)| \leqq |\psi(x)|$ pro všechna $x \in J$, $\varphi_n \to \psi\chi_J$ a $T_f\varphi_n \to T_f\psi\chi_J$ (viz cvičení 3.7).

23. (i) Rezolventa normálního operátoru T je normální pro každé $\mu \in \varrho(T)$.
(ii) Nechť A je samosdružený operátor a $\lambda \in \sigma(A)$; potom neexistuje $\operatorname{s-lim}_{\eta\to 0} R_A(\lambda + \mathrm{i}\eta)$.
Návod: (ii) Z předpokladu existence uvedené limity plyne pomocí uzavřenosti A rovnost $\operatorname{Ran}(A - \lambda) = \mathscr{H}$.

24. Najděte spektrum libovolného samosdruženého rozšíření P'_ϑ operátoru P na $L^2(0, 1)$ a ukažte, že je čistě bodové.

25. Dokažte kritérium podstatné samosdruženosti (důsledek 7.3.11).
Návod: Užijte rovnosti $(A \pm \mathrm{i})^* = (\bar{A} \pm \mathrm{i})^*$.

26. Jsou dány následující operátory na $L^2(\mathbb{R})$: A je operátor násobení funkcí x^2 a S operátor násobení funkcí $x^2 + x$. Ukažte, že S je A-omezený a jeho A-mez rovná se 1, avšak pro každé $a \geqq 0$ existuje $\psi_a \in D(A)$ takové, že $\|S\psi_a\| > > \|A\psi_a\| + a\|\psi_a\|$.
Návod: Pro libovolné $\varepsilon > 0$ z rozkladu $\mathbb{R} = \{x\colon |x| \geqq 1/\varepsilon\} \cup \{x\colon |x| < 1/\varepsilon\}$ plyne $\|S\psi\|^2 \leqq (1+\varepsilon)^2 \|A\psi\|^2 + \varepsilon^{-4}(1+\varepsilon)^2 \|\psi\|^2$. Dále položte $\psi_a := \chi(0, r_a)$ pro dosti velké r_a.

27. Nechť $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ je úplný systém projektorů, tj. $E_jE_k = \delta_{jk}E_j$ a $\sum_{j=1}^{\infty} E_j = I$ (silná operátorová konvergence). Nechť dále T je uzavřený lineární operátor, který je redukován všemi projektory E_j; část T ležící v podprostoru $E_j\mathscr{H}$ označíme T_j. Potom $x \in D_T$ právě tehdy, když $E_jx \in D_T$, $j = 1, 2, \ldots$ a $\sum_{j=1}^{\infty} \|T_jx\|^2 < \infty$; pro tato x platí $Tx = \sum_{j=1}^{\infty} T_jx$.

28. Nechť T je hustě definovaný a E je projektor takový, že $ED_T \subset D_T$ a podprostor $E\mathscr{H}$ je T-invariantní. Potom podprostor $E\mathscr{H}^{\perp}$ je T^*-invariantní. Speciálně pro symetrický operátor A jsou uvedené podmínky postačující pro to, aby A byl redukován projektorem E.
Návod: Ukažte, že pro každé $y \in E\mathscr{H}^{\perp} \cap D(T^*)$ platí $ET^*y \in D_T^{\perp}$.

29. Jestliže projektor E redukuje normální operátor T, potom redukuje také T^* a $T_1 := T \restriction ED_T$, resp. $T_2 := T \restriction (I - E)\, D_T$ jsou normální operátory na Hilbertových prostorech $\mathscr{H}_1 := E\mathscr{H}$, resp. $\mathscr{H}_2 := (I - E)\,\mathscr{H}$. Je-li speciálně A samosdružený, jsou operátory A_1, A_2 samosdružené. Dále platí

$$\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)\,.$$

Návod: Pomocí předchozího cvičení dokažte, že pro $j = 1, 2$ jsou operátory T_j a $(T^*)_j$ hustě definované na $\mathscr{H}_j$ a splňují $\|T_jx_j\| = \|(T^*)_jx_j\|$ pro všechna $x_j \in D_{T_j}$. Dále ověřte, že $(T^*)_j = (T_j)^*$ a užijte věty 7.3.5.

30. (i) Nechť T je (obecně neomezený) invertibilní operátor na $\mathscr{H}$, který komutuje s $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Potom T^{-1} komutuje s B.
(ii) Nechť $T \in \mathscr{C}(\mathscr{H})$ komutuje s $B_n \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $n = 1, 2, \ldots$; jestliže $B_n \xrightarrow{w} B$, potom $TB \supset BT$.
Návod: (ii) Pomocí rozkladu $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H} = \Gamma(T) \oplus \Gamma(T)^{\perp}$ dokažte, že předpoklad $[Bx, BTx] \notin \Gamma(T)$ pro nějaké $x \in D_T$ vede ke sporu.

31. Jestliže T, S jsou lineární operátory na $\mathscr{H}$ a $B, C \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, potom:
(i) $BT \subset TB,\ BS \subset SB \Rightarrow B(T + S) \subset (T + S)\,B$ a $BTS \subset TSB$;
(ii) $BT \subset TB,\ CT \subset TC \Rightarrow (B + C)\,T \subset T(B + C)$ a $BCT \subset TBC$;
(iii) $BT \subset TB,\ T \in \mathscr{L}(\mathscr{H}) \Rightarrow B^*T^* \subset T^*B^*$;
(iv) jestliže existuje $\bar{T}$, potom $BT \subset TB \Rightarrow B\bar{T} \subset \bar{T}B$.

32. Nechť operátory T, S jsou unitárně ekvivalentní, $T = USU^{-1}$, a nechť existuje podprostor $D \subset D_S$ takový, že $\overline{S \restriction D} = S$; potom $\overline{T \restriction UD} = T$. Je-li speciálně S samosdružený a D je jeho obor podstatné samosdruženosti, je operátor $T \restriction UD$ v podstatě samosdružený.

33. (i) Množina vlastních hodnot a násobnost každé vlastní hodnoty jsou unitárními invarianty libovolného lineárního operátoru T.
(ii) Je-li $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, a U je unitární operátor, pak $UBU^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ a $\|B\| = \|UBU^{-1}\|$.
(iii) Je-li T normální operátor, pak UTU^{-1} je normální; má-li T navíc čistě bodové spektrum, pak totéž platí i pro UTU^{-1}.
(iv) Jestliže operátor T lze uzavřít, potom existuje $\overline{UTU^{-1}}$ a platí $\overline{UTU^{-1}} = U\bar{T}U^{-1}$.

34. Projektory E, F splňující podmínku $\|E - F\| < 1$ jsou unitárně ekvivalentní.
Návod: Z tvrzení 5.4.8 plyne existence unitárního operátoru U, který zobrazuje ortonormální bázi v $\operatorname{Ran} E$ na bázi v $\operatorname{Ran} F$ a bázi v $\operatorname{Ker} E$ na bázi v $\operatorname{Ker} F$.

35. Nechť projektor E redukuje lineární operátor S a U je unitární; potom je UEU^{-1} projektor, který redukuje operátor USU^{-1}.

36. Je dána funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, která je lebesgueovsky měřitelná, a existuje $m \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) \geqq m$ s.v. v $\mathbb{R}^n$. Forma s na $L^2(\mathbb{R}^n)$, $s(\varphi, \psi) := \int_{\mathbb{R}^n} f\bar{\varphi}\psi \,\mathrm{d}x$ s definičním oborem $D(s) := \{\varphi \in L^2\colon \int_{\mathbb{R}^n} |f|\, |\varphi|^2 \,\mathrm{d}x < \infty\}$ je hustě definovaná, symetrická, zdola omezená a uzavřená.
Návod: Pro $s_0 := s - me$ platí $s_0(\varphi, \psi) = (T_g\varphi, T_g\psi)$ pro funkci $x \mapsto g(x) := (f(x) - m)^{1/2}$; dále užijte výsledků příkladů 7.3.3 a 7.5.3.

37. Nechť s je symetrická zdola omezená forma a $\alpha \in \mathbb{C}$; potom z podmínek $x_n \xrightarrow{(s)} x$, $y_n \xrightarrow{(s)} y$ plyne $\alpha x_n + y_n \xrightarrow{(s)} \alpha x + y$.

38. Je dána uzavřená forma s. Dokažte, že podprostor $D \subset D(s)$ splňuje $\overline{s \upharpoonright D} = s$ právě tehdy, když $(\bar{D})_s = \mathscr{H}_s$.

39. Jestliže s_r, $r = 1, 2$, jsou symetrické zdola omezené formy, pak forma $s := s_1 + s_2$ je rovněž symetrická a zdola omezená. Pokud jsou formy s_r uzavřené, je s uzavřená. Mají-li formy s_r uzávěr, má s uzávěr a platí $\bar{s} \subset \bar{s}_1 + \bar{s}_2$. Indukcí se tato tvrzení rozšíří na libovolný konečný systém forem.

40. Ve vztahu (7.6.5) platí rovnost, jestliže operátor S_2 je invertibilní a $\operatorname{Ran} S_2 \subset D(T_2)$.
Návod: Stačí ukázat, že pro každé $x \equiv \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j \in D((T_1 \otimes T_2)(S_1 \otimes S_2))$, kde vektory y_j jsou lineárně nezávislé, platí $S_1 x_j \in D(T_1)$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$. V podprostoru $\{S_2 y_1, \ldots, S_2 y_n\}_{\mathrm{lin}}$ existuje ortonormální množina $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset D(T_2)$ taková, že $(S_1 \otimes S_2)\, x = \sum_{k=1}^{n} x_k' \otimes e_k$, přičemž každé $S_1 x_j$ je lineární

kombinací vektorů x'_k. Dále $\sum_{k=1}^{n} x'_k \otimes e_k = \sum_l u_l \otimes v_l$, pro nějaká $u_l \in D(T_1)$ a $v_l \in D(T_2)$, a pomocí rozkladu $v_l = \sum_{k=1}^{n} (e_k, v_l)\, e_k + v_l^\perp$, kde $v_l^\perp \in \in \{e_1, \ldots, e_n\}^\perp$, ověřte, že $x'_k \in D(T_1)$ pro $k = 1, \ldots, n$.

41. Dokažte následující vlastnosti operátorů na $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$, kde $\dim \mathscr{H}_2 < \infty$:
(i) Jestliže $T \in \mathscr{C}(\mathscr{H}_1)$ a S je invertibilní operátor na $\mathscr{H}_2$, potom operátor $T \otimes S$ je uzavřený.
(ii) Operátor $A \otimes I_2$ je samosdružený, je-li A samosdružený.
Návod: Každé $x \in D(T \otimes S)$ lze zapsat ve tvaru $x = \sum_j x_j \otimes e_j$, kde $x_j \in D_T$ a $\{e_j\}$ je ortonormální báze v $\mathscr{H}_2$.
(ii) Ukažte, že $\operatorname{Ran}(A \otimes I_2 \pm \mathrm{i}) = \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$.

8.1 INDEXY DEFEKTU

Vyšetříme některé vlastnosti oblasti regularity $\pi(T)$ lineárního operátoru T na $\mathscr{H}$. Připomeňme, že $\pi(T)$ je množina všech $\lambda \in \mathbb{C}$, pro něž existuje $c_\lambda > 0$ takové, že pro všechna $x \in D_T$ platí

$$\|(T - \lambda)\,x\| \geqq c_\lambda \|x\| \,. \tag{1}$$

Množina $\pi(T)$ je vždy otevřená; je-li speciálně T uzavřený operátor, potom $\pi(T) \supset \varrho(T)$ a $\operatorname{Ran}(T - \lambda)$ je uzavřený podprostor pro všechna $\lambda \in \pi(T)$ (viz cvičení 3.34).

8.1.1 Příklad: Podle cvičení 7.6 pro každý symetrický operátor A platí

$$\pi(A) \supset \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\,, \tag{2a}$$

kde $\mathbb{C}^\pm := \{\lambda \in \mathbb{C} \colon \pm \operatorname{Im} \lambda > 0\}$. Je-li operátor A navíc omezený zdola, tj. $m_A \equiv \inf \Theta(A) > -\infty$, potom $(-\infty, m_A) \subset \pi(A)$ (viz důkaz tvrzení 5.6.5). Uvažujme dále libovolný izometrický operátor V; pro všechna $x \in D_V$ platí $\|(V - \lambda)\,x\| \geqq |1 - |\lambda||\,\|x\|$, a proto

$$\pi(V) \supset \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda| = 1\}\,. \tag{2b}$$

Ortogonální doplněk podprostoru $\operatorname{Ran}(T - \lambda)$ nazýváme *defektním podprostorem* operátoru T vzhledem k λ; budeme užívat označení

$$\operatorname{def}(T - \lambda) \equiv \dim \operatorname{Ran}(T - \lambda)^\perp\,. \tag{3a}$$

Je-li operátor T hustě definovaný, plyne z tvrzení 7.1.2b

$$\operatorname{def}(T - \lambda) = \dim \operatorname{Ker}(T^* - \bar\lambda)\,. \tag{3b}$$

8.1.2 Věta: Jestliže G je souvislá komponenta (tj. otevřená křivkově souvislá podmnožina) oblasti regularity lineárního operátoru T, potom $\operatorname{def}(T - \lambda)$ je konstantní na G.

Důkaz: Pro každé $\lambda \in G$ označme jako E_λ projektor na $\operatorname{Ran}(T - \lambda)^\perp$. Podle předpokladu lze libovolnou dvojici $\lambda_1, \lambda_2 \in G$ spojit křivkou, což je kompaktní množina v $\mathbb{C}$, neboť jde o spojitý obraz intervalu $[0, 1]$. Stačí proto ověřit, že funkce $\lambda \mapsto \operatorname{def}(T - \lambda)$ je lokálně konstantní v G, a to je splněno, jestliže pro všechna μ z jistého okolí bodu λ platí

$$\sup\{\|(I - E_\mu) E_\lambda x\| : x \in \mathscr{H}, \|E_\lambda x\| = 1\} < 1$$

a stejná nerovnost se záměnou $\lambda \leftrightarrow \mu$ (viz tvrzení 5.4.8 a komentář k § 5.4). Pro $|\mu - \lambda| < c_\lambda/3$ plyne z (1)

$$\|(T - \mu)\, x\| \geqq \|(T - \lambda)\, x\| - \|(\mu - \lambda)\, x\| \geqq \frac{2}{3} c_\lambda \|x\| . \tag{4}$$

Nyní podle cvičení 5.21 máme

$$\|(I - E_\mu) E_\lambda x\| = \sup\{|(E_\lambda x, y)| : y \in \mathrm{Ran}\,(T - \mu),\ \|y\| = 1\} ;$$

užijeme-li odhadu (4) a toho, že $E_\lambda x \in \mathrm{Ran}\,(T - \lambda)^\perp$, dostáváme pro každý vektor $x \in \mathscr{H}$ takový, že $\|E_\lambda x\| = 1$:

$$\|(I - E_\mu) E_\lambda x\| = \sup\{|(E_\lambda x, (T - \mu)\, z)| / \|(T - \mu)\, z\| : z \in D_T, z \neq 0\} \leqq$$
$$\leqq \sup\{(|(E_\lambda x, (T - \lambda)\, z)| + |\mu - \lambda|\, \|z\|) / \|(T - \mu)\, z\| : z \in D_T, z \neq 0\} < 1/2 .$$

Užijeme-li místo (4) nerovnost (1), dostaneme stejným postupem odhad $\sup\{\|(I - E_\lambda) E_\mu x\| : x \in \mathscr{H}, \|E_\mu x\| = 1\} < 1/3$. ■

Pro každý symetrický operátor A jsou množiny $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{C}^-$ souvislými komponentami jeho oblasti regularity; funkce $\lambda \mapsto \mathrm{def}\,(A - \lambda)$ na nich tedy nabývá konstantních hodnot, které nazýváme **indexy defektu** operátoru A a značíme $n_\pm(A)$, tj.

$$n_\pm(A) := \mathrm{def}\,(A \mp \mathrm{i}) = \dim \mathrm{Ker}\,(A^* \pm \mathrm{i}) . \tag{5}$$

8.1.3 Poznámky: (a) Vzhledem k tomu, že $\bar{A}^* = A^*$, platí pro každý symetrický operátor

$$n_\pm(\bar{A}) = n_\pm(A) . \tag{6}$$

(b) Z věty 7.3.10 a jejího důsledku vyplývá, že symetrický operátor A je samosdružený právě tehdy, když je uzavřený a $n_\pm(A) = 0$; nutnou a postačující podmínkou podstatné samosdruženosti je $n_\pm(A) = 0$.

(c) Indexy defektu se často zapisují jako uspořádaná dvojice $(n_+(A), n_-(A))$.

8.1.4 Důsledek: Jestliže oblast regularity symetrického operátoru A obsahuje alespoň jedno reálné číslo λ, tj. $\pi(A) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$, potom $n_+(A) = n_-(A) = \mathrm{def}\,(A - \lambda)$; speciálně to platí pro každý symetrický operátor, který je omezený zdola (shora).

8.1.5 Příklad: Najdeme indexy defektu uzavřeného symetrického operátoru P na $L^2(J)$ z příkladu 7.2.7. Jelikož $D(P^*) = AC(J)$ a $P^*\psi = -\mathrm{i}\psi'$, redukuje se úloha na nalezení těch řešení diferenciální rovnice $-\mathrm{i}\psi' \pm \mathrm{i}\psi = 0$, která patří do $AC(J)$. Obecné řešení má tvar $\psi_\pm(x) = c_\pm e^{\pm x}$; je-li $J = (a, b)$, $b - a < \infty$, platí $\psi_\pm \in AC(J)$, tj. $n_+(P) = n_-(P) = 1$. Pro $J = (0, \infty)$ máme $\psi_+ \notin AC(J)$

 a $\psi_- \in AC(J)$ neboli $n_+(P) = 0$, $n_-(P) = 1$, a konečně pro $J = \mathbb{R}$ je $n_+(P) = n_-(P) = 0$.

Uvažujme uzavřený symetrický operátor A; vzhledem k tomu, že pro každé $\lambda \in \pi(A)$ existuje operátor $(A - \lambda)^{-1}$ a je omezený, je dané $\lambda \in \pi(A)$ regulární hodnotou operátoru A právě tehdy, když $\mathrm{Ran}\,(A - \lambda) = \mathscr{H}$, tj. $\mathrm{Ker}\,(A^* - \bar{\lambda}) = \{0\}$. Odtud plyne, že pro $\lambda \in \mathbb{C}^+$ platí $\lambda \in \sigma(A)$ právě když $n_+(A) \neq 0$; analogicky pro $\mathbb{C}^-$. Přihlédneme-li ještě k uzavřenosti spektra, dostáváme následující větu.

8.1.6 Tvrzení: Pro spektrum uzavřeného symetrického operátoru A platí jedna ze čtyř alternativ: (a) $\sigma(A) = \mathbb{C}$, (b) $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{C}^-$, (c) $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{C}^+$, (d) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Přitom nutnou a postačující podmínkou pro (a) je $n_+(A) \neq 0$, $n_-(A) \neq 0$, pro (b) $n_+(A) \neq 0$, $n_-(A) = 0$, pro (c) $n_+(A) = 0$, $n_-(A) \neq 0$ a pro (d) $n_+(A) = 0$, $n_-(A) = 0$, tj. samosdruženost operátoru A.

8.1.7 Důsledek: Má-li uzavřený symetrický operátor A reálnou regulární hodnotu, je samosdružený.
Důkaz: Množina $\varrho(A)$ je otevřená, takže z $\varrho(A) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ plyne $\varrho(A) \cap \mathbb{C}^\pm \neq \emptyset$, tj. nastává alternativa (d). ■

Každý symetrický operátor splňuje inkluzi $A \subset A^*$. Následující věta dává úplný popis operátoru A^* pomocí A a defektních podprostorů $\mathrm{Ker}\,(A^* \pm \mathrm{i})$.

8.1.8 Věta (*první von Neumannova formule*): Jestliže A je uzavřený symetrický operátor, potom pro každé $x \in D(A^*)$ existuje jednoznačný rozklad

$$x = x_0 + x_+ + x_-\,, \tag{7}$$

kde $x_0 \in D(A)$ a $x_\pm \in \mathrm{Ker}\,(A^* \pm \mathrm{i})$.
Důkaz: Budeme užívat zkráceného označení $K_\pm := \mathrm{Ker}\,(A^* \pm \mathrm{i})$. Pro $x \in D(A^*)$ nechť z je projekce vektoru $A^*x - \mathrm{i}x$ do K_+, takže

$$A^*z + \mathrm{i}z = 0\,. \tag{8a}$$

Díky uzavřenosti operátoru A platí $\mathrm{Ran}\,(A - \mathrm{i}) = \overline{\mathrm{Ran}\,(A - \mathrm{i})} = K_+^\perp$; k vektoru $y := A^*x - \mathrm{i}x - z \in K_+^\perp$ tedy existuje $x_0 \in D_A$ takové, že

$$y = (A - \mathrm{i})\,x_0 = (A^* - \mathrm{i})\,x_0\,. \tag{8b}$$

Z rozkladu $A^*x - \mathrm{i}x = y + z$ plyne pomocí vztahů (8) $A^*(x - x_0 - \mathrm{i}\,z/2) = \mathrm{i}(x - x_0 - \mathrm{i}\,z/2)$; proto vektor $x_- := x - x_0 - \mathrm{i}\,z/2$ patří do K_-. Jelikož $x_+ := \mathrm{i}\,z/2 \in K_+$, tvoří vektory $x_0, x_\pm$ hledaný rozklad. Zbývá dokázat jednoznačnost; k tomu stačí ověřit, že pro libovolná $y_0 \in D_A$, $y_\pm \in K_\pm$ podmínka $y_0 + y_+ + y_- = 0$ implikuje $y_0 = y_+ = y_- = 0$. Aplikujme na vektor $y_0 + y_+ + y_-$ jednak operátor A^*, jednak tento vektor vynásobme $-\mathrm{i}$; po sečtení dostaneme $(A - \mathrm{i})\,y_0 = 2\mathrm{i}y_+$. Nyní $y_+ \in K_+$ a $(A - \mathrm{i})\,y_0 \in \mathrm{Ran}\,(A - \mathrm{i}) =$

$= K_+^\perp$, takže musí $y_+ = 0$ a $y_0 \in \mathrm{Ker}\,(A - \mathrm{i})$; odtud vyplývá $y_0 = 0$ (viz cvičení 7.6). ■

8.1.9 Poznámka: Ekvivalentní formulace zní: podprostor $D(A^*)$ je roven následujícímu direktnímu (ne nutně ortogonálnímu) součtu

$$D(A^*) = D_A \oplus \mathrm{Ker}\,(A^* + \mathrm{i}) \oplus \mathrm{Ker}\,(A^* - \mathrm{i})\,. \tag{9}$$

Z rozkladu (7) dále plyne

$$A^*x = Ax_0 - \mathrm{i}(x_+ - x_-)\,. \tag{10}$$

8.2 CAYLEYOVA TRANSFORMACE

Teorie rozšíření symetrických operátorů je založena na injektivním zobrazení, které každému uzavřenému symetrickému operátoru přiřazuje izometrický operátor. Pomocí tohoto zobrazení lze celou úlohu v podstatě zredukovat na konstrukci izometrických rozšíření daného izometrického operátoru.

Uvažujme nejprve funkci w: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definovanou vztahem

$$w(x) := \frac{x - \mathrm{i}}{x + \mathrm{i}}\,, \tag{1a}$$

která představuje bijekci $\mathbb{R}$ na množinu $K := \{z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\colon \varphi \in (0, 2\pi)\}$. Pro inverzní funkci platí

$$w^{-1}(z) = \mathrm{i}\,\frac{1 + z}{1 - z} = -\mathrm{ctg}\left(\frac{1}{2}\arg z\right). \tag{1b}$$

Cayleyova transformace je operátorovou analogií tohoto zobrazení, přičemž reálné ose odpovídá množina $\mathscr{L}_{cs} \equiv \mathscr{L}_{cs}(\mathscr{H})$ všech uzavřených symetrických operátorů na daném $\mathscr{H}$; ta se bijektivně zobrazuje na jistou množinu $\mathscr{V}$ izometrických operátorů $V\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, kterou budeme za okamžik specifikovat.

8.2.1 Lemma: Pro každé $A \in \mathscr{L}_{cs}$ je vztahem

$$V_A := (A - \mathrm{i})\,(A + \mathrm{i})^{-1} \tag{2}$$

definován izometrický operátor, přičemž $\mathrm{Ran}\,(I - V_A) = D_A$, tj. podprostor $\mathrm{Ran}\,(I - V_A)$ je všude hustý v $\mathscr{H}$.

Důkaz: Díky existenci operátorů $(A \pm \mathrm{i})^{-1}$ zobrazuje V_A podprostor $\mathrm{Ran}\,(A + \mathrm{i})$ na $\mathrm{Ran}\,(A - \mathrm{i})$; tyto podprostory jsou uzavřené v důsledku uzavřenosti operátoru A. Dále pro každé $y \in \mathrm{Ran}\,(A + \mathrm{i})$ platí $y = (A + \mathrm{i})\,x$ a $V_A y = (A - i)\,x$, kde $x \in D_A$, a protože $\|(A + \mathrm{i})\,x\| = \|(A - \mathrm{i})\,x\|$, je V_A izometrický operátor. Nyní vztah

$$\mathrm{Ran}\,(I - V_A) = (I - V_A)\,\mathrm{Ran}\,(A + \mathrm{i})$$

 implikuje, že dané $y \in \mathscr{H}$ patří do $\operatorname{Ran}(I - V_A)$ právě tehdy, když existuje $x \in D_A$ takové, že $y = (I - V_A)(A + i)x = (A + i)x - (A - i)x = 2ix$, takže $\operatorname{Ran}(I - V_A) = D_A$. ■

Zobrazení C: $A \mapsto V_A$ definované vztahem (2) nazýváme **Cayleyovou transformací**; C zobrazuje $\mathscr{L}_{cs}$ do množiny $\mathscr{V} \equiv \mathscr{V}(\mathscr{H})$ všech izometrických operátorů $V: \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, pro něž $\overline{\operatorname{Ran}(I - V)} = \mathscr{H}$.

8.2.2 Věta: Cayleyova transformace C je bijekce množiny $\mathscr{L}_{cs}$ na $\mathscr{V}$, přičemž pro všechna $V \in \mathscr{V}$ platí

$$C^{-1}(V) = i(I + V)(I - V)^{-1}. \tag{3}$$

Důkaz: Nechť $V \in \mathscr{V}$ a $Vy = y$ pro nějaké $y \in D_V$; jelikož V je izometrický operátor, pro každé $x = (I - V)z$, $z \in D_V$, platí $(x, y) = (z - Vz, y) = 0$; z podmínky $\overline{\operatorname{Ran}(I - V)} = \mathscr{H}$ potom plyne $y = 0$, takže existuje operátor $(I - V)^{-1}$. Odtud pro každé V vyplývá existence hustě definovaného operátoru $A_V := i(I + V)(I - V)^{-1}$ s definičním oborem $D(A_V) = \operatorname{Ran}(I - V)$.

Ukážeme, že A_V je uzavřený symetrický operátor, tj. že $V \mapsto A_V$ je zobrazení $\mathscr{V}$ do $\mathscr{L}_{cs}$. K ověření symetričnosti stačí ověřit, že $(x, A_V y) = (A_V x, y)$ pro všechna $x, y \in D(A_V)$; to snadno plyne ze vztahu $D(A_V) = \operatorname{Ran}(I - V)$ a z toho, že V zachovává skalární součin. Uvažujme dále libovolný bod $[x, y]$ uzávěru grafu operátoru A_V, $[x, y] \in \overline{\Gamma(A_V)}$; k němu existuje posloupnost $\{z_n\} \subset D_V$, pro niž platí $(I - V)z_n \to x$, $i(I + V)z_n \to y$. Potom $z_n \to (x - iy)/2$ a $Vz_n \to -(x + iy)/2$. Vzhledem k tomu, že operátor V je izometrický, je podprostor D_V uzavřený, a vektor $z := (x - iy)/2$ tudíž patří do D_V; dále ze spojitosti plyne $Vz = -(x + iy)/2$. Z toho dostáváme $x = (I - V)z$, $y = i(I + V)z$, takže $[x, y] \in \Gamma(A_V)$.

K ověření rovnosti (3) zbývá ukázat, že $A_V = C^{-1}(V)$; k tomu stačí, aby platilo $A_{C(A)} = A$ pro všechna $A \in \mathscr{L}_{cs}$ a $C(A_V) = V$ pro všechna $V \in \mathscr{V}$. Nechť $y \in D(C(A_V))$, tj. $y = (A_V + i)x$ pro nějaké $x \in D(A_V)$; z této podmínky plyne, že existuje $z \in D_V$ splňující $x = (I - V)z$, přičemž $A_V x = i(I + V)z$. Potom $y = (A_V + i)x = i(I + V)z + i(I - V)z = 2iz$ a $C(A_V)y = (A_V - i)x = i(I + V)z - i(I - V)z = 2iVz = Vy$; obracením pořadí kroků získáme inkluzi $D_V \subset D(C(A_V))$, takže celkem $C(A_V) = V$. Rovnost $A_{C(A)} = A$ se dokazuje analogicky (viz též důkaz lemmatu 1). ■.

8.2.3 Důsledek: Cayleyova transformace zobrazuje množinu $\mathscr{L}_{sa}$ všech samosdružených operátorů na množinu $\mathscr{U}_1$, do níž patří právě ty unitární operátory, které nemají vlastní hodnotu $\lambda = 1$.

Důkaz: Nechť $\mathscr{U}_1$ je množina všech unitárních operátorů U na $\mathscr{H}$, pro něž $1 \notin \sigma_p(U)$. Je-li A samosdružený, pak $\operatorname{Ran}(A \pm i) = \mathscr{H}$, takže operátor $U \equiv C(A)$ je unitární. Dále $\overline{\operatorname{Ran}(I - U)} = \mathscr{H}$, proto $1 \notin \sigma_p(U)$ (viz (7.3.7b)); celkem tedy $U \in \mathscr{U}_1$ a zbývá dokázat, že pro každé $U \in \mathscr{U}_1$ je $A_U \equiv C^{-1}(U)$ samosdružený operátor, tj. že $A_U^* \subset A_U$. Nechť $y \in D(A_U^*)$, tj. pro nějaké $y^* \in \mathscr{H}$ a všechna $x \in D(A_U) = (I - U)\mathscr{H}$ platí $(y, A_U x) = (y^*, x)$; díky vlastnostem

A_U je tento vztah ekvivalentní rovnosti $i(y, (I + U) z) = (y^*, (I - U) z)$ pro všechna $z \in \mathscr{H}$, z níž plyne $(I + U^*) y = i(I - U^*) y^*$. Aplikujeme-li na tento vztah operátor U a pak k oběma stranám přičteme vektor $(I - U) y$, dostaneme vyjádření $y = (I - U)(y - iy^*)/2$, tj. $y \in \operatorname{Ran}(I - U) = D(A_U)$. ■

8.2.4 Poznámka: Při Cayleyově transformaci se vlastní hodnoty operátoru $A \in \mathscr{L}_{cs}$, které tvoří podmnožinu $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$, zobrazují bijektivně na $\sigma_p(C(A))$ pomocí funkce (1a). Skutečně, jestliže pro $\lambda \in \mathbb{R}$ a nenulové $x \in D_A$ platí $Ax = \lambda x$, potom $y := (A + i) x = (\lambda + i) x$ je nenulový vektor, který patří do $D(C(A))$ a splňuje $C(A) y = (A - i) x = (\lambda - i)(\lambda + i)^{-1} y$, tj. $\mu := (\lambda - i)/(\lambda + i)$ je vlastní hodnota operátoru $C(A)$. Naopak, nechť $\mu \in \mathbb{C}$ a nenulové $y \in D(C(A))$ splňují $C(A) y = \mu y$; potom $|\mu| = 1$ a $\mu \neq 1$, neboť $C(A)$ je izometrický operátor a existuje $(I - C(A))^{-1}$ (viz důkaz věty 2). Pro $x := (I - C(A)) y = (1 - \mu) y$ potom platí $Ax = i(I + C(A)) y = i(1 + \mu)(1 - \mu)^{-1} x$.

Pomocí Cayleyovy transformace je každému uzavřenému symetrickému rozšíření daného $A \in \mathscr{L}_{cs}$ přiřazeno izometrické rozšíření operátoru $V \equiv C(A)$. Naopak pro každý izometrický operátor $V' \supset V$ platí $V' \in \mathscr{V}$, neboť $V \in \mathscr{V}$; potom operátor $A' := C^{-1}(V')$ patří do $\mathscr{L}_{cs}$ a je rozšířením operátoru A. Množinu všech uzavřených symetrických rozšíření daného $A \in \mathscr{L}_{cs}$ tedy dostaneme pomocí inverzní Cayleyovy transformace, najdeme-li všechna izometrická rozšíření operátoru $C(A)$.

Následující tvrzení je východiskem konstrukce symetrických rozšíření daného $A \in \mathscr{L}_{cs}$, jíž se budeme zabývat v § 8.3.

8.2.5 Tvrzení: Nechť A je uzavřený symetrický operátor a V jeho Cayleyův obraz.
(a) K tomu, aby operátor $V' \supset V$ byl Cayleyovým obrazem nějakého (netriviálního) uzavřeného symetrického rozšíření A' operátoru A, je nutné a stačí, aby bylo současně splněno:

(i) existují uzavřené podprostory $\mathscr{G}_\pm \subset \operatorname{Ran}(A \pm i)^\perp$ takové, že

$$\dim \mathscr{G}_+ = \dim \mathscr{G}_- > 0\,; \tag{4a}$$

(ii) $$D_{V'} = \operatorname{Ran}(A + i) \oplus \mathscr{G}_+\,, \qquad \operatorname{Ran} V' = \operatorname{Ran}(A - i) \oplus \mathscr{G}_-\,; \tag{4b}$$

(iii) pro každé $x \in D_{V'}$ tvaru $x = y + z$, kde $y \in \operatorname{Ran}(A + i)$ a $z \in \mathscr{G}_+$, platí

$$V'x = Vy + \tilde{V}z\,, \tag{4c}$$

přičemž $\tilde{V}$ je nějaký izometrický operátor zobrazující $\mathscr{G}_+$ na $\mathscr{G}_-$.
(b) Platí-li podmínky uvedené v bodu (a) a navíc $\dim \mathscr{G}_+ = \dim \mathscr{G}_- = d < \infty$, potom

$$n_\pm(A') = n_\pm(A) - d\,. \tag{5}$$

Důkaz: (a) Nechť $V' = C(A')$, kde $A \subset A' \in \mathscr{L}_{cs}$, takže $D_{V'} = \operatorname{Ran}(A' + i)$ $\operatorname{Ran} V' = \operatorname{Ran}(A' - i)$. Položíme-li $\mathscr{G}_\pm := \operatorname{Ran}(A' \pm i) \cap \operatorname{Ran}(A \pm i)^\perp$, bude platit (4b). Dále pro izometrický operátor $\tilde V := V' \upharpoonright \mathscr{G}_+$ je splněna podmínka (4c); ukážeme, že $\operatorname{Ran} \tilde V = \mathscr{G}_-$. Pro každé $z \in \mathscr{G}_+$ a všechna $y \in \operatorname{Ran}(A+\mathrm{i})$ platí $(Vy, \tilde Vz) = (V'y, V'z) = (y,z) = 0$, takže $\tilde Vz \in (V \operatorname{Ran}(A+\mathrm{i}))^\perp = \operatorname{Ran}(A-\mathrm{i})^\perp$; jelikož současně $\tilde Vz \in \operatorname{Ran} V' = \operatorname{Ran}(A'-\mathrm{i})$, dostáváme $\tilde Vz \in \mathscr{G}_-$, tj. $\operatorname{Ran} \tilde V \subset \mathscr{G}_-$. Naopak každé $z' \in \mathscr{G}_- \subset \operatorname{Ran}(A'-\mathrm{i}) = \operatorname{Ran} V'$ lze podle (4b) zapsat ve tvaru $z' = V'(y_0+z_0)$, kde $y_0 \in \operatorname{Ran}(A+\mathrm{i})$ a $z_0 \in \mathscr{G}_+$. Nyní $V'y_0 = Vy_0 \in \operatorname{Ran}(A-\mathrm{i}) \subset \mathscr{G}_-^\perp$, takže $0 = (Vy_0, z') = (y_0, y_0+z_0) = \|y_0\|^2$; potom $z' = V'z_0 = \tilde Vz \in \operatorname{Ran} \tilde V$. Izometrický operátor $\tilde V$ tedy zobrazuje $\mathscr{G}_+$ na $\mathscr{G}_-$, což implikuje rovnost (4a). Naopak, podle výsledku cvičení 5.37 určují vztahy (4b, c) izometrický operátor $V' \supset V = C(A)$, a proto pro operátor $A' := C^{-1}(V') \in \mathscr{L}_{cs}$, který je rozšířením operátoru A, platí $V' = C(A')$.

(b) Z rovnosti $V' = C(A')$, vztahů $D_{V'} = \operatorname{Ran}(A'+\mathrm{i})$, $\operatorname{Ran} V' = \operatorname{Ran}(A'-\mathrm{i})$ a (4b) dostáváme $\mathscr{H} = \operatorname{Ran}(A' \pm \mathrm{i})^\perp \oplus \operatorname{Ran}(A \pm \mathrm{i}) \oplus \mathscr{G}_\pm$; potom

$$\operatorname{Ran}(A \pm \mathrm{i})^\perp = \operatorname{Ran}(A' \pm \mathrm{i})^\perp \oplus \mathscr{G}_\pm ,$$

a odtud plyne (5). ■

8.2.6 Důsledek: Operátor $A \in \mathscr{L}_{cs}$ je maximální právě tehdy, když alespoň jeden z jeho indexů defektu je nulový.

Důkaz: Nechť třeba $n_-(A) = 0$; potom $\operatorname{Ran}(A+\mathrm{i}) = D_V = \mathscr{H}$, takže V nemá žádná netriviální izometrická rozšíření, a tudíž A nemá žádná netriviální symetrická rozšíření. Jsou-li naopak oba indexy defektu nenulové, lze pomocí vztahů (4b, c) zkonstruovat netriviální izometrické rozšíření V' operátoru V, takže A není maximální. ■

8.3 KONSTRUKCE SYMETRICKÝCH ROZŠÍŘENÍ

O existenci symetrických rozšíření a speciálně samosdružených rozšíření daného symetrického operátoru A lze rozhodnout pomocí indexů defektu. V dalších úvahách, které vycházejí z tvrzení 8.2.5, budeme vždy předpokládat, že výchozí operátor A je uzavřený; to fakticky není žádné omezení, protože každý symetrický operátor A má symetrický uzávěr $\bar A$ (viz příklad 7.2.1), přičemž $n_\pm(A) = n_\pm(\bar A)$. Z téhož důvodu se budeme zabývat pouze uzavřenými symetrickými rozšířeními.

Mohou nastat následující tři případy.

(i) *Alespoň jeden z indexů defektu je nulový*: Podle důsledku 8.2.6 je A maximální symetrický operátor, který je samosdružený právě tehdy, když $n_+(A) = n_-(A) = 0$.

(ii) *Oba indexy defektu jsou nenulové, přičemž $n_+(A) \ne n_-(A)$*: Předpokládejme pro určitost, že třeba $n_+(A) > n_-(A)$. K libovolnému $\mathscr{G}_+ \subset \operatorname{Ran}(A+\mathrm{i})^\perp$ (užíváme označení z tvrzení 8.2.5) splňujícímu $\dim \mathscr{G}_+ \le n_-(A)$ existuje uzavřené symetrické rozšíření A' operátoru A. Speciálně pro $\mathscr{G}_+ = \operatorname{Ran}(A+\mathrm{i})^\perp$ určují vztahy (8.2.4b, c) nějaké maximální izometrické rozšíření V' operátoru

$V \equiv C(A)$, neboť $D(V') = \mathscr{H}$; pro operátor $A' \equiv C^{-1}(V')$ potom platí $\operatorname{Ran}(A' + i) = D(V') = \mathscr{H}$, tj. $n_-(A') = 0$. Jde tedy o maximální operátor, který však není samosdružený, neboť z podmínky $n_+(A) > n_-(A)$ a vztahu (8.2.5) plyne $n_+(A') \neq 0$. V tomto případě tedy operátor A nemá žádné samosdružené rozšíření.

(iii) *Indexy defektu jsou stejné a nenulové,* $n_+(A) = n_-(A) = d$: Zvolíme-li $\mathscr{G}_\pm = \operatorname{Ran}(A \pm i)^\perp$, určují vztahy (8.2.4b, c) unitární rozšíření V' operátoru $C(A)$, takže $C^{-1}(V')$ je samosdružený. Jestliže $d < \infty$, plyne z formule (8.2.5) a důsledku 8.2.6, že každé maximální rozšíření operátoru A je samosdružené. Jsou-li indexy defektu nekonečné, je situace složitější: některá maximální rozšíření operátoru A jsou samosdružená, a jiná nikoli. Posledně zmíněný případ nastává např. tehdy, když $\mathscr{G}_+ = \operatorname{Ran}(A + i)^\perp$ a $\mathscr{G}_-$ je nějaký *vlastní* nekonečnědimenzionální podprostor v $\operatorname{Ran}(A - i)^\perp$; vztahy (8.2.4b, c) potom určují maximální izometrický *neunitární* operátor, tj. $C^{-1}(V')$ je maximální, ale nikoli samosdružený.

Shrneme výsledky provedené diskuse:

8.3.1 Věta: (a) Uzavřený symetrický operátor A má uzavřené symetrické rozšíření $A' \neq A$ právě tehdy, když oba indexy defektu $n_\pm(A)$ jsou nenulové.

(b) Nutnou a postačující podmínkou existence samosdruženého rozšíření operátoru A je rovnost indexů defektu.

(c) Nechť $n_+(A) = n_-(A) = d$; jestliže $d < \infty$, je každé maximální rozšíření samosdružené, v opačném případě existují nesamosdružená maximální rozšíření.

Na základě tvrzení 8.2.5 lze vyjádřit libovolné uzavřené symetrické rozšíření A' daného operátoru $A \in \mathscr{L}_{cs}(\mathscr{H})$ pomocí izometrického operátoru V zobrazujícího podprostor $\mathscr{G}_+ \subset \operatorname{Ran}(A + i)^\perp$ na $\mathscr{G}_- \subset \operatorname{Ran}(A - i)^\perp$.

8.3.2 Věta (*druhá von Neumannova formule*): S označením zavedeným ve tvrzení 8.2.5 platí: ke každému $y' \in D_{A'}$ existuje právě jedno $y \in D_A$ a $x_0 \in \mathscr{G}_+$ tak, že

$$y' = y + (I - \tilde{V})\, x_0\,, \tag{1a}$$

$$A'y' = Ay + i(I + \tilde{V})\, x_0\,. \tag{1b}$$

Důkaz: Jelikož $D_{A'} = (I - V')\, D_{V'}$, kde $V' := C(A')$, plyne z rozkladu (8.2.4b), že ke každému $y' \in D_{A'}$ existují $x \in D_V = \operatorname{Ran}(A + i)$ a $x_0 \in \mathscr{G}_+$ taková, že

$$y' = (I - V')(x + x_0)\,. \tag{2}$$

Pomocí (8.2.4c) dostáváme $(I - V')\,x = (I - V)\,x \in D_A$ a $(I - V')\,x_0 = (I - \tilde{V})\,x_0$. Označíme-li $y := (I - V)\,x$, plyne (1a) ze vztahu (2) a formule (8.2.3) dává

$$A'y' = i(I + V')(x + x_0) = i(I + V)\,x + i(I + \tilde{V})\,x_0 = Ay + i(I + \tilde{V})\,x_0\,.$$

250 Jednoznačnost rozkladu (1a) je důsledkem toho, že $(I - V')$ je invertibilní: jestliže totiž pro nějaká $y \in D_A$ a $x_0 \in \mathcal{G}_+$ platí $y + (I - \tilde{V})\, x_0 = 0$, pak pro $x := (I - V)^{-1} y \in D_V$ máme

$$0 = (I - V)\, x + (I - \tilde{V})\, x_0 = (I - V')\,(x + x_0)\,.$$

Díky invertibilitě operátoru $I - V'$ odtud plyne $x + x_0 = 0$; dále ze vztahu $\mathcal{G}_+ \subset \operatorname{Ran}(A + \mathrm{i})^\perp = D_V^\perp$ vyplývá, že vektory x, x_0 jsou ortogonální, tj. $x = x_0 = 0$, a tedy i $y = (I - V)\, x = 0$. ■

8.3.3 Poznámky: (a) Díky jednoznačnosti můžeme rozklad (1a) zapsat jako direktní součet

$$D_{A'} = D_A \oplus (I - \tilde{V})\, \mathcal{G}_+\,. \tag{1c}$$

(b) Jestliže $\dim \mathcal{G}_+ = d < \infty$, lze formule (1a, b) upravit do následujícího explicitního tvaru. Zvolíme ortonormální báze $\{e_j\}_{j=1}^d$, resp. $\{f_j\}_{j=1}^d$ v podprostorech $\mathcal{G}_+$, resp. $\mathcal{G}_-$; potom lineární izometrie prostorů $\mathcal{G}_+$, $\mathcal{G}_-$ jsou vzájemně jednoznačně přiřazeny d-rozměrným unitárním maticím: $\tilde{V}$ je izometrický operátor z $\mathcal{G}_+$ do $\mathcal{G}_-$ právě tehdy, když existuje unitární matice (u_{jk}) taková, že $\tilde{V} e_k = \sum_{j=1}^{d} u_{jk} f_j$. Zapíšeme-li $x_0 \in \mathcal{G}_+$ ve tvaru $x_0 = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_d e_d$, dostáváme ze vztahů (1a, b)

$$y' = y + \sum_{k=1}^{d} \xi_k \left(e_k - \sum_{j=1}^{d} u_{jk} f_j \right), \tag{3a}$$

$$A'y' = Ay + \mathrm{i} \sum_{k=1}^{d} \xi_k \left(e_k + \sum_{j=1}^{d} u_{jk} f_j \right). \tag{3b}$$

Těmito formulemi je speciálně pro operátor A s konečnými indexy defektu (d, d) definováno zobrazení množiny $U(d)$ všech unitárních matic $d \times d$ na množinu všech samosdružených rozšíření operátoru A. Z injektivity Cayleyovy transformace a formule (8.2.4c) vyplývá, že toto zobrazení je injektivní, tj. formule (3a, b) určuje *bijekci množiny všech samosdružených rozšíření operátoru* $A \in \mathcal{L}_{\mathrm{cs}}(\mathcal{H})$ *s konečnými indexy defektu* (d, d) *a množiny* $U(d)$.

8.3.4 Příklad: Probereme znovu otázku samosdružených rozšíření operátoru P na $L^2(J)$, kterou jsme elementárním způsobem vyřešili v příkladu 7.2.7. Víme už (viz příklad 8.1.5), že indexy defektu operátoru P jsou $(1, 1)$, je-li J omezený interval, $(0, 1)$ pro $J = (0, \infty)$ a $(0, 0)$ pro $J = \mathbb{R}$. Vzhledem k tomu, že P je uzavřený, plyne z věty 1, že jakmile interval J je neomezený, je P maximální operátor, přičemž pro $J = \mathbb{R}$ je P samosdružený, zatímco pro $J = (0, \infty)$ jde o nesamosdružený maximální symetrický operátor. V případě omezeného intervalu $J \equiv (a, b)$ je každé netriviální uzavřené symetrické rozšíření samosdružené; příslušné podprostory jsou „nataženy“ na jednotkové vektory $\eta_\pm$, kde

$$\eta_+(x) = c\, \mathrm{e}^{a-x}\,, \qquad \eta_-(x) = c\, \mathrm{e}^{x-b} \tag{4}$$

a $c := [2/(1 - \exp(2a - 2b))]^{1/2}$. Izometrické operátory z $\mathcal{G}_+$ na $\mathcal{G}_-$ jsou nyní vzájemně jednoznačně přiřazeny komplexním číslům μ s jednotkovou absolutní hodnotou. Podle formule (3a) je definiční obor odpovídajícího samosdruženého operátoru $P'(\mu)$ tvořen vektory

$$\psi = \varphi + \xi(\eta_+ - \mu\eta_-), \qquad \varphi \in D_P \tag{5a}$$

a ze vztahu (3b) dostáváme

$$P'(\mu)\,\psi = -\mathrm{i}\varphi' + \mathrm{i}\xi(\eta_+ + \mu\eta_-) = -\mathrm{i}\varphi' + \mathrm{i}\xi(-\eta'_+ + \mu\eta'_-) = -\mathrm{i}\psi'. \tag{5b}$$

Abychom našli souvislost s parametrizací samosdružených rozšíření zavedenou v příkladu 7.2.7, vyjádříme $\psi(b)$ pomocí $\psi(a)$ a μ. Jelikož pro každé $\varphi \in D_P$ platí $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, vyplývá ze vztahů (4) a (5a)

$$\psi(b) = \xi c(\mathrm{e}^{a-b} - \mu), \qquad \psi(a) = \xi c(1 - \mu\,\mathrm{e}^{a-b}),$$

tj. $\psi(b) = \vartheta\psi(a)$, kde $\vartheta := (\mathrm{e}^{a-b} - \mu)/(1 - \mu\,\mathrm{e}^{a-b})$.

Na závěr uvedeme jednu vlastnost operátoru sdruženého s uzavřeným symetrickým operátorem A, která je důsledkem formule (1c), resp. cvičení 10.

8.3.5 Tvrzení: Jestliže uzavřený symetrický operátor A má konečné indexy defektu (n, n), potom pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$, které není jeho vlastní hodnotou, platí $\operatorname{def}(A - \lambda) \equiv \dim \operatorname{Ker}(A^* - \lambda) \leqq n$.
Důkaz: Zavedeme zkrácené označení $K_\lambda := \operatorname{Ker}(A^* - \lambda)$. Z předpokladu $\lambda \notin \sigma_p(A)$ a symetričnosti operátoru A plyne $K_\lambda \cap D_A = \{0\}$; ověříme, že operátor $A_1 := A^* \restriction (D_A \oplus K_\lambda)$ je symetrické rozšíření operátoru A. Vzhledem k tomu, že A_1 je zjevně hustě definovaný, stačí pro libovolnou dvojici $x_1, x_2 \in D(A_1)$ ověřit rovnost $(x_1, A_1x_2) = (A_1x_1, x_2)$. To se snadno provede pomocí rozkladů $x_r = y_r + z_r$, kde $y_r \in D_A$ a $z_r \in K_\lambda$, s využitím podmínky $\lambda \in \mathbb{R}$. Nyní pro uzavřený symetrický operátor $\bar{A}_1$ platí (viz cvičení 10): $n \geqq \dim(D(\bar{A}_1)/D_A) \geqq \dim(D(A_1)/D_A)$, a protože $D(A_1)$ je direktním součtem podprostorů D_A a K_λ, dostáváme $\dim K_\lambda = \dim(D(A_1)/D_A) \leqq n$. ■

8.4 SPEKTRA SAMOSDRUŽENÝCH ROZŠÍŘENÍ SYMETRICKÉHO OPERÁTORU

Pomocí teorie probrané v předchozích třech paragrafech je možno odvodit řadu obecných vlastností spektra libovolného samosdruženého rozšíření daného uzavřeného symetrického operátoru A s konečnými indexy defektu (n, n). Nejprve se budeme zabývat otázkou vlastních hodnot.

Pro dané $\lambda \in \mathbb{C}$ označíme $N_A(\lambda) := \operatorname{Ker}(A - \lambda)$ a $m_A(\lambda) := \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda)$, takže pokud λ je vlastní hodnota operátoru A, udává $m_A(\lambda)$ její násobnost; v opačném případě $m_A(\lambda) = 0$. Uvažujme libovolné uzavřené symetrické (ne nutně samosdružené) rozšíření $A' \supset A$; pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ zřejmě platí $N_{A'}(\lambda) \supset \supset N_A(\lambda)$ a díky uzavřenosti operátorů A, A' jsou podprostory $N_A(\lambda)$, $N_{A'}(\lambda)$ uzavřené. Nechť dále $\Delta(\lambda)$ je ortogonální doplněk $N_A(\lambda)$ v $N_{A'}(\lambda)$, tj.

$$N_{A'}(\lambda) = N_A(\lambda) \oplus \Delta(\lambda) . \tag{1a}$$

Vzhledem k tomu, že $N_A(\lambda) = N_{A'}(\lambda) \cap D_A$, platí $\Delta(\lambda) \cap D_A = N_A(\lambda)^\perp \cap \cap N_{A'}(\lambda) \cap D_A = N_A(\lambda)^\perp \cap N_A(\lambda) = \{0\}$. Dále $\Delta(\lambda) \subset D_{A'}$, takže $\Delta(\lambda) \oplus D_A \subset \subset D_{A'}$, a tedy také $(\Delta(\lambda) \oplus D_A)/D_A \subset D_{A'}/D_A$; užijeme-li nyní formule (8.3.1c), cvičení 1.6 a 10, máme

$$\dim \Delta(\lambda) = \dim (\Delta(\lambda) \oplus D_A)/D_A \leqq \dim D_{A'}/D_A \leqq n . \tag{1b}$$

Díky tomu, že rozklad (1a) je ortogonální, dostáváme následující závěr.

8.4.1 Tvrzení: Nechť A je uzavřený symetrický operátor s konečnými indexy defektu (n, n) a A' je jeho uzavřené symetrické (speciálně samosdružené) rozšíření. Jestliže λ je vlastní hodnota operátoru A' s konečnou násobností $m_{A'}(\lambda)$, pak $m_{A'}(\lambda) \leqq m_A(\lambda) + n$, přičemž $m_A(\lambda) = 0$ v případě, že λ není vlastní hodnotou operátoru A.

Dále vyšetříme, co plyne z inkluze $A \subset A'$, kde $A, A' \in \mathscr{L}_{cs}(\mathscr{H})$, pro esenciální spektra těchto operátorů (viz § 7.2). Nejprve odvodíme užitečné kritérium pro to, aby dané $\lambda \in \mathbb{C}$ patřilo do $\sigma_{ess}(A)$. K tomu účelu definujeme operátor A_λ jako část A ležící v podprostoru $\operatorname{Ker}(A - \lambda)^\perp \equiv N_A(\lambda)^\perp$ (viz cvičení 7.28). Je jasné, že pro všechna $\lambda \notin \sigma_p(A)$ platí $A_\lambda = A$; snadno se také přesvědčíme o tom, že pro každé λ je A_λ uzavřený symetrický operátor na Hilbertově prostoru $N_A(\lambda)^\perp$, existuje $(A_\lambda - \lambda)^{-1}$ a platí

$$\operatorname{Ran}(A_\lambda - \lambda) = \operatorname{Ran}(A - \lambda) . \tag{2}$$

8.4.2 Tvrzení: Komplexní číslo λ patří do esenciálního spektra uzavřeného symetrického operátoru A právě tehdy, když platí alespoň jedna z následujících podmínek:

(i) λ je vlastní hodnota nekonečné násobnosti,

(ii) operátor $(A_\lambda - \lambda)^{-1}$ je neomezený.

Důkaz: Platí-li (i), existuje v podprostoru $N_A(\lambda)$ nekonečná ortonormální množina $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ taková, že $(A - \lambda)\, e_n = 0$ pro všechna n. Z ortonormality plyne, že tato množina nemá hromadné body, a proto $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$. Podobně z podmínky (ii) plyne existence posloupnosti jednotkových vektorů $x_n \in D(A_\lambda) \subset D_A$, která nemá hromadné body a splňuje $(A_\lambda - \lambda)\, x_n = (A - \lambda)\, x_n \to 0$ (viz cvičení 3.27). Předpokládejme nyní naopak, že λ není vlastní hodnota nekonečné násobnosti a současně $(A_\lambda - \lambda)^{-1}$ je omezený operátor. Uvažujme jakoukoli posloupnost jednotkových vektorů $x_k \in D_A$ splňující vztah $(A - \lambda)\, x_k \to 0$. Dokážeme-li, že existuje vybraná konvergentní posloupnost $\{x_{k_l}\}$, bude platit $\lambda \notin \sigma_{ess}(A)$. Nechť y_k, resp. z_k jsou projekce vektoru x_k do $N_A(\lambda)$, resp. $N_A(\lambda)^\perp$, takže $x_k = y_k + z_k$. Odtud plyne $(A_\lambda - \lambda)\, z_k = (A - \lambda)\, z_k = (A - \lambda)\, x_k \to 0$ a díky omezenosti operátoru $(A_\lambda - \lambda)^{-1}$ dostáváme $z_k \to 0$. Dále $\{y_k\}$ je omezená množina v prostoru $N_A(\lambda)$, který je podle předpokladu konečnědimenzionální. Proto lze vybrat konvergentní posloupnost $\{y_{k_l}\}$ a posloupnost $\{x_{k_l}\}$ je potom rovněž konvergentní. ■

8.4.3 Věta: Nechť $A, A' \in \mathscr{L}_{cs}(\mathscr{H})$ a nechť operátor A má indexy defektu (n, n). Jestliže $A \subset A'$, potom $\sigma_p(A) \subset \sigma_p(A')$ a $\sigma_{ess}(A) \subset \sigma_{ess}(A')$, přičemž pro $n < \infty$ platí rovnost

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A')\,. \tag{3}$$

Důkaz: Obě inkluze vyplývají přímo z příslušných definic. Zbývá ověřit, že pro $n < \infty$ předpoklad $\lambda \notin \sigma_{ess}(A)$ implikuje $\lambda \notin \sigma_{ess}(A')$. Pomocí tvrzení 2 z uvedeného předpokladu snadno plyne, že λ není vlastní hodnotou operátoru A' s nekonečnou násobností (viz tvrzení 1) a že k dokončení důkazu stačí ověřit následující implikaci: $(A_\lambda - \lambda)^{-1}$ je omezený $\Rightarrow$ $(A'_\lambda - \lambda)^{-1}$ je omezený. Díky uzavřenosti operátoru A_λ plyne z omezenosti $(A_\lambda - \lambda)^{-1}$ uzavřenost podprostoru $\mathrm{Ran}\,(A_\lambda - \lambda) = \mathrm{Ran}\,(A - \lambda)$. Pomocí formule (8.3.1c) pro podprostor $L := (I - \tilde{V})\, \mathscr{G}_+$ dostáváme $\dim L = \dim (D_{A'}/D_A) \leqq n$; z cvičení 4.5 pak plyne

$$\mathrm{Ran}\,(A' - \lambda) = (A' - \lambda)\,(D_A \oplus L) = \mathrm{Ran}\,(A - \lambda) \oplus M\,,$$

přičemž $\dim M \leqq n$ a $M \perp \mathrm{Ran}\,(A - \lambda)$. Vzhledem k uzavřenosti podprostoru $\mathrm{Ran}\,(A - \lambda)$ je uzavřený i podprostor $\mathrm{Ran}\,(A' - \lambda) = \mathrm{Ran}\,(A'_\lambda - \lambda)$, což je definiční obor uzavřeného operátoru $(A'_\lambda - \lambda)^{-1}$. Z věty 3.4.12 pak plyne, že tento operátor je omezený. ■

8.4.4 Důsledek: Nechť A je uzavřený symetrický operátor s konečnými indexy defektu (n, n). Jestliže pro nějaké reálné λ platí $\mathrm{def}\,(A - \lambda) < n$, patří λ do spektra každého samosdruženého rozšíření A' operátoru A; jestliže navíc λ není vlastní hodnotou operátoru A, platí $\lambda \in \sigma_{ess}(A')$.

Důkaz: viz cvičení 13.

8.4.5 Příklad: Uvažujme uzavřený symetrický operátor P na $L^2(0, 1)$ – viz příklad 7.2.7. Jeho indexy defektu jsou $(1, 1)$ a z tvrzení 8.1.6 vyplývá, že $\sigma(P) = \mathbb{C}$. K určení $\sigma_{ess}(P)$ užijeme toho, že uzavřený operátor $P^{(0)}$ definovaný na množině $\{\psi \in AC(0, 1)\colon\ \psi(0) = 0\}$ má prázdné spektrum (viz cvičení 7.18 a příklad 3.6.9). Vzhledem k tomu, že $P \subset P^{(0)}$, platí $\sigma_{ess}(P) \subset \sigma_{ess}(P^{(0)}) \subset \sigma(P^{(0)}) = \emptyset$, takže $\sigma_{ess}(P) = \emptyset$. Přejdeme-li k samosdruženým rozšířením, která tvoří jednoparametrickou množinu $\{P'_\vartheta\colon\ \vartheta = e^{i\alpha}, 0 \leqq \alpha < 2\pi\}$, esenciální spektrum se nezmění, tj. $\sigma_{ess}(P'_\vartheta) = \emptyset$ pro všechna ϑ, avšak celkové spektrum operátoru P'_ϑ se zcela liší od $\sigma(P)$: platí $\sigma(P'_\vartheta) = \{\alpha + 2k\pi\colon\ k = 0, \pm 1, \dots\}$ (viz cvičení 7.24).

8.5 OBYČEJNÉ SYMETRICKÉ DIFERENCIÁLNÍ OPERÁTORY DRUHÉHO ŘÁDU

V tomto paragrafu se seznámíme s univerzálním postupem, který umožňuje danému diferenciálnímu výrazu, jehož koeficienty jsou lokálně integrabilní v intervalu (a, b), jednoznačně přiřadit lineární operátory $\tilde{H}$ a H na $L^2(a, b)$, přičemž $\tilde{H}$ představuje maximální operátor na $L^2(a, b)$, který lze pomocí daného diferenciálního výrazu zkonstruovat, a H je uzavřený symetrický operátor takový, že $H^* = \tilde{H}$. Uvidíme, že jde o přímé zobecnění postupu z příkladu 7.2.7, kde jsme uvažovali nejjednodušší diferenciální výraz $-\mathrm{i}\, \mathrm{d}/\mathrm{d}x$.

Omezíme se na studium operátorů odpovídajících diferenciálním výrazům

$$l \equiv -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x) \tag{1}$$

na intervalu (a, b), kde $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$. Budeme předpokládat, že V je reálná funkce patřící do množiny $L_{\mathrm{loc}}(a, b)$ *funkcí lokálně integrabilních* v (a, b), tj. integrabilních na každém kompaktním intervalu $K \subset (a, b)$.

Diferenciální výraz (1) je **regulární**, jestliže $b - a < \infty$ a V je integrabilní na (a, b); v opačném případě jde o **singulární** výraz. Podobně se klasifikují koncové body intervalu (a, b): bod a nazýváme *regulárním koncem*, jestliže $a > -\infty$ a V je integrabilní na (a, c) pro nějaké $c > a$; jinak je a singulární konec. Definice pro pravý koncový bod je analogická. Je zřejmé, že výraz (1) je regulární právě tehdy, když oba konce a, b jsou regulární. Pro dané l na $J \equiv (a, b)$ položíme

$$J_l := J \cup \{\text{množina regulárních koncových bodů}\}.$$

V regulárním případě tedy máme $J_l = [a, b]$, jestliže a je regulární a b singulární konec, dostaneme $J_l = [a, b)$ atd. Z definice intervalu J_l vyplývá, že funkce V je vždy lokálně integrabilní v J_l.

Pro daný interval $I \subset \mathbb{R}$ označíme

$$ac(I) := \{f\colon I \to \mathbb{C} \colon f \text{ a } f' \text{ jsou absolutně spojité v } I\}.$$

Každá funkce $f \in ac(I)$ má tedy s.v. v I druhou derivaci, která je lokálně integrabilní v I. Pro diferenciální výraz (1) na intervalu J a každé $f \in ac(J_l)$ potom z definice intervalu J_l plyne, že funkce $x \mapsto (l[f])(x)$ je definována s.v. v J_l a je v tomto intervalu lokálně integrabilní.

8.5.1 Lemma (*Lagrangeova formule*): Nechť l je diferenciální výraz (1) na (a, b); potom pro všechna $f, g \in ac(J_l)$ a libovolný kompaktní interval $[c, d] \subset J_l$ platí

$$\int_c^d (l[\bar{f}]\, g - \bar{f} l[g])\, \mathrm{d}x = [f, g]_d - [f, g]_c\,,$$

kde $[f, g]_x := \bar{f}(x)\, g'(x) - \bar{f}'(x)\, g(x)$ pro každé $x \in J_l$.

Důkaz: Funkce $x \mapsto [f, g]_x$ je pro $f, g \in ac(J_l)$ absolutně spojitá v J_l a s. v. v J_l platí $l[\bar{f}]\, g - \bar{f} l[g] = [f, g]'$. ■

Jak uvidíme dále, hraje Lagrangeova formule důležitou roli při konstrukci operátoru H, a je proto rozumné definovat $l[f]$ jen pro ty funkce f, pro něž tato formule platí. Z vlastností absolutně spojitých funkcí vyplývá, že v tomto smyslu představuje (maximální) definiční obor diferenciálního výrazu (1) na $J \equiv (a, b)$ právě množina $ac(J_l)$.

Pro danou funkci g, která je lokálně integrabilní v J_l, nazveme *řešením zobecněné diferenciální rovnice* $l[f] = g$ každou funkci $f \in ac(J_l)$, která splňuje $(l[f])(x) = g(x)$ pro s. v. $x \in J$.

8.5.2 Věta: Nechť l je diferenciální výraz (1) na J a funkce g je lokálně integrabilní v J_l. Potom ke každému $c \in J_l$ a libovolným komplexním γ_0, γ_1 existuje právě jedno řešení rovnice $l[f] = g$ splňující okrajové podmínky $f(c) = \gamma_0$ a $f'(c) = \gamma_1$.

Důkaz neuvádíme; je založen na metodě postupných aproximací a lze jej najít např. v ⟦Nai 2⟧, § 16.1 nebo ⟦DS 2⟧, § XIII.1. Uvedená věta platí i tehdy, když funkce V je komplexní – podstatná je pouze její lokální integrabilita v J_l.

Z věty 2 vyplývá, že zobecněné diferenciální rovnice mají řadu vlastností shodných s klasickými. To se týká zejména existence fundamentálního systému řešení homogenní rovnice a metody řešení nehomogenní rovnice tzv. variací konstant (viz cvičení 15). Přitom lze většinou užít stejného postupu (např. vlastností wronskiánu) jako v klasickém případě (viz třeba ⟦Kam⟧, § 25).

Pro diferenciální výraz (1) na intervalu $J \equiv (a, b)$ označíme

$$\tilde{D} := \{\psi \in ac(J_l) : \psi \in L^2(a, b),\, l[\psi] \in L^2(a, b)\} \tag{2a}$$

a zavedeme lineární operátor $\tilde{H}$ na $L^2(a, b)$ s definičním oborem $\tilde{D}$ vztahem

$$\tilde{H}\psi := l[\psi]\,. \tag{2b}$$

Je zřejmé, že pro každý interval $[c, d] \subset J_l$ a všechna $\varphi, \psi \in \tilde{D}$ platí Lagrangeova formule ve tvaru

$$\int_c^d [\overline{(H\varphi)(x)}\, \psi(x) - \overline{\varphi(x)}\, (H\psi)(x)]\, \mathrm{d}x = [\varphi, \psi]_d - [\varphi, \psi]_c\,.$$

Pro každou dvojici φ a $\psi \in \tilde{D}$ navíc existují vlastní limity $[\varphi, \psi]_a \equiv \lim_{x \to a+} [\varphi, \psi]_x$ a $[\varphi, \psi]_b \equiv \lim_{x \to b-} [\varphi, \psi]_x$ a to i v případě, kdy jeden nebo oba konce jsou singulární; přitom odpovídající limity funkcí φ, φ', ψ a ψ' nemusí existovat, resp. některé z nich mohou být nevlastní. Uvedené tvrzení plyne z toho, že pro φ a $\psi \in \tilde{D}$ platí $l[\bar{\varphi}]\, \psi - \bar{\varphi}\, l[\psi] \in L^1(a, b)$, takže pro každé $d < b$ máme

$$\lim_{c\to a+} \int_c^d (l[\bar\varphi]\,\psi - \bar\varphi\, l[\psi])\,\mathrm{d}x = \int_a^d (l[\bar\varphi]\,\psi - \bar\varphi\, l[\psi])\,\mathrm{d}x\,,$$

a vyjádříme-li integrál vlevo pomocí Lagrangeovy formule, zjistíme, že funkce $x \mapsto [\varphi, \psi]_x$ má v bodě a vlastní limitu zprava. Obdobně se postupuje i v případě druhé limity. Pro všechna $\varphi, \psi \in \tilde D$ potom platí

$$(\tilde H\varphi, \psi) - (\varphi, \tilde H\psi) = [\varphi, \psi]_b - [\varphi, \psi]_a\,. \tag{3}$$

Z tohoto vztahu je patrné, že operátor $\tilde H$ není symetrický. Ukážeme nyní, že lze najít uzavřený symetrický operátor $H \subset \tilde H$, který navíc splňuje $H^* = \tilde H$.

Nejprve budeme uvažovat regulární případ, kdy $J_l = [a, b]$ a $ac[a, b] \subset \subset L^2(a, b)$; podprostor D lze nyní zapsat ve tvaru

$$\tilde D = \{\varphi \in ac[a, b] : l[\varphi] \in L^2(a, b)\}\,. \tag{4a}$$

Položíme

$$D := \{\psi \in \tilde D\colon \psi(a) = \psi'(a) = \psi(b) = \psi'(b) = 0\}\,, \qquad H := \tilde H \restriction D\,. \tag{4b}$$

K ověření toho, že operátor H má všechny požadované vlastnosti, užijeme následující pomocné tvrzení.

8.5.3 Lemma: Pro regulární diferenciální výraz (1) na intervalu (a, b) platí:
(a) jestliže $\{\varphi_0, \varphi_1\}$ je fundamentální systém řešení zobecněné diferenciální rovnice $l[\varphi] = 0$, potom

$$\operatorname{Ker} \tilde H = \{\varphi_0, \varphi_1\}_{\mathrm{lin}}\,, \qquad \operatorname{Ran} H = (\operatorname{Ker} \tilde H)^{\perp}\,; \tag{5}$$

(b) pro libovolná $\gamma_0, \gamma_1, \delta_0, \delta_1 \in \mathbb{C}$ existuje funkce $\varphi \in \tilde D$ splňující

$$\varphi^{(r)}(a) = \gamma_r\,, \qquad \varphi^{(r)}(b) = \delta_r\,, \qquad r = 0, 1\,, \tag{6}$$

kde $\varphi^{(0)} \equiv \varphi$ a $\varphi^{(1)} \equiv \varphi'$;
(c) jestliže pro nějakou dvojici $\varphi, \eta \in L^2(a, b)$ a všechna $\psi \in D$ je

$$(\varphi, H\psi) = (\eta, \psi)\,, \tag{7}$$

potom $\varphi \in \tilde D$ a $\eta = \tilde H\varphi = l[\varphi]$.

Důkaz: První z rovností (5) plyne přímo z příslušných definic. Nechť $\eta \in \operatorname{Ran} H$, tj. $\eta = l[\psi]$ pro nějaké $\psi \in D$; potom pro všechna $\varphi \in \operatorname{Ker} \tilde H$ z Langrangeovy formule a podmínek $\psi^{(r)}(a) = \psi^{(r)}(b) = 0$, $r = 0, 1$, dostáváme

$$\int_a^b \bar\eta\varphi\,\mathrm{d}x = \int_a^b l[\bar\psi]\,\varphi\,\mathrm{d}x = \int_a^b \bar\psi\, l[\varphi]\,\mathrm{d}x = 0\,,$$

takže $\operatorname{Ran} H \subset (\operatorname{Ker} \tilde H)^{\perp}$.

Naopak k danému $\eta \in (\operatorname{Ker} \tilde H)^{\perp}$ existuje podle věty 2 funkce $\psi \in ac[a, b]$ taková, že $l[\psi] = \eta$ a $\psi(a) = \psi'(a) = 0$. Dále pro každý fundamentální systém

$\{\varphi_0, \varphi_1\}$ řešení rovnice $l[\varphi] = 0$ plyne z první z rovností (5), Lagrangeovy formule a podmínek $\psi(a) = \psi'(a) = 0$:

$$0 = (\eta, \varphi_r) = (l[\psi], \varphi_r) = [\psi, \varphi_r]_b, \qquad r = 0, 1.$$

Zvolíme-li funkce φ_0, φ_1 tak, aby pro $r, s = 0, 1$ platilo

$$\varphi_s^{(r)}(b) = \delta_{rs}, \tag{8}$$

dostáváme $\psi(b) = \psi'(b) = 0$; to znamená, že $\psi \in D$ a $\eta = l[\psi] = H\psi \in \operatorname{Ran} H$.
(b) Uvažujme nejprve případ $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$. Pomocí fundamentálního systému splňujícího podmínky (8) sestrojíme funkci $\eta := k_0\varphi_0 + k_1\varphi_1$, přičemž konstanty k_0, k_1 zvolíme tak, aby $(\varphi_0, \eta) = -\delta_1$ a $(\varphi_1, \eta) = \delta_0$. Tyto podmínky určují k_0 a k_1 jednoznačně – viz cvičení 1.19. Jelikož $\eta \in ac(a, b) \subset L^2(a, b) \subset L^1(a, b)$, lze podle věty 2 najít $\varphi_b \in ac[a, b]$ takové, že $l[\varphi_b] = \eta$ a $\varphi_b(a) = \varphi_b'(a) = 0$; díky tomu, že $\eta \in L^2(a, b)$, platí $l[\varphi_b] \in L^2(a, b)$, tj. $\varphi_b \in \tilde{D}$. Dále pomocí podmínek (8) dostáváme $\delta_1 = -(\varphi_0, l[\varphi_b]) = \varphi_b'(b)$ a $\delta_0 = (\varphi_1, l[\varphi_b]) = \varphi_b(b)$. Analogickým postupem získáme funkci $\varphi_a \in \tilde{D}$ vyhovující pro $r = 0, 1$ podmínkám $\varphi_a^{(r)}(a) = \gamma_r$, $\varphi_a^{(r)}(b) = 0$. Potom $\varphi := \varphi_a + \varphi_b$ patří do $\tilde{D}$ a splňuje (6).
(c) Podle předpokladů máme $\eta \in L^1(a, b)$, a proto existuje $\zeta \in \tilde{D}$ splňující $l[\zeta] = \eta$. Z Lagrangeovy formule a podmínky $\psi \in D$ plyne $(\eta, \psi) = (\zeta, H\psi)$ a po dosazení do (7) dostáváme pomocí vztahů (5) $\varphi - \zeta \in \operatorname{Ran} H^\perp = \operatorname{Ker} \tilde{H}^{\perp\perp} = \operatorname{Ker} \tilde{H}$ (poslední rovnost platí díky tomu, že podprostor $\operatorname{Ker} \tilde{H}$ má konečnou dimenzi, a je tudíž uzavřený). Existují tedy konstanty $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ takové, že $\varphi = \zeta + \alpha\varphi_0 + \beta\varphi_1$; odtud vyplývá $\varphi \in \tilde{D}$ a $l[\varphi] = l[\zeta] = \eta$. ■

8.5.4 Tvrzení: Pro regulární diferenciální výraz (1) na (a, b) je vztahy (4b) určen uzavřený symetrický operátor splňující $H^* = \tilde{H}$. Indexy defektu operátoru H jsou $(2, 2)$.

Důkaz: Nechť $\eta \in D^\perp$, takže platí rovnost (7) pro $\varphi = 0$; potom $\eta = l[\varphi] = 0$, a operátor H je tedy hustě definován. Pomocí formule (3) se snadno přesvědčíme o tom, že H je symetrický a splňuje $\tilde{H} \subset H^*$; naopak z tvrzení (c) lemmatu 3 plyne, že platí opačná inkluze, takže celkem $\tilde{H} = H^*$. K ověření uzavřenosti stačí ukázat, že $H^{**} \subset H$ (viz tvrzení 7.1.3b). Vzhledem k tomu, že H je symetrický, platí $H^{**} \subset H^*$, takže akce operátoru H^{**} na každé ψ z jeho definičního oboru je dána vztahem $H^{**}\psi = l[\psi]$. Dále platí $(\psi, H^*\varphi) = (H^{**}\psi, \varphi)$ pro všechna $\varphi \in D(H^*) = \tilde{D}$, tj. $(\psi, l[\varphi]) - (l[\psi], \varphi) = 0$, a Langrangeova formule implikuje $[\psi, \varphi]_b = [\psi, \varphi]_a$. Užijeme-li ještě tvrzení (b) lemmatu 3, vidíme, že z této rovnosti vyplývá $\psi^{(r)}(a) = \psi^{(r)}(b) = 0$ pro $r = 0, 1$, tj. $\psi \in D$; tím je inkluze $H^{**} \subset H$ dokázána.

Díky tomu, že $H^* = \tilde{H}$, jsou indexy defektu operátoru H rovny počtu lineárně nezávislých řešení rovnice $l[\varphi] = \mp i\varphi$. Taková řešení jsou v regulárním případě pro obě znaménka právě dvě (viz větu 2 pro $l = -d^2/dx^2 + V(x) \pm i$). ■

V singulárním případě je situace složitější. Hledaný operátor H je určen prostřednictvím „pomocného" operátoru $\dot{H} := \tilde{H} \restriction \dot{D}$, kde

$$\dot{D} := \{\psi \in \tilde{D} \colon \operatorname{supp} \psi \subset (a, b) \text{ je kompaktní}\}\,. \tag{9}$$

Vyšetříme základní vlastnosti tohoto operátoru.

8.5.5 Tvrzení: Pro libovolný diferenciální výraz (1) na (a, b) určuje vztah (9) symetrický operátor splňující $\dot{H}^* = \tilde{H}$. Indexy defektu operátoru $\dot{H}$ jsou (n, n), kde $0 \leqq n \leqq 2$.

Důkaz: Nechť pro daná $\varphi, \eta \in L^2(a, b)$ a všechna $\psi \in \dot{D}$ platí

$$(\varphi, \dot{H}\psi) = (\eta, \psi)\,.$$

Ukážeme, že z této podmínky plyne $\varphi \in \tilde{D}$ a $\eta = \tilde{H}\varphi$. Zvolme libovolný kompaktní interval $K \equiv [c, d] \subset (a, b)$; diferenciální výraz l je na K regulární a určuje podle tvrzení 4 na prostoru $L^2(K)$ uzavřený symetrický operátor, který označíme H_K. Vezměme jakékoli $\psi_K \in D(H_K)$; položíme-li $\psi(x) := \psi_K(x)$ pro $x \in K$, resp. $\psi(x) := 0$ pro $x \in (a, b) \setminus K$, patří ψ do $\dot{D}$ a platí $(\dot{H}\psi)(x) = (H_K\psi_K)(x)$ pro s.v. $x \in K$, resp. $(\dot{H}\psi)(x) = 0$ pro $x \in (a, b) \setminus K$. Z uvedené podmínky pro každé $\psi_K \in D(H_K)$ dostaneme $(\varphi, H_K\psi_K)_K = (\eta, \psi_K)_K$, kde $(.,.)_K$ je skalární součin na $L^2(K)$. Z lemmatu 3c nyní vyplývá, že funkce φ a φ' jsou absolutně spojité na K a $\eta(x) = (l[\varphi])(x)$ s.v. v K. Díky libovolnosti intervalu K odtud dostáváme $\varphi \in ac(a, b)$ a $\eta(x) = (l[\varphi])(x)$ pro s.v. $x \in (a, b)$, tj. $\varphi \in \tilde{D}$ a $\eta = \tilde{H}\varphi$. Na základě toho se symetričnost operátoru $\dot{H}$ a rovnost $\dot{H}^* = \tilde{H}$ ověří stejně jako v důkazu tvrzení 4.

Indexy defektu jsou nyní rovny počtu lineárně nezávislých řešení rovnic $l[\varphi] = \pm i\varphi$, která leží v $L^2(a, b)$. Díky tomu, že V je reálná funkce, platí $n_+(H) = n_-(H)$; jestliže totiž $l[\varphi] = i\varphi$, potom $l[\bar{\varphi}] = \overline{l[\varphi]} = -i\bar{\varphi}$. V singulárním případě ovšem mohou existovat řešení uvedených rovnic, která do $L^2(a, b)$ nepatří, takže případy $n_\pm(H) = 1$ nebo $n_\pm(H) = 0$ nejsou vyloučeny (viz dále tvrzení 13 a důsledek 14). ∎

Uzávěr symetrického operátoru $\dot{H}$ určeného vztahem (9) označíme H, tj.

$$H := \overline{\dot{H}}\,; \tag{10a}$$

nazýváme jej (symetrickým) *diferenciálním operátorem generovaným diferenciálním výrazem* (1). Ze vztahu (10a) dostáváme $H^* = \dot{H}^* = \tilde{H}$ a odtud

$$\tilde{H}^* = H^{**} = H\,. \tag{10b}$$

8.5.6 Poznámka: V regulárním případě určuje definice (10a) týž operátor jako (4b): podle tvrzení 4 určuje (4b) uzavřený operátor H splňující $H^* = \tilde{H}$ a tvrzení 5 dává $H^* = \dot{H}^*$, takže $\overline{\dot{H}} = \dot{H}^{**} = \tilde{H}^* = H$.

Shrneme získané výsledky.

8.5.7 Věta: Ke každému diferenciálnímu výrazu (1) na intervalu (a, b), kde $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$, je vztahy (2), (9) a (10a) jednoznačně určen uzavřený symetrický operátor H, který splňuje podmínku $H^* = \tilde{H}$. Operátor H má indexy defektu (n, n), kde $0 \leqq n \leqq 2$, přičemž v regulárním případě vždy platí $n = 2$. Do definičního oboru D operátoru H patří právě ta $\psi \in \tilde{D}$, která pro všechna $\varphi \in \tilde{D}$ splňují podmínku

$$[\varphi, \psi]_b - [\varphi, \psi]_a = 0 \quad (11)$$

[1].

8.5.8 Příklad: Pro $l = -\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$, tj. $V = 0$, budeme psát T místo H, D_T místo D atd. Podprostor $\tilde{D}_T$ je totožný s definičním oborem operátoru $\tilde{P}^2$ (viz cvičení 7.19), takže $\tilde{T} = \tilde{P}^2$. Pro $(a, b) = \mathbb{R}$ je operátor $\tilde{P}$ samosdružený a pomocí (10b) a tvrzení 7.1.3e dostáváme $T = \tilde{T}^* = (\tilde{P}^2)^* \supset (\tilde{P}^*)^2 = \tilde{P}^2 = \tilde{T}$, což spolu s inkluzí $T \subset \tilde{T}$ dává $T = \tilde{T} = T^*$; operátor T na $L^2(\mathbb{R})$ je tedy samosdružený.

Uvažujme dále $-\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ na intervalu $(0, \infty)$; jde tedy o singulární diferenciální výraz, přičemž bod 0 je regulární konec. Podle rovnosti (11) je definiční obor D_T odpovídajícího diferenciálního operátoru T na $L^2(0, \infty)$ tvořen právě těmi $\psi \in \tilde{D}_T = AC^2(0, \infty)$, která pro všechna $\varphi \in \tilde{D}_T$ splňují

$$[\varphi, \psi]_0 = \lim_{x \to +\infty} [\varphi, \psi]_x .$$

Nyní z výsledků cvičení 7.19 plyne, že pro každé $\varphi \in \tilde{D}_T$ platí $\varphi' \in L^2(0, \infty)$; potom pro všechna $\varphi, \psi \in \tilde{D}_T$ patří funkce $x \mapsto [\varphi, \psi]_x$ do $L^1(0, \infty)$, a proto $\lim_{x \to +\infty} [\varphi, \psi]_x = 0$. Funkce ψ tedy patří do D_T právě tehdy, když $\overline{\varphi(0)}\, \psi'(0) = \overline{\varphi'(0)}\, \psi(0)$ pro všechna $\varphi \in \tilde{D}_T$, a díky tomu, že $\varphi(0)$ a $\varphi'(0)$ mohou nabývat nezávisle libovolných hodnot (cvičení 14), dostáváme $D_T = \{\psi \in AC^2(0, \infty) : \psi(0) = \psi'(0) = 0\}$. Určíme ještě indexy defektu operátoru T na $L^2(0, \infty)$. Rovnice $-f'' = \mathrm{i}f$ má dvě lineárně nezávislá řešení $f_\pm(x) := \exp(\pm 2^{-1/2}(1 - \mathrm{i})\, x)$, z nichž jen f_- patří do $L^2(0, \infty)$; proto indexy defektu jsou $(1, 1)$.

Pro singulární diferenciální výrazy s jedním regulárním koncem lze tvrzení věty 7 zesílit.

8.5.9 Tvrzení: Pro singulární diferenciální výraz (1) na intervalu (a, b) s jedním regulárním koncem platí:

(a) je-li a regulární konec, potom definiční obor operátoru H je tvořen právě těmi $\psi \in \tilde{D}$, která pro všechna $\varphi \in \tilde{D}$ splňují

$$\psi(a) = \psi'(a) = 0 \quad \text{a} \quad [\varphi, \psi]_b = 0\,; \quad (12)$$

(b) indexy defektu operátoru H jsou $(1, 1)$ nebo $(2, 2)$.

[1]) Ekvivalenci podmínek $\psi \in D$ a (11) je věnováno cvičení 16.

 Důkaz: (a) Stačí ověřit ekvivalenci podmínek (12) a (11). Díky tomu, že a je regulární konec, podmínka $\psi(a) = \psi'(a) = 0$ implikuje $[\psi, \varphi]_a = 0$ pro všechna $\varphi \in \tilde{D}$, a odtud je zřejmé, že z (12) plyne (11). Opačná implikace bude platit, jestliže ukážeme, že z (11) plyne $\psi(a) = \psi'(a) = 0$. Pro libovolné $c \in (a, b)$ najdeme funkce $\varphi_0, \varphi_1 \in \tilde{D}$ takové, že

$$\varphi_r^{(s)}(a) = \delta_{rs}, \qquad r, s = 0, 1 \tag{13}$$

a $\varphi_r(x) = 0$ pro $x \in (c, b)$ (viz cvičení 14). Potom $[\varphi_r, \psi]_x = 0$ pro všechna $x \in (c, b)$, a tudíž $[\varphi_r, \psi]_b \equiv \lim_{x \to b^-} [\varphi_r, \psi]_x = 0$. Z podmínky (11) nyní plyne $[\varphi_r, \psi]_a = 0$ a odtud pomocí (13) dostáváme $\psi(a) = \psi'(a) = 0$.

(b) Nechť indexy defektu operátoru H jsou (n, n) a $\mathcal{G} := \operatorname{Ker}(H^* + \mathrm{i}) \oplus \oplus \operatorname{Ker}(H^* - \mathrm{i})$; potom z první von Neumannovy formule plyne $\dim \mathcal{G} = = \dim \tilde{D}/D = 2n$ (viz cvičení 1.6). Stačí tedy ukázat, že ve faktorovém prostoru $\tilde{D}/D$ jsou alespoň dva lineárně nezávislé vektory. Uvažujme třídy ekvivalence $\tilde{\varphi}_r$ odpovídající funkcím $\varphi_r \in \tilde{D}$ splňujícím podmínky (13) a předpokládejme, že $\beta_0\tilde{\varphi}_0 + \beta_1\tilde{\varphi}_1 = 0$, tj. existuje $\psi \in D$, pro něž $\beta_0\varphi_0 + \beta_1\varphi_1 = \psi$. Podle tvrzení (a) platí $\psi(a) = \psi'(a) = 0$, což spolu s podmínkami (13) implikuje $\beta_0 = \beta_1 = 0$, takže třídy $\tilde{\varphi}_0$ a $\tilde{\varphi}_1$ jsou lineárně nezávislé. ■

8.5.10 Důsledek: Operátor H generovaný singulárním diferenciálním výrazem s jedním regulárním koncem nemá žádné vlastní hodnoty.

Důkaz: Ze vztahu $H\psi = \lambda\psi$ plyne, že ψ je řešením zobecněné diferenciální rovnice $l[\psi] = \lambda\psi$ s okrajovými podmínkami $\psi(a) = \psi'(a) = 0$, a podle věty 2 platí $\psi = 0$. ■

Seznámíme se nyní s tzv. *metodou rozštěpení*, která umožňuje převést vyšetřování některých vlastností obecných singulárních diferenciálních operátorů na studium dvojice diferenciálních operátorů, z nichž každý má nejvýše jeden singulární konec. Mějme singulární diferenciální výraz l daný vztahem (1) na intervalu (a, b); zvolíme libovolné $c \in (a, b)$ a uvažujme l na intervalech $J_1 := (a, c)$, resp. $J_2 := (c, b)$. Pro $r = 1, 2$ nechť $\dot{H}_r$ je symetrický operátor na $L^2(J_r)$ s definičním oborem (9). Potom je zřejmé, že direktní součet $\dot{H}_1 \oplus \dot{H}$ je částí operátoru $\dot{H}$.[1] Operátor $\dot{H}_1 \oplus \dot{H}_2$ je symetrický a pro jeho uzávěr platí $\overline{\dot{H}_1 \oplus \dot{H}_2} = \mathrm{H}_1 \oplus \mathrm{H}_2$, kde $H_r := \overline{\dot{H}_r}$ (viz komentář k § 7.4); dále z inkluze $\dot{H}_1 \oplus \dot{H}_2 \subset \dot{H}$ plyne $H_1 \oplus H_2 \subset H$. Direktní součet $H_1 \oplus H_2$ se nazývá *rozštěpením operátoru H*.

Ukážeme, jak pomocí $H_1 \oplus H_2$ lze určit indexy defektu operátoru H, známe-li $n_\pm(H_r)$ pro $r = 1, 2$. Vyjdeme přitom ze vztahu

$$\dim (D_H/D(H_1 \oplus H_2)) = 2\,.$$

---

[1]) Striktně vzato platí $V(\dot{H}_1 \oplus \dot{H}_2)\,V^{-1} \subset \dot{H}$, kde V je přirozený izomorfismus Hilbertových prostorů $L^2(a, c) \oplus L^2(c, b)$ a $L^2(a, b)$ (viz příklad 4.5.5).

K jeho ověření užijeme tvrzení 9, z nějž vyplývá, že pro každé $\psi \in D(H_1 \oplus H_2)$ platí $\psi(c) = \psi'(c) = 0$. Dále tvrdíme, že existují funkce $\varphi_0, \varphi_1 \in D_H$ takové, že pro $r, s = 0,1$ platí $\varphi_s^{(r)}(c) = \delta_{rs}$. Skutečně, stačí vzít uzavřený interval $[c_1, c_2] \subset \subset (a, b)$ obsahující bod c a sestrojit funkce $\eta_r \in ac(a, c]$ splňující $\eta_r(x) = 0$ pro $x \in (a, c_1]$, $\eta_r^{(s)}(c) = \delta_{rs}$ a $l[\eta_r] \in L^2(a, c)$ (viz cvičení 14). Analogicky sestrojíme funkce ϑ_r na $[c, b)$; hledané funkce φ_r jsou pak dány vztahy $\varphi_r(x) := \eta_r(x)$ pro $x \in (a, c]$ a $\varphi_r(x) := \vartheta_r(x)$ pro $x \in [c, b)$. Označíme-li $\mathscr{G} := \{\varphi_0, \varphi_1\}_{\text{lin}}$, platí $\dim \mathscr{G} = 2$ (neboť wronskián $W(\varphi_0, \varphi_2) = 1$ v bodě $x = c$), $\mathscr{G} \cap D(H_1 \oplus H_2) = \{0\}$ a $\mathscr{G} \oplus D(H_1 \oplus H_2) \subset D_H$. K dokončení důkazu zbývá ověřit, že $\mathscr{G} \oplus D(H_1 \oplus H_2) = D_H$. Nechť $\varphi \in D_H$ a $\psi := \varphi - \varphi(c)\,\varphi_0 - \varphi'(c)\,\varphi_1$, takže $\psi(c) = \psi'(c) = 0$, a k tomu, aby $\psi \in D(H_1 \oplus H_2)$, je podle tvrzení 9 třeba ověřit, že $[\psi, \eta_1]_a = 0$ pro všechna $\eta_1 \in \tilde{D}_1$ a $[\psi, \eta_2]_b = 0$ pro všechna $\eta_2 \in \tilde{D}_2$. Na základě výsledků cvičení 14 lze dané $\eta_1 \in \tilde{D}_1$ rozšířit na funkci $\eta \in \tilde{D}$, která je nulová v okolí bodu b. Potom $[\varphi, \eta]_b = 0$ a pomocí (11) dostaneme $0 = [\varphi, \eta]_a = [\varphi, \eta_1]_a$; užijeme-li ještě toho, že φ_0 a φ_1 jsou nulové v okolí bodu a, vidíme, že platí $[\psi, \eta_1]_a = 0$. Podmínka $[\psi, \eta_2]_b = 0$ se ověří analogicky. Vzhledem k tomu, že H i $H_1 \oplus H_2$ jsou uzavřené symetrické operátory, plyne ze vztahu, který jsme právě dokázali, formulí (8.2.5), (8.3.1c) a cvičení 10 a 17 rovnost

$$n_\pm(H) = n_\pm(H_1 \oplus H_2) - 2 = n_\pm(H_1) + n_\pm(H_2) - 2\,, \tag{14}$$

což je hledané vyjádření indexů defektu operátoru H pomocí $n_\pm(H_r)$, $r = 1, 2$. Dodejme ještě, že díky tomu, že c je regulární konec pro H_1 i H_2, platí nerovnosti $1 \leqq n_\pm(H_r) \leqq 2$, takže např. $n_\pm(H) = 0$ právě tehdy, když $n_\pm(H_r) = 1$ pro $r = 1, 2$.

Indexy defektu operátoru H generovaného singulárním diferenciálním výrazem není většinou možné stanovit přímým postupem užitým v příkladu 8. Existují však různé nepřímé metody umožňující určit indexy defektu z chování funkce V. Přitom ze vztahu (14) plyne, že stačí uvažovat jen singulární diferenciální výrazy s jedním regulárním koncem; ty mají následující pozoruhodnou vlastnost.

8.5.11 Věta: Pro singulární diferenciální výraz (1) na intervalu (a, b) s jedním regulárním koncem jsou následující podmínky ekvivalentní:

(a) operátor H má indexy defektu $(2, 2)$;

(b) pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ patří každé řešení rovnice $l[\psi] = \lambda\psi$ do $L^2(a, b)$;

(c) existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že všechna řešení rovnice $l[\psi] = \lambda\psi$ patří do $L^2(a, b)$.

Důkaz: (a) $\Rightarrow$ (b): Pro $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ je dokazovaná implikace zřejmá (viz větu 8.1.2), stačí tedy uvažovat $\lambda \in \mathbb{R}$. Nechť funkce $\varphi_1, \varphi_2 \in \tilde{D}$ tvoří bázi v podprostoru $\operatorname{Ker}(H^* - i)$; jejich wronskián je konstantní (viz cvičení 15) a vhodnou normalizací lze docílit toho, že $W \equiv \varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2 = 1$. Uvažujme libovolné řešení rovnice $l[\psi] = \lambda\psi$ a položme: $g := (\lambda - i)\,\psi$, takže rovnici lze zapsat ve tvaru $l[\psi] - i\psi = g$. Předpokládejme pro určitost, že a je regulární konec. Potom $\psi \in ac[a, b)$, a funkce g je tudíž lokálně integrabilní v $[a, b)$. Z výsledků cvičení

15 a věty 2 plyne, že pro s. v. $x \in (a, b)$ a libovolná $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ splňuje ψ rovnici

$$\psi(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + (\lambda - \mathrm{i}) \int_a^x [\varphi_1(x) \varphi_2(y) - \varphi_2(x) \varphi_1(y)] \psi(y)\, \mathrm{d}y .$$

Označíme-li $\varphi := |\varphi_1| + |\varphi_2|$ a $m := \max \{|\alpha_1|, |\alpha_2|\}$, získáme nerovnost

$$|\psi(x)|^2 \leqq \left[m\varphi(x) + |\lambda - \mathrm{i}|\, \varphi(x) \int_a^x \varphi(y)\, |\psi(y)|\, \mathrm{d}y \right]^2 \leqq$$

$$\leqq 2(m\varphi(x))^2 + 2 \left[|\lambda - \mathrm{i}|\, \varphi(x) \int_a^x \varphi(y)\, |\psi(y)|\, \mathrm{d}y \right]^2 . \qquad (15a)$$

Nyní užijeme podmínek $\varphi \in L^2(a, b)$ a $\psi \in ac[a, b)$; druhá z nich implikuje $\psi \in L^2(a, x)$, a označíme-li $M := 2|\lambda - \mathrm{i}|^2 \int_a^b \varphi(x)^2\, \mathrm{d}x$, dostaneme z (15a) pomocí Hölderovy nerovnosti

$$|\psi(x)|^2 \leqq 2(m\varphi(x))^2 + M\varphi(x)^2 \int_a^x |\psi(y)|^2\, \mathrm{d}y . \qquad (15b)$$

Dále díky absolutní spojitosti integrálu existuje $c \in (a, b)$ takové, že $\int_c^b \varphi(x)^2\, \mathrm{d}x < 1/(2M)$; potom pro všechna $z \in (c, b)$ platí

$$\int_c^z \left[\varphi(x)^2 \int_a^x |\psi(y)|^2\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \leqq \int_c^z \varphi(x)^2\, \mathrm{d}x \int_a^z |\psi(y)|^2\, \mathrm{d}y \leqq \frac{1}{2M} \int_a^z |\psi(y)|^2\, \mathrm{d}y .$$

Nerovnost (15b) nyní dává

$$\int_c^z |\psi(x)|^2\, \mathrm{d}x \leqq 2m^2 \int_c^z \varphi(x)^2\, \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_a^z |\psi(x)|^2\, \mathrm{d}x ,$$

takže

$$\int_c^z |\psi(x)|^2\, \mathrm{d}x \leqq 4m^2 \int_c^b \varphi(x)^2\, \mathrm{d}x + \int_a^c |\psi(x)|^2\, \mathrm{d}x .$$

Z Fatouovy věty potom plyne $\psi \in L^2(c, b)$, a protože $\psi \in ac[a, b)$, platí i $\psi \in L^2(a, b)$.

Jelikož implikace (b) $\Rightarrow$ (c) je jasná, zbývá dokázat (c) $\Rightarrow$ (a). Díky tomu, že operátor H nemá vlastní hodnoty, můžeme užít tvrzení 8.3.5, podle nějž $\operatorname{def}(H - \lambda) \leqq n_\pm(H)$. Podle předpokladu je $\operatorname{def}(H - \lambda) = 2$ a dále indexy defektu operátoru H nemohou být větší než 2; odtud $n_\pm(H) = 2$. ■

8.5.12 Poznámka: Kombinací věty 11 a tvrzení 9 dostáváme tzv. *Weylovu alternativu* pro řešení rovnice $l[\psi] = \lambda\psi$, kde l je singulární diferenciální výraz (1) na intervalu (a, b) s jedním regulárním koncem. Nastává *právě jedna* z následujících možností:

(i) pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ patří každé řešení do $L^2(a, b)$,
(ii) pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ existuje alespoň jedno řešení, které nepatří do $L^2(a, b)$.
Navíc v případě (ii) existuje pro každé $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ právě jedno kvadraticky integrabilní řešení, které je určeno jednoznačně až na multiplikativní konstantu.

Možnost (i) odpovídá indexům defektu (2, 2) a nazývá se případem *limitní kružnice*, zatímco (ii) je tzv. případ *limitního bodu* – odpovídající indexy defektu jsou (1, 1). Tuto terminologii zavedl H. Weyl, který vytvořil základy teorie singulárních diferenciálních operátorů.

Na závěr uvedeme jednoduchou ilustraci toho, jak je možno určit indexy defektu operátoru H z chování funkce V.

8.5.13 Tvrzení: Nechť l je diferenciální výraz (1) na $J = (a, \infty)$, resp. $J = (-\infty, b)$ takový, že a, resp. b je regulární konec a funkce V je omezená zdola na J. Potom odpovídající operátor H má indexy defektu (1, 1).
Důkaz: Podle věty 11 stačí ověřit, že rovnice $l[\psi] = 0$ má alespoň jedno řešení, které nepatří do $L^2(J)$. Takové řešení existuje, jestliže z podmínek $l[\psi] = 0$ a $\psi \in L^2(J)$ plyne $\psi' \in L^2(J)$: potom totiž předpoklad existence lineárně nezávislých kvadraticky integrabilních řešení ψ_1, ψ_2 rovnice $l[\psi] = 0$ implikuje, že funkce $W \equiv \psi_1\psi_2' - \psi_1'\psi_2$ je na J rovna nenulové konstantě a současně $W \in L^1(J)$, což není možné vzhledem k neomezenosti intervalu J.

Nechť tedy $l[\psi] = 0$ pro nějaké nenulové $\psi \in L^2(J)$; díky tomu, že V je reálná funkce, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že funkce ψ je rovněž reálná. Z podmínky $l[\psi] = 0$ dostáváme $V\psi^2 = \psi''\psi$ a odtud pro každé $x \in (a, \infty)$ plyne

$$\psi'(x)\,\psi(x) \geqq \psi'(a)\,\psi(a) + \int_a^x \psi'(y)^2\,dy + V_0 \int_a^x \psi(y)^2\,dy,$$

kde $V_0 := \inf\{V(x) : a < x < \infty\}$. Předpoklad $\psi' \notin L^2(a, \infty)$ tedy implikuje $\lim_{x \to \infty} \psi'(x)\,\psi(x) = +\infty$, takže funkce $x \mapsto \psi(x)^2$ roste pro $x \to \infty$, a to je ve sporu s podmínkou $\psi \in L^2(a, \infty)$. Podobně pro $J = (-\infty, b)$ z předpokladu $\psi' \notin L^2(-\infty, b)$ plyne $\lim_{x \to -\infty} \psi'(x)\,\psi(x) = -\infty$. ■

8.5.14 Důsledek: Jestliže l je diferenciální výraz (1) na $\mathbb{R}$ takový, že funkce V je omezená zdola, potom $n_\pm(H) = 0$, tj. operátor H je samosdružený.
Důkaz: Diferenciální výraz l na $(0, \infty)$, resp. $(-\infty, 0)$ generuje operátory H_+, resp. H_-, které mají indexy defektu (1, 1); potom ze vztahu (14) plyne $n_\pm(H) = n_\pm(H_+) + n_\pm(H_-) - 2 = 0$. ■

8.5.15 Poznámka: Tvrzení 13 platí i za značně slabších předpokladů o funkci V: stačí, aby pro všechna dosti velká x platilo $V(x) > -M(x)$, kde M je kladná neklesající diferencovatelná funkce na (a, ∞) taková, že funkce $M'M^{-3/2}$ je omeze-

264 ná shora a $\int_a^\infty M^{-1/2}\,dx = +\infty$. Důkaz lze najít např. v [[Nai 2]], § 23 nebo pro nepodstatně odlišné předpoklady o funkci M v [[DS 2]], § VIII.6.

8.6 SAMOSDRUŽENÁ ROZŠÍŘENÍ DIFERENCIÁLNÍCH OPERÁTORŮ

V tomto paragrafu se budeme zabývat samosdruženými rozšířeními uzavřených symetrických operátorů H generovaných diferenciálními výrazy (8.5.1). Vzhledem k tomu, že maximální operátor generovaný daným diferenciálním výrazem je $\tilde{H}$, musí každý samosdružený operátor H' takový, že $H'\psi = l[\psi]$ pro všechna $\psi \in D_{H'}$, být zúžením operátoru $\tilde{H}$; potom pomocí (8.5.10b) dostaneme $\tilde{H}^* = H \subset H'$. Naopak z obecných vlastností symetrických operátorů plyne, že každé samosdružené rozšíření H' operátoru H splňuje $H' \subset H^* = \tilde{H}$ tj. pro každé $\psi \in D(H')$ platí $H'\psi = l[\psi]$. Množina všech *samosdružených operátorů, které lze sestrojit pomocí diferenciálního výrazu l je tedy totožná s množinou všech samosdružených rozšíření příslušného operátoru H.*

Naším cílem je najít explicitní charakteristiku všech prvků této množiny. Východiskem je následující kritérium.

8.6.1 Tvrzení: Pro daný podprostor D' splňující $D \subset D' \subset \tilde{D}$ je operátor $H' := \tilde{H} \upharpoonright D'$ samosdružený právě tehdy, když *současně*

(a) pro všechna $\varphi, \psi \in D'$ platí

$$[\varphi, \psi]_b - [\varphi, \psi]_a = 0\,, \tag{1}$$

(b) jestliže nějaké $\varphi \in \tilde{D}$ splňuje podmínku (1) pro všechna $\psi \in D'$, potom $\varphi \in D'$.

Důkaz: Pomocí (8.5.3) lze tvrzení (a) přepsat ve tvaru $(\varphi, H'\psi) = (H'\varphi, \psi)$ a podobně (b) je ekvivalentní rovnosti $(\varphi, H'\psi) = (\tilde{H}\varphi, \psi)$. Dokazované tvrzení je potom přímým důsledkem definic symetrického a samosdruženého operátoru. ■

Nechť indexy defektu operátoru H jsou (n, n), $1 \leqq n \leqq 2$, a nechť vektory $\eta_j \in \tilde{D}$, $1 \leqq j \leqq n$, tvoří ortonormální bázi v podprostoru $\mathrm{Ker}\,(H^* - \mathrm{i})$. Potom platí $l[\bar{\eta}_j] = -\mathrm{i}\bar{\eta}_j$, takže $\{\bar{\eta}_j\}_{j=1}^n$ je ortonormální báze v $\mathrm{Ker}\,(H^* + \mathrm{i})$. Podle poznámky 8.3.3b existuje bijekce $u \mapsto H_u$ množiny $U(n)$ všech unitárních matic $n \times n$ na množinu všech samosdružených rozšíření operátoru H, přičemž formule (8.3.3), kterými je tato bijekce definována, lze nyní zapsat ve tvaru $H_u\varphi = l[\varphi]$ pro $\varphi \in D(H_u)$, kde

$$D(H_u) \equiv D_u = \left\{\varphi \in \tilde{D}:\ \varphi = \psi + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \left(\eta_k - \sum_{j=1}^{n} u_{jk}\bar{\eta}_j\right),\ \psi \in D,\ \gamma_k \in \mathbb{C}\right\}. \tag{2}$$

8.6.2 Příklad: Vyšetříme některá samosdružená rozšíření operátoru T generovaného regulárním diferenciálním výrazem $-\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ na konečném intervalu $(0, b)$; pro zjednodušení formulí budeme uvažovat případ $b = \sqrt{2}\pi$. Indexy defektu jsou

(2, 2) a označíme-li $c := 2^{1/4}/(e^{2\pi} - 1)^{1/2}$, $\alpha := (1 - i)/\sqrt{2}$, lze funkce η_1, η_2 vystupující ve formuli (2) zvolit takto

$$\eta_1(x) = c \exp(\alpha x), \qquad \eta_2(x) = c \exp(\pi - \alpha x). \tag{3}$$

Pro každé komplexní Θ splňující $|\Theta| = 1$ je

$$u_\Theta \equiv \frac{1 + i}{2} \begin{pmatrix} -i & \bar{\Theta} \\ \Theta & -i \end{pmatrix}$$

unitární matice, jejíž vlastní hodnoty jsou $1, -i$. Každá z matic u_Θ je tedy unitárně ekvivalentní matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, a proto všechna u_Θ jsou navzájem unitárně ekvivalentní. Definiční obor D_Θ operátoru $T_{u_\Theta} \equiv T_\Theta$, který odpovídá matici u_Θ podle (2), je možno zadat okrajovými podmínkami (jak uvidíme dále, existuje tato možnost v regulárním případě vždy – viz větu 4). Abychom je našli, vezmeme libovolnou funkci $\varphi \in D_\Theta$, tj.

$$\varphi = \psi + \gamma_1\left(\eta_1 - \frac{1-i}{2}\bar{\eta}_1 - \frac{1+i}{2}\Theta\bar{\eta}_2\right) + \gamma_2\left(\eta_2 - \frac{1+i}{2}\bar{\Theta}\bar{\eta}_1 - \frac{1-i}{2}\bar{\eta}_2\right) \tag{4}$$

a vypočteme $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\varphi(b)$ a $\varphi'(b)$; po dosazení $\psi(0) = \psi'(0) = \psi(b) = \psi'(b) = 0$ a vztahů (3) dostáváme

$$\begin{aligned}
\varphi(0) &= \frac{1+i}{2} c[\gamma_1(1 - \Theta e^\pi) + \gamma_2(e^\pi - \bar{\Theta})], \\
\varphi'(0) &= \frac{1-i}{2} \alpha c[\gamma_1(1 - \Theta e^\pi) - \gamma_2(e^\pi - \bar{\Theta})], \\
\varphi(b) &= -\frac{1+i}{2} c[\gamma_1(e^\pi - \Theta) + \gamma_2(1 - e^\pi\bar{\Theta})], \\
\varphi'(b) &= -\frac{1-i}{2} \alpha c[\gamma_1(e^\pi - \Theta) - \gamma_2(1 - e^\pi\bar{\Theta})],
\end{aligned}$$

a odtud plyne

$$\varphi(b) = \vartheta\,\varphi(0), \qquad \varphi'(b) = \vartheta\,\varphi'(0). \tag{5}$$

Zde jsme označili $\vartheta := (e^\pi - \Theta)/(\Theta e^\pi - 1)$, a protože $|\Theta| = 1$, platí $|\vartheta| = 1$. Každé $\varphi \in D_\Theta$ tedy splňuje okrajové podmínky (5). Ukážeme, že tyto podmínky jsou také postačující pro to, aby dané $\varphi \in \tilde{D}_T$ patřilo do D_Θ. Vzhledem k tomu, že funkce $\eta_1, \eta_2, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ tvoří bázi v podprostoru $\mathrm{Ker}\,(H^* - i) \oplus \mathrm{Ker}\,(H^* + i)$, lze podle první von Neumannovy formule každé $\varphi \in \tilde{D}_T$ jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$\varphi = \psi + \gamma_1\eta_1 + \gamma_2\eta_2 + \gamma_3\bar{\eta}_1 + \gamma_4\bar{\eta}_2$, kde $\psi \in D_T$. Jestliže φ splňuje podmínky (5), potom pomocí (3) snadno zjistíme, že má tvar (4), tj. $\varphi \in D_\Theta$. Platí tedy $D_\Theta = \{\varphi \in \tilde{D}_T : \varphi(b) = \vartheta\,\varphi(0),\ \varphi'(b) = \vartheta\,\varphi'(0)\}$ a odtud je vidět, že $T_\Theta = P_\vartheta'^2$ (viz příklad 7.2.7).

Nalezené vyjádření podprostoru D_Θ pomocí okrajových podmínek lze užít např. k určení spektra operátoru T_Θ; ukážeme, že pro všechny uvažované hodnoty parametru Θ je $\sigma(T_\Theta)$ čistě bodové. Úloha najít vlastní hodnoty se redukuje na řešení diferenciální rovnice $-\varphi'' = \lambda\varphi$ splňující okrajové podmínky (5). Díky tomu, že operátor T_Θ je roven kvadrátu samosdruženého operátoru P_ϑ', nemá T_Θ žádné záporné vlastní hodnoty. Nula je vlastní hodnotou jen pro $\vartheta = 1$, tj. $\Theta = 1$. Pro $\lambda > 0$ je obecným řešením rovnice $-\varphi'' = \lambda\varphi$ funkce $x \mapsto \gamma\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}x} + \delta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}x}$, a označíme-li $e(\lambda) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\sqrt{2\lambda}}$, vedou okrajové podmínky (5) na soustavu

$$\begin{aligned} \gamma(e(\lambda) - \vartheta) + \delta(\overline{e(\lambda)} - \vartheta) &= 0\,, \\ \gamma(e(\lambda) - \vartheta) - \delta(\overline{e(\lambda)} - \vartheta) &= 0\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Je výhodné zavést místo ϑ reálný parametr $d \in [0, 1)$ vztahem $d := (2\pi)^{-1} \arg\vartheta$, který spolu s rovností $\Theta = (\mathrm{e}^\pi + \vartheta)/(\vartheta\,\mathrm{e}^\pi + 1)$ definuje bijekci $d \mapsto \Theta(d)$ intervalu $[0, 1)$ na jednotkovou kružnici v $\mathbb{C}$ se středem v počátku. Soustava (6) má netriviální řešení právě tehdy, když $\lambda = \lambda_k \equiv 2(k + d)^2$, $k = 0, \pm 1, \ldots$. Vlastní hodnotě λ_k přísluší normalizovaná vlastní funkce $x \mapsto \varphi_k(x) = b^{-1/2} \exp(\mathrm{i}\sqrt{2}(k + d)\,x)$. Díky tomu, že tyto funkce tvoří pro každé d ortonormální bázi prostoru $L^2(0, b)$, má každý z operátorů T_Θ čistě bodové spektrum, a protože množina vlastních hodnot nemá hromadné body, platí

$$\sigma(T_\Theta) = \sigma_{\mathrm{p}}(T_\Theta) = \{2(k + d)^2 : k = 0, \pm 1, \ldots\}\,.$$

Najdeme dále násobnosti vlastních hodnot λ_k. Jestliže pro dané d z podmínky $\lambda_k = \lambda_l$ plyne $k = l$, což zjevně nastává pro $d \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$, tj. pro $\operatorname{Im}\Theta \neq 0$, má každá vlastní hodnota jednotkovou násobnost. Pro $d = 0$ má vlastní hodnota $\lambda_0 = 0$ jednotkovou násobnost, zatímco násobnost všech ostatních vlastních hodnot je rovna 2; totéž se týká všech vlastních hodnot pro $d = \frac{1}{2}$.

Na závěr vyšetříme následující otázku: víme, že všechny matice $u_{\Theta(d)}$ jsou unitárně ekvivalentní; plyne z toho unitární ekvivalence odpovídajících operátorů $T_{\Theta(d)}$? Snadno zjistíme, že pro každou dvojici $d_1 \neq d_2$ ležící v intervalu $(0, \frac{1}{2})$ platí $\sigma(T_{\Theta(d_1)}) \neq \sigma(T_{\Theta(d_2)})$; operátory $T_{\Theta(d_1)}$ a $T_{\Theta(d_2)}$ proto nejsou unitárně ekvivalentní (viz tvrzení 7.4.10). Naproti tomu pro každé $d \in (0, 1)$ platí $\sigma(T_{\Theta(d)}) = \sigma(T_{\Theta(1-d)})$; dále pro $d \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ mají všechny vlastní hodnoty jednotkovou násobnost a odtud vyplývá unitární ekvivalence operátorů $T_{\Theta(d)}$ a $T_{\Theta(1-d)}$ – viz komentář k § 7.4 o unitárních invariantech.

Tento příklad názorně ilustruje, že pro konkrétní výpočty není charakteristika definičních oborů samosdružených rozšíření operátoru H pomocí formule (2) příliš vhodná. Ukážeme, že existuje alternativní charakteristika pomocí vztahů, které mají analogický tvar jako (1). Budeme k tomu potřebovat následující pojem: pro daný podprostor L vektorového prostoru V nazýváme vektory $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ *lineárně nezávislými modulo* L, jestliže žádná netriviální lineární kombinace těchto vektorů nepatří do L, tj. z podmínky $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \in L$ plyne $\alpha_1 = \ldots$ $\ldots = \alpha_n = 0$.

8.6.3 Věta: Nechť indexy defektu operátoru H jsou (n, n), kde $1 \leqq n \leqq 2$.
(a) Pro každou n-tici funkcí $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \tilde{D}$, které jsou lineárně nezávislé modulo D a splňují pro $j, k = 1, \ldots, n$ podmínky

$$[\omega_k, \omega_j]_b - [\omega_k, \omega_j]_a = 0\,, \tag{7}$$

tvoří funkce $\varphi \in \tilde{D}$ vyhovující vztahům

$$[\omega_k, \varphi]_b - [\omega_k, \varphi]_a = 0\,, \qquad k = 1, \ldots, n \tag{8}$$

definiční obor nějakého samosdruženého rozšíření operátoru H.
(b) Způsobem popsaným v tvrzení (a) získáme všechna samosdružená rozšíření operátoru H; jinými slovy, jestliže D' je podprostor takový, že $D \subset D' \subset \tilde{D}$ a operátor $\tilde{H} \restriction D'$ je samosdružený, potom existují funkce $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \tilde{D}$, které jsou lineárně nezávislé modulo D, splňují (7) a

$$D' = \{\varphi \in \tilde{D}\colon [\omega_k, \varphi]_b - [\omega_k, \varphi]_a = 0,\ k = 1, \ldots, n\}\,.$$

Důkaz: (a) Nechť $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \tilde{D}$ jsou lineárně nezávislé modulo D a splňují (7). Podle první von Neumannovy formule platí

$$\tilde{D} = D \oplus \mathcal{G}\,, \qquad \text{kde} \quad \mathcal{G} := \operatorname{Ker}(H^* - \mathrm{i}) \oplus \operatorname{Ker}(H^* + \mathrm{i})\,; \tag{9}$$

každé ω_k lze tedy zapsat ve tvaru $\omega_k = \psi_k + \eta_k$, kde $\psi_k \in D$ a $\eta_k \in \mathcal{G}$. Je zřejmé, že $\eta_1, \ldots, \eta_n$ jsou rovněž lineárně nezávislé modulo D. Pomocí (8.5.11) dále zjistíme, že podmínky (7) platí právě tehdy, když

$$[\eta_k, \eta_j]_b - [\eta_k, \eta_j]_a = 0\,, \qquad j, k = 1, \ldots, n\,, \tag{10a}$$

resp. že $\varphi \in \tilde{D}$ splňuje podmínku (8) právě tehdy, když pro $k = 1, \ldots, n$ platí

$$[\eta_k, \varphi]_b - [\eta_k, \varphi]_a = 0\,. \tag{10b}$$

Ukážeme, že podprostor $D_\omega := \{\varphi \in \tilde{D}\colon [\omega_k, \varphi]_b - [\omega_k, \varphi]_a = 0,\ k = 1, \ldots, n\}$ je totožný s $D' := D \oplus \{\eta_1, \ldots, \eta_n\}_{\text{lin}}$. Ze vztahů (8.5.11) a (10a) je vidět, že každé $\varphi \in D'$ splňuje (10b), tj. také (8), a proto $D' \subset D_\omega$. K ověření opačné inkluze doplníme množinu $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ na bázi $\{\eta_r\}_{r=1}^{2n}$ v $\mathcal{G}$. Podle (9) ke každému $\varphi \in D_\omega$ existuje $\psi \in D$ a komplexní čísla $\beta_1, \ldots, \beta_{2n}$ tak, že $\varphi = \psi + \sum_{r=1}^{2n} \beta_r \eta_r$. Po dosazení do (10b) dostaneme s přihlédnutím k (8.5.11) a (10a):

$$\sum_{r=n+1}^{2n} \beta_r([\eta_k, \eta_r]_b - [\eta_k, \eta_r]_a) = 0\,, \qquad k = 1, \ldots, n\,. \tag{10c}$$

Této soustavě rovnic vyhovují jen $\beta_{n+1} = \ldots = \beta_{2n} = 0$ (viz cvičení 19), a proto $\varphi \in D'$. Nyní stačí ověřit, že D' splňuje obě podmínky tvrzení 1. První z nich je přímým důsledkem vztahů (8.5.11) a (10a). Nechť dále pro nějaké $\varphi \in \tilde{D}$ a všechna $\eta \in D'$ platí $[\eta, \varphi]_b - [\eta, \varphi]_a = 0$. Díky tomu, že η_k patří do D', lze dosadit $\eta = \eta_k$ pro $k = 1, \ldots, n$; funkce φ tedy splňuje vztah (10b), tj. také (8) a proto $\varphi \in D_\omega = D'$.
(b) Podle formule (8.3.1c) a výsledků cvičení 10 platí $D' = D \oplus L$, kde $L \subset \mathscr{G}$ a $\dim L = n$. Nechť $\{\omega_k\}_{k=1}^n$ je báze v L, takže funkce $\omega_1, \ldots, \omega_n$ jsou lineárně nezávislé modulo D. Jelikož $\omega_k \in D'$, plynou z podmínky (1) vztahy (7), resp. (8) pro každé $\varphi \in D'$. K dokončení důkazu zbývá ověřit, že každé $\varphi \in \tilde{D}$ splňující (8) patří do D'. K tomu účelu se opět množina $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ doplní na bázi v $\mathscr{G}$ a stejně jako v první části důkazu se zjistí, že $\varphi = \psi + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \omega_k$, tj. $\varphi \in D'$. ■

Nevýhodou podmínek (8) je nutnost ověřovat lineární nezávislost funkcí $\omega_1, \ldots, \omega_n$ modulo D; v tom se projevuje závislost uvedených podmínek na výchozím diferenciálním výrazu l. Ukážeme, že v regulárním případě tyto potíže odpadají.

8.6.4 Věta: Jestliže l je regulární diferenciální výraz (8.5.1) na intervalu (a, b), potom
(a) každá dvojice lineárně nezávislých funkcionálů f_1, f_2 na $\tilde{D}$

$$f_k(\varphi) := \alpha_{k1}\, \varphi(a) - \alpha_{k2}\, \varphi'(a) - \beta_{k1}\, \varphi(b) + \beta_{k2}\, \varphi'(b) \tag{11a}$$

takových, že komplexní čísla α_{kj}, β_{kj} splňují pro $k, j = 1, 2$ rovnosti

$$\alpha_{k1}\bar{\alpha}_{j2} - \alpha_{k2}\bar{\alpha}_{j1} = \beta_{k1}\bar{\beta}_{j2} - \beta_{k2}\bar{\beta}_{j1}\,, \tag{11b}$$

určuje samosdružené rozšíření $H(f_1, f_2)$ operátoru H s definičním oborem

$$D(f_1, f_2) := \{\varphi \in \tilde{D}\colon f_k(\varphi) = 0,\ k = 1, 2\}\,; \tag{12}$$

(b) ke každému samosdruženému rozšíření $H' \supset H$ existují lineárně nezávislé funkcionály f_1, f_2 na $\tilde{D}$ splňující (11a, b) takové, že $D(H') = D(f_1, f_2)$.
Důkaz: Podle lemmatu 8.5.3 ke každé dvojici funkcionálů f_1, f_2 na $\tilde{D}$ tvaru (11a) existují funkce $\omega_1, \omega_2 \in \tilde{D}$ takové, že

$$\omega_k^{(2-j)}(a) = \bar{\alpha}_{kj}\,, \qquad \omega_k^{(2-j)}(b) = \bar{\beta}_{kj}\,. \tag{13a}$$

Pro všechna $\varphi \in \tilde{D}$ potom platí

$$f_k(\varphi) = [\omega_k, \varphi]_b - [\omega_k, \varphi]_a \tag{13b}$$

a z (11b) plyne, že ω_1, ω_2 splňují vztahy (7). Naopak, pro daná ω_1, ω_2 splňující (7) určují rovnosti (13a) a (11a) funkcionály f_1, f_2 takové, že platí (11b). Dále ze vztahů (13b) a (8.5.11) plyne, že $\gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \in D$ platí právě tehdy, když $\bar{\gamma} f_1(\varphi) + \bar{\delta} f_2(\varphi) = 0$ pro všechna $\varphi \in \tilde{D}$; lineární nezávislost funkcionálů f_1, f_2 tedy implikuje, že odpovídající funkce ω_1, ω_2 jsou lineárně nezávislé modulo D a naopak. Obě dokazovaná tvrzení jsou nyní bezprostředním důsledkem věty 3. ■

8.6.5 Poznámka: Jestliže funkcionál (11a) je nulový, tj. $f_k(\varphi) = 0$ pro všechna $\varphi \in \tilde{D}$, plyne ze vztahů (13b) a (8.5.11), že odpovídající funkce ω_k patří do D, takže pro $r = 0, 1$ platí $\omega_k^{(r)}(b) = \omega_k^{(r)}(a) = 0$ (viz (8.5.4b)). Užijeme-li ještě (13a), vidíme, že $f_k = 0$ právě tehdy, když $\alpha_{k1} = \alpha_{k2} = \beta_{k1} = \beta_{k2} = 0$. Odtud vyplývá, že prostor všech lineárních funkcionálů na $\tilde{D}$ tvaru (11a) je algebraicky izomorfní prostoru $\mathbb{C}^4$; funkcionály f_1, f_2 jsou proto lineárně nezávislé právě tehdy, když $[\alpha_{11}, -\alpha_{12}, -\beta_{11}, \beta_{12}]$ a $[\alpha_{21}, -\alpha_{22}, -\beta_{21}, \beta_{22}]$ jsou lineárně nezávislé vektory v $\mathbb{C}^4$.

8.6.6 Příklad: Jestliže v jednom z funkcionálů (11a) vystupují jen veličiny $\varphi(a)$ a $\varphi'(a)$, zatímco ve druhém jen $\varphi(b)$ a $\varphi'(b)$, říkáme, že samosdružené rozšíření $H(f_1, f_2)$ je určeno *separovanými okrajovými podmínkami.* Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že v takovém případě

$$f_1(\varphi) = \alpha_{11}\, \varphi(a) - \alpha_{12}\, \varphi'(a)\,, \qquad f_2(\varphi) = \beta_{21}\, \varphi(b) - \beta_{22}\, \varphi'(b)\,. \quad (14a)$$

Tyto funkcionály jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $|\alpha_{11}| + |\alpha_{12}| > 0$ a $|\beta_{21}| + |\beta_{22}| > 0$, a podmínky (11b) mají nyní tvar $\mathrm{Im}\, \alpha_{11}\bar{\alpha}_{12} = 0$, resp. $\mathrm{Im}\, \beta_{21}\bar{\beta}_{22} = 0$. Uvážíme-li ještě, že v případě separovaných podmínek pro libovolná nenulová $\gamma, \delta \in \mathbb{C}$ platí $H(f_1, f_2) = H(\gamma f_1, \delta f_2)$, vidíme, že lze vždy docílit, aby koeficienty funkcionálů (14a) byly vesměs reálné. Konečně, díky lineární nezávislosti můžeme tyto funkcionály zapsat pomocí dvojice parametrů $\xi, \eta \in [0, \pi)$ v následujícím normalizovaném tvaru: $f_1 = (\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2)^{1/2} \tilde{f}_1$ a $f_2 = (\beta_{21}^2 + \beta_{22}^2)^{1/2} \tilde{f}_2$, kde

$$\tilde{f}_1(\varphi) = \varphi(a) \cos \xi - \varphi'(a) \sin \xi\,, \qquad \tilde{f}_2(\varphi) = \varphi(b) \cos \eta - \varphi'(b) \sin \eta\,. \quad (14b)$$

V podmnožině samosdružených rozšíření odpovídajících separovaným okrajovým podmínkám je tedy každý prvek plně určen dvojicí $[\xi, \eta]$ a lze zavést zkrácené označení $H(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2) \equiv H_{[\xi,\eta]}$. O některých vlastnostech zobrazení $[\xi, \eta] \mapsto H_{[\xi,\eta]}$ pojednává cvičení 20.

Vztahy (8) mají charakter okrajových podmínek nezávislých na diferenciálním výrazu l rovněž v případě, kdy operátor H má indexy defektu (1, 1) a l má jediný singulární konec; budeme pro určitost předpokládat, že koncový bod a je regulární a b singulární.

8.6.7 Věta: Za výše uvedených předpokladů platí:

(a) každé $\xi \in [0, \pi)$ určuje samosdružené rozšíření H_ξ operátoru H s definičním oborem

$$D_\xi := \{\varphi \in \tilde{D}\colon \varphi(a) \cos \xi - \varphi'(a) \sin \xi = 0\}\,; \tag{15}$$

(b) ke každému samosdruženému rozšíření $H' \supset H$ existuje právě jedno $\xi \in [0, \pi)$ takové, že $H' = \tilde{H} \restriction D_\xi$.

Důkaz: Nejprve ukážeme, že pro všechna $\varphi, \eta \in \tilde{D}$ platí

$$[\eta, \varphi]_b \equiv \lim_{x \to b-} [\eta, \varphi]_x = 0\,. \tag{16}$$

Užijeme funkcí $\varphi_0, \varphi_1 \in \tilde{D}$ zkonstruovaných v důkazu tvrzení 8.5.9, které jsou nulové v jistém okolí bodu b a vyhovují pro $r, s = 0, 1$ podmínkám $\varphi_r^{(s)}(a) = \delta_{rs}$. Vzhledem k tomu, že každé $\psi \in D$ splňuje $\psi(a) = \psi'(a) = 0$ (viz (8.5.12)), nepatří φ_0, φ_1 do D; užijeme-li rozkladu (9), dostáváme pro $r = 0, 1$ vztahy $\varphi_r = \psi_r + \eta_r$, kde $\psi_r \in D$ a $\eta_r \in \mathcal{G}$, přičemž $\eta_r^{(s)}(a) = \delta_{rs}$. To znamená, že funkce η_0, η_1 jsou lineárně nezávislé, a tvoří tudíž bázi v podprostoru $\mathcal{G}$ (z předpokladu o indexech defektu totiž plyne $\dim \mathcal{G} = 2$). Libovolné $\varphi \in \tilde{D}$ zapíšeme ve tvaru $\varphi = \psi + \gamma_0 \eta_0 + \gamma_1 \eta_1$, kde $\psi \in D$; nyní pro každé $\eta \in \tilde{D}$ podle (8.5.12) platí $[\eta, \psi]_b = 0$ a z vlastností funkcí φ_r plyne $[\eta, \eta_r]_b = [\eta, \varphi_r]_b = 0$, takže $[\eta, \varphi]_b = 0$.

Obě dokazovaná tvrzení nyní dostaneme z věty 3 pro $n = 1$. Skutečně, k danému $\xi \in [0, \pi)$ existuje funkce $\omega \in \tilde{D}$ taková, že $\omega'(a) = \cos \xi$ a $\omega(a) = \sin \xi$; to znamená, že $\omega \neq 0$, nepatří do D a s přihlédnutím ke vztahu (16) vidíme, že ω splňuje podmínku (7) a že z (15) plyne (8). Naopak, k danému samosdruženému rozšíření $H' \supset H$ s definičním oborem D' existuje nenulová funkce $\omega \in \tilde{D} \setminus D$ taková, že platí (7), tj.

$$\overline{\omega(a)}\, \omega'(a) = \omega(a)\, \overline{\omega'(a)}\,. \tag{17}$$

Dále vzhledem k (16) máme $D' = \{\varphi \in \tilde{D}\colon \overline{\omega'(a)}\, \varphi(a) - \overline{\omega(a)}\, \varphi'(a) = 0\}$, a protože $\omega \notin D$, je $|\omega(a)| + |\omega'(a)| > 0$. Z této podmínky a vztahu (17) již snadno plyne, že $D' = D_\xi$ pro nějaké $\xi \in [0, \pi)$: jestliže $\omega(a) = 0$, lze položit $\xi = 0$; v opačném případě je $\omega'(a)/\omega(a) \in \mathbb{R}$ a položíme $\xi = \operatorname{arcctg}\,(\omega'(a)/\omega(a))$. Konečně k ověření injektivity zobrazení $\xi \mapsto H_\xi$ předpokládejme, že $H_\xi = H_\eta$; nyní podle cvičení 14 existuje $\varphi_0 \in \tilde{D}$ takové, že $\varphi_0(a) = \sin \xi$ a $\varphi_0'(a) = \cos \xi$. Potom $\varphi_0 \in D_\xi$, a tedy také $\varphi_0 \in D_\eta$, takže $0 = \varphi_0(a) \cos \eta - \varphi_0'(a) \sin \eta = \sin(\xi - \eta)$, a protože $\xi - \eta \in (-\pi, \pi)$, platí $\xi = \eta$. ■

8.6.8. Poznámka: Množinu všech samosdružených rozšíření operátoru H splňujícího předpoklady věty 7 lze jednoznačně charakterizovat rovněž pomocí parametru $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, označíme-li $H(c) \equiv \tilde{H} \restriction D(c)$, kde

$$D(c) := \{\varphi \in \tilde{D}:\ \varphi'(a) + c\,\varphi(a) = 0\}$$

pro $c \in \mathbb{R}$ a $D(\infty) := \{\varphi \in \tilde{D}:\ \varphi(a) = 0\}$.

8.6.9 Příklad: Operátor T generovaný diferenciálním výrazem $-\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ na intervalu $(0, \infty)$ splňuje předpoklady věty 7 (srov. s příkladem 8.5.8), přičemž pro příslušný maximální definiční obor platí $\tilde{D}_T = AC^2(0, \infty)$. Množina samosdružených rozšíření operátoru T je tedy tvořena operátory $T(c) := \tilde{T} \restriction D_T(c)$, kde $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Mají tyto operátory nějaké vlastní hodnoty? Rovnice $-\varphi'' = \lambda\varphi$ má řešení patřící do $AC^2(0, \infty)$ jen pro $\lambda < 0$; položíme-li $\lambda = -k^2$, $k > 0$, má toto řešení tvar $\varphi(x) = \alpha\,\mathrm{e}^{-kx}$. Odtud je ihned vidět, že operátory $T(\infty)$ a $T(c)$ pro $c \leqq 0$ nemají žádné vlastní hodnoty, zatímco pro každé $c > 0$ má $T(c)$ právě jednu vlastní hodnotu $\lambda = -c^2$ jednotkové násobnosti.

Určíme nyní spektrum operátoru $T(\infty)$. Nejprve ukážeme, že

$$[0, \infty) \subset \sigma(T(\infty))\,. \tag{18a}$$

Podle důsledku 7.3.6 stačí ke každému $k \geqq 0$ najít posloupnost jednotkových vektorů $\varphi_n \in D_T(\infty)$ takovou, že $\|\varphi_n'' + k^2\varphi_n\| \to 0$. Přímým výpočtem ověříme, že tyto vlastnosti mají např. funkce $x \mapsto \varphi_n(x) = \sqrt{6/n}\,\mathrm{e}^{ikx}(\mathrm{e}^{-x/n} - \mathrm{e}^{-x/(2n)})$, pro něž

$$\|\varphi_n'' + k^2\varphi_n\|^2 = \frac{6}{n}\left[\frac{4k^2}{n}\int_0^\infty \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t/2} - \mathrm{e}^{-t}\right)^2 \mathrm{d}t + n^{-3}\int_0^\infty \left(\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-t/2}\right)^2 \mathrm{d}t\right].$$

Dále tvrdíme, že operátor $T(\infty)$ je pozitivní. Skutečně, pro každé $\varphi \in D_T(\infty)$ patří φ, φ' a φ'' do $L^2(0, \infty)$ a funkce φ, φ' jsou absolutně spojité v intervalu $[0, \infty)$; potom ze vztahu $(\bar{\varphi}\varphi')' = \bar{\varphi}\varphi'' + |\varphi'|^2$ plyne existence konečné $\lim_{x\to\infty} \overline{\varphi(x)}\,\varphi'(x)$, a protože $\bar{\varphi}\varphi' \in L^1(0, \infty)$, musí být tato limita rovna nule. Pro každé $\varphi \in D_T(\infty)$ tedy platí $(\varphi, T(\infty)\,\varphi) = \overline{\varphi(0)}\,\varphi'(0) + \|\varphi'\|^2 = \|\varphi'\|^2 \geqq 0$. Z důsledku 7.3.6b nyní plyne $\inf \sigma(T(\infty)) \geqq 0$, což spolu s (18a) dává

$$\sigma(T(\infty)) = [0, \infty)\,. \tag{18b}$$

Odtud snadno získáme spektra všech ostatních samosdružených rozšíření $T(c)$, $c \in \mathbb{R}$. Užijeme vztahu (7.2.12a), z nějž plyne $\sigma(T(\infty)) = \sigma_{\mathrm{ess}}(T(\infty))$, neboť reziduální spektrum operátoru $T(\infty)$ je prázdné (viz (7.3.7a)). Dále T splňuje předpoklady věty 8.4.3, takže všechna jeho samosdružená rozšíření mají stejné esenciální spektrum: $\sigma_{\mathrm{ess}}(T(c)) = \sigma_{\mathrm{ess}}(T(\infty)) = [0, \infty)$. Užijeme-li znovu vztahu (7.2.12a) a (7.3.7a), dostaneme

$$\sigma(T(c)) = \begin{cases} [0, \infty)\,, & c \leqq 0 \\ [0, \infty) \cup \{-c^2\}\,, & c > 0 \end{cases}. \tag{18c}$$

272 Na závěr určíme charakter spektra a najdeme rezolventy některých samosdružených rozšíření operátoru H generovaného regulárním diferenciálním výrazem l; výsledky pro singulární případ lze najít v citované literatuře.

8.6.10 Věta: Nechť l je regulární diferenciální výraz (8.5.1) na intervalu (a, b) a H je odpovídající uzavřený symetrický operátor na $L^2(a, b)$ s definičním oborem D určeným vztahem (8.5.4b). Pro každé samosdružené rozšíření $H_{[\xi,\eta]} \supset H$ zadané separovanými okrajovými podmínkami (14b) platí:

(a) Pro každé $\lambda \in \varrho(H_{[\xi,\eta]})$ je rezolventa $R_{H_{[\xi,\eta]}}(\lambda) \equiv R(\lambda)$ integrální Hilbertův-Schmidtův operátor s jádrem

$$k_\lambda(x, y) \equiv -W_{ab}^{-1} \begin{cases} \psi_b(x)\, \psi_a(y)\,, & x \geqq y \\ \psi_a(x)\, \psi_b(y)\,, & x < y \end{cases}, \tag{19}$$

kde funkce ψ_a, ψ_b jsou řešení rovnice $l[\psi] = \lambda\psi$ splňující podmínky $\psi_a(a) = \sin\xi$, $\psi_a'(a) = \cos\xi$, resp. $\psi_b(b) = \sin\eta$, $\psi_b'(b) = \cos\eta$, a W_{ab} je wronskián těchto funkcí.

(b) Spektrum operátoru $H_{[\xi,\eta]}$ je čistě bodové, nemá žádné hromadné body a všechny vlastní hodnoty mají jednotkovou násobnost.

Důkaz: Existence funkcí ψ_a a ψ_b plyne z věty 8.5.2. Kdyby tyto funkce byly lineárně závislé, patřily by do $D(H_{[\xi,\eta]})$ (viz (14b)); potom λ by byla vlastní hodnota, což je ve sporu s předpokladem $\lambda \in \varrho(H_{[\xi,\eta]})$. Funkce ψ_a, ψ_b jsou tedy lineárně nezávislé, a proto jejich wronskián je na celém intervalu $[a, b]$ roven nenulové konstantě (cvičení 15). Jelikož $\psi_a, \psi_b \in ac[a, b]$, jsou tyto funkce kvadraticky integrabilní na (a, b); pomocí poznámky A.8.5 potom snadno zjistíme, že jádro k_λ patří do $L^2((a, b) \times (a, b))$. Odpovídající Hilbertův-Schmidtův integrální operátor označíme K_λ a ukážeme, že $R(\lambda) = K_\lambda$. K tomu účelu vezmeme libovolné $\varphi \in L^2(a, b)$ a položíme

$$\gamma_\varphi := W_{ab}^{-1} \int_a^b \psi_b(y)\, \varphi(y)\, \mathrm{d}y\,, \qquad \delta_\varphi := -W_{ab}^{-1} \int_a^b \psi_a(y)\, \varphi(y)\, \mathrm{d}y\,.$$

Potom z (19) plyne

$$\begin{aligned} &(K_\lambda\varphi)(x) = \\ &= \gamma_\varphi\, \psi_a(x) + W_{ab}^{-1} \left[\psi_a(x) \int_a^x \psi_b(y)\, \varphi(y)\, \mathrm{d}y - \psi_b(x) \int_a^x \psi_a(y)\, \varphi(y)\, \mathrm{d}y \right] = \\ &= \delta_\varphi\, \psi_b(x) + W_{ab}^{-1} \left[\psi_b(x) \int_x^b \psi_a(y)\, \varphi(y)\, \mathrm{d}y - \psi_a(x) \int_x^b \psi_b(y)\, \varphi(y)\, \mathrm{d}y \right]. \end{aligned}$$

Z výsledků cvičení 15 a vztahu $l[\psi_a] = \lambda\psi_a$ nyní vyplývá

$$(l - \lambda)\, [K_\lambda\varphi] = \varphi\,, \tag{20}$$

a protože $K_\lambda\varphi \in L^2(a, b)$, patří $K_\lambda\varphi$ do $\tilde{D}$; dále dostáváme $(K_\lambda\varphi)(a) = \gamma_\varphi\, \psi_a(a)$, $(K_\lambda\varphi)'(a) = \gamma_\varphi\, \psi_a'(a)$, $(K_\lambda\varphi)(b) = \delta_\varphi\, \psi_b(b)$ a $(K_\lambda\varphi)'(b) = \delta_\varphi\, \psi_b'(b)$, takže $K_\lambda\varphi \in D(H_{[\xi,\eta]})$. Vztah (20) můžeme tudíž zapsat ve tvaru $(H_{[\xi,\eta]} - \lambda)\, K_\lambda\varphi = \varphi$, což je díky libovolnosti φ ekvivalentní rovnosti $K_\lambda = R(\lambda)$; tím je tvrzení (a) dokázáno.

(b) Jelikož rezolventa každého samosdruženého operátoru je normální operátor (cvičení 7.23), je $R(\lambda)$ normální kompaktní operátor, jehož všechny vlastní hodnoty jsou nenulové (díky injektivitě). Kombinací vět 6.2.2 a 6.2.4 zjistíme, že existuje ortonormální báze $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty \subset L^2(a, b)$ a posloupnost nenulových čísel $\{\mu_j\}_{j=1}^\infty$ takové, že pro $j = 1, 2, \ldots$ platí $R(\lambda)\, \varphi_j = \mu_j\varphi_j$ a $\lim_{j\to\infty} \mu_j = 0$. Odtud plyne $\varphi_j \in D(H_{[\xi,\eta]})$ a $H_{[\xi,\eta]}\varphi_j = (\mu_j^{-1} + \lambda)\, \varphi_j$, takže $H_{[\xi,\eta]}$ má čistě bodové spektrum. Kdyby množina $\sigma(H_{[\xi,\eta]})$ měla hromadný bod μ, existovala by posloupnost $\{\mu_{j_k}\}_{k=1}^\infty$ taková, že $\mu_{j_k}^{-1} \to \mu - \lambda$; to je však ve sporu s podmínkou $\mu_j \to 0$. Konečně tvrzení o násobnosti vlastních hodnot je důsledkem toho, že řešení rovnice $l[\varphi] = \mu_j\varphi$ splňující separované okrajové podmínky je určeno jednoznačně až na multiplikativní konstantu: pro libovolná dvě taková řešení φ_r, $r = 1, 2$ představují podmínky $\varphi_r(a) \cos \xi - \varphi_r'(a) \sin \xi = 0$ soustavu dvou rovnic pro neznámé $\cos \xi$, $\sin \xi$, takže determinant soustavy, který je roven $W(\varphi_1, \varphi_2)$, musí být nulový; proto φ_1, φ_2 jsou lineárně závislé. ■

8.6.11 Poznámka: Vzhledem k tomu, že esenciální spektrum každého samosdruženého operátoru je tvořeno právě všemi hromadnými body spektra a vlastními hodnotami nekonečné násobnosti (viz větu 10.4.6), je $\sigma_{ess}(H_{[\xi,\eta]}) = \emptyset$. Potom podle věty 8.4.3 pro všechna samosdružená rozšíření H' operátoru H platí $\sigma_{ess}(H') = \emptyset$ a odtud $\sigma(H') = \sigma_p(H')$. Dále operátor H nemá žádné vlastní hodnoty, proto násobnost každé vlastní hodnoty libovolného samosdruženého rozšíření H' je nejvýše 2 (tvrzení 8.4.1). Vlastní hodnoty násobnosti 2 existují – ovšem jen v případě neseparovaných okrajových podmínek (viz příklad 2 pro $\Theta = \pm 1$).

Komentář

§ **8.1** • Určení indexů defektu je obecně obtížná úloha. Často však potřebujeme pouze zjistit, zda pro daný symetrický operátor A platí $n_+(A) = n_-(A)$; proto byly hledány různé postačující podmínky pro platnost této rovnosti – jednu z nich vyjadřuje např. důsledek 8.1.4. Jiná postačující podmínka se formuluje pomocí tzv. *operátoru konjugace*; nazýváme tak každý antiunitární operátor J splňující $J^2 = I$. J. von Neumann odvodil následující větu: *Jestliže k danému symetrickému operátoru A existuje operátor konjugace takový, že $JA \subset AJ$, potom $n_+(A) = n_-(A)$.* Skutečně, z podmínky $JA \subset AJ$ a vlastností operátoru konjugace uvedených ve cvičení 9 plyne $D_A = JD_A$ a dále $J\,\mathrm{Ran}\,(A + \mathrm{i}) = J(A + \mathrm{i})\, D_A = (A - \mathrm{i})\, JD_A = \mathrm{Ran}\,(A - \mathrm{i})$; odtud dostáváme $\mathrm{Ran}\,(A - \mathrm{i})^\perp =$

 $= (J\,\mathrm{Ran}\,(A + \mathrm{i}))^{\perp} = J\,\mathrm{Ran}\,(A + \mathrm{i})^{\perp}$ a konečně $n_+(A) = \dim \mathrm{Ran}\,(A - \mathrm{i})^{\perp} = \dim (J\,\mathrm{Ran}\,(A + \mathrm{i})^{\perp}) = \dim \mathrm{Ran}\,(A + \mathrm{i})^{\perp} = n_-(A)$. Například na prostorech $L^2(X, \mathrm{d}\mu)$ je operátorem konjugace zobrazení $\psi \mapsto \bar{\psi}$; postačující podmínkou rovnosti indexů defektu daného symetrického operátoru A na $L^2(X, \mathrm{d}\mu)$ je, aby $\psi \in D_A$ implikovalo $\bar{\psi} \in D_A$ a aby pro všechna $\psi \in D_A$ a s.v. $x \in X$ platilo $(A\bar{\psi})(x) = (\overline{A\psi})(x)$.

§ **8.5** • V obecné teorii symetrických obyčejných diferenciálních operátorů se vychází z tzv. formálně samosdružených diferenciálních výrazů

$$l_n[f] \equiv \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}\left(p_{n-j}\frac{\mathrm{d}^j f}{\mathrm{d}x^j}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

kde $p_0, \ldots, p_n$ jsou reálné funkce na intervalu (a, b). Speciálně pro $n = 1$ dostáváme tzv. *Sturmův-Liouvilleův operátor* $-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p_0\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + p_1$, který pro $p_0 = 1$ přechází na diferenciální výraz (1). Jsou-li funkce $1/p_0, p_1, \ldots, p_n$ lokálně integrabilní v (a, b), určuje l_n opět dva operátory $\tilde{H}$ a H na $L^2(a, b)$. První z nich má maximální definiční obor tvořený všemi $\varphi \in L^2(a, b)$, pro něž má $l_n[\varphi]$ smysl a platí $l_n[\varphi] \in L^2(a, b)$. Operátor $H \subset \tilde{H}$ je potom jednoznačně určen, požadujeme-li, aby byl symetrický, uzavřený a splňoval $H^* = \tilde{H}$; jeho indexy defektu jsou (m, m), kde $0 \leqq m \leqq 2n$.

§ **8.6** • Pro operátor T generovaný diferenciálním výrazem $-\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ platí $T = P^2$, kde P je uzavřený symetrický operátor z příkladu 7.2.7. Proto je T pozitivní a podle věty 7.5.11 existuje jeho Friedrichsovo rozšíření $T^{(\mathrm{F})}$. Z toho, co bylo řečeno na začátku tohoto paragrafu, vyplývá, že $T^{(\mathrm{F})} = \tilde{T} \upharpoonright D_T^{(\mathrm{F})}$, přičemž definiční obor $D_T^{(\mathrm{F})}$ má v regulárním případě tvar (12) a v případě jednoho singulárního konce tvar (15) (jsou-li oba konce singulární, je T samosdružený, takže $T^{(\mathrm{F})} = T$). Určíme hodnoty příslušných parametrů.

Podle definice je $T^{(\mathrm{F})}$ operátor asociovaný s uzávěrem formy s_T, definované na podprostoru D_T vztahem $s_T(\varphi, \psi) = (\varphi, T\psi)$. Z rovnosti $T = P^2$ plyne $\overline{s_T} \subset p$, kde p je uzavřená forma splňující $D(p) = D_P$ a $p(\varphi, \psi) = (P\varphi, P\psi)$ pro všechna φ a $\psi \in D_P$. Podle věty 7.5.8 platí $D_T^{(\mathrm{F})} \subset D(\overline{s_T})$, takže $D_T^{(\mathrm{F})} \subset D_P$; dále ze vztahů $T^{(\mathrm{F})} \subset \tilde{T} = \tilde{P}^2$ (viz příklad 8.5.8) a $\tilde{P}^* = P$ pro všechna $\varphi \in D_T^{(\mathrm{F})}$ a $\psi \in D_P$ dostaneme $(T^{(\mathrm{F})}\varphi, \psi) = (P\varphi, P\psi) = p(\varphi, \psi)$. Tvrzení (d) citované věty nyní dává $T^{(\mathrm{F})} = A_p$; zde A_p je operátor asociovaný s formou p a podle příkladu 7.5.10 platí $A_p = P^*P$. Získali jsme tak rovnost $T^{(\mathrm{F})} = P^*P = \tilde{P}P$. Odtud pro regulární případ, $b - a < \infty$, dostáváme $D_T^{(\mathrm{F})} = \{\varphi \in AC^2(a, b) \colon \varphi(a) = \varphi(b) = 0\}$, tj. s označením z příkladu 6 platí $T^{(\mathrm{F})} = T_{[0,0]}$. V případě jednoho singulárního konce máme $D_T^{(\mathrm{F})} = \{\varphi \in AC^2(0, \infty) \colon \varphi(a) = 0\}$; užijeme-li označení z věty 7, resp. z poznámky 8, dostáváme vztahy $T^{(\mathrm{F})} = T_0$, resp. $T^{(\mathrm{F})} = T(\infty)$.

Cvičení

1. Komplexní číslo λ patří do oblasti regularity lineárního operátoru T právě tehdy, když operátor $(T - \lambda)^{-1}$ existuje a je omezený.

2. Pro každý izometrický operátor V platí $\operatorname{def}(V - \lambda) = \dim(\operatorname{Ran} V)^{\perp}$, je-li $|\lambda| < 1$, a $\operatorname{def}(V - \lambda) = \dim(D_V)^{\perp}$, je-li $|\lambda| > 1$.
Návod: Množiny $\{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| < 1\}$ a $\{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| > 1\}$ jsou souvislé komponenty oblasti regularity. Pro $|\lambda| > 1$ užijte rovnost $\operatorname{Ran}(V - \lambda) = \operatorname{Ran}(V^{-1} - \lambda^{-1})$.

3. Jestliže A je symetrický a B hermitovský operátor, potom $n_{\pm}(A) = n_{\pm}(A + B)$.
Návod: Ukažte, že funkce $t \mapsto \operatorname{def}(A + tB \mp i)$ je konstantní na $\mathbb{R}$ (viz důkaz věty 8.1.2).

4. Pomocí první von Neumannovy formule dokažte, že pro libovolné $x \in D(A^*)$ platí $\operatorname{Im}(x, A^*x) = \|x_-\|^2 - \|x_+\|^2$.

5. Samosdružený operátor A komutuje s $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ právě tehdy, když $C(A)\,B = BC(A)$.

6. Nechť $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ je ortonormální báze v separabilním $\mathscr{H}$ a S je operátor pravého posunutí, $Se_k = e_{k+1}$, definovaný v příkladu 5.1.7. Ukažte, že $S \in \mathscr{V}$, že pro operátor $A_S \equiv C^{-1}(S)$ platí $D(A_S) = \left\{x \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j : \sum_{n=1}^{\infty} \left|\sum_{j=1}^{n} \xi_j\right|^2 < \infty\right\}$, a najděte pro libovolné $x \in D(A_S)$ Fourierovy koeficienty $(e_k, A_S x)$, $k = 1, 2, \ldots$. Jaké indexy defektu má operátor A_S?

7. Jestliže U je unitární operátor, potom
(i) pro každé $A \in \mathscr{L}_{cs}$ patří UAU^{-1} do $\mathscr{L}_{cs}$ a $UC(A)\,U^{-1} = C(UAU^{-1})$,
(ii) pro každé $V \in \mathscr{V}$ patří UVU^{-1} do $\mathscr{V}$ a $UC^{-1}(V)\,U^{-1} = C^{-1}(UVU^{-1})$.

8. Pro Cayleyův obraz operátoru P na $L^2(0, \infty)$ z příkladu 7.2.7 platí $C(P) = S^* \upharpoonright \{\psi_0\}^{\perp}$, kde S^* je operátor levého posunutí vzhledem k ortonormální bázi $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty} \subset L^2(0, \infty)$, $\psi_n(x) := \sqrt{2}\, e^{-x} L_n(2x)$ a $L_n \equiv L_n^{(0)}$ (viz § 4.3).
Návod: Platí $\operatorname{Ker}(P^* - i) = \{\psi_0\}_{\text{lin}}$ (viz příklad 8.1.5); dále užijte vztahu

$$\int_x^{\infty} e^{-y} L_n(y)\, dy = e^{-x}(L_n(x) - L_{n-1}(x))$$

(viz [[GR]], § 7.414), z nějž plyne $\psi_n = (P + i)\,\eta_n$, kde $\eta_n := \frac{i}{2}(\psi_{n-1} - \psi_n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

9. Dokažte následující vlastnosti operátoru konjugace J na $\mathscr{H}$:
(i) pro každý podprostor $L \subset \mathscr{H}$ platí $JL^{\perp} = (JL)^{\perp}$, $J\bar{L} = (\overline{JL})$ a $\dim J\bar{L} = \dim \bar{L}$;
(ii) jestliže podprostory $L, L' \subset \mathscr{H}$ splňují $JL \subset L'$ a $JL' \subset L$, potom $JL = L'$ a $JL' = L$.

10. Jestliže operátor $A \in \mathscr{L}_{cs}(\mathscr{H})$ má konečné indexy defektu (n, n), potom s označením zavedeným ve větě 8.3.2 platí:

(i) $\dim (I - \tilde{V})\mathscr{G}_+ = \dim \mathscr{G}_+ \leqq n$;

(ii) $\dim (D_{A'}/D_A) \leqq n$, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když operátor A' je samosdružený.

Návod: (ii) Viz cvičení 1.6 a formuli (8.2.5).

11. Symetrický operátor, který má právě jedno samosdružené rozšíření, je v podstatě samosdružený.

Návod: Užijte tvrzení 8.2.5 a injektivity Cayleyovy transformace.

12. Pro každý uzavřený symetrický operátor A platí:

(i) jestliže $\lambda \notin \sigma_{ess}(A)$, potom $\operatorname{Ran}(A - \lambda)$ je uzavřený podprostor;

(ii) jestliže $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ a není vlastní hodnotou nekonečné násobnosti, potom podprostor $\operatorname{Ran}(A - \lambda)$ není uzavřený.

Návod: Užijte tvrzení 8.4.2 a větu 3.4.12.

13. Dokažte důsledek 8.4.4.

Návod: Užijte důsledky 8.1.4 a 7.2.9.

14. Nechť l je diferenciální výraz (8.5.1) na (a, b) a předpokládejme, že a je regulární konec. Potom pro každé $c \in (a, b)$ a libovolná $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{C}$ existuje $\varphi \in \tilde{D}$ takové, že $\varphi^{(r)}(a) = \gamma_r$ pro $r = 0, 1$ a $\varphi(x) = 0$ na intervalu (c, b).

Návod: Uvažujte l na (a, c) a užijte lemmatu 8.5.3.

15. Je dán diferenciální výraz (8.5.1) na $J \equiv (a, b)$ a funkce g, která je lokálně integrabilní v intervalu J_l. Jestliže f_1 a f_2 jsou lineárně nezávislá řešení zobecněné diferenciální rovnice $l[f] = 0$, potom jejich wronskián $W = f_1 f_2' - f_1' f_2$ je nenulová konstantní funkce na J a pro libovolné $c \in J_l$ je funkce

$$x \mapsto f(x) := W^{-1} \int_c^x [f_1(x) f_2(y) - f_2(x) f_1(y)]\, g(y)\, dy$$

řešením rovnice $l[f] = g$ splňujícím podmínky $f(c) = f'(c) = 0$.

16. Dokažte, že podmínka (8.5.11) je nutná a postačující pro to, aby dané $\psi \in \tilde{D}$ patřilo do D. Dále pro regulární případ je (8.5.11) ekvivalentní podmínkám $\psi^{(r)}(a) = \psi^{(r)}(b) = 0$ pro $r = 0, 1$.

Návod: Užijte (8.5.3) a (8.5.10b); pro regulární případ ještě lemma 8.5.3.

17. Nechť pro $r = 1, 2$ je A_r uzavřený symetrický operátor na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}_r$; potom pro indexy defektu, resp. esenciální spektrum uzavřeného symetrického operátoru $A := A_1 \oplus A_2$ platí $n_\pm(A) = n_\pm(A_1) + n_\pm(A_2)$, resp. $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A_1) \cup \sigma_{ess}(A_2)$.

Návod: Z tvrzení 8.4.2 plyne, že podmínka $\lambda \notin (\sigma_{ess}(A_1) \cup \sigma_{ess}(A_2))$ implikuje $\lambda \notin \sigma_{ess}(A)$.

18. Je dán vektorový prostor V a jeho podprostor L. Vektory $x_1, \ldots, x_n \in V$ jsou lineárně nezávislé modulo L právě tehdy, když třídy ekvivalence $\tilde{x}_j := \{x_j + y\colon y \in L\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ jsou lineárně nezávislými prvky faktorového prostoru V/L.

19. Ověřte, že soustava (8.6.10c) pro neznámé $\beta_{n+1}, \ldots, \beta_{2n}$ má jen triviální řešení. *Návod*: Kdyby existovalo netriviální řešení, měla by netriviální řešení i soustava $\left[\eta_r, \sum_{k=1}^{n} c_k \eta_k\right]_b - \left[\eta_r, \sum_{k=1}^{n} c_k \eta_k\right]_a = 0$, $r = n + 1, \ldots, 2n$; avšak z těchto podmínek pomocí (8.6.10a) a (8.5.11) plyne $\sum_{k=1}^{n} c_k \eta_k \in D$.

20. (i) Ukažte, že zobrazení $[\xi, \eta] \mapsto H_{[\xi,\eta]}$ množiny $[0, \pi) \times [0, \pi)$ na množinu samosdružených rozšíření odpovídajících separovaným okrajovým podmínkám (8.6.14b) je injektivní.
(ii) Pro diferenciální výraz $-d^2/dx^2$ na $(0, \pi)$ najděte spektra operátorů $T_{[0,\pi/2]}$, resp. $T_{[\pi/2,0]}$ určených okrajovými podmínkami $\varphi(0) = \varphi'(\pi) = 0$, resp. $\varphi(\pi) = \varphi'(0) = 0$ a ověřte, že tyto operátory jsou unitárně ekvivalentní.
Návod: (i) Pomocí lemmatu 8.5.3 najděte $\varphi_1, \varphi_2 \in D(H_{[\xi,\eta]})$ taková, že z podmínek (8.6.14b) plyne $\sin(\xi - \xi') = 0$ a $\sin(\eta - \eta') = 0$.
(ii) Operátory $T_{[0,\pi/2]}$ a $T_{[\pi/2,0]}$ mají totožná spektra, která jsou čistě bodová, a všechny vlastní hodnoty mají jednotkovou násobnost.

9.1 ZÁKLADNÍ POJMY

Spektrální teorie samosdružených a normálních operátorů, jíž se budeme zabývat v následující kapitole, je založena na zobecnění pojmu číselné míry, které spočívá v tom, že prvkům dané σ-algebry $\mathscr{A}$ přiřazujeme místo čísel projektory na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$. Omezíme se přitom na případ, kdy $\mathscr{A}$ je σ-algebra $\mathscr{B}^d$ borelovských množin v $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, \ldots$; ten je z hlediska spektrální teorie dostatečně obecný.

Zobrazení $E(.) : \mathscr{B}^d \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ nazýváme **projektorovou mírou** na $\mathbb{R}^d$ (s hodnotami v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$), jestliže jsou splněny následující podmínky:

(pm1) pro každé $M \in \mathscr{B}^d$ je $E(M)$ projektor,

(pm2) $$E(\mathbb{R}^d) = I \tag{1}$$

(pm3) jestliže $\{M_n\} \subset \mathscr{B}^d$ je nejvýše spočetný disjunktní systém, potom

$$E\left(\bigcup_n M_n\right) = \sum_n E(M_n), \tag{2}$$

přičemž pro nekonečný systém jde o limitu vzhledem k silné operátorové topologii v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Podobně jako v případě číselných měr se zavádí pojem *E-nulové množiny* a *výrokové funkce* na $\mathbb{R}^d$, *která platí E* — s.v.

9.1.1 Poznámky: (a) Projektorová míra se často definuje obecněji na abstraktním měřitelném prostoru $(X, \mathscr{A})$ – viz např. [[BS]], § 5.1; užívá se rovněž názvu *spektrální míra.*

(b) Z aditivity plyne $E(\emptyset) = 0$.

(c) Jsou-li M, N disjunktní borelovské množiny, je $E(M \cup N)$ projektor, který se rovná součtu projektorů $E(M)$ a $E(N)$; proto musí být $E(M)\,E(N) = 0$ (viz tvrzení 5.4.4). Projektory na pravé straně rovnosti (2) jsou proto vzájemně ortogonální a $E(\bigcup_n M_n)$ je projektor na ortogonální součet podprostorů Ran $E(M_n)$ (viz (5.4.5)).

9.1.2 Tvrzení: Nechť $E(.)$ je projektorová míra na $\mathbb{R}^d$.

(a) Pro libovolné množiny $M, N \in \mathscr{B}^d$ platí

$$E(M \cap N) = E(M)\, E(N) = E(N)\, E(M)\,, \tag{3a}$$

$$E(M \cup N) = E(M) + E(N) - E(M \cap N)\,, \tag{3b}$$

$$M \subset N \Rightarrow E(M) \leqq E(N)\,. \tag{3c}$$

(b) Je-li $\{M_n\}$ neklesající a $\{N_n\}$ nerostoucí posloupnost v $\mathscr{B}^d$, potom

$$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} E(M_n)\,, \tag{4a}$$

$$E\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} N_n\right) = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} E(N_n)\,. \tag{4b}$$

(c) Pro každé $x \in \mathscr{H}$ je zobrazení $\mu_x : \mathscr{B}^d \to \mathbb{R}^+$, definované vztahem $\mu_x(M) := (x, E(M)\, x)$, konečná borelovská míra, a podobně pro každou dvojici $x, y \in \mathscr{H}$ je $M \mapsto \nu_{xy}(M) := (x, E(M)\, y)$ komplexní míra, přičemž

$$\operatorname{Re} \nu_{xy} = \frac{1}{4}(\mu_{x+y} - \mu_{x-y})\,, \qquad \operatorname{Im} \nu_{xy} = \frac{1}{4}(\mu_{x-iy} - \mu_{x+iy})\,.$$

Důkaz přenecháme čtenáři (cvičení 1).

9.1.3 Příklady: (a) Nechť $\{P_j\} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je konečný nebo spočetný systém navzájem ortogonálních nenulových projektorů takový, že $\sum_j P_j = I$, a nechť $\{\lambda_j\} \subset \mathbb{R}^d$ je množina stejné mohutnosti jako $\{P_j\}$. Pro libovolné $M \in \mathscr{B}^d$ definujeme

$$E_D(M) := \sum_j P_j\, \chi_M(\lambda_j)\,. \tag{5a}$$

Z uvedených předpokladů je zřejmé, že takto definované zobrazení $E_D(.)$ splňuje podmínky (pm1) a (pm2). Jestliže $\{M_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{B}^d$ je disjunktní systém a $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, potom pro každé $x \in \mathscr{H}$ platí $(x, E_D(M)\, x) = \sum_j \sum_n (x, P_j x)\, \chi_{M_n}(\lambda_j)$. Díky tomu, že jde o řadu s nezápornými členy, lze zaměnit pořadí sčítání, což dává

$$(x, E_D(M)\, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x, E_D(M_n)\, x)\,. \tag{5b}$$

Z ortogonality systému $\{P_j\}$ a vztahu (5a) je zřejmé, že $\{E_D(M_n)\}$ je rovněž ortogonální systém; potom $E^{(M)} := \operatorname*{s-lim}_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} E_D(M_n)$ je projektor na podprostor $\sum_{n=1}^{\infty}{}^{\oplus} \operatorname{Ran} E_D(M_n)$ a platí $(x, E^{(M)} x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x, E_D(M_n)\, x)$ pro všechna $x \in \mathscr{H}$. Srovnáním s rovností (5b) dostáváme $E_D(M) = E^{(M)} = \operatorname*{s-lim}_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} E_D(M_n)$. Zobrazení

 $E_D(.)$ definované vztahem (5a) tedy splňuje podmínky (pm1)–(pm3). Nazýváme je *diskrétní projektorovou mírou* (srov. s příkladem A.3.2); pro množinu $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ se užívá názvu *nosič diskrétní projektorové míry* (viz poznámku A.3.3b).

(b) Pro libovolnou množinu $M \in \mathscr{B}^d$ je operátor násobení charakteristickou funkcí χ_M projektor na $L^2(\mathbb{R}^d)$ (viz příklad 7.3.3); označme jej $E(M)$, tj. $E(M) = T_{\chi_M}$. Pro disjunktní množiny M a N máme $\chi_{M \cup N} = \chi_M + \chi_N$ a odtud dostáváme $E(M \cup N) = E(M) + E(N)$. Jestliže $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, kde $\{M_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{B}^d$ je disjunktní systém, potom pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ je $\chi_M(x) = \lim_{m\to\infty} \chi_{N_m}(x)$, kde $N_m := \bigcup_{n=1}^{m} M_n$; odtud na základě Lebesgueovy věty snadno zjistíme, že pro každé $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ platí $\lim_{m\to\infty} \|[E(M) - E(N_m)]\,\psi\| = 0$, tj. $E(M) = \text{s-lim}_{m\to\infty} E(N_m) = \text{s-lim}_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} E(M_n)$. Dále je zřejmé, že $E(\mathbb{R}^d) = I$, takže zobrazení $M \mapsto E(M)$ je projektorová míra na $\mathbb{R}^d$ s hodnotami v $\mathscr{B}(L^2(\mathbb{R}^d))$.

Na reálné ose pracujeme kromě projektorových měr s další třídou zobrazení do množiny projektorů na daném $\mathscr{H}$ – s tzv. rozklady jedničky. Dříve než podáme příslušnou definici, uvedeme jedno pomocné tvrzení.

9.1.4 Lemma: Nechť $t \mapsto E_t$ je neklesající zobrazení reálné osy do množiny projektorů na daném $\mathscr{H}$, tj. pro všechna $t, u \in \mathbb{R}$ platí implikace $t < u \Rightarrow E_t \leqq E_u$. Potom existují jednostranné limity

$$E_{u+0} \equiv \underset{t\to u+}{\text{s-lim}}\, E_t = \inf_{t>u} E_t\,, \qquad E_{u-0} \equiv \underset{t\to u-}{\text{s-lim}}\, E_t = \sup_{t<u} E_t\,, \qquad u \in \mathbb{R}\,,$$

přičemž operátory $E_{u\pm 0}$ jsou projektory. První, resp. druhý z těchto vztahů platí i pro nevlastní bod $u = -\infty$, resp. $u = +\infty$.

Důkaz: Pro libovolné $x \in \mathscr{H}$ je funkce $t \mapsto \sigma_x(t) := (x, E_t x)$ neklesající a omezená, takže v každém bodě $u \in \mathbb{R}$ existují vlastní jednostranné limity $\sigma_x(u-0) \equiv \lim_{t\to u-} \sigma_x(t) = \sup_{t<u} \sigma_x(t)$ a $\sigma_x(u+0) \equiv \lim_{t\to u+} \sigma_x(t) = \inf_{t>u} \sigma_x(t)$. Nechť $\{t_n\}$ je libovolná neklesající posloupnost taková, že $t_n \leqq u$ pro všechna n a $t_n \to u$. Podle věty 5.4.9 existuje projektor $E_{u-0} \equiv \text{s-lim}_{n\to\infty} E_{t_n}$, a protože $\sigma_x(t_n) \to \sigma_x(u-0)$, platí $(x, E_{u-0}x) = \sigma_x(u-0) \geqq (x, E_t x)$ pro všechna $t < u$ a $x \in \mathscr{H}$. Odtud jednak vyplývá vztah $E_{u-0} = \sup_{t<u} E_t$, jednak vidíme, že $E_{u-0} - E_t \geqq 0$, takže tento operátor je projektor pro každé $t < u$ (viz tvrzení 5.4.4b). Potom platí rovnost $\|(E_{u-0} - E_t)\,x\|^2 = (x, (E_{u-0} - E_t)\,x) = \sigma_x(u-0) - \sigma_x(t)$, z níž dále plyne $E_{u-0} = \underset{t\to u-}{\text{s-lim}}\, E_t$. Obdobně se dokážou tvrzení týkající se operátoru E_{u+0} a limit v bodech $\pm\infty$. ■

Neklesající zobrazení $t \mapsto E_t$ reálné osy do množiny projektorů na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ se nazývá **rozkladem jedničky**, jestliže je spojité zprava, tj. pro všechna $u \in \mathbb{R}$ platí

$$E(u+0) \equiv \operatorname*{s-lim}_{t \to u+} E_t = E_u\,, \tag{6a}$$

a dále

$$\operatorname*{s-lim}_{t \to +\infty} E_t = I\,, \qquad \operatorname*{s-lim}_{t \to -\infty} E_t = 0\,. \tag{6b}$$

9.1.5 Poznámky: (a) Místo podmínky (6a) se alternativně požaduje spojitost zleva (viz např. [[AG]], [[BS]]).

(b) To, že rozklad jedničky je neklesající, lze charakterizovat následujícími ekvivalentními podmínkami: pro každou dvojici $t > u$ je operátor $E_t - E_u$ projektor, resp. $E_tE_u = E_uE_t = E_u$ (viz tvrzení 5.4.4b).

(c) Pro rozklad jedničky $t \mapsto E_t$ budeme užívat též označení $\{E_t\}$.

9.1.6 Příklad: Každá projektorová míra $E(.)$ na $\mathbb{R}$ určuje rozklad jedničky $\{E_t\}$, kde

$$E_t := E(-\infty, t]\,. \tag{7}$$

Skutečně, z aditivity je zřejmé, že takto definované zobrazení $t \mapsto E_t$ je neklesající. Podle lemmatu 4 existují v každém bodě $t \in \mathbb{R}$ jednostranné silné limity, takže např. $E_{t+0} = \operatorname*{s-lim}_{n \to \infty} E_{t+1/n}$. Z rovností $(-\infty, t] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, t + 1/n]$ a (4b) potom plyne $E_{t+0} = E_t$. Podobně ověříme podmínky (6b). Pro libovolné $u \in \mathbb{R}$ dále platí

$$\operatorname*{s-lim}_{\delta \to 0+} E(\{u+\delta\}) = 0\,;$$

kdyby totiž tato rovnost neplatila, existovala by pro nějaké $\varepsilon > 0$ a $x \in \mathscr{H}$, $\|x\| = 1$, klesající posloupnost $\{\delta_n\}$ taková, že $\lim_{n \to \infty} \delta_n = 0$ a $\|E(\{u + \delta_n\})\, x\| \geqq \varepsilon$ pro $n = 1, 2, \ldots$, což je ve sporu se zobecněnou Besselovou nerovností (viz poznámku 4.5.4), neboť $\{E(\{u+\delta_n\}) : n = 1, 2, \ldots\}$ je množina navzájem ortogonálních projektorů.

9.1.7 Příklad: Najdeme obecný tvar rozkladu jedničky na N-dimenzionálním Hilbertově prostoru $\mathscr{H}_N$. Předpokládejme, že $\{E_t\}$ je nějaký takový rozklad; tvrdíme, že ke každému $u \in \mathbb{R}$ existuje $\delta > 0$ takové, že $E_t = E_u$ pro všechna $t \in (u, u+\delta)$. Předpokládejme opak; potom existuje klesající posloupnost $\{t_n\}$, která konverguje k u, přičemž $E_{t_n} \neq E_u$ pro všechna n. Vzhledem k podmínce (6a) platí $E_u = \operatorname*{s-lim}_{n \to \infty} E_{t_n}$ a požadavek $E_{t_n} \neq E_u$ implikuje, že pro každé n je množina $\{m : E_{t_m} = E_{t_n}\}$ konečná. Lze tudíž vybrat posloupnost $\{t_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ tak, aby $E_{t_{n(k+1)}} \neq E_{t_{n(k)}}$ pro $k = 1, 2, \ldots$. Nyní nenulové prostory $\mathscr{G}_k := (E_{t_{n(k+1)}} - E_{t_{n(k)}})\, \mathscr{H}_N$ jsou navzájem ortogonální a je jich nekonečně mnoho, což je ve sporu s podmínkou

$\dim \mathscr{H}_N < \infty$. Z analogické úvahy plyne existence levého okolí $(u - \delta, u)$, na němž $E_t = E_{u-0}$, a reálných čísel $\alpha < \beta$ takových, že $E_\alpha = 0$ a $E_\beta = I$. Speciálně každý bod spojitosti zobrazení $t \mapsto E_t$ má okolí, na němž je toto zobrazení konstantní.

Na základě těchto vlastností lze obecný rozklad jedničky na $\mathscr{H}_N$ jednoduše popsat. Označme $u_1 := \sup\{t\colon E_t = 0\}$; zřejmě platí $E_{u_1-0} = 0$, přičemž u_1 nemůže být bodem spojitosti, takže $E_{u_1} \ne 0$. Jestliže $E_{u_1} = I$, je $E_t = 0$ pro $t < u_1$ a $E_t = I$ pro $t \geqq u_1$, čímž je zobrazení $t \mapsto E_t$ úplně určeno. Jestliže $E_{u_1} \ne I$, uděláme druhý krok: množina $\{t \geqq u_1\colon E_t = E_{u_1}\}$ obsahuje jisté pravé okolí bodu u_1 a pro její supremum u_2 platí $E_{u_2-0} = E_{u_1}$, přičemž opět u_2 není bodem spojitosti, tj. $E_{u_2} \ne E_{u_1}$; pokud $E_{u_2} \ne I$, děláme další krok. Po n-tém kroku, kde $1 \leqq n \leqq N$, musí proces skončit, tj. $E_{u_n} = I$, neboť projektory $P_j := E_{u_j} - E_{u_j-0}$ jsou pro $j = 1, 2, \ldots, n$ nenulové a navzájem ortogonální.

Shrneme provedené úvahy: ke každému rozkladu jedničky $\{E_t\}$ na $\mathscr{H}_N$ existují reálná čísla $u_1 < u_2 < \ldots < u_n$, kde $1 \leqq n \leqq N$, a navzájem ortogonální nenulové projektory $P_1, \ldots, P_n$ splňující podmínku $\sum_{j=1}^{n} P_j = I$, přičemž pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí $E_t = \sum_{j=1}^{n} P_j \chi_{(-\infty,t]}(u_j)$.

Na závěr uvedeme několik obecných vlastností rozkladu jedničky, které budeme potřebovat v dalším výkladu.

9.1.8 Tvrzení: Nechť $\{E_t\}$ je rozklad jedničky na $\mathscr{H}$.

(a) Pro každé $x \in \mathscr{H}$ je vztahem $\sigma_x(t) := (x, E_t x)$ definována na $\mathbb{R}$ nezáporná funkce, která je neklesající, spojitá zprava a omezená, přičemž $\lim_{t\to+\infty} \sigma_x(t) = \|x\|^2$ a $\lim_{t\to-\infty} \sigma_x(t) = 0$.

(b) Zobrazení $\dot{E}(.)$ množiny $\mathscr{J}$ všech omezených intervalů reálné osy do množiny projektorů na $\mathscr{H}$ definované pro libovolná $a \leqq b$ vztahy

$$\begin{aligned} \dot{E}(a, b] &:= E_b - E_a\,, & \dot{E}[a, b) &:= E_{b-0} - E_{a-0}\,, \\ \dot{E}(a, b) &:= E_{b-0} - E_a\,, & \dot{E}[a, b] &:= E_b - E_{a-0} \end{aligned} \tag{8}$$

je aditivní (možnost $a = b$ uvažujeme pouze v posledním případě a $E(\emptyset) := 0$).

(c) Pro libovolné intervaly $J, K \in \mathscr{J}$ platí

$$\dot{E}(J)\,\dot{E}(K) = \dot{E}(K)\,\dot{E}(J) = \dot{E}(J \cap K)\,. \tag{9}$$

(d) Jestliže omezený operátor B komutuje s E_t pro všechna $t \in \mathbb{R}$, potom komutuje se všemi operátory $\dot{E}(J)$, $J \in \mathscr{J}$.

Důkaz: Tvrzení (a) je zřejmé. (b) Aditivita bezprostředně plyne ze vztahů (8). Uvažujme např. intervaly $J \equiv [a, b]$, $K \equiv (b, c)$; potom $J \cup K = [a, c)$, přičemž

$$\dot{E}[a, c) = E_{c-0} - E_{a-0} = E_{c-0} - E_b + E_b - E_{a-0} = \dot{E}(b, c) + \dot{E}[a, b]\,.$$

(c) K ověření rovnosti (9) vezmeme nejprve disjunktní intervaly J a K, doplníme je intervalem L ležícím mezi nimi na interval, tj. intervaly J, K, L jsou navzájem disjunktní a $J \cup L \cup K$ je omezený interval. Užijeme-li argumentace z poznámky 9.1.1c, zjistíme, že projektory $\dot{E}(J)$ a $\dot{E}(K)$ jsou ortogonální. Z aditivity dále plyne monotonie: $J \subset K \Rightarrow \dot{E}(J) \leqq \dot{E}(K)$. Uvažujme nyní libovolné intervaly J a $K \in \mathscr{J}$. Protože $J \cap K \in \mathscr{J}$ a $J \setminus K = \bigcup_{j=1}^{n} L_j$, kde $0 \leqq n \leqq 2$ a systém $\{L_j\} \subset \mathscr{J}$ je disjunktní, plyne rovnost (9) z rozkladu $J = (J \setminus K) \cup (J \cap K)$, ortogonality projektorů $\dot{E}(K)$ a $\dot{E}(L_j)$ a monotonie.

(d) Zřejmě stačí ukázat, že pro libovolné $t \in \mathbb{R}$ platí $E_{t-0}B = BE_{t-0}$, což ihned plyne ze vztahů $E_{t-0} = \operatorname{s-lim}_{n\to\infty} E_{t-1/n}$ a $BE_{t-1/n} = E_{t-1/n}B$. ■

9.2 KONSTRUKCE PROJEKTOROVÝCH MĚR

Podobně jako v případě číselných měr konstruujeme obvykle projektorovou míru na $\mathbb{R}^d$ jako rozšíření daného zobrazení $\dot{E}(.)$, které každému omezenému intervalu $J \subset \mathbb{R}^d$ přiřazuje projektor $\dot{E}(J) \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Aby tato úloha měla řešení, musí zobrazení $\dot{E}(.)$ splňovat jisté podmínky; omezíme se na případ, kdy zobrazení $\dot{E}(.)$ má následující vlastnosti:

($\dot{E}$1) je aditivní,

($\dot{E}$2) $\dot{E}(J)\,\dot{E}(K) = 0$, jestliže $J \cap K = \emptyset$,

($\dot{E}$3) pro každé $x \in \mathscr{H}$ je zobrazení $J \mapsto \tilde{\mu}_x(J) := (x, \dot{E}(J)\,x)$ regulární funkce intervalu (viz § A.4) a platí $\sup\{\tilde{\mu}_x(J) : J \in \mathscr{J}^d\} = \|x\|^2$.

Z podmínky ($\dot{E}$2) dostáváme pro libovolná J a $K \in \mathscr{J}^d$ rovnost

$$\dot{E}(J \cap K) = \dot{E}(J)\,\dot{E}(K) = \dot{E}(K)\,\dot{E}(J) \tag{1}$$

(srov. se vztahem (9.1.3a)). K jejímu ověření stačí uvážit, že množinu $J \setminus K$ lze zapsat jako disjunktní sjednocení konečného systému z $\mathscr{J}^d$.

Nechť μ_x je borelovská míra na $\mathbb{R}^d$ taková, že pro každé $J \in \mathscr{J}^d$ platí $\mu_x(J) = \tilde{\mu}_x(J)$ (viz větu A.4.6). Díky tomu, že míra μ_x je určena tímto požadavkem jednoznačně, plyne z podmínky ($\dot{E}$3) pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$ rovnost

$$\mu_{\alpha x} = |\alpha|^2 \mu_x \tag{2a}$$

a dále vztah (viz cvičení 3)

$$\mu_x(\mathbb{R}^d) = \|x\|^2 . \tag{2b}$$

Pro každou dvojici $x, y \in \mathscr{H}$ zavedeme reálné míry

$$\varrho_{xy} := \frac{1}{4}(\mu_{x+y} - \mu_{x-y}) , \qquad \tau_{xy} := \frac{1}{4}(\mu_{x+iy} - \mu_{x-iy}) \tag{3a}$$

a komplexní míru

$$\nu_{xy} := \varrho_{xy} - \mathrm{i}\tau_{xy} \,. \tag{3b}$$

Speciálně pro $x = y$ z rovnosti (2a) vyplývá

$$\nu_{xx} = \varrho_{xx} = \mu_x \,. \tag{3c}$$

Tyto vztahy spolu s polarizační rovností dávají pro každé $J \in \mathscr{J}^d$

$$\nu_{xy}(J) = (x, \dot{E}(J)\, y) \,. \tag{4a}$$

Konstrukce projektorové míry jako rozšíření zobrazení $\dot{E}(.)$ je v podstatě založena na následující vlastnosti míry ν_{xy}.

9.2.1 Lemma: Nechť $M \subset \mathbb{R}^d$ je libovolná borelovská množina. Potom
(a) existuje pozitivní operátor $E(M) \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ takový, že pro všechna $x, y \in \mathscr{H}$ platí

$$\nu_{xy}(M) = (x, E(M)\, y) \,, \tag{4b}$$

(b) omezený operátor B komutuje s $E(M)$, jestliže komutuje s $\dot{E}(J)$ pro každé $J \in \mathscr{J}^d$.
Důkaz: (a) Stačí ověřit, že forma $[x, y] \mapsto f_M(x, y) := \nu_{xy}(M)$ je seskvilineární, omezená a pozitivní. Pro libovolná $x, y, z \in \mathscr{H}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ a $J \in \mathscr{J}^d$ dostáváme ze vztahu (4a)

$$\nu_{x,\alpha y+z}(J) = \alpha\nu_{xy}(J) + \nu_{xz}(J) \,.$$

Komplexní borelovská míra $\tilde{\nu} := \alpha\nu_{xy} + \nu_{xz}$ tedy splňuje pro každé $J \in \mathscr{J}^d$ podmínku $\nu_{x,\alpha y+z}(J) = \tilde{\nu}(J)$; podle důsledku A.5.7 dostáváme $\nu_{x,\alpha y+z}(M) = \tilde{\nu}(M) = \alpha\nu_{xy}(M) + \nu_{xz}(M)$ pro každé $M \in \mathscr{B}^d$, což znamená, že forma f_M je lineární v pravém argumentu.

Dále ze vztahů (2a) a (3a) plyne $\nu_{xy}(M) = \overline{\nu_{yx}(M)}$; forma f_M je proto symetrická a vzhledem k tomu, že je lineární v pravém argumentu, je seskvilineární. Navíc pro každé $x \in \mathscr{H}$ platí $f_M(x, x) = \mu_x(M)$ (viz (3c)), takže f_M je pozitivní forma. Konečně užitím Schwarzovy nerovnosti a vztahu (2b) dostaneme omezenost:

$$|f_M(x, y)|^2 \leqq f_M(x, x)\, f_M(y, y) = \mu_x(M)\, \mu_y(M) \leqq \mu_x(\mathbb{R}^d)\, \mu_y(\mathbb{R}^d) = \|x\|^2\, \|y\|^2 \,.$$

(b) Podmínka $B\dot{E}(J) = \dot{E}(J)\, B$ implikuje $\nu_{B^*x,y}(J) = \nu_{x,By}(J)$ pro všechna $x, y \in \mathscr{H}$ a $J \in \mathscr{J}^d$. Opětovné užití důsledku A.5.7 dává $\nu_{B^*x,y}(M) = \nu_{x,By}(M)$, a odtud pomocí tvrzení (a) plyne $BE(M) = E(M)\, B$. ■

Z formulí (4a, b) je vidět, že $E(J) = \dot{E}(J)$, tj. zkonstruované zobrazení $M \mapsto E(M)$, je rozšířením výchozího zobrazení $\dot{E}(.)$ na systém $\mathscr{B}^d$. K ověření toho, že $E(.)$ je projektorová míra, užijeme následujícího pomocného tvrzení.

9.2.2 Lemma: S označením z lemmatu 1 platí

$$E(M)\, E(N) = E(N)\, E(M) = E(M \cap N) \,. \tag{5}$$

Důkaz: Pro libovolná $N \in \mathscr{B}^d$ a $x \in \mathscr{H}$ generuje funkce χ_N a míra μ_x borelovskou míru na $\mathbb{R}^d$, kterou označíme $\nu_x^{(N)}$. Pro každé $M \in \mathscr{B}^d$ máme

$$\nu_x^{(N)}(M) = \int_M \chi_N \, d\mu_x = \mu_x(M \cap N)$$

a formule (4b) dává

$$\nu_x^{(N)}(M) = (x, E(M \cap N)\, x) \, . \tag{6}$$

Pro každou dvojici intervalů $J, K \in \mathscr{J}^d$ vztahy (1) a (6) dávají $\nu_x^{(J)}(K) = (x, E(J)\, E(K)\, x) = (x, E(J)\, E(K)\, E(J)\, x) = \mu_y(K)$, kde $y := E(J)\, x$. Pomocí důsledku A.5.7 dostáváme $\nu_x^{(J)}(M) = \mu_y(M)$ pro každé $M \in \mathscr{B}^d$ a díky tomu, že x je libovolné, lze tuto rovnost užitím vztahů (4b), (6) a výsledků cvičení 4 zapsat ve tvaru

$$E(M \cap J) = E(J)\, E(M)\, E(J) = E(M)\, E(J) \, .$$

Z této rovnosti vyplývá pro libovolné $J \in \mathscr{J}^d$ vztah $\nu_x^{(N)}(J) = (x, E(J)\, E(N)\, x)$; dále díky tomu, že $E(N)$ je pozitivní a komutuje s $E(J)$ (cvičení 4), máme $E(J)\, E(N) = \sqrt{E(N)}\, E(J) \sqrt{E(N)}$. Celkem tedy platí

$$\nu_x^{(N)}(J) = (\sqrt{E(N)}\, x, E(J) \sqrt{E(N)}\, x) = \mu_z(J) \, ,$$

kde $z := \sqrt{E(N)}\, x$. Opětovné užití důsledku A.5.7 a výsledku cvičení 4 dává pro každé $M \in \mathscr{B}^d$ rovnosti $\nu_x^{(N)}(M) = \mu_z(M) = (x, \sqrt{E(N)}\, E(M) \sqrt{E(N)}\, x) = (x, E(M)\, E(N)\, x)$ a po dosazení ze vztahu (6) je důkaz dokončen. ■

Pro $M = N$ z rovnosti (5) vyplývá, že operátor $E(M)$ je projektor pro každé $M \in \mathscr{B}^d$. Ověříme, že zobrazení $M \mapsto E(M)$ je σ-aditivní. Nechť $\{M_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathscr{B}^d$ je disjunktní systém a $M := \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$. Napíšeme-li rovnost (4b) pro $x = y$, zjistíme pomocí σ-aditivity míry $\nu_{xx} \equiv \mu_x$, že pro každé $x \in \mathscr{H}$ platí $(x, E(M)\, x) = \lim_{n \to \infty} \left(x, \sum_{j=1}^{n} E(M_j)\, x \right)$. Podle vztahu (5) tvoří projektory $E(M_j)$, $j = 1, 2, \dots$ ortogonální systém, takže $\left\{ \sum_{j=1}^{n} E(M_j) \right\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající posloupnost projektorů. Existuje tudíž projektor E_M, který je její silnou limitou. Pro každé $y \in \mathscr{H}$ potom máme $(x, E_M x) = \lim_{n \to \infty} \left(x, \sum_{j=1}^{n} E(M_j)\, x \right) = (x, E(M)\, x)$, takže $E_M = E(M)$; tím je σ-aditivita dokázána.

Konečně ze vztahů (2b) a (4b) plyne $E(\mathbb{R}^d) = I$. Zkonstruované zobrazení $M \mapsto E(M)$ je tedy projektorová míra. Shrneme získané výsledky.

9.2.3 Věta: Ke každému zobrazení $\dot{E}(.)$ systému $\mathscr{J}^d$ omezených intervalů v $\mathbb{R}^d$ do množiny projektorů na daném Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$, které splňuje podmínky

$(\dot{E}1)$–$(\dot{E}3)$, existuje právě jedno rozšíření $E(.)$, jež je projektorovou mírou na $\mathbb{R}^d$ s hodnotami v $\mathrm{B}(\mathcal{H})$. Jestliže operátor $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ komutuje s $E(J)$ pro všechna $J \in \mathcal{J}^d$, potom pro každou borelovskou množinu M platí $BE(M) = E(M)\,B$.

Důkaz: Je třeba ověřit pouze jednoznačnost. Pro každé $x \in \mathcal{H}$ je zobrazení $M \mapsto \mu_x(M) = (x, E(M)\,x)$ borelovská míra, která je určena jednoznačně svým zúžením na systém $\mathcal{J}^d$ (viz důsledek A.4.7), tj. zobrazením $\dot{E}(.)$. Každá projektorová míra $F(.)$ na $\mathbb{R}^d$ splňující $F(J) = \dot{E}(J)$, $J \in \mathcal{J}^d$, tedy vyhovuje rovnostem $(x, F(M)\,x) = (x, E(M)\,x)$ pro všechna $x \in \mathcal{H}$ a $M \in \mathcal{B}^d$, takže $F(.) = E(.)$. ■

V příkladu 9.1.6 jsme ukázali, že pro každou projektorovou míru na $\mathbb{R}$ je vztahem (9.1.7) zadán rozklad jedničky. Věta 3 umožňuje toto tvrzení obrátit. Nechť je dán rozklad jedničky $\{E_t\}$ na $\mathcal{H}$; tím je určeno zobrazení $\dot{E}(.)$ systému $\mathcal{J}$ do množiny projektorů na $\mathcal{H}$, které splňuje podmínky $(\dot{E}1)$ na $(\dot{E}2)$ (viz tvrzení 9.1.8). Z formulí (9.1.8) a (9.1.6a) je vidět, že funkce intervalu $\mathcal{J}^d \ni J \mapsto \tilde{\mu}_x(J) := (x, \dot{E}(J)\,x)$, je regulární. Skutečně, nechť např. $J = (a, b)$; k danému $\varepsilon > 0$ díky podmínce $E_a = \operatorname*{s-lim}_{t \to a+} E_t$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $t \in (a, a + \delta)$ platí $(x, (E_t - E_a)\,x) = \|(E_t - E_a)\,x\|^2 < \varepsilon/2$; speciálně pro $t \in (a, a + \delta/2)$ máme $(x, E_t x) < (x, E_a x) + \varepsilon/2$ a odtud $(x, E_{a+\delta/2-0}x) < (x, E_a x) + \varepsilon$. Podobně vztah $E_{b-0} = \operatorname*{s-lim}_{t \to b-} E_t$ implikuje $(x, E_{b-\eta/2}x) > (x, E_{b-0}x) - \varepsilon$. Potom pro $J_F := [a + \delta/2, b - \eta/2]$ platí $\tilde{\mu}_x(J_F) > \tilde{\mu}_x(J) - 2\varepsilon$. Obdobně se ověří regularita pro ostatní typy intervalů. Konečně z formule (9.1.6b) je zřejmé, že $\sup\{\tilde{\mu}_x(J) : J \in \mathcal{J}\} = \|x\|^2$. Zobrazení $\dot{E}(.)$ tedy vyhovuje podmínce $(\dot{E}3)$. Jeho rozšíření $E(.)$, které dostaneme podle věty 3 nazýváme **projektorovou mírou generovanou rozkladem jedničky** $\{E_t\}$[1]); platí pro ni $E(-\infty, t] = E_t$, $t \in \mathbb{R}$ (cvičení 6). Každá projektorová míra $E(.)$ na $\mathbb{R}$ je generována rozkladem jedničky $\{E_t\}$, který je jí přiřazen podle vztahu (9.1.7). Skutečně, označíme-li symbolem $F(.)$ projektorovou míru generovanou tímto rozkladem jedničky, platí $F(-\infty, t] = E_t = E(-\infty, t]$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$; odtud dostáváme $F(J) = E(J)$ pro každé $J \in \mathcal{J}$ (viz cvičení 6) a tvrzení věty 3 o jednoznačnosti implikuje $E(.) = F(.)$. Dospíváme k následujícímu závěru.

9.2.4 Tvrzení: Každý rozklad jedničky na $\mathcal{H}$ generuje právě jednu projektorovou míru na $\mathbb{R}$ a hodnotami v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Takto definované zobrazení je bijekcí množiny všech rozkladů jedničky na $\mathcal{H}$ na množinu všech projektorových měr na $\mathbb{R}$ s hodnotami v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

9.2.5 Příklad: V příkladu 9.1.7 jsme zjistili, že každý rozklad jedničky $\{E_t\}$ na N-dimenzionálním Hilbertově prostoru je určen reálnými čísly $u_1 < u_2 < \ldots < u_n$, kde $1 \leqq n \leqq N$, a systémem navzájem ortogonálních projektorů $P_1, \ldots, P_n$ splňu-

[1]) Název je oprávněný, neboť projektorová míra $E(.)$ je jednoznačně určena zobrazením $\dot{E}(.)$ a to je zase jednoznačně zadáno rozkladem jedničky $\{E_t\}$.

jících podmínku $\sum_{j=1}^{n} P_j = I$. Projektorová míra $E(.)$ generovaná tímto rozkladem jedničky vyhovuje pro každé $t \in \mathbb{R}$ rovnosti $E(-\infty, t] = E_t = \sum_{j=1}^{n} P_j\, \chi_{(-\infty,t]}(u_j)$, z níž srovnáním s formulí (9.1.5a) a užitím výsledků cvičení 6 plyne $E(J) = E_D(J)$ pro všechna $J \in \mathscr{J}$, takže $E(.) = E_D(.)$.

Užijeme dále věty 3 ke konstrukci tzv. direktního součinu projektorových měr. Nechť pro daný Hilbertův prostor $\mathscr{H}$ jsou dány komutující projektorové míry $E(.)$ na $\mathbb{R}^r$ a $F(.)$ na $\mathbb{R}^s$, obě s hodnotami v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Komutativita je ekvivalentní tomu, že pro každou dvojici omezených intervalů $J \in \mathscr{J}^r$ a $K \in \mathscr{J}^s$ platí

$$E(J)\, F(K) = F(K)\, E(J) \tag{7}$$

(viz lemma 1b). Každý neprázdný interval $\tilde{J} \in \mathscr{J}^{r+s}$ lze zapsat právě jedním způsobem ve tvaru $\tilde{J} = J \times K$, kde $J \in \mathscr{J}^r$ a $K \in \mathscr{J}^s$; díky podmínce (7) je operátor $E(J)\, F(K)$ projektor, takže vztahy

$$\dot{P}(\tilde{J}) := \begin{cases} E(J)\, F(K)\,, & \tilde{J} \neq \emptyset \\ 0\,, & \tilde{J} = \emptyset \end{cases} \tag{8}$$

definují zobrazení $\dot{P}(.)$ množiny $\mathscr{J}^{r+s}$ do množiny projektorů na $\mathscr{H}$. Pomocí vztahů (A.1.13a, b) a poznámky A.1.8b zjistíme, že toto zobrazení splňuje podmínky ($\dot{E}1$) a ($\dot{E}2$). Ověříme, že pro každé $x \in \mathscr{H}$ je vztahem $\tilde{\mu}_x(\tilde{J}) := (x, \dot{P}(\tilde{J})\, x)$ definována regulární funkce intervalu $\tilde{\mu}_x$. Uvažujme dvojici intervalů $\tilde{J}_\alpha \equiv J_\alpha \times K_\alpha \in \mathscr{J}^{r+s}$, $\alpha = 1,2$, takových, že $\tilde{J}_1 \supset \tilde{J}_2$, a identitu

$$\tilde{\mu}_x(\tilde{J}_1) - \tilde{\mu}_x(\tilde{J}_2) = (x, [E(J_1) - E(J_2)]\, F(K_1)\, x) + (x, E(J_2)\, [F(K_1) - F(K_2)]\, x)\,.$$

Z podmínky $\tilde{J}_1 \supset \tilde{J}_2$ plyne $J_1 \supset J_2$, takže operátor $E(J_1) - E(J_2)$ je projektor; pomocí vztahu (7) dostáváme odhad

$$\begin{aligned}(x, [E(J_1) - E(J_2)]\, F(K_1)\, x) &= \|F(K_1)\, [E(J_1) - E(J_2)]\, x\|^2 \leqq \\ &\leqq (x, [E(J_1) - E(J_2)]\, x) = \mu_x^{(E)}(J_1) - \mu_x^{(E)}(J_2)\,,\end{aligned}$$

kde $\mu_x^{(E)}$ je borelovská míra splňující $\mu_x^{(E)}(M) = (x, E(M)\, x)$ pro každé $M \in \mathscr{B}^r$. Obdobný odhad platí pro výraz $(x, E(J_2)\, [F(K_1) - F(K_2)]\, x)$, takže

$$\tilde{\mu}_x(\tilde{J}_1) - \tilde{\mu}_x(\tilde{J}_2) \leqq \mu_x^{(E)}(J_1) - \mu_x^{(E)}(J_2) + \mu_x^{(F)}(K_1) - \mu_x^{(F)}(K_2)\,.$$

Regularita funkce $\tilde{\mu}_x$ nyní plyne z toho, že $\mu_x^{(E)}$, resp. $\mu_x^{(F)}$ jsou regulární funkce na $\mathscr{J}^r$, resp. $\mathscr{J}^s$.

Konečně podmínky $\sup\{\mu_x^{(E)}(J) : J \in \mathscr{J}^r\} = \sup\{\mu_x^{(F)}(K) : K \in \mathscr{J}^s\} = \|x\|^2$ implikují $\sup\{\tilde{\mu}_x(\tilde{J}) : \tilde{J} \in \mathscr{J}^{r+s}\} = \|x\|^2$ (viz cvičení 9). Zobrazení $\dot{P}(.)$ tedy splňuje podmínky ($\dot{E}1$)–($\dot{E}3$) a aplikací věty 3 dospíváme k následujícímu závěru.

9.2.6 Tvrzení: Nechť je dán Hilbertův prostor $\mathscr{H}$ a komutativní projektorové míry $E(.)$ na $\mathbb{R}^r$, resp. $F(.)$ na $\mathbb{R}^s$ s hodnotami v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Potom existuje právě jedna projektorová míra na $\mathbb{R}^{r+s}$ s hodnotami v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ taková, že pro libovolné množiny $M \in \mathscr{B}^r$ a $N \in \mathscr{B}^s$ platí

$$P(M \times N) = E(M)\, F(N)\,. \tag{9}$$

Projektorovou míru $P(.)$ nazýváme **direktním součinem projektorových měr** $E(.)$ a $F(.)$. Uvedená věta platí za podstatně obecnějších předpokladů (viz např. [[BS]], § 5.2).

Důkaz: Zbývá dokázat pouze rovnost (9). Připomeňme, že definiční obor projektorové míry $P(.)$, tj. σ-algebra $\mathscr{B}^{r+s}$, obsahuje množiny $M \times N$ pro všechna $M \in \mathscr{B}^r$ a $N \in \mathscr{B}^s$ – viz příklad A.1.9a. Z identity $M \times N = (M \times \mathbb{R}^s) \cap$ $\cap\ (\mathbb{R}^r \times N)$ a vztahu (9.1.3a) je vidět, že stačí ověřit rovnosti

$$P(M \times \mathbb{R}^s) = E(M) \quad \text{a} \quad P(\mathbb{R}^r \times N) = F(N)\,. \tag{10a}$$

Z definice (8) dostáváme nejprve $P(J \times \mathbb{R}^s) = E(J)$ pro všechna $J \in \mathscr{J}^r$, a odtud díky σ-aditivitě plyne $P(\bigcup_k J_k \times \mathbb{R}^s) = E(\bigcup_k J_k)$ pro jakýkoli nejvýše spočetný disjunktní systém $\{J_k\} \subset \mathscr{J}^r$; speciálně každá otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^r$ splňuje

$$P(G \times \mathbb{R}^s) = E(G)\,. \tag{11}$$

První z rovností (10a) je ekvivalentní podmínce

$$\mu_x(M \times \mathbb{R}^s) = \mu_x^{(E)}(M) \tag{10b}$$

pro všechna $x \in \mathscr{H}$, kde $\mu_x(\tilde{M}) := (x, P(\tilde{M})\, x)$, $\tilde{M} \in \mathscr{B}^{r+s}$. K jejímu ověření vyjdeme z regularity míry $\mu_x^{(E)}$, z níž vyplývá existence nerostoucí posloupnosti otevřených množin $\{G_n^{(x)}\}$ taková, že $G_n^{(x)} \supset M$ pro všechna n a

$$\mu_x^{(E)}(M) = \lim_{n\to\infty} \mu_x^{(E)}(G_n^{(x)}) = \mu_x^{(E)}(M_G^{(x)})\,, \tag{12}$$

kde $M_G^{(x)} := \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n^{(x)}$. Nyní $\{G_n^{(x)} \times \mathbb{R}^s\}$ je nerostoucí posloupnost otevřených množin splňujících $G_n^{(x)} \times \mathbb{R}^s \supset M \times \mathbb{R}^s$; pomocí vztahů (11) a (12) dostáváme

$$\mu_x(M \times \mathbb{R}^s) \leqq \lim_{n\to\infty} \mu_x(G_n^{(x)} \times \mathbb{R}^s) = \lim_{n\to\infty} \mu_x^{(E)}(G_n^{(x)}) = \mu_x^{(E)}(M)\,.$$

Pro každé $x \in \mathscr{H}$ tedy platí implikace

$$\mu_x^{(E)}(M) = 0 \Rightarrow \mu_x(M \times \mathbb{R}^s) = 0\,. \tag{13}$$

Užijeme-li dále rovnosti $\mu_x(M_G^{(x)} \times \mathbb{R}^s) = \lim_{n\to\infty} \mu_x(G_n^{(x)} \times \mathbb{R}^s) = \mu_x^{(E)}(M)$, která vyplývá z (9.1.4b), (11) a (12), dostáváme pro každé $x \in \mathscr{H}$

$$\mu_x^{(E)}(M) = \mu_x(M_G^{(x)} \times \mathbb{R}^s) = \mu_x((M_G^{(x)} \setminus M) \times \mathbb{R}^s) + \mu_x(M \times \mathbb{R}^s) = \mu_x(M \times \mathbb{R}^s)\,,$$

neboť $\mu_x((M_G^{(x)} \setminus M) \times \mathbb{R}^s) = 0$ podle (12) a (13). Podmínka (10b) je tedy splněna, takže platí první z rovností (10a); druhá z těchto rovností se dokáže obdobně. ■

9.2.7 Poznámky: (a) Formule (9) má analogický tvar jako vztah (A.8.1) pro direktní součin číselných měr. Ovšem míra $\mu_x(.) \equiv (x, P(.)\, x)$ není direktním součinem měr $\mu_x^{(E)}$ a $\mu_x^{(F)}$; podle vztahu (9) platí $\mu_x(M \times N) = (x, E(M)\, F(N)\, x)$, zatímco z (A.8.1) plyne

$$(\mu_x^{(E)} \otimes \mu_x^{(F)})\,(M \times N) = (x, E(M)\, x)\,(x, F(N)\, x)\,.$$

(b) Popsanou konstrukci direktního součinu lze bezprostředně zobecnit pro libovolný konečný systém komutujících projektorových měr. Užívá se jí např. k odvození spektrálního rozkladu normálního operátoru (viz § 10.2) nebo při studiu množin komutujících samosdružených operátorů $A_1, \ldots, A_N$ (§ 10.7).

9.3 FUNKCIONÁLNÍ POČET: PŘÍPAD OMEZENÝCH FUNKCÍ

V tomto a následujícím paragrafu probereme základy teorie integrálu vzhledem k projektorové míře $E(.)$ na $\mathbb{R}^d$ s hodnotami v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Nejprve se seznámíme s integrací omezených borelovských funkcí $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$. V tomto případě představuje integrál omezené lineární zobrazení $\varphi \mapsto \mathscr{T}_b(\varphi)$ Banachova prostoru $L^\infty(\mathbb{R}^d, dE)$, který budeme za okamžik specifikovat, do prostoru $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Je zvykem nazývat toto zobrazení *funkcionálním počtem* (pro omezené funkce).

Množinu E-s.v. definovaných a omezených borelovských funkcí $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ označíme symbolem $L^\infty(\mathbb{R}^d, dE)$, přičemž jako obvykle ztotožňujeme funkce, které se liší nejvýše na E-nulové množině. Stejně jako v případě množin $L^\infty(M, d\mu)$ z příkladu 1.3.3 (viz též cvičení 1.13 a příklad 2.2.1) lze ověřit, že $L^\infty(\mathbb{R}^d, dE)$ je B-prostor s normou $\|.\|_\infty$, kde $\|\varphi\|_\infty$ je nejmenší z čísel $c \geqq 0$, takových, že $|\varphi(t)| \leqq c$ pro E-s.v. $t \in \mathbb{R}^d$. Prvky tohoto prostoru lze charakterizovat také pomocí tzv. *podstatného oboru hodnot* (viz též příklad 7.3.8)

$$R_{\text{ess}}^{(E)}(\varphi) := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon E(\varphi^{(-1)}(U_\varepsilon(\lambda))) \neq 0 \quad \text{pro každé } \varepsilon > 0\}\,. \tag{1}$$

Borelovská funkce φ patří do $L^\infty(\mathbb{R}^d, dE)$ právě tehdy, když množina $R_{\text{ess}}^{(E)}(|\varphi|)$ je omezená (cvičení 10).[1])

Integrál budeme definovat nejprve pro jednoduché borelovské funkce $\sigma\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$; množinu všech takových funkcí označíme S_d. Jestliže

$$\sigma = \sum_j \alpha_j \chi_{M_j}\,, \tag{2a}$$

[1]) V souvislosti s tímto tvrzením je vhodné připomenout, že $R_{\text{ess}}^{(E)}(\varphi) = R_{\text{ess}}^{(E)}(\psi)$, jestliže $\varphi(t) = \psi(t)$ pro E-s.v. $t \in \mathbb{R}^d$.

kde α_j jsou komplexní a $\{M_j\} \subset \mathcal{B}^d$ je konečný disjunktní systém takový, že $\bigcup_j M_j = \mathbb{R}^d$, položíme

$$\mathcal{T}_b(\sigma) \equiv \int \sigma \, dE := \sum_j \alpha_j \, E(M_j) \,. \tag{2b}$$

Speciálně pro konstantní funkci $\sigma = c$ dostáváme

$$\mathcal{T}_b(c) = cI \,. \tag{2c}$$

9.3.1 Poznámky: (a) Budeme užívat též označení $\mathcal{T}_b^{(E)}$, pokud bude nutné zdůraznit závislost na projektorové míře.

(b) Pokud integrály vzhledem k projektorové míře $E(.)$ (a číselným mírám $\mu_x(.) = (x, E(.)\,x)$, resp. $\nu_{x,y}(.) = (x, E(.)\,y)$) jsou uvedeny bez integračního oboru, rozumí se, že se integruje přes celý prostor $\mathbb{R}^d$.

(c) Zápis jednoduché funkce ve tvaru (2a) není jednoznačný pokud nepožadujeme, aby čísla α_j byla navzájem různá. Z aditivity projektorové míry však ihned vyplývá, že operátor $\mathcal{T}_b(\sigma)$ na způsobu zápisu funkce σ nezávisí.

(d) Je zřejmé, že množinu S_d lze chápat jako podmnožinu prostoru $L^\infty(\mathbb{R}^d, dE)$ pro libovolnou projektorovou míru $E(.)$. Potom pro každé $\sigma \in S_d$ můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že pro všechny množiny M_j ve formuli (2a) platí $E(M_j) \neq 0$.

Prostor $L^\infty(\mathbb{R}^d, dE)$ se stane komutativní algebrou (viz § 12.1), zavedeme-li v něm bodové násobení $[\varphi, \psi] \mapsto \varphi\psi$. Snadno se přesvědčíme o tom, že množina S_d je podalgebrou v $L^\infty(\mathbb{R}^d, dE)$. Vztah (2b) zadává zobrazení $\mathcal{T}_b \colon S_d \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ s následujícími vlastnostmi.

9.3.2 Lemma: Zobrazení $\mathcal{T}_b$ je lineární a splňuje vztahy

$$\mathcal{T}_b(\bar{\sigma}) = (\mathcal{T}_b(\sigma))^* \,, \tag{3}$$

$$\|\mathcal{T}_b(\sigma)\| = \|\sigma\|_\infty \,, \tag{4}$$

$$\mathcal{T}_b(\sigma\tau) = \mathcal{T}_b(\sigma)\,\mathcal{T}_b(\tau) = \mathcal{T}_b(\tau)\,\mathcal{T}_b(\sigma) \tag{5}$$

pro všechna σ a $\tau \in S_d$.

Vlastnosti (5) se říká *multiplikativita.* Pomocí terminologie zavedené v kapitole 12 lze uvedené vlastnosti zobrazení $\mathcal{T}_b$ vyjádřit takto: $\mathcal{T}_b$ je izometrický $*$-morfismus podalgebry $S_d \subset L^\infty(\mathbb{R}^d, dE)$ do B-algebry $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Důkaz: Rovnost (3) je zřejmá. Jestliže $\sigma \equiv \sum_j \alpha_j \chi_{M_j}$, $\tau \equiv \sum_k \beta_k \chi_{N_k}$ a $\gamma \in \mathbb{C}$ potom pomocí (9.1.3a) a vztahů $\sum_j E(M_j) = \sum_k E(N_k) = E(\mathbb{R}^d) = I$ dostáváme

$$\mathcal{T}_b(\gamma\sigma + \tau) = \sum_{j,k} (\gamma\alpha_j + \beta_k)\, E(M_j \cap N_k) =$$

$$= \gamma \sum_j \alpha_j \, E(M_j) \sum_k E(N_k) + \sum_k \beta_k \, E(N_k) \sum_j E(M_j) = \gamma\, \mathcal{T}_b(\sigma) + \mathcal{T}_b(\tau) \,.$$

Zobrazení $\mathcal{T}_b$ je tedy lineární, a analogicky ověříme multiplikativitu. Konečně pro libovolné $x \in \mathcal{H}$ z ortogonality projektorů $E(M_j)$ a podmínky $\sum_j E(M_j) = I$ plyne $\|\mathcal{T}_b(\sigma)\, x\|^2 = \sum_j |\alpha_j|^2 (x, E(M_j)\, x) \leqq \|\sigma\|_\infty^2 \|x\|^2$, neboť $\|\sigma\|_\infty = \max_j |\alpha_j|$. Odtud dostáváme nerovnost $\|\mathcal{T}_b(\sigma)\| \leqq \|\sigma\|_\infty$. Abychom získali rovnost, uvažujme (borelovskou) množinu $M_{\max}$, na níž nabývá funkce $|\sigma|$ hodnoty $\|\sigma\|_\infty$. Potom $E(M_{\max}) \neq 0$ (viz poznámku 1d) a pro každý jednotkový vektor $e \in \operatorname{Ran} E(M_{\max})$ platí $\|\mathcal{T}_b(\sigma)\, e\| = \|\sigma\|_\infty$, takže $\|\mathcal{T}_b(\sigma)\| \geqq \|\sigma\|_\infty$. ■

V dalším kroku rozšíříme zobrazení $\mathcal{T}_b$ na celý prostor $L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}E)$. K tomu lze užít věty 3.2.4, neboť podprostor S_d je podle tvrzení A.2.6 hustý v $L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}E)$ a díky vztahu (4) je $\mathcal{T}_b$ spojité lineární zobrazení z S_d do $\mathscr{B}(\mathcal{H})$. Existuje tudíž jednoznačné rozšíření, které je spojitým lineárním zobrazením prostoru $L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}E)$ do $\mathscr{B}(\mathcal{H})$; budeme pro ně užívat stejného symbolu $\mathcal{T}_b$. Pro každé $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}E)$ potom definujeme

$$\int \varphi \,\mathrm{d}E := \mathcal{T}_b(\varphi) = \operatorname*{u-lim}_{n \to \infty} \mathcal{T}_b(\sigma_n)\,, \tag{6}$$

kde $\{\sigma_n\} \subset S_d$ je libovolná posloupnost taková, že $\|\varphi - \sigma_n\|_\infty \to 0$. Podobně jako v případě integrálů vzhledem k číselné míře budeme užívat následujícího alternativního zápisu

$$\int \varphi(t_1, \ldots, t_d)\, \mathrm{d}E(t_1, \ldots, t_d) \equiv \int \varphi \,\mathrm{d}E\,.$$

Najdeme pro libovolná $x, y \in \mathcal{H}$ integrální vyjádření „maticového elementu“ $(x, \mathcal{T}_b(\varphi), y) = \lim_{n \to \infty} (x, \mathcal{T}_b(\sigma_n)\, y)$. Pomocí vztahu (2b) a tvrzení 9.1.2c dostáváme

$$(x, \mathcal{T}_b(\sigma_n)\, x) = \sum_j \alpha_j^{(n)} \mu_x(M_j^{(n)}) = \int \sigma_n \,\mathrm{d}\mu_x\,.$$

Nyní z nerovnosti

$$\left| \int \varphi \,\mathrm{d}\mu_x - \int \sigma_n \,\mathrm{d}\mu_x \right| \leqq \|\varphi - \sigma_n\|_\infty (x, E(\mathbb{R}^d)\, x) = \|\varphi - \sigma_n\|_\infty \|x\|^2$$

plyne pro „diagonální“ maticové elementy

$$(x, \mathcal{T}_b(\varphi)\, x) = \int \varphi \,\mathrm{d}\mu_x\,.$$

Pomocí polarizační rovnosti odtud získáme formuli analogického tvaru i pro nediagonální případ

$$(x, \mathcal{T}_b(\varphi)\, y) \equiv \left(x, \int \varphi \,\mathrm{d}E y\right) = \int \varphi \,\mathrm{d}\nu_{xy}\,. \tag{7}$$

Při výpočtu maticových elementů operátoru $\int \varphi \, \mathrm{d}E$ je tedy možno, zhruba řečeno, zaměnit pořadí integrování a utvoření skalárního součinu.

9.3.3 Věta (*pravidla funkcionálního počtu pro omezené funkce*): Zobrazení $\varphi \mapsto \mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\varphi) \equiv \int \varphi \, \mathrm{d}E$ prostoru $L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}E)$ do $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ definované vztahem (6) má následující vlastnosti:

(a) je lineární a multiplikativní;

(b) pro každé $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}E)$ platí

$$\|\mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\varphi)\| = \|\varphi\|_\infty \quad \text{a} \quad \mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\bar{\varphi}) = (\mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\varphi))^*;$$

(c) operátor $\mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\varphi)$ je normální pro každé $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}E)$ a jeho spektrum je totožné s podstatným oborem hodnot funkce φ

$$\sigma(\mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\varphi)) = R_{\mathrm{ess}}^{(E)}(\varphi); \tag{8}$$

(d) jestliže $\{\varphi_n\} \subset L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}E)$ je posloupnost taková, že pro E-s. v. $t \in \mathbb{R}^d$ existuje $\varphi(t) := \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)$, a množina $\{\|\varphi_n\|_\infty : n = 1, 2, \ldots\}$ je omezená, potom funkce φ patří do $L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}E)$ a

$$\mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\varphi) = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} \mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\varphi_n). \tag{9}$$

Důkaz: (a) Linearita plyne z lemmatu 2 a věty 3.2.4. Nechť $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}E)$ a pro posloupnost $\{\sigma_n\} \subset S_d$ platí $\|\varphi - \sigma_n\|_\infty \to 0$ (obdobně $\|\psi - \tau_n\|_\infty \to 0$ pro $\{\tau_n\} \subset S_d$). Díky spojitosti násobení v $L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}E)$, jež je důsledkem nerovnosti $\|\varphi\psi\|_\infty \leqq \|\varphi\|_\infty \|\psi\|_\infty$, dostáváme $\lim_{n\to\infty} \|\varphi\psi - \sigma_n\tau_n\|_\infty = 0$. Potom definiční vztah (6) dává $\mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\varphi\psi) = \operatorname*{u-lim}_{n\to\infty} \mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\sigma_n\tau_n)$ a odtud plyne multiplikativita užitím rovnosti (5) a věty 5.1.1.

(b) Ze vztahů (6) a (4) vyplývá $\|\mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\varphi)\| = \lim_{n\to\infty} \|\mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\sigma_n)\| = \lim_{n\to\infty} \|\sigma_n\|_\infty = \|\varphi\|_\infty$. Podobně rovnost $\mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\bar{\varphi}) = \mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\varphi)^*$ je důsledkem vztahu (3) a spojitosti involuce vůči stejnoměrné topologii na $\mathscr{B}(\mathscr{H})$.

(c) Pomocí tvrzení (a) a (b) dostáváme $\mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\varphi)^* \mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\varphi) = \mathscr{T}_{\mathrm{b}}(|\varphi|^2) = \mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\varphi) \mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\varphi)^*$, takže $\mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\varphi)$ je normální operátor. Podle důsledku 5.6.4 je podmínka

$$\inf\{\|(\mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\varphi) - \lambda)\, x\|^2 : x \in \mathscr{H}, \|x\| = 1\} = 0$$

nutná a postačující pro to, aby λ patřilo do jeho spektra. Pomocí vztahu (2c), tvrzení (a), (b) a rovnosti (7) dostáváme

$$\|(\mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\varphi) - \lambda)\, x\|^2 = (x, \mathscr{T}_{\mathrm{b}}(|\varphi - \lambda|^2)\, x) = \int |\varphi - \lambda|^2 \, \mathrm{d}\mu_x. \tag{10}$$

Nechť $\lambda \in R_{\mathrm{ess}}^{(E)}(\varphi)$; označíme-li $M_{\varepsilon,\lambda} := \varphi^{(-1)}(U_\varepsilon(\lambda))$, je projektor $E(M_{\varepsilon,\lambda})$ nenulový pro každé $\varepsilon > 0$. Užijeme-li toho, že $E(M_{\varepsilon,\lambda}) = \mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\chi_{M_{\varepsilon,\lambda}})$, dostaneme ze vztahu (10) pro každý jednotkový vektor $x \in \operatorname{Ran} E(M_{\varepsilon,\lambda})$ nerovnost

$$\|(\mathscr{T}_b(\varphi) - \lambda)\, x\|^2 = \|\mathscr{T}_b(\varphi - \lambda)\, E(M_{\varepsilon,\lambda})\, x\|^2 =$$
$$= \int |\varphi - \lambda|^2\, \chi_{M_{\varepsilon,\lambda}}\, \mathrm{d}\mu_x < \varepsilon^2(x, E(M_{\varepsilon,\lambda})\, x) = \varepsilon^2 .$$

Platí tedy inkluze $R_{\mathrm{ess}}^{(E)}(\varphi) \subset \sigma(\mathscr{T}_b(\varphi))$. Jestliže naopak $\lambda \notin R_{\mathrm{ess}}^{(E)}(\varphi)$, potom $M_{\varepsilon,\lambda}$ je E-nulová množina pro nějaké $\varepsilon > 0$; pro každé $x \in \mathscr{H}$ potom dostaneme $\mu_x(\mathbb{R}^d \setminus M_{\varepsilon,\lambda}) = \mu_x(\mathbb{R}^d) = \|x\|^2$ a rovnost (10) dává

$$\|(\mathscr{T}_b(\varphi) - \lambda)\, x\|^2 = \int_{\mathbb{R}^d \setminus M_{\varepsilon,\lambda}} |\varphi - \lambda|^2\, \mathrm{d}\mu_x \geqq \varepsilon^2 \|x\|^2 ,$$

takže $\lambda \in \sigma(\mathscr{T}_b(\varphi))$.

(d) To, že funkce φ patří do $L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}E)$, plyne snadno z příslušných definic (srv. s cvičením 1.13). Díky tomu, že pro všechna n platí $\|\varphi_n\|_\infty \leqq c$ a že μ_x je konečná míra, má posloupnost $|\varphi - \varphi_n|^2$ integrabilní majorantu $(\|\varphi\|_\infty + c)^2$. Dále je pro každé $x \in \mathscr{H}$ splněna rovnost

$$\|(\mathscr{T}_b(\varphi) - \mathscr{T}_b(\varphi_n))\, x\|^2 = \int |\varphi - \varphi_n|^2\, \mathrm{d}\mu_x ,$$

z níž plyne vztah (9) na základě Lebesgueovy věty. ■

9.3.4 Důsledek: Operátor $\mathscr{T}_b(\varphi)$ je nulový právě tehdy, když $\varphi(t) = 0$ pro E-s. v. $t \in \mathbb{R}^d$, a je hermitovský právě tehdy, když $\varphi(t) \in \mathbb{R}$ pro E-s. v. $t \in \mathbb{R}^d$.

9.3.5 Příklad: Pro diskrétní projektorovou míru $E_D(.)$ na $\mathbb{R}$ s *konečným nosičem* existuje velmi jednoduchý obecný tvar operátoru $\mathscr{T}_b(\varphi)$. Nechť množina $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$ je nosičem míry $E_D(.)$, tj. $\sum_{j=1}^{N} E_D(\{\lambda_j\}) = I$. Potom každá funkce $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{d}E)$ je E_D-s. v. rovna jednoduché funkci, jež nabývá hodnot $\varphi_j := \varphi(\lambda_j)$ pro $t = \lambda_j$, $1 \leqq j \leqq N$, a je nulová pro všechna ostatní $t \in \mathbb{R}$. Označíme-li $P_j := E_D(\{\lambda_j\})$, dostáváme podle definičního vztahu (2b)

$$\mathscr{T}_b(\varphi) = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j P_j . \tag{11a}$$

Tvrdíme, že ke každému $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{d}E)$ existuje polynom Q_φ stupně nejvýše $N - 1$ takový, že $\mathscr{T}_b(\varphi) = \mathscr{T}_b(Q_\varphi)$. Skutečně, podle (11a) a důsledku (4) je uvedená rovnost ekvivalentní podmínkám $Q_\varphi(\lambda_j) = \varphi_j$ pro $j = 1, 2, \ldots, N$. Píšeme-li $Q_\varphi(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k t^k$, dostáváme z těchto podmínek soustavu N rovnic pro koeficienty $a_0, \ldots, a_{N-1}$; tato soustava má pro každou N-tici $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ právě jedno řešení, neboť její determinant je roven součinu $\prod_{j=2}^{N}\prod_{k=1}^{j-1}(\lambda_j - \lambda_k)$. Dále z linearity a multiplikativity plyne $\mathcal{T}_b(Q_\varphi) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k A_D^k$, kde A_D je hermitovský operátor, který je $\mathcal{T}_b$-obrazem funkce id: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde

$$\mathrm{id}(t) := t\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,. \tag{12}$$

V případě projektorové míry E_D na $\mathbb{R}$ s konečným nosičem $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ lze tedy pro každé $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{d}E_D)$ zapsat operátor $\mathcal{T}_b(\varphi)$ ve tvaru

$$\mathcal{T}_b(\varphi) \equiv \int \varphi \,\mathrm{d}E_D = \sum_{k=0}^{N-1} a_k A_D^k\,, \tag{11b}$$

kde $A_D := \int t \,\mathrm{d}E_D(t)$ a čísla $a_0, \dots, a_{N-1}$ jsou řešením soustavy $\sum_{k=0}^{N-1} a_k \lambda_j^k = \varphi(\lambda_j)$, pro $j = 1, \dots, N$. Tento výsledek speciálně platí pro každou projektorovou míru na $\mathbb{R}$ s hodnotami v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, pokud $\dim \mathcal{H} < \infty$ (viz příklad 9.1.7).

9.3.6 Příklad: Nechť $E(.)$ je projektorová míra na $\mathbb{R}$, která je generována rozkladem jedničky $\{E_t\}$. Předpokládejme, že $E_t = 0$ a $E_{t'} = I$ pro nějaká $t, t' \in \mathbb{R}$ a položme $\alpha := \sup\{t \in \mathbb{R}\colon E_t = 0\}$, $\beta := \inf\{t \in \mathbb{R}\colon E_t = I\}$. Ze spojitosti plyne $E_{\alpha-0} = 0$, $E_\beta = I$, takže $E(-\infty, \alpha) = E(\beta, +\infty) = 0$. Vzhledem k tomu platí $\mathrm{id} \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{d}E)$; určíme dolní a horní hranici hermitovského operátoru $A_E := \mathcal{T}_b(\mathrm{id})$. Ze vztahu (7) plyne $\sup\,(x, A_E x) \leqq \beta$; ukážeme, že nastává rovnost. Pro každé $\varepsilon > 0$ máme $E_{\beta-\varepsilon} \ne I$, takže $E(\beta - \varepsilon, \beta]$ je nenulový projektor a pro libovolný jednotkový vektor $x_\varepsilon \in \mathrm{Ran}\, E(\beta - \varepsilon, \beta]$ platí

$$(x_\varepsilon, A_E x_\varepsilon) = (x_\varepsilon, A_E \mathcal{T}_b(\chi_{(\beta-\varepsilon,\beta]})\, x_\varepsilon) = \int_{(\beta-\varepsilon,\beta]} t \,\mathrm{d}\mu_{x_\varepsilon}(t) > \beta - \varepsilon\,.$$

Podobně se ověří, že dolní hranicí operátoru A_E je číslo α.

9.3.7 Příklad: Uvažujme projektorovou míru $P(.)$ na $\mathbb{R}^2$, která je určena komutujícími rozklady jedničky $\{E_t\}$ a $\{F_t\}$ (viz cvičení 7). Projektorové míry na $\mathbb{R}$ generované těmito rozklady jedničky označíme $E(.)$ a $F(.)$. K dané borelovské funkci $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sestrojíme funkci $\varphi_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ podle předpisu

$$\varphi_1(t, u) := \varphi(t)\,; \tag{13a}$$

Užijeme-li označení z poznámky A.1.8c, můžeme funkci φ_1 zapsat ve tvaru

$$\varphi_1 = \varphi \times e\,, \tag{13b}$$

kde $e(u) := 1$ pro všechna $u \in \mathbb{R}$. Ukážeme, že

$$\int \varphi_1 \, \mathrm{d}P = \int \varphi \, \mathrm{d}E .$$

Je zřejmé, že pro libovolnou množinu $K \subset \mathbb{C}$ platí rovnost $\varphi_1^{(-1)}(K) = \varphi^{(-1)}(K) \times \mathbb{R}$; funkce φ_1 je proto borelovská. Dále pomocí vztahu (9.2.9) zjistíme, že podmínky $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{d}E)$ a $\varphi_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}P)$ jsou ekvivalentní, přičemž

$$\|\varphi\|_\infty = \|\varphi_1\|_\infty . \tag{14}$$

Jestliže $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{d}E)$, existuje posloupnost jednoduchých funkcí $\sigma_n \equiv \sum_j \alpha_j^{(n)} \chi_{M_j^{(n)}}$ takových, že $\|\sigma_n - \varphi\|_\infty \to 0$; potom $\int \varphi \, \mathrm{d}E = \operatorname*{u-lim}_{n\to\infty} \int \sigma_n \, \mathrm{d}E$. Jednoduché jsou též funkce $\sigma_n \times e$; pro ně z rovnosti (9.2.9) plyne

$$\int (\sigma_n \times e) \, \mathrm{d}P = \sum_j \alpha_j^{(n)} P(M_j^{(n)} \times \mathbb{R}) = \sum_j \alpha_j^{(n)} E(M_j^{(n)}) = \int \sigma_n \, \mathrm{d}E . \tag{15}$$

Dále z podmínky $\|\sigma_n - \varphi\|_\infty \to 0$ a vztahu (14) plyne $\|\sigma_n \times e - \varphi_1\|_\infty \to 0$; rovnost (15) potom dává

$$\int \varphi(t) \, \mathrm{d}P(t, u) \equiv \int \varphi_1 \, \mathrm{d}P = \operatorname*{u-lim}_{n\to\infty} \int (\sigma_n \times e) \, \mathrm{d}P = \operatorname*{u-lim}_{n\to\infty} \int \sigma_n \, \mathrm{d}E =$$

$$= \int \varphi \, \mathrm{d}E \equiv \int \varphi(t) \, \mathrm{d}E(t) . \tag{16a}$$

Obdobně získáme pro funkci $\psi_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, kde $\psi_2(t, u) := \psi(u)$ a $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{d}F)$, vztahy $\psi_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}P)$ a

$$\int \psi(u) \, \mathrm{d}P(t, u) \equiv \int \psi_2 \, \mathrm{d}P = \int \psi \, \mathrm{d}F \equiv \int \psi(u) \, \mathrm{d}F(u) \tag{16b}$$

(viz též cvičení 13).

V následujícím tvrzení jsou zkombinována pravidla funkcionálního počtu s vlastnostmi Bochnerova integrálu (viz § 3.7). Pro jednoduchost důkazu uvádíme tvrzení v dosti speciálním tvaru; uvedené předpoklady jsou však pro většinu aplikací splněny.

9.3.8 Tvrzení: Nechť funkce $\psi \colon \mathbb{R} \times J \to \mathbb{C}$, kde $J \subset \mathbb{R}$ je libovolný interval, splňuje následující podmínky:

(i) pro všechna $u \in J$ je $\psi^{(u)} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\psi^{(u)}(t) := \psi(t, u)$, omezená borelovská funkce,

(ii) pro všechna $t \in \mathbb{R}$ funkce $\psi_t\colon J \to \mathbb{C}$, $\psi_t(u) := \psi(t, u)$ patří do $\mathscr{L}(J, \mathrm{d}m)$,
(iii) funkce $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definované vztahy

$$\varphi(t) := \int_J \psi_t(u)\, \mathrm{d}u\,, \qquad \eta(t) := \int_J |\psi_t(u)|\, \mathrm{d}u$$

jsou omezené a borelovské. Nechť dále zobrazení $u \mapsto B(u) := \mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\psi^{(u)}) \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je spojité na J vzhledem ke stejnoměrné topologii, a pokud je J nekompaktní, nechť existují příslušné jednostranné limity v krajních bodech. Nechť konečně $\|B(.)\| \in \mathscr{L}(J, \mathrm{d}m)$, kde $\|B\|(u) := \|B(u)\| = \|\psi^{(u)}\|_\infty$, $u \in J$. Potom $B(.) \in \mathfrak{B}_{\mathscr{B}(\mathscr{H})}(J, \mathrm{d}m)$ a platí

$$\int_J B(u)\, \mathrm{d}u = \int_J \left[\int_{\mathbb{R}} \psi(t, u)\, \mathrm{d}E(t)\right] \mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_J \psi(t, u)\, \mathrm{d}u\right] \mathrm{d}E(t) = \mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\varphi)\,.$$

Důkaz: Integrabilita vektorové funkce $B(.)$ plyne ze cvičení 3.38 a věty 3.7.4c. Položme $C := \int_J B(u)\, \mathrm{d}u \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Pro libovolné $x \in \mathscr{H}$ podle tvrzení 3.7.6 a vztahu (7) platí

$$(x, Cx) = \int_J (x, B(u)\, x)\, \mathrm{d}u = \int_J \left[\int_{\mathbb{R}} \psi^{(u)}(t)\, \mathrm{d}\mu_x(t)\right] \mathrm{d}u\,.$$

Dále z předpokladu (iii) dostáváme $\eta \in \mathscr{L}(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu_x)$ pro všechna $x \in \mathscr{H}$ a odtud plyne $\psi \in \mathscr{L}(\mathbb{R} \times J, \mathrm{d}(\mu_x \otimes m))$ (viz poznámku A.8.5). Pomocí Fubiniovy věty pak získáme vztah

$$(x, Cx) = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_J \psi_t(u)\, \mathrm{d}u\right] \mathrm{d}\mu_x(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, \mathrm{d}\mu_x(t) = (x, \mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\varphi)\, x)\,,$$

z nějž díky omezenosti operátorů C a $\mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\varphi)$ plyne rovnost $C = \mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\varphi)$. ■

9.4 FUNKCIONÁLNÍ POČET: OBECNÝ PŘÍPAD

Pro danou projektorovou míru $E(.)$ na $\mathbb{R}^d$ s hodnotami v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ označíme symbolem $\Phi_E(\mathbb{R}^d)$ množinu všech E-s. v. definovaných komplexních borelovských funkcí. Definujeme-li rovnost prvků této množiny a algebraické operace stejně jako v prostoru $L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}E)$, stane se $\Phi_E(\mathbb{R}^d)$ komutativní algebrou, v níž množina $L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}E)$ tvoří podalgebru. Naším cílem je rozšířit funkcionální počet $\mathscr{T}_{\mathrm{b}}\colon L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}E) \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ na zobrazení, které přiřazuje každé funkci $\varphi \in \Phi_E(\mathbb{R}^d)$ lineární operátor $\mathscr{T}(\varphi)$ (obecně neomezený); jeho definiční obor označíme D_φ.

Konstrukce zobrazení $\mathcal{T}$ vychází ze vztahů $\int |\varphi|^2 \, d\mu_x < \infty$ a $\|\mathcal{T}_b(\varphi) \, x\|^2 = \int |\varphi|^2 \, d\mu_x$, kde $\mu_x(.) \equiv \|E(.) \, x\|^2$ (viz 9.3.10)), které platí pro všechna $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^d, dE)$ a $x \in \mathcal{H}$. Tyto vztahy budou platit i pro funkce $\varphi \in \Phi_E(\mathbb{R}^d)$, které nejsou omezené, položíme-li

$$D_\varphi := \left\{ x \in \mathcal{H}: \int |\varphi|^2 \, d\mu_x < \infty \right\}. \tag{1a}$$

O vhodnosti této volby svědčí následující vlastnost množiny D_φ (viz též níže poznámku 2).

9.4.1 Tvrzení: Pro každé $\varphi \in \Phi_E(\mathbb{R}^d)$ je vztahem (1a) určen podprostor, který je všude hustý v $\mathcal{H}$.

Důkaz: Pomocí nerovnosti $\|u + v\|^2 \leqq 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ dostáváme pro každou množinu $M \in \mathcal{B}^d$, všechna $x, y \in \mathcal{H}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ nerovnost

$$\mu_{\alpha x + y}(M) = \|E(M) \, (\alpha x + y)\|^2 \leqq 2|\alpha|^2 \mu_x(M) + 2\mu_y(M).$$

Odtud ihned vyplývá, že D_φ je podprostor (viz formule (A.6.23) a poznámku A.6.12). K ověření vztahu $\overline{D_\varphi} = \mathcal{H}$ zavedeme pro $n = 1, 2, \ldots$ množiny

$$M_n := \{ t \in \mathbb{R}^d : |\varphi(t)| \leqq n \}. \tag{2}$$

To je neklesající systém borelovských množin, a protože funkce φ je E-s.v. definovaná, platí $E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \right) = E(\mathbb{R}^d) = I$. Podle tvrzení 9.1.2b potom pro každé $x \in \mathcal{H}$ máme $\|E(M_n) \, x - x\| \to 0$, a stačí tedy ukázat, že $x_n \equiv E(M_n) \, x \in D_\varphi$ pro $n = 1, 2. \ldots$. Z rovnosti (9.3.10) pro každé $N \in \mathcal{B}^d$ plyne

$$\mu_{x_n}(N) = \|E(N) \, x_n\|^2 = \|E(N \cap M_n) \, x\|^2 = \int \chi_N \chi_{M_n} \, d\mu_x = \int_N \chi_{M_n} \, d\mu_x \, ;$$

míra μ_{x_n} je tedy generována funkcí χ_{M_n} a mírou μ_x. Potom podle věty A.6.6b máme

$$\int |\varphi|^2 \, d\mu_{x_n} = \int |\varphi|^2 \chi_{M_n} \, d\mu_x = \int_{M_n} |\varphi|^2 \, d\mu_x \leqq n^2 \|x\|^2 ,$$

tj. $x_n \in D_\varphi$. ■

Pro dané $\varphi \in \Phi_E(\mathbb{R}^d)$ zkonstruujeme nyní operátor $\mathcal{T}(\varphi)$ s definičním oborem (1), takový, že $\|\mathcal{T}(\varphi) \, x\|^2 = \int |\varphi|^2 \, d\mu_x$ pro všechna $x \in D_\varphi$. Vezmeme libovolnou posloupnost $\{\varphi_n\} \subset L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}E)$ splňující pro E-s. v. $t \in \mathbb{R}^d$ podmínky

$$\varphi_n(t) \to \varphi(t)\,, \qquad |\varphi_n(t)| \leqq |\varphi(t)|\,. \tag{3}$$

Požadované vlastnosti má např. posloupnost $\varphi_n^{(0)} := \varphi\chi_{M_n}$, kde množiny M_n jsou určeny vztahem (2).

Nechť $x \in D_\varphi$; potom $\int|\varphi_n - \varphi_m|^2\,\mathrm{d}\mu_x < \infty$ a z nerovnosti

$$\|\mathscr{T}_\mathrm{b}(\varphi_n)\,x - \mathscr{T}_\mathrm{b}(\varphi_m)\,x\|^2 = \int|\varphi_n - \varphi_m|^2\,\mathrm{d}\mu_x \leqq$$
$$\leqq 2\int|\varphi_n - \varphi|^2\,\mathrm{d}\mu_x + 2\int|\varphi_m - \varphi|^2\,\mathrm{d}\mu_x\,,$$

podmínek (3) a Lebesgueovy věty vyplývá, že $\{\mathscr{T}_\mathrm{b}(\varphi_n)\,x\}$ je cauchyovská posloupnost. Existuje tudíž $\lim_{n\to\infty} \mathscr{T}_\mathrm{b}(\varphi_n)\,x \in \mathscr{H}$ a jednoduchou modifikací předchozí úvahy zjistíme, že tato limita je stejná pro všechny posloupnosti splňující podmínky (3). Vztahem

$$\mathscr{T}(\varphi)\,x := \lim_{n\to\infty} \mathscr{T}_\mathrm{b}(\varphi_n)\,x\,, \qquad x \in D_\varphi \tag{1b}$$

je tedy určen hustě definovaný lineární operátor $\mathscr{T}(\varphi)$ (linearita je důsledkem linearity operátorů $\mathscr{T}_\mathrm{b}(\varphi_n)$). Z uvedené definice a vztahu (9.3.10) plyne

$$\|\mathscr{T}(\varphi)\,x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|\mathscr{T}_\mathrm{b}(\varphi_n)\,x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int|\varphi_n|^2\,\mathrm{d}\mu_x = \int|\varphi|^2\,\mathrm{d}\mu_x \tag{4}$$

(poslední rovnost je opět důsledkem podmínek (3) a Lebesgueovy věty). Dále vidíme, že pro $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}E)$ platí $\mathscr{T}(\varphi) = \mathscr{T}_\mathrm{b}(\varphi)$ (lze volit $\varphi_n = \varphi$ pro všechna n). Zkonstruované zobrazení $\mathscr{T}$ je tedy rozšířením zobrazení $\mathscr{T}_\mathrm{b}$. Pro operátor $\mathscr{T}(\varphi)$ užíváme též názvu *integrál z funkce $\varphi \in \Phi_E(\mathbb{R}^d)$ vzhledem k projektorové míře* $E(.)$ a příslušného označení, tj.

$$\mathscr{T}(\varphi) \equiv \int \varphi\,\mathrm{d}E\,.$$

Integrál vzhledem k projektorové míře je tedy definován pro každé $\varphi \in \Phi_E(\mathbb{R}^d)$; ovšem pro $\varphi \notin L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}E)$ je to neomezený operátor, přičemž $D_\varphi \neq \mathscr{H}$ (viz dále tvrzení 6 a větu 10).

9.4.2 Poznámka: Konstrukce vedoucí k definici (1b) podstatně využívá podmínky $\int|\varphi|^2\,\mathrm{d}\mu_x < \infty$. Ukážeme, že pro vektory $x \in \mathscr{H}$, pro něž tato nerovnost neplatí, limita (1b) nemusí existovat, přestože jsou splněny podmínky (3). Uvažujme posloupnost $\varphi_n^{(0)} = \varphi\chi_{M_n}$; pro každé $x \in \mathscr{H}$ a libovolné přirozené $m > n$ dostáváme

$$\|\mathscr{T}_b(\varphi_n^{(0)})\, x - \mathscr{T}_b(\varphi_m^{(0)})\, x\|^2 = \int_{M_m \setminus M_n} |\varphi|^2\, d\mu_x = \sum_{j=n+1}^{m} \int_{N_j} |\varphi|^2\, d\mu_x\,,$$

kde $\{N_j\}$ je disjunktní systém určený vztahy $N_1 := M_1$ a $N_j := M_j \setminus M_{j-1}$ pro $j \geqq 2$, takže $\bigcup_{j=1}^{\infty} N_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = \mathbb{R}^d \setminus P$, kde $E(P) = 0$. Nyní je zřejmé, že posloupnost $\{\mathscr{T}_b(\varphi_n^{(0)})\, x\}$ je cauchyovská právě tehdy, když $\sum_{j=1}^{\infty} \int_{N_j} |\varphi|^2\, d\mu_x < \infty$, tj. když $\int |\varphi|^2\, d\mu_x < \infty$ (viz poznámku k větě A.6.6).

Odvodíme nyní postupně základní vlastnosti zobrazení $\varphi \mapsto \mathscr{T}(\varphi)$, tzv. pravidla funkcionálního počtu pro neomezené funkce. (Pokud nebude explicite uvedeno jinak, znamená až do konce tohoto paragrafu φ libovolnou funkci z $\Phi_E(\mathbb{R}^d)$ a všechny integrály se vztahují na celý prostor $\mathbb{R}^d$.) Rozdíl proti případu omezených funkcí je v podstatě v tom, že je třeba brát v úvahu definiční obory. Důkazy jsou však mnohdy značně komplikovanější, jak ukazuje hned následující tvrzení (srv. s formulí (9.3.7)).

9.4.3 Tvrzení: Pro všechna $y \in D_\varphi$ a všechna $x \in \mathscr{H}$ je funkce φ integrabilní na $\mathbb{R}^d$ vzhledem ke komplexní míře $\nu_{xy}(.) \equiv (x, E(.)\, y)$ a platí

$$(x, \mathscr{T}(\varphi)\, y) = \int \varphi\, d\nu_{xy}\,. \tag{5}$$

Důkaz: První tvrzení je ekvivalentní podmínce $\int |\varphi|\, d|\nu_{xy}| < \infty$, kde $|\nu_{xy}|$ je totální variace komplexní míry ν_{xy} (viz A.10.7c)). Pro danou borelovskou množinu M uvažujme libovolný konečný disjunktní systém $\{N_n\} \subset \mathscr{B}^d$ takový, že $\bigcup_k N_k = M$. Pomocí vztahu $|\nu_{xy}(N_k)| = |(x, E(N_k)\, y)| \leqq \|E(N_k)\, x\|\, \|E(N_k)\, y\| = (\mu_x(N_k)\, \mu_y(N_k))^{1/2}$ dostáváme

$$\sum_k |\nu_{xy}(N_k)| \leqq \sum_k (\mu_x(N_k))^{1/2} (\mu_y(N_k))^{1/2} \leqq \Big[\sum_k \mu_x(N_k) \sum_k \mu_y(N_k)\Big]^{1/2} = [\mu_x(M)\, \mu_y(M)]^{1/2}\,;$$

odtud plyne pro totální variaci odhad

$$|\nu_{xy}|\,(M) \leqq [\mu_x(M)\, \mu_y(M)]^{1/2}\,. \tag{6}$$

K ověření nerovnosti $\int |\varphi|\, d|\nu_{xy}| < \infty$ užijeme toho, že existuje neklesající posloupnost nezáporných jednoduchých funkcí $\sigma_n \equiv \sum_j c_{nj}\chi_{M_{nj}}$ taková, že pro všechna $t \in \mathbb{R}^d$ platí $\sigma_n(t) \leqq |\varphi(t)|$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(t) = |\varphi(t)|$, přičemž $\lim\limits_{n\to\infty} \int \sigma_n \, d|\nu_{xy}| = \int |\varphi| \, d|\nu_{xy}|$ (viz poznámku (b) k větě A.6.4). Současně pro každé n z nerovnosti $\sigma_n^2 \leqq |\varphi|^2$ plyne $\sum\limits_j c_{nj}^2 \, \mu_y(M_{nj}) \leqq \int |\varphi|^2 \, d\mu_y$; potom odhad (6) a Hölderova nerovnost dají

$$\int |\varphi| \, d|\nu_{xy}| = \lim_{n\to\infty} \int \sigma_n \, d|\nu_{xy}| = \lim_{n\to\infty} \sum_j c_{nj} |\nu_{xy}| \, (M_{nj}) \leqq$$
$$\leqq \lim_{n\to\infty} \sum_j c_{nj} [\mu_x(M_{nj}) \, \mu_y(M_{nj})]^{1/2} \leqq \lim_{n\to\infty} \mu_x(\mathbb{R}^d) \, [\sum_j c_{nj}^2 \, \mu_y(M_{nj})]^{1/2} \leqq$$
$$\leqq \mu_x(\mathbb{R}^d) \left[\int |\varphi|^2 \, d\mu_y \right]^{1/2}$$

a z podmínky $y \in D_\varphi$, tj. $\int |\varphi|^2 \, d\mu_y < \infty$, plyne $\int |\varphi| \, d|\nu_{xy}| < \infty$.

Nyní již snadno získáme rovnost (5). Vezmeme libovolnou posloupnost $\{\varphi_n\} \subset \subset L^\infty(\mathbb{R}^d, dE)$ splňující podmínky (3); pomocí vztahů (1b) a (9.3.7) dostáváme

$$(x, \mathcal{T}(\varphi) \, y) = \lim_{n\to\infty} (x, \mathcal{T}_b(\varphi_n) \, y) = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \, d\nu_{xy} = \int \varphi \, d\nu_{xy}$$

(poslední rovnost plyne z podmínek $\int |\varphi| \, d|\nu_{xy}| < \infty$ a (3) na základě Lebesgueovy věty). ■

9.4.4 Důsledek: Pro libovolná $x \in \mathcal{H}$ a $y \in D_\varphi$ je komplexní míra $\nu_{x,\mathcal{T}(\varphi)y}$ generována funkcí φ a komplexní mírou ν_{xy}, tj. pro každou množinu $M \in \mathcal{B}^d$ platí

$$\nu_{x,\mathcal{T}(\varphi)y}(M) = \int_M \varphi \, d\nu_{xy} \,. \tag{7}$$

Důkaz: Existence integrálu je zřejmá z tvrzení 3. Pomocí formule (5) dostáváme

$$\nu_{x,\mathcal{T}(\varphi)y}(M) = (x, E(M) \, \mathcal{T}(\varphi) \, y) = (E(M) \, x, \mathcal{T}(\varphi) \, y) = \int \varphi \, d\nu_{E(M)x,y} \,.$$

Nyní $\nu_{E(M)x,y} = \nu_{x,E(M)y}$ je komplexní míra generovaná funkcí χ_M a mírou ν_{xy} (cvičení 12); potom

$$\int \varphi \, d\nu_{E(M)x,y} = \int \varphi\chi_M \, d\nu_{xy} = \int_M \varphi \, d\nu_{xy} \,. \; ■$$

9.4.5 Příklad: Na prostoru $L^2 \equiv L^2(\mathbb{R}^d, d\varrho)$, kde ϱ je borelovská míra, uvažujme zobrazení $M \mapsto T_{\chi_M}$, které přiřazuje každé borelovské množině $M \subset \mathbb{R}^d$ operátor násobení charakteristickou funkcí χ_M; toto zobrazení je projektorová míra, kterou označíme $E^{(\varrho)}(.)$, tj. $E^{(\varrho)}(M) = T_{\chi_M}$ pro každé $M \in \mathcal{B}^d$ (viz příklad 9.1.3). Pro libovolná φ a $\psi \in L^2$ máme

$$(\varphi, E^{(\varrho)}(M)\,\psi) = \int \bar{\varphi}\chi_M \psi \,\mathrm{d}\varrho = \int_M \bar{\varphi}\psi\,\mathrm{d}\varrho\,, \tag{8}$$

takže komplexní míra $\nu^{(\varrho)}_{\varphi,\psi}(.) \equiv (\varphi, E^{(\varrho)}(.)\,\psi)$ je generována funkcí $\bar{\varphi}\psi$ a mírou ϱ.

Ukážeme, že pro každou borelovskou funkci $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ je operátor T_f násobení funkcí f z příkladu 7.3.3 totožný s operátorem $\mathscr{T}^{(\varrho)}(f) \equiv \int f\,\mathrm{d}E^{(\varrho)}$. Pomocí rovnosti (8) pro $\varphi = \psi$ a věty A.6.6b zjistíme, že z podmínky $\int |f|^2\,|\psi|^2\,\mathrm{d}\varrho < \infty$ plyne $\int |f|^2\,\mathrm{d}\mu^{(\varrho)}_\psi < \infty$ a naopak. To znamená, že operátory T_f a $\mathscr{T}^{(\varrho)}(f)$ mají stejný definiční obor. Dále pro libovolné $\psi \in D(T_f)$ a každé $\varphi \in L^2$ ze vztahů (5) a (8) dostáváme

$$(\varphi, \mathscr{T}^{(\varrho)}(f)\,\psi) = \int f\,\mathrm{d}\nu^{(\varrho)}_{\varphi,\psi} = \int f\bar{\varphi}\psi\,\mathrm{d}\varrho = (\varphi, T_f\psi)\,,$$

takže $\mathscr{T}^{(\varrho)}(f)\,\psi = T_f\psi$ pro všechna $\psi \in D(T_f) = D(\mathscr{T}^{(\varrho)}(f))$.

Zobrazení $\mathscr{T}$ jsme zkonstruovali tak, že platí $\mathscr{T}_{\mathrm{b}} \subset \mathscr{T}$; to znamená, že operátor $\mathscr{T}(\varphi)$ je omezený, jestliže $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}E)$. Tuto implikaci lze obrátit (srv. s příkladem 7.3.3).

9.4.6 Tvrzení: Operátor $\mathscr{T}(\varphi)$ patří do $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ právě tehdy, když $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}E)$.
Důkaz: Nechť $\mathscr{T}(\varphi) \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, tj. $\mathscr{T}(\varphi)$ je omezený a $D_\varphi = \mathscr{H}$. Ukážeme, že množina $M_\varphi := \{t \in \mathbb{R}^d\colon |\varphi(t)| > \|\mathscr{T}(\varphi)\|\}$ je E-nulová. Pro libovolné $x \in \mathscr{H}$ dostáváme $\|\mathscr{T}(\varphi)\,E(M_\varphi)\,x\|^2 \leqq \|\mathscr{T}(\varphi)\|^2\,\|E(M_\varphi)\,x\|^2$, což lze pomocí formule (4) zapsat ve tvaru

$$0 \geqq \int (|\varphi|^2 - \|\mathscr{T}(\varphi)\|^2)\,\mathrm{d}\mu_{E(M_\varphi)x} = \int_{M_\varphi} (|\varphi|^2 - \|\mathscr{T}(\varphi)\|^2)\,\mathrm{d}\mu_x\,.$$

Aby tato nerovnost nebyla ve sporu s tím, že pro všechny $t \in M_\varphi$ je integrand kladný, musí $\mu_x(M_\varphi) = 0$. Pro všechna $x \in \mathscr{H}$ tedy platí $E(M_\varphi)\,x = 0$, tj. množina M_φ je E-nulová. ■

9.4.7 Příklad: Nechť $E(.)$ je projektorová míra na $\mathbb{R}$ taková, že pro jisté $s \in \mathbb{R}$ a všechna $\delta > 0$ platí $E(s, s+\delta) \neq 0$. Nechť dále pro funkci $\varphi \in \Phi_E(\mathbb{R})$ platí $\lim\limits_{t\to s+} |\varphi(t)| = +\infty$, takže pro každé $K > 0$ obsahuje množina $\{t \in \mathbb{R}\colon |\varphi(t)| > K\}$ nějaké pravé okolí bodu s. Potom $\varphi \notin L^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{d}E)$ a operátor $\mathscr{T}(\varphi)$ tudíž není omezený (viz též cvičení 15).

Obecná pravidla funkcionálního počtu (vzhledem k jakékoli projektorové míře), která nyní uvedeme, jsou zcela analogická vlastnostem operátorů T_f z příkladu 7.3.3 a navíc je lze většinou dokázat obdobnými postupy (fakticky vystačíme s jednoduchou modifikací spočívající v tom, že místo každého operátoru násobení charakteristickou funkcí χ_M píšeme projektor $E(M)$ – srv. např. důkazy tvrzení 1 a vlastnosti (a) v příkladu 7.3.3).

9.4.8 Věta (*obecná pravidla funkcionálního počtu*): Pro danou projektorovou míru $E(.)$ na $\mathbb{R}^d$ s hodnotami v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ je každé borelovské E-s.v. definované funkci φ přiřazen podle vztahů (1a, b) hustě definovaný lineární operátor $\int \varphi \, dE \equiv \mathscr{T}(\varphi)$. Zobrazení $\varphi \mapsto \mathscr{T}(\varphi)$ má následující vlastnosti:

(a) $\mathscr{T}$ je homogenní: $\mathscr{T}(\alpha\varphi) = \alpha\mathscr{T}(\varphi)$ pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$.

(b) $\mathscr{T}(\varphi + \psi) \supset \mathscr{T}(\varphi) + \mathscr{T}(\psi)$, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když platí alespoň jedna z inkluzí $D_{\varphi+\psi} \subset D_\varphi$, $D_{\varphi+\psi} \subset D_\psi$.

(c) $\mathscr{T}(\varphi\psi) \supset \mathscr{T}(\varphi)\mathscr{T}(\psi)$, přičemž definiční obor operátoru na pravé straně je roven $D_{\varphi\psi} \cap D_\psi$; rovnost $\mathscr{T}(\varphi\psi) = \mathscr{T}(\varphi)\mathscr{T}(\psi)$ nastává právě tehdy, když $D_{\varphi\psi} \subset D_\psi$.

(d) $\mathscr{T}$ je injektivní, tj. z podmínky $\mathscr{T}(\varphi) = \mathscr{T}(\psi)$ plyne $\varphi(t) = \psi(t)$ pro E-s.v. $t \in \mathbb{R}^d$.

(e) $(\mathscr{T}(\varphi))^* = \mathscr{T}(\bar{\varphi})$.

(f) Operátor $\mathscr{T}(\varphi)$ je invertibilní právě tehdy, když množina $\operatorname{Ker} \varphi \equiv \varphi^{(-1)}(\{0\})$ je E-nulová; potom $\mathscr{T}(\varphi)^{-1} = \mathscr{T}(1/\varphi)$.

Důkaz: (a) Homogenita plyne přímo z definičních vztahů (1a, b).

(b) Jestliže $x \in D_\varphi \cap D_\psi$, platí současně $\int |\varphi|^2 \, d\mu_x < \infty$ a $\int |\psi|^2 \, d\mu_x < \infty$; odtud plyne $\int |\varphi + \psi|^2 \, d\mu_x < \infty$; tj. $x \in D_{\varphi+\psi}$. Potom pro libovolné $y \in \mathscr{H}$ pomocí vztahu (5) dostáváme $(y, \mathscr{T}(\varphi + \psi)\, x) = \int (\varphi + \psi) \, d\nu_{yx} = (y, \mathscr{T}(\varphi)\, x + \mathscr{T}(\psi)\, x)$. Tvrzení o rovnosti plyne ze vztahů $D_\varphi \cap D_\psi = D_{\varphi+\psi} \cap D_\varphi$ resp. $D_\varphi \cap D_\psi = D_{\varphi+\psi} \cap D_\psi$, které se snadno odvodí z inkluze $D_\varphi \cap D_\psi \subset D_{\varphi+\psi}$; skutečně, odtud vyplývá $D_\varphi \cap D_\psi \subset D_{\varphi+\psi} \cap D_\varphi$, a položíme-li zde $\eta = \varphi + \psi$ a $\tilde{\varphi} = -\varphi$, dostaneme $D_{\tilde{\varphi}} \cap D_{\eta+\tilde{\varphi}} \subset D_\eta \cap D_{\tilde{\varphi}}$.

(c) Nechť D je definiční obor operátoru $\mathscr{T}(\varphi)\mathscr{T}(\psi)$, tj. do D patří právě ty vektory x, pro něž jsou současně splněny podmínky $\int |\psi|^2 \, d\mu_x < \infty$ a $\int |\varphi|^2 \, d\mu_{\mathscr{T}(\psi)x} < \infty$. Druhou nerovnost lze zapsat ve tvaru $\int |\varphi|^2 \, |\psi|^2 \, d\mu_x < \infty$ (cvičení 17), neboli $x \in D_{\varphi\psi}$. Celkem dostáváme $D = D_\psi \cap D_{\varphi\psi}$, tj. $D \subset D_{\varphi\psi}$ a rovnost nastává právě tehdy, když $D_{\varphi\psi} \subset D_\psi$. Pro libovolná $x \in D$ a $y \in \mathscr{H}$ platí podle formulí (5) a (7)

$$(y, \mathscr{T}(\varphi)\mathscr{T}(\psi)\, x) = \int \varphi \, d\nu_{y,\mathscr{T}(\psi)x} = \int \varphi\psi \, d\nu_{yx} = (y, \mathscr{T}(\varphi\psi)\, x),$$

takže $\mathscr{T}(\varphi)\mathscr{T}(\psi)\, x = \mathscr{T}(\varphi\psi)\, x$ pro všechna $x \in D$.

(d) Množinu všech $t \in \mathbb{R}^d$, pro něž jsou definovány obě funkce φ a ψ, označíme $M_{\varphi\psi}$. Stačí dokázat, že $N := \{t \in M_{\varphi\psi} : |\varphi(t) - \psi(t)| > 0\}$ je E-nulová množina. Zapíšeme ji ve tvaru $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$, kde $N_n := \{t \in M_{\varphi\psi} : |\varphi(t) - \psi(t)| \geqq 1/n,$ $|\varphi(t)| \leqq n\}$. Pro všechna n platí $N_n \subset N_{n+1}$, takže $E(N) = \operatorname{s-lim}_{n\to\infty} E(N_n)$, a vztah

$E(N) = 0$ bude platit, jestliže $x_n \equiv E(N_n)\, x = 0$ pro všechna n a všechna $x \in \mathscr{H}$. Jelikož v bodech množiny N_n je $|\varphi(t)| \leqq n$, patří x_n do D_φ pro všechna n (viz důkaz tvrzení 1). Dále $D_\varphi = D_\psi$ a pomocí tvrzení (a), (b) dostáváme $\mathscr{T}(\varphi - \psi)\, x_n = (\mathscr{T}(\varphi) - \mathscr{T}(\psi))\, x_n = 0$. Formule (4) nyní dává

$$0 = \|\mathscr{T}(\varphi - \psi)\, x_n\|^2 = \int |\varphi - \psi|^2 \, d\mu_{x_n} = \int |\varphi - \psi|^2 \chi_{N_n} \, d\mu_x \geqq$$
$$\geqq \frac{1}{n^2} \int \chi_{N_n} \, d\mu_x = \frac{1}{n^2} \|E(N_n)\, x\|^2 ,$$

tj. $E(N_n)\, x = 0$.

(e) Operátor $\mathscr{T}(\varphi)^*$ existuje, neboť $\bar{D}_\varphi = \mathscr{H}$; kromě toho je zřejmé, že $D_\varphi = D_{\bar{\varphi}}$ (viz (1a)). Užijeme-li dále vztahu (1b) a rovnosti $\mathscr{T}_b(\varphi_n)^* = \mathscr{T}_b(\bar{\varphi}_n)$ zjistíme, že pro všechna $x, y \in D_\varphi$ platí $(y, \mathscr{T}(\varphi)\, x) = (\mathscr{T}(\bar{\varphi})\, y, x)$, což podle definice sdruženého operátoru (viz § 7.1) znamená, že $\mathscr{T}(\bar{\varphi}) \subset \mathscr{T}(\varphi)^*$. Zbývá tedy dokázat toto: jestliže existují vektory $y, z \in \mathscr{H}$ takové, že pro všechna $x \in D_\varphi$ platí

$$(y, \mathscr{T}(\varphi)\, x) = (z, x) , \tag{9}$$

potom $y \in D_\varphi$.

Pro $n = 1, 2, \dots$ označíme $y_n \equiv \mathscr{T}_b(\overline{\varphi_n^{(0)}})\, y$, kde $\varphi_n^{(0)} := \varphi \chi_{M_n}$ a množiny M_n jsou dány vztahem (2). Z něj plyne, že y_n patří do D_φ, neboť

$$\int |\varphi|^2 \, d\mu_{y_n} = \int |\varphi|^4 \chi_{M_n} \, d\mu_y < \infty .$$

Do podmínky (9) dosadíme $x = y_n$; Schwarzova nerovnost pak dává

$$|(y, \mathscr{T}(\varphi)\, y_n)| \leqq \|z\| \, \|y_n\| . \tag{10}$$

Levou stranu upravíme pomocí formulí (5) a (7)

$$(y, \mathscr{T}(\varphi)\, y_n) = \int \varphi \, d\nu_{yy_n} = \int \varphi \, \overline{\varphi_n^{(0)}} \, d\mu_y = \int |\varphi_n^{(0)}|^2 \, d\mu_y = \|y_n\|^2 .$$

Po dosazení do (10) dostáváme nerovnost

$$\int |\varphi_n^{(0)}|^2 \, d\mu_y \leqq \|z\|^2 , \qquad n = 1, 2, \dots ,$$

a protože posloupnost $\{\varphi_n^{(0)}\}$ splňuje podmínky (3), plyne z Fatouovy věty $\int |\varphi|^2 \, d\mu_y \leqq \|z\|^2$, tj. $y \in D_\varphi$.

(f) Jestliže $E(\operatorname{Ker} \varphi) = 0$, je vztahem $\psi(t) := 1/\varphi(t)$ pro $t \in \mathbb{R}^d \setminus \operatorname{Ker} \varphi$ definována funkce $\psi \in \Phi_E(\mathbb{R}^d)$ (viz větu A.2.3) a platí $\varphi(t)\, \psi(t) = 1$ pro E-s.v. $t \in \mathbb{R}^d$, takže $\varphi\psi \in L^\infty(\mathbb{R}^d, dE)$ a $D_{\varphi\psi} = \mathscr{H}$. Pomocí tvrzení (c) dostáváme $D(\mathscr{T}(\psi)\, \mathscr{T}(\varphi)) = D_\varphi$ a rovnost $\mathscr{T}(\psi)\, \mathscr{T}(\varphi)\, x = x$ pro všechna $x \in D_\varphi$; podobně zjistíme, že pro všechna $y \in D_\psi$ platí $\mathscr{T}(\varphi)\,\mathscr{T}(\psi)\,y = y$. Z těchto dvou rovností plyne existence operátoru $\mathscr{T}(\varphi)^{-1}$ a vztah $\mathscr{T}(\varphi)^{-1} = \mathscr{T}(\psi)$. K ověření opačné implikace vyjdeme z identity $\varphi\chi_{\mathrm{Ker}\,\varphi} = 0$; díky tomu, že $D_{\chi_{\mathrm{Ker}\,\varphi}} = \mathscr{H}$, dostáváme z tvrzení (c)

$$0 = \mathscr{T}(\varphi\chi_{\mathrm{Ker}\,\varphi}) = \mathscr{T}(\varphi)\, E(\mathrm{Ker}\,\varphi)\,.$$

Je-li operátor $\mathscr{T}(\varphi)$ invertibilní, plyne odtud $E(\mathrm{Ker}\,\varphi) = 0$. ■

9.4.9 Příklad: Jestliže $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}E)$, potom z věty 9.3.3 vyplývá, že pro libovolný polynom Q_N, $Q_N(z) \equiv \sum_{n=0}^{N} \alpha_n z^n$, kde $z, \alpha_n \in \mathbb{C}$ a $\alpha_N \neq 0$, platí

$$\mathscr{T}(Q_N \circ \varphi) \equiv \mathscr{T}\left(\sum_{n=0}^{N} \alpha_n \varphi^n\right) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n (\mathscr{T}(\varphi))^n\,. \tag{11}$$

Ukážeme, že *tato rovnost je splněna pro všechna* $\varphi \in \Phi_E(\mathbb{R}^d)$.

Nechť tedy $\varphi \in \Phi_E(\mathbb{R}^d) \setminus L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}E)$, tj. pro každé $c > 0$ máme

$$E(M_c) \neq 0\,, \qquad \text{kde} \quad M_c := \{t \in \mathbb{R}^d\colon |\varphi(t)| > c\}\,. \tag{12}$$

Jestliže $x \in D(\varphi^n)$ (podle potřeby užíváme alternativního označení $D(\varphi) \equiv D_\varphi$), tj. $\int |\varphi|^{2n}\, \mathrm{d}\mu_x < \infty$, potom díky tomu že μ_x je konečná míra, plyne z Hölderovy nerovnosti $x \in D(\varphi^m)$, jestliže $m < n$; pro všechna přirozená n a m tedy platí implikace

$$m < n \Rightarrow D(\varphi^n) \subset D(\varphi^m)\,. \tag{13a}$$

Nyní pro $n \geqq 2$ máme $\varphi^n = \varphi^{n-1}\varphi$, $D(\varphi^n) \subset D_\varphi$ a tvrzení (c) věty 8 dává $\mathscr{T}(\varphi^n) = \mathscr{T}(\varphi^{n-1})\,\mathscr{T}(\varphi)$, tj.

$$\mathscr{T}(\varphi^n) = (\mathscr{T}(\varphi))^n\,, \tag{14}$$

$n = 1, 2, \ldots$. Díky tomu že $\lim_{|z|\to\infty} |Q_N(z)/(\alpha_N z^N)| = 1$, existuje $c > 0$ takové, že pro všechna $|z| > c$ platí $1/2 < |Q_N(z)/(\alpha_N z^N)| < 3/2$; pomocí (12) dostáváme

$$|Q_N \circ \varphi|\, \chi_{M_c} \leqq \frac{3}{2} |\alpha_N \varphi^N|\, \chi_{M_c}\,, \qquad |\alpha_N \varphi^N|\, \chi_{M_c} \leqq 2 |Q_N \circ \varphi|\, \chi_{M_c}\,.$$

Odtud vyplývá $D((Q_N \circ \varphi)\, \chi_{M_c}) = D(\varphi^N \chi_{M_c})$ (cvičení 16). Dále je zřejmé, že funkce $\varphi^N \chi_{\mathbb{R}\setminus M_c}$ a $(Q_N \circ \varphi)\, \chi_{\mathbb{R}\setminus M_c}$ jsou omezené, a protože $\varphi^N = \varphi^N \chi_{M_c} + \varphi^N \chi_{\mathbb{R}\setminus M_c}$, platí $D(\varphi^N) = D(\varphi^N \chi_{M_c})$; podobně $D(Q_N \circ \varphi) = D((Q_N \circ \varphi)\, \chi_{M_c})$ (cvičení 19). Dospíváme tak k rovnosti

$$D(Q_N \circ \varphi) = D(\varphi^N)\,. \tag{13b}$$

Konečně polynom Q_N zapíšeme ve tvaru $Q_N(z) = \alpha_N z^N + Q_M(z)$, kde Q_M je polynom stupně nižšího než N. Ze vztahů (13a, b), (14) a tvrzení (b) věty 8 nyní plyne

$$\mathscr{T}(Q_N \circ \varphi) = \alpha_N \mathscr{T}(\varphi^N) + \mathscr{T}(Q_M \circ \varphi) = \alpha_N(\mathscr{T}(\varphi))^N + \mathscr{T}(Q_M \circ \varphi)\,;$$

formuli (11) pak dostaneme indukcí.

Jestliže $f \in \Phi_E(\mathbb{R}^d)$ je reálná funkce a P_N je polynom s reálnými koeficienty, pak operátor $\mathscr{T}(P_N \circ f)$ je samosdružený. Z formule (11) nyní vyplývá následující užitečný závěr: *pro každou reálnou funkci $f \in \Phi_E(\mathbb{R}^d)$ a libovolná reálná čísla $c_0, c_1, \ldots, c_N$ je operátor $\sum_{n=0}^{N} c_n(\mathscr{T}(f))^n$ samosdružený* (speciálně jsou samosdružené všechny mocniny operátoru $\mathscr{T}(f)$).

Z věty 8 odvodíme další důležité vlastnosti operátorů $\mathscr{T}(\varphi)$.

9.4.10 Věta: (a) Pro každé $\varphi \in \Phi_E(\mathbb{R}^d)$ je $\mathscr{T}(\varphi)$ normální operátor, jehož spektrum je totožné s oborem podstatných hodnot funkce φ

$$\sigma(\mathscr{T}(\varphi)) = R^{(E)}_{\mathrm{ess}}(\varphi)\,.$$

(b) Komplexní číslo λ je vlastní hodnotou operátoru $\mathscr{T}(\varphi)$ právě tehdy, když $E(\varphi^{(-1)}(\{\lambda\})) \neq 0$. Pro příslušný vlastní podprostor platí $N_{\mathscr{T}(\varphi)}(\lambda) = \operatorname{Ran} E(\varphi^{(-1)}(\{\lambda\}))$.

(c) Operátor $\mathscr{T}(\varphi)$ je samosdružený právě tehdy, když $\varphi(t) \in \mathbb{R}$ pro E-s.v. $t \in \mathbb{R}^d$.

(d) Jestliže omezený operátor B komutuje s projektorovou mírou $E(.)$, pak $B\mathscr{T}(\varphi) \subset \mathscr{T}(\varphi)B$ pro každé $\varphi \in \Phi_E(\mathbb{R}^d)$.

Důkaz: (a) Jelikož $\mathscr{T}(\varphi) = \mathscr{T}(\bar{\bar{\varphi}}) = \mathscr{T}(\bar{\varphi})^*$, je $\mathscr{T}(\varphi)$ uzavřený (viz příklad 7.2.1). Dále $D_\varphi = D_{\bar{\varphi}}$ a rovnost (4) dává $\|\mathscr{T}(\varphi)\,x\| = \|\mathscr{T}(\bar{\varphi})\,x\| = \|(\mathscr{T}(\varphi)^*\,x\|$ pro všechna $x \in D_\varphi$, takže operátor $\mathscr{T}(\varphi)$ je normální (věta 7.3.1). Tvrzení o spektru se nyní ověří stejným postupem jako pro omezené funkce (ve druhé části důkazu se ovšem uvažují jen $x \in D_\varphi$).

(b) Budeme užívat označení $M_\lambda := \varphi^{(-1)}(\{\lambda\})$ a vztahů $D_{\varphi-\lambda} = D_\varphi$ a $\mathscr{T}(\varphi - \lambda) = \mathscr{T}(\varphi) - \lambda$ (viz větu 8b). Postačující podmínka: Jestliže nenulové $x \in \mathscr{H}$ splňuje $E(M_\lambda)\,x = x$, potom $\int|\varphi|^2\,\mathrm{d}\mu_x = \int_{M_\lambda}|\varphi|^2\,\mathrm{d}\mu_x = \lambda^2\|x\|^2$, takže $x \in D_\varphi = D_{\varphi-\lambda}$ a pomocí formule (4) dostaneme

$$\|(\mathscr{T}(\varphi) - \lambda)\,x\|^2 = \|\mathscr{T}(\varphi - \lambda)\,x\|^2 = \int_{M_\lambda}|\varphi - \lambda|^2\,\mathrm{d}\mu_x = 0\,,$$

tj. $\lambda \in \sigma_d(\mathscr{T}(\varphi))$ a $N_{\mathscr{T}(\varphi)}(\lambda) \supset \operatorname{Ran} E(M_\lambda)$.

Nutná podmínka: Nechť $x \in D_\varphi$ je jednotkový vektor, pro nějž platí $\mathscr{T}(\varphi)\,x = \lambda x$. Z tohoto vztahu plyne $\int|\varphi - \lambda|^2\,\mathrm{d}\mu_x = 0$, tj. $\varphi(t) = \lambda$ pro μ_x-s.v. $t \in \mathbb{R}^d$, takže $\mu_x(\mathbb{R}^d \setminus M_\lambda) = 0$. Podle předpokladu máme $\mu_x(\mathbb{R}^d) = \|x\|^2 = 1$, a odtud $\mu_x(M_\lambda) = \|x\|^2$. Z tohoto vztahu plyne $E(M_\lambda)\,x = x$, tj. $E(M_\lambda) \neq 0$ a $N_{\mathscr{T}(\varphi)}(\lambda) \subset \operatorname{Ran} E(M_\lambda)$.

(c) Viz tvrzení (d) a (e) věty 8.

(d) Pro všechna $x, y \in \mathscr{H}$ a $M \in \mathscr{B}^d$ platí $\nu_{y,Bx}(M) = (y, E(M)\, Bx) = (y, BE(M)\, x) = \nu_{B^*y,x}(M)$, tj.

$$\nu_{y,Bx} = \nu_{B^*y,x} \tag{15}$$

a podobně $\mu_{Bx}(M) = \|E(M)\, Bx\|^2 = \|BE(M)\, x\|^2 \leqq \|B\|^2 \mu_x(M)$. Z této nerovnosti ihned plyne implikace $x \in D_\varphi \Rightarrow Bx \in D_\varphi$. Potom pro každé $x \in D_\varphi$ a $y \in \mathscr{H}$ dostaneme pomocí vztahů (5) a (15):

$$(y, \mathscr{T}(\varphi)\, Bx) = \int \varphi \, \mathrm{d}\nu_{y,Bx} = \int \varphi \, \mathrm{d}\nu_{B^*y,x} = (B^*y, \mathscr{T}(\varphi)\, x) = (y, B\, \mathscr{T}(\varphi)\, x)\,. \quad \blacksquare$$

Z uzavřenosti operátorů $\mathscr{T}(\varphi)$ vyplývá následující doplněk k pravidlům funkcionálního počtu.

9.4.11 Důsledek: Pro všechna $\varphi, \psi \in \Phi_E(\mathbb{R}^d)$ platí

$$\mathscr{T}(\varphi + \psi) = \overline{\mathscr{T}(\varphi) + \mathscr{T}(\psi)}\,, \tag{16}$$

$$\mathscr{T}(\varphi\psi) = \overline{\mathscr{T}(\varphi)\, \mathscr{T}(\psi)} = \overline{\mathscr{T}(\psi)\, \mathscr{T}(\varphi)}\,. \tag{17}$$

Důkaz ponecháváme čtenáři (cvičení 23).

Na závěr probereme substituční metodu pro integrály vzhledem k projektorové míře (srv. s § A.7). Nechť $E(.)$ je projektorová míra na $\mathbb{R}^d$ a $w\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení takové, že všechny funkce $w_j\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, kde $w_j(t) := (w(t))_j$, jsou borelovské. Potom zobrazení $M \mapsto E_w(M) := E(w^{(-1)}(M))$, $M \in \mathscr{B}^n$, je projektorová míra na $\mathbb{R}^n$ (cvičení 2).

9.4.12 Tvrzení: S uvedenými předpoklady o zobrazení w patří pro každé $\varphi \in \Phi_{E_w}(\mathbb{R}^n)$ složená funkce $\varphi \circ w$ do množiny $\Phi_E(\mathbb{R}^d)$ a platí

$$\mathscr{T}^{(E_w)}(\varphi) = \mathscr{T}^{(E)}(\varphi \circ w)\,. \tag{18}$$

Důkaz: Nechť φ je definována na $\mathbb{R}^n \setminus N$, kde $E_w(N) = 0$. Potom $\psi \equiv \varphi \circ w$ je definována pro všechna $t \in \mathbb{R}^d$, pro něž $w(t) \in \mathbb{R}^n \setminus N$, tj. na množině $w^{(-1)}(\mathbb{R}^n \setminus N)$. Jelikož $w^{(-1)}(\mathbb{R}^n \setminus N) = \mathbb{R}^d \setminus w^{(-1)}(N)$ a $E(w^{(-1)}(N)) = E_w(N) = 0$, je ψ definována E-s.v. Dále pro libovolné $M \in \mathscr{B}$ platí $\psi^{(-1)}(M) = w^{(-1)}(\varphi^{(-1)}(M))$; nyní $\varphi^{(-1)}(M) \in \mathscr{B}^n$ a z vlastnosti zobrazení w plyne $w^{(-1)}(\varphi^{(-1)}(M)) \in \mathscr{B}^d$. Funkce $\psi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ je tedy borelovská a E-s.v. definovaná, tj. $\psi \in \Phi_E(\mathbb{R}^d)$.

Nechť $x \in D_\varphi^{(E_w)}$, tj. $\int |\varphi|^2 \, \mathrm{d}\mu_x^{(w)} < \infty$, kde $\mu_x^{(w)}(M) = \|E_w(M)\, x\|^2 = \|E(w^{(-1)}(M))\, x\|^2 = \mu_x(w^{(-1)}(M))$ pro každé $M \in \mathscr{B}^n$. Pomocí věty A.7.1 dostáváme $\int |\varphi \circ w|^2 \, \mathrm{d}\mu_x < \infty$; platí tedy inkluze

$$D_\varphi^{(E_w)} \subset D_{\varphi \circ w}^{(E)}\,. \tag{19}$$

Stejným postupem odvodíme pro každé $x \in D_\varphi^{(E_w)}$ rovnost $(x, \mathscr{T}^{(E_w)}(\varphi)\, x) = (x, \mathscr{T}^{(E)}(\varphi \circ w)\, x)$. Odtud užitím polarizační formule (pro seskvilineární formy

$[x, y] \mapsto (y, \mathscr{T}^{(E_w)}(\varphi)\, x)$, resp. $[x, y] \mapsto (y, \mathscr{T}^{(E)}(\varphi \circ w)\, x)$ na vektorovém prostoru $D_\varphi^{(E_w)}$) plyne $(y, \mathscr{T}^{(E_w)}(\varphi)\, x) = (y, \mathscr{T}^{(E)}(\varphi \circ w)\, x)$ pro všechna $x, y \in D_\varphi^{(E_w)}$, a protože $\overline{D_\varphi^{(E_w)}} = \mathscr{H}$, je $\mathscr{T}^{(E_w)}(\varphi)\, x = \mathscr{T}^{(E)}(\varphi \circ w)\, x$. Vzhledem k inkluzi (19) máme $\mathscr{T}^{(E_w)}(\varphi) \subset \mathscr{T}^{(E)}(\varphi \circ w)$; oba operátory jsou však normální, takže platí rovnost (viz poznámku 7.3.2c). ■

9.4.13 Poznámka: Povšimněme si, že přiřazení $M \mapsto w^{(-1)}(M)$ zobrazuje $\mathscr{B}^n$ do $\mathscr{B}^d$ bez ohledu na invertibilitu zobrazení w. Můžeme proto zapsat projektorovou míru $E_w(.)$ jako složené zobrazení: $E_w(.) = (E \circ w^{(-1)})\,(.)$. Vztah (18) potom nabývá běžného tvaru substituční formule

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, \mathrm{d}(E \circ w^{(-1)}) = \int_{w^{(-1)}(\mathbb{R}^n)} \varphi \circ w\, \mathrm{d}E\,.$$

Cvičení

1. (i) Dokažte tvrzení 9.1.2.
(ii) Je-li $E(.)$ projektorová míra na $\mathbb{R}^d$, potom pro každou dvojici $M, N \in \mathscr{B}^d$ platí $E(M) = E(N) \Leftrightarrow E(M \triangle N) = 0$.
Návod: Viz formule (A.3.3a, b) a poznámku A.3.1.

2. Je dáno zobrazení $w\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, $w(t) \equiv [w_1(t), \ldots, w_n(t)]$, takové, že pro $j = 1, 2, \ldots, n$ jsou funkce $w_j\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ borelovské, a projektorová míra $E(.)$ na $\mathbb{R}^d$. Potom předpis $E_w(M) := E(w^{(-1)}(M))$, $M \in \mathscr{B}^n$, určuje projektorovou míru $E_w(.)$ na $\mathbb{R}^n$.
Návod: Pro intervaly $J_1, J_2, \ldots, J_n \in \mathscr{J}$ je $w^{(-1)}(J_1 \times \ldots \times J_n) = \bigcap_{j=1}^{n} w^{(-1)}(J_j) \in \mathscr{B}^d$; dále užijte vztah (A.1.9).

3. Dokažte rovnost (9.2.2b).
Návod: Ukažte, že $\mu_x(\mathbb{R}^d) \leqq \|x\|^2$ a pomocí podmínky ($\dot{E}3$) sestrojte neklesající posloupnost $\{M_n\} \subset \mathscr{B}^d$ takovou, že $\mu_x(M_n) > \|x\|^2 - 1/n$.

4. Z tvrzení (b) lemmatu 9.2.1 vyplývá, že pro všechna $M, N \in \mathscr{B}^d$ platí $E(M)\, E(N) = E(N)\, E(M)$ a $E(M)\sqrt{E(N)} = \sqrt{E(N)}\, E(M)$.
Návod: Viz tvrzení 5.3.6.

5. Nechť $V\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ je izomorfismus Hilbertových prostorů.
(i) Jestliže $E(.)$ je projektorová míra na $\mathbb{R}^d$ s hodnotami v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, potom vztah $E'(M) := VE(M)\, V^{-1}$, $M \in \mathscr{B}^d$, určuje projektorovou míru $E'(.)$ na $\mathbb{R}^d$ s hodnotami v $\mathscr{B}(\mathscr{H}')$.
(ii) Jestliže $\{E_t\}$ je rozklad jedničky na $\mathscr{H}$, potom $\{VE_t V^{-1}\}$ je rozklad jedničky na $\mathscr{H}'$; označíme-li dále $E_1(.)$, resp. $E_1'(.)$ projektorové míry na $\mathbb{R}$ generované těmito rozklady jedničky, platí $E_1'(M) = VE_1(M)\, V^{-1}$ pro každé $M \in \mathscr{B}$.
Návod: (ii) Užijte formulí (9.1.8) a tvrzení věty 9.2.3 o jednoznačnosti.

6. Je dána projektorová míra $E(.)$ na $\mathbb{R}$ s hodnotami v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ a rozklad jedničky $\{E_t\}$ na $\mathscr{H}$; nechť dále $\dot{E}(.)$ je příslušné zobrazení systému intervalů $\mathscr{J}$ do $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ určené podle vztahů (9.1.8). Potom projektorová míra $E(.)$ je generována rozkladem jedničky $\{E_t\}$ (tj. pro všechna $J \in \mathscr{J}$ platí $E(J) = \dot{E}(J)$) právě tehdy, když $E(-\infty, t] = E_t$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

7. Nechť $E(.)$ je projektorová míra na $\mathbb{R}$ generovaná rozkladem jedničky $\{E_t\}$. Jestliže omezený operátor B komutuje s $\{E_t\}$, potom B komutuje s projektorovou mírou $E(.)$, tj. pro každé $M \in \mathscr{B}$ platí $E(M)\,B = BE(M)$. Speciálně podmínka (9.2.7) je pro $r = s = 1$ ekvivalentní požadavku $E_t F_u = F_u E_t$ pro všechna reálná t a u, kde $F_u := F(-\infty, u]$.

Návod: Viz tvrzení 9.1.8d a větu 9.2.3.

8. Je dán rozklad jedničky $\{E_t\}$ na $\mathscr{H}$ a projektor P, který redukuje množinu $\{E_t\}$, tj. $E_t P = PE_t$ pro každé $t \in \mathbb{R}$.

(i) Zobrazení $t \mapsto PE_t P$ je rozklad jedničky na prostoru Ran P.

(ii) Označíme-li $E(.)$, resp. $E_P(.)$ projektorové míry na $\mathbb{R}$ generované rozklady jedničky $\{E_t\}$, resp. $\{PE_t P\}$, potom pro každou borelovskou množinu M platí $E_P(M) = PE(M)\,P$.

Návod: (ii) Projektor P redukuje $E(M)$ (viz cvičení 7), zobrazení $M \mapsto PE(M)\,P$ je projektorová míra a užije se výsledků cvičení 6.

9. Pro každé $x \in \mathscr{H}$ splňuje funkce $\tilde{J} \mapsto \tilde{\mu}_x(\tilde{J}) \equiv (x, \dot{P}(\tilde{J})\,x)$ definovaná vztahem (9.2.8) podmínkou $\sup\{\tilde{\mu}_x(\tilde{J}) : \tilde{J} \in \mathscr{J}^{r+s}\} = \|x\|^2$.

Návod: Pro každé $x \in \mathscr{H}$ platí nerovnost $(x, [I - E(J)\,F(K)]\,x) \leqq (x, [I - E(J)]\,x) + (x, [I - F(K)]\,x)$ a existují posloupnosti $\{J_n\} \subset \mathscr{J}^r$ a $\{K_n\} \subset \mathscr{J}^s$ takové, že $\lim_{n\to\infty} \|(I - E(J_n))\,x\| = \lim_{n\to\infty} \|(I - F(K_n))\,x\| = 0$.

10. Dokažte následující vlastnosti množiny $R_{\mathrm{ess}}^{(E)}(\varphi)$ pro libovolnou borelovskou funkci $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$:

(i) $R_{\mathrm{ess}}^{(E)}(\varphi)$ je uzavřená množina, která je částí množiny $\overline{\mathrm{Ran}\,\varphi}$;

(ii) podmínky $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}E)$ a $\max R_{\mathrm{ess}}^{(E)}(|\varphi|) < \infty$ jsou ekvivalentní a jsou-li splněny, platí rovnost $\|\varphi\|_\infty = \max R_{\mathrm{ess}}^{(E)}(|\varphi|)$.

Tato tvrzení zůstávají v platnosti i pro množinu $R_{\mathrm{ess}}^{(\mu)}(\varphi)$, kde $\varphi : X \to \mathbb{C}$ je měřitelná funkce na abstraktním prostoru s mírou $(X, \mathscr{A}, \mu)$.

11. S označením z věty 9.3.3 platí:

(i) Jestliže funkce φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, a $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}E)$ splňují $\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \to 0$, potom $\mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\varphi) = \text{u-}\lim_{n\to\infty} \mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\varphi_n)$.

(ii) Operátor $\mathscr{T}_{\mathrm{b}}(\varphi)$ je unitární právě tehdy, když $|\varphi(t)| = 1$ pro E-*s. v.* $t \in \mathbb{R}^d$.

12. Pro libovolná $x, y \in \mathscr{H}$ a $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}E)$ platí

(i) $\overline{\int \varphi \, \mathrm{d}\nu_{xy}} = \int \bar{\varphi} \, \mathrm{d}\nu_{yx}$;

(ii) komplexní míra $\nu_{x,\mathcal{T}_b(\varphi)y}$ je generována funkcí φ a komplexní mírou ν_{xy}, tj. pro každou borelovskou množinu M

$$\nu_{x,\mathcal{T}_b(\varphi)y}(M) = \int_M \varphi \, d\nu_{xy} \,.$$

13. Užijeme označení z příkladu 9.3.7. Pro libovolné $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}, dE)$ a $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}, dF)$ definujeme funkce ω_Σ a ω_π: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ vztahem $\omega_\Sigma(t, u) := \varphi(t) + \psi(u)$, resp. $\omega_\pi(t, u) := \varphi(t)\,\psi(u)$, tj. $\omega_\Sigma = \varphi \times e + e \times \varphi$ a $\omega_\pi = \varphi \times \psi$. Dokažte, že tyto funkce patří do $L^\infty(\mathbb{R}^2, dP)$ a že platí

$$\int \omega_\Sigma \, dP = \int \varphi \, dE + \int \psi \, dF \,,$$

resp.

$$\int \omega_\pi \, dP = \int \varphi \, dE \int \psi \, dF = \int \psi \, dF \int \varphi \, dE \,.$$

14. Jestliže $E_D(.)$ je projektorová míra na $\mathbb{R}^d$ s konečným nosičem $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$, potom $L^\infty(\mathbb{R}^d, dE_D) = \Phi_{E_D}(\mathbb{R}^d)$.

15. Uvažujme projektorovou míru $E(.)$ na $\mathbb{R}$, která je generována rozkladem jedničky $\{E_t\}$ takovým, že $E_t \neq I$ (resp. $E_t \neq 0$) pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Potom pro každou funkci $\varphi \in \Phi_E(\mathbb{R})$ splňující podmínku $\lim_{t \to +\infty} |\varphi(t)| = +\infty$ (resp. $\lim_{t \to -\infty} |\varphi(t)| = +\infty$) je $\mathcal{T}(\varphi)$ neomezený operátor.

Návod: Viz příklad 9.4.7.

16. Jestliže k daným funkcím $\varphi, \psi \in \Phi_E(\mathbb{R}^d)$ existují kladná čísla c, d taková, že pro E-s.v. $t \in \mathbb{R}^d$ platí $|\varphi(t)| \leqq c|\psi(t)|$ a $|\psi(t)| \leqq d|\varphi(t)|$, potom $D_\varphi = D_\psi$.

17. Nechť $\varphi \in \Phi_E(\mathbb{R}^d)$ a $x \in D_\varphi$; potom míra $\mu_{\mathcal{T}(\varphi)x}$ je generována funkcí $|\varphi|^2$ a mírou μ_x.

Návod: Užijte důsledku 9.4.4 a ukažte, že komplexní míra $\nu_{\mathcal{T}(\varphi)x,x}$ je generována funkcí $\bar{\varphi}$ a nezápornou mírou $\nu_{xx} \equiv \mu_x$.

18. Jestliže $f, g \in \Phi_E(\mathbb{R}^d)$ jsou reálné funkce, potom platí $\mathcal{T}(f + ig) = \mathcal{T}(f) + i\,\mathcal{T}(g)$.

19. Libovolná $\varphi \in \Phi_E(\mathbb{R}^d)$ a $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}^d, dE)$ splňují rovnosti

$$\mathcal{T}(\varphi + \psi) = \mathcal{T}(\varphi) + \mathcal{T}(\psi) \quad \text{a} \quad \mathcal{T}(\varphi\psi) = \mathcal{T}(\varphi)\,\mathcal{T}(\psi) \,.$$

20. Pro každé $\varphi \in \Phi_E(\mathbb{R}^d)$ a $M \in \mathcal{B}^d$ je operátor $\mathcal{T}(\varphi)$ redukován projektorem $E(M)$.

21. Je dán izomorfismus Hilbertových prostorů $V: \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ a projektorová míra $E(.)$ na $\mathbb{R}^d$ s hodnotami v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Potom pro projektorovou míru $E'(.) :=$

 $VE(.)\,V^{-1}$ (viz cvičení 5) platí $\Phi_E(\mathbb{R}^d) = \Phi_{E'}(\mathbb{R}^d)$ a $\mathscr{T}^{(E')}(\varphi) = V\mathscr{T}^{(E)}(\varphi)\,V^{-1}$ pro každé $\varphi \in \Phi_E(\mathbb{R}^d)$.
Návod: Odvoďte rovnost $\nu_{xy}^{(E)} = \nu_{Vx,Vy}^{(E')}$.

22. Nechť $E(.)$ je projektorová míra na $\mathbb{R}^d$ s hodnotami v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ a projektory P a $E(M)$ komutují pro všechna $M \in \mathscr{B}^d$. Potom $PE(.)P$ je projektorová míra na $\mathbb{R}^d$ s hodnotami v $\mathscr{B}$ (Ran P) a pro každé $\varphi \in \Phi_E(\mathbb{R}^d)$ a všechna $x \in PD_\varphi^{(E)}$ platí

$$\mathscr{T}^{(E)}(\varphi)\,x = P\mathscr{T}^{(E)}(\varphi)\,Px = \mathscr{T}^{(PEP)}(\varphi)\,x\,.$$

Návod: Užijte větu 9.4.10d a uvažte, že pro každé $x \in \operatorname{Ran} P$ je $\mu_x^{(E)} = \mu_x^{(PEP)}$.

23. Dokažte vztahy (9.4.16) a (9.4.17).
Návod: Posloupnosti $\{(\varphi + \psi)\,\chi_{N_n}\}$, resp. $\{\varphi\psi\chi_{N_n}\}$, kde

$$N_n := \{t \in \mathbb{R}^d : |\varphi(t)| \leqq n, |\psi(t)| \leqq n\}\,,$$

splňují podmínky (9.4.3) pro funkce $\varphi + \psi$, resp. $\varphi\psi$.

24. Zobecněte výsledky příkladu 9.3.7 pro neomezené funkce.
Návod: Dokažte následující tvrzení: (i) $\varphi \in \Phi_E(\mathbb{R}) \Rightarrow \varphi_1 \in \Phi_P(\mathbb{R}^2)$;
(ii) pro každé $x \in \mathscr{H}$ a $\varphi \in \Phi_E(\mathbb{R})$ platí ekvivalence

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi|^2\,d\mu_x^{(E)} < \infty \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi_1|^2\,d\mu_x^{(F)} < \infty$$

(ověřte nejprve pro σ-jednoduché funkce pomocí formule (9.2.9));
(iii) $\int \varphi\,dE = \int \varphi_1\,dP$ (jestliže posloupnost $\{\varphi_n\} \subset L^\infty(\mathbb{R}, dE)$ splňuje podmínky (9.4.3) pro funkci φ, potom posloupnost $\{(\varphi_n)_1\}$ splňuje tyto podmínky pro φ_1).

25. S označením z tvrzení 9.4.12 pro každé $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n, dE_w)$ platí $\varphi \circ w \in L^\infty(\mathbb{R}^d, dE)$, přičemž $\|\varphi\|_\infty^{(E_w)} = \|\varphi \circ w\|_\infty^{(E)}$.

10 SPEKTRÁLNÍ TEORIE SAMOSDRUŽENÝCH A NORMÁLNÍCH OPERÁTORŮ

Spektrální teorie samodružených operátorů je založena na tzv. spektrálním teorému, který říká, že ke každému samosdruženému operátoru A existuje právě jedna projektorová míra $E_A(.)$ na $\mathbb{R}$ taková, že $A = \int \mathrm{id}\, \mathrm{d}E_A$, kde $\mathrm{id}(x) := x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Jde o dalekosáhlé, nicméně v podstatě přímé zobecnění spektrálního teorému pro hermitovské operátory na prostoru konečné dimenze (viz např. ⟦Hal 2⟧ § 79 a Dodatek). Jeho význam je dán mj. tím, že pomocí projektorové míry $E_A(.)$ lze charakterizovat spektrum operátoru A (viz § 10.4) a že se pomocí ní zavádí důležitý pojem funkce samosdruženého operátoru (§ 10.5).

Spektrální teorém odvodíme nejprve pro hermitovský operátor A; projektorovou míru $E_A(.)$ získáme postupným rozšiřováním zobrazení, které přiřazuje každému polynomu $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(t) \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, operátor $P(A) \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$. Dále se budeme zabývat omezenými normálními operátory; díky tomu, že pro každý takový operátor B jsou $\mathrm{Re}\, B$ a $\mathrm{Im}\, B$ komutující hermitovské operátory, platí formule $B = \mathscr{T}_{\mathrm{b}}^{(F_B)}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$, kde $F_B(.)$ je direktní součin projektorových měr $E_{\mathrm{Re}\, B}(.)$ a $E_{\mathrm{Im}\, B}(.)$ a funkce $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ je dána vztahem $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}(x, y) := x + \mathrm{i}y$. Speciálně pro unitární operátor U lze pomocí substituční metody (tvrzení 9.4.12) získat z $F_U(.)$ projektorovou míru $E_U(.)$ na $\mathbb{R}$ takovou, že $U = \mathscr{T}_{\mathrm{b}}^{(E_U)}(\eta)$, kde $\eta(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Konečně spektrální teorém pro obecný neomezený samosdružený operátor dostaneme pomocí spektrálního rozkladu jeho Cayleyova obrazu.

10.1 SPEKTRÁLNÍ TEORÉM PRO HERMITOVSKÉ OPERÁTORY

V tomto paragrafu znamená A hermitovský operátor na libovolném Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$; dále $J_A \equiv [m_A, M_A]$, kde je užito obvyklého označení pro dolní a horní hranici operátoru A (viz (5.3.2)). Každému polynomu $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(t) \equiv \sum_{j=0}^{n} c_j t^j$, přiřadíme hermitovský operátor

$$P(A) := \sum_{j=0}^{n} c_j A^j \in \mathscr{B}(\mathscr{H}), \tag{1}$$

312 přičemž $A^0 := I$. Snadno se přesvědčíme o tom, že zobrazení $P \mapsto P(A)$ je lineární a multiplikativní, tj. pro libovolné polynomy P, Q a $c \in \mathbb{R}$ máme

$$(cP + Q)(A) = cP(A) + Q(A), \qquad (PQ)(A) = P(A)\,Q(A). \tag{2a}$$

Dále platí implikace

$$P(t) \geqq 0,\ t \in J_A \ \Rightarrow\ P(A) \geqq 0, \tag{2b}$$

která vyjadřuje *monotonii zobrazení* $P \mapsto P(A)$ (cvičení 1). Rozšíříme nyní toto zobrazení na jistou třídu $\mathscr{K}$ reálných funkcí definovaných na J_A, přičemž požadujeme, aby získané rozšíření bylo opět lineární, multiplikativní a monotonní.

Budeme nejprve uvažovat množinu $\mathscr{K}_0$ funkcí $f\colon J_A \to [0, \infty)$ s následující vlastností: existuje posloupnost $\{f_n\} \subset C(J_A)$ taková, že pro každé $t \in J_A$ je $\{f_n(t)\}$ nerostoucí posloupnost a $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \inf_n \{f_n(t)\}$. Je zřejmé, že pro libovolná $f, g \in \mathscr{K}_0$ a $k \geqq 0$ platí

$$f + g \in \mathscr{K}_0, \qquad fg \in \mathscr{K}_0 \quad \text{a} \quad kf \in \mathscr{K}_0. \tag{3}$$

10.1.1 Lemma: (a) Jestliže $f \in \mathscr{K}_0$ a $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí spojitých na J_A, které na tomto intervalu splňují podmínky $f_{n+1}(t) \leqq f_n(t)$ a $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$, potom existují polynomy P_n, $n = 1, 2, \ldots$, takové, že pro všechna $t \in J_A$ platí

$$P_n(t) \geqq f_n(t) \geqq 0, \quad P_{n+1}(t) \leqq P_n(t), \quad \lim_{n\to\infty} P_n(t) = f(t). \tag{4}$$

(b) Je-li $\{Q_n\}$ jiná posloupnost polynomů s těmito vlastnostmi, potom ke každému přirozenému n lze najít m_n tak, aby pro všechna $t \in J_A$ a $m \geqq m_n$ platilo

$$Q_m(t) < P_n(t) + \frac{1}{n}, \qquad P_m(t) < Q_n(t) + \frac{1}{n}. \tag{5}$$

Důkaz: (a) Podle Weierstrassovy věty pro každé n existuje k funkci $g_n := f_n + \frac{3}{4}2^{-n} \in C(J_A)$ polynom P_n takový, že pro všechna $t \in J_A$ platí $|g_n(t) - P_n(t)| < \frac{1}{4}2^{-n}$, tj. $\frac{1}{2}2^{-n} < P_n(t) - f_n(t) < 2^{-n}$. Odtud je snadno vidět, že polynomy P_n splňují podmínky (4).

(b) Posloupnosti $\{P_n\}$ a $\{Q_n\}$ vystupují v dokazovaném tvrzení symetricky, takže stačí dokázat jednu z nerovností (5). Vzhledem k tomu, že $Q_m(t) - P_m(t) \to 0$, existuje pro $n = 1, 2, \ldots$ ke každému $t \in J_A$ přirozené $m(n, t)$ takové, že $Q_m(t) - P_m(t) < 1/n$ pro všechna $m \geqq \max(m(n, t), n)$. Podle předpokladu je $\{P_m(t)\}$ nerostoucí posloupnost, takže $Q_m(t) < P_n(t) + 1/n$. První z nerovností (5) nyní dostaneme pomocí cvičení 2.40. ∎

Nechť $\{P_n\}$ je posloupnost polynomů splňující podmínky (4). Podle implikace (2b) jsou operátory $P_n(A)$ pozitivní a tvoří nerostoucí posloupnost. Existuje tudíž pozitivní operátor $P \equiv \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} P_n(A)$ (viz poznámku 5.3.5). Z nerovností (5) dostáváme $Q_m(A) \leqq P_n(A) + 1/n$, resp. $P_m(A) \leqq Q_n(A) + 1/n$, a provedeme-li limitní přechod $m \to \infty$ a potom $n \to \infty$, zjistíme, že operátor $\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} P_n(A)$ je stejný pro všechny posloupnosti $\{P_n\}$ splňující podmínky (4); tento operátor tedy závisí jen na funkci f. Získáváme tak zobrazení $\dot{T}_A$ z $\mathscr{K}_0$ do množiny pozitivních operátorů na $\mathscr{H}$

$$\dot{T}_A(f) := \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} P_n(A)\,, \tag{6}$$

kde $\{P_n\}$ je libovolná posloupnost splňující podmínky (4) pro dané $f \in \mathscr{K}_0$.

10.1.2 Tvrzení: (a) Zobrazení $\dot{T}_A$ je aditivní, multiplikativní a pro každé $c \geqq 0$ platí $\dot{T}_A(cf) = c\,\dot{T}_A(f)$, $f \in \mathscr{K}_0$.
(b) Jestliže funkce $f, g \in \mathscr{K}_0$ splňují $f(t) \geqq g(t)$ pro všechna $t \in J_A$, potom $\dot{T}_A(f) \geqq \dot{T}_A(g)$.
Důkaz: (a) Vše plyne z definice (6), vlastností (3) množiny $\mathscr{K}_0$ a sekvenční spojitosti násobení vůči silné topologii (tvrzení 5.2.1b).
(b) Nechť posloupnosti $\{P_n\}$, resp. $\{Q_n\}$ splňují podmínky (4) pro funkci f, resp. g. Z podmínky $Q_m(t) - P_m(t) - [g(t) - f(t)] \to 0$ stejně jako v důkazu lemmatu 1b plyne $Q_m(t) < 1/n + P_n(t) + g(t) - f(t) \leqq 1/n + P_n(t)$ pro všechna $m \geqq \max(m(n,t), n)$ a odtud $Q_m(t) < P_n(t) + 1/n$ pro všechna $n > m_n$ stejnoměrně na J_A. Z odpovídající operátorové nerovnosti $Q_m(A) \leqq P_n(A) + 1/n$ dostáváme nejprve $\dot{T}_A(g) \leqq P_n(A) + 1/n$ pro každé přirozené n a limitní přechod $n \to \infty$ potom dává $\dot{T}_A(g) \leqq \dot{T}_A(f)$. ■

Zobrazení $\dot{T}_A$ není rozšířením zobrazení $P \mapsto P(A)$, protože polynomy nabývající záporných hodnot na J_A neleží v $\mathscr{K}_0$. Je však snadné najít společné rozšíření obou těchto zobrazení. K tomu účelu zavedeme množinu $\mathscr{K}$ tvořenou právě všemi funkcemi $\varphi\colon J_A \to \mathbb{R}$, které lze zapsat ve tvaru

$$\varphi = \varphi_+ - \varphi_-\,, \qquad \varphi_\pm \in \mathscr{K}_0\,. \tag{7a}$$

Pomocí vlastnosti (3) zjistíme, že *$\mathscr{K}$ je algebra nad $\mathbb{R}$ s bodově definovaným násobením, která obsahuje všechny reálné funkce spojité na J_A*; speciálně pro každý reálný polynom P platí $P \upharpoonright J_A \in \mathscr{K}$. Dané funkci $\varphi \in \mathscr{K}$, $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$, přiřadíme hermitovský operátor

$$T_A(\varphi) := \dot{T}_A(\varphi_+) - \dot{T}_A(\varphi_-)\,. \tag{7b}$$

Tato definice je korektní, protože všechna vyjádření funkce φ ve tvaru rozdílu dvojice funkcí z $\mathscr{K}_0$ vedou ke stejnému operátoru $T_A(\varphi)$. Skutečně, jestliže $\varphi =$

$= \psi - \eta$, kde $\psi, \eta \in \mathscr{K}_0$, potom $\psi + \varphi_- = \varphi_+ + \eta$ a díky aditivitě zobrazení $\dot{T}_A$ dostáváme $\dot{T}_A(\psi) + \dot{T}_A(\varphi_-) = \dot{T}_A(\varphi_+) + \dot{T}_A(\eta)$, tj. $\dot{T}_A(\varphi_+) - \dot{T}_A(\varphi_-) = \dot{T}_A(\psi) - \dot{T}_A(\eta)$. Dále je zřejmé, že pro každé $\varphi \in \mathscr{K}_0$ platí $T_A(\varphi) = \dot{T}_A(\varphi)$, takže $\dot{T}_A = T_A \restriction \mathscr{K}_0$.

10.1.3 Tvrzení: (a) Zobrazení T_A je lineární, multiplikativní a monotónní.
(b) Ke každému $\varphi \in \mathscr{K}$ existuje posloupnost $\{P_n\}$ reálných polynomů taková, že $\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} P_n(t)$ pro všechna $t \in J_A$ a $T_A(\varphi) = \text{s-}\lim_{n\to\infty} P_n(A)$.

Důkaz: (a) Pro $\varphi, \psi \in \mathscr{K}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ položíme $\eta := \alpha\varphi + \psi$. Z rozkladu (7a) a identity $\alpha = \alpha_+ - \alpha_-$, kde $\alpha_\pm := \frac{1}{2}(|\alpha| \pm \alpha) \geqq 0$, plyne $\eta = \eta_+ - \eta_-$, přičemž $\eta_+ = \alpha_+\varphi_+ + \alpha_-\varphi_- + \psi_+$ a $\eta_- = \alpha_+\varphi_- + \alpha_-\varphi_+ + \psi_-$. Funkce $\eta_\pm$ patří do $\mathscr{K}_0$ (viz 3)), takže $\eta \in \mathscr{K}$; pomocí definičního vztahu (7b) a tvrzení 2a dostáváme

$$\begin{aligned} T_A(\eta) &= [\alpha_+ \dot{T}_A(\varphi_+) + \alpha_- \dot{T}_A(\varphi_-) + \dot{T}_A(\psi_+)] - \\ &\quad - [\alpha_+ \dot{T}_A(\varphi_-) + \alpha_- \dot{T}_A(\varphi_+) + \dot{T}_A(\psi_-)] = \\ &= \alpha_+ T_A(\varphi) - \alpha_- T_A(\varphi) + T_A(\psi) = \alpha\, T_A(\varphi) + T_A(\psi)\,. \end{aligned}$$

Analogicky se dokáže multiplikativita. Jestliže $\varphi \leqq \psi$ na J_A, potom $\varphi_+ + \psi_- \leqq \psi_+ + \varphi_-$. Z tvrzení 2 nyní plyne $\dot{T}_A(\varphi_+) + \dot{T}_A(\psi_-) \leqq \dot{T}_A(\psi_+) + \dot{T}_A(\varphi_-)$, a odtud dostáváme $T_A(\varphi) \leqq T_A(\psi)$.
(b) K funkcím $\varphi_\pm \in \mathscr{K}_0$ existují neklesající posloupnosti polynomů $\{P_n^{(\pm)}\} \subset \mathscr{K}_0$ takové, že $\dot{T}_A(\varphi_\pm) = \text{s-}\lim_{n\to\infty} P_n^{(\pm)}(A)$. Potom pro polynomy $P_n := P_n^+ - P_n^-$ platí $P_n(A) = P_n^+(A) - P_n^-(A)$ (viz formuli (2a)), takže $T_A(\varphi) = \text{s-}\lim_{n\to\infty} P_n(A)$. ■

10.1.4 Poznámka: Označme id_A zúžení funkce id na interval J_A a položme $m' := \min\{0, m_A\}$. Potom funkce $\mathrm{id}_A - m'$ a $-m'$ patří do $\mathscr{K}_0$, takže $T_A(\mathrm{id}_A) = \dot{T}_A(\mathrm{id}_A - m') - \dot{T}_A(-m')$. Z definičních vztahů (6) a (1) plyne $\dot{T}_A(\mathrm{id}_A - m') = A - m'$, $\dot{T}_A(-m') = -m'$, tj. $T_A(\mathrm{id}_A) = A$. Užitím linearity a multiplikativity zobrazení T_A a vztahu (1) potom pro libovolný reálný polynom P dostáváme

$$T_A(P \restriction J_A) = P(A)\,. \tag{8}$$

Vlastnosti zobrazení T_A nyní užijeme ke konstrukci rozkladu jedničky. Uvažujme pro každé $u \in \mathbb{R}$ funkci $e_u \colon J_A \to [0, \infty)$ definovanou vztahem

$$e_u := \begin{cases} \chi_{[m_A, u]} \restriction J_A, & u \geqq m_A \\ 0, & u < m_A \end{cases}.$$

Snadno se přesvědčíme o tom, že $e_u \in \mathscr{K}_0$ pro každé $u \in \mathbb{R}$ (cvičení 3).

10.1.5 Tvrzení: Zobrazení $u \mapsto E_u := T_A(e_u)$ je rozklad jedničky.

Důkaz: Každý z operátorů E_u je pozitivní a díky vztahu $e_u^2 = e_u$ plyne z multiplikativity zobrazení T_A rovnost $E_u^2 = E_u$, takže E_u je projektor. Jestliže $u < v$, potom $e_u(t) \leqq e_v(t)$ pro všechna $t \in J_A$ a monotonie zobrazení T_A dává $E_u \leqq E_v$. Dále vztahy $E_u = 0$ pro $u < m_A$, resp. $E_u = I$ pro $u \geqq M_A$ implikují $\text{s-lim}_{u \to -\infty} E_u = 0$, resp. $\text{s-lim}_{u \to +\infty} E_u = I$. Zbývá ověřit silnou spojitost zprava, což je triviální pro $u \in \mathbb{R} \setminus [m_A, M_A)$. Nechť $u \in [m_A, M_A)$; stačí dokázat, že $\text{s-lim}_{n \to \infty} E_{u+1/n} = E_u$. Pro $n > 1/(M_A - u) + 1$ uvažujme funkci g_n, jejíž graf je lomená čára spojující následující čtyři body v $\mathbb{R}^2$: $[m_A, 1]$, $[u + 1/n, 1]$, $[u + 1/(n-1), 0]$ a $[M_A, 0]$. Potom $g_n \in C(J_A)$, přičemž pro všechna $t \in J_A$ platí vztahy $g_{n+1}(t) \leqq e_{u+1/n}(t) \leqq g_n(t)$ a $\lim_{n \to \infty} g_n(t) = e_u(t)$. Pro polynomy P_n, které splňují podmínky (4) pro $f_n = g_n$ a $f = e_u$, dostáváme $E_u = \text{s-lim}_{n \to \infty} P_n(A)$ a $P_n(A) \geqq E_{u+1/n} \geqq E_u$. Dále operátory $E_{u+1/n} - E_u$ jsou projektory (viz tvrzení 5.4.4), takže pro každé $x \in \mathscr{H}$ platí $(x, (P_n - E_u)\, x) \geqq \|(E_{u+1/n} - E_u)\, x\|^2$ a limitní přechod dává $E_u = \text{s-lim}\, E_{u+1/n}$. ■

Projektorovou míru generovanou rozkladem jedničky $\{T_A(e_u)\}$ označíme $E_A(\,.\,)$. Je zřejmé, že $E_A(-\infty, m_A) = E_A(M_A, +\infty) = 0$ a funkce id je proto E_A-s. v. omezená, tj. $\text{id} \in L^\infty(\mathbb{R}, dE_A)$. Ukážeme, že $\mathscr{T}_b^{(E_A)}(\text{id}) = A$.

Uvažujme libovolné rozdělení D intervalu J_A s dělicími body $t_0 = m_A < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = M_A$. Pro intervaly $L_k := (t_{k-1}, t_k]$, $2 \leqq k \leqq n$, platí $\chi_{L_k} \upharpoonright J_A = (\chi_{[m_A, t_k]} - \chi_{[m_A, t_{k-1}]}) \upharpoonright J_A = e_{t_k} - e_{t_{k-1}}$; podobně pro $L_1 := [m_A, t_1]$ máme $\chi_{L_1} \upharpoonright J_A = e_{t_1}$. Vzhledem k tomu, že $e_{t_k} \in \mathscr{K}_0$ pro $1 \leqq k \leqq n$, platí

$$\{\chi_{L_k}\colon k = 1, 2, \ldots, n\} \subset \mathscr{K}. \tag{9}$$

Pro $k = 2, 3, \ldots, n$ potom dostáváme $T_A(\chi_{L_k}) = T_A(e_{t_k}) - T_A(e_{t_{k-1}}) = E_{t_k} - E_{t_{k-1}} = E_A(L_k)$. Podobně podmínka $E_{m_A - 0} \equiv E_A(-\infty, m_A) = 0$ dává $T_A(\chi_{L_1}) = E_{t_1} = E_{t_1} - E_{m_A - 0} = E_A(L_1)$. Podle inkluze (9) patří jednoduchá funkce $s_D = \sum_{k=1}^{n} t_k \chi_{L_k}$ do $\mathscr{K}$ a

$$T_A(s_D) = \sum_{k=1}^{n} t_k\, T_A(\chi_{L_k}) = \sum_{k=1}^{n} t_k\, E_A(L_k) = \mathscr{T}_b^{(E_A)}(s_D) \tag{10}$$

(viz formuli (9.3.2b)). Je zřejmé, že pro každé $\varepsilon > 0$ a libovolné rozdělení D intervalu J_A splňující podmínku $\max\{(t_k - t_{k-1})\colon 1 \leqq k \leqq n\} < \varepsilon$ platí $\sup\{|t - s_D(t)|\colon t \in J_A\} < \varepsilon$. Odtud dostáváme dvě nerovnosti: jednak $\|\mathscr{T}_b^{(E_A)}(\text{id}) - \mathscr{T}_b^{(E_A)}(s_D)\| < \varepsilon$ (pomocí věty 9.3.3b) a za druhé $\|T_A(\text{id} \upharpoonright J_A) - T_A(s_D)\| < \varepsilon$ (cvičení 4). Tyto nerovnosti spolu se vztahem (8) pro $P = \text{id}$ a (10) dávají $\|\mathscr{T}_b^{(E_A)}(\text{id}) - A\| < 2\varepsilon$ pro libovolné $\varepsilon > 0$, tj. $\mathscr{T}_b^{(E_A)}(\text{id}) = A$. Tím jsme dokázali podstatnou část následujícího tvrzení.

316 **10.1.6 Věta** (*spektrální teorém pro hermitovské operátory*): (a) Ke každému hermitovskému operátoru A existuje právě jedna projektorová míra $E_A(.)$ na $\mathbb{R}$ taková, že

$$E_A(-\infty, m_A) = E_A(M_A, +\infty) = 0 \quad \text{a} \quad \mathscr{T}_b^{(E_A)}(\mathrm{id}) \equiv \int t \, \mathrm{d}E_A(t) = A\,. \qquad (11)$$

(b) Omezený operátor B komutuje s A právě tehdy, když komutuje s operátory $E_t^{(A)} \equiv E_A(-\infty, t)$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Důkaz: Z tvrzení (a) zbývá ověřit jednoznačnost. Jestliže $F(.)$ je projektorová míra na $\mathbb{R}$, pro niž platí vztahy (11), potom $\mathscr{T}_b^{(F)}(f) = T_A(f \upharpoonright J_A)$ pro všechny funkce f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že $f \upharpoonright J_A \in \mathscr{K}_0$ (cvičení 5). Speciálně pro $f = \chi_{(-\infty, u]}$, kde $u \geqq m_A$, dostáváme $F(-\infty, u] = F[m_A, u] = \mathscr{T}_b^{(F)}(\chi_{[m_A, u]}) = T_A(e_u) = E_A(-\infty, u]$. Pro $u < m_A$ máme $F(-\infty, u] = E(-\infty, u] = 0$, takže projektorové míry $E_A(.)$ a $F(.)$ jsou totožné (viz cvičení 9.6).

(b) Z podmínky $BE_t^{(A)} = E_t^{(A)}B$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$ plyne na základě cvičení 9.7 rovnost $BE_A(M) = E_A(M)\,B$ pro každou borelovskou množinu; věta 9.4.10d potom dává $B\,\mathscr{T}_b^{(E_A)}(\mathrm{id}) = \mathscr{T}_b^{(E_A)}(\mathrm{id})\,B$, tj. $BA = AB$. K důkazu opačné implikace užijeme tvrzení 3b. Pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí $E_t^{(A)} = T_A(e_t)$, takže existuje posloupnost polynomů $P_n^{(t)}$ taková, že $E_t^{(A)} = \text{s-lim}\, P_n^{(t)}(A)$. Z podmínky $BA = AB$ plyne $B\,P_n^{(t)}(A) = P_n^{(t)}(A)\,B$ a limitní přechod dává $BE_t^{(A)} = E_t^{(A)}B$. ■

10.1.7 Poznámka: Projektorovou míru $E_A(.)$ nazýváme *spektrální mírou* operátoru A a formuli $A = \int t \, \mathrm{d}E_A(t)$ jeho *spektrálním rozkladem.*

10.1.8 Příklad: Najdeme spektrální rozklad operátoru Q násobení nezávisle proměnnou na prostoru $L^2(a, b)$, kde $b - a < \infty$. Dané borelovské množině $M \subset \mathbb{R}$ přiřadíme operátor $E(M)$ definovaný pro každé $\psi \in L^2(a, b)$ a s.v. $x \in (a, b)$ vztahem $(E(M)\,\psi)\,(x) := \chi_M(x)\,\psi(x)$. Podle příkladu 9.1.3b je $E(.)$ projektorová míra na $\mathbb{R}$, pro kterou navíc platí

$$E(M) = E(M \cap (a, b))\,; \qquad (12)$$

funkce id proto patří do $L^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{d}E)$. Míra $\mu_\psi(.) := (\psi, E(.)\,\psi)$ vyhovuje pro všechna $\psi \in L^2(a, b)$ a $M \in \mathscr{B}$ vztahu

$$\mu_\psi(M) = \int_a^b \chi_M(x)\,|\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_M \chi_{(a,b)}(x)\,|\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x\,.$$

Odtud dostáváme (srv. s příkladem 9.4.5)

$$(\psi, \mathscr{T}_b^{(E)}(\mathrm{id})\,\psi) = \int_a^b x\,\mathrm{d}\mu_\psi(x) = \int_a^b x\,|\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x = (\psi, Q\psi)$$

a díky libovolnosti ψ platí $\mathcal{T}_b^{(E)}(\mathrm{id}) = Q$. Konečně ze vztahů $M_Q = b$ a $m_Q = a$ (viz příklad 5.3.2) a (12) plyne $E(-\infty, m_Q) = E(M_Q, +\infty) = 0$, takže projektorová míra $E(.)$ představuje hledanou spektrální míru operátoru Q.

10.2 SPEKTRÁLNÍ TEORÉM PRO OMEZENÉ NORMÁLNÍ OPERÁTORY

Nechť B je omezený normální operátor, $B = A + \mathrm{i}A'$, kde $A \equiv \mathrm{Re}\, B$, $A' \equiv \mathrm{Im}\, B$ jsou komutující hermitovské operátory (viz tvrzení 5.6.1). Z podmínky $AA' = A'A$ vyplývá, že pro libovolné množiny $M, M' \in \mathcal{B}$ platí $E_A(M)\, E_{A'}(M') = E_{A'}(M')\, E_A(M)$ (viz větu 10.1.6b a cvičení 9.7). Projektorové míry $E_A(.)$, $E_{A'}(.)$ tudíž splňují předpoklady tvrzení 9.2.6; jejich direktní součin, který označíme $F_B(.)$, je projektorová míra na $\mathbb{R}^2$ jednoznačně určená podmínkami

$$F_B(M \times M') = E_A(M)\, E_{A'}(M')\,, \qquad M, M' \in \mathcal{B}\,. \tag{1}$$

Nyní z výsledků příkladu 9.3.7 vyplývají vztahy

$$\int t\, \mathrm{d}F_B(t, u) = A\,, \qquad \int u\, \mathrm{d}F_B(t, u) = A'$$

a díky omezenosti operátorů A, A' platí $\mathrm{id} \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{d}E_A) \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{d}E_{A'})$. Funkce $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ určená předpisem $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}(t, u) := t + \mathrm{i}u$ je zjevně izometrií prostorů $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$ a patří do $L^\infty(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}F_B)$ (cvičení 9.13), přičemž

$$\mathcal{T}_b^{(F_B)}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}) = \int (t + \mathrm{i}u)\, \mathrm{d}F_B(t, u) = A + \mathrm{i}A' = B\,. \tag{2}$$

Formule (1) a (2) představují následující zobecnění věty 10.1.6.

10.2.1 Věta: (*spektrální teorém pro omezené normální operátory*): Ke každému omezenému normálnímu operátoru B existuje právě jedna projektorová míra $F_B(.)$ na $\mathbb{R}^2$ taková, že platí formule (2); přitom jednoznačností rozumíme, že každá projektorová míra $F(.)$ na $\mathbb{R}^2$ splňující $\mathcal{T}_b^{(F)}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}) = B$ a $F(M \times M') = E_A(M)\, E_{A'}(M')$ pro všechna $M, M' \in \mathcal{B}$, je totožná s $F_B(.)$.

10.2.2 Poznámka: Z tvrzení 10.1.3b vyplývá, že pro každou dvojici intervalů $J, K \subset \mathbb{R}$ (ne nutně omezených) platí $E_A(J) = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} P_n^{(J)}(A)$ a $E_{A'}(K) = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} Q_n^{(K)}(A')$, kde $P_n^{(J)}$, $Q_n^{(K)}$ jsou reálné polynomy (cvičení 7). Pomocí sekvenční spojitosti násobení dále dostáváme $F_B(J \times K) = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} P_n^{(J)}(A)\, Q_n^{(K)}(A')$. Díky tomu, že operátory $P_n^{(J)}(A)$ a $Q_n^{(K)}(A')$ jsou hermitovské a komutují, je jejich součin hermitovský; vyjádříme-li operátory A, A' pomocí B a B^*, lze jej upravit na tvar $\sum_{r=0}^{N} \sum_{s=0}^{r} a_{rs}^{(n)} B^{r-s}(B^*)^s$, kde $a_{rs}^{(n)} \in \mathbb{C}$ a N je součet stupňů polynomů $P_n^{(J)}$ a $Q_n^{(K)}$. Ke každé dvojici intervalů $J, K \subset \mathbb{R}$ tedy existuje posloupnost hermitovských operátorů

$$S_n(B, B^*) \equiv \sum_r \sum_{s=0}^{r} a_{rs}^{(n)} B^{r-s}(B^*)^s , \qquad n = 1, 2, \dots , \tag{3a}$$

taková že

$$F_B(J \times K) = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} S_n(B, B^*) . \tag{3b}$$

10.2.3 Příklad: V § 5.6 jsme probrali některé vlastnosti omezených operátorů na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ s čistě bodovým spektrem, které tvoří podmnožinu v $\mathscr{N}(\mathscr{H})$. Pro tyto operátory lze udat explicitní tvar projektorové míry splňující formule (1) a (2). Pro jednoduchost se omezíme na případ separabilního $\mathscr{H}$. Nechť tedy k danému $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ existuje ortonormální báze $\{e^{(j)}\}$ tvořená jeho vlastními vektory. Vlastní hodnoty operátoru B označíme β_k, $k = 1, 2, \dots, n_B$, kde $n_B \leqq \infty$; jestliže P_k je projektor na vlastní podprostor $N(\beta_k)$, pak pro $k \neq l$ máme $P_k P_l = 0$ (viz větu 5.6.2) a v důsledku toho, že B má čistě bodové spektrum, platí $\sum_k P_k = I$. Pro každou množinu $M \in \mathscr{B}^2$ položíme

$$F(M) := \sum_{k=1}^{n_B} \chi_M(\lambda_k, \lambda'_k)\, P_k , \quad \text{kde} \quad \lambda_k := \operatorname{Re} \beta_k \quad \text{a} \quad \lambda'_k := \operatorname{Im} \beta_k . \tag{4}$$

Stejně jako v případě diskrétní projektorové míry na $\mathbb{R}$ (viz příklad 9.1.3a) se ověří, že $F(.)$ je projektorová míra na $\mathbb{R}^2$. Dále z nerovnosti

$$\sup_k |\beta_k| \leqq \|B\| \tag{5}$$

plyne $F(\mathbb{R}^2 \setminus K_B) = 0$, kde $K_B := \{[t, u]: t^2 + u^2 \leqq \|B\|^2\}$; proto funkce $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ patří do $L^\infty(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}F)$.

Množina $N := \mathbb{R}^2 \setminus \{[\lambda_k, \lambda'_k]: k = 1, \dots, n_B\}$ je F-nulová, takže pro každé $x \in \mathscr{H}$ splňuje borelovská míra $\mu_x(.) := (x, F(.)\, x)$ rovnost $\mu_x(N) = 0$. Potom $(x, \mathscr{T}_{\mathrm{b}}^{(F)}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})\, x) = \sum_{k=1}^{n_B} \beta_k(x, P_k x)$ – viz formuli (A.6.19c); absolutní konvergence řady je důsledkem nerovnosti (5). Z podmínky $\sum_{k=1}^{n_B} P_k = I$ dále plyne $Bx = \sum_{k=1}^{n_B} BP_k x = \sum_{k=1}^{n_B} \beta_k P_k x$, takže

$$\mathscr{T}_{\mathrm{b}}^{(F)}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}) = B = \sum_{k=1}^{n_B} \beta_k P_k ; \tag{6}$$

přitom pro $n_B = \infty$ jde o silnou operátorovou konvergenci (existence limity plyne z nerovnosti (5) a silné úplnosti $\mathscr{B}(\mathscr{H})$). Ověříme, že projektorová míra (4) splňuje také podmínku (1). Vzhledem k tomu, že operátory $A \equiv \mathrm{Re}\, B$ a $A' \equiv \mathrm{Im}\, B$ mají stejnou množinu vlastních podprostorů jako B, jde opět o operátory s čistě bodovým spektrem; přičemž $\sigma_p(A) = \{\lambda_k : k = 1, 2, \dots\}$, resp. $\sigma_p(A') = \{\lambda'_k : k = 1, 2, \dots\}$. Pro diskrétní projektorovou míru $E(.)$ na $\mathbb{R}$, kde

$$E(M) := \sum_k \chi_M(\lambda_k)\, P_k\,, \qquad M \in \mathscr{B}$$

dostaneme zopakováním postupu, který vedl k formuli (6), vztah $\mathscr{T}_b^{(E)}(\mathrm{id}) = A$. Jelikož $m_A = \inf \sigma_p(A)$, $M_A = \sup \sigma_p(A)$ (ověřte!), z uvedené definice plyne $E(-\infty, m_A) = E(M_A, +\infty) = 0$; projektorová míra $E(.)$ je tedy spektrální mírou operátoru A. Podobně pro spektrální míru $E'(.)$ operátoru A' platí $E'(M) = \sum_k \chi_M(\lambda'_k)\, P_k$. Nyní pro libovolné množiny $M, M' \in \mathscr{B}$ pomocí vztahu $\chi_{M \times M'}(t, u) = \chi_M(t)\, \chi_{M'}(u)$ a sekvenční spojitosti násobení plyne

$$E(M)\, E'(M') = \operatorname*{s-lim}_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \chi_M(\lambda_k)\, P_k \sum_{l=1}^{n} \chi_{M'}(\lambda'_l)\, P_l =$$

$$= \operatorname*{s-lim}_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \chi_{M \times M'}(\lambda_k, \lambda'_k)\, P_k = F(M \times M')\,.$$

Pomocí projektorové míry $F_B(.)$ lze jednoduše charakterizovat spektrální vlastnosti operátoru B.

10.2.4 Tvrzení: Nechť B je omezený normální operátor a $F_B(.)$ projektorová míra na $\mathbb{R}^2$ splňující vztahy (1) a (2).
(a) Komplexní číslo $\lambda \equiv \lambda_1 + i\lambda_2$ patří do spektra operátoru B právě tehdy, když pro každé ε-okolí U_ε bodu $[\lambda_1, \lambda_2]$ platí $F_B(U_\varepsilon) \neq 0$.
(b) Komplexní číslo $\lambda \equiv \lambda_1 + i\lambda_2$ je vlastní hodnotou operátoru B právě tehdy, když jednobodová množina $J_\lambda \equiv \{[\lambda_1, \lambda_2]\}$ splňuje $F_B(J_\lambda) \neq 0$; příslušný vlastní podprostor je pak dán vztahem $N_B(\lambda) = \mathrm{Ran}\, F_B(J_\lambda)$.
(c) Pro rezolventní množinu operátoru B platí $F_B(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^{(-1)}(\varrho(B))) = 0$, tj. $F_B(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^{(-1)}(\sigma(B))) = I$.
Důkaz: Pro $\varepsilon > 0$ označíme $U_\varepsilon(\lambda) := \{[t, u] \in \mathbb{R}^2 : (t - \lambda_1)^2 + (u - \lambda_2)^2 < \varepsilon^2\}$ a $V_\varepsilon(\lambda) := \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda| < \varepsilon\}$, takže

$$\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^{(-1)}(V_\varepsilon(\lambda)) = U_\varepsilon(\lambda)\,. \tag{7}$$

Díky tomu, že $B = \mathscr{T}_b^{(F_B)}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$, plyne tvrzení (a) a (b) z věty 9.4.10.
(c) Množina $\varrho(B) \subset \mathbb{C}$ je otevřená, a protože $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ je izometrie, je $G \equiv \equiv \mathrm{id}_{\mathbb{C}}^{(-1)}(\varrho(B))$ otevřená v $\mathbb{R}^2$. Podle (a) má každý bod množiny G okolí U takové,

 že $F_B(U) = 0$. Odtud plyne $(x, F_B(G)\, x) = 0$ pro každé $x \in \mathscr{H}$ (viz poznámku A.3.1b), tj. $F_B(G) = 0$. ■

10.2.5 Poznámka: Jestliže operátor B je hermitovský, lze analogické tvrzení zformulovat pomocí jeho spektrální míry – viz větu 10.4.1.

Zbývající část tohoto paragrafu je věnována spektrálnímu rozkladu unitárních operátorů. Víme, že každý unitární operátor U je normální, přičemž jeho spektrum leží na jednotkové kružnici v $\mathbb{C}$ (viz důsledek 5.6.4b). Jestliže S je jednotková kružnice v $\mathbb{R}^2$ se středem v bodě $[0, 0]$, potom uvedené tvrzení o spektru operátoru U můžeme zapsat ve tvaru $\sigma(U) \subset \mathrm{id}_{\mathbb{C}}(S)$; z tvrzení 4c nyní plyne

$$F_U(\mathbb{R}^2 \backslash S) = 0\,. \tag{8}$$

Uvažujme funkci $w\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která zobrazuje množinu $\mathbb{R}^2 \backslash S$ na 0, a v bodech kružnice S, pro niž užijeme parametrizaci $u = \sin t$, $v = \cos t$, $0 \leqq t < 2\pi$, je $w(u, v) := t$. Snadno nahlédneme, že w je borelovská funkce, stačí užít vztahů

$$w^{(-1)}(-\infty, 0) = w^{(-1)}[2\pi, +\infty) = \emptyset\,, \tag{9a}$$

$$w^{(-1)}[0, t] = (\mathbb{R}^2 \backslash S) \cup S_t\,, \qquad 0 \leqq t < 2\pi\,, \tag{9b}$$

kde $S_t := \{[\cos t', \sin t'] \colon 0 \leqq t' \leqq t\}$, a uvážit, že množina S_t je obrazem intervalu $[0, t]$ při spojitém zobrazení $t' \mapsto [\cos t', \sin t']$ (viz věty 2.5.3b a 2.5.5a). Nyní předpis

$$E_U(M) := F_U(w^{(-1)}(M))\,, \qquad M \in \mathscr{B} \tag{9c}$$

definuje projektorovou míru $E_U(.)$ na $\mathbb{R}$ (viz cvičení 9.2), pro niž rovnosti (9a) dávají

$$E_U(-\infty, 0) = E_U[2\pi, +\infty) = 0\,. \tag{10}$$

Dále pro omezenou spojitou funkci $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\eta(t) := e^{it}$, plyne z tvrzení 9.4.12

$$\int \eta \,\mathrm{d}E_U = \int \eta \circ w \,\mathrm{d}F_U\,. \tag{11}$$

Díky podmínce (8) a tomu, že $(\eta \circ w)\,[u, v] = u + iv$ pro $[u, v] \in S$, je funkce $\eta \circ w$ rovna F_U-s. v. funkci $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. Z formulí (2) a (11) dostáváme vyjádření operátoru U ve tvaru integrálu vzhledem k projektorové míře $E_U(.)$ na $\mathbb{R}$

$$U = \int \eta \,\mathrm{d}E_U \equiv \int e^{it} \,\mathrm{d}E_U(t)\,. \tag{12}$$

Ukážeme, že *toto vyjádření je jednoznačné v následujícím smyslu: každá projektorová míra $E(.)$ na $\mathbb{R}$ splňující $\int \eta \, dE = U$ a $E(-\infty, 0) = E[2\pi, +\infty) = 0$ je totožná s $E_U(.)$.*

Stačí zřejmě ověřit, že odpovídající rozklady jedničky jsou totožné na intervalu $[0, 2\pi)$, což je díky podmínkám $E(-\infty, 0) = E_U(-\infty, 0) = 0$ ekvivalentní rovnosti

$$\int \chi_{[0,t]} \, dE = \int \chi_{[0,t]} \, dE_U , \qquad t \in [0, 2\pi) .$$

Z podmínky $\int \eta \, dE = \int \eta \, dE_U = U$ a věty 9.3.3 vyplývá, že pro každý trigonometrický polynom $T \equiv \sum_{k=-n}^{n} c^k \eta^k = c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k \eta^k + c_{-k} \bar{\eta}^k)$, $c_k \in \mathbb{C}$, platí $\int T \, dE = \sum_{k=-n}^{n} c_k U^k = \int T \, dE_U$. Pomocí Fejérovy věty (viz [Jar 2], věta 191) a cvičení 9.11 dále získáme vztah

$$\int \psi \, dE = \int \psi \, dE_U \tag{13}$$

pro libovolnou funkci ψ: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, která je spojitá a periodická (s periodou 2π). Uvažujme konečně funkci φ: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, k níž existuje posloupnost $\{\psi_n\}$ periodických funkcí spojitých na $\mathbb{R}$ taková, že $\sup_n \|\psi_n\|_\infty < \infty$ a $\lim_{n\to\infty} \psi_n(t) = \varphi(t)$ pro všechna $t \in [0, 2\pi)$. Z podmínek (10) a $E(\mathbb{R} \setminus [0, 2\pi)) = 0$ je vidět, že pro obě míry $E_U(.)$ i $E(.)$ splňuje posloupnost $\{\psi_n\}$ a funkce φ předpoklad věty 9.3.3d; pomocí rovnosti (13) dostáváme

$$\int \varphi \, dE = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} \int \psi_n \, dE = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} \int \psi_n \, dE_U = \int \varphi \, dE_U .$$

Pro $\varphi = \chi_{[0,t]}$, kde $0 \leq t < 2\pi$, vyhovuje uvedeným podmínkám posloupnost $\{\psi_n^{(t)}\}$, jejíž každý člen je periodickým rozšířením funkce $\tilde{\psi}_n^{(t)}$ definované na $[0, 2\pi]$ takto: graf funkce $\tilde{\psi}_n^{(t)}$ je lomená čára spojující body $[0, 1]$, $[t, 1]$, $[t + 1/n, 0]$, $[2\pi - 1/n, 0]$ a $[2\pi, 1]$. Dospíváme tak k následujícímu závěru, který je analogií tvrzení (a) spektrálního teorému pro hermitovské operátory.

10.2.6 Věta: Ke každému unitárnímu operátoru U existuje právě jedna projektorová míra $E_U(.)$ na R, pro niž platí vztahy (10) a (12).

Projektorovou míru $E_U(.)$ opět nazýváme **spektrální mírou** operátoru U a vztah (12) jeho **spektrálním rozkladem**. Pro rozklad jedničky $\{E_t^{(U)}\}$, kde $E_t^{(U)} := E_U(-\infty, t]$, platí analogie tvrzení 10.1.3b.

322 **10.2.7 Tvrzení:** Ke každému $t \in \mathbb{R}$ existuje posloupnost trigonometrických polynomů $T_n \equiv \sum_k c_k^{(n)} \eta^k$, kde komplexní čísla $c_k^{(n)}$ obecně závisí na t, pro niž

$$E_t^{(U)} = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} \sum_k c_k^{(n)} U^k . \tag{14}$$

Důkaz: Pro $t < 0$, resp. $t \geqq 2\pi$ formule (14) platí, neboť z podmínek (10) plyne $E_t^{(U)} = 0$ resp. $E_t^{(U)} = I$. Jestliže $t \in [0, 2\pi)$, dostáváme ze vztahů (8) a (9a,c) $E_t^{(U)} = F_U(w^{(-1)}(-\infty, t)) = F_U(S_t)$ a dále zjistíme, že pro $0 \leqq t \leqq \pi$ lze $E_t^{(U)}$ zapsat jako $F_U([\cos t, 1] \times [0, 1])$, zatímco pro $\pi < t < 2\pi$ platí $E_t^{(U)} = F_U([-1, \cos t] \times [-1, 0)) + F_U([-1, 1] \times [0, 1])$. Operátory $F_U(S_t)$ lze tedy pro všechna $t \in [0, 2\pi)$ vyjádřit pomocí (3b) a k dokončení důkazu stačí uvážit, že díky vztahu $U^* = U^{-1}$ nabývá formule (3a) tvaru $S_n(U, U^*) = \sum_{r=-R}^{R} c_r U^r$, kde $R := r_{\max}$. ■

10.2.8 Důsledek: Omezený operátor B komutuje s unitárním operátorem U právě tehdy, když komutuje s operátory $E_t^{(U)} \equiv E_U(-\infty, t]$ pro všechna $t \in [0, 2\pi)$. *Důkaz*: Nutná podmínka plyne z formule (14) a postačující podmínka se dokáže stejně jako ve větě 10.1.6b, vezmeme-li v úvahu vztahy (10).

10.2.9 Příklad: Najdeme spektrální rozklad $E_F(.)$ Fourierova-Plancherelova operátoru $F_d \equiv F$ na prostoru $L^2(\mathbb{R}^d)$. Pro $d = 1$ plyne z formule (4.3.5), že F má čistě bodové spektrum, přičemž $\sigma_p(F) = \{i^n\colon n = 0, 1, 2, 3\}$. Nejprve ověříme, že totéž platí pro každé přirozené d. Jestliže $d = 2$, pak z výsledku cvičení 5.48 a formule (4.3.5) plyne $F_2(h_j \times h_k) = \hat{h}_j \times \hat{h}_k = (-i)^{j+k}(h_j \times h_k)$. Indukční krok $d \mapsto d + 1$ se provede analogicky. Vlastní hodnoty operátoru F na $L^2(\mathbb{R}^d)$ označíme $\beta_k \equiv e^{ik\pi/2}$, kde $k = 0, 1, 2, 3$; pro projektory P_k na příslušné vlastní podprostory pak platí $P_k = E_F(\{k\pi/2\})$ (cvičení 8). Po dosazení do formulí (9c) a (4) dostaneme pro spektrální míru operátoru F vyjádření

$$E_F(M) = \sum_{k=0}^{3} \chi_{w^{(-1)}(M)}(\cos k\pi/2, \sin k\pi/2)\, E_F(\{k\pi/2\}), \qquad M \in \mathscr{B}.$$

Jelikož pro $0 \leqq k \leqq 3$ je $w(\cos k\pi/2, \sin k\pi/2) = k\pi/2$, platí $\chi_{w^{(-1)}(M)}(\cos k\pi/2, \sin k\pi/2) = \chi_M(k\pi/2)$, a srovnáním s formulí (9.1.5) zjistíme, že $E_F(.)$ je diskrétní projektorová míra na $\mathbb{R}$ s nosičem $\{0, \pi/2, \pi, \frac{3}{2}\pi\}$.

Užijeme-li formule (14) a identity $F^4 = I$ (viz cvičení 5.34), můžeme vyjádřit každý z operátorů $E_F(\{k\pi/2\})$ ve tvaru

$$E_F(\{k\pi/2\}) = \sum_{j=0}^{3} c_j^{(k)} F^j \tag{15}$$

(cvičení 9). K určení koeficientů $c_j^{(k)}$ užijeme stejného postupu jako v příkladu 9.3.5. Rovnost (15) je ekvivalentní podmínce $\mathscr{T}_b^{(E_F)}(\chi_{\{k\pi/2\}} - \sum_{j=0}^{3} c_j^{(k)} \eta^j) = 0$, která je splněna právě tehdy, když $\chi_{\{k\pi/2\}}(t) - \sum_{j=0}^{3} c_j^{(k)} e^{ijt} = 0$ pro $t = l\pi/2$, $l = 0, 1, 2, 3$ (viz větu 9.3.3b a podmínku $E_F(\mathbb{R} \setminus \{0, \pi/2, \pi, \frac{3}{2}\pi\}) = 0$). Pro každé k tak dostáváme algebraickou soustavu

$$\sum_{j=0}^{3} c_j^{(k)} i^{jl} = \delta_{kl}\,, \qquad l = 0, 1, 2, 3\,,$$

jež má jednoznačné řešení $c_j^{(k)} = (-i)^{jk}/4$, $0 \leqq j \leqq 3$. Spektrální míru operátoru F na $L^2(\mathbb{R}^d)$ lze tedy zapsat v následujícím tvaru

$$E_F(M) = \frac{1}{4} \sum_{j,k=0}^{3} \chi_M(k\pi/2)\,(-i)^{jk}\, F^j\,, \qquad M \in \mathscr{B}\,.$$

10.3 SPEKTRÁLNÍ TEORÉM PRO SAMOSDRUŽENÉ OPERÁTORY

Budeme se nyní zabývat úlohou najít k danému samosdruženému operátoru A (obecně neomezenému) projektorovou míru $E_A(.)$ na $\mathbb{R}$ takovou, že

$$A = \int t\, dE_A(t)\,. \tag{1}$$

Užijeme von Neumannova postupu, který vychází z věty o existenci a jednoznačnosti spektrálního rozkladu unitárního operátoru (věta 10.2.6); hledaná projektorová míra $E_A(.)$ se zkonstruuje pomocí spektrální míry unitárního operátoru $C(A)$ – Cayleyova obrazu operátoru A (viz § 8.2).

Nejprve uvedeme řešení obrácené úlohy, které v dalším použijeme k důkazu jednoznačnosti projektorové míry $E_A(.)$.

10.3.1 Tvrzení: Jestliže k danému samosdruženému operátoru A existuje projektorová míra $E(.)$ na $\mathbb{R}$ splňující rovnost (1), potom funkce $w: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daná vztahem

$$w(t) := \pi + 2 \operatorname{arctg} t \tag{2}$$

určuje projektorovou míru $E(w^{-1)}(.))$, jež je spektrální mírou unitárního operátoru $C(A)$.

Důkaz: Funkce w je spojitá a tedy borelovská; proto $F(.) \equiv E(w^{(-1)}(.))$ je projektorová míra na $\mathbb{R}$ (viz cvičení 9.2). Dále máme $w^{(-1)}(-\infty, 0] = w^{(-1)}[2\pi, +\infty) = 0$, takže $F(.)$ vyhovuje podmínkám (10.2.10). Nyní funkce $\eta: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\eta(s) := e^{is}$, která zjevně patří do $L^\infty(\mathbb{R}, dF)$, splňuje pro všechna $s \in (0, 2\pi)$, tj. F-s. v., vztah

$$\eta(s) = \frac{\operatorname{tg}(s-\pi)/2 - i}{\operatorname{tg}(s-\pi)/2 + i} = \frac{w^{-1}(s) - i}{w^{-1}(s) + i}\,.$$

Pomocí tvrzení 9.4.12 dostáváme

$$\int \eta \, \mathrm{d}F = \int \eta \circ w \, \mathrm{d}E = \int \varphi \, \mathrm{d}E ,$$

kde $\varphi(t) := (t - \mathrm{i})/(t + \mathrm{i})$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$, a zbývá dokázat, že $\mathcal{T}(\varphi) \equiv \int \varphi \, \mathrm{d}E = C(A)$. Jelikož $|\varphi(t)| = 1$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$, je $\mathcal{T}(\varphi)$ unitární operátor (cvičení 9.11). Vezměme libovolná $x, y \in \mathscr{H}$; díky tomu, že A je samosdružený, existuje $z \in D_A$ takové, že $y = (A + \mathrm{i})\, z = \mathcal{T}(\mathrm{id} + \mathrm{i})\, z$ (viz větu 7.3.10c). Potom

$$(x, \mathcal{T}(\varphi)\, y) = (x, \mathcal{T}(\varphi)\, \mathcal{T}(\mathrm{id} + \mathrm{i})\, z) , \tag{3}$$

a věta 9.4.8c dává $\mathcal{T}(\varphi)\, \mathcal{T}(\mathrm{id} + \mathrm{i}) = \mathcal{T}(\mathrm{id} - \mathrm{i})$, neboť oba operátory mají stejný definiční obor D_A. Po dosazení do rovnosti (3) dostáváme $(x, \mathcal{T}(\varphi)\, y) = (x, (A - \mathrm{i})\, z) = (x, (A - \mathrm{i})\, (A + \mathrm{i})^{-1}\, y)$; takže $\mathcal{T}(\varphi) = C(A)$. ■

Následující věta má základní význam jak pro samotnou teorii lineárních operátorů na Hilbertově prostoru, tak pro její aplikace (viz např. § 15.1).

10.3.2 Věta (*spektrální teorém pro samosdružené operátory*): (a) Ke každému samosdruženému operátoru A existuje právě jedna projektorová míra $E_A(.)$ na $\mathbb{R}$ splňující rovnost (1), tj.

$$A = \mathcal{T}^{(E_A)}(\mathrm{id}) .$$

(b) Omezený operátor komutuje s A právě tehdy, když komutuje s operátory $E_t^{(A)} \equiv E_A(-\infty, t]$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Důkaz: Nechť $U \equiv C(A)$ je Cayleyův obraz operátoru A a $F(.)$ je spektrální rozklad unitárního operátoru U.

(a) Číslo $\lambda = 1$ není vlastní hodnotou operátoru U (viz důsledek 8.2.3); z výsledku cvičení 8 potom plyne $F(\{0\}) = 0$, což spolu se vztahem (10.2.10) dává

$$F(-\infty, 0] = F[2\pi, +\infty) = 0 . \tag{4}$$

Uvažujme následující funkci $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$v(s) := \begin{cases} \operatorname{tg}\,(s - \pi)/2, & s \in (0, 2\pi) \\ 0, & s \in \mathbb{R}\backslash(0, 2\pi) . \end{cases}$$

Pro libovolné $t \in \mathbb{R}$ platí

$$v^{(-1)}(-\infty, t] = (0, w(t)] \cup N_t , \tag{5}$$

kde $w(t) = \pi + 2 \operatorname{arctg} t$, $N_t = \emptyset$ pro $t < 0$ a $N_t = \mathbb{R}\backslash(0, 2\pi)$ pro $t \geqq 0$. Funkce v je tedy borelovská a díky vlastnosti (4) máme

$$v(s) = \operatorname{tg} \frac{s - \pi}{2} \quad \text{pro } F\text{-s.v. } s \in \mathbb{R}\,. \tag{6}$$

Pomocí pravidel funkcionálního počtu, formule (10.2.12) pro $E_U(.) = F(.)$ a inverzní Cayleyovy transformace $A = \mathrm{i}(I + U)(I - U)^{-1}$ dostáváme vztahy $I + U = \mathcal{T}^{(F)}(1 + \eta)$, $(I - U)^{-1} = \mathcal{T}^{(F)}(1/(1 - \eta))$ a $A = \mathrm{i}\mathcal{T}^{(F)}(1 + \eta)\mathcal{T}^{(F)}(1/(1 - \eta)) \subset \mathcal{T}^{(F)}(\mathrm{i}(1 + \eta)/(1 - \eta))$. Jelikož pro všechna $s \neq 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, platí

$$\mathrm{i}\,\frac{1 + \eta(s)}{1 - \eta(s)} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(s-\pi)} - 1}{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(s-\pi)} + 1)} = \operatorname{tg} \frac{s - \pi}{2}\,,$$

plyne ze vztahu (6) $\mathcal{T}^{(F)}(\mathrm{i}(1 + \eta)/(1 - \eta)) = \mathcal{T}^{(F)}(v)$, takže $A \subset \mathcal{T}^{(F)}(v)$; operátor $\mathcal{T}^{(F)}(v)$ je samosdružený (viz větu 9.4.10c), proto platí rovnost. Tvrzení 9.4.12 pak dává $\mathcal{T}^{(F_v)}(\mathrm{id}) = \mathcal{T}^{(F)}(\mathrm{id} \circ v) = \mathcal{T}^{(F)}(v) = A$, takže vztah (1) splňuje projektorová míra

$$E_A(.) := F_v(.) = F(v^{(-1)}(.))\,. \tag{7}$$

Jednoznačnost snadno dokážeme pomocí tvrzení 1. Jestliže pro projektorovou míru $E(.)$ na $\mathbb{R}$ platí $\mathcal{T}^{(E)}(\mathrm{id}) = A$, potom $E(w^{(-1)}(.))$ je spektrální míra operátoru U; tvrzení o jednoznačnosti spektrálního rozkladu unitárního operátoru nyní implikuje $E(w^{(-1)}(M)) = F(M)$ pro všechna $M \in \mathcal{B}$. Vzhledem k tomu, že pro všechna $t \in \mathbb{R}$ je $(v \circ w)(t) = t$, dostáváme podle (7) $E_A(M) = F(v^{(-1)}(M)) = E(w^{(-1)}(v^{(-1)}(M))) = E((v \circ w)^{(-1)}(M)) = E(M)$.

(b) Z podmínky $BA \subset AB$ plyne $BU = UB$ (viz cvičení 8.5). Dále ze vztahů (7), (5) a (4) pro každé $t \in \mathbb{R}$ dostáváme $E_t^{(A)} = F(0, w(t)] = F(-\infty, w(t)]$ a důsledek 10.2.8 potom dává $E_t^{(A)}B = BE_t^{(A)}$. Opačná implikace se dokazuje stejně jako ve větě 10.1.6. ■

10.3.3 Důsledek: Rezolventu samosdruženého operátoru A lze pro každé $\mu \in \varrho(A)$ zapsat ve tvaru

$$R_A(\mu) = \int \frac{1}{t - \mu}\, \mathrm{d}E_A(t)\,.$$

Důkaz: Z formule (1) plyne $A - \mu = \int (t - \mu)\, \mathrm{d}E_A(t)$ a věta 9.4.8f potom dává $(A - \mu)^{-1} = \int 1/(t - \mu)\, \mathrm{d}E_A(t)$. ■

10.3.4 Poznámky: (a) Aplikujeme-li větu 2 na hermitovské operátory, dostaneme silnější tvrzení o jednoznačnosti než ve větě 10.1.6. Kombinací obou vět totiž zjistíme, že pro každou projektorovou míru na $\mathbb{R}$ splňující vztah $\mathcal{T}^{(E)}(\mathrm{id}) = A$ platí $E(-\infty, m_A) = E(M_A, +\infty) = 0$, což se zdá na první pohled paradoxní, uvážíme-li, že věta 2 fakticky plyne ze spektrálního teorému pro unitární operátory, který byl zase odvozen pomocí věty 10.1.6. Tato argumentace však není zcela přesná; z příslušné části důkazu věty 10.2.6 je totiž zřejmé, že tvrzení o jednoznačnosti spektrálního rozkladu unitárního operátoru, z nějž plyne jednoznačnost projektorové míry $E_A(.)$, na větě 10.1.6 nezávisí.

(b) Tvrzení (b) věty 2 umožňuje rozšířit pojem komutativity dvojice operátorů, který jsme v § 7.4 definovali pro případ, kdy alespoň jeden z operátorů je omezený. Řekneme, že *samosdružené (obecně neomezené) operátory A, A' komutují, jestliže komutují jejich spektrální míry* $E(.)$ a $E'(.)$, což je ekvivalentní komutativitě příslušných rozkladů jedničky, tj.

$$E_t E'_s = E'_s E_t \quad \text{pro všechna } t, s \in \mathbb{R} \tag{8}$$

(viz cvičení 9.7). Tato podmínka je podle spektrálního teorému ekvivalentní komutativitě A s $\{E'_s\}$, resp. komutativitě A' s $\{E_t\}$. Odtud a z věty 10.1.6b plyne, že pokud jeden z operátorů, např. A, je omezený, platí podmínka (8) právě tehdy, když $AA' \subset A'A$ (viz též cvičení 11).

(c) Spektrální teorém pro neomezené samosdružené operátory dokázal pomocí Cayleyovy transformace J. von Neumann [vN2] (viz též monografii ⟦vN⟧, § II.9).

Vzhledem k tomu, že spektrální teorém má ryze existenční charakter, není nám mnoho platný, chceme-li zjistit, jak vypadají operátory $E_A(M)$, $M \in \mathcal{B}$ pro konkrétní samosdružený operátor A. Tuto úlohu lze explicitně vyřešit jen v některých speciálních případech. Následující příklady ilustrují heuristický postup, kdy na základě konkrétních vlastností uvažovaného operátoru uhodneme „vhodnou" projektorovou míru $E(.)$, o níž potom dokážeme, že splňuje vztah (1).

10.3.5 Příklad: Najdeme spektrální rozklad samosdruženého operátoru A s čistě bodovým spektrem na separabilním $\mathcal{H}$. Podle definice má takový operátor neprázdnou množinu vlastních hodnot $\sigma_p(A) \equiv \{\lambda_j \colon j = 1, 2, \dots\}$, přičemž projektory P_j na odpovídající vlastní podprostory tvoří úplný systém, tj. $\sum_j P_j = I$. Dokážeme, že pro diskrétní projektorovou míru $E_D(.)$ na $\mathbb{R}$ (viz příklad 9.1.3),

$$E_D(M) := \sum_j \chi_M(\lambda_j)\, P_j\,, \qquad M \in \mathcal{B}\,,$$

je operátor $A' \equiv \mathcal{T}^{(E)}(\mathrm{id})$ totožný s A. Postup je podobný jako v příkladu 10.2.3, navíc je však třeba vzít v úvahu definiční obory, protože operátor A je obecně neomezený.

Množina $\mathbb{R} \setminus \sigma_p(A)$ je $\mu_x^{(D)}$-nulová pro každé $x \in \mathcal{H}$ (užíváme obvyklého označení $\mu_x^{(D)}(.) := (x, E_D(.)\,x)$). Z formulí (9.4.1a) a (A.6.19b,c) vyplývá, že definiční obor operátoru A' je tvořen právě těmi vektory $x \in \mathscr{H}$, pro něž

$$\int t^2 \, d\mu_x(t) = \sum_j \lambda_j^2 (x, P_j x) < \infty \tag{9}$$

a podle (9.4.5) pro každé $x \in D_{A'}$ platí $(x, A'x) = \sum_j \lambda_j (x, P_j x)$. Vezměme libovolné $x \in D_A$; jelikož každý z projektorů P_j redukuje operátor A (viz příklad 7.4.3), tj. $P_j A \subset A P_j$, platí

$$\|Ax\|^2 = \sum_j \|P_j A x\|^2 = \sum_j \|A P_j x\|^2 = \sum_j \lambda_j^2 \|P_j x\|^2 < \infty ,$$

takže $D_A \subset D_{A'}$. Podobně získáme vztah $(x, Ax) = (x, A'x)$, který spolu s inkluzí $D_A \subset D_{A'}$ dává $A \subset A'$. Díky tomu, že oba operátory jsou samosdružené, platí rovnost. Spektrální mírou operátoru A je tedy diskrétní projektorová míra $E_D(.)$; vidíme, že je určena množinou vlastních hodnot a příslušných projektorů. Těmito charakteristikami operátoru A je vymezen též jeho definiční obor podle formule (9); pro akci na libovolné $x \in D_A$ dostáváme $Ax = \sum_j P_j A x = \sum_j A P_j x = \sum_j \lambda_j P_j x$.

10.3.6 Příklad: Nechť $E(.)$ je libovolná projektorová míra na $\mathbb{R}^d$ a $w\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je E-s.v. definovaná borelovská funkce. Operátor $\mathscr{T}^{(E)}(w)$ je potom samosdružený; jeho spektrální rozklad lze jednoduše vyjádřit pomocí projektorové míry $E(.)$ a funkce w. Víme, že uvažovaný operátor se nezmění, změníme-li funkci w na E-nulové množině; můžeme proto předpokládat, že w je definována na celé množině $\mathbb{R}^d$. Potom jsou splněny předpoklady tvrzení 9.4.12 pro $n = 1$ a položíme-li v tomto tvrzení $\varphi = \mathrm{id}$, dostáváme

$$\mathscr{T}^{(E)}(w) = \int \mathrm{id} \, dE_w .$$

Hledanou spektrální mírou samosdruženého operátoru $\mathscr{T}^{(E)}(w)$ je tedy projektorová míra $E_w(.) \equiv E(w^{(-1)}(.))$.

10.3.7 Příklad: Předpokládejme, že známe spektrální rozklad samosdruženého operátoru A na $\mathscr{H}$.

(a) Jestliže U je unitární operátor, potom operátor $A' := UAU^{-1}$ je samosdružený (viz tvrzení 7.4.10) a jeho spektrální rozklad je určen tím, že pro projektorovou míru $E'(.) := UE_A(.)\,U^{-1}$ platí $\mathscr{T}^{(E')}(\mathrm{id}) = U\mathscr{T}^{(E_A)}(\mathrm{id})\,U^{-1} = UAU^{-1} = A'$ (viz cvičení 9.21), takže $E_{A'}(.) = UE_A(.)\,U^{-1}$. *Unitární ekvivalence samosdružených operátorů se tedy přenáší na jejich spektrální míry.*

(b) Nechť projektor P redukuje operátor A; víme, že $A' := A \upharpoonright PD_A$ je samosdružený operátor na Hilbertově prostoru $P\mathscr{H}$ (viz cvičení 7.29). Nyní z výsledků cvičení 9.8 a 9.22 plyne, že $E'(.) := E(.) \upharpoonright P\mathscr{H}$ je projektorová míra na $\mathbb{R}$ s hodnotami v $\mathscr{B}(P\mathscr{H})$ pro niž $A' = \mathscr{T}^{(E')}(\mathrm{id})$; tato projektorová míra je tudíž spektrální mírou operátoru A'. *Z podmínky $PA \subset AP$ tedy pro spektrální míru operátorů A a $A' \equiv A \upharpoonright PD_A$ vyplývá vztah $E_{A'}(.) = E_A(.) \upharpoonright P\mathscr{H}$.*

10.4 O SPEKTRU SAMOSDRUŽENÉHO OPERÁTORU

Spektrální teorém umožňuje charakterizovat body spektra samosdruženého operátoru pomocí jeho spektrální míry a zavést další podmnožiny spektra, jichž se užívá např. v teorii rozptylu (viz kapitolu 20); tyto a některé další otázky nyní probereme. V následujícím výkladu znamená A samosdružený (obecně neomezený) operátor na abstraktním Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$; jeho spektrální míru a příslušný rozklad jedničky značíme $E_A(.)$, resp. $\{E_t^{(A)}\}$, tj. $E_t^{(A)} = E_A(-\infty, t]$, $t \in \mathbb{R}$.

Víme, že celé spektrum operátoru A leží na reálné ose (důsledek 7.3.6b); ze vztahu $A = \mathscr{T}^{(E_A)}(\mathrm{id})$ a věty 9.4.10 vyplývá, že o tom, zda dané $\lambda \in \mathbb{R}$ patří do spektra, resp. je vlastní hodnotou operátoru A, lze rozhodnout na základě lokálních vlastností projektorové míry $E_A(.)$.

10.4.1 Věta: Jestliže A je samosdružený operátor a λ reálné číslo, potom
(a) $\lambda \in \sigma(A)$ právě tehdy, když $E_A(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \neq 0$ pro každé $\varepsilon > 0$;
(b) $\lambda \in \sigma_p(A)$ právě tehdy, když $E_A(\{\lambda\}) \neq 0$; pro příslušný vlastní podprostor platí $N_A(\lambda) = \mathrm{Ran}\, E_A(\{\lambda\})$;
(c) množina $\sigma(A)$ je neprázdná, přičemž

$$E_A(\mathbb{R} \setminus \sigma(A)) = 0\,, \quad \text{tj. } E_A(\sigma(A)) = I\,. \tag{1}$$

Důkaz: Tvrzení (a) a (b) plyne přímo z věty 9.4.10 pro $\varphi = \mathrm{id}$; k ověření (c) lze užít postupu z důkazu tvrzení 10.2.4c. ■

10.4.2 Poznámky: (a) Neprázdnost spektra samosdruženého operátoru je důležitým výsledkem spektrální teorie; připomeňme, že uzavřený neomezený operátor může mít prázdné spektrum (viz příklad 3.6.9).
(b) Díky vztahu $E_A(\mathbb{R} \setminus \sigma(A)) = 0$ lze formuli (10.3.1) psát ve tvaru

$$A = \int_{\sigma(A)} t \, \mathrm{d}E_A(t)\,. \tag{2}$$

Na základě toho se dá ukázat, že pro číselný obor hodnot samosdruženého operátoru A platí $\inf \Theta(A) = \inf \sigma(A)$ a totéž pro suprema. Dále snadno nahlédneme, že spektrum je minimální uzavřená množina s E_A-nulovým doplňkem, tj. *spektrum je nosičem projektorové míry $E_A(.)$*, $\sigma(A) = \mathrm{supp}\, E_A(.)$ (viz poznámku A.3.3b). Skutečně, z (1) plyne $F \equiv \mathrm{supp}\, E_A(.) \subset \sigma(A)$; předpoklad $\sigma(A) \setminus F \neq \emptyset$ spolu s uzavřeností F implikuje, že ke každému $y \in \sigma(A) \setminus F$ existuje okolí $U(y) \subset \mathbb{R} \setminus F$. Nyní $E_A(\mathbb{R} \setminus F) = 0$, takže také $E_A(U(y)) = 0$, a to je ve sporu s podmínkou $y \in \sigma(A)$.

(c) Pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ rozklad jedničky $\{E_t^{(A)}\}$ splňuje $E_t^{(A)} - \operatorname*{s-lim}_{t \to \lambda -} E_t^{(A)} = E_A(\{\lambda\})$. Z tvrzení (b) věty 1 tedy vyplývá, že *množina* $\sigma_p(A)$ *je tvořena právě všemi body nespojitosti zobrazení* $t \mapsto E_t^{(A)}$. Vzhledem k tomu, že $\sigma(A) \setminus \sigma_p(A) = \sigma_c(A)$ (neboť reziduální spektrum samosdruženého operátoru je prázdné), vidíme dále, že *spojité spektrum je podmnožina těch bodů spektra, v nichž zobrazení* $t \mapsto E_t^{(A)}$ *je spojité.*

10.4.3 Důsledek: (a) Každý izolovaný bod spektra samosdruženého operátoru je vlastní hodnota.

(b) Samosdružený operátor je omezený právě tehdy, když jeho spektrum je omezené.

Důkaz: (a) Je-li λ izolovaný bod spektra, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že intervaly $(\lambda - \varepsilon, \lambda)$ a $(\lambda, \lambda + \varepsilon)$ nepatří do $\sigma(A)$, takže podle (1) platí $E(\lambda - \varepsilon, \lambda) = E(\lambda, \lambda + \varepsilon) = 0$; současně z podmínky $\lambda \in \sigma(A)$ plyne $0 \neq E(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) = E(\{\lambda\})$.

(b) Jestliže $\sigma(A)$ je omezená množina, existuje $c > 0$ takové, že $E(c, +\infty) = E(-\infty, c) = 0$ a funkce id je tudíž E-s.v. omezená; nutná podmínka je přímým důsledkem tvrzení 5.6.5. ■

Budeme se nyní zabývat esenciálním spektrem operátoru A. Pomocí tvrzení 8.4.2 nejprve odvodíme následující kritérium.

10.4.4 Věta: Reálné λ patří do $\sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$\dim \operatorname{Ran} E_A(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) = \infty \,. \tag{3}$$

Důkaz: Nechť platí podmínka (3); uvažujme nerostoucí posloupnost $\{U_n\}$ okolí bodu λ, kde $U_n := (\lambda - 1/n, \lambda + 1/n)$, která podle (9.1.4b) splňuje vztah $\operatorname*{s-lim}_{n \to \infty} E_A(U_n) = E_A(\{\lambda\})$. Jestliže existuje $\tilde{n}$ takové, že $E_A(U_n) = E_A(U_{\tilde{n}})$ pro všechna $n > \tilde{n}$, potom $E_A(\{\lambda\}) = E_A(U_{\tilde{n}})$, a protože podle předpokladu $\dim E_A(U_{\tilde{n}}) = \infty$, *je* λ vlastní hodnota nekonečné násobnosti, tj. $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$. V opačném případě lze vybrat posloupnost $\{U_{n_k}\}$ splňující vztah $E_A(U_{n_{k+1}}) \neq E_A(U_{n_k})$ pro $k = 1, 2, \ldots$. Vzhledem k tomu, že systém množin $\Delta_k := U_{n_k} \setminus U_{n_{k+1}}$, $k = 1, 2, \ldots$ je disjunktní, tvoří projektory $E_k := E_A(\Delta_k)$ ortogonální systém. V každém podprostoru $\operatorname{Ran} E_k$ vybereme jednotkový vektor x_k, tj. $x_k = E_k x_k$; potom platí (viz cvičení 9.17) $\|(A - \lambda)\, x_k\|^2 = \int |t - \lambda|^2 \, d\mu_{E_k x_k} = \int_{\Delta_k} |t - \lambda|^2 \, d\mu_{x_k} < (1/n_k)^2 \to 0$. Díky ortonormalitě nelze z posloupnosti $\{x_k\}$ vybrat posloupnost konvergentní, takže opět $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$.

Předpokládejme nyní, že podmínka (3) neplatí; potom je zřejmé, že λ není vlastní hodnotou nekonečné násobnosti a vzhledem k tvrzení 8.4.2 stačí ověřit, že λ je regulární hodnotou operátoru $A_\lambda := A \upharpoonright (N_A(\lambda))^\perp$. Pro nějaké $\varepsilon > 0$ tedy platí $\dim \operatorname{Ran} E_A(U_\varepsilon(\lambda)) < \infty$; odtud vyplývá, že existuje kladné $\delta < \varepsilon$ takové, že

$$E_A(\lambda - \delta, \lambda) = E_A(\lambda, \lambda + \delta) = 0 \tag{4}$$

(viz příklad 9.1.7); potom $N_A(\lambda)^\perp = \operatorname{Ran}(I - E_A(\{\lambda\})) = \operatorname{Ran}(I - E_A(U_\delta(\lambda)))$. Díky tomu, že A_λ je samosdružený (viz cvičení 7.29), platí $\lambda \in \varrho(A_\lambda)$ právě tehdy, když existuje $c > 0$ takové, že $\|(A_\lambda - \lambda)\,x\|^2 \geqq c\|x\|^2$ pro všechna $x \in D(A_\lambda)$, tj. všechna $x \in D_A$ splňující rovnost $E_A(U_\delta(\lambda))\,x = 0$. Z formule (9.4.4) plyne, že uvedená nerovnost je splněna pro $c = \delta$:

$$\|(A_\lambda - \lambda)\,x\|^2 = \int_{\mathbb{R}\setminus U_\delta(\lambda)} |t - \lambda|^2\, d\mu_x \geqq \delta^2 \|x\|^2 . \qquad \blacksquare$$

10.4.5 Důsledek: Esenciální spektrum je uzavřená množina.

Toto tvrzení bezprostředně vyplývá z podmínky (3); čtenář si je snadno dokáže sám.

Uvedeme ještě další nutné a postačující podmínky pro to, aby dané λ patřilo do esenciálního spektra samosdruženého operátoru. První z nich je užitečnou modifikací obecné definice z § 7.2 (srv. též s důsledkem 7.3.6), která je výhodná pro ověřování stability (viz níže tvrzení 9); druhá udává jednoduchou topologickou charakteristiku esenciálního spektra.

10.4.6 Věta: Pro libovolné reálné λ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(a) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$;

(b) existuje posloupnost jednotkových vektorů $x_n \in D_A$, která slabě konverguje k nule, přičemž $\lim_{n\to\infty} \|(A - \lambda)\,x_n\| = 0$;

(c) λ je hromadný bod množiny $\sigma(A)$ nebo vlastní hodnota nekonečné násobnosti.

Důkaz: Implikaci (a) $\Rightarrow$ (b) jsme ověřili v první části důkazu věty 4 (připomeňme, že každá posloupnost ortonormálních vektorů slabě konverguje k nule – viz Besselovu nerovnost (4.2.7)); naopak, jestliže posloupnost $\{x_n\}$ splňuje (b), potom z ní nelze vybrat konvergentní posloupnost (muselo by totiž platit $x_{n_k} \to 0$, což je ve sporu s podmínkou $\|x_{n_k}\| = 1$ pro všechna k), takže $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$. Zbývá ověřit ekvivalenci podmínek (a) a (c). Jestliže neplatí (c), potom buď $\lambda \notin \sigma(A)$, a tudíž neplatí (a), nebo jde o izolovaný bod spektra takový, že $\dim \operatorname{Ran} E_A(\{\lambda\}) < \infty$. Existuje tedy $\delta > 0$, pro něž $E_A(U_\delta(\lambda)) = E_A(\{\lambda\})$, takže $\dim \operatorname{Ran} E_A(U_\delta(\lambda)) < \infty$ a z věty 4 plyne $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$. Naopak, jestliže $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$, potom

$$\dim \operatorname{Ran} E_A(U_\varepsilon(\lambda)) = n < \infty \tag{5}$$

pro nějaké $\varepsilon > 0$. Je-li $n = 0$, máme $\lambda \notin \sigma(A)$; pro $n \geqq 1$ plyne z podmínky (5) vztah (4), což znamená, že λ je izolovaným bodem spektra a současně vlastní hodnotou násobnosti nejvýše n. ■

10.4.7 Poznámka: Množina $\sigma_d(A) := \sigma(A) \setminus \sigma_{ess}(A)$ se nazývá **diskrétním spektrem**; z tvrzení (c) předchozí věty plyne, že diskrétní spektrum je tvořeno právě všemi izolovanými body spektra, které jsou vlastními hodnotami konečné násobnosti. Jestliže $\sigma_{ess}(A) = \emptyset$, tj. $\sigma(A) = \sigma_d(A)$, říkáme, že samosdružený operátor A má **čistě diskrétní spektrum.** Na rozdíl od operátoru s čistě bodovým spektrem nyní máme $\overline{\sigma_p(A)} = \sigma_p(A) = \sigma_d(A)$ (srv. s tvrzením 7.3.9), přičemž každá vlastní hodnota má konečnou násobnost. Z podmínky $\sigma_{ess}(A) = \emptyset$ plyne existence ortonormální báze tvořené vlastními vektory operátoru A, takže každý operátor s čistě diskrétním spektrem má čistě bodové spektrum (ale ne naopak – najděte příklady!). Dále se ukazuje, že $\sigma_{ess}(A) = \emptyset$ právě tehdy, když pro každé $\mu \in \varrho(A)$ je $(A - \mu)^{-1}$ kompaktní (viz komentář); proto se operátorům s čistě diskrétním spektrem často říká **operátory s kompaktní rezolventou.**

10.4.8 Příklad: Uvažujme samosdružený operátor A s čistě diskrétním spektrem na nekonečnědimenzionálním Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$. Potom každý bod spektra je izolovaný, takže spektrum je nejvýše spočetná množina: $\sigma(A) = \{\lambda_j : j = 1, 2, \dots\}$. Označíme-li $E_j := E_A(\{\lambda_j\})$, dostáváme z formule (1) $\sum_j E_j = I$. Podle předpokladu je každý z projektorů E_j konečnědimenzionální, a protože $\dim \mathscr{H} = \infty$, musí být $\sigma(A)$ nekonečná množina. Kdyby byla omezená, obsahovala by hromadný bod, což je ve sporu s podmínkou $\sigma_{ess}(A) = \emptyset$. Tedy spektrum není omezené, a tudíž A není omezený. Na nekonečnědimenzionálním $\mathscr{H}$ je tedy každý samosdružený operátor s čistě diskrétním spektrem neomezený. Ekvivalentně lze říci, že *z podmínky* $\dim \mathscr{H} = \infty$ *pro každý hermitovský operátor A na* $\mathscr{H}$ *plyne* $\sigma_{ess}(A) \neq \emptyset$.

Z podmínky (b) věty 6 ihned vyplývá stabilita esenciálního spektra samosdruženého operátoru vůči kompaktním poruchám.

10.4.9 Tvrzení: Pro libovolný hermitovský kompaktní operátor C platí

$$\sigma_{ess}(A + C) = \sigma_{ess}(A) . \tag{7}$$

Důkaz si čtenář snadno provede sám pomocí věty 6.1.2. Poznamenejme, že rovnost (7) platí i za slabších předpokladů (viz komentář).

Na závěr probereme klasifikaci bodů spektra samosdruženého operátoru, která se užívá v teorii rozptylu. Je založena zhruba řečeno na tom, v jakém vztahu k Lebesgueově míře m na $\mathbb{R}$ jsou míry $\mu_x(.) \equiv (x, E_A(.)\, x)$ pro různá $x \in \mathscr{H}$. Symbolem $\mathscr{B}_0$ označíme systém všech množin $N \subset \mathscr{B}$ splňujících vztah

$m(N) = 0$ a zavedeme následující podmnožiny v $\mathscr{H}$:

$$\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}^{(A)} \equiv \mathscr{H}_{\mathrm{ac}} := \{x \in \mathscr{H}:\ \mu_x(N) = 0 \ \text{ pro všechna } \ N \in \mathscr{B}_0\},$$
$$\mathscr{H}_{\mathrm{s}}^{(A)} \equiv \mathscr{H}_{\mathrm{s}} := \{x \in \mathscr{H}:\ \text{existuje } \ N_x \in \mathscr{B}_0 \ \text{ takové, že } \ \mu_x(\mathbb{R}\setminus N_x) = 0\}.$$

10.4.10 Poznámka: Užijeme-li terminologie zavedené v § A.9, můžeme říci, že množina $\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}$, resp. $\mathscr{H}_{\mathrm{s}}$ obsahuje právě všechna $x \in \mathscr{H}$, pro něž je míra $\mu_x(.)$ absolutně spojitá, resp. singulární vůči Lebesgueově míře m. Ukážeme, že množinu $\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}$ lze charakterizovat rovněž pomocí funkce $t \mapsto \sigma_x(t) := (x, E_t^{(A)}x)$. Nechť $x \in \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}$, takže $\mu_x(\{t\}) = 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$; funkce σ_x je pak spojitá, tj. $\mu_x((a, b)) = \sigma_x(b) - \sigma_x(a)$ pro všechna reálná $a < b$. Z podmínky $\mu_x \ll m$ potom plyne absolutní spojitost funkce σ_x v $\mathbb{R}$ (viz tvrzení A.9.1). Naopak, je-li funkce σ_x absolutně spojitá v $\mathbb{R}$, pak pro borelovskou míru ν_x, $\nu_x(B) := \int_B \sigma_x'\, dm$, a každý omezený interval $J \subset \mathbb{R}$ s koncovými body $a \leqq b$ platí $\nu_x(J) = \sigma_x(b) - \sigma_x(a)$ – viz poznámku A.9.6. V důsledku spojitosti funkce σ_x platí též $\mu_x(J) = \sigma_x(b) - \sigma_x(a)$, takže $\mu_x(J) = \nu_x(J)$ pro každý omezený interval J. Odtud plyne $\mu_x = \nu_x$ (viz důsledek A.4.7), a protože míra ν_x je zjevně absolutně spojitá vůči m, je i $\mu_x \ll m$. Vidíme tedy, že *množina $\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}$ je tvořena právě těmi $x \in \mathscr{H}$, pro něž je funkce σ_x absolutně spojitá.*

10.4.11 Tvrzení: Množiny $\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}$ a $\mathscr{H}_{\mathrm{s}}$ jsou navzájem ortogonální uzavřené podprostory, které redukují operátor A. Dále platí $\mathscr{H} = \mathscr{H}_{\mathrm{ac}} \oplus \mathscr{H}_{\mathrm{s}}$.

Důkaz: Pomocí elementárních vlastností projektorů ověříme, že $x \in \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}$ právě tehdy, když $E_A(N)\,x = 0$ pro všechna $N \in \mathscr{B}_0$, resp. $y \in \mathscr{H}_{\mathrm{s}}$ právě tehdy, když existuje $N_y \in \mathscr{B}_0$ takové, že $E_A(N_y)\,y = y$. Pro libovolná $x \in \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}$, $y \in \mathscr{H}_{\mathrm{s}}$ potom máme $(x, y) = (x, E_A(N_y)\,y) = (E_A(N_y)\,x, y) = 0$, takže $\mathscr{H}_{\mathrm{ac}} \perp \mathscr{H}_{\mathrm{s}}$, což je ekvivalentní vztahu $\mathscr{H}_{\mathrm{ac}} \subset \mathscr{H}_{\mathrm{s}}^{\perp}$. Ukážeme, že platí rovnost: skutečně, pro libovolné $N \in \mathscr{B}_0$ a $x \in \mathscr{H}$ zjevně máme $E_A(N)\,x \in \mathscr{H}_{\mathrm{s}}$; odtud pro $x \in \mathscr{H}_{\mathrm{s}}^{\perp}$ vyplývá $\mu_x(N) = (x, E_A(N)\,x) = 0$. Platí tedy $\mathscr{H}_{\mathrm{ac}} = \mathscr{H}_{\mathrm{s}}^{\perp}$ a k dokončení důkazu stačí ověřit, že $\mathscr{H}_{\mathrm{s}}$ je uzavřený podprostor, který redukuje operátor A. Nechť $y_n \to y$, kde $y_n \in \mathscr{H}_{\mathrm{s}}$ pro $n = 1, 2, \ldots$; existují tedy množiny $N_n \in \mathscr{B}_0$ splňující vztah $E_A(N_n)\,y_n = y_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Potom $N := \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ rovněž patří do $\mathscr{B}_0$, pro všechna n platí $E_A(N)\,y_n = E_A(N)\,E_A(N_n)\,y_n = E_A(N_n)\,y_n = y_n$ a limitní přechod dává $E_A(N)\,y = y$, takže množina $\mathscr{H}_{\mathrm{s}}$ je uzavřená. Podobně se ověří, že $\mathscr{H}_{\mathrm{s}}$ je podprostor.

Konečně, tvrzení o tom, že $\mathscr{H}_{\mathrm{s}}$ redukuje operátor A, je ekvivalentní tomu, že pro každé $x \in \mathscr{H}_{\mathrm{s}}$ a $t \in \mathbb{R}$ platí $E_t^{(A)}x \in \mathscr{H}_{\mathrm{s}}$ (viz větu 10.3.2 a cvičení 7.28). Nyní pro $x \in \mathscr{H}_{\mathrm{s}}$ máme $E_A(N_x)\,x = x$, a protože operátory $E_A(N_x)$ a $E_t^{(A)}$ komutují, dostáváme $E_A(N_x)\,E_t^{(A)}x = E_t^{(A)}\,E_A(N_x)\,x = E_t^{(A)}x$, tj. $E_t^{(A)}x \in \mathscr{H}_{\mathrm{s}}$. ■

Podle výsledku cvičení 7.29 jsou $A_{ac} := A \upharpoonright \mathscr{H}_{ac}$ a $A_s := A \upharpoonright \mathscr{H}_s$ samosdružené operátory na Hilbertových prostorech $\mathscr{H}_{ac}$ resp. $\mathscr{H}_s$; nazýváme je absolutně spojitou resp. singulární částí operátoru A. Z tvrzení, které jsme právě dokázali, plyne, že A je ortogonálním součtem těchto operátorů:

$$A = A_{ac} \oplus A_s \tag{8a}$$

(viz § 7.4). Jejich spektra, pro něž se užívá označení $\sigma_{ac}(A)$ resp. $\sigma_s(A)$ a názvů *absolutně spojité* resp. *singulární spektrum* operátoru A, splňují (viz cvičení 7.29)

$$\sigma(A) = \sigma_{ac}(A) \cup \sigma_s(A)\,. \tag{8b}$$

Vedle rozkladů (8a) existuje další vyjádření samosdruženého operátoru ve tvaru ortogonálního součtu $A = A_p \oplus A_c$, kde $A_p := A \upharpoonright \mathscr{H}_p$, $A_c := A \upharpoonright \mathscr{H}_p^{\perp}$ a $\mathscr{H}_p := \sum^{\oplus}_{\lambda \in \sigma_p(A)} N(\lambda)$; odpovídající rozklad spektra má tvar $\sigma(A) = \sigma(A_p) \cup \sigma(A_c)$, přičemž $\sigma(A_p) = \overline{\sigma_p(A)}$ (viz příklad 7.4.5). Je zřejmé, že $\mathscr{H}_p \subset \mathscr{H}_s$; skutečně, ke každému $x \in \mathscr{H}_p$ existuje nejvýše spočetná množina $N_x \equiv \equiv \{\lambda_j \colon j = 1, 2, \ldots\} \subset \sigma_p(A)$ taková, že $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x_j$, kde $x_j \in N(\lambda_j)$ (viz větu 4.5.3 a cvičení 4.19). Zjevně $N_x \subset \mathscr{B}_0$ a $E_A(N_x)\,x = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} E_A(N_x)\,x_j$; nyní $x_j = E_A(\{\lambda_j\})\,x_j$ a $E_A(N_x)\,E_A(\{\lambda_j\}) = E_A(\{\lambda_j\})$ pro $j = 1, 2, \ldots$; z toho plyne $E_A(N_x)\,x = x$ neboli $x \in \mathscr{H}_s$. Pokud je $\mathscr{H}_p \neq \mathscr{H}_s$, označíme symbolem $\mathscr{H}_{sc}$ ortogonální doplněk podprostoru $\mathscr{H}_p$ v $\mathscr{H}_s$, tj.

$$\mathscr{H}_s = \mathscr{H}_p \oplus \mathscr{H}_{sc}\,, \quad \text{kde } \mathscr{H}_{sc} := \mathscr{H}_s \cap \mathscr{H}_p^{\perp} \neq \{0\}\,.$$

Položíme $A_{sc} := A \upharpoonright \mathscr{H}_{sc} = A_s \upharpoonright \mathscr{H}_{sc}$ a $\sigma_{sc}(A) := \sigma(A_{sc})$; potom operátor A_{sc} nemá žádné vlastní hodnoty[1]) a stejně jako v příkladu 7.4.5 dostáváme vztahy

$$A_s = A_p \oplus A_{sc} \quad \text{a} \quad \sigma(A_s) \equiv \sigma_s(A) = \overline{\sigma_p(A)} \cup \sigma_{sc}(A)\,. \tag{9}$$

Díky tomu. že A_{sc} nemá vlastní hodnoty, je rozklad jedničky $\{E_t^{(A_{sc})}\}$ spojitý; operátor A_{sc} nazýváme singulárně spojitou částí operátoru A a množinu $\sigma_{sc}(A)$ **singulárně spojitým spektrem**. Kombinací rozkladů (8) a (9) dostáváme

$$A = A_{ac} \oplus A_p \oplus A_{sc}\,, \qquad \sigma(A) = \sigma_{ac}(A) \cup \overline{\sigma_p(A)} \cup \sigma_{sc}(A)\,. \tag{10}$$

10.4.12 Poznámky: (a) Operátor $A_c \equiv A \upharpoonright \mathscr{H}_p^{\perp}$ nemá vlastní hodnoty, takže rozklad jedničky $\{E_t^{(A_c)}\}$ je spojitý. Na základě toho někteří autoři (viz např. [[RN]], [[RS 1]] aj.) definují spojité spektrum operátoru A jako spektrum operátoru A_c.

[1]) Odtud je vidět, že podprostor $\mathscr{H}_{sc}$ je vždy nekonečnědimenzionální.

Upozorňujeme, že množiny $\sigma_c(A)$ a $\sigma(A_c)$ se obecně liší; např. druhá je vždy uzavřená (je to spektrum), zatímco prvá může být otevřená (najděte příklady), dále rozklad $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$ je disjunktní, kdežto množiny $\sigma_p(A)$ a $\sigma(A_c)$ obecně disjunktní nejsou (viz komentář).

(b) V definici podprostoru $\mathscr{H}_{sc}$ je zahrnuta podmínka $\mathscr{H}_{sc} \neq \{0\}$; proto je vždy $\sigma(A_{sc}) \neq \emptyset$ (viz větu 1c). Je však zvykem zapisovat rovnost $\mathscr{H}_p = \mathscr{H}_s \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \mathscr{H}_c = \mathscr{H}_{ac}$ konvenčně ve tvaru $\sigma(A_{sc}) = \emptyset$.

(c) Vzhledem k tomu, že podprostory $\mathscr{H}_p$ a $\mathscr{H}_{ac}$ jsou ortogonální, platí inkluze

$$\sigma_{ac}(A) \subset \sigma_{ess}(A) . \tag{11}$$

Skutečně, pro $\lambda \in \sigma_{ac}(A)$ existuje posloupnost jednotkových vektorů $x_n \in D_A \cap \mathscr{H}_{ac}$ takových, že $(A - \lambda)\, x_n \to 0$. Z ní nelze vybrat konvergentní posloupnost $\{x_{n_k}\}$, protože pro $x := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$ by platilo $\|x\| = 1$ a $Ax = \lambda x$ (viz důkaz tvrzení 7.2.8), tj. $x \in \mathscr{H}_p$, a současně podmínka $\{x_{n_k}\} \subset \mathscr{H}_{ac}$ implikuje $x \in \mathscr{H}_{ac}$; je tedy $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$.

10.4.13 Příklady: (a) Uvažujme postor $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$, kde μ je libovolná borelovská míra na $\mathbb{R}$. Najdeme podprostory $\mathscr{H}_{ac}$ a $\mathscr{H}_s$ pro operátor Q_μ násobení nezávisle proměnnou na $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$. Podle věty A.9.3 existuje jednoznačný rozklad $\mu =$ $= \mu_{ac} + \mu_s$, kde míra μ_{ac} resp. μ_s je absolutně spojitá, resp. singulární vzhledem k Lebesgueově míře, tj. existuje množina $N_\mu \in \mathscr{B}_0$ taková, že

$$\mu_s(\mathbb{R}\backslash N_\mu) = 0 \quad \text{a} \quad \mu_{ac}(N_\mu) = 0 . \tag{12}$$

Vztahem

$$(U[\psi_1, \psi_2])\,(x) := \begin{cases} \psi_1(x), & x \in \mathbb{R}\backslash N_\mu , \\ \psi_2(x), & x \in N_\mu , \end{cases} \tag{13}$$

je definován izomorfismus direktního součtu $L^2(\mathbb{R}, d\mu_{ac}) \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu_s)$ s prostorem $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$; to se snadno ověří pomocí rovností (12), z nichž např. plyne $\int_{N_\mu} |\psi_2|^2\, d\mu = \int_{N_\mu} |\psi_2|^2\, d\mu_s = \int_{\mathbb{R}} |\psi_2|^2\, d\mu_s$. Pro podprostory $\mathscr{H}_1 :=$ $= \{U[\psi_1, 0]: \psi_1 \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_{ac})\}$ a $\mathscr{H}_2 := \{U[0, \psi_2]: \psi_2 \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_s)\}$ zjevně platí, že jeden je ortogonálním doplňkem druhého. Přitom $\psi \in \mathscr{H}_2$ právě tehdy, když $\psi = \chi_{N_\mu}\psi$, a vzhledem k tomu, že spektrální rozklad operátoru Q_μ je dán vztahem $(E_Q(M)\,\psi)\,(x) = \chi_M(x)\,\psi(x)$ (viz příklad 10.3.6), máme $\psi \in \mathscr{H}_2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \psi = E(N_\mu)\,\psi$, neboli $\mathscr{H}_2 = \mathscr{H}_s$. Potom $\mathscr{H}_{ac} = \mathscr{H}_s^{\perp} = \mathscr{H}_2^{\perp} = \mathscr{H}_1$ a dospíváme k následujícímu závěru: *pro operátor Q_μ jsou podprostory $\mathscr{H}_{ac}$, resp. $\mathscr{H}_s$ izomorfní prostorům $L^2(\mathbb{R}, d\mu_{ac})$, resp. $L^2(\mathbb{R}, d\mu_s)$, přičemž příslušný izomorfismus je dán formulí* (13). Odtud např. pro operátor Q na $L^2(\mathbb{R})$ vyplývá $\mathscr{H}_{ac} = L^2(\mathbb{R})$, takže jeho spektrum, které vyplňuje celou reálnou osu (viz příklad 7.3.8), je čistě absolutně spojité: $\mathbb{R} = \sigma(Q) = \sigma_{ac}(Q)$.

(b) Najdeme postačující podmínku pro to, aby operátor $T_f \in \mathscr{L}_{sa}(L^2(\mathbb{R}^n))$ násobení reálnou borelovskou funkcí f splňoval

$$\mathscr{H}_{ac}(T_f) = L^2(\mathbb{R}^n)\,. \tag{14}$$

a tedy také $\sigma_{ac}(T_f) = \sigma(T_f)$.

Podle příkladu 9.4.5 platí $T_f = \int f \,\mathrm{d}E$, kde $E(.)$ je projektorová míra na $\mathbb{R}^n$ taková, že $E(M) = T_{\chi_M}$ pro každé $M \in \mathscr{B}^n$. Odtud pro spektrální míru $E_f(.)$ operátoru T_f dostáváme $E_f(.) = E(f^{(-1)}(.))$ (viz příklad 10.3.6), takže pro všechna $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ a $N \in \mathscr{B}$ platí

$$\|E_f(N)\,\psi\|^2 = \int_{f^{(-1)}(N)} |\psi|^2 \,\mathrm{d}m_n\,.$$

Pro splnění rovnosti (14) tedy stačí, aby

$$m(N) = 0 \ \Rightarrow\ m_n(f^{(-1)}(N)) = 0\,.$$

Ukážeme, že tato implikace platí např. tehdy, jestliže $f = h$, kde funkce h je definována na celém $\mathbb{R}^n$ předpisem

$$h(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{j=1}^{n} x_j^2\,. \tag{15a}$$

Zavedeme otevřené množiny $G_\pm := \{[x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n\colon \pm x_1 > 0\}$; pro množinu $F := \mathbb{R}^n \setminus (G_+ \cup G_-)$ pak máme $F = \{0\} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$, takže $m_n(F) = 0$. Definujme nyní zobrazení $w\colon G_+ \to \mathbb{R}^n$ takto: $w_1 := h$, $w_j(x_1, \ldots, x_n) := x_j$, $j = 2, 3, \ldots, n$. Snadno ověříme, že w je injektivní: z podmínek $w_j(x_1, \ldots, x_n) = w_j(y_1, \ldots, y_n)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, totiž plyne $x_j = y_j$ pro $j = 2, 3, \ldots, n$ a $x_1^2 = y_1^2$, což je na množině G_+ splněno jen pro $x_1 = y_1$. Dále je zřejmé, že existují spojité parciální derivace $\partial_k w_j$, přičemž pro příslušný jacobián dostáváme $D_w(x_1, \ldots, x_n) = 2x_1 > 0$; jsou tedy splněny předpoklady věty o substituci. Pro dané $N \in \mathscr{B}$ označme $N_n := N \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$; potom je

$$w^{(-1)}(N_n) = h^{(-1)}(N) \cap G_+$$

a formule (A.7.7) pro $\psi = 1$ a $\tilde{B} = h^{(-1)}(N) \cap G_+$ dá

$$m_n(h^{(-1)}(N) \cap G_+) = \int_{N_n \cap \operatorname{Ran} w} |D_{w^{-1}}| \,\mathrm{d}m_n \leqq \int_{N_n} |D_{w^{-1}}| \,\mathrm{d}m_n\,.$$

Jestliže $m(N) = 0$, je $m_n(N_n) = 0$, a tedy také $m_n(h^{(-1)}(N) \cap G_+) = 0$. Podobně zjistíme, že $m_n(h^{(-1)}(N) \cap G_-) = 0$, a protože $m_n(F) = 0$, je $m_n(h^{(-1)}(N)) = 0$.

 Pro operátor T_h násobení funkcí (15a) tedy platí $\sigma_{ac}(T_h) = L^2(\mathbb{R}^n)$; pomocí (8b), příkladu 7.3.8 a inkluzí (11) pak dostaneme

$$\sigma_{ac}(T_h) = \sigma_{ess}(T_h) = \sigma(T_h) = \overline{\operatorname{Ran} h} = \mathbb{R}^+ . \tag{15b}$$

10.5 FUNKCE SAMOSDRUŽENÉHO OPERÁTORU

Pomocí spektrálního teorému a pravidel funkcionálního počtu je pro daný samosdružený operátor A definována třída operátorů, které nazýváme „funkcemi operátoru A“. Studiu jejích vlastností je věnován tento paragraf.

Jako obvykle značíme symbolem $E_A(.)$ spektrální míru operátoru A; díky tomu, že tato míra je jednoznačně určena operátorem A, platí totéž o množině $\Phi_{E_A} \equiv \Phi^{(A)}$ všech E_A-s. v. definovaných borelovských funkcí φ: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (viz § 9.4). Z podmínky $E_A(\mathbb{R}\backslash\sigma(A)) = 0$ plyne, že do množiny $\Phi^{(A)}$ patří všechny borelovské funkce definované na $\sigma(A)$; jelikož každá spojitá funkce je borelovská, platí

$$C(\sigma(A)) \subset \Phi^{(A)} . \tag{1}$$

Nyní pro každé $\varphi \in \Phi^{(A)}$ je operátor $\mathcal{T}^{(E_A)}(\varphi)$ plně určen funkcí φ a operátorem A; je zvykem značit tyto operátory $\varphi(A)$, tj. $\varphi(A) = \mathcal{T}^{(E_A)}(\varphi)$ pro všechna $\varphi \in \Phi^{(A)}$, a nazývat je **funkcemi samosdruženého operátoru** A.[1]) Platí pro ně samozřejmě všechna tvrzení odvozená v § 9.4. Avšak ta okolnost, že $E_A(.)$ je spektrální mírou operátoru A, umožňuje v některých z těchto tvrzení doplnit předpoklady o podmínky vyjádřené pomocí A a dostat tak řadu nových výsledků. Nejprve však probereme několik příkladů.

10.5.1 Příklad: Na prostoru $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$, kde μ je nějaká borelovská míra, uvažujme operátor Q_μ násobení nezávisle proměnnou. Užijeme-li označení z příkladu 7.3.3, vidíme, že $Q_\mu = T_{id}$, takže jde o samosdružený operátor. Na základě výsledků příkladu 9.4.5 pro libovolnou borelovskou funkci f: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dostáváme

$$T_f = \int f \, dE^{(\mu)} , \tag{2}$$

kde projektorová míra $E^{(\mu)}(.)$ je pro každé $M \in \mathscr{B}$ dána vztahem $E^{(\mu)}(M) = T_{\chi_M}$. Pro $f = id$ představuje rovnost (2) spektrální rozklad operátoru Q_μ.

[1]) Uvedené označení je vhodné pro zápis elementárních funkcí (exp, sin atd.), kde vyjádření ve tvaru $\mathcal{T}^{(E_A)}(\varphi)$ je těžkopádné. Není v něm však zachyceno, že se jedná pro *dané* A o funkční hodnotu zobrazení z množiny $\Phi^{(A)}$ – spíše vzniká chybný dojem funkční hodnoty zobrazení $\varphi(.)$, v němž operátor A hraje roli „nezávisle proměnné“. Tatáž námitka se vztahuje na termín „funkce operátoru“.

Uvažujme libovolnou funkci $\varphi \in \Phi^{(Q_\mu)}$. Množina $N \in \mathscr{B}$, na níž tato funkce není definována, je $E^{(\mu)}$-nulová; položíme

$$f_\varphi(x) := \varphi(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\backslash N \tag{3}$$

(v bodech $E^{(\mu)}$-nulové množiny N lze funkci f_φ dodefinovat libovolně, např. $f_\varphi(x) := 0$, $x \in N$); potom ze vztahu (2) a věty 9.4.8d vyplývá

$$T_{f_\varphi} = \int f\, \mathrm{d}E^{(\mu)} = \int \varphi\, \mathrm{d}E^{(\mu)} \equiv \varphi(Q_\mu)\,.$$

Pro každé $\varphi \in \Phi^{(Q_\mu)}$ je tedy $\varphi(Q_\mu)$ operátor násobení funkcí f_φ, která je triviálním rozšířením funkce φ na celé $\mathbb{R}$.

10.5.2 Příklad (funkce operátoru P na $L^2(\mathbb{R})$): V příkladu 7.4.12 jsme pro samosdružený operátor P definovaný na podprostoru $D_P \equiv AC(\mathbb{R})$ vztahem $P\psi = -\mathrm{i}\psi'$ odvodili formuli $P = F^{-1}QF$, kde F je Fourierův-Plancherelův operátor a Q je operátor násobení nezávisle proměnnou na $L^2(\mathbb{R})$. Z výsledků příkladu 10.3.7 a cvičení 9.21 dostáváme $\Phi^{(P)} = \Phi^{(Q)}$ a

$$\varphi(P) = F^{-1}\, \varphi(Q)\, F \tag{4}$$

pro všechna $\varphi \in \Phi^{(P)}$. Díky tomu, že operátory F a F^{-1} mají jednoduchou funkcionální realizaci (viz příklady 3.2.6 a 5.1.11), dá se za jistých dodatečných předpokladů o funkci φ najít funkcionální realizace operátoru $\varphi(P)$. Probereme dva případy.

(a) *Pro každé $a \in \mathbb{R}$ je $\mathrm{e}^{\mathrm{i}aP}$ unitární „dosazovací" operátor, jehož akce na libovolné $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ je dána vztahem*

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}aP}\psi)(x) = \psi(x+a)\,. \tag{5}$$

Z výsledků příkladu 5.5.3 víme, že operátor U_a, kde $(U_a\psi)(x) = \psi(x+a)$, je unitární. Operátor $\mathrm{e}^{\mathrm{i}aP}$ je rovněž unitární, neboť jej lze vyjádřit pomocí funkce $t \mapsto \eta_a(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}at}$ ve tvaru $\mathscr{T}^{(E_P)}(\eta_a)$. K ověření rovnosti (5) stačí proto ukázat, že $\mathrm{e}^{\mathrm{i}aP}\psi = U_a\psi$ pro vektory nějaké množiny M, která je hustá v $\mathscr{H}$. Položíme $M = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$; pro libovolné $\psi \in M$ formule (4) dává $\mathrm{e}^{\mathrm{i}aP}\psi = F^{-1}\,\eta_a(Q)\,F$ a pomocí (3.2.15) dostáváme

$$(\eta_a(Q)\,F\psi)(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(a-y)}\, \psi(y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xz} (U_a\psi)(z) = (FU_a\psi)(x)\,,$$

takže $\mathrm{e}^{\mathrm{i}aP}\psi = U_a\psi$.

(b) *Jestliže* $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, *je* $\varphi(P)$ *integrální operátor s jádrem* $K(x, y) = (2\pi)^{-1/2} (F\varphi)(y - x)$, *tj. pro každé* $\psi \in D(\varphi(P)) = F^{-1} D(\varphi(Q))$ *a s.v.* $x \in \mathbb{R}$ *platí*

$$(\varphi(P)\psi)(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} (F\varphi)(y - x)\, \psi(y)\, \mathrm{d}y . \tag{6}$$

Při ověření tohoto tvrzení vyjdeme z toho, že součin funkcí φ a $\eta \equiv F\psi$ patří do $L^1(\mathbb{R})$; formule (5.1.5) potom pro s.v. $x \in \mathbb{R}$ dává

$$(\varphi(P)\psi)(x) = (F^{-1}\varphi\eta)(x) = (2\pi)^{-1/2} (\vartheta_x, F\psi) , \tag{7}$$

kde vektor $\vartheta_x \in L^2(\mathbb{R})$ je dán vztahem $\vartheta_x(y) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\, \overline{\varphi(y)}$. Zapíšeme jej ve tvaru $\vartheta_x = \lim_{n\to\infty} T_n\vartheta_x$, kde T_n je operátor násobení funkcí $\chi_{(-n,n)}$, takže $T_n\vartheta_x \in L^1 \cap L^2$ pro všechna n. Z unitarity operátoru F dále plyne

$$(\vartheta_x, F\psi) = \lim_{n\to\infty} (F^{-1}T_n\vartheta_x, \psi) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left[(2\pi)^{-1/2} \int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)z}\, \varphi(z)\, \mathrm{d}z \right] \psi(y)\, \mathrm{d}y .$$

V integrálu provedeme substituci $y \to x + y$ a užijeme formule (5); po dosazení do (7) máme

$$\sqrt{2\pi}(\varphi(P)\psi)(x) = \lim_{n\to\infty} (F^{-1}T_n\vartheta_0, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xP}\psi) =$$

$$= (F^{-1}\vartheta_0, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xP}\psi) = \int_{\mathbb{R}} \overline{(F^{-1}\bar{\varphi})(y)}\, \psi(x + y)\, \mathrm{d}y .$$

Uvážíme-li ještě, že $\overline{(F^{-1}\bar{\varphi})(y)} = (F\varphi)(y)$, dostáváme odtud rovnost (6).

Odvodíme dále vztah mezi spektrální mírou a rezolventou daného samosdruženého operátoru.

10.5.3 Příklad: Pro dané $\varepsilon > 0$ a konečný interval $J \equiv [a, b]$, kde $b > a$, definujme funkci $\psi_\varepsilon\colon \mathbb{R} \times J \to \mathbb{R}^+$ předpisem

$$\psi_\varepsilon(t, u) := \frac{\varepsilon}{(t - u)^2 + \varepsilon^2} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \left[\frac{1}{t - u - \mathrm{i}\varepsilon} - \frac{1}{t - u + \mathrm{i}\varepsilon} \right];$$

dále pro $u \in J$ označíme $\psi_\varepsilon^{(u)}(.) \equiv \psi_\varepsilon(., u)$. Pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$ máme

$$\varphi_\varepsilon(t) \equiv \int_a^b \psi_\varepsilon(t, u)\, \mathrm{d}u = \operatorname{arctg} \frac{b - t}{\varepsilon} - \operatorname{arctg} \frac{a - t}{\varepsilon} ,$$

takže $|\varphi_\varepsilon(t)| < \pi$ a $\lim_{\varepsilon\to 0+} \varphi_\varepsilon(t) = (\pi/2)\,(\chi_{[a,b]} + \chi_{(a,b)})$. Věta 9.3.3d nyní dává

$$\frac{\pi}{2}\,[E_A[a,b] + E_A(a,b)] = \operatorname*{s\text{-}lim}_{\varepsilon\to 0+} \varphi_\varepsilon(A) =$$

$$= \operatorname*{s\text{-}lim}_{\varepsilon\to 0+} \left[\operatorname{arctg}\frac{b-A}{\varepsilon} - \operatorname{arctg}\frac{a-A}{\varepsilon}\right]. \tag{8}$$

Funkce ψ_ε splňuje předpoklady (i)–(iii) tvrzení 9.3.8, a protože pro každé $u \in [a,b]$ platí $\psi_\varepsilon^{(u)}(A) = 1/2\mathrm{i}\,(R_A(u+\mathrm{i}\varepsilon) - R_A(u-\mathrm{i}\varepsilon))$ (viz důsledek 10.3.3) a $\|R_A(u \pm \mathrm{i}\varepsilon)\| \leqq \sup_{t\in\mathbb{R}} |t - u \pm \mathrm{i}\varepsilon|^{-1} = 1/\varepsilon$, dostáváme pomocí první rezolventní formule

$$\|\psi_\varepsilon^{(u)}(A) - \psi_\varepsilon^{(u_0)}(A)\| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2}\,\|R_A(u+\mathrm{i}\varepsilon) - R_A(u_0+\mathrm{i}\varepsilon)\| + \frac{1}{2}\,\|R_A(u-\mathrm{i}\varepsilon) - R_A(u_0-\mathrm{i}\varepsilon)\| =$$

$$= \frac{1}{2}\,|u-u_0|\,(\|R_A(u+\mathrm{i}\varepsilon)\,R_A(u_0+\mathrm{i}\varepsilon)\| + \|R_A(u-\mathrm{i}\varepsilon)\,R_A(u_0-\mathrm{i}\varepsilon)\|) \leqq \frac{|u-u_0|}{\varepsilon^2}.$$

Zobrazení $u \mapsto \psi_\varepsilon^{(u)}(A)$ je tedy spojité na J; dále $\|\psi_\varepsilon^{(u)}(A)\| \leqq \sup\{|\psi(t,u)|:\, t\in\mathbb{R}\} = 1/\varepsilon$, takže funkce $u \mapsto \|\psi^{(u)}(A)\|$ je integrabilní na J. Jsou tedy splněny všechny předpoklady citovaného tvrzení, a pro každé $\varepsilon > 0$ proto platí

$$\varphi_\varepsilon(A) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_a^b [R_A(u+\mathrm{i}\varepsilon) - R_A(u-\mathrm{i}\varepsilon)]\,\mathrm{d}u\,;$$

po dosazení do rovnosti (8) získáme hledaný vztah mezi spektrální mírou a rezolventou samosdruženého operátoru A, tzv. **Stoneovu formuli:**

$$E_A[a,b] + E_A(a,b) = \frac{1}{\pi\mathrm{i}}\operatorname*{s\text{-}lim}_{\varepsilon\to 0+}\int_a^b [R_A(u+\mathrm{i}\varepsilon) - R_A(u-\mathrm{i}\varepsilon)]\,\mathrm{d}u\,. \tag{9a}$$

Uvážíme-li dále, že pro každé $c \in \mathbb{R}$ platí $\operatorname*{s\text{-}lim}_{\delta\to 0+} E_A(\{c+\delta\}) = 0$ (viz příklad 9.1.6), dostaneme ze Stoneovy formule následující vyjádření projektoru $E_t^{(A)} = E_A(-\infty, t]$, $t > a$, pomocí $E_t^{(A)}$ a integrálu z rezolventy

$$E_t^{(A)} - E_a^{(A)} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\operatorname*{s\text{-}lim}_{\delta\to 0+}\left(\operatorname*{s\text{-}lim}_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\delta}^{t+\delta} [R_A(u+\mathrm{i}\varepsilon) - R_A(u-\mathrm{i}\varepsilon)]\,\mathrm{d}u\right). \tag{9b}$$

Poznamenejme, že na této rovnosti je založena jedna varianta důkazu spektrálního teorému – viz např. [[We]], § 7.3.

V předchozím paragrafu jsme zjistili, že množina regulárních hodnot samosdruženého operátoru A je E_A-nulová (věta 10.4.1). Z věty 9.4.8d potom vyplývá, že operátor $\varphi(A)$ je plně určen funkcí $\varphi \upharpoonright \sigma(A)$. Ukážeme nyní, že pro funkce φ, které jsou spojité na množině $\sigma(A)$, lze zesílit tvrzení věty 9.4.10 o spektru operátoru $\varphi(A)$.

10.5.4 Tvrzení: Pro každé $\varphi \in C(\sigma(A))$ platí $\sigma(\varphi(A)) = \overline{\varphi(\sigma(A))}$. V případě, že operátor A je omezený, je $\varphi(\sigma(A))$ uzavřená množina, takže $\sigma(\varphi(A)) = \varphi(\sigma(A))$.

Důkaz: Jestliže $y \in \varphi(\sigma(A))$, tj. $y = \varphi(x)$ pro nějaké $x \in \sigma(A)$, potom díky spojitosti φ v bodě y existuje ke každému okolí $U(y)$ kladné δ takové, že $(x-\delta, x+\delta) \subset \varphi^{(-1)}(U(y))$. Z podmínky $x \in \sigma(A)$ plyne $E_A(x-\delta, x+\delta) \neq 0$, a tedy také $E_A(\varphi^{(-1)}(U(y))) \neq 0$, tj. $y \in R_{\mathrm{ess}}^{(E_A)}(\varphi) = \sigma(\varphi(A))$. Platí tedy inkluze $\varphi(\sigma(A)) \subset \sigma(\varphi(A))$, z níž vzhledem k uzavřenosti spektra plyne $\overline{\varphi(\sigma(A))} \subset \sigma(\varphi(A))$. Uvažujme dále libovolné $z \notin \overline{\varphi(\sigma(A))}$, takže pro nějaké okolí tohoto bodu platí $U(z) \cap \varphi(\sigma(A)) = \emptyset$. Přechodem ke vzorům dostáváme $\varphi^{(-1)}(U(z)) \cap \sigma(A) = \emptyset$; množina $\varphi^{(-1)}(U(z))$ je proto E_A-nulová, a tudíž $z \notin \sigma(\varphi(A))$. Tím je ověřena rovnost $\sigma(\varphi(A)) = \overline{\varphi(\sigma(A))}$.

Pro hermitovské operátory je spektrum kompaktní, a množina $\varphi(\sigma(A))$ je proto uzavřená (viz věty 2.5.3 a 2.5.5). ■

10.5.5 Příklad: Najdeme kritérium pro to, aby dané $\lambda \in \mathbb{C}$ patřilo do spektra unitárního operátoru U. Pro spektrální míru $E_U(.)$ platí $E_U(-\infty, 0) = E_U[2\pi, +\infty) = 0$, takže operátor $A_U := \mathcal{T}^{(E_U)}(\mathrm{id})$ je hermitovský a $\sigma(A_U) \subset [0, 2\pi]$. Jelikož funkce $s \mapsto \eta(s) := e^{is}$ je spojitá, je spektrum operátoru $U = \mathcal{T}^{(E_U)}(\eta) = \eta(A_U)$ dáno vztahem $\sigma(U) = \eta(\sigma(A_U))$, tj. $\lambda \in \sigma(U)$ právě tehdy, když $\lambda = e^{is}$, kde $s \in \sigma(A_U)$. Poslední podmínka je ekvivalentní požadavkům $s \in [0, 2\pi]$ a $E_U(s-\varepsilon, s+\varepsilon) = E_U((s-\varepsilon, s+\varepsilon) \cap [0, 2\pi]) \neq 0$ pro každé $\varepsilon > 0$ (viz větu 10.4.1a). Pro $\lambda \neq 1$ je s určeno jednoznačně a leží v intervalu $(0, 2\pi)$, zatímco číslu $\lambda = 1$ odpovídají hodnoty $s = 0$ a $s = 2\pi$. Proto vztah $1 \in \sigma(U)$ platí právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ splňuje rozklad jedničky $\{E_t^{(U)}\}$ alespoň jednu z podmínek $E_\varepsilon^{(U)} \neq 0$ a $E_{2\pi-\varepsilon}^{(U)} \neq I$.

Vyšetříme složenou funkci samosdruženého operátoru A. Jestliže funkce $w \in \Phi^{(A)}$ je reálná, potom spektrální mírou samosdruženého operátoru $w(A)$ je $E_w(.) \equiv E(w^{(-1)}(.))$ – viz příklad 10.3.6. Pro každou borelovskou funkci φ, která je definována na množině $\mathbb{R} \setminus N$, kde $E(w^{(-1)}(N)) = 0$, z formule (9.4.18) plyne

$$(\varphi \circ w)(A) = \mathcal{T}^{(E_A)}(\varphi \circ w) = \mathcal{T}^{(E_w)}(\varphi) = \varphi(w(A)). \tag{10}$$

Pro operátory $(\varphi \circ w)(A)$ dostáváme tedy rovnost, která má stejný tvar jako vztah pro výpočet hodnoty funkce $\varphi \circ w$ v daném bodě $x \in \mathbb{R}$.

10.5.6 Příklad: Funkce $|\mathrm{id}|$ je borelovská a pozitivní, takže pro každé $A \in \mathscr{L}_{sa}(\mathscr{H})$ je definován pozitivní operátor $|\mathrm{id}|\,(A)$. Je zřejmé, že $D(|\mathrm{id}|\,(A)) = D_A$; jestliže A je pozitivní, liší se funkce id a $|\mathrm{id}|$ na E_A-nulové množině, a proto $A = |\mathrm{id}|\,(A)$ pro $A \geqq 0$. Uvažujme borelovské funkce $w := \mathrm{id}^2$ a φ: $[0, \infty) \to \mathbb{R}$, kde $\varphi(t) := \sqrt{t}$. Pro tyto funkce lze užít formule (10), a protože $\varphi \circ w = |\mathrm{id}|$, dostáváme vztah $|\mathrm{id}|\,(A) = (A^2)^{1/2}$. Srovnáním s formulí (5.3.11) získáme pro hermitovské A rovnost $|\mathrm{id}|\,(A) = |A|$. Je zvykem značit operátor $|\mathrm{id}|\,(A)$ symbolem $|A|$.

Ukážeme, že díky formuli (10) je možno omezit se při vyšetřování operátorů $\varphi(A)$ na případy, kdy A je hermitovský.

10.5.7 Tvrzení: Ke každému samosdruženému operátoru A existuje hermitovský operátor $\tilde{A}$ a spojitá reálná ryze monotonní funkce f taková, že $\operatorname{Ran} f = \mathbb{R}$ a $A = f(\tilde{A})$.

Důkaz: Uvažujme libovolnou spojitou ryze monotonní funkci w, která zobrazuje $\mathbb{R}$ na omezený interval $J \subset \mathbb{R}$; můžeme např. položit $w(t) = \operatorname{arctg} t$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Potom $w^{(-1)}(\mathbb{R}\setminus J) = \emptyset$, takže inverzní funkce $f \equiv w^{-1}$ je E_w-s. v. definovaná a pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí $f(w(t)) = t$, tj. $f \circ w = \mathrm{id}$ a $\operatorname{Ran} f = \mathbb{R}$. Formule (10) potom dává $A = f(\tilde{A})$, kde operátor $\tilde{A} := w(A)$ je hermitovský díky omezenosti funkce w. ■

Zbytek tohoto paragrafu je věnován větě, která charakterizuje všechny funkce daného samosdruženého operátoru výhradně pomocí pojmu komutativity zavedeného v § 7.4. Začneme tím, že libovolné množině $\mathscr{S}$ lineárních (ne nutně omezených) operátorů na daném Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ přiřadíme následující dvě množiny

$$\mathscr{S}' := \{B \in \mathscr{B}(\mathscr{H}):\ BT \subset TB \quad \text{pro každé} \quad T \in \mathscr{S}\}\,, \tag{11a}$$

$$\mathscr{S}''_{ex} := \{T \in \mathscr{L}_c(\mathscr{H}):\ BT \subset TB \quad \text{pro každé} \quad B \in \mathscr{S}'\}\,. \tag{11b}$$

Tyto definice představují modifikaci obecných algebraických pojmů komutantu a bikomutantu (viz § 13.1) pro případ, kdy běžný pojem komutativity nahradíme relací (7.4.4), která definuje komutativitu dvojice operátorů, z nichž jeden může být neomezený. Pro množinu $\mathscr{S}'$ která je vždy podprostorem v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, budeme užívat názvu **komutant**, zatímco množinu $\mathscr{S}''_{ex}$, jejíž prvky jsou uzavřené hustě definované operátory, nazveme **rozšířeným bikomutantem**[1]). Pomocí komutantu můžeme např. zapsat tvrzení (b) věty 10.3.2 ve tvaru $\{A\}' = \{E_t^{(A)}\}' = \{E_A(.)\}'$ (poslední rovnost plyne z výsledku cvičení 9.7). Z těchto vztahů a věty 9.4.10d dostáváme pro množinu všech funkcí operátoru A inkluzi

$$\{\varphi(A):\ \varphi \in \Phi^{(A)}\} \subset \{A\}''_{ex}\,. \tag{12}$$

[1]) Je zřejmé, že $\mathscr{S}''_{ex}$ není totožné s bikomutantem $\mathscr{S}'' \equiv (\mathscr{S}')'$; platí pouze inkluze $\mathscr{S}'' \subset \mathscr{S}''_{ex}$.

 Na základě tohoto vztahu nemůžeme zodpovědět otázku, které z prvků množiny $\{A\}''_{ex}$ jsou funkcí operátoru A. V případě *separabilního* $\mathscr{H}$ však existuje velmi jednoduchá odpověď: *každý* operátor $T \in \{A\}''_{ex}$ lze zapsat ve tvaru $T = \varphi(A)$, tj. ve vztahu (12) platí rovnost. K jejímu ověření budeme potřebovat následující pomocné tvrzení.

10.5.8 Lemma: Jestliže A je samosdružený operátor na separabilním Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$, existuje konečná nebo nekonečná ortonormální množina $\{x_n\}_{n=1}^N$, $N \leqq \infty$, taková, že

$$\mathscr{H} = \sum_{n=1}^{N}{}^{\oplus}\, \mathscr{G}(x_n)\,,$$

kde $\mathscr{G}(x)$ je uzávěr lineárního obalu množiny $\{E_A(J)\, x \colon J \in \mathscr{J}\}$ a $\mathscr{J}$ je systém všech omezených intervalů na reálné ose.

Důkaz: Pro každé $J \in \mathscr{J}$ lze operátor $E_A(J)$ zapsat jako $\chi_J(A)$; z pravidel funkcionálního počtu potom plyne, že $y \in \mathscr{G}(x)$ právě tehdy, když existuje posloupnost $\{s_n\}$ schodovitých funkcí splňující

$$y = \lim_{n\to\infty} s_n(A)\, x\,. \tag{13}$$

Jelikož pro libovolnou schodovitou funkci s a každé $J \subset \mathscr{J}$ je součin $\chi_J s$ opět schodovitá funkce, plyne ze vztahu (13) $E_A(J)$ – invariance podprostoru $\mathscr{G}(x)$ pro každé $x \in \mathscr{H}$. Pro příslušný projektor, který označíme $P(x)$, odtud dostáváme pro všechna $J \in \mathscr{J}$ rovnost

$$P(x)\, E_A(J) = E_A(J)\, P(x) \tag{14a}$$

(viz cvičení 7.28). Dále z vlastnosti projektorové míry plyne $x = \lim_{n\to\infty} E_A(-n, n)\, x$, tj.

$$P(x)\, x = x \tag{14b}$$

pro všechna $x \in \mathscr{H}$.

Podle předpokladu existuje nejvýše spočetná množina $Y \equiv \{y_j\} \subset \mathscr{H}$ taková, že $\bar{Y} = \mathscr{H}$; bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že všechny její prvky jsou nenulové. Položíme $x_1 := y_1/\|y_1\|$; podle (14b) máme $P(x_1)\, y_1 = y_1$. Jestliže $P(x_1)\, y_j = y_j$ pro všechna $j \geqq 2$, potom podmínka $\bar{Y} = \mathscr{H}$ implikuje $P(x_1) = I$ a věta je splněna pro $N = 1$. V opačném případě položíme $j_2 := \min\{j \colon j \geqq 2,\ P(x_1)\, y_j \neq y_j\}$, $x_2' := (I - P(x_1))\, y_{j_2}$ a $x_2 := x_2'/\|x_2'\|$. Ukážeme, že projektory $P(x_1)$ a $P(x_2)$ jsou ortogonální. Pro každé $z \in \mathscr{H}$ ze vztahu (13) plyne $P(x_2)\, z = \lim_{n\to\infty} s_n(A)\, x_2$ a pomocí (14a) dostáváme

$$P(x_1)\, P(x_2)\, z = \lim_{n\to\infty} P(x_1)\, s_n(A)\, x_2 = \frac{1}{\|x_2'\|} \lim_{n\to\infty} s_n(A)\, P(x_1)\, (I - P(x_1))\, y_{j_2} = 0\,,$$

takže $P(x_1)\,P(x_2) = 0$. Užijeme-li ještě rovnosti $x_2' = P(x_2)\,x_2'$, zjistíme, že

$$(P(x_1) + P(x_2))\,y_{j_2} = (P(x_1) + P(x_2))\,(x_2' + P(x_1)\,y_{j_2}) = x_2' + P(x_1)\,y_{j_2} = y_{j_2},$$

což spolu s podmínkami $P(x_1)\,y_j = y_j$, $1 \leqq j \leqq j_2$, dává $(P(x_1) + P(x_2))\,y_j = y_j$ pro $1 \leqq j \leqq j_2$. Dále hledáme nejmenší j, pro něž $y_j - (P(x_1) + P(x_2))\,y_j \neq 0$, atd. Indukcí ověříme, že po n-tém kroku dostaneme ortonormální množinu $\{x_1, \dots, x_n\}$ takovou, že odpovídající projektory $P(x_1), \dots, P(x_n)$ tvoří ortogonální systém, přičemž $\sum_{k=1}^{n} P(x_k)\,y_j = y_j$ pro $1 \leqq j \leqq j_n$. Proces skončí po N-tém kroku, jestliže $\sum_{k=1}^{N} P(x_j)\,y_j = y_j$ také pro všechna $j \geqq j_N + 1$, tj. $Py_j = y_j$ pro všechna j; zde $P := \sum_{k=1}^{N} P(x_k)$ je projektor na podprostor $\sum_{k=1}^{N}{}^{\oplus}\, \mathscr{G}(x_n)$. V případě nekonečného počtu kroků budou vztahy $Py_j = y_j$, $j = 1, 2, \dots$, splněny pro $P := \operatorname{s-lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(x_k)$, což je projektor na podprostor $\sum_{k=1}^{\infty}{}^{\oplus}\, \mathscr{G}(x_k)$ (viz § 5.4). V obou případech z podmínky $\bar{Y} = \mathscr{H}$ plyne $P = I$, čímž je důkaz dokončen. ■

10.5.9 Věta: Jestliže A je samosdružený operátor na separabilním Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$, potom podmínka $T \in \{A\}_{\mathrm{ex}}''$ platí právě tehdy, když $T = \varphi(A)$ pro nějakou borelovskou funkci $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Důkaz: Vzhledem k inkluzi (12) zbývá dokázat, že každé $T \in \{A\}_{\mathrm{ex}}''$ je funkcí operátoru A. Nejprve najdeme pro každé $y \in D_T$ borelovskou funkci $\varphi_y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ takovou, že

$$y \in D(\varphi_y(A)) \quad \text{a} \quad \varphi_y(A)\,y = Ty\,. \tag{15}$$

Budeme užívat označení z důkazu předchozího lemmatu. Z rovnosti (14a) pro každé $x \in \mathscr{H}$ plyne $P(x) \in \{E_t^{(A)}\}' = \{A\}'$, a protože $T \in \{A\}_{\mathrm{ex}}''$, platí inkluze

$$P(x)\,T \subset T\,P(x)\,. \tag{16a}$$

Odtud pro všechna $y \in D_T$ dostáváme $P(y)\,Ty = T\,P(y)\,y = Ty$, tj.

$$Ty \in \mathscr{G}(y)\,, \qquad y \in D_T\,. \tag{16b}$$

Potom podle (13) pro nějakou posloupnost $\{s_n\}$ schodovitých funkcí platí

$$Ty = \lim_{n\to\infty} s_n(A)\,y\,. \tag{16c}$$

Získali jsme tak cauchyovskou posloupnost $\{s_n(A)\,y\} \subset \mathscr{H}$ a pomocí formule (9.4.4) zjistíme, že $\{s_n\}$ je cauchyovská v metrice prostoru $L^2(\mathbb{R}, d\mu_y)$. Jelikož míra $\mu_y(.) = (y, E_A(.)\,y)$ je borelovská, konverguje posloupnost $\{s_n\}$ v metrice prostoru $L^2(\mathbb{R}, d\mu_y)$ k borelovské funkci φ_y. Z podmínky $\varphi_y \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_y)$ plyne $y \in D(\varphi_y(A))$ a vztah $\lim_{n\to\infty} \int |s_n - \varphi_y|^2\, d\mu_y \to 0$ dává $\varphi_y(A)\,y = \lim_{n\to\infty} s_n(A)\,y$; vzhledem k rovnosti (16c) pak dostáváme $\varphi_y(A)\,y = Ty$. V dalším kroku budeme konstruovat vektor $\tilde{y} \in D_T$ tak, aby pro operátor $\varphi_y(A) \equiv \varphi(A)$ a všechna $B \in \{A\}'$ platilo

$$TB\tilde{y} = \varphi(A)\,B\tilde{y}. \tag{17}$$

Užijeme k tomu ortonormální množiny $\{x_n\}$ z lemmatu 8. Ze způsobu konstrukce této množiny je vidět, že lze docílit toho, aby byla částí D_T, protože existuje všude hustá množina $\{y_j\} \subset D_T$ (viz cvičení 7.1) a podle (16a) platí $P(x)\,D_T \subset D_T$. Položíme

$$\tilde{y} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} c_n x_n\,, \tag{18}$$

kde $\{c_n\}$ je posloupnost nenulových komplexních čísel taková, že $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2\, \|Tx_n\|^2 < \infty$. Tyto podmínky jsou splněny např. pro $c_n = (2^n(1 + \|Tx_n\|^2))^{-1/2}$; první z nich zaručuje existenci vektoru $\tilde{y}$ díky tomu, že $\{x_n\}$ je ortonormální množina. Podobně druhá podmínka spolu s inkluzí $\{x_n\} \subset D_T$, vztahem (16b) a ortogonalitou podprostorů $\mathscr{G}(x_n)$ je postačující pro existenci $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} Tc_n x_n$; z uzavřenosti operátoru T pak plyne $\tilde{y} \in D_T$. Podle vztahu (15) nyní platí $\tilde{y} \in D(\varphi(A))$ a $\varphi(A)\,\tilde{y} = T\tilde{y}$, a protože operátory T i $\varphi(A)$ patří do $\{A\}''_{\text{ex}}$, pro každé $B \in \{A\}'$ dostáváme $B\tilde{y} \in D_T \cap D(\varphi(A))$ a $TB\tilde{y} = BT\tilde{y} = B\,\varphi(A)\,\tilde{y} = \varphi(A)\,B\tilde{y}$, což je vztah (17).

K dokončení důkazu zavedeme pro $l = 1, 2, \ldots$ projektory $E_l \equiv E_A(M_l)$, kde $M_l := \{t \in \mathbb{R}\colon |\varphi(t)| \leqq l\}$. Snadno ověříme, že pro všechna l platí $E_l \in \{A\}'$, $\varphi(A)\,E_l \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ (viz tvrzení 9.4.6) a dále $\operatorname{s-lim}_{l\to\infty} E_l = I$ (viz (9.1.4a)). Jelikož rovněž všechny operátory $P(x_n)$ patří do $\{A\}'$ a dále $s(A) \in \{A\}'$ pro každou schodovitou funkci s, můžeme ve vztahu (17) pro libovolné l a n položit $B = E_l\, s(A)\, P(x_n)$; dále podle (18) máme $P(x_n)\,\tilde{y} = c_n x_n$, a protože $c_n \neq 0$ pro všechna n, dostáváme

$$TE_l\, s(A)\, x_n = \varphi(A)\, E_l\, s(A)\, x_n \tag{19}$$

pro $l, n = 1, 2, \ldots$ a každou schodovitou funkci s.

Vezměme nyní libovolné $z \in \mathscr{H}$; podle lemmatu 8 a věty 4.5.3 platí $z = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} z_n$, kde $z_n \in \mathscr{G}(x_n)$. Dále podle podmínky (13) najdeme pro každé m a všechna $n = 1, 2, \dots, m$ schodovité funkce s_{nm} tak, aby $\|z_n - s_{nm}(A)\, x_n\| < 2^{-n}/m$. Odtud plyne vyjádření vektoru z ve tvaru $z = \lim_{m\to\infty} z^{(m)}$, kde $z^{(m)} := \sum_{n=1}^{m} s_{nm}(A)\, x_n \in D_T$. Díky tomu, že $\varphi(A)\, E_l$ je omezený operátor, dostaneme pomocí rovnosti (19)

$$\varphi(A)\, E_l z = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \varphi(A)\, E_l\, s_{nm}(A)\, x_n = \lim_{m\to\infty} TE_l z^{(m)} .$$

Nyní ze vztahu $\lim_{m\to\infty} E_l z^{(m)} = E_l z$ a uzavřenosti operátoru T plynou podmínky $E_l z \in D_T$ a $\varphi(A)\, E_l z = TE_l z$ pro $l = 1, 2, \dots$. Z nich už snadno plyne rovnost $\varphi(A) = T$. Skutečně, pro každé $z \in D_T$ platí $TE_l z = E_l Tz \to Tz$; nyní z uzavřenosti operátoru $\varphi(A)$ plyne $z = \lim_{l\to\infty} E_l z \in D(\varphi(A))$ a $\varphi(A)\, z = Tz$, tj. $T \subset \varphi(A)$. Vyměníme-li v této úvaze role operátorů T a $\varphi(A)$, dostaneme opačnou inkluzi. ■

10.5.10 Poznámka: Tato věta byla zformulována na základě von Neumannových výsledků F. Rieszem pro případ, kdy operátory A a T jsou omezené, a zobecněna I. Mimurou na neomezený případ. Uvedený důkaz je v podstatě převzat z ⟦RN⟧, § 129, kde lze rovněž najít citace příslušných původních prací zmíněných autorů. Poznamenejme ještě, že pro neseparabilní Hilbertův prostor věta obecně neplatí.

10.6 ANALYTICKÉ VEKTORY

Pro každé $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je definován operátor $\exp T \equiv \text{u-}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k/k!$ (viz komentář k § 3.6). Je-li operátor T neomezený, nemá tato definice smysl; není však vyloučeno, že pro některá $x \in C^\infty(T)$, kde $C^\infty(T) := \bigcap_{k=1}^{\infty} D(T^k)$, řada $\sum_{k=0}^{\infty} (T^k/k!)x$ konverguje. Poznamenejme, že množina $C^\infty(T)$ je hustá v $\mathscr{H}$, je-li T samosdružený operátor – viz cvičení 19; není-li tento předpoklad splněn, může množina $C^\infty(T)$ obsahovat pouze nulový vektor, a to i v případě, že operátor T je symetrický (cvičení 20).

Vektor $x \in C^\infty(T)$ nazveme **analytickým vektorem** operátoru T, jestliže mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} (z^n/n!)\, \|T^n x\|$, $z \in \mathbb{C}$, má nenulový poloměr konvergence, $r_T(x) \equiv r(x) \neq 0$. Z této definice je zřejmé, že *množina analytických vektorů* *daného lineárního operátoru je podprostor,* který obsahuje mj. všechny vlastní vektory uvažovaného operátoru.

10.6.1 Tvrzení: Jestliže x je analytický vektor samosdruženého operátoru A, potom pro všechna $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z| < r(x)$ platí

$$x \in D(\eta_z(A)), \qquad \eta_z(A)\, x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}z)^k}{k!} A^k x, \tag{1}$$

kde $\eta_z(t) := \exp(\mathrm{i}zt)$, $t \in \mathbb{R}$.
Důkaz: Pro libovolné přirozené j věta 9.4.8c dává

$$\eta_z(A)\, E_A(-j, j) = \int \eta_z \chi_{(-j,j)}\, \mathrm{d}E_A\,.$$

Dále

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}z)^k}{k!} t^k \chi_{(-j,j)}(t) \right| \leqq \mathrm{e}^{j|z|} \quad \text{pro} \quad n = 0, 1, \ldots$$

a pomocí věty 9.3.3d dostaneme

$$\eta_z(A)\, E_A(-j, j) = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}z)^k}{k!} A^k E_A(-j, j)\,.$$

Odtud plyne

$$\left(\int |\eta_z|^2 \chi_{(-j,j)}\, \mathrm{d}\mu_x \right)^{1/2} = \|\eta_z(A)\, E_A(-j, j)\, x\| \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} \|A^k E_A(-j, j)\, x\| \leqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} \|A^k x\| < \infty$$

a aplikací Fatouova lemmatu získáme podmínku $\int |\eta_z|^2\, \mathrm{d}\mu_x < \infty$, tj. $x \in D(\eta_z(A))$. Položíme-li speciálně $z = \pm\mathrm{i}r$ pro libovolné $r \in (0, r(x))$, dostáváme

$$\int \mathrm{e}^{2r|t|}\, \mathrm{d}\mu_x(t) < \infty\,, \qquad 0 < r < r(x)\,. \tag{2}$$

Zbývá ověřit rovnost (1); jelikož $x \in C^\infty(A) \cap D(\eta_z(A))$, můžeme pro libovolné n užít formule (9.4.4):

$$\left\| \left(\eta_z(A) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}z)^k}{k!} A^k \right) x \right\|^2 = \int \left| \eta_z(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}zt)^k}{k!} \right|^2 \mathrm{d}\mu_x\,.$$

Nechť $r \in (0, r(x))$; potom pro všechna $|z| \leqq r$ platí odhad

$$\left| \eta_z(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}zt)^k}{k!} \right| \leqq |\mathrm{e}^{\mathrm{i}zt}| + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r|t|^k}{k!} = \mathrm{e}^{-t\,\mathrm{Im}\,z} + \mathrm{e}^{r|t|} \leqq 2\mathrm{e}^{r|t|}\,;$$

užijeme-li nyní vztahu (2), vyplývá rovnost (1) z Lebesgueovy věty. ■

Užitečnost pojmu analytického vektoru je patrna z následujícího tvrzení.

10.6.2 Věta (*Nelson*): Symetrický operátor A, jehož analytické vektory tvoří totální množinu, je v podstatě samosdružený.

Důkaz: Větu dokážeme nejprve pro případ, kdy indexy defektu operátoru A jsou si rovny, což zaručuje existenci samosdružených rozšíření; nechť S je jedno z nich. Jestliže x je analytickým vektorem operátoru A, je též analytickým vektorem operátoru S a platí $r(x) \equiv r_A(x) = r_S(x)$. Tvrdíme, že pro libovolné $y \in \mathscr{H}$ funkce $z \mapsto F(z) := (y, \eta_z(S)\, x)$ je analytická v oblasti $G := \{z \in \mathbb{C}: |\mathrm{Im}\, z| < r(x)/2\}$. Označíme $u := \mathrm{Re}\, z$, $v := \mathrm{Im}\, z$, $\nu_{yx}(.) := (y, E_S(.)\, x)$ a zapíšeme funkci F ve tvaru $F(z) = f(u, v) + \mathrm{i}g(u, v)$, kde

$$f(u, v) := \int \cos(ut)\, \mathrm{e}^{-vt}\, \mathrm{d}\nu_{yx}(t)\,, \qquad g(u, v) := \int \sin(ut)\, \mathrm{e}^{-vt}\, \mathrm{d}\nu_{yx}(t)\,. \qquad (3)$$

Uvedené tvrzení bude platit ukážeme-li, že na $G_r := \mathbb{R} \times (-r(x)/2, r(x)/2)$ existují spojité parciální derivace $\partial_u f$, $\partial_v f$, $\partial_u g$, $\partial_v g$, které splňují Cauchyho-Riemannovy podmínky $\partial_u f = \partial_v g$ a $\partial_v f = -\partial_u g$. Snadno nahlédneme, že tyto vlastnosti mají pro každé $t \in \mathbb{R}$ parciální derivace integrandů ve vztahu (3); z Lebesgueovy věty potom vyplývá, že stačí najít majoranty integrandů, které nezávisí na u a v a jsou integrabilní vzhledem k míře ν_{yx}. Poslední podmínku lze nahradit požadavkem kvadratické integrability vzhledem k míře $\mu_x(.) \equiv (x, E_S(.)\, x)$ – viz tvrzení 9.4.3. Parciální derivace obou integrandů jsou pro všechna $u \in \mathbb{R}$ a $v \in [-r, r]$, kde r je libovolné číslo v intervalu $(0, r(x)/2)$, majorizovány funkcí $t \mapsto h(t) := |t| \exp(r|t|)$, pro niž $[\int |h(t)|^2\, \mathrm{d}\mu_x(t)]^2 \leqq \int t^4\, \mathrm{d}\mu_x(t) \int \mathrm{e}^{4r|t|}\, \mathrm{d}\mu_x(t)$. Nyní podmínka (2) spolu s $x \in C^\infty(S)$ dává $h \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu_x)$, čímž je analytičnost funkce F v oblasti G dokázána. Její Taylorův rozvoj v okolí bodu $z = 0$ získáme z formule (1):

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\, \mathrm{i}^k (y, S^k x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\, \mathrm{i}^k (y, A^k x)\,, \qquad |z| < r(x)\,. \qquad (4)$$

K ověření podstatné samosdruženosti operátoru A je třeba dokázat, že $\mathrm{Ker}\,(A^* \pm \mathrm{i}) = \{0\}$. Pro každé $w \in \mathrm{Ker}\,(A^* - \mathrm{i})$ platí $(A^*)^k w = \mathrm{i}^k w$ a položíme-li v rovnosti (4) $y = w$, dostáváme $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z^k/k!)\, \mathrm{i}^k ((A^*)^k w, x) = \mathrm{e}^z (w, x)$. Funkce F a $z \mapsto \mathrm{e}^z(w, x)$, které jsou obě analytické na G, tedy splývají na kruhu $|z| < r(x)/2$. Odtud vyplývá rovnost $F(z) = \mathrm{e}^z(w, x)$ pro všechna $z \in G$ (viz např. [[Mar]], § VI.6); speciálně $F(t) = \mathrm{e}^t(w, x)$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Nyní z unitarity $\eta_t(S)$ plyne, že F je omezená na reálné ose, takže poslední rovnost může platit jen když $(w, x) = 0$. Tuto úvahu lze provést pro každý analytický vektor operátoru A, a protože podle předpokladu tvoří tyto vektory totální množinu, dostáváme z ní podmínku $w = 0$, tj. $\mathrm{Ker}\,(A^* - \mathrm{i}) = \{0\}$. Vztah $\mathrm{Ker}\,(A^* + \mathrm{i}) = \{0\}$ se ověří stejným způsobem.

 Konečně přejdeme k obecnému případu, kdy nepředpokládáme rovnost indexů defektu operátoru A. Na Hilbertově prostoru $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$ uvažujme operátor $A_\oplus := A \oplus (-A)$. Ten je opět symetrický (viz komentář k § 7.4) a podle cvičení 8.17 platí $n_\pm(A_\oplus) = n_\pm(A) + n_\pm(-A) = n_\pm(A) + n_\mp(A)$, takže $n_+(A_\oplus) = n_-(A_\oplus)$. Přitom $n_\pm(A_\oplus) = 0$ právě tehdy, když $n_+(A) = n_-(A) = 0$, tj. podstatná samosdruženost operátoru $A_\oplus$ implikuje tutéž vlastnost operátoru A a naopak. Jestliže x, y jsou analytické vektory operátoru A, je vektor $[x, y]$ analytickým vektorem operátoru $A_\oplus$; odtud snadno zjistíme, že množina analytických vektorů operátoru $A_\oplus$ je hustá v $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$. Podle první části důkazu je $A_\oplus$ v podstatě samosdružený, a totéž tedy platí o operátoru A. ■

10.6.3 Poznámky: (a) Z Nelsonovy věty a cvičení 19 vyplývá, že uzavřený symetrický operátor je samosdružený právě tehdy, když má hustou množinu analytických vektorů.
(b) Nechť A je symetrický operátor na $\mathscr{H}$, jehož vlastní vektory tvoří ortonormální bázi v $\mathscr{H}$. Díky tomu, že každý vlastní vektor je též analytickým vektorem, je operátor A v podstatě samosdružený (srov. s příkladem 7.2.2).

Pro pozitivní operátory existuje užitečná modifikace věty 2 založená na pojmu **semianalytického vektoru** daného lineárního operátoru T; nazývá se tak každý vektor $x \in C^\infty(T)$ takový, že mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} (z^{2n}/(2n)!)\, \|T^n x\|$ má nenulový poloměr konvergence, $\varrho_T(x) \equiv \varrho(x) \neq 0$.

10.6.4 Věta (*Nussbaum*): Pozitivní operátor A, jehož semianalytické vektory tvoří totální množinu, je v podstatě samosdružený.

Důkaz: Existence pozitivního samosdruženého operátoru $S \supset A$ je důsledkem podmínky $A \geqq 0$ (viz větu 7.5.11). Snadnou obměnou postupu užitého v důkazu tvrzení 1 zjistíme, že každý semianalytický vektor x operátoru A (který je zjevně též semianalytickým vektorem operátoru S) patří pro všechna $|z| < \varrho(x)$ do definičního oboru operátoru $c_z(S)$, kde

$$c_z(t) := \cos\,(z\sqrt{t})\,, \qquad t \geqq 0\,.$$

Speciálně pro $z = \mathrm{i}r$, $0 < r < \varrho(x)$ a $\mu_x(.) \equiv (x, E_S(.)\,x)$ dostáváme $\int_{\mathbb{R}^+} \cosh\,(2r\sqrt{t})\,\mathrm{d}\mu_x(t) < \infty$, a tedy také

$$\int_{\mathbb{R}^+} \mathrm{e}^{2r\sqrt{t}}\,\mathrm{d}\mu_x(t) < \infty\,.$$

Užijeme-li ještě pro $z = u + \mathrm{i}v$, $|z| \leqq r < \varrho(x)$ odhadu $|c_z(t)| = (\frac{1}{2}[\cosh\,(2v\sqrt{t}) + \cos\,(2u\sqrt{t})])^{1/2} \leqq \cosh v\sqrt{t} \leqq \cosh r\sqrt{t}$, získáme rovnost

$$c_z(S)\,x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} A^k x\,. \tag{5}$$

Pro libovolné $y \in \mathscr{H}$ dále ověříme analytičnost funkce $z \mapsto F(z) := (y, c_z(S)\,x)$ na množině $G := \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\, z| < \varrho(x)/2\}$. Postup je stejný jako v důkazu věty 2 s tím, že relevantní majoranta $h \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^+, d\mu_x)$, jejíž existence umožňuje derivovat za integračním znakem, má nyní tvar $h(t) := \frac{1}{2}\sqrt{t}[\exp(r\sqrt{t}) + 1]$, $t \geqq 0$. Konečně pro $z \in \mathbb{C}$, $|z| < \varrho(x)$, ze vztahu (5) plyne $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}\,.$ $.\,(y, A^k x)/(2k)!$. Vezměme libovolné $w \in \mathrm{Ker}\,(A^* \mp \mathrm{i})$; z poslední rovnosti pro $y = w$ dostáváme

$$F(z) = (w, x) \sum_{k=0}^{\infty} (\pm \mathrm{i})^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}\,, \qquad |z| < \varrho(x)\,. \tag{6}$$

Funkce na pravé straně je analytická v celém $\mathbb{C}$, takže rovnost (6) platí pro všechna z patřící do oblasti analytičnosti funkce F, tj. pro všechna $z \in G$. Jelikož $\mathbb{R} \subset G$, pro každé $u \in \mathbb{R}$ máme

$$|F(u)| = |(w, x)| \left|\cosh \frac{1 \pm \mathrm{i}}{\sqrt{2}}\, u\right| = |(w, x)| \left(\frac{1}{2}\,[\cosh \sqrt{2u} + \cos \sqrt{2u}]\right)^{1/2}.$$

Konečně pro každé $u \in \mathbb{R}$ je $c_u(S)$ omezený operátor s normou $\|c_u(S)\| = \|c_u\|_\infty = 1$; levá strana poslední rovnosti je proto omezená a odtud plyne $(w, x) = 0$ pro každý semianalytický vektor x operátoru A. Tyto vektory tvoří podle předpokladu totální množinu, takže $w = 0$, a tedy $\mathrm{Ker}\,(A^* \pm \mathrm{i}) = \{0\}$. ■

10.6.5 Příklad: Na prostoru $L^2(\mathbb{R})$ uvažujme operátory $A_\pm := 2^{-1/2}(Q \mp \mathrm{i}P) \upharpoonright \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Pro každé $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ tedy platí $(A_\pm \psi)(x) = 2^{-1/2}(x\psi(x) \mp \psi'(x))$, takže $A_\mp \mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Operátor H_λ, definovaný na $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ pro libovolné $\lambda \in \mathbb{R}$ vztahem

$$H_\lambda := A_+A_- + \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{4}(A_+ + A_-)^4 = \left[\frac{1}{2}(Q^2 + P^2) + \lambda Q^4\right] \upharpoonright \mathscr{S}(\mathbb{R}) \tag{7}$$

je zjevně symetrický a pro $\lambda \geqq 0$ je pozitivní. Ukážeme, že každá z funkcí h_n, $n = 0, 1, \ldots$ (viz (4.3.4)) je semianalytický vektor operátoru H_λ.

Pomocí funkcionálních vztahů pro Hermiteovy polynomy (viz [GR], § 8.952), dostáváme

$$A_+h_n = \sqrt{n+1}\, h_{n+1}\,, \qquad A_-h_n = \sqrt{n}\, h_{n-1}\,, \tag{8}$$

přičemž pro $n = 0$ má poslední rovnost tvar $A_-h_0 = 0$. Pro libovolné přirozené k z formule (7) vyplývá, že operátor H_λ^k je roven součtu 18^k členů tvaru $c_\lambda^k A_1 A_2 \ldots A_{4k}$, kde $|c_\lambda| \leqq \max\{1, |\lambda/4|\}$ a každé A_j, $j = 1, \ldots, 4k$, je rovno jednomu z operátorů I, A_+, A_-. Pro každé h_n získáme pomocí (8) a indukce nerovnost

$$\|A_1 \ldots A_l h_n\| \leqq \prod_{j=1}^{l} (n+j)^{1/2}, \qquad l = 1, 2, \ldots . \tag{9}$$

Potom řada $\sum_{k=0}^{\infty} (z^{2k}/(2k)!) \, \|H_\lambda^k h_n\|$ konverguje, jestliže $|z| < (72|c_\lambda|)^{-1/2}$. Podle Nussbaumovy věty je tedy *operátor H_λ v podstatě samosdružený pro všechna* $\lambda \geqq 0$. Všimněte si, že z užitých odhadů veličin $\|H_\lambda^k h_n\|$ nevyplývá analytičnost vektorů h_n.

10.7 FUNKCE KOMUTUJÍCÍCH SAMOSDRUŽENÝCH OPERÁTORŮ

Spektrální teorie umožňuje pro danou konečnou množinu $A_1, \ldots, A_N$ komutujících samosdružených operátorů přiřadit každé funkci φ: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, která splňuje jisté podmínky, operátor $\varphi(A_1, \ldots, A_N)$. Vlastnosti těchto operátorů budeme nyní studovat. Pro zjednodušení zápisu budeme uvažovat jen případ $N = 2$; platnost všech výsledků, které uvedeme, lze rozšířit na všechna konečná N přímým zobec-

V celém paragrafu značí A, A' dvojici komutujících samosdružených operátorů na daném $\mathscr{H}$ se spektrálními mírami $E_A(.) \equiv E(.)$ a $E_{A'}(.) \equiv F(.)$. Podle poznámky 10.3.4b je komutativita ekvivalentní požadavku, aby pro všechna $M, N \in \mathscr{B}$ platilo

$$E(M)\, F(N) = F(N)\, E(M) .$$

Direktní součin projektorových měr $E(.)$ a $F(.)$ označíme $P(.)$. Podle tvrzení 9.2.6 a věty 10.3.2 je $P(.)$ projektorová míra na $\mathbb{R}^2$, která je určena jednoznačně operátory A, A' a podmínkou

$$P(M \times N) = E(M)\, F(N) \tag{1a}$$

pro všechna M a $N \in \mathscr{B}$. Situace je analogická jako v případě jediného operátoru (viz začátek § 5); na základě toho budeme pro všechna $\varphi \in \Phi_P$, tj. pro všechny komplexní borelovské funkce, které jsou definovány P-s.v. v $\mathbb{R}^2$, užívat označení

$$\varphi(A, A') := \mathscr{T}^{(P)}(\varphi) \tag{1b}$$

a nazývat operátory $\varphi(A, A')$ **funkcemi komutujících samosdružených operátorů** A, A'. Ze vztahů (A.1.13e), (1a) a (10.4.1) plyne $P(\mathbb{R}^2 \setminus [\sigma(A) \times \sigma(A')]) = 0$, takže Φ_P obsahuje všechny borelovské funkce definované na $\sigma(A) \times \sigma(A')$; speciálně platí následující zobecnění vztahu (10.5.1):

$$C(\sigma(A) \times \sigma(A')) \subset \Phi_P .$$

Kromě $P(.)$ lze vytvořit direktní součin $\tilde{P}(.)$ komutujících projektorových měr $E(.)$ a $F(.)$ v obráceném pořadí, tj. nahradit (1a) požadavkem $\tilde{P}(M \times N) = F(M)\,E(N)$. Pomocí komutativity pak dostáváme $\tilde{P}(M \times N) = P(N \times M)$, takže projektorová míra $\tilde{P}(.)$ není totožná s $P(.)$. Pro každé $\psi \in \Phi_{\tilde{P}}$ formule (1b) dává

$$\mathscr{T}^{(\tilde{P})}(\psi) \equiv \int \psi \, \mathrm{d}\tilde{P} = \psi(A', A) .$$

Na základě vlastností omezených komutujících operátorů se dá očekávat platnost vztahu

$$\varphi(A, A') = \varphi_T(A', A) , \tag{2a}$$

kde

$$\varphi_T(t, u) := \varphi(u, t) , \qquad t, u \in \mathbb{R} , \tag{2b}$$

alespoň pro nějakou podmnožinu Φ_P obsahující polynomiální funkce. Ukážeme, že tomu tak skutečně je, a to pro *všechna* $\varphi \in \Phi_P$.

Uvažujme zobrazení $w\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ určené následující dvojicí spojitých funkcí $w_r\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $w_1(t, u) := u$, $w_2(t, u) := t$. Snadno nahlédneme, že pro libovolné borelovské množiny $M, N \in \mathbb{R}$ vyhovuje projektorová míra $\tilde{P}_w(.) \equiv \tilde{P}(w^{(-1)}(.))$ (viz cvičení 9.2) rovnosti $\tilde{P}_w(M \times N) = \tilde{P}(N \times M) = P(M \times N)$. Z jednoznačnosti pak plyne $\tilde{P}_w(.) = P(.)$ (viz větu 9.2.3) a pomocí tvrzení 9.4.12 dospíváme k následujícímu závěru.

10.7.1 Tvrzení: Pro každé $\varphi \in \Phi_P$ patří funkce φ_T definovaná vztahem (2b) do $\Phi_{\tilde{P}}$ a platí rovnost (2a).

Probereme nyní několik jednoduchých příkladů, kdy φ lze vyjádřit pomocí jedné nebo dvou funkcí jediné proměnné, a najdeme analogické vyjádření operátoru $\varphi(A, A')$ prostřednictvím odpovídajících funkcí operátorů A a A'. Uvažujme funkci $\mathbb{R}^2 \ni [t, u] \mapsto \varphi_1(t, u)$, která závisí jen na první proměnné v následujícím smyslu: existuje funkce $\varphi \in \Phi^{(E)}$ definovaná na $\mathbb{R} \setminus M_0$, kde $E(M_0) = 0$, taková, že

$$\varphi_1(t, u) = \varphi(t) \tag{3a}$$

pro všechna $t \in \mathbb{R} \setminus M_0$ a $u \in \mathbb{R}$. Pomocí označení z poznámky A.1.8c lze tento vztah přepsat ve tvaru

$$\varphi_1 = \varphi \times e \tag{3b}$$

ve smyslu rovnosti F-s.v.. Jelikož pro každou množinu $K \subset \mathbb{C}$ platí $\varphi_1^{(-1)}(K) = \varphi^{(-1)}(K) \times \mathbb{R}$, z podmínky (1a) plyne $\varphi_1 \in \Phi_P$. Dále snadno nahlédneme, že pro každou σ-jednoduchou borelovskou funkci $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je funkce $s_1 \equiv s \times e\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ opět σ-jednoduchá. Jelikož rovnost (1) pro všechna $x \in \mathscr{H}$

 a $M \in \mathscr{B}$ implikuje $\mu_x^{(E)}(M) = \mu_x^{(P)}(M \times \mathbb{R})$,[1]) vidíme, že pro $p = 1, 2$ platí implikace $s \in L^p(\mathbb{R}, d\mu^{(E)}) \Rightarrow s_1 \in L^p(\mathbb{R}^2, d\mu^{(P)})$ a rovnost příslušných integrálů. Na základě toho ukážeme, že ze vztahu (3a) plyne $\varphi_1(A, A') = \varphi(A)$.

Při ověřování této rovnosti můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že φ_1 a φ jsou reálné funkce (neboť vztah (3a) platí též pro reálné i imaginární části uvažovaných funkcí – viz cvičení 9.18). Potom jsou operátory $\varphi_1(A, A')$ a $\varphi(A)$ samosdružené, a stačí tudíž ověřit třeba inkluzi $\varphi(A) \subset \varphi_1(A, A')$. Nechť tedy $x \in D(\varphi(A))$, tj. $\int_{\mathbb{R}} |\varphi|^2 \, d\mu_x^{(E)} < \infty$, takže existuje posloupnost σ-jednoduchých reálných funkcí $s_n \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_x^{(E)})$ taková, že $\|\varphi^2 - s_n\|_\infty \to 0$ a

$$\int_{\mathbb{R}} s_n \, d\mu_x^{(E)} \to \int_{\mathbb{R}} \varphi^2 \, d\mu_x^{(E)} .$$

Potom σ-jednoduché funkce $s_n \times e$ patří do $L^2(\mathbb{R}^2, d\mu_x^{(P)})$ a z podmínky $\|\varphi^2 - s_n\|_\infty \to 0$ plyne, že posloupnost $\{\varphi_1^2 - s_n \times e\}$ konverguje k nule stejnoměrně na $\mathbb{R}^2$, takže $\varphi_1^2 \in L(\mathbb{R}^2, d\mu_x^{(P)})$, neboli $x \in D(\varphi_1(A, A'))$. Navíc dostáváme

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi_1^2 \, d\mu_x^{(P)} = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (s_n \times e) \, d\mu_x^{(P)} = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} s_n \, d\mu_x^{(E)} = \int_{\mathbb{R}} \varphi^2 \, d\mu_x^{(E)} .$$

Podobně ověříme pro každé $x \in D(\varphi(A))$ rovnost

$$(x, \varphi(A)\, x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mu_x^{(E)} = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_1 \, d\mu_x^{(P)} = (x, \varphi_1(A, A')\, x) ,$$

z níž pomocí standardních argumentů (polarizační rovnost a podmínka $\overline{D(\varphi(A))} = \mathscr{H}$) dostáváme $\varphi(A)\, x = \varphi_1(A, A')\, x$; tím je inkluze $\varphi(A) \subset \varphi_1(A, A')$ ověřena.

Analogické vztahy platí pro operátory přiřazené funkcím typu $\psi_2 = e \times \psi$. Shrneme hlavní výsledky.

10.7.2 Tvrzení: Nechť $E(.)$, resp. $F(.)$ jsou spektrální míry komutujících operátorů $A, A' \in \mathscr{L}_{sa}(\mathscr{H})$ a dále nechť $P(.)$ je direktní součin těchto měr. Jestliže množiny M_0 a $N_0 \in \mathscr{B}$ splňují $E(M_0) = F(N_0) = 0$ a funkce $\varphi\colon \mathbb{R} \setminus M_0 \to \mathbb{C}$, resp. $\psi\colon \mathbb{R} \setminus N_0 \to \mathbb{C}$ jsou borelovské, potom pro funkce φ_1, ψ_2, ω_Σ a ω_π definované na $(\mathbb{R} \setminus M_0) \times (\mathbb{R} \setminus N_0)$ vztahy $\varphi_1 := \varphi \times e$, $\psi_2 := e \times \psi$, $\omega_\Sigma := \varphi_1 + \psi_2 =$

[1]) Užíváme obvyklého označení $\mu_x^{(E)}(.) \equiv (x, E(.)\, x)$ a analogicky pro $P(.)$.

$= \varphi \times e + e \times \psi$ a $\omega_\pi = \varphi_1\psi_2 = \varphi \times \psi$ platí

$$\varphi_1(A, A') = \varphi(A), \qquad \psi_2(A, A') = \psi(A'), \tag{4a}$$

$$\omega_\Sigma(A, A') \supset \varphi(A) + \psi(A'), \tag{4b}$$

$$\omega_\pi(A, A') \supset \varphi(A)\, \psi(A'). \tag{4c}$$

10.7.3 Poznámka: Pravidla funkcionálního počtu, pomocí nichž se z rovnosti (4a) získají vztahy (4b,c),udávají též nutné a postačující podmínky pro to, aby v těchto vztazích platila rovnost. Z hlediska aplikací je užitečný následující speciální případ: ve vztahu (4b) nastává rovnost, jestliže $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}, dE)$ nebo $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}, dF)$, a $\omega_\pi(A, A') = \varphi(A)\, \psi(A')$, jestliže $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}, dF)$ (viz cvičení 24).

10.7.4 Příklad: Na prostoru $L^2(\mathbb{R}^2, d(\mu_1 \otimes \mu_2))$, kde μ_1 a μ_2 jsou borelovské míry na $\mathbb{R}$, uvažujme pro $r = 1, 2$, operátory $Q_r \equiv T_{\mathrm{id}_r}$, tj. Q_r je operátor násobení funkcí $\mathrm{id}_r\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, přičemž $\mathrm{id}_1(x, y) := x$ a $\mathrm{id}_2(x, y) := y$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ tj. $\mathrm{id}_1 = \mathrm{id} \times e$ a $\mathrm{id}_2 = e \times \mathrm{id}$. Direktní součin $\mu_1 \otimes \mu_2$ je borelovská míra na $\mathbb{R}^2$ (viz (A.1.14b)) a podle příkladu 9.4.5 je zobrazení $\mathscr{B}^2 \ni \tilde{M} \mapsto E^\otimes(\tilde{M}) := T_{\chi_{\tilde{M}}}$ projektorová míra na $\mathbb{R}^2$, pro niž $Q_r = \mathscr{T}^{(E^\otimes)}(\mathrm{id}_r)$. Operátory Q_r jsou samosdružené, neboť id_r jsou reálné funkce, a pro jejich spektrální míry platí $E_{Q_r}(.) = E^\otimes(\mathrm{id}_r^{(-1)}(.))$ (viz příklad 10.3.6). Jelikož $\mathrm{id}_1^{(-1)}(M) = M \times \mathbb{R}$ pro každé $M \in \mathscr{B}$, dostáváme $E_{Q_1}(M) = E^\otimes(M \times \mathbb{R})$. Podobně získáme rovnost $E_{Q_2}(M) = E^\otimes(\mathbb{R} \times N)$, takže direktní součin $P(.)$ spektrálních měr $E_{Q_1}(.)$ a $E_{Q_2}(.)$ pro všechna M a $N \in \mathscr{B}$ splňuje $P(M \times N) = E_{Q_1}(M)\, E_{Q_2}(N) = E^\otimes(M \times N)$; díky jednoznačnosti (viz tvrzení 9.2.6) odtud plyne $P(.) = E^\otimes(.)$. Pro libovolné $\varphi \in \Phi_P$ potom dostáváme

$$\varphi(Q_1, Q_2) \equiv \mathscr{T}^{(P)}(\varphi) = \mathscr{T}^{(E^\otimes)}(\varphi) = T_\varphi,$$

tj. *$\varphi(Q_1, Q_2)$ je operátor násobení funkcí φ na prostoru $L^2(\mathbb{R}^2, d(\mu_1 \otimes \mu_2))$.* V příkladu 4.6.6 jsme ukázali, že prostor $L^2(\mathbb{R}^2, d(\mu_1 \otimes \mu_2))$ je přirozenou realizací tenzorového součinu $L^2(\mathbb{R}, d\mu_1) \otimes L^2(\mathbb{R}, d\mu_2)$; odpovídající realizací uzávěrů tenzorových součinů $Q_{\mu_1} \otimes I_2$ a $I_1 \otimes Q_{\mu_2}$ jsou právě operátory Q_1 a Q_2, tj. ve smyslu ztotožnění $L^2(\mathbb{R}^2, d(\mu_1 \otimes \mu_2)) = L^2(\mathbb{R}, d\mu_1) \otimes L^2(\mathbb{R}, d\mu_2)$ platí rovnosti

$$Q_1 = \overline{Q_{\mu_1} \otimes I_2}, \qquad Q_2 = \overline{I_1 \otimes Q_{\mu_2}}. \tag{5}$$

Toto tvrzení je přímým důsledkem podstatné samosdruženosti operátorů $Q_{\mu_1} \otimes I_2$ a $I_1 \otimes Q_{\mu_2}$ (viz větu 10.8.2) a inkluzí $Q_{\mu_1} \otimes I_2 \subset Q_1$, resp. $I_1 \otimes Q_{\mu_2} \subset Q_2$, které plynou z definice (7.6.1).

10.7.5 Příklad: Z formulí (4c) a (9.4.14) vyplývá, že pro libovolná přirozená j a k platí

$$(p_j \times p_k)(A, A') \supset p_j(A)\, p_k(A') = A^j (A')^k,$$

 kde $p_j(t) := t^j$, $t \in \mathbb{R}$; podobně získáme inkluzi $(A')^k A^j \subset (p_k \times p_j)(A', A)$. Nyní vztahy (2a,b) dávají $(p_k \times p_j)(A', A) = (p_j \times p_k)_T (A', A) = (p_j \times p_k)(A, A')$, a pro každé $x \in D_{jk}(A, A') := D(A^j(A')^k) \cap D((A')^k A^j)$ potom dostáváme

$$A^j(A')^k x = (p_j \times p_k)(A, A')\, x = (p_k \times p_j)(A', A)\, x = (A')^k A^j x\,.$$

Komutující samosdružené operátory A, A' tedy vyhovují rovnosti $[A^j(A')^k - (A')^k A^j]\, x = 0$ pro všechna $x \in D_{jk}(A, A')$ a všechna přirozená j a k. Speciálně máme rovnost

$$(AA' - A'A)\, x = 0\,, \qquad x \in D(AA') \cap D(A'A)\,,$$

která představuje přirozené zobecnění vztahu $AA' - A'A = 0$ platného v případě, kdy oba operátory A, A' jsou omezené.
Pro spektrum operátoru $\varphi(A, A')$ z věty 9.4.10 plyne $\sigma(\varphi(A, A')) = R^{(P)}_{\mathrm{ess}}(\varphi)$. Speciálně pro spojité funkce platí úplná analogie tvrzení 10.5.4 – stejný je i způsob důkazu.

10.7.6 Tvrzení: Jestliže $\varphi \in C(\sigma(A) \times \sigma(A'))$, potom $\sigma(\varphi(A, A')) = \overline{\varphi(\sigma(A) \times \sigma(A'))}$; navíc lze na pravé straně vynechat znak uzávěru, jsou-li oba operátory A a A' hermitovské.

Na závěr zobecníme pro operátory $\varphi(A, A')$ větu 10.5.9. Vyjdeme z toho, že pro komutant množiny $\{A, A'\}$ platí (viz cvičení 25)

$$\{A, A'\}' = \{E(.)\}' \cap \{F(.)\}' = \{P(.)\}'\,. \tag{6a}$$

Z věty 9.4.10d potom vyplývá inkluze

$$\{\varphi(A, A') \colon \varphi \in \Phi_P\} \subset \{A, A'\}''_{\mathrm{ex}}\,. \tag{6b}$$

Pro *separabilní* Hilbertovy prostory nastává rovnost, tj. platí následující tvrzení.

10.7.7 Věta: Jestliže A, A' jsou komutující samosdružené operátory na separabilním $\mathscr{H}$, potom $T \in \{A, A'\}''_{\mathrm{ex}}$ právě tehdy, když $T = \varphi(A, A')$ pro nějakou borelovskou funkci $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$.
Důkaz: Východiskem je opět rozklad

$$\mathscr{H} = \sum_{n=1}^{N}{}^{\oplus}\, \mathscr{G}(x_n)\,, \tag{7}$$

kde $\{x_n\}_{n=1}^N$ je konečná nebo nekonečná ortonormální množina a $\mathscr{G}(x_n) := \{P(J)\, x_n \colon J \in \mathscr{J}^2\}$. Existence množiny $\{x_n\}_{n=1}^N$ a rozkladu (7) lze ověřit doslovným zopakováním postupu užitého v důkazu lemmatu 10.5.8.

Vzhledem k inkluzi (6b) je třeba k danému $T \in \mathscr{L}_c(\mathscr{H})$ splňujícímu $BT \subset TB$ pro všechna $B \in \{P(.)\}'$ najít borelovskou funkci $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ tak, aby $\varphi(A, A') =$

$= T$. Postupuje se stejně jako v důkazu věty 10.5.9 s několika evidentními modifikacemi: např. místo formule (10.5.16c) máme $Ty = \lim_{n\to\infty} s_n(A, A')\, y$, kde s_n jsou schodovité funkce na $\mathbb{R}^2$, operátory E_l vystupující ve formuli (10.5.19) se nahradí projektory $P(N_l)$, kde $N_l := \{[t, u] \in \mathbb{R}^2 : |\varphi(t, u)| \leqq 1\}$ apod. ■

10.7.8 Příklad: Každý polynom p na $\mathbb{R}^2$,

$$p(t, u) \equiv \sum_{j,k} a_{jk} t^j u^k\,, \qquad a_{jk} \in \mathbb{C}\,,$$

zjevně patří do Φ_P, a je mu tedy podle (1b) přiřazen operátor $p(A, A')$. Lze mu však „přirozeným způsobem" přiřadit též operátor

$$S_p(A, A') \equiv S_p := \sum_{j,k} a_{jk} A^j (A')^k$$

s definičním oborem $D(S_p) = \bigcap_{j,k} D(A^j(A')^k)$. V jakém vztahu jsou operátory S_p a $p(A, A')$? Tuto otázku jsme pro funkce jediného operátoru vyřešili v příkladu 9.4.9: formuli (9.4.11) můžeme pro $E(.) = E_A(.)$, kde $A \in \mathscr{L}_{sa}(\mathscr{H})$, zapsat ve tvaru $Q(A) = \sum_n \alpha_n A^n$. Nyní je však naše úloha komplikovanější mj. proto, že v inkluzi $A^j(A')^k \subset (p_j \times p_k)(A, A')$ z příkladu 5, která je analogií formule (9.4.14), nelze napsat znak rovnosti, protože operátor na pravé straně je vždy samosdružený, zatímco na levé straně obecně nikoli. Uvažujme např. situaci z příkladu 7.6.3 a položme $\boldsymbol{A} := I_1 \otimes E$ a $\boldsymbol{A}' := A \otimes I_2$. Díky tomu, že prostor h_2 má konečnou dimenzi, jsou oba operátory $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}'$ samosdružené (viz cvičení 7.41). Snadno ověříme, že $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}' \subset \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$; to vzhledem k omezenosti $\boldsymbol{A}$ znamená, že operátory $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{A}'$ komutují. Položíme-li ve formuli (7.6.5) $T_1 = I_1$, $S_1 = A$, $T_2 = E$ a $S_2 = I_2$, dostáváme $A \otimes E = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'$; z výsledku příkladu 7.6.3 nyní vyplývá, že operátor $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'$ *není samosdružený*. Obecně tedy máme $S_p(A, A') \neq p(A, A')$. Ukážeme, že *v případě separabilního Hilbertova prostoru pro operátory S_p, které jsou hustě definované, platí*

$$\overline{S_p(A, A')} = p(A, A')\,. \tag{8a}$$

K důkazu užijeme předchozí věty. Jestliže $B \in \{A, A'\}'$, tj. platí inkluze $BA \subset AB$ a $BA' \subset A'B$, potom $BS_p \subset S_p B$ a odtud plyne $B\bar{S}_p \subset \bar{S}_p B$ (viz cvičení 7.31). S přihlédnutím k podmínce $\overline{D(S_p)} = \mathscr{H}$ vidíme, že $\bar{S}_p \in \{A, A'\}''_{ex}$ a podle věty 7 existuje borelovská funkce φ taková, že $\bar{S}_p = \varphi(A, A')$. Dále stejně jako v příkladu 5 zjistíme, že $\bar{S}_p \subset p(A, A')$; vzhledem k tomu, že oba operátory jsou podle věty 9.4.10 normální, plyne odtud (8a) – viz poznámku 7.3.2c.

Na závěr se ještě zmíníme o jednom důsledku formule (8a). Předpokládejme, že p je reálný polynom a že kromě operátoru S_p je hustě definován i operátor $\tilde{S}_p := \sum_{j,k} a_{jk}(A')^k A^j = S_{p_T}(A', A)$ (užíváme označení (2b)). Potom z (8a) a tvrzení 1 plyne

$$\overline{\tilde{S}}_p = p_T(A', A) = p(A, A') = \bar{S}_p \,. \tag{8b}$$

Dále díky samosdruženosti operátorů A, A' máme

$$S_p^* \supset \sum_{j,k} a_{jk}(A^j(A')^k) \supset \sum_{j,k} a_{jk}(A')^k A^j = \tilde{S}_p$$

(viz tvrzení 7.1.3), a tedy také $\overline{\tilde{S}}_p \subset S_p^*$. Užitím (8b) dostáváme $S_p \subset S_p^*$; operátor S_p je tedy symetrický, a protože pro reálný polynom p je $p(A, A') \in \in \mathscr{L}_{sa}(\mathscr{H})$, plyne z formule (8a) podstatná samosdruženost operátoru S_p. Jestliže tedy *pro reálný polynom p jsou operátory $S_p(A, A')$ a $S_{p_t}(A', A)$ hustě definovány a $\mathscr{H}$ je separabilní, pak jsou tyto operátory v podstatě samosdružené.*

10.8 SPEKTRÁLNÍ TEORIE PRO TENZOROVÝ SOUČIN OPERÁTORŮ

Užijeme nyní spektrální teorie ke studiu vlastností operátorů

$$\hat{P}(n_1, n_2) := \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{l=0}^{n_2} a_{kl}(A_1^k \otimes A_2^l) \tag{1a}$$

definovaných na podprostoru

$$D_{n_1 n_2} := D(A_1^{n_1}) \otimes D(A_2^{n_2}) \tag{1b}$$

a splňujících následující podmínky:

(p1) $A_r \in \mathscr{L}_{sa}(\mathscr{H}_r)$ pro $r = 1, 2,$ přičemž alespoň jeden z těchto operátorů je neomezený.

(p2) všechny koeficienty a_{kl} jsou reálné a existují čísla $\bar{k}$ a $\bar{l}$ taková, že $0 \leqq \bar{k} \leqq n_1$, $0 \leqq \bar{l} \leqq n_2$ a $a_{\bar{k}n_2}a_{n_1\bar{l}} \neq 0$.

Dokážeme především podstatnou samosdruženost; dále vyšetříme, jak souvisí spektrální míra daného operátoru $\overline{\hat{P}(n_1, n_2)}$ a jeho další spektrální charakteristiky s odpovídajícími charakteristikami operátorů A_1 a A_2. V následujícím výkladu znamená jako obvykle $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ libovolnou realizaci tenzorového součinu uvažovaných Hilbertových prostorů $\mathscr{H}_1$ a $\mathscr{H}_2$. Pro dané operátory $A_r \in \mathscr{L}_{sa}(\mathscr{H}_r)$, $r = 1, 2,$ rozumíme symbolem $A_1 \otimes A_2$ abstraktní operátor na $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ ve smyslu poznámky 7.6.1b. Budeme dále užívat označení

$$\boldsymbol{A}_1 \equiv A_1 \otimes I_2 \,, \qquad \boldsymbol{A}_2 \equiv I_1 \otimes A_2 \,.$$

Platnost závěrů, k nimž dospějeme, lze bezprostředně rozšířit na operátory

$$P_{n_1 \dots n_N}(A_1, \dots, A_N) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \dots \sum_{k_N=0}^{n_N} \alpha_{k_1 \dots k_N}(A_1^{k_1} \otimes \dots \otimes A_N^{k_N}),$$

kde $A_r \in \mathscr{L}_{sa}(\mathscr{H}_r)$ pro $r = 1, \dots, N < \infty$.

10.8.1 Poznámka: Definice (1) je konzistentní s tím, jak jsme zavedli operátor $T_1 \otimes T_2$ v § 7.6. Plyne to z rovnosti (7.7.6), podmínky (p2) a implikace $n < m \Rightarrow D(A^n) \supset D(A^m)$. Např. pro operátor $\hat{P}(1,1) \equiv A_1 \otimes I_2 + I_1 \otimes A_2 = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2$ rovnost (7.7.6) dává $D(\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2) = (D(A_1) \otimes \mathscr{H}_2) \cap (\mathscr{H}_1 \otimes D(A_2)) = D(A_1) \otimes D(A_2) = D_{11}$.

10.8.2 Věta: Operátor $\hat{P}(n_1, n_2)$ definovaný formulemi (1a, b) je v podstatě samosdružený.

Důkaz: V důsledku samosdruženosti operátorů $A_1^{n_1}$ a $A_2^{n_2}$ je podprostor (1b) hustý v $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ – viz tvrzení 4.6.4. Dále z formule (7.6.2) plyne $\hat{P}(n_1, n_2)^* \supset \hat{P}(n_1, n_2)$, takže $\hat{P}(n_1, n_2)$ je symetrický operátor. Podle věty 10.6.2 stačí najít v $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ totální množinu tvořenou analytickými vektory tohoto operátoru.

Pro $r = 1, 2$ označíme symbolem $E_r(.)$ spektrální míru operátoru A_r; množina $M_r := \bigcup_{j=1}^{\infty} \operatorname{Ran} E_r(-j, j)$ je zjevně hustá v $\mathscr{H}_r$ a z již citovaného tvrzení 4.6.4 plyne, že

$$M := \{x_1 \otimes x_2 : x_1 \in M_1,\ x_2 \in M_2\}$$

je totální v $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$. Věta bude tedy platit, ukážeme-li, že každý prvek množiny M je analytický vektor operátoru $\hat{P}(n_1, n_2)$. Ze vztahu $A_r^k = \int \mathrm{id}^k \, dE_r$, $k = 1, 2, \dots$ (viz (9.4.11)) pro $x_r \in \operatorname{Ran} E_r(-j, j) = \operatorname{Ran} \chi_{(-j,j)}(A_r)$ plyne $x_r \in D(A_r^k)$, neboť

$$\|A_r^k x_r\|_r^2 = \int_{(-j,j)} t^{2k} \, d\mu_{x_r}^{(r)} \leq j^{2k} \|x_r\|^2 . \tag{2}$$

Pro $r = 1, 2$ tedy platí $M_r \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D(A_r^k) \equiv C^\infty(A_r)$, a odtud $M \subset C^\infty(\hat{P}(n_1, n_2))$. Vezmeme nyní libovolné přirozené N a $x_1 \otimes x_2 \in M$, tj. $x_r = E_r(-j_r, j_r)\, x_r$, $r = 1, 2$ a odhadneme normu vektoru $[\hat{P}(n_1, n_2)]^N (x_1 \otimes x_2)$ pomocí (2):

$$\|[\hat{P}(n_1, n_2)]^N (x_1 \otimes x_2)\| = \Big\| \sum_{k_N l_N} a_{k_N l_N} \dots \sum_{k_1 l_1} a_{k_1 l_1} A_1^{k_1 + \dots + k_N} x_1 \otimes A_2^{l_1 + \dots + l_N} x_2 \Big\| \leq$$

$$\leq \sum_{k_N l_N} |a_{k_N l_N}| \dots \sum_{k_1 l_1} |a_{k_1 l_1}| \, \|A_1^{k_1 + \dots + k_N} x_1\|_1 \, \|A_2^{l_1 + \dots + l_N} x_2\|_2 \leq [\tilde{P}_{n_1 n_2}(j_1, j_2)]^N \, \|x_1 \otimes x_2\| ;$$

 zde jsme označili $\tilde{P}_{n_1n_2}(j_1, j_2) := \sum_{kl} |a_{kl}|\, j_1^k j_2^l$. Díky této nerovnosti konverguje řada $\sum_{N=0}^{\infty} (z^N/N!)\, \|\hat{P}(n_1, n_2)^N x_1 \otimes x_2\|$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$, takže $x_1 \otimes x_2$ je analytický vektor operátoru $\hat{P}(n_1, n_2)$. ■

10.8.3 Důsledek: Jestliže pro $r = 1, 2$ je $D_r \subset D(A_r^{n_r})$ obor podstatné samosdruženosti operátoru $A_r^{n_r}$, potom operátor $\dot{P}(n_1, n_2) := \hat{P}(n_1, n_2) \upharpoonright D_1 \odot D_2$ je v podstatě samosdružený.

Důkaz: Podmínky $\bar{D}_r = \mathscr{H}_r$, $r = 1, 2$, opět implikují, že $\overline{D_1 \odot D_2} = \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$; potom ze symetričnosti operátoru $\hat{P}(n_1, n_2)$ vyplývá, že symetrický je i operátor $\dot{P}(n_1, n_2)$. Jeho uzávěr je zřejmě částí operátoru $\overline{\hat{P}(n_1, n_2)}$ a vzhledem k tomu, že tento operátor je samosdružený, stačí k dokončení důkazu ověřit inkluzi $\hat{P}(n_1, n_2) \subset \overline{\dot{P}(n_1, n_2)}$, tj. ukázat, že ke každému $z \in D(A_1^{n_1}) \odot D(A_2^{n_2})$ existuje posloupnost $\{z_j\} \subset D_1 \odot D_2$ splňující $z_j \to z$ a $\dot{P}(n_1, n_2)\, z_j \to \hat{P}(n_1, n_2)\, z$. Díky linearitě se můžeme omezit na vektory $z = x_1 \otimes x_2$, kde $x_r \in D(A_r^{n_r})$. Z podmínek $\overline{A_r^{n_r} \upharpoonright D_r} = A_r^{n_r}$ plyne existence posloupností $\{x_r^j\}_{j=1}^{\infty} \subset D_r$, pro něž $\lim_{j\to\infty} x_1^j \otimes x_2^j = x_1 \otimes x_2$ a $\lim_{j\to\infty} A_r^{n_r} x_r^j = A_r^{n_r} x_r$, $r = 1, 2$. Odtud pro všechna k a l splňující $0 \leqq k \leqq n_1$, $0 \leqq l \leqq n_2$ dostáváme (viz cvičení 26)

$$\lim_{j\to\infty} (A_1^k \otimes A_2^l)(x_1^j \otimes x_2^j) = (A_1^k \otimes A_2^l)(x_1 \otimes x_2)\,,$$

a tedy také $\lim_{j\to\infty} \dot{P}(n_1, n_2)(x_1^j \otimes x_2^j) = \hat{P}(n_1, n_2)(x_1 \otimes x_2)$. ■

Přejděme k vyšetřování spektrálních charakteristik samosdružených operátorů $\overline{\hat{P}(n_1, n_2)}$. Nejprve uvedeme některá pomocná tvrzení.

10.8.4 Lemma: (a) Jestliže $E_r(.)$, $r = 1, 2$, jsou spektrální míry operátorů $A_r \in \mathscr{L}_{sa}(\mathscr{H}_r)$, potom $\boldsymbol{E}_1(.) \equiv E_1(.) \otimes I_2$, resp. $\boldsymbol{E}_2(.) \equiv I_1 \otimes E_2$, jsou spektrální míry samosdružených operátorů $\bar{\boldsymbol{A}}_1$ resp. $\bar{\boldsymbol{A}}_2$.

(b) Operátory $\bar{\boldsymbol{A}}_1$ a $\bar{\boldsymbol{A}}_2$ komutují.

(c) Spektra operátorů A_r a $\bar{\boldsymbol{A}}_r$, $r = 1, 2$, jsou totožná.

Důkaz: (a) Podle cvičení 27 je zobrazení $M \mapsto \boldsymbol{E}_1(M)$ projektorová míra na $\mathbb{R}$; je tedy třeba ukázat, že pro operátor $\tilde{A} := \mathscr{T}^{(\boldsymbol{E}_1)}(\mathrm{id})$ platí $\tilde{A} = \bar{\boldsymbol{A}}_1$. Díky tomu, že oba operátory jsou samosdružené, stačí ověřit inkluzi

$$\boldsymbol{A}_1 \subset \tilde{A}\,. \tag{3}$$

Pro každé $M \in \mathscr{B}$ a všechna $x \in \mathscr{H}_1$, $y \in \mathscr{H}_2$ máme $\mu_{x\otimes y}^{(\boldsymbol{E}_1)}(M) = \|\boldsymbol{E}_1(M)\, x \otimes y\|^2 = \|E_1(M)\, x\|_1^2\, \|y\|_2^2 = \|y\|_2^2\, \mu_x^{(E_1)}(M)$; odtud pro $x \in D(A_1)$ dostáváme

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{id}^2\, d\mu_{x\otimes y}^{(\boldsymbol{E}_1)} = \|y\|_2^2 \int_{\mathbb{R}} \mathrm{id}^2\, d\mu_x^{(E_1)} < \infty\,,$$

tj. $x \otimes y \in D(\tilde{A})$, což dále vede ke vztahu

$$D(\boldsymbol{A}_1) \equiv D(A_1) \otimes \mathscr{H}_2 \subset D(\tilde{A}) . \tag{4}$$

Obdobným postupem získáme pro libovolná $x \in D(A_1)$, $x' \in \mathscr{H}_1$ a $y, y' \in \mathscr{H}_2$ rovnost

$$(x' \otimes y', \tilde{A}(x \otimes y)) = (y', y)_2 (x', A_1 x)_1 = (x' \otimes y', \boldsymbol{A}_1(x \otimes y)) .$$

Jelikož $\{x' \otimes y' : x' \in \mathscr{H}_1, y' \in \mathscr{H}_2\}$ je totální množina v $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$, plyne odtud pro všechna $x \in D(A_1)$ a $y \in \mathscr{H}_2$ rovnost $\tilde{A}(x \otimes y) = \boldsymbol{A}_1(x \otimes y)$, a tedy také $\tilde{A}u = \boldsymbol{A}_1 u$, $u \in D(\boldsymbol{A}_1)$; což spolu se vztahem (4) dává inkluzi (3). Pro $r = 2$ je postup stejný.

(b) Jestliže M a N jsou libovolné borelovské množiny v $\mathbb{R}$, dostáváme pomocí (5.7.6) rovnosti $\boldsymbol{E}_1(M)\, \boldsymbol{E}_2(N) = E_1(M) \otimes E_2(N) = \boldsymbol{E}_2(N)\, \boldsymbol{E}_1(M)$; odtud plyne na základě tvrzení (a) komutativita operátorů $\bar{\boldsymbol{A}}_1$ a $\bar{\boldsymbol{A}}_2$.

(c) Pro libovolné $M \in \mathscr{B}$ dostáváme pomocí cvičení 5.45 ekvivalenci podmínek $\boldsymbol{E}_r(M) \neq 0$ a $E_r(M) \neq 0$, $r = 1, 2$. Dokazované tvrzení je pak snadným důsledkem věty 10.4.1a. ∎

Z formule (1a) je vidět, že operátory $\hat{P}(n_1, n_2)$ (a tedy také $\overline{\hat{P}(n_1, n_2)}$) jsou vzájemně jednoznačně přiřazeny polynomům $P_{n_1 n_2}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, kde

$$P_{n_1 n_2}(s, t) := \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{l=0}^{n_2} a_{kl} s^k t^l . \tag{5}$$

Dále díky komutativitě operátorů $\bar{\boldsymbol{A}}_1$ a $\bar{\boldsymbol{A}}_2$ odpovídá každému polynomu $P_{n_1 n_2}$ samosdružený operátor $P_{n_1 n_2}(\bar{\boldsymbol{A}}_1, \bar{\boldsymbol{A}}_2)$ (viz (10.7.1b)). Ukážeme, že

$$P_{n_1 n_2}(\bar{\boldsymbol{A}}_1, \bar{\boldsymbol{A}}_2) = \overline{\hat{P}(n_1, n_2)} . \tag{6}$$

Skutečně, ze vztahů (7.6.5) a $\boldsymbol{A}_r \subset \bar{\boldsymbol{A}}_r$, $r = 1, 2$, dostáváme $A_1^k \otimes A_2^l = A_1^k I_1 \otimes I_2 A_2^l \subset (\boldsymbol{A}_1)^k (\boldsymbol{A}_2)^l \subset (\bar{\boldsymbol{A}}_1)^k (\bar{\boldsymbol{A}}_2)^l$. Dále podle pravidel funkcionálního počtu platí $P_{n_1 n_2}(\bar{\boldsymbol{A}}_1, \bar{\boldsymbol{A}}_2) \supset \sum_{k,l} a_{kl}\, p_{kl}(\bar{\boldsymbol{A}}_1, \bar{\boldsymbol{A}}_2)$, kde $p_{kl}(t, s) := t^k s^l$; užijeme-li ještě formule (10.7.4c), dostáváme $p_{kl}(\bar{\boldsymbol{A}}_1, \bar{\boldsymbol{A}}_2) \supset (\bar{\boldsymbol{A}}_1)^k (\bar{\boldsymbol{A}}_2)^l$, takže celkem $P_{n_1 n_2}(\bar{\boldsymbol{A}}_1, \bar{\boldsymbol{A}}_2) \supset \sum_{k,l} a_{kl} (\bar{\boldsymbol{A}}_1)^k (\bar{\boldsymbol{A}}_2)^l \supset \sum_{k,l} a_{kl} (A_1^k \otimes A_2^l) = \hat{P}(n_1, n_2)$. Potom také $\overline{\hat{P}(n_1, n_2)} \subset P_{n_1 n_2}(\bar{\boldsymbol{A}}_1, \bar{\boldsymbol{A}}_2)$ a díky samosdruženosti obou operátorů odtud plyne (6).

Tato rovnost umožňuje aplikovat na operátor $\overline{\hat{P}(n_1, n_2)}$ aparát spektrální teorie. Na základě příkladu 10.3.6 a výsledků § 10.7 vyjádříme jeho spektrální míru $E_P(.)$ pomocí operátorů $\bar{\boldsymbol{A}}_r$; dále tvrzení 10.7.6 a lemma 4c ukazují souvislost jeho spektra se spektry operátorů A_1 a A_2.

10.8.5 Věta: Uzávěr operátoru $\hat{P}(n_1, n_2)$ definovaného formulemi (1a,b) je roven samosdruženému operátoru $P_{n_1 n_2}(\bar{\boldsymbol{A}}_1, \bar{\boldsymbol{A}}_2)$, kde $P_{n_1 n_2}$ je polynom (5). Pro spektrální míru $E_P(.)$ tohoto operátoru platí

$$E_P(M) = \chi_{P_M}(\bar{\boldsymbol{A}}_1, \bar{\boldsymbol{A}}_2)\,, \qquad M \in \mathscr{B}\,, \tag{7}$$

kde $P_M := P^{(-1)}_{n_1n_2}(M)$; jeho spektrum souvisí se spektry operátorů A_r vztahem

$$\sigma(\overline{\hat{P}(n_1, n_2)}) = \overline{P_{n_1n_2}(\sigma(A_1) \times \sigma(A_2))}\,. \tag{8}$$

10.8.6 Příklad: Pro spektra samosdružených operátorů $A_\Pi := \overline{A_1 \otimes A_2}$ a $A_\Sigma := = \overline{\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2}$ formule (8) dává $\sigma(A_\Pi) = \bar{M}_\Pi$, pro $M_\Pi := \{t\colon t = uv,\ u \in \sigma(A_1),\ v \in \sigma(A_2)\}$, resp. $\sigma(A_\Sigma) = \overline{M_\Sigma}$, kde $M_\Sigma := \{t\colon t = u + v,\ u \in \sigma(A_1),\ v \in \sigma(A_2)\}$.
Přitom obecně $\sigma(A_\Pi) \neq M_\Pi$ a $\sigma(A_\Sigma) \neq M_\Sigma$, protože množiny M_Π a M_Σ nemusí být uzavřené. Uvažujme např. na separabilním $\mathscr{H}$ operátory $A_r = T_{s_r}$, $r = 1, 2$, z příkladu 7.1.6 pro $s_1 := \{j + 1/(2j)\}$ a $s_2 := \{-j\}$; jde o samosdružené operátory s čistě bodovými spektry $\sigma(A_1) = \{j + 1/(2j)\colon j = 1, 2, \ldots\}$, resp. $\sigma(A_2) = \{-j\colon j = 1, 2, \ldots\}$, a je zřejmé, že $0 \in \sigma(A_\Sigma) \setminus M_\Sigma$.

Je možno vyjádřit prvky množiny $\sigma_p(\overline{\hat{P}(n_1, n_2)}) \equiv \sigma_p^{(P)}$ pomocí vlastních hodnot operátorů A_1 a A_2? Nechť pro $r = 1, 2$, platí $A_r e_r = \lambda_r e_r$, kde $e_r \in D(A_r)\setminus\{0\}$. Snadno nahlédneme, že vektor $e_1 \otimes e_2$ patří do definičního oboru operátoru $A_1^k \otimes A_2^l$ pro všechna přirozená k a l, přičemž $(A_1^k \otimes A_2^l)(e_1 \otimes e_2) = = \lambda_1^k \lambda_2^l (e_1 \otimes e_2)$. Odtud plyne

$$\overline{\hat{P}(n_1, n_2)}\,(e_1 \otimes e_2) = \hat{P}(n_1, n_2)\,(e_1 \otimes e_2) = P_{n_1n_2}(\lambda_1, \lambda_2)\,(e_1 \otimes e_2)\,, \tag{9a}$$

což znamená, že

$$P_{n_1n_2}(\sigma_p(A_1) \times \sigma_p(A_2)) \subset \sigma_p^{(P)}\,. \tag{9b}$$

Z následujícího příkladu je vidět, že rovnost obecně neplatí.

10.8.7 Příklad: Nechť F je netriviální projektor na daném $\mathscr{H}$ takový, že $\dim \operatorname{Ran}(I - F) < \infty$; položme $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}$, $\mathscr{H}_2 = L^2(\mathbb{R})$, $A_1 = F$, $A_2 = Q$ a uvažujme operátor $A_\Pi := \overline{F \otimes Q} = P_{11}(\overline{F \otimes I_2}, \overline{I_1 \otimes Q})$ na $\mathscr{H} \otimes L^2(\mathbb{R})$; pro polynom P_{11} tedy platí $P_{11}(s, t) = st$, $s, t \in \mathbb{R}$. Jelikož $\sigma(F) = \sigma_p(F) = \{0, 1\}$ a $\sigma(Q) = \mathbb{R}$, dostáváme z formule (8)

$$\sigma(A_\Pi) = \mathbb{R}\,.$$

Dále $P_{\{0\}} \equiv P_{11}^{(-1)}(\{0\}) = \{[s, t]\colon st = 0\} = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ a charakteristickou funkci této množiny lze zapsat ve tvaru (viz (A.2.3a))

$$\chi_{P(\{0\})} = \chi_{\{0\}} \times \chi_{\mathbb{R}} + \chi_{\mathbb{R}} \times \chi_{\{0\}} - \chi_{\{0\}} \times \chi_{\{0\}}\,.$$

Vzhledem k tomu, že všechny tyto funkce jsou omezené, dostáváme podle formulí (10.7.4) a lemmatu 4a rovnost $(\chi_{\{0\}} \times \chi_{\mathbb{R}})(\overline{F \otimes I_2}, \overline{I_1 \otimes Q}) = \chi_{\{0\}}(\overline{F \otimes I_2})\, \chi_{\mathbb{R}}(\overline{I_1 \otimes Q}) =$

$= E_F(\{0\})\, E_Q(\mathbb{R}) = I - F$. Podobně zjistíme, že $(\chi_{\mathbb{R}} \times \chi_{\{0\}})\,(\overline{F \otimes I_2}, \overline{I_1 \otimes Q}) = (\chi_{\{0\}} \times \chi_{\{0\}})\,(\overline{F \otimes I_2}, \overline{I_1 \otimes Q}) = 0$, neboť $E_Q(\{0\}) = 0$. Z formule (7) potom plyne

$$E_{A_\Pi}(\{0\}) = I - F \neq 0\,.$$

Operátor A_Π má tedy vlastní hodnotu $\lambda = 0$, ačkoliv odpovídající množina $P_{11}(\sigma_p(F) \times \sigma_p(Q))$ je prázdná, protože $\sigma_p(Q) = \emptyset$. Dále z rovnosti $\sigma(A_\Pi) = \mathbb{R}$ plyne, že nula je hromadným bodem množiny $\sigma(A_\Pi)$, a tudíž $0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A_\Pi)$ (viz větu 10.4.6). Současně jde o vlastní hodnotu násobnosti $\dim \operatorname{Ran}(I - F)$, která je konečná. Obvykle se v takové situaci mluví o **vlastní hodnotě vnořené do spojitého spektra** (viz poznámku 10.4.12).

Na závěr poznamenejme, že ve speciálním případě, kdy prostory $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ jsou separabilní a operátory A_1, A_2 mají čistě bodová spektra, platí ve vztahu (9b) rovnost; důkaz ponecháváme čtenáři.

10.9 SPEKTRÁLNÍ REPREZENTACE SAMOSDRUŽENÉHO OPERÁTORU

Úloha, jejímž řešením se budeme v tomto paragrafu zabývat, má následující motivaci. Nechť A je samosdružený operátor na separabilním $\mathscr{H}$ s čistě bodovým nedegenerovaným spektrem, tj. každá vlastní hodnota λ_j má jednotkovou násobnost. Vlastní vektory, které podle předpokladu tvoří ortonormální bázi, označíme e_j, $j = 1, 2, \ldots$. Vezmeme vektor

$$y := \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1} e_j \tag{1}$$

a pro každou borelovskou množinu M položíme $\mu(M) := (y, E_D(M)\, y)$, kde $E_D(.)$ je projektorová míra z příkladu 10.3.5. Množina $\mathbb{R} \setminus \sigma_p(A)$ je E_D-nulová, takže každý prvek $\psi \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ je plně určen posloupností $\{\psi(\lambda_j)\}$. Díky tomu, že vektory e_j jsou vzájemně jednoznačně přiřazeny vlastním hodnotám, můžeme definovat zobrazení $V\colon \mathscr{H} \to L^2(\mathbb{R}, d\mu)$, v němž každému $x \equiv \sum_j \xi_j e_j$ odpovídá prvek $Vx \equiv \psi_x \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ vztahem $\psi_x(\lambda_j) := j\xi_j$, $j = 1, 2, \ldots$. Toto zobrazení je zjevně izomorfismus. Vektor $\psi \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ patří do podprostoru VD_A právě tehdy, když

$$\int_{\mathbb{R}} |t\, \psi(t)|^2\, d\mu(t) = \sum_j |\lambda_j\, \psi(\lambda_j)/j|^2 < \infty$$

a tato ψ splňují pro $j = 1, 2, \ldots$ rovnost

$$(VAV^{-1}\psi)(\lambda_j) = \left(V\left[\sum_k \frac{1}{k}\, \lambda_k\, \psi(\lambda_k)\, e_k\right]\right)(\lambda_j) = \lambda_j\, \psi(\lambda_j)\,,$$

 tj. $(VAV^{-1}\psi)(x) = x\,\psi(x)$ pro μ-s. v. $x \in \mathbb{R}$. Operátor VAV^{-1} je tedy roven operátoru Q_μ násobení nezávisle proměnnou na $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$. Souhrnně lze říci, že na separabilním $\mathscr{H}$ *lze ke každému operátoru* $A \in \mathscr{L}_{sa}(\mathscr{H})$ *s čistě bodovým nedegenerovaným spektrem najít konečnou borelovskou míru* μ *na* $\mathbb{R}$ *a izomorfismus* $V: \mathscr{H} \to L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ *tak, že* $VAV^{-1} = Q_\mu$.

Dá se tento závěr zobecnit pro libovolný samosdružený operátor? Význam řešení této otázky pro spektrální teorii je patrný z toho, že operátory násobení funkcí mají průzračné spektrální vlastnosti (viz příklad 9.4.5), a přitom jsou základní spektrální charakteristiky buď unitární invarianty, nebo se při unitární ekvivalenci jednoduše transformují, jak ukazuje příklad 10.3.7. Je proto účelné zavést pojem **spektrální reprezentace** (říká se též *kanonická forma*) daného samosdruženého operátoru A na $\mathscr{H}$; definitoricky je to operátor násobení reálnou funkcí f na prostoru $L^2(X, d\mu)$ takový, že $VAV^{-1} = T_f$. Přitom izomorfismus $V: \mathscr{H} \to L^2(X, d\mu)$, jakož i veličiny X, μ a f obecně závisejí na A.

Pro konstrukci izomorfismu V v úvodním příkladu byl podstatný předpoklad nedegenerovanosti všech vlastních hodnot. Přeformulujeme jej nyní s využitím toho, že pro vektor (1) a všechna $j = 1, 2, \ldots$ platí $jP_j y = e_j$, kde $P_j := E_D(\{\lambda_j\})$; množina $\{P_j y: j = 1, 2, \ldots\}$ je tedy totální. Pro obecný operátor $A \in \mathscr{L}_{sa}(\mathscr{H})$ zavedeme analogii vektoru (1) takto: vektor $y \in \mathscr{H}$ nazveme **generujícím vektorem operátoru** A, je-li množina $\{E_A(J)\,y: J \in \mathscr{J}\}$ totální v $\mathscr{H}$ (přitom $\mathscr{J}$ značí jako obvykle systém všech omezených intervalů v $\mathbb{R}$). Jestliže k danému A existuje generující vektor, říkáme, že tento operátor má **jednoduché spektrum**.

10.9.1 Tvrzení: Jestliže operátor $A \in \mathscr{L}_{sa}(\mathscr{H})$ má jednoduché spektrum, potom $\mathscr{H}$ je separabilní a každá vlastní hodnota operátoru A má jednotkovou násobnost.

Důkaz: Podle předpokladu existuje $y \in \mathscr{H}$ takové, že množina $M(y) = \{E_A(J)\,y: J \in \mathscr{J}\}$ je totální. Nechť $\mathscr{J}_r$ je systém všech omezených intervalů v $\mathbb{R}$, jejichž koncové body jsou racionální a $M_r(y) := \{E_A(J)\,y: J \in \mathscr{J}_r\}$; tato množina je zjevně spočetná. Dále ke každému $u \in \mathbb{R}$ existují posloupnosti $\{u_n\}$ a $\{u_n'\}$ racionálních čísel takové, že $\lim u_n = \lim u_n' = u$, přičemž $u_n > u$ a $u_n' < u$ pro všechna n; rozklad jedničky $\{E_t^{(A)}\}$ potom splňuje rovnosti $E_u^{(A)} = \operatorname{s-lim}_{n\to\infty} E_{u_n}^{(A)}$ a $E_{u-0}^{(A)} = \operatorname{s-lim}_{n\to\infty} E_{u_n'}^{(A)}$ a ze vztahů (9.1.8) snadno zjistíme, že $M(y) \subset \overline{M}_r(y)$. Separabilita prostoru $\mathscr{H}$ nyní plyne z lemmatu 3.1.3.

Nechť λ je vlastní hodnota operátoru A; podle věty 10.4.1b je vlastní podprostor $N(\lambda)$ roven $\operatorname{Ran} E_A(\{\lambda\})$. Vezměme libovolné $z \in N(\lambda) \cap \{y\}_{\text{lin}}^{\perp}$, takže platí $z = E_A(\{\lambda\})\,z$ a $(y, z) = 0$. Odtud pro každý interval $J \subset \mathbb{R}$ dostáváme

$$(E(J)\,y, z) = (y, E(J \cap \{\lambda\})\,z) = \chi_J(\lambda)\,(y, E(\{\lambda\})\,z) = \chi_J(\lambda)\,(y, z) = 0\,, \quad (2)$$

a proto $z \in \{E(J)\,y\colon J \subset \mathbb{R}\}^{\perp} = \{0\}$. Platí tedy rovnost $N(\lambda) \cap \{y\}_{\text{lin}}^{\perp} = \{0\}$ a z lemmatu 5.4.7 plyne $\dim N(\lambda) \leqq 1$. Současně pro každou vlastní hodnotu platí opačná nerovnost, takže celkem $\dim N(\lambda) = 1$. ■

Je zřejmé, že množina operátorů $A \in \mathscr{L}_{\text{sa}}(\mathscr{H})$ s čistě bodovým nedegenerovaným spektrem je částí množiny všech samosdružených operátorů s jednoduchým spektrem, přičemž tyto množiny jsou totožné, jestliže $\dim \mathscr{H} < \infty$. V nekonečnědimenzionálním případě však totožné nejsou.

10.9.2 Příklad: Ukážeme, že *operátor Q_μ násobení nezávisle proměnnou na $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$, kde μ je libovolná borelovská míra, má jednoduché spektrum.* Užijeme vztahu

$$\overline{\{\chi_J\colon J \in \mathscr{J}\}_{\text{lin}}} = L^2(\mathbb{R}, d\mu) \tag{3}$$

z příkladu 3.1.7 a toho, že pro každé $M \in \mathscr{B}$ je projektor $E_{Q_\mu}(M) \equiv E^{(\mu)}(M)$ roven operátoru T_{χ_M} násobení funkcí χ_M (viz příklad 9.4.5).

Z rovnosti (3) je vidět, že v případě konečné míry je hledaným generujícím vektorem funkce $x \mapsto \psi(x) := 1$. Jestliže $\mu(\mathbb{R}) = \infty$, existuje rozklad $\mathbb{R} = \bigcup_k J_k$, kde $\{J_k\} \subset \mathscr{J}$ je disjunktní spočetný systém takový, že $\mu(J_k) < \infty$ pro všechna k; množina $\{\chi_{J_k}\} \subset L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ je tudíž ortogonální. Označíme-li $\mu_k := \max\{\mu(J_k), 1\}$, tvoří vektory

$$\psi_n := \sum_{k=1}^{n} (2^k \mu_k)^{-1/2} \chi_{J_k} \tag{4}$$

cauchyovskou posloupnost. Ověříme, že $\psi := \lim_{n\to\infty} \psi_n$ je generující vektor operátoru Q_μ. Skutečně, ke každému $J \in \mathscr{J}$ existuje konečný podsystém $\{J_k\}_{k=k_1}^{k_2}$ takový, že $J = \bigcup_{k=k_1}^{k_2} (J_k \cap J)$; ze vztahů (4) a $\chi_{J_k}\chi_{J_l} = \delta_{kl}\chi_{J_k}$ dostáváme $E^{(\mu)}(J_k \cap J)\,\psi = (2^k\mu_k)^{-1/2}\chi_{J_k \cap J}$ a odtud

$$\chi_J = \sum_{k=k_1}^{k_2} \chi_{J_k \cap J} = \sum_{k=k_1}^{k_2} (2^k\mu_k)^{1/2} E^{(\mu)}(J_k \cap J)\,\psi\,,$$

takže $\{\chi_J\colon J \in \mathscr{J}\} \subset \{E^{(\mu)}(J)\,\psi\colon J \in \mathscr{J}\}_{\text{lin}}$, a tvrzení plyne z rovnosti (3).

Hlavním důvodem pro zavedení třídy operátorů s jednoduchým spektrem je okolnost, že lze snadno najít jejich spektrální reprezentaci.

10.9.3 Věta: Každý operátor $A \in \mathscr{L}_{\text{sa}}(\mathscr{H})$ s jednoduchým spektrem je unitárně ekvivalentní operátoru Q_μ násobení nezávisle proměnnou na $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$, kde μ je konečná borelovská míra určená pomocí generujícího vektoru y a spektrální míry $E_A(.)$ předpisem

$$\mu(.) := (y, E_A(.)\,y)\,. \tag{5}$$

Důkaz: Budeme užívat zkráceného zápisu $L^2_\mu \equiv L^2(\mathbb{R}, d\mu)$; normu v tomto prostoru značíme $\|.\|_\mu$. Uvažujme podprostor $S \subset L^2_\mu$ tvořený jednoduchými borelovskými funkcemi $\sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$; podle cvičení 3.6 platí $\bar{S} = L^2_\mu$. Pro každé $\sigma \in S$ je $\sigma(A)$ omezený operátor; z pravidel funkcionálního počtu pak ihned plyne, že množina $G := \{x \in \mathscr{H}: x = \sigma(A)\, y,\ \sigma \in S\}$ je podprostor, a díky inkluzi $\{E_A(J)\, y: J \in \mathscr{J}\} \subset G$ platí $\bar{G} = \mathscr{H}$.

Definujme zobrazení $V_0: G \to L^2_\mu$ takto: $V_0 \sigma(A)\, y := \sigma$. To je korektní definice, neboť rovnost $\sigma(A)\, y = \tilde{\sigma}(A)\, y$ implikuje $\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_\mu = 0$, jak je vidět ze vztahů (5) a (9.3.10). Pomocí těchto vztahů dále dostaneme pro všechna $\sigma \in S$ rovnost

$$\|\sigma(A)\, y\|^2 = \int |\sigma|^2\, d\mu_y = \|\sigma\|^2_\mu = \|V_0 \sigma(A)\, y\|^2_\mu\,, \tag{6}$$

a jelikož $\operatorname{Ran} V_0 = S$, plyne z podmínek $\bar{G} = \mathscr{H}$, $\bar{S} = L^2_\mu$ a (6), že spojité rozšíření zobrazení V_0 je izomorfismus prostorů $\mathscr{H}$ a L^2_μ (viz tvrzení 5.5.4); označíme jej V.

Tvrdíme, že $VAV^{-1} = Q_\mu$. Skutečně, na levé straně máme samosdružený operátor na L^2_μ, jehož spektrální míra je $E'(.) = VE_A(.)\, V^{-1}$ (viz příklad 10.3.7). Pro každé $M \in \mathscr{B}$ a $\sigma \in S$ je $\chi_M \sigma \in S$, takže

$$E'(M)\, \sigma = V\chi_M(A)\, \sigma(A)\, y = V_0(\chi_M \sigma)\,(A)\, y = \chi_M \sigma = T_{\chi_M} \sigma\ ;$$

díky tomu, že operátory $E'(M)$ a T_{χ_M} jsou omezené a podprostor S je hustý v L^2_μ, platí rovnost $E'(M) = T_{\chi_M}$ pro každé $M \in \mathscr{B}$. Užijeme-li označení z příkladu 9.4.5, dostáváme $E'(.) = E^{(\mu)}(.)$ a odtud $VAV^{-1} = \int \mathrm{id}\, dE^{(\mu)} = T_{\mathrm{id}} = Q_\mu$. ■

10.9.4 Poznámka: Podle výsledků cvičení 7.21 je Q_μ unitárně ekvivalentní operátoru Q_ν na $L^2(\mathbb{R}, d\nu)$, kde $\nu(M) = \int_M e^{-t^2}\, d\mu(t)$, tj. jde opět o konečnou borelovskou míru. Spektrální reprezentace operátoru A s jednoduchým spektrem tedy není určena jednoznačně; tato okolnost souvisí s nejednoznačností generujícího vektoru (viz cvičení 32).

Operátory $A \in \mathscr{L}_{sa}(\mathscr{H})$ s jednoduchým spektrem lze charakterizovat algebraickými prostředky, přesněji řečeno pomocí množin $\{A\}'$ a $\{A\}'' \equiv (\{A\}')'$ definovaných vztahem (10.5.11a). Připomeňme, že tyto množiny jsou podprostory v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ a že podle (10.5.12) všechny funkce $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}, dE_A)$ splňují

$$\varphi(A) \in \{A\}''\ ; \tag{7}$$

dále z rovnosti $E^{(A)}_t E^{(A)}_s = E^{(A)}_s E^{(A)}_t$, která platí pro všechna $s, t \in \mathbb{R}$, vyplývá

$$\{A\}'' \subset \{A\}'\ . \tag{8}$$

Zmíněnou charakteristiku má smysl hledat jen v případě separabilního $\mathscr{H}$ (viz tvrzení 1). Snadno ji získáme, jestliže operátor $A \in \mathscr{L}_{sa}(\mathscr{H})$ má čistě bodové spektrum. Nechť $\{e_j\}$ je ortonormální báze tvořená jeho vlastními vektory. Má-li operátor A jednoduché spektrum, je každá vlastní hodnota λ_j nedegenerovaná a pro libovolné $B \in \{A\}'$ ze vztahů $ABe_j = BAe_j = \lambda_j Be_j$ plyne $Be_j = \mu_j e_j$, kde $\mu_j \in \mathbb{C}$ a $|\mu_j| \leqq \|B\|$ pro všechna j. Potom $B = \varphi(A)$, kde $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{d}E_A)$, přičemž díky podmínce $E_A(\mathbb{R} \setminus \sigma_p(A)) = 0$ je tato funkce plně určena podmínkami $\varphi(\lambda_j) = \mu_j$ (viz příklad 10.3.5 a cvičení 14). S přihlédnutím ke vztahům (7) a (8) zjišťujeme, že podmínka

$$\{A\}' = \{A\}'' \tag{9}$$

je nutná pro to, aby operátor A měl jednoduché spektrum. Snadno ověříme, že je také postačující. Užijeme k tomu projektorů E_j na jednodimenzionální podprostory $\{e_j\}_{\text{lin}}$, které zjevně komutují s A, tj. $\{E_j\colon j = 1, 2, \ldots\} \subset \{A\}'$. Nyní z podmínky (9) a věty 10.5.9 plyne existence borelovských funkcí $\varphi_j \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{d}E_A)$ takových, že $E_j = \varphi_j(A)$. Vzhledem k tomu, že A má čistě bodové spektrum, splňuje každý z operátorů $\varphi_j(A)$ pro všechna $x \in \mathscr{H}$ rovnost $E_j x = \varphi_j(A)x = \sum_n \varphi_j(\lambda_n) P_n x$, kde $P_n := E_A(\{\lambda_n\})$ (viz větu 10.4.1b a cvičení 14). Dosadíme-li za x vlastní vektory e_l, $l = 1, 2, \ldots$, zjistíme, že $E_j = P_j$ pro všechna j. Potom pro vektor $y = \sum_j j^{-1} e_j$ platí, že $\{E_j y\colon j = 1, 2, \ldots\}$ je totální množina, která je v důsledku podmínek $E_j = P_j$ částí množiny $\{E_A(J)\, y\colon J \in \mathscr{J}\}$; proto y je generující vektor. Uvažovaný operátor má tedy jednoduché spektrum právě tehdy, když $\{A\}' = \{A\}''$.

Platí tento závěr pro každý samosdružený operátor na separabilním $\mathscr{H}$? Při hledání odpovědi užijeme následující ekvivalentní definice generujícího vektoru.

10.9.5 Tvrzení: Podmínka

$$\overline{\{By\colon B \in \{A\}''\}} = \mathscr{H} \tag{10}$$

je nutná a postačující pro to, aby y bylo generujícím vektorem operátoru $A \in \mathscr{L}_{sa}(\mathscr{H})$.

Důkaz: Uvedená podmínka je nutná, protože operátory $E_A(J)$, $J \in \mathscr{J}$ patří do $\{A\}''$ (viz (7)). K ověření toho, že je postačující, vezměme libovolný vektor $x \in \{E_A(J)\, y\colon J \in \mathscr{J}\}^\perp$; komplexní míra $\nu_{xy}(.) \equiv (x, E(.)\, y)$ potom splňuje $\nu_{xy}(J) = 0$ pro všechna $J \in \mathscr{J}$ a tedy také $\nu_{xy}(M) = 0$ pro všechna $M \in \mathscr{B}$ (viz důsledek A.5.7). Podle věty 10.5.9 ke každému $B \in \{A\}''$ existuje funkce $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{d}E_A)$ taková, že $B = \varphi(A)$; potom

$$(x, By) = (x, \varphi(A)\, y) = \int \varphi \, \mathrm{d}\nu_{xy} = 0\,,$$

a z podmínky (10) plyne $x = 0$, takže $\{E_A(J)\, y\colon J \in \mathscr{J}\}$ je totální množina. ■

 Ukážeme nyní, že pro libovolný samosdružený operátor A na separabilním $\mathscr{H}$ z rovnosti (9) plyne, že operátor A má jednoduché spektrum. Vezměme libovolná $z \in \mathscr{H}$ a $\varepsilon > 0$; podle lemmatu 10.5.8 lze najít přirozené n_ε takové, že

$$\|z - \sum_{n=1}^{n_\varepsilon} P(x_n)\, z\| < \varepsilon\,; \tag{11a}$$

zde $P(x_n)$ jsou projektory na vzájemně ortogonální podprostory $\{E_A(J)\,x_n\colon J \subset \mathscr{J}\}$ a vektory x_n tvoří ortonormální množinu mohutnosti $N \leqq \infty$. Označme $y := \sum_{n=1}^{N} n^{-1} x_n$, takže

$$x_n = n\, P(x_n)\, y\,.$$

Podle (10.5.13) lze najít schodovité funkce s_n, $n = 1, \ldots, n_\varepsilon$, takové, že $\|P(x_n)\, z - s_n(A)\, x_n\| < \varepsilon / n_\varepsilon$; po dosazení za x_n tato nerovnost spolu s nerovností (11a) dávají

$$\|z - By\| < 2\,\varepsilon \tag{11b}$$

kde $B := \sum_{n=1}^{n_\varepsilon} n\, s_n(A)\, P(x_n)\, y$. Nyní ze vztahů (10.5.14a) a (9) plyne $P(x_n) \in \{A\}' = \{A\}''$ pro všechna n, takže operátor B patří do $\{A\}''$; nerovnost (11b) potom můžeme zapsat ve tvaru $\overline{\{By\colon B \in \{A\}''\}} = \mathscr{H}$ a operátor A má jednoduché spektrum podle tvrzení 5.

Je rovnost (9) ekvivalentní požadavku jednoduchosti spektra operátoru A? Odpověď bude kladná, ověříme-li, že pro operátor A s jednoduchým spektrem je $\{A\}'$ komutativní množina (platí totiž (8) a pro každou komutativní množinu $\mathscr{S} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}'$). Nyní z rozkladu $B = \mathrm{Re}\, B + \mathrm{i}\, \mathrm{Im}\, B$ (viz 5.3.1)) plyne, že pro komutativitu množiny $\{A\}'$ stačí, aby platila rovnost

$$C_1 C_2 = C_2 C_1 \tag{12a}$$

pro všechny hermitovské operátory C_1 a C_2 patřící do $\{A\}'$. Budeme tedy dokazovat, že z podmínky (10) plyne (12a).

K libovolnému $x \in \mathscr{H}$ najdeme posloupnost $\{B_n\} \subset \{A\}''$, takovou, že $B_n y \to x$. Díky tomu, že každý z operátorů C_1 a C_2 komutuje se všemi B_n, vidíme, že rovnost (12a) platí právě tehdy, když $C_1 C_2 y = C_2 C_1 y$; pomocí (10) přepíšeme poslední rovnost do následujícího ekvivalentního tvaru

$$(C_1 C_2 y, By) = (C_2 C_1 y, By) \tag{12b}$$

pro všechna $B \in \{A\}''$. Podle výsledků cvičení 35 existuje pro $r = 1, 2$ posloupnost hermitovských operátorů $B_n^{(r)} \in \{A\}''$ taková, že $B_n^{(r)} y \to C_r y$. Potom $(C_1 C_2 y, By) = (C_2 y, B C_1 y) = \lim_{n\to\infty} (B_n^{(2)} y, B B_n^{(1)} y) = \lim_{n\to\infty} (y, B_n^{(2)} B B_n^{(1)} y)$. Díky tomu, že množina $\{A\}''$ je komutativní (viz věty 10.5.9 a 9.4.10d) a operátory $B_n^{(r)}$

jsou hermitovské, platí pro všechna n rovnost $(y, B_n^{(2)}BB_n^{(1)}y) = (B_n^{(1)}y, BB_n^{(2)}y) \to$ $\to (C_1 y, BC_2 y) = (C_2 C_1 y, By)$; tím je dokázán vztah (12b), a tedy také rovnost $\{A\}' = \{A\}''$.

Shrneme získané výsledky.

10.9.6 Věta: Pro každý samosdružený operátor A na separabilním $\mathscr{H}$ jsou následující podmínky ekvivalentní.

(a) A má jednoduché spektrum,

(b) existuje vektor $y \in \mathscr{H}$ takový, že $\overline{\{By\colon B \in \{A\}''\}} = \mathscr{H}$,

(c) $\{A\}' = \{A\}''$, tj. každý omezený operátor B, který komutuje s A, je roven operátoru $\varphi_B(A)$, kde φ_B je omezená borelovská funkce.

Spektrální reprezentace existuje i pro samosdružené operátory, které nemají jednoduché spektrum. Její konstrukce je však formálně komplikovanější a nebudeme ji proto uvádět (viz ⟦AG⟧, § 86, ⟦Nai 2⟧, § 18.6, ⟦DS 2⟧, § XIII.5). Uvedeme pouze konečný výsledek.

10.9.7 Věta: Nechť A je samosdružený operátor na separabilním $\mathscr{H}$. Pak existuje prostor $L^2(X, d\mu)$ s konečnou mírou, měřitelná funkce $F\colon X \to \mathbb{R}$ a izomorfismus $W\colon \mathscr{H} \to L^2(X, d\mu)$ tak, že $WAW^{-1} = T_F$ (operátor násobení funkcí F).

Větu lze zobecnit pro neseparabilní $\mathscr{H}$ (viz ⟦KGv⟧, § V.2).

Komentář

§ **10.2** • Každý hermitovský operátor je normální; proto jej můžeme vyjádřit jednak pomocí jeho spektrální míry $E_A(.)$ na $\mathbb{R}$, ve tvaru (10.1.11), jednak pomocí projektorové míry $F_A(.)$ na $\mathbb{R}^2$ podle formulí (10.2.1,2) pro $A' = 0$. Mezi projektorovými mírami $F_A(.)$ a $E_A(.)$ existuje v tomto případě velmi jednoduchý vztah. Ze vztahu $E_{A'=0}(\{0\}) = I$ (cvičení 6) a formule (10.2.1) totiž dostáváme $F_A(M \times (\mathbb{R}\setminus\{0\})) = 0$, $M \in \mathscr{B}$, a odtud pro každé $N \in \mathscr{B}^2$ plyne

$$F_A(N) = F_A(N \cap \mathbb{R} \times (\mathbb{R}\setminus\{0\})) \cup F_A(N \cap (\mathbb{R} \times \{0\})) = F_A(N \cap (\mathbb{R} \times \{0\}))\,.$$

Nyní množina $N_0 := \{t \in \mathbb{R}\colon [t, 0] \in N\}$, která je borelovská (viz příklad A.1.9b), splňuje rovnost $N_0 \times \{0\} = N \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$, takže $F_A(N) = E_A(N_0)$. Zavedeme na systému $\mathscr{B}^2$ relaci ekvivalence takto: $N \sim N'$, jestliže $N_0 = N_0'$. Označíme-li $[N]$ třídu všech množin, které jsou ekvivalentní danému $N \in \mathscr{B}^2$, je zřejmé, že zobrazení $[N] \mapsto N_0$ je bijekce systému všech tříd ekvivalence na systém $\mathscr{B}$. V tomto smyslu lze každou třídu ztotožnit s množinou N_0. Díky vztahu $F_A(N) = E_A(N_0)$ můžeme dále zobrazení $[N] \mapsto \tilde{F}_A([N]) := F_A(N)$ ztotožnit s projektorovou mírou $E_A(.)$.

• Větu 10.2.6 lze odvodit nezávisle na spektrálním teorému pro hermitovské operátory. Postup je analogický jako v § 10.1, nyní se ovšem rozšiřuje zobrazení, které přiřazuje každému trigonometrickému polynomu $T \equiv \sum_{k=-n}^{n} c_k \eta^k$ operátor $\dot{T}(U) := \sum_{k=-n}^{n} c_k U^k$ (viz [[AG]], §§ 77–78.).

§ **10.3** • Vedle von Neumannova postupu užívajícího Cayleyovy transformace existují další způsoby důkazu spektrálního teorému – viz např. [[RN]], § 120; [[We]], § 7.3.

§ **10.4** • Pro vyšetřování stability esenciálního spektra samosdruženého operátoru (a rovněž stability samosdruženosti, o níž jsme se již zmínili v závěru § 7.3) se často užívá pojmu relativní kompaktnosti. Operátor T (obecně neomezený) je **relativně kompaktní** vůči samosdruženému operátoru A, jestliže $D_T \supset D_A$ a operátor $TR_A(\mathrm{i})$ je kompaktní.[1]) Stručněji říkáme, že *operátor T je A-kompaktní.* Uvedeme základní vlastnosti relativní kompaktnosti.

(i) Jestliže T je A-kompaktní, potom z každé posloupnosti $\{x_n\} \subset D_A$ splňující nerovnost $\|x_n\|^2 + \|Ax_n\|^2 \leqq c$ pro $n = 1, 2, \ldots$, lze vybrat posloupnost $\{x_{n_k}\}$ tak, že $\{Tx_{n_k}\}$ je konvergentní.

Skutečně, položíme-li $y_n := (A - \mathrm{i})\, x_n$, plyne z rovnoběžníkové rovnosti $\|y_n\|^2 \leqq 2\|Ax_n\|^2 + 2\|x_n\|^2$, tj. $\{y_n\}$ je omezená, a proto $\{TR_A(i)\, y_{n_k}\} = \{Tx_{n_k}\}$ je konvergentní (snadno se ověří, že pro každý operátor T splňující $D_T \supset D_A$ lze toto tvrzení obrátit).

(ii) Jestliže T je A-kompaktní, $A + T$ je samosdružený a T je $(A + T)$-omezený, potom T je $(A + T)$-kompaktní.

Toto tvrzení snadno plyne z příslušných definic (viz § 7.3). Pro libovolnou omezenou posloupnost $\{y_n\}$ položíme $x_n := R_{A+T}(\mathrm{i})\, y_n \in D_{A+T} = D_A$. Jelikož T je $(A + T)$-omezený, existují reálná α, β takové, že $\|Tx_n\|^2 \leqq \alpha^2\|x_n\|^2 + \beta^2\|(A + T)\, x_n\|^2$ pro všechna n; dále $\|(A + T)\, x_n\|^2 = \|y_n + \mathrm{i}x_n\|^2 \leqq 2\|y_n\|^2 + 2\|R_{A+T}(\mathrm{i})\|^2\, \|y_n\|^2$ a z těchto nerovností snadno vyplývá, že posloupnost $\{\|x_n\|^2 + \|Ax_n\|^2\}$ je omezená. Podle (i) existuje posloupnost $\{x_{n_k}\}$, pro niž $\{Tx_{n_k}\} = \{TR_{A+T}(\mathrm{i})\, y_{n_k}\}$ je konvergentní; operátor $TR_{A+T}(\mathrm{i})$ je tedy kompaktní.

(iii) Jestliže symetrický operátor S je A-kompaktní, potom $A + S$ je samosdružený a S je $(A + S)$-kompaktní.

Při důkazu tohoto tvrzení vyjdeme z toho, že pro každé $x \in D_A$ a $n = 1, 2, \ldots$ platí

$$\|Sx\| = \|SR_A(\mathrm{i}n)\,(A - \mathrm{i}n)\, x\| \leqq b_n(\|Ax\| + n\|x\|)\,, \quad \text{kde } b_n := \|SR_A(\mathrm{i}n)\|\,.$$

Ukážeme, že $b_n \to 0$. Uvažujme omezené operátory $B_n := I - \mathrm{i}(n-1)\, R_A(-\mathrm{i}n) = (A + \mathrm{i})\, R_A(-\mathrm{i}n)$; pro libovolné $y \in \mathscr{H}$ plyne z formule (9.4.4), důsledku 10.3.3 a cvičení 9.17

[1]) Z první rezolventní formule (cvičení 3.32) a věty 6.1.3 plyne, že operátor $TR_A(\lambda)$ je potom kompaktní pro všechna $\lambda \in \varrho(A)$.

$$\|B_n y\|^2 = \int |t + \mathrm{i}|^2 \,\mathrm{d}\mu_{R_A(-\mathrm{i}n)y} = \int \left| \frac{t+\mathrm{i}}{t + \mathrm{i}n} \right|^2 \mathrm{d}\mu_y = \int \frac{t^2 + 1}{t^2 + n^2} \,\mathrm{d}\mu_y \,,$$

a odtud pomocí Lebesgueovy věty dostáváme $\|B_n y\| \to 0$, tj. $\text{s-lim}\, B_n = 0$. Jelikož spolu s operátorem $SR_A(\mathrm{i})$ je kompaktní i $(SR_A(\mathrm{i}))^*$, z výsledku cvičení 6.3 plyne $\|B_n(SR_A(\mathrm{i}))^*\| \to 0$, a tedy také $\|SR_A(\mathrm{i})\, B_n^*\| \to 0$. Nyní $B_n^* = I + \mathrm{i}(n-1)\, R_A(\mathrm{i}n) = (A - \mathrm{i})\, R_A(\mathrm{i}n)$, takže $b_n = \|SR_A(\mathrm{i}n)\| = \|SR_A(\mathrm{i})\, B_n^*\| \to 0$. To znamená, že operátor S je A-omezený s nulovou A-mezí, a z Katovy-Rellichovy věty plyne, že $A + S$ je samosdružený. Dále pro dosti velké n je $b_n < \frac{1}{2}$, takže $\|Sx\| \leqq \frac{1}{2}(\|Ax\| + n\|x\|)$ pro všechna $x \in D_A$. Potom

$$\|(S + A)\, x\| + n\|x\| \geqq \|Ax\| - \|Sx\| + n\|x\| \geqq \|Sx\| \,,$$

tj. S je $(A + S)$-omezený a podle (ii) S je $(A + S)$-kompaktní.

Z tvrzení (iii) dostáváme následující větu o stabilitě σ_{ess}. *Esenciální spektrum samosdruženého operátoru A je stabilní vůči symetrické A-kompaktní poruše S,* tj.

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(A) = \sigma_{\mathrm{ess}}(A + S)\,.$$

K ověření užijeme věty 6b. V podstatě stačí ukázat, že $Sx_n \to 0$ pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující předpoklady zmíněné věty. To je díky kompaktnosti operátoru $SR_A(\mathrm{i})$ ekvivalentní podmínce $\text{w-lim}_{n\to\infty} (A - \mathrm{i})\, x_n = 0$. Jelikož $\text{w-lim}_{n\to\infty} x_n = 0$, pro každé $y \in D_A$ platí

$$(y, (A - \mathrm{i})\, x_n) = ((A + \mathrm{i})\, y, x_n) \to 0\,.$$

Nechť $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$; potom je posloupnost $\{(A - \mathrm{i})\, x_n\}$ omezená, neboť $\|(A - \mathrm{i})\, x_n\| \leqq \|(A - \lambda)\, x_n\| + |\lambda - \mathrm{i}|\, \|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} |\lambda - \mathrm{i}|$, a díky tomu, že $\overline{D}_A = \mathscr{H}$, plyne vztah $\text{w-lim}_{n\to\infty} (A - \mathrm{i})\, x_n = 0$ z věty 3.5.3c. Platí tedy inkluze $\sigma_{\mathrm{ess}}(A) \subset \sigma_{\mathrm{ess}}(A + S)$, a protože podle (iii) operátor A je $(A + S)$-kompaktní, můžeme role operátorů A a $A + S$ vyměnit, čímž dostaneme rovnost $\sigma_{\mathrm{ess}}(A) = \sigma_{\mathrm{ess}}(A + S)$.

Bohatý materiál o stabilitě esenciálního spektra se speciálním zaměřením na Schrödingerovy operátory lze najít v [[RS 4]], § XIII.4. Systematicky je tato problematika vyložena též ve [[We]], § 9.2.

• Uvedeme příklad samosdruženého operátoru A, pro nějž množiny $\sigma_{\mathrm{p}}(A)$ a $\sigma(A \restriction \mathscr{H}_{\mathrm{p}}^{\perp})$ nejsou disjunktní (srv. s poznámkou 12). Uvažujme operátor Q násobení nezávisle proměnnou na $L^2(0, 1)$ a libovolný projektor na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$. Operátor A na $\mathfrak{H} := \mathscr{H} \oplus L^2(0, 1)$ definujeme vztahem $A[x, \psi] := [Ex, Q\psi]$, tj. $A = E \oplus Q$ (viz komentář k § 7.4). Přímým výpočtem se ověří, že A je hermitovský a je redukován uzavřenými podprostory $\mathfrak{H}_1 := \{[x, 0] : x \in \mathscr{H}\}$ a $\mathfrak{H}_2 := \{[0, \psi] : \psi \in L^2(0, 1)\} = \mathfrak{H}_1^{\perp}$. Dále pro izomorfismy $U_1 : \mathfrak{H}_1 \to \mathscr{H}$, resp.

 U_2: $\mathfrak{H}_2 \to L^2(0,1)$ definované vztahy $U_1[x,0] := x$, $x \in \mathscr{H}$, resp. $U_2[0,\psi] := \psi$, $\psi \in L^2(0,1)$, platí $U_1^{-1}EU_1 = A \upharpoonright \mathfrak{H}_1$ a $U_2^{-1}QU_2 = A \upharpoonright \mathfrak{H}_2$. Je zřejmé, že 0 a 1 jsou jedinými vlastními hodnotami operátoru A, přičemž odpovídající vlastní podprostory jsou $\{[(I-E)\,x,0]: x \in \mathscr{H}\}$ a $\{[Ex,0]: x \in \mathscr{H}\}$. Potom $\mathfrak{H}_p^\perp = \mathfrak{H}_2$ a $A \upharpoonright \mathfrak{H}_p^\perp = U_2^{-1}QU_2$, takže $\sigma(A \upharpoonright \mathfrak{H}_p^\perp) = \sigma(Q) = [0,1]$ (viz poznámku 7.4.11 a příklad 5.6.6b). Pro operátor A tedy platí $\sigma_p(A) \cap \sigma(A \upharpoonright \mathfrak{H}_p^\perp) = \sigma_p(A) = \{0,1\}$.

§ **10.5** • Nechť A je hermitovský operátor a funkce φ: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ má Taylorův rozvoj $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(0)\,(x^n/n!)$ s poloměrem konvergence $r > \|A\|$. Jelikož $\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$, patří φ do $L^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{d}E_A)$ a posloupnost $\{\varphi_N\}$, $\varphi_N(x) := \sum_{n=0}^{N} \varphi^{(n)}(0)\,(x^n/n!)$, konverguje k φ vzhledem k normě v $L^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{d}E_A)$. Z věty 9.3.3 plyne $\varphi_N(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(0)\,(A^n/n!)$ a $\|\varphi(A) - \varphi_N(A)\| \to 0$, takže (srov. s komentářem k § 3.6)

$$\varphi(A) = \operatorname*{u-lim}_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \varphi^{(n)}(0)\,\frac{A^n}{n!}\,.$$

Cvičení

1. Ověřte implikaci (10.1.2b).
Návod: Každý kořen polynomu P ležící v intervalu (m_A, M_A) má sudou násobnost, takže $P(t) = a\prod_i (b_i - t)\prod_j (t - c_j)\prod_k [(t-d_k)^2 + e_k^2]$, kde $a > 0$, $b_i \geqq M_A$ a $c_j \leqq m_A$. Dále užijte multiplikativitu a důsledek 5.3.7b.

2. Do množiny $\mathscr{K}$ definované vztahem (7a) patří všechny reálné funkce spojité na J_A.
Návod: Jestliže $\varphi \in C(J_A)$, potom $(|\varphi| \pm \varphi)/2 \in C(J_A)$.

3. Pro každé $u \in J_A$ sestrojte k funkci e_u: $J_A \to \mathbb{R}$, kde $e_u(t) := \chi_{[m_A,u]}(t)$, posloupnost $\{f_n\} \subset C[m_A, M_A]$ takovou, že $\{f_n(t)\}$ je nerostoucí a $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = e_u(t)$, $t \in J_A$.

4. Nechť funkce $\varphi \in \mathscr{K}$ splňuje nerovnost $|\varphi(t)| < \varepsilon$ pro všechna $t \in J_A$; potom $\|T_A(\varphi)\| < \varepsilon$.
Návod: Viz vztahy (5.3.7,8).

5. Jestliže $E(.)$ je spektrální míra hermitovského operátoru A, potom pro každou funkci f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že $f \upharpoonright J_A \in \mathscr{K}_0$, platí

$$f \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{d}E) \quad \text{a} \quad \mathscr{T}_b^{(E)}(f) = T_A(f \upharpoonright J_A)\,.$$

Návod: Užijte tvrzení (e) věty 9.3.3.

6. (i) Pro každé $c \in \mathbb{R}$ je spektrální rozklad $E_c(.)$ operátoru cI určen vztahem $E_c(\{c\}) = I$.
(ii) Najděte spektrální rozklad libovolného projektoru.
Návod: Viz příklad 10.2.3.

7. Nechť A je hermitovský operátor; ke každému intervalu $J \subset \mathbb{R}$ existují reálné polynomy P_n, $n = 1, 2, \ldots$, takové, že $E_A(J) = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} P_n(A)$.
Návod: Pro každé $t \in J_A$ platí $\chi_{[m_A,t]} \upharpoonright J_A \in \mathscr{K}_0$ (viz cvičení 3) a $\chi_{[m_A,t]} \upharpoonright J_A = (\chi_{[m_A,t]} - \chi_{\{t\}}) \upharpoonright J_A \in \mathscr{K}$. Dále užijte výsledků cvičení 5 a tvrzení 10.1.3b.

8. Je dán unitární operátor U se spektrální mírou $E_U(.)$ a komplexní číslo $\lambda \equiv e^{i\alpha}$, kde $0 \leqq \alpha < 2\pi$. Dokažte, že $\lambda \in \sigma_p(U)$ právě tehdy, když $E_U(\{\alpha\}) \neq 0$; pro příslušný vlastní podprostor potom platí $N_U(\lambda) = \operatorname{Ran} E_U(\{\alpha\})$.

9. Dokažte následující vlastnost kvazipolynomiálních funkcí $P(F) \equiv \sum_{k=-M}^{N} a_k F^k$, kde $a_k \in \mathbb{C}$ a $N, M \geqq 0$, Fourierova-Plancherelova operátoru F na $L^2(\mathbb{R}^d)$: jestliže posloupnost $\{P_n(F)\}$ silně konverguje, potom existují $c_j \in \mathbb{C}$, $0 \leqq j \leqq 3$, taková, že $\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} P_n(F) = \sum_{j=0}^{3} c_j F^j$.
Návod: Užijte vztah $F^4 = I$ a napište podmínku cauchyovosti posloupnosti $P_n(F)\,\psi$ pro jednotkové vektory $\psi = \varphi_k$, kde $F\varphi_k = i^k \varphi_k$, $0 \leqq k \leqq 3$.

10. Projektorová míra $E_A(w^{(-1)}(.))$ z tvrzení 10.3.1 je generována rozkladem jedničky $\{F_s\}$, kde

$$F_s := \begin{cases} E_{\operatorname{tg}(s-\pi)/2}, & s \in (0, 2\pi) \\ 0, & s \in (-\infty, 0] \\ I, & s \in [2\pi, \infty) \end{cases}.$$

11. Samosdružené (obecně neomezené operátory) A, A' komutují právě tehdy, když pro všechna $\lambda, \mu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ platí $R_A(\lambda)\, R_{A'}(\mu) = R_{A'}(\mu)\, R_A(\lambda)$.
Návod: Viz větu 7.4.6.

12. Pomocí formule (10.4.2) dokažte vztahy $\inf \Theta(A) = \inf \sigma(A)$ a $\sup \Theta(A) = \sup \sigma(A)$ (užíváme konvence $\inf M := -\infty$, resp. $\sup M := +\infty$, jestliže množina $M \subset \mathbb{R}$ není omezená zdola, resp. shora).

13. S označením z § 10.4 pro každý samosdružený operátor A platí $\sigma_{ac}(A) \cup \sigma_{sc}(A) = \sigma(A \upharpoonright \mathscr{H}_p^\perp)$.

14. Užijeme předpokladů a označení z příkladu 10.3.5. Dokažte, že každá funkce definovaná na množině $\sigma_p(A)$ patří do $\Phi^{(A)}$, definiční obor operátoru $\varphi(A)$ je tvořen právě všemi $x \in \mathscr{H}$, pro něž $\sum_j |\varphi(\lambda_j)|^2 (x, P_j x) < \infty$, a pro každé $x \in D(\varphi(A))$ platí

$$\varphi(A)\, x = \sum_j \varphi(\lambda_j)\, P_j x\,.$$

Speciálně $\varphi \in L^{\infty}(\mathbb{R}, \mathrm{d}E_A)$ právě tehdy, když posloupnost $\{\varphi(\lambda_j)\}$ je omezená; potom $\varphi(A) = \sum_j \varphi(\lambda_j) P_j$ ve smyslu silné operátorové topologie, přičemž řada obecně nekonverguje stejnoměrně.

Návod: Pomocí vět 9.4.10d a 9.4.8c ukažte, že operátory P_j komutují s $\varphi(A)$ a $\varphi(A) P_j = (\varphi\chi_{\{\lambda_j\}})(A) = \varphi(\lambda_j) P_j$.

15. (i) Pro daný omezený interval $J \subset \mathbb{R}$ najděte funkcionální realizaci operátoru $E_P(J)$, kde $E_P(.)$ je spektrální míra operátoru P na $L^2(\mathbb{R})$.

(ii) Najděte funkcionální realizaci rozkladu jedničky $\{E_t^{(P^2)}\}$.

(iii) Pro samosdružený operátor A na $\mathscr{H}$ odvoďte následující formuli vyjadřující pro libovolné $x \in \mathscr{H}$ souvislost rezolventy $R_A(z)$, $\operatorname{Im} z \neq 0$ a propagátoru $\{U(s) \equiv \mathrm{e}^{-\mathrm{i}As}: s \in \mathbb{R}\}$

$$R_A(z)\, x = \mathrm{i} \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z) \int_{J_z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}zs}\, U(s)\, x \,\mathrm{d}s\,,$$

kde $J_z := (-\infty, 0)$ pro $\operatorname{Im} z < 0$ a $J_z := (0, +\infty)$ pro $\operatorname{Im} z > 0$.

Návod: (ii) Pro $t \geqq 0$ platí $E_t^{(P^2)} = E_P(-\sqrt{t}, \sqrt{t})$.

(iii) Obměňte postup důkazu tvrzení 9.3.8.

16. Je dán samosdružený operátor A a borelovská funkce $w: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Potom platí implikace $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A) \Rightarrow w(\lambda) \in \sigma_{\mathrm{p}}(w(A))$, ale nikoliv implikace opačná.

17. Jestliže samosdružený operátor A je pozitivní, potom podprostor D_A je oborem podstatné samosdruženosti operátoru $A^{1/2}$, tj. $\overline{A^{1/2} \upharpoonright D_A} = A^{1/2}$.

Návod: Pro dané $x \in D(A^{1/2})$ sestrojte posloupnost $n \mapsto x_n := E_A[0, n)\, x$, a ukažte, že $\sqrt{A} x_n \to \sqrt{A} x$.

18. Dokažte, že pro každé $x \in \mathscr{H}$ a každý omezený interval $J \subset \mathbb{R}$ je podprostor $\mathscr{G}(x)$ z lemmatu 10.5.8 $E_A(J)$-invariantní.

19. Samosdružený operátor má hustou množinu analytických vektorů.

Návod: Pro libovolné $x \in \mathscr{H}$ a přirozené n je vektor $E_A(-n, n)\, x$ analytickým vektorem operátoru A a platí $x = \lim_{n \to \infty} E_A(-n, n)\, x$.

20. Najděte symetrický operátor A takový, že $C^{\infty}(A) = \{0\}$.

Návod: Na prostoru $L^2(0, \pi)$ uvažujte lineární rozšíření P_0 operátoru definovaného na $\{s_k: k = 1, 2, \ldots\}$, kde $s_k(x) := \sqrt{2/\pi} \sin kx$, vztahem $(P_0 s_k)(x) = -\mathrm{i}k \sqrt{2/\pi} \cos kx$.

21. Je dán symetrický operátor A na $\mathscr{H}$ a podprostor $D \subset D_A$, který je A-invariantní. Předpokládejme, že analytické vektory operátoru A, které leží v D, tvoří hustou množinu; potom operátor $A \upharpoonright D$ je v podstatě samosdružený.

22. Jestliže operátory T a S jsou unitárně ekvivalentní, $T = USU^{-1}$, a x je analytický vektor operátoru S, potom Ux je analytický vektor operátoru T a platí $r_S(x) = r_T(Ux)$.

23. Každý z vektorů h_n daných formulemi (4.3.4) je analytickým vektorem operátorů Q a P na $L^2(\mathbb{R})$ a podprostor $\{h_n: n = 0, 1, \dots\}_{\text{lin}}$ je oborem podstatné samosdruženosti obou těchto operátorů.
Návod: Funkce $x \mapsto \varphi_n(x) := e^{-x^2/2}x^n$, $n = 0, 1, \dots$ patří do $C^\infty(Q)$, přičemž $\|Q^k\varphi_n\|^2 = \Gamma(k + n + \frac{1}{2}) \leqq \sqrt{\pi}(k + n)!$. Pro operátor P užijte vztahů (7.4.8) a (4.3.5).

24. (i) Nechť operátory $A_1, \dots, A_d \in \mathscr{L}_{\text{sa}}(\mathscr{H})$ komutují a $E(.)$ je direktní součin jejich spektrálních měr; nechť konečně $w: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení splňující předpoklady z cvičení 9.2, takže $E_w(.) \equiv E(w^{-1}(.))$ je projektorová míra na $\mathbb{R}^n$. Potom pro každou borelovskou funkci $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ platí $(\varphi \circ w)(A_1, \dots, A_d) = \varphi(A_1', \dots, A_n')$, kde $A_j' := w_j(A_1, \dots, A_d)$.
(ii) Jestliže operátory $A, A' \in \mathscr{L}_{\text{sa}}(\mathscr{H})$ komutují, pak pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$ platí $e^{i\lambda A}e^{i\lambda A'} = e^{i\lambda\, \mathrm{id}_\Sigma(A, A')}$, kde $\mathrm{id}_\Sigma(u, v) := u + v$. Proč obecně nelze pravou stranu této rovnosti zapsat jako $e^{i\lambda(A+A')}$?
Návod: (i) Ukažte, že projektorová míra $E_w(.)$ je direktním součinem projektorových měr $E_{w_1}(.), \dots, E_{w_n}(.)$ – viz (9.2.7,8); dále užijte tvrzení 9.4.12 a příkladu 10.3.6.

25. Dokažte rovnost (10.7.6a).
Návod: Jestliže pro $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ a každý omezený interval $J \subset \mathbb{R}^2$ platí $BP(J) = P(J)B$, potom komplexní míry $\nu^{(P)}_{B^*x,y}$ a $\nu^{(P)}_{x,By}$ jsou totožné pro všechna $x, y \in \mathscr{H}$.

26. Nechť $A \in \mathscr{L}_{\text{sa}}(\mathscr{H})$ a $n \geqq 2$; potom pro libovolné $x \in D(A^n)$ a všechna přirozená $k \leqq n$ platí $\|A^kx\| \leqq \|A^nx\|^{k/n}\,\|x\|^{(n-k)/n}$
Návod: Užijte rovnost $\|A^kx\|^2 = \int t^{2k}\, d\mu_x(t)$.

27. Jestliže $E(.)$ je projektorová míra na $\mathbb{R}^d$ s hodnotami v $\mathscr{B}(\mathscr{H}_1)$ a I_2 je jednotkový operátor na $\mathscr{H}_2$, potom zobrazení $M \mapsto E(.) \otimes I_2$, $M \in \mathscr{B}^d$, je projektorová míra na $\mathbb{R}^d$ s hodnotami v $\mathscr{B}(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2)$.
Návod: K ověření σ-aditivity užijeme tvrzení (ii) ze cvičení 3.22.

28. Dokažte následující vztahy ilustrující příbuznost operátorů A_r a $\bar{\boldsymbol{A}}_r$ pro $A_r \in \mathscr{L}_{\text{sa}}(\mathscr{H}_r)$, $r = 1, 2$ (srv. s lemmatem 10.8.4):
(i) $\sigma_p(A_r) = \sigma_p(\bar{\boldsymbol{A}}_r)$;
(ii) má-li operátor A_r čistě bodové spektrum, platí totéž o operátoru $\bar{\boldsymbol{A}}_r$;
(iii) je-li $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ omezená borelovská funkce, potom $\varphi(\bar{\boldsymbol{A}}_1) = \varphi(A_1) \otimes I_2$ a $\varphi(\bar{\boldsymbol{A}}_2) = I_1 \otimes \varphi(A_2)$.
(iv) $f(\bar{\boldsymbol{A}}_1) = \overline{f(A_1) \otimes I_2}$ a $f(\bar{\boldsymbol{A}}_2) = \overline{I_1 \otimes f(A_2)}$ pro každou reálnou borelovskou funkci f.
Návod: (iii), (iv) viz důkaz lemmatu 10.8.4a.

29. Jestliže V je izomorfismus Hilbertových prostorů $\mathscr{H}$ a $\mathscr{H}'$ a $y \in \mathscr{H}$ je generující vektor samosdruženého operátoru A, potom $y' := Vy$ je generující vektor operátoru VAV^{-1}.
Návod: Viz příklad 10.3.7 a cvičení 5.4.

30. Nechť operátor $A \in \mathscr{L}_{\mathrm{sa}}(\mathscr{H})$ má jednoduché spektrum a operátor Q_μ na $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu)$ je jeho spektrální reprezentace; potom pro libovolnou borelovskou funkci $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je operátor $\varphi(A)$ unitárně ekvivalentní operátoru násobení funkcí φ na $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu)$.
Návod: Viz cvičení 9.21 a příklad 10.5.1.

31. Na základě věty 10.9.3 dokažte:
(i) pro každé $x \in \mathscr{H}$ je míra $\mu_x(.) := (x, E_A(.)\,x)$ generována funkcí $\psi_x := Vx$ a mírou μ, tj. $\mu_x(M) = \int_M |\psi_x|^2\,\mathrm{d}\mu$ pro všechna $M \in \mathscr{B}$. Speciálně každá μ-nulová množina je E_A-nulová, takže platí inkluze $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu) \subset \Phi^{(A)}$;
(ii) pro každé $\psi \in L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu)$ patří generující vektor y do definičního oboru operátoru $\psi(A)$ a platí $V^{-1}\psi = \psi(A)\,y$. Z této rovnosti mj. plyne, že pro každou totální množinu $\Psi \subset L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu)$ je množina $\{\psi(A)\,y\colon \psi \in \Psi\}$ totální v $\mathscr{H}$.
Návod: (i) Jestliže $\int_R |\psi_x - \sigma_n|^2\,\mathrm{d}\mu \to 0$ pro nějakou posloupnost $\{\sigma_n\} \subset S$, potom $\sigma_n(A)\,y \to x$ a pro každé $M \in \mathscr{B}$ platí $\int_{\mathbb{R}} |\psi_x|^2\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |\chi_M s_n|^2\,\mathrm{d}\mu$.
(ii) Užijte první z rovností (10.9.6) pro operátor $\psi(A) - \sigma_n(A)$, kde $\sigma_n \in S$ a $\int_{\mathbb{R}} |\psi - \sigma_n|^2\,\mathrm{d}\mu \to 0$.

32. Jestliže y je generující vektor operátoru $A \in \mathscr{L}_{\mathrm{sa}}(\mathscr{H})$, potom pro každý omezený operátor B takový, že $BA \subset AB$ a $\operatorname{Ran} B = \mathscr{H}$, je množina $\{E_A(J)\,By\colon J \in \mathscr{J}\}$ totální v $\mathscr{H}$.

33. Jestliže k danému $A \in \mathscr{L}_{\mathrm{sa}}(\mathscr{H})$ existuje $y \in \mathscr{H}$ a množina $\Phi \subset \Phi^{(A)}$ taková, že $y \in D(\varphi(A))$ pro všechna $\varphi \in \Phi$ a $\overline{\{\varphi(A)\,y\colon \varphi \in \Phi\}_{\mathrm{lin}}} = \mathscr{H}$, potom má operátor A jednoduché spektrum.
Návod: Viz důkaz tvrzení 10.9.5.

34. Spektrum *hermitovského* operátoru A je jednoduché právě tehdy, když $\{A^n y\colon n = 0, 1, \dots\}$ je totální množina pro nějaké $y \in \mathscr{H}$.
Návod: Nutná podmínka: stačí ukázat, že polynomy na $[m_A, M_A]$ tvoří hustou množinu v $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu)$ (viz cvičení 31); užijte příklad 3.1.7 a Weierstrassovu větu. Postačující podmínka – viz cvičení 33.

35. Jestliže $A \in \mathscr{L}_{\mathrm{sa}}(\mathscr{H})$ a existuje $y \in \mathscr{H}$ takové, že $\overline{\{By\colon B \in \{A\}''\}} = \mathscr{H}$, potom ke každému hermitovskému $C \in \{A\}'$ a kladnému ε existuje hermitovský operátor $B \in \{A\}''$ takový, že $\|(C - B)\,y\| < \varepsilon$.
Návod: Pro každé $\tilde{B} \in \{A\}''$ platí $\tilde{B}^* \in \{A\}''$ a díky komutativitě $\{A\}''$ je $C - \tilde{B}$ normální.

11.1 SPOJITÉ JEDNOPARAMETRICKÉ GRUPY UNITÁRNÍCH OPERÁTORŮ. STONEŮV TEORÉM

Množinu $\{U(s): s \in \mathbb{R}\}$ unitárních operátorů na daném $\mathscr{H}$ nazýváme **silně spojitou jednoparametrickou grupou unitárních operátorů** (stručněji unitární grupou), jestliže zobrazení $s \mapsto U(s)$ je spojité v silné operátorové topologii a pro všechna $t, s \in \mathbb{R}$ platí

$$U(t + s) = U(t)\, U(s)\,. \tag{1a}$$

Z této podmínky vyplývá komutativita množiny $\{U(s): s \in \mathbb{R}\}$; díky unitaritě dostáváme dále vztahy

$$U(0) = I\,, \qquad U(-s) = U(s)^{-1} = U(s)^*\,. \tag{1b}$$

Vidíme tedy, že množina $\{U(s): s \in \mathbb{R}\}$ je podgrupou[1]) v grupě $U(\mathscr{H})$ všech unitárních operátorů na daném $\mathscr{H}$ (viz cvičení 5.28).

Operátor T definovaný na podprostoru

$$D \equiv D_T := \left\{ x \in \mathscr{H}\colon \text{ existuje } \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} (U(s) - I)\, x \right\} \tag{2a}$$

vztahem

$$Tx := \lim_{s \to 0} \frac{1}{\mathrm{i}s} (U(s) - I)\, x \tag{2b}$$

nazýváme (infinitezimálním) **generátorem** unitární grupy $\{U(s): s \in \mathbb{R}\}$. Podprostor D je neprázdný (obsahuje alespoň nulový vektor), takže generátor vždy existuje; je zřejmé, že je unitární grupou jednoznačně určen. Z grupové podmínky (1a) dále pro každé $s \in \mathbb{R}$ plyne

$$U(s)\, D \subset D \tag{2c}$$

a

$$TU(s)\, x = U(s)\, Tx = \lim_{h \to 0} \frac{U(s+h) - U(s)}{\mathrm{i}h}\, x = -\mathrm{i}\, \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s}(s)\, x\,. \tag{2d}$$

[1]) Z podmínky (1a) plyne, že zobrazení $s \mapsto U(s)$ je unitární reprezentace grupy translací reálné osy (viz komentář k § 3.4).

Generátor je klíčovým pojmem a za okamžik se k vyšetřování jeho vlastností vrátíme. Nejprve však probereme následující příklad unitární grupy.

11.1.1 Tvrzení: Jestliže A je samosdružený operátor, potom množina

$$\{\exp(isA): s \in \mathbb{R}\} \tag{3}$$

je silně spojitá unitární grupa a operátor A je její generátor.

Důkaz: Nechť $E(.)$ je spektrální míra operátoru A; pro každé $s \in \mathbb{R}$ označíme funkci $u \mapsto \exp(isu)$ symbolem η_s, tj. $\eta_s(u) = \exp(isu)$, $u \in \mathbb{R}$. Jelikož $|\eta_s(u)| = 1$ pro všechna $s, u \in \mathbb{R}$, jsou operátory $e^{isA} \equiv \eta_s(A)$ unitární (viz cvičení 9.11); dále ze vztahu $\eta_s\eta_t = \eta_{s+t}$ a tvrzení (a) věty 9.3.3 dostáváme grupovou podmínku (1a). Konečně silná spojitost plyne z tvrzení (d) zmíněné věty. Nechť operátor T je generátorem uvažované grupy; zbývá ověřit, že $T = A$. Pro každé reálné $s \neq 0$ je funkce $\varphi_s := (1/is)(\eta_s - 1)$ spojitá a omezená, takže $\varphi_s \in L^\infty(\mathbb{R}, dE)$. Nechť $x \in D_A$; pomocí rovnosti (9.4.4) dostáváme

$$\|(\varphi_s(A) - A)\,x\|^2 = \int |\varphi_s - \mathrm{id}|^2\, d\mu_x\,. \tag{4}$$

Ježto pro každé $s \neq 0$ platí odhad $|\varphi_s - \mathrm{id}| \leqq |\varphi_s| + |\mathrm{id}| \leqq 2|\mathrm{id}|$, dále $\mathrm{id} \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_x)$ pro $x \in D_A$ a $\lim_{s\to 0} \varphi_s(u) = u$ pro všechna $u \in \mathbb{R}$, plyne z Lebesgueovy věty a rovnosti (4), že $\lim_{s\to 0} \varphi_s(A)\,x$ existuje a je rovna Ax; platí tedy inkluze $A \subset T$. Nechť nyní $x \in D_T$, tj. existuje $\lim_{s\to 0} \varphi_s(A)\,x = y$. Pak pro všechna dosti malá $s \neq 0$ máme

$$\int |\varphi_s|^2\, d\mu_x < (\|y\| + 1)^2\,,$$

a protože $\lim_{s\to 0} |\varphi_s(u)|^2 = u^2$, dostáváme pomocí Fatouova lemmatu podmínku $\mathrm{id} \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_x)$, tj. $x \in D_A$. ∎

Ukazuje se, že množinami tvaru (3), kde A je libovolný samosdružený operátor na daném $\mathscr{H}$, jsou vyčerpány všechny (silně spojité) unitární grupy na $\mathscr{H}$. To je obsahem následující věty, která je svým významem pro teorii a aplikace srovnatelná se spektrálním teorémem.

11.1.2 Věta (*Stoneův teorém*): Ke každé silně spojité unitární grupě $\{U(s): s \in \mathbb{R}\}$ existuje právě jeden samosdružený operátor A takový, že $U(s) = \exp(isA)$ pro všechna $s \in \mathbb{R}$.

Důkaz: Jednoznačnost je důsledkem existence operátoru A s uvedenými vlastnostmi; z tvrzení 1 totiž plyne, že A je generátorem uvažované unitární grupy.

Ke konstrukci operátoru A užijeme formule (2b) pro jistou speciální množinu vektorů, která je hustá v $\mathscr{H}$. Získáme tak hustě definovaný operátor A_0, o němž ukážeme, že je v podstatě samosdružený. Nakonec ověříme, že pro všechna $s \in \mathbb{R}$ platí $\exp(is\bar{A}_0) = U(s)$.

Pro libovolné $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ a $x \in \mathscr{H}$ definujeme vektor $x_f \in \mathscr{H}$ vztahem

$$x_f := \int_{\mathbb{R}} f(t)\, U(t) x \; \mathrm{d}t\,; \tag{5}$$

existence integrálu je důsledkem spojitosti funkce $t \mapsto f(t)\, U(t) x$ (viz cvičení 3.38) a vztahu $\|f(t)\, U(t) x\| \leqq \|f\|_\infty \chi_K(t) \|x\|$, kde $K \subset \mathbb{R}$ je (kompaktní) nosič funkce f, takže χ_K je integrabilní. Speciálně můžeme zvolit $f \equiv j_\varepsilon$, kde funkce $t \mapsto j_\varepsilon(t)$ je pro každé $\varepsilon > 0$ určena vztahem $j_\varepsilon(t) := c_\varepsilon\, j(t/\varepsilon)$, formulí (2.6.7) a normalizační podmínkou $\int_{\mathbb{R}} j_\varepsilon(t)\, \mathrm{d}t = 1$; potom pomocí nerovnosti (3.7.6) pro každé $x \in \mathscr{H}$ dostáváme

$$\|x - x_{j_\varepsilon}\| \leqq \int_{\mathbb{R}} j_\varepsilon(t)\, \|(U(t) - I)\, x\| \; \mathrm{d}t \leqq \sup_{t \in [-\varepsilon, \varepsilon]} \|(U(t) - I)\, x\|\,.$$

Ze spojitosti vektorové funkce $U(.)\, x$ nyní plyne, že *podprostor* $D_0 := \{x_f : x \in \mathscr{H},\ f \in C_0^\infty(\mathbb{R})\}_{\mathrm{lin}}$ *je hustý v* $\mathscr{H}$.

Nechť T je generátor grupy $\{U(s) : s \in \mathbb{R}\}$; ukážeme, že $D_0 \subset D_T$ a $Tx_f = \mathrm{i}x_{f'}$ pro všechna $x \in \mathscr{H}$ a $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Skutečně, pro každé reálné $s \neq 0$ formule (5) dává (viz též cvičení 3.41)

$$\frac{1}{\mathrm{i}s}\,(U(s) - I)\, x_f = \frac{1}{\mathrm{i}s} \int_{\mathbb{R}} f(t)\, [U(s + t) - U(t)]\, x\, \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{i}s} \int_{\mathbb{R}} [f(t - s) - f(t)]\; U(t)\, x\, \mathrm{d}t\,.$$

Nyní pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{\mathrm{i}s}\, [f(t - s) - f(t)] = \mathrm{i}f'(t)\,,$$

přičemž funkce f' opět patří do $C_0^\infty(\mathbb{R})$, a je tudíž omezená: $|f'(t)| \leqq C_f$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Pomocí věty o přírůstku funkce získáme odhad

$$\left\| \frac{1}{\mathrm{i}s}\, [f(t - s) - f(t)]\; U(t)\, x \right\| \leqq C_f\, \chi_K(t)\, \|x\|\,,$$

 kde K je kompaktní nosič funkce f. Levá strana poslední nerovnosti má tedy integrabilní majorantu nezávislou na s a z věty 3.7.7 plyne

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{\mathrm{i}s} (U(s) - I)\, x_f = \mathrm{i} \int_{\mathbb{R}} f'(t)\, U(t)\, x \, \mathrm{d}t = \mathrm{i} x_{f'} . \tag{6}$$

Na podprostoru D_0 definujeme lineární operátor A_0 vztahem

$$A_0 := T \upharpoonright D_0 .$$

Ze vztahu (6) je vidět, že podprostor D_0 je A_0-invariantní. Pomocí (5) zjistíme, že $U(s)\, x_f = x_{f_{-s}}$, kde $f_{-s}(t) := f(t - s)$, a snadno nahlédneme, že $f_{-s} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$; podprostor D_0 je tedy rovněž $U(s)$-invariantní pro všechna $s \in \mathbb{R}$. Potom z rovnosti (2d) pro každé $z \in D_0$ dostáváme

$$A_0\, U(s)\, z = U(s)\, A_0 z = -\mathrm{i} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s}(s)\, z . \tag{7}$$

Ověříme nyní, že operátor A_0 je symetrický. Díky podmínce $\bar{D}_0 = \mathscr{H}$ stačí, aby pro libovolná $x, y \in \mathscr{H}$ a $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ platilo $(A_0 x_f, y_g) = (x_f, A_0 y_g)$; tuto rovnost dostaneme ze vztahu

$$(A_0 x_f, y_g) = \lim_{s \to 0} \left(\frac{1}{\mathrm{i}s} (U(s) - I)\, x_f, y_g \right)$$

(viz (6)) a unitarity operátorů $U(s)$.

Dále ukážeme, že $\operatorname{Ker}(A_0^* \pm \mathrm{i}) = \{0\}$, tj. že operátor A_0 je v podstatě samosdružený (viz důsledek 7.3.11). Z předpokladu existence vektoru $y \in D(A_0^*)$ splňujícího podmínku $A_0^* y = \mathrm{i} y$ dostáváme pomocí (7) pro všechna $z \in D_0$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} (y, U(s)\, z) = \left(y, \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s}(s)\, z \right) = \mathrm{i}(A_0^* y, U(s)\, z) = (y, U(s)\, z) .$$

Z této diferenciální rovnice a podmínky $U(0) = I$ plyne $(y, U(s)\, z) = (y, z)\, \mathrm{e}^s$, $s \in \mathbb{R}$. Aby tento vztah nebyl ve sporu s omezeností funkce $(y, U(.)\, z)$, musí $(y, z) = 0$ pro všechna $z \in D_0$, což spolu s podmínkou $\bar{D}_0 = \mathscr{H}$ dává $y = 0$. Podobně se ověří, že $\operatorname{Ker}(A_0^* + \mathrm{i}) = \{0\}$.

Zbývá dokázat, že samosdružený operátor $A := \bar{A}_0$ splňuje pro všechna $s \in \mathbb{R}$ rovnost $\exp(\mathrm{i}As) \equiv V(s) = U(s)$. Stačí zřejmě ověřit, že $V(s) z = U(s) z$ pro všechna $z \in D_0$. Uvažujme vektorovou funkci $s \mapsto y(s) := U(s) z - V(s) z$. Podle (7) existuje $(\mathrm{d}U/\mathrm{d}s)(s)\, z$ a rovná se $\mathrm{i}A_0\, U(s)\, z = \mathrm{i}A\, U(s)\, z$. Dále podmínka $z \in D_0 \subset D_A$ spolu s rovností $\| E_A(M)\, V(s)\, x \|^2 = \| V(s)\, E_A(M)\, x \|^2 = \| E_A(M)\, x \|^2$, $M \in \mathscr{B}$, implikuje $V(s)\, z \in D_A$ (viz důkaz věty 9.4.10d); odtud vzhledem k inkluzi $U(s)\, D_0 \subset D_0 \subset D_A$ dostáváme $y(s) \in D_A$ pro všechna $s \in \mathbb{R}$. Ježto A je generátorem grupy $\{V(s) \colon s \in \mathbb{R}\}$ (viz tvrzení 1), existuje

$(\mathrm{d}V/\mathrm{d}s)(s)\,z = \mathrm{i}A\,V(s)\,z$; potom

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}(s) = \mathrm{i}AU(s)\,z - \mathrm{i}AV(s)\,z = \mathrm{i}Ay(s)\,.$$

Odtud máme $(\mathrm{d}/\mathrm{d}s)\,\|y(s)\|^2 = -\mathrm{i}(Ay(s), y(s)) + (y(s), \mathrm{i}Ay(s)) = 0$, a protože $y(0) = 0$, je $0 = y(s) = U(s)\,z - V(s)\,z$ pro všechna $s \in \mathbb{R}$ a $z \in D_0$. ■

11.1.3 Poznámky: (a) Z formulí (2) vyplývá, že k určení generátoru dané unitární grupy $\{U(s):\ s \in \mathbb{R}\}$ stačí znát funkci $s \mapsto U(s)$ jen v nějakém (libovolně malém) okolí bodu $s = 0$. Jestliže tedy pro dvojici unitárních grup $\{U(s):\ s \in \mathbb{R}\}$ a $\{V(s):\ s \in \mathbb{R}\}$ existuje $\delta > 0$ takové, že $U(s) = V(s)$ pro všechna $|s| < \delta$, potom generátory těchto grup jsou si rovny a ze Stoneova teorému plyne $U(s) = V(s)$ pro všechna $s \in \mathbb{R}$.
(b) Nechť $\{U(s):\ s \in \mathbb{R}\}$ je množina unitárních operátorů; podle věty 10.2.6 existuje ke každému $U(s)$ hermitovský operátor $A(s)$ takový, že $U(s) = \exp(\mathrm{i}A(s))$. Mohou však existovat samosdružené operátory $\tilde{A}(s) \neq A(s)$, pro něž rovněž platí

$$U(s) = \exp(\mathrm{i}\tilde{A}(s)) \tag{8}$$

(tyto operátory ovšem nesplňují podmínky (10.2.10)). Triviálním příkladem jsou operátory $\tilde{A}(s) = A(s) + 2\pi nI$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, neboť $\exp(\mathrm{i}A(s) + 2\pi n\mathrm{i}I) = \exp(\mathrm{i}A(s))\exp(\mathrm{i}2\pi nI) = \exp(\mathrm{i}A(s))$ (viz cvičení 10.24). Jestliže nyní množina $\{U(s)\}$ splňuje podmínky Stoneova teorému, platí pro každé $s \in \mathbb{R}$ rovnost (8), jestliže $\tilde{A}(s) = sA$, přičemž operátor A nezávisí na s; je ovšem obecně neomezený.

Pomocí Stoneova teorému odvodíme užitečné vyjádření komutantu unitární grupy.

11.1.4 Tvrzení: Nechť jsou splněny předpoklady Stoneova teorému a $E_A(.)$ je spektrální míra operátoru A. Potom platí rovnosti

$$\{U(s):\ s \in \mathbb{R}\}' = \{E_A(.)\}' = \{E_t^{(A)}:\ t \in \mathbb{R}\}' = \{A\}'\,, \tag{9}$$

kde $E_t^{(A)} := E_A(-\infty, t]$, $t \in \mathbb{R}$.
Důkaz: Nechť $B \in \{E_A(.)\}'$, tj. $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ a $[B, E_A(M)] = 0$ pro každé $M \in \mathscr{B}$. Pro všechna $s \in \mathbb{R}$ platí $U(s) = \eta_s(A) = \exp(\mathrm{i}sA)$; jestliže ve větě 9.4.10d položíme $\varphi = \eta_s$, dostáváme $B \in \{U(s):\ s \in \mathbb{R}\}'$. Vzhledem k tomu, že druhá z rovností (9) plyne z lemmatu 9.2.1b a tvrzení 9.1.8d a třetí ze spektrálního teorému, stačí k dokončení důkazu ověřit inkluzi $\{U(s):\ s \in \mathbb{R}\}' \subset \{E_t^{(A)}:\ t \in \mathbb{R}\}'$. Nechť tedy $B \in \{U(s):\ s \in \mathbb{R}\}' \equiv \{\eta_s(A):\ s \in \mathbb{R}\}'$. Pro libovolné $t \in \mathbb{R}$ a přirozené $n \geqq 2$ uvažujme spojitou $2n$-periodickou funkci $f_n^{(t)}$, jejíž graf je lomená čára spojující body $[t-n, 0]$, $[t-n+1/n, 1]$, $[t, 1]$, $[t+1/n, 0]$ a $[t+n, 0]$. Snadno zjistíme, že pro každé $u \in \mathbb{R}$ platí $\lim_{n\to\infty} f_n^{(t)}(u) = \chi_{(-\infty,t]}(u)$. Podle Fejérovy věty existují trigonometrické polynomy $P_n \equiv \sum_k c_k^{(n)}\eta_k$ takové, že $\|f_n^{(t)} - P_n\|_\infty < 1/n$ pro $n = 2, 3, \dots$.

Odtud pro všechna $u \in \mathbb{R}$ a $n \geqq 2$ vyplývá $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(u) = \chi_{(-\infty,t]}(u)$ a $|P_n(u)| \leqq \leqq |f_n^{(t)}(u)| + 1/n \leqq 2$. Věta 9.3.3d potom dává $P_n(A)\, x \to \chi_{(-\infty,t]}(A)\, x = E_t^{(A)}x$ pro každé $x \in \mathscr{H}$. Vztah $[B, E_t^{(A)}] = 0$ bude tedy platit, jestliže $[B, P_n(A)] = 0$ pro všechna n; poslední rovnost je však bezprostředním důsledkem podmínky $B \in \{\eta_s(A) : s \in \mathbb{R}\}'$. ■

11.1.5 Důsledek: Samosdružené operátory A a A' komutují právě tehdy, když $[\exp(\mathrm{i}sA), \exp(\mathrm{i}tA')] = 0$ pro všechna $s, t \in \mathbb{R}$.[1])

Důkaz: Jestliže operátory A, A' komutují, tj. pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí $E_t^{(A)} \in \{E_s^{(A')}\}'$, pak pomocí (9) dostáváme $[E_t^{(A)}, U'(s')] = 0$ pro libovolné $s' \in \mathbb{R}$. Konečně věta 9.4.10d pro $\varphi = \eta_s$ dává $[U(s), U'(s')] = 0$ pro všechna $s, s' \in \mathbb{R}$. Naopak z této rovnosti podle (9) plyne $U(s) \in \{E_u^{(A')} : u \in \mathbb{R}\}'$ pro všechna $s \in \mathbb{R}$, což je ekvivalentní podmínce $E_u^{(A')} \in \{U(s) : s \in \mathbb{R}\}'$, $u \in \mathbb{R}$; užijeme-li znovu vztah (9), dostáváme $[E_u^{(A')}, E_t^{(A)}] = 0$ pro všechna $u, t \in \mathbb{R}$, což podle definice znamená, že operátory A a A' komutují. ■

11.1.6 Příklady: (a) Pro danou borelovskou funkci $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ a borelovskou míru ϱ na $\mathbb{R}^d$ uvažujme *operátory násobení funkcí* $\eta_s \circ f$, $s \in \mathbb{R}$, na $L^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}\varrho)$. Podle příkladu 9.4.5 platí $T_{\eta_s \circ f} = \int (\eta_s \circ f)\, \mathrm{d}E^{(\varrho)}$, kde pro každé $M \in \mathscr{B}^d$ projektor $E^{(\varrho)}(M)$ je operátor násobení funkcí χ_M. Stejně jako v důkazu tvrzení 1 ověříme, že množina $\{T_{\eta_s \circ f} : s \in \mathbb{R}\}$ je silně spojitá unitární grupa. Nechť A je její generátor, takže $A \in \mathscr{L}_{sa}(L^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}\varrho))$. Snadno se přesvědčíme o tom, že *A je operátor násobení funkcí f*. Jestliže totiž $\psi \in D(T_f)$, tj. $\int |f\psi|^2\, \mathrm{d}\varrho < \infty$, potom ze vztahu $|(1/s)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}sf(x)} - 1)|^2 = (4/s^2) \sin^2 [s f(x)/2] \leqq f(x)^2$, který platí pro všechna $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}^d$, vyplývá, že funkce $|(1/\mathrm{i}s)[\eta_s \circ f - 1]\, \psi - f\psi|^2$ má integrabilní majorantu $2|f\psi|^2$. Z Lebesgueovy věty a formule (2a, b) nyní dostáváme $\psi \in D_A$ a $A\psi = T_f\psi$, tj. $T_f \subset A$, a protože oba operátory jsou samosdružené, platí rovnost.

(b) Na prostoru $L^2(\mathbb{R})$ určuje pro každé $s \in \mathbb{R}$ dilatační transformace $x \mapsto \mathrm{e}^s x$ reálné osy unitární operátor $U_d(s)$ vztahem

$$(U_d(s)\, \psi)(x) := \mathrm{e}^{s/2} \psi(\mathrm{e}^s x)\,, \qquad \psi \in L^2(\mathbb{R})$$

(viz příklad 5.5.3). Snadno se přesvědčíme o tom, že množina $\{U_d(s) : s \in \mathbb{R}\}$ splňuje grupovou podmínku (1a). Vyšetříme spojitost zobrazení $s \mapsto U_d(s)$. Pro libovolné $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ a $s \in (-1, 1)$ má funkce $\overline{\varphi(.)}\, (U_d(s)\, \varphi)(.)$ integrabilní majorantu $\mathrm{e}^{1/2} \|\varphi\|_\infty |\varphi(.)|$, přičemž $\lim\limits_{s\to 0} \overline{\varphi(x)}\, (U_d(s)\, \varphi)(x) = |\varphi(x)|^2$, $x \in \mathbb{R}$; z Lebesgueovy věty potom dostáváme $\lim\limits_{s\to 0} (\varphi, U_d(s)\, \varphi) = \|\varphi\|^2$, což spolu s unitaritou

[1]) Srovnejte s definicí komutativity v poznámce 10.3.4b a s analogickým tvrzením pro rezolventy (poznámka 7.4.8).

a grupovou podmínkou dává $\lim_{s\to s_0} U_d(s)\,\varphi = U_d(s_0)\,\varphi$. Díky tomu, že množina $C_0^\infty(\mathbb{R})$ je hustá v $L^2(\mathbb{R})$, je zobrazení $s \mapsto U_d(s)$ silně spojité (viz cvičení 3).

Najdeme generátor A_d grupy $\{U_d(s):\ s\in\mathbb{R}\}$. Vezmeme opět libovolné $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$; nosič K_φ této funkce leží v nějakém kompaktním intervalu $[a,b]$. Pro každé $s\in(-1,1)\setminus\{0\}$ funkce $f_s\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$,

$$f_s(x) := \frac{1}{\mathrm{i}s}\,[\mathrm{e}^{s/2}\varphi(\mathrm{e}^s x) - \varphi(x)] + \frac{\mathrm{i}}{2}\,\varphi(x) + \mathrm{i}x\,\varphi'(x)$$

je spojitá a její nosič je částí množiny $[\mathrm{e}^{-s}a, \mathrm{e}^{-s}b]\cup[a,b]$, která pro všechna uvažovaná s leží v jistém intervalu J_{ab}; např. pro $a \geqq 0$ máme $J_{ab}=[a/\mathrm{e}, b\mathrm{e}]$. Dále pro všechna $x\in\mathbb{R}$ platí

$$\lim_{s\to 0} f_s(x) = 0 \quad\text{a}\quad \frac{1}{s}\,[\mathrm{e}^{s/2}\varphi(\mathrm{e}^s x) - \varphi(x)] = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{s(x)/2}\varphi(\mathrm{e}^{s(x)}x) + x\,\mathrm{e}^{3s(x)/2}\varphi'(\mathrm{e}s(x)x)\,,$$

kde $s(x)$ leží v otevřeném intervalu s krajními body 0 a s. Odtud vyplývá, že pro všechna $s\in(-1,1)\setminus\{0\}$ má funkce f_s integrabilní majorantu $[\mathrm{e}^{1/2}\|\varphi\|_\infty + 2|x|\,\mathrm{e}^{3/2}\|\varphi'\|_\infty]\,\chi_{J_{ab}}$. Pomocí Lebesgueovy věty potom zjistíme, že pro každé $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ existuje $\lim_{s\to 0}(1/\mathrm{i}s)\,[U_d(s)\,\varphi - \varphi]$ a rovná se $-(\mathrm{i}/2)\,\varphi + QP\varphi$, kde Q a P jsou operátory zavedené v příkladech 7.1.5, resp. 7.2.7. Konečně užijeme toho, že podprostor $C_0^\infty(\mathbb{R})$ je $U_d(s)$-invariantní pro každé $s\in\mathbb{R}$; skutečně, funkce $x\mapsto(U_d(s)\,\varphi)\,x$ pro $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ má zjevně derivace všech řádů a jejím nosičem je množina $\{x\in\mathbb{R}:\ \mathrm{e}^s x\in K_\varphi\}$, která je kompaktní v důsledku kompaktnosti K a spojitosti zobrazení $x\mapsto \mathrm{e}^s x$. Ze cvičení 4 nyní pro hledaný samosdružený operátor A_d plyne

$$A_d = \overline{\left(-\frac{\mathrm{i}}{2} + QP\right)\restriction C_0^\infty(\mathbb{R})} = \overline{\frac{1}{2}\,(QP+PQ)\restriction C_0^\infty(\mathbb{R})}\,;$$

operátor $(QP+PQ)\restriction C_0^\infty(\mathbb{R})$ je tudíž v podstatě samosdružený.

Na závěr vyšetříme tenzorový součin unitárních grup. Nechť v Hilbertových prostorech $\mathscr{H}_r$, $r=1,2$, jsou dány silně spojité unitární grupy $\{U_r(s)\equiv \exp(\mathrm{i}A_r s):\ s\in\mathbb{R}\}$, kde $A_r\in\mathscr{L}_{\mathrm{sa}}(\mathscr{H}_r)$. Podle věty 5.7.5 je pro každé $s\in\mathbb{R}$ předpisem

$$U_\otimes(s) := U_1(s)\otimes U_2(s) = \exp(\mathrm{i}A_1 s)\otimes\exp(\mathrm{i}A_2 s) \tag{10}$$

určen unitární operátor na $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$ a z formule (5.7.6) vyplývá, že zobrazení $s\mapsto U_\otimes(s)$ splňuje podmínky (1a, b). Dále pro libovolné $x\in\mathscr{H}_1$, $y\in\mathscr{H}_2$ z nerovnosti

$$\|(U_{\otimes}(s) - I)(x \otimes y)\| \leqq \|U_1(s)x - x\|_1 \|y\|_2 + \|U_1(s)x\|_1 \|U_2(s)y - y\|_2 =$$
$$= \|U_1(s)x - x\|_1 \|y\|_2 + \|x\|_1 \|U_2(s)y - y\|_2 \tag{11}$$

a silné spojitosti grup $\{U_r(s): s \in \mathbb{R}\}$ máme $\lim_{s \to 0} \|(U_0(s) - I)(x \otimes y)\| = 0$ a odtud plyne silná spojitost zobrazení $s \mapsto U_{\otimes}(s)$ (viz cvičení 3). Množina $\{U_{\otimes}(s): s \in \mathbb{R}\}$ je tedy silně spojitá unitární grupa. Nechť $A_{\otimes}$ je její generátor; najdeme vztah mezi ním a operátory $A_r \in \mathscr{L}_{sa}(\mathscr{H}_r)$. Pro libovolná $x \in D(A_1)$, $y \in D(A_2)$ dostaneme podobně jako ve formuli (11) nerovnost

$$\left\| \frac{1}{\mathrm{i}s}(U_{\otimes}(s) - I)(x \otimes y) - (\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2)(x \otimes y) \right\| \leqq$$
$$\leqq \left\| \frac{1}{\mathrm{i}s}[U_1(s)x - x] - A_1 x \right\|_1 \|y\|_2 + \|x\|_1 \left\| \frac{1}{\mathrm{i}s}[U_2(s)y - y] - A_2 y \right\|_2 +$$
$$+ \|U_1(s)x - x\|_1 \|A_2 y\|_2 ,$$

z níž pro operátor $\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 \equiv A_1 \otimes I_2 + I_1 \otimes A_2$ s definičním oborem $D(A_1) \otimes D(A_2)$ (viz poznámku 10.8.1) plyne $\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 \subset A_{\otimes}$. Operátor na levé straně je podle věty 10.8.2 v podstatě samosdružený, a je tedy $A_{\otimes} = \overline{\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2}$.

11.1.7 Tvrzení: Generátorem unitární grupy (10) je operátor $\overline{\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2}$, tj. pro všechna $s \in \mathbb{R}$ platí

$$\exp(\mathrm{i}A_1 s) \otimes \exp(\mathrm{i}A_2 s) = \exp[\mathrm{i}(\overline{\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2})\, s] . \tag{12a}$$

11.1.8 Poznámka: Jestliže položíme $U_2(s) := I_2$, $s \in \mathbb{R}$, dostaneme triviální unitární grupu, jejímž generátorem je nulový operátor. Podle (12a) je pak operátor $\overline{\boldsymbol{A}_1}$ generátorem unitární grupy $\{\boldsymbol{U}_1(s) \equiv U_1(s) \otimes I_2 : s \in \mathbb{R}\}$. Pro každé $s \in \mathbb{R}$ tedy máme

$$\boldsymbol{U}_r(s) = \exp(\mathrm{i}\overline{\boldsymbol{A}_r} s) , \qquad r = 1, 2 . \tag{12b}$$

Naopak, z těchto vztahů vyplývá rovnost (12a) – viz cvičení 9.

11.2 TROTTEROVA FORMULE

Uvažujme libovolnou dvojici samosdružených operátorů A, B a předpokládejme, že jejich součet $C = A + B$, což je operátor s definičním oborem

$$D \equiv D_C = D_A \cap D_B ,$$

je rovněž samosdružený. Ukážeme, že každý prvek unitární grupy $\{\exp(\mathrm{i}tC): t \in \mathbb{R}\}$ lze vyjádřit pomocí unitárních grup generovaných operátory A a B.

11.2.1 Věta (*Trotter*): Jestliže A, B, C jsou samosdružené operátory na daném $\mathscr{H}$ takové, že $C = A + B$, potom pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}tC} = \operatorname*{s-lim}_{n \to \infty} [\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA/n} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}tB/n}]^n . \tag{1}$$

Důkaz: Budeme opět užívat označení η_t pro funkci $u \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}tu}$, $u \in \mathbb{R}$. Podle pravidel funkcionálního počtu pro libovolné přirozené n platí $(\eta_{t/n}(C))^n = \eta_t(C)$; formuli (1) můžeme proto přepsat v ekvivalentním tvaru

$$\lim_{n \to \infty} \{[\eta_{t/n}(A) \, \eta_{t/n}(B)]^n - [\eta_{t/n}(C)]^n\} \, x = 0 , \qquad x \in \mathscr{H} . \tag{2}$$

Jelikož

$$\|\eta_t(A)\| = \|\eta_t(B)\| = \|\eta_t(C)\| = 1 \tag{3}$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$ je norma operátoru ve složené závorce menší než 2 pro všechna n. Na základě toho snadno zjistíme, že k ověření vztahu (1) stačí, aby rovnost (2) platila pro všechna x z nějaké množiny, která je hustá v $\mathscr{H}$; provedeme to pro množinu $D_C \equiv D$. Nechť tedy $x \in D$; pomocí rovností (3) a vlastností normy na $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ dostáváme

$$\|\{[\eta_{t/n}(A) \, \eta_{t/n}(B)]^n - \eta_{t/n}(C)^n\} \, x\| =$$

$$= \left\| \sum_{k=0}^{n-1} [\eta_{t/n}(A) \, \eta_{t/n}(B)]^k \, [\eta_{t/n}(A) \, \eta_{t/n}(B) - \eta_{t/n}(C)] \, \eta_{t/n}(C)^{n-k-1} \, x \right\| \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|t|}{n} \left\| K\left(\frac{t}{n}\right) \eta_{((n-k-1)/n)t}(C) \, x \right\| \leqq |t| \sup_{|s| \leqq |t|} \left\| K\left(\frac{t}{n}\right) \eta_s(C) \, x \right\| ,$$

kde jsme zavedli následující označení

$$K(u) := \begin{cases} \dfrac{1}{u} [\eta_u(A) \, \eta_u(B) - \eta_u(C)] , & u \neq 0 \\ 0 , & u = 0 \end{cases} .$$

Vztah (1) bude tedy platit, jestliže ukážeme, že

$$\lim_{u \to 0} \sup_{|s| \leqq |t|} \|K(u) \, \eta_s(C) \, x\| = 0 \tag{4}$$

pro všechna $x \in D$. Nejprve ověříme, že funkce $\|K(.) \, x\|$ je omezená na $\mathbb{R}$ pro všechna $x \in D$. Pro $u \neq 0$ máme

$$K(u) \, x = \frac{1}{u} (\eta_u(A) - I) \, x + \eta_u(A) \frac{1}{u} (\eta_u(B) - I) \, x - \frac{1}{u} (\eta_u(C) - I) \, x , \tag{5a}$$

a protože $D = D_A \cap D_B$, ze vztahu (11.1.2b) a silné spojitosti grupy $\{\eta_u(A): u \in \mathbb{R}\}$ vyplývá

$$\lim_{u \to 0} K(u)\,x = \mathrm{i}Ax + \mathrm{i}Bx - \mathrm{i}Cx = 0\,. \tag{5b}$$

Existuje tedy $\delta(x) > 0$ takové, že pro $|u| < \delta(x)$ platí $\|K(u)\,x\| < 1$. Pro $|u| \geqq \delta(x)$ vztahy (5a) a (3) dávají

$$\|K(u)\,x\| \leqq \frac{6}{|u|}\,\|x\| \leqq \frac{6}{\delta(x)}\,\|x\|\,.$$

Celkem tedy pro každé $x \in D$ existuje $C_x > 0$ takové, že

$$\|K(u)\,x\| \leqq C_x \tag{6}$$

pro všechna $u \in \mathbb{R}$.

Na podprostoru D je možno zavést skalární součin $[x, y] \mapsto (x, y)_C := (x, y) + (Cx, Cy)$. Díky tomu, že operátor C je samosdružený, a tedy uzavřený, vznikne tak Hilbertův prostor, který označíme $\mathscr{H}_C$ (viz cvičení 7.15). Jelikož $\|x\| \leqq \|x\|_C$, platí implikace $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H}) \Rightarrow B \upharpoonright D \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_C, \mathscr{H})$; z ní a podmínky (6) na základě principu stejnoměrné omezenosti plyne existence kladného k takového, že

$$\|K(u)\,x\| \leqq k\|x\|_C \tag{7}$$

pro všechna $u \in \mathbb{R}$ a $x \in D$. Nechť množina $M \subset D$ je totálně omezená v $\mathscr{H}_C$; k libovolnému $\varepsilon > 0$ lze tedy najít konečnou ε-síť N_ε a z (5b) plyne implikace $|u| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|K(u)\,y\| < \varepsilon$ pro všechna $y \in N_\varepsilon$. Pomocí (7) potom dostaneme $\lim_{u \to 0} \sup_{z \in M} \|K(u)\,z\| = 0$. K ověření rovnosti (4) tedy stačí ukázat, že množina $M_x := \{\eta_s(C)\,x: |s| \leqq |t|\}$ je totálně omezená v $\mathscr{H}_C$ pro každé $x \in D$. Připomeňme především, že $\eta_s(C)\,D \subset D$ pro všechna $s \in \mathbb{R}$ (viz (11.1.2c)), takže $M_x \subset D$ pro každé $x \in D$. Pomocí (11.1.2d) dostáváme

$$\|[\eta_s(C) - \eta_{s_0}(C)]\,x\|_C^2 = \|[\eta_s(C) - \eta_{s_0}(C)]\,x\|^2 + \|[\eta_s(C) - \eta_{s_0}(C)]\,Cx\|^2\,,$$

a protože zobrazení $f_y: \mathbb{R} \to \mathscr{H}$, $f_y(s) := \eta_s(C)\,y$ je spojité pro každé $y \in \mathscr{H}$, je pro všechna $x \in D$ spojité i zobrazení $g_x: \mathbb{R} \to \mathscr{H}_C$, $g_x(s) := \eta_s(C)\,x$. Kompaktní interval $[-|t|, |t|]$ se přitom zobrazuje na množinu M_x, která je podle věty 2.5.3b $\mathscr{H}_C$-kompaktní, a tím spíše totálně omezená v $\mathscr{H}_C$ (viz důsledek 2.5.10a). ■

11.2.2 Poznámka: Předpoklad samosdruženosti operátoru $C = A + B$ je dosti omezující – je však automaticky splněn např. ve speciálním případě, kdy alespoň jeden z operátorů A, B je omezený. Jsou-li oba tyto operátory neomezené, setkáme se často se situací, kdy operátor $A + B$ je pouze v podstatě samosdružený. Trotterova formule platí i za tohoto slabšího předpokladu; důkaz je ovšem složitější – viz např. ⟦Cher 1⟧.

§ **11.1** • Jeden z alternativních důkazů Stoneova teorému vychází z následující vlastnosti obecné unitární grupy: pro všechna $x \in \mathscr{H}$ je funkce $s \mapsto (x, U(s)\,x)$ *pozitivně definitní*, tj. matice s prvky $(x, U(s_j - s_k)\,x)$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$, je pozitivní pro každé n a libovolnou n-tici $s_1, \ldots, s_n$. V teorii funkcí se dokazuje *Bochnerova věta*, která tvrdí, že každá spojitá pozitivně definitní funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je Fourierovým obrazem konečné (nezáporné) borelovské míry μ na $\mathbb{R}$, tj. pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-its}\, \mathrm{d}\mu(s)$$

(důkaz viz např. ⟦AG⟧, § 70); míra μ je přitom určena jednoznačně. Pro spojitou unitární grupu existuje tedy zobrazení $x \mapsto \mu_x$ takové, že $(x, U(t)\,x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-its}\, \mathrm{d}\mu_x(s)$; pomocí polarizace najdeme pro každé x a $y \in \mathscr{H}$ komplexní míru ν_{xy} takovou, že $(x, U(t)\,y) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-its}\, \mathrm{d}\nu_{xy}$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Tato míra je opět určena jednoznačně grupou $\{U(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$. Odtud plyne, že pro každé $s \in \mathbb{R}$ je forma $[x, y] \mapsto \nu_{xy}(-\infty, s)$ seskvilineární, pozitivní a omezená, takže existuje pozitivní operátor $E_s \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ splňující $(x, E_s y) = \nu_{xy}(-\infty, s)$ pro všechna $x, y \in \mathscr{H}$. Konečně se ověří, že $\{E_s\}$ je rozklad jedničky. Podrobnosti lze najít v ⟦RN⟧, § 138.

• Stoneův teorém lze formulovat jako tvrzení o existenci simultánního spektrálního rozkladu množiny operátorů, které tvoří unitární reprezentaci aditivní grupy $\mathbb{R}$, tj. o existenci projektorové míry $E(.)$ na $\mathbb{R}$ takové, že $U(s) = \int \eta_s\, \mathrm{d}E$ pro každé $s \in \mathbb{R}$. Tato formulace umožňuje provést dalekosáhlé zobecnění. Budeme potřebovat několik pojmů. Charakterem groupy G nazýváme spojitou funkci $\xi\colon G \to \mathbb{C}$, která vyhovuje podmínkám $|\xi(g)| = 1$ a $\xi(gg') = \xi(g)\,\xi(g')$ pro všechna $g, g' \in G$. Na množině X_G všech charakterů zavedeme topologii τ_G tak, aby funkce $\xi \mapsto f_g(\xi) := \xi(g)$ byly spojité pro všechna $g \in G$ (viz příklad 2.3.4). Např. pro aditivní grupu $\mathbb{R}^n$ má obecný charakter tvar $\xi(x_1, \ldots, x_n) = \exp \mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} t_j x_j$, kde $t_j \in \mathbb{R}$, a prostor (X, τ_G) je homeomorfní s $\mathbb{R}^n$. Nechť $\mathscr{B}^{(G)}$ je systém borelovských množin na X_G, tj. minimální σ-algebra obsahující τ_G, a $\mathscr{H}$ je Hilbertův prostor. Na $\mathscr{B}^{(G)}$ lze definovat projektorovou míru $E(.)$ s hodnotami v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ a zobrazení $\varphi \mapsto \int \varphi\, \mathrm{d}E \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ pro borelovské funkce $\varphi\colon X_G \to \mathbb{C}$, které jsou E-s.v. omezené; postup je stejný jako v §§ 9.1.3, je pouze třeba zaměnit $\mathbb{R}^d$ prostorem X_G. Potom platí následující tvrzení – tzv. *teorém SNAG* (Stone, Najmark, Ambrose, Godement): Nechť $g \mapsto U(g)$ je (silně) spojitá unitární reprezentace lokálně kompaktní komutativní grupy G na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$. Potom existuje právě jedna projektorová míra $E(.)$ na $\mathscr{B}^{(G)}$ taková, že $U(g) = \int f_g\, \mathrm{d}E$ pro všechna $g \in G$. Podrobnější výklad a bibliografii původních prací najde čtenář např. v [[RN]], § 140.

Cvičení

1. Jestliže $\{U(s): s \in \mathbb{R}\}$ je množina unitárních operátorů splňujících grupovou podmínku (11.1.1a), potom zobrazení $s \mapsto U(s)$ je silně spojité právě tehdy, když je spojité slabě. Jsou-li tyto podmínky splněny, je uvažovaná unitární grupa spojitá vůči normě právě tehdy, když její generátor je omezený operátor.

2. Doplníme-li předpoklady předchozího cvičení podmínkou separability Hilbertova prostoru $\mathscr{H}$, potom zobrazení $s \mapsto U(s)$ je silně spojité, jestliže funkce $s \mapsto (U(s)\, y, x)$ je borelovská pro všechna $x, y \in \mathscr{H}$.
Návod: Pro libovolná $a > 0$, $y \in \mathscr{H}$ existuje $y_a \in \mathscr{H}$ takové, že pro všechna $x \in \mathscr{H}$ platí

$$\int_0^a (U(t)\, y, x)\, \mathrm{d}t = (y_a, x)\,.$$

Podmínka (11.1.1a) potom dává $|(U(s)\, y_a, x) - (y_a, x)| \leqq 2s\|x\|\, \|y\|$. Odtud a z cvičení 1 plyne $\lim_{s \to 0} U(s)\, y_a = y_a$. Nechť $\{z^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ je hustá v $\mathscr{H}$; ukažte, že existuje $b > 0$, pro něž platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\,(z_a^{(n)}, x)|_{a=b} = (z^{(n)}, U(-b)\, x)\,, \qquad n = 1, 2, \ldots\,.$$

Potom množina $\{z_b^{(n)}\}$ je totální a z podmínky $\lim_{s \to 0} U(s)\, y_b = y_b$ plyne dokazované tvrzení.

3. Na podprostoru D, který je hustý v $\mathscr{H}$, je pro každé $s \in \mathbb{R}$ dán lineární operátor $U_0(s)$ takový, že $U_0(s)\, D \subset D$ a $\overline{U_0(s)\, D} = \mathscr{H}$; dále pro každé $x \in D$ platí $\|U_0(s)\, x\| = \|x\|$, zobrazení $s \mapsto U_0(s)\, x$ je spojité na $\mathbb{R}$ a $U_0(s + t)\, x = U_0(s)\, U_0(t)\, x$ pro všechna $t, s \in \mathbb{R}$. Dokažte, žě množina $\{U(s): s \in \mathbb{R}\}$, kde $U(s)$ je spojité rozšíření operátoru $U_0(s)$, je silně spojitá unitární grupa.

4. Nechť A je samosdružený operátor na $\mathscr{H}$ a podprostor $D \subset D_A$ je hustý v $\mathscr{H}$. Jestliže pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí $\exp(\mathrm{i}tA)\, D \subset D$, potom operátor $A \upharpoonright D$ je v podstatě samosdružený.
Návod: Viz ověření podstatné samosdruženosti operátoru A_0 v důkazu věty 11.1.2.

5. Dokažte následující zobecnění Stoneova teorému: Jestliže zobrazení $U(.)$: $\mathbb{R}^n \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je silně spojité, pro všechna $t \equiv [t_1, \ldots, t_n]$, $s \equiv [s_1, \ldots, s_n] \in \mathbb{R}^n$ platí $U(t + s) = U(t)\, U(s)$ a všechny operátory $U(t)$ jsou unitární, potom existují

komutující samosdružené operátory $A_1, \dots, A_n$ takové, že $U(t) \equiv U(t_1, \dots, t_n) = \exp[\mathrm{i}(t_1 A_1 + \dots + t_n A_n)]$.
Návod: Ukažte, že jednoparametrické unitární grupy $t_j \mapsto U_j(t_j) := U(0, \dots, t_j, \dots, 0)$ splňují $[U_j(t_j), U_k(t_k)] = 0$ pro všechna $j, k = 1, 2, \dots, n$ a všechna $t_j, t_k \in \mathbb{R}$. Dále užijte důsledku 11.1.5 a formule (10.7.4c).

6. Jsou dány silně spojité unitární grupy $\{U(s) \equiv \exp(\mathrm{i}sA) : s \in \mathbb{R}\}$ a $\{U'(s) \equiv \exp(\mathrm{i}sA') : s \in \mathbb{R}\}$. Tyto grupy jsou unitárně ekvivalentní, tj. existuje unitární operátor V takový, že $U'(s) = V U(s) V^{-1}$ pro všechna $s \in \mathbb{R}$, právě tehdy, když $A' = VAV^{-1}$.
Návod: Postačující podmínka plyne z příkladu 10.3.7 a cvičení 9.21, k ověření nutné podmínky užijte formulí (11.1.2).

7. Bez užití výsledků příkladu 10.5.2a ukažte, že množina $\{U_\tau(s) : s \in \mathbb{R}\} \subset \mathscr{B}(L^2(\mathbb{R}))$, kde $(U_\tau(s)\,\psi)(x) := \psi(x + s)$ pro všechna $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, tvoří silně spojitou unitární grupu, pro jejíž generátor A_τ platí $A_\tau = P$.
Návod: Operátor $A_\tau \upharpoonright C_0^\infty(\mathbb{R})$ je v podstatě samosdružený a je částí P.

8. Každé rotaci v $\mathbb{R}^2$ o úhel ϑ přiřadíme následující operátor $U_\varrho(\vartheta)$ na prostoru $L^2(\mathbb{R}^2)$:

$$(U_\varrho(\vartheta)\,\psi)\,(x, y) := \psi(x \cos\vartheta - y \sin\vartheta, x \sin\vartheta + y \cos\vartheta), \; \psi \in L^2(\mathbb{R}^2)\,.$$

Ukažte, že $\{U_\varrho(\vartheta) : \vartheta \in \mathbb{R}\}$ je silně spojitá unitární grupa s generátorem A_ϱ takovým, že podprostor $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ je jeho oborem podstatné samosdruženosti $(A_\varrho \varphi)\,(x, y) = -\mathrm{i}(x\,\partial_y - y\,\partial_x)\,\varphi(x, y)$ pro všechna $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.
Návod: Pro všechna $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\vartheta \in \mathbb{R}$ a $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ platí nerovnost

$$\left|\left(\frac{1}{\vartheta}\,[U_\varrho(\vartheta) - I]\,\varphi\right)(x, y) - x\,\partial_y\varphi(x, y) + y\,\partial_x\varphi(x, y)\right| \leqq$$
$$\leqq 2(\|\partial_x\varphi\|_\infty + \|\partial_y\varphi\|_\infty)\,(x^2 + y^2)^{1/2}\,\chi_{K_\varphi}\,;$$

dále adaptujte postup z příkladu 11.1.6b.

9. Dokažte ekvivalenci vztahů (11.1.12a) a (11.1.12b).
Návod: Viz cvičení 10.24 a formuli (10.8.6).

12.1 ZÁKLADNÍ POJMY

Vyjdeme od pojmu *binární operace* v množině M, jíž rozumíme libovolné zobrazení $\varphi\colon M \times M \to M$. Říkáme, že φ je *asociativní*, resp. *komutativní*, jestliže platí $\varphi(\varphi(a, b), c) = \varphi(a, \varphi(b, c))$, resp. $\varphi(a, b) = \varphi(b, a)$ pro všechna $a, b, c \in M$. Uvažujme množinu R vybavenou dvěma binárními operacemi φ_a, φ_m, jež nazveme *sčítáním* a *násobením* a označíme $\varphi_a(a, b) \equiv a + b$, $\varphi_m(a, b) \equiv ab$. Trojici $(R, \varphi_a, \varphi_m)$ nazveme **okruhem**, jsou-li splněny následující podmínky

(r1) (R, φ_a) je komutativní grupa,

(r2) sčítání a násobení jsou distributivní: platí $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)\,c = ac + bc$ pro všechna $a, b, c \in R$.

Jestliže v R existuje prvek e takový, že platí $ae = ea = a$ pro všechna $a \in R$, nazýváme jej **jedničkou.**

Nechť $\mathscr{A}$ je vektorový prostor nad tělesem F. Sčítání vektorů mu dává strukturu komutativní grupy; zadáme-li na $\mathscr{A}$ novou binární operaci – násobení, které je bilineární, stane se z $\mathscr{A}$ okruh, jejž nazýváme **lineární algebrou nad tělesem** F, speciálně komplexní (reálnou) algebrou, je-li $F = \mathbb{C}$, resp. $F = \mathbb{R}$. Zobrazení $(\alpha, a) \mapsto \alpha a$ budeme v dalším nazývat *násobením skalárem*, abychom jej odlišili od násobení v $\mathscr{A}$. Říkáme, že $\mathscr{A}$ je **asociativní** algebra, je-li násobení v $\mathscr{A}$ asociativní. Termínem „algebra" bez bližšího označení budeme dále rozumět komplexní asociativní algebru. Pokud je násobení v $\mathscr{A}$ komutativní, mluvíme o **abelovské (komutativní)** algebře.

12.1.1 Poznámka: Mnohé fyzikálně důležité algebry jsou neasociativní. Jako příklad lze uvést **Lieovy algebry**, v nichž násobení je antikomutativní (říká se též antisymetrické), $ab = -ba$, a splňuje Jacobiho identitu $(ab)\,c + (bc)\,a + (ca)\,b = 0$. Lze se snadno přesvědčit, že takováto algebra je obecně neasociativní a nemůže obsahovat jedničku. Nicméně mezi asociativními a Lieovými algebrami existuje souvislost – viz např. [[Ku]], § V.9.

Podalgebrou algebry $\mathscr{A}$ nazveme každou její podmnožinu $\mathscr{B}$, která je sama algebrou (vzhledem k týmž operacím). Může se stát, že $\mathscr{A}$ obsahuje jedničku neležící v $\mathscr{B}$. V takovém případě lze *připojením jedničky* sestrojit rozšíření $\tilde{\mathscr{B}} = \{\alpha e + b\colon b \in \mathscr{B}, \alpha \in \mathbb{C}\}$; podobně lze jedničku přidat k libovolné algebře (cvičení 2). Vlastní podalgebře $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ říkáme (oboustranný) **ideál** v $\mathscr{A}$, jestliže součiny ab, ba patří do $\mathscr{B}$ pro všechna $a \in \mathscr{A}$, $b \in \mathscr{B}$. Podobně jsou definovány levý, resp. pravý ideál. Triviálním příkladem ideálu je nulová podalgebra $\{0\} \subset \mathscr{A}$. Algebra $\mathscr{A}$ sama se mezi ideály nepočítá, proto žádný ideál nemůže obsahovat jedničku. Maximální ideál v $\mathscr{A}$ je takový, který není vlastní podalgebrou jiného ideálu v $\mathscr{A}$. Říkáme, že algebra je **prostá**, když nemá žádný netriviální oboustranný ideál.

12.1.2 Tvrzení: (a) Průnik libovolného systému podalgeber (ideálů, jednostranných ideálů) v $\mathscr{A}$ je podalgebra (ideál, jednostranný ideál) v $\mathscr{A}$, kdežto pro sjednocení obdobné tvrzení neplatí.

(b) Každý ideál v algebře s jedničkou je podalgebrou některého maximálního ideálu.

Důkaz: části (a) je jednoduchý. Co se týče (b), aplikujeme Zornovo lemma na částečné uspořádání definované relací $\subset$ mezi ideály (cvičení 3). ■

Nechť $\mathscr{A}$ je algebra s jedničkou. Prvek $a \in \mathscr{A}$ je **invertibilní**, jestliže k němu existuje **inverzní prvek** $a^{-1} \in \mathscr{A}$, tj. takový prvek, že $a^{-1}a = aa^{-1} = e$; podobně se definují levý a pravý inverzní prvek. Nemá-li $\mathscr{A}$ netriviální jednostranné ideály, je každý její nenulový prvek invertibilní (cvičení 4). Poznamenejme, že pro okruhy s jedničkou, které mají tuto vlastnost se užívá názvu *těleso*; příklady jsou $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ či nekomutativní těleso kvaternionů.

Pro libovolnou množinu $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ definujeme algebru $\mathscr{A}_0(\mathscr{S})$ *generovanou* $\mathscr{S}$ jako nejmenší podalgebru v $\mathscr{A}$ obsahující $\mathscr{S}$. Snadno se přesvědčíme, že $\mathscr{A}_0(\mathscr{S})$ je tvořena právě všemi homogenními polynomy sestavenými z prvků množiny $\mathscr{S}$. Platí-li $ab = ba$ pro všechna $a, b \in \mathscr{S}$, říkáme, že $\mathscr{S}$ je *komutativní*; algebra $\mathscr{A}_0(\mathscr{S})$ je v takovém případě abelovská. *Maximální abelovská podalgebra* v $\mathscr{A}$ je taková, jež není vlastní podalgebrou jiné abelovské podalgebry (cvičení 5). Pro podmnožinu $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ definujeme **komutant** $\mathscr{S}' := \{a \in \mathscr{A} : ab = ba,\ b \in \mathscr{S}\}$, speciálně **centrum** algebry $\mathscr{A}$ je množina $\mathscr{Z} = \mathscr{A}'$. Podobně definujeme **bikomutant** $\mathscr{S}'' := (\mathscr{S}')'$, popřípadě komutanty vyšších řádů.

12.1.3 Věta: Nechť $\mathscr{S}$, $\mathscr{T}$ jsou podmnožiny algebry $\mathscr{A}$ a $\mathscr{B}$ je podalgebra v $\mathscr{A}$, potom

(a) $\mathscr{S}'$ a $\mathscr{S}''$ jsou podalgebry v $\mathscr{A}$ obsahující centrum $\mathscr{Z}$, popřípadě jedničku algebry $\mathscr{A}$,

(b) z inkluze $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ plyne $\mathscr{S}' \supset \mathscr{T}'$,

(c) platí $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}''$,

(d) platí $\mathscr{S}' = \mathscr{S}''' = \ldots$ a $\mathscr{S}'' = \mathscr{S}'''' = \ldots$,

(e) $\mathscr{S}$ je komutativní právě tehdy, když $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}'$, což je dále ekvivalentní tomu, že $\mathscr{S}''$ je komutativní,

(f) platí $\mathscr{A}_0(\mathscr{S})' = \mathscr{S}'$ a $\mathscr{A}_0(\mathscr{S})'' = \mathscr{S}''$,

(g) podalgebra $\mathscr{B}$ je maximální abelovská právě tehdy, když $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$; potom platí také $\mathscr{B} = \mathscr{B}''$.

390 *Důkaz* tvrzení (a)–(c) je jednoduchý. Platí $\mathcal{S}' \subset (\mathcal{S}')'' = \mathcal{S}'''$, dále $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}''$ implikuje $\mathcal{S}' \supset \mathcal{S}'''$; odtud plyne tvrzení (d). První ekvivalence v (e) je jednoduchá, dále pak $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ implikuje $\mathcal{S}'' \subset \mathcal{S}' = \mathcal{S}'''$, tj. $\mathcal{S}''$ je rovněž komutativní. Tvrzení (f) plyne z inkluzí $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}_0(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}''$. Konečně pro abelovskou podalgebru $\mathcal{B}$ platí $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'' \subset \mathcal{B}'$. Pokud lze najít prvek $a \in \mathcal{B}' \setminus \mathcal{B}$, pak $(\mathcal{B} \cup \{a\})''$ je abelovská a obsahuje $\mathcal{B}$ jako vlastní podalgebru. Naopak $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ znamená, že $\mathcal{B}$ je abelovská; pro abelovskou podalgebru $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}$ platí $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}' \subset \mathcal{B}' = \mathcal{B}$, takže $\mathcal{B}$ je maximální. ■

Nyní stručně probereme základní pojmy týkající se algeber, jejichž struktura je obohacena o operaci involuce. Připomeňme, že involuce na vektorovém prostoru $\mathcal{A}$ je antilineární zobrazení $*: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ takové, že $(a^*)^* = a$ pro všechna $a \in \mathcal{A}$. Po **involuci na algebře** požadujeme, aby splňovala dodatečnou podmínku

$$(ab)^* = b^* a^* \qquad \text{pro všechna} \quad a, b \in \mathcal{A}\,. \tag{1}$$

Algebru s involucí nazveme **involutivní algebrou** nebo stručněji **$*$-algebrou**. Podalgebru v $\mathcal{A}$, která je sama $*$-algebrou vzhledem k téže involuci, nazýváme *$*$-podalgebrou*; podobně definujeme *$*$-ideál*. O prvku a^* říkáme, že je **sdružený** k a. Je-li $\mathcal{S}$ podmnožina v $\mathcal{A}$, označíme $\mathcal{S}^* := \{a^* : a \in \mathcal{S}\}$; říkáme, že $\mathcal{S}$ je **symetrická**, pokud $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}$, speciálně prvek a splňující $a = a^*$ je **hermitovský**. Symbolem $\mathcal{A}_0^*(\mathcal{S})$ označíme nejmenší $*$-podalgebru v $\mathcal{A}$ obsahující množinu $\mathcal{S}$. Odvození jednoduchých vlastností $*$-algeber přenecháváme čtenáři (cvičení 9, 10).

12.1.4 Příklad (*algebry omezených operátorů*): Množina $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ má strukturu $*$-algebry, jestliže na ní definujeme přirozeným způsobem algebraické operace a involuci prostřednictvím přechodu ke sdruženému operátoru; jedničku v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tvoří jednotkový operátor. Uveďme příklady některých jejích podalgeber:

(a) nechť E je projektor různý od 0, I, pak $\{B = EC:\ C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}$ je pravý ideál v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, není to však $*$-podalgebra. Naproti tomu $\{B = ECE:\ C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}$ je $*$-podalgebra, nikoli však ideál,

(b) je-li $\dim \mathcal{H} = \infty$, potom množiny $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \supset \mathcal{J}_2(\mathcal{H}) \supset \mathcal{J}_1(\mathcal{H})$ všech kompaktních, resp. Hilbertových-Schmidtových, resp. jaderných operátorů jsou $*$-ideály v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – viz kapitolu 6. Současně jsou $\mathcal{J}_2(\mathcal{H})$ a $\mathcal{J}_1(\mathcal{H})$ $*$-ideály v algebře $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ atd.,

(c) algebra $\mathcal{A}_0(B)$ generovaná operátorem $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je tvořena všemi homogenními polynomy v B. Je-li B hermitovský, je to $*$-algebra, zatímco opačná implikace neplatí: např. Fourierův-Plancherelův operátor F je nehermitovský (viz cvičení 5.27 a 5.34), ale $\mathcal{A}_0(F)$ je $*$-algebra, protože $F^3 = F^{-1} = F^*$ (příklad 5.1.11, cvičení 5.34).

Algebry omezených operátorů představují hlavní předmět našeho zájmu, ačkoli se budeme setkávat i s jinými algebrami (cvičení 11). Odtud lze také převzít řadu definic. Zavedli jsme již pojem hermitovského prvku, podobně definujeme

– normální prvek: $aa^* = a^*a$,
– projektor: $a^* = a = a^2$,
– spektrum prvku a: $\sigma_{\mathscr{A}}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C}:$ neexistuje $(a - \lambda e)^{-1}\}$,
– regulární hodnota λ prvku a: existuje rezolventa $r_a(\lambda) := (a - \lambda e)^{-1}$,
– rezolventní množina prvku a: $\varrho_{\mathscr{A}}(a) = \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathscr{A}}(a)$ apod.

Dále se zmíníme o faktorových algebrách a morfismech. Ideál $\mathscr{I}$ v algebře $\mathscr{A}$ je mj. podprostor, proto má smysl mluvit o faktorovém prostoru $\mathscr{A}/\mathscr{I}$. Definujeme na něm násobení vztahem $\tilde{a}\tilde{b} = \widetilde{ab}$, kde a, b jsou libovolné prvky reprezentující třídy ekvivalence $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathscr{A}/\mathscr{I}$; snadno se lze přesvědčit, že tato definice je korektní, a že $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ se tím stává algebrou. Říkáme jí **faktorová algebra** (algebry $\mathscr{A}$ podle ideálu $\mathscr{I}$). Má-li $\mathscr{A}$ jedničku, pak třída $\tilde{e} = \{e + c:\ c \in \mathscr{I}\}$ tvoří jedničku v $\mathscr{A}/\mathscr{I}$.

Pro dané algebry $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ nazýváme zobrazení $\varphi: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ **morfismem**, pokud zachovává algebraickou strukturu, tj. platí-li $\varphi(\alpha a + b) = \alpha\varphi(a) + \varphi(b)$, $\varphi(ab) = \varphi(a)\,\varphi(b)$ pro všechna $a, b \in \mathscr{A}$, $\alpha \in \mathbb{C}$; je-li φ bijektivní, říkáme mu **izomorfismus** (v případě $\mathscr{B} = \mathscr{A}$ se užívá termínů *endomorfismus*, resp. *automorfismus*). Jsou-li $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ $*$-algebry a φ zachovává involuci, $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$, říkáme mu **$*$-morfismus. Jádrem** morfismu φ nazýváme vzor $\varphi^{(-1)}(0_{\mathscr{B}})$ nulového prvku algebry $\mathscr{B}$.

12.1.5 Příklad: Nechť $\mathscr{I}$ je ($*$-)ideál v ($*$-)algebře $\mathscr{A}$, potom zobrazení φ_c: $\varphi_c(a) = \tilde{a}$ je ($*$-)morfismus algebry $\mathscr{A}$ do $\mathscr{A}/\mathscr{I}$, který nazýváme *kanonickým morfismem*; jeho jádro tvoří právě ideál $\mathscr{I}$. Snadno se přesvědčíme, že $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ je prostá právě tehdy, když ideál $\mathscr{I}$ je maximální (cvičení 12). Lze také ukázat, že každý ($*$-)morfismus je možno vyjádřit jako kompozici ($*$-)izomorfismu a jistého kanonického morfismu (cvičení 13).

Nakonec připomeneme několik pojmů týkajících se reprezentací. Tímto termínem se obvykle rozumí zobrazení nějakého algebraického objektu do vhodné množiny operátorů, které zachovává algebraickou strukturu. My budeme nejčastěji (i když ne výhradně) používat reprezentací pomocí omezených operátorů na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$: **reprezentací** ($*$-)algebry $\mathscr{A}$ budeme potom rozumět ($*$-)morfismus $\pi: \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Prostor $\mathscr{H}$ nazýváme *reprezentačním prostorem* a jeho rozměr *rozměrem reprezentace.* Je-li morfismus π injektivní, mluvíme o *věrné* reprezentaci. O reprezentacích $\pi_j: \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H}_j)$, $j = 1, 2$, říkáme, že jsou **ekvivalentní**, pokud existuje bijekce $U \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ taková, že platí $\pi_2(a)\,U = U\pi_1(a)$ pro všechna $a \in \mathscr{A}$. Reprezentaci $\pi: \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ nazýváme **ireducibilní**, pokud operátorová množina $\pi(\mathscr{A})$ nemá netriviální uzavřený invariantní podprostor (viz komentář k § 14.3). Vektor $\psi \in \mathscr{H}$ nazveme **cyklickým vektorem** reprezentace π, pokud je množina $\pi(\mathscr{A})\,\psi \equiv \{\pi(a)\,\psi:\ a \in \mathscr{A}\}$ hustá v $\mathscr{H}$.

Podívejme se nyní na algebry z topologického hlediska. Předpokládejme, že algebra $\mathscr{A}$ tvoří současně lokálně konvexní prostor s topologií τ, potom $\mathscr{A}$ nazýváme **topologickou algebrou**, pokud je násobení *odděleně* spojité, tj. pokud jsou zobrazení $f_b, g_b : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$, $f_b(a) = ab$, $g_b(a) = ba$ spojitá v topologii τ pro libovolné pevně zvolené $b \in \mathscr{A}$.

O podalgebře $\mathscr{B}$ topologické algebry $\mathscr{A}$ říkáme, že je *uzavřená*, je-li množina $\mathscr{B}$ uzavřená v topologii τ. Uzavřená algebra $\mathscr{A}(\mathscr{S})$ *generovaná množinou* $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ je nejmenší uzavřená podalgebra v $\mathscr{A}$ obsahující $\mathscr{S}$; platí $\mathscr{A}(\mathscr{S}) = \overline{\mathscr{A}_0(\mathscr{S})}$ (viz cvičení 14). Je-li φ morfismus topologických algeber $\mathscr{A}, \mathscr{B}$, má smysl mluvit o jeho spojitosti; algebry jsou **topologicky izomorfní**, pokud existuje spojitý izomorfismus $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ takový, že také izomorfismus φ^{-1} je spojitý. Odvození jednoduchých vlastností topologických algeber přenecháváme čtenáři (cvičení 14).

Topologii na algebře lze zadat např. pomocí normy; tímto případem se budeme podrobně zabývat za chvíli. Není to však jediná možnost:

12.2.1 Příklad: Na algebře $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ lze kromě topologie indukované normou zavést i další topologie, např. silnou operátorovou topologii τ_s a slabou operátorovou topologii τ_w (viz § 5.2). Zobrazení $f_B, g_B : \mathscr{B}(\mathscr{H}) \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $f_B(A) = AB$, $g_B(A) = BA$, jsou lineární, takže stačí ověřit jejich spojitost v bodě $A = 0$ (cvičení 15). Protože obě topologie jsou lokálně konvexní (viz poznámku 2.6.11) *$\mathscr{B}(\mathscr{H})$ je topologická algebra vzhledem k τ_s i τ_w*. Totéž samozřejmě platí pro její podalgebry vzhledem k příslušným relativním topologiím.

Tento příklad také ilustruje význam skutečnosti, že jsme v definici vyžadovali pouze *oddělenou* spojitost násobení. Jak jsme ukázali ve větě 5.2.2, operátorové násobení jakožto zobrazení $\mathscr{B}(\mathscr{H}) \times \mathscr{B}(\mathscr{H}) \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ není spojité v silné operátorové topologii; v případě τ_w není dokonce ani sekvenciálně spojité (cvičení 5.11).

Vraťme se nyní k případu topologie indukované normou. Algebru $\mathscr{A}$ nazýváme **normovanou algebrou**, pokud
(na1) $\mathscr{A}$ je normovaný prostor s normou $\|.\|$,
(na2) pro všechna $a, b \in \mathscr{A}$ platí $\|ab\| \leq \|a\|\,\|b\|$,
(na3) má-li $\mathscr{A}$ jedničku, platí $\|e\| = 1$.
Protože z podmínky (na2) plyne $\|e\| \geq 1$, mohla by být podmínka (na3) zaměněna slabším požadavkem $\|e\| \leq 1$. Je-li $\mathscr{A}$ úplná vzhledem k normě $\|.\|$, říkáme jí **Banachova algebra.**

12.2.2 Tvrzení: Násobení v normované algebře $\mathscr{A}$ je jakožto zobrazení $\mathscr{A} \times \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ spojité.

Důkaz: Stačí užít nerovnosti

$$\|ab - a'b'\| \leq \|a - a'\|\,\|b - b'\| + \|a'\|\,\|b - b'\| + \|a - a'\|\,\|b'\|\,, \quad (1)$$

jež platí pro všechna $a, a', b, b' \in \mathscr{A}$. ■

V normovaných algebrách je tedy zaručena (nejen oddělená) spojitost násobení, což znamená, že každá takováto algebra představuje současně topologickou algebru. Každou normovanou algebru $\mathscr{A}$ lze standardním postupem zúplnit. *Úplným obalem* algebry $\mathscr{A}$ rozumíme Banachovu algebru $\mathscr{B}$, která obsahuje $\mathscr{A}$ jako hustou podalgebru, a takovou, že pro všechna $a \in \mathscr{A}$ platí $\|a\|_{\mathscr{A}} = \|a\|_{\mathscr{B}}$.

12.2.3 Věta: Ke každé normované algebře $\mathscr{A}$ existuje úplný obal $\mathscr{B}$. Jestliže jiná algebra $\mathscr{B}'$ je úplným obalem algebry $\mathscr{A}$, potom existuje izomorfismus f algeber $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ takový, že $f(a) = a$ pro všechna $a \in \mathscr{A}$ a $\|f(b)\|_{\mathscr{B}'} = \|b\|_{\mathscr{B}}$ pro všechna $b \in \mathscr{B}$.

Důkaz: Podle věty 3.1.4 existuje Banachův prostor $\mathscr{B}$, který je úplným obalem normovaného prostoru $\mathscr{A}$. Ke každému $b \in \mathscr{B}$ tedy existuje posloupnost $\{b_n\} \subset \mathscr{A}$ taková, že $b_n \to b$, tj. $\|b_n - b\|_{\mathscr{B}} \to 0$. Jestliže $b_n' \to b'$, potom z nerovnosti (1) vyplývá, že $\{b_n b_n'\}$ je cauchyovská posloupnost; součin bb' definujeme jako její limitu. Korektnost této definice je opět důsledkem nerovnosti (1); snadno se také ověří axiom (na2), tj. že $\mathscr{B}$ je Banachova algebra. Dále věta 3.1.4 zaručuje existenci lineární izometrie f prostorů $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$ takové, že $f(a) = a$ a pro každé $a \in \mathscr{A}$; ze spojitosti násobení potom plyne, že f je izomorfismus algeber $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$. ■

12.2.4 Příklad: Množina $\mathscr{B}(\mathscr{X})$ omezených lineárních operátorů na B-prostoru $\mathscr{X}$ (speciálně množina $\mathscr{B}(\mathscr{H})$) s normou (3.2.3) je Banachova algebra; to plyne z věty 3.2.1 a vztahu (3.2.6). Úplným obalem podalgebry $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathscr{X})$ je její uzávěr $\overline{\mathscr{A}}$.

Nyní ukážeme, že některé vlastnosti, jež mají omezené operátory, lze odvodit pro prvek libovolné Banachovy algebry.

12.2.5 Věta: Nechť $\mathscr{A}$ je Banachova algebra s jedničkou, potom
(a) množina $\mathscr{R}$ všech invertibilních prvků je otevřená v $\mathscr{A}$ a zobrazení $a \mapsto a^{-1}$ je spojité v každém bodě množiny $\mathscr{R}$,
(b) rezolventní množina $\varrho_{\mathscr{A}}(a)$ prvku $a \in \mathscr{A}$ je otevřená v $\mathbb{C}$ a rezolventa $r_a\colon \varrho_{\mathscr{A}}(a) \to \mathscr{A}$ je analytická funkce,
(c) spektrum $\sigma_{\mathscr{A}}(a)$ libovolného prvku $a \in \mathscr{A}$ je neprázdná uzavřená množina.

12.2.6 Poznámka: K tvrzení (b) věty je třeba vysvětlení. O funkci $f\colon \mathbb{C} \to \mathscr{X}$, kde $\mathscr{X}$ je Banachův prostor, říkáme, že je *analytická* v souvislé otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, jestliže pro každé $z_0 \in G$ existuje

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Speciálně každá mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $a_n \in \mathscr{X}$, určuje vektorovou funkci f, která je analytická v oblasti $|z - z_0| < r$, $r^{-1} := \limsup_{n \to \infty} \|a_n\|^{1/n}$. Pro vektorové analytické funkce zůstává v platnosti řada vět klasické teorie komplexní proměnné; např. omezená vektorová funkce, která je analytická v celé komplexní rovině je konstantní (Liouvilleova věta). Pro vektorové analytické funkce se dá zobecnit i Cauchyho věta a Cauchyho integrální formule. Podrobnější poučení lze najít v literatuře citované v komentáři. Následující lemma zobecňuje a rozšiřuje lemma 3.6.4.

12.2.7 Lemma: Nechť $\mathscr{A}$ je Banachova algebra s jedničkou, pak libovolný prvek $a \in \mathscr{A}$ splňující $\|a - e\| < 1$ je invertibilní a platí:

$$a^{-1} = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n} (e - a)^j \equiv \sum_{j=0}^{\infty} (e - a)^j . \tag{2}$$

Zobrazení $a \mapsto a^{-1}$ je spojité v bodě $a = e$.

Důkaz: Stejně jako v lemmatu 3.6.4 dokážeme invertibilitu a vztah $\sum_{j=0}^{n} (e - a)^j \to a^{-1}$; odtud také plyne nerovnost

$$\|a^{-1}\| \leqq \sum_{j=0}^{\infty} \|e - a\|^j = (1 - \|e - a\|)^{-1} .$$

Ta spolu s další nerovností $\|a^{-1} - e\| \leqq \|a^{-1}\| \, \|e - a\|$ pak snadno implikuje spojitost inverze v bodě $a = e$. ■

Důkaz věty 5: (a) K danému prvku $a \in \mathscr{R}$ vezmeme otevřenou kouli $U_\delta(a)$ o poloměru $\delta \equiv \|a^{-1}\|^{-1}$. Každý prvek $c \in U_\delta(a)$ lze psát ve tvaru $c = a(e - a^{-1}b)$, kde $\|b\| < \delta$. Platí $\|e - (e - a^{-1}b)\| \leqq \|a^{-1}\| \, \|b\| < 1$, takže podle předchozího lemmatu existuje prvek $c^{-1} = (e - a^{-1}b)^{-1} a^{-1}$. Jinými slovy, množina $\mathscr{R}$ obsahuje kouli $U_\delta(a)$ spolu s bodem a, a tedy je otevřená. Podle lemmatu je inverzní zobrazení spojité v bodě $a = e$; spojitost v bodě $a_0 \neq e$ pak plyne z nerovností

$$\|a^{-1} - a_0^{-1}\| \leqq \|a_0^{-1}\| \, \|a_0 a^{-1} - e\| ,$$
$$\|a - a_0\| \leqq \|a_0\| \, \|a a_0^{-1} - e\| .$$

(b) K ověření toho, že $\varrho_{\mathscr{A}}(a)$ je otevřená, lze užít beze změny postupu z důkazu věty 3.6.5. Pro každé $\lambda_0 \in \varrho_{\mathscr{A}}(a)$ platí (viz formuli (3.6.7))

$$r_a(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} r_a(\lambda_0)^{j+1} (\lambda - \lambda_0)^j , \qquad |\lambda - \lambda_0| \leqq \|r_a(\lambda_0)\| ;$$

odtud plyne analytičnost rezolventy.

(c) Uzavřenost spektra plyne z tvrzení (b). Pro $|\lambda| \geqq \|a\|$ dává vztah (2) vyjádření rezolventy ve tvaru

$$r_a(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} e - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} a^k ; \tag{3}$$

odtud dostaneme odhad $\|r_a(\lambda)\| \leqq (|\lambda| - \|a\|)^{-1}$. Kdyby spektrum bylo prázdné, byla by rezolventa analytická v celém $\mathbb{C}$; z uvedeného odhadu by dále vyplývala její omezenost pro $\lambda > \|a\|$ a vztah $\lim_{|\lambda|\to\infty} r_a(\lambda) = 0$. Z dokázané analytičnosti funkce $r_a(.)$ vyplývá její spojitost, proto je $\|r_a(.)\|$ omezená funkce např. v kruhu o poloměru $\|a\|$ se středem v počátku. Z předpokladu $\sigma_{\mathscr{A}}(a) = \emptyset$ tedy plyne, že rezolventa splňuje předpoklady Liouvillovy věty, takže $r_a(\lambda) = 0$ pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}$, což je spor, neboť $r_a(\lambda)$ je podle předpokladu invertibilní. ■

Podobně jako v případě operátorů z $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ lze i pro každý prvek algebry $\mathscr{A}$ s jedničkou definovat jeho **spektrální poloměr** jako poloměr nejmenšího kruhu se středem v počátku, jenž obsahuje spektrum,

$$r_{\mathscr{A}}(a) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathscr{A}}(a)\} . \tag{4}$$

Podobně jako spektrum závisí tato veličina obecně na algebře $\mathscr{A}$; je snadné se přesvědčit, že pro $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ platí $\sigma_{\mathscr{A}}(a) \subset \sigma_{\mathscr{B}}(a)$, a tedy $r_{\mathscr{A}}(a) \leqq r_{\mathscr{B}}(a)$. V Banachových algebrách lze však index označující algebru vypustit a psát $r_{\mathscr{A}}(a) \equiv r(a)$, jak plyne z následující věty.

12.2.8 Věta: Nechť $\mathscr{A}$ je Banachova algebra s jedničkou, potom pro spektrální poloměr prvku $a \in \mathscr{A}$ platí

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = \inf_n \|a^n\|^{1/n} , \tag{5}$$

$$r(a) \leqq \|a\| , \tag{6}$$

$$r(\alpha a) = |\alpha|\, r(a) \qquad \text{pro všechna} \quad \alpha \in \mathbb{C} , \tag{7}$$

$$r(a^k) = r(a)^k \qquad \text{pro} \quad k = 1, 2, \dots \tag{8}$$

Důkaz: Lemma 7 zaručuje existenci rezolventy pro $|\lambda| \geqq \|a\|$, takže platí nerovnost (6). Užijeme dále vztahu (3), jehož platnost lze podle cvičení 16 rozšířit na ta λ, pro která konverguje číselná řada

$$\sum_k \|\lambda^{-(k+1)} a^k\| = \frac{1}{|\lambda|} \sum_k \frac{\|a^k\|}{|\lambda|^k} .$$

Její poloměr konvergence (vzhledem k $|\lambda|$) je $r_0(a) = \limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$, jak plyne z Cauchyho-Hadamardova kritéria. Libovolné přirozené číslo n lze zapsat pomocí kteréhokoliv $j \leqq n$ ve tvaru $n = kj + m$, kde $0 \leqq m \leqq j$; pak platí:

$$\|a^n\|^{1/n} \leqq \|a^j\|^{k/n} \|a\|^{m/n} = \|a^j\|^{(1/j)-(m/jn)} \|a\|^{m/n} .$$

Pro libovolné pevně zvolené j limita $k \to \infty$ dává

$$\limsup_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n} \leqq \|a^j\|^{1/j} , \tag{9}$$

takže

$$\limsup_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n} \leqq \inf_n \|a^n\|^{1/n} \leqq \liminf_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n} .$$

To znamená, že $r_0(a)$ je dáno pravou stranou vztahu (5). Protože pro $|\lambda| > r_0(a)$ rezolventa $r_a(\lambda)$ existuje, musí platit

$$r(a) \leqq r_0(a) \leqq \|a\| ; \tag{10}$$

druhá nerovnost plyne ze vztahu (9) pro $j = 1$. Pro důkaz obrácené nerovnosti $r_0(a) > r(a)$ využijeme věty o rozkladu funkce komplexní proměnné, která je analytická v mezikruží se středem v počátku, v Laurentovu řadu v bodě $\lambda = 0$, zobecněnou ve smyslu poznámky 6.

Funkce $r_a(.)$ je analytická v bodě λ, jestliže $|\lambda| > r(a)$; to plyne z lemmatu 3.6.4. V důsledku toho lze $r_a(\lambda)$ rozvinout v řadu tvaru (3) a její koeficienty lze vyjádřit ve tvaru Bochnerova integrálu:

$$a^k = -\frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} z^k r_a(z)\, dz = -\frac{r^{k+1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)\varphi} r_a(r\, e^{i\varphi})\, d\varphi ,$$

kde $r > r(a)$. Jelikož kružnice $K_r \equiv \{z = r\, e^{i\varphi} \colon \varphi \in [0, 2\pi)\}$ leží v $\varrho_{\mathscr{A}}(a)$, funkce $r_a(.)$ je na ní podle věty 5 spojitá, a tudíž $\|r_a(.)\|$ je podle věty 2.5.10c omezená,

$$M_r \equiv \max_{z \in K_r} \|r_a(z)\| < \infty .$$

Odtud a ze vztahu (3.7.6) plyne odhad $\|a^k\| \leqq r^{k+1} M_r$, který dává $r_0(a) = \limsup_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n} \leqq r$, a protože tato nerovnost platí pro všechna $r > r(a)$, plyne odtud nerovnost $r_0(a) \leqq r(a)$, jež spolu s (10) dává (5). Konečně vztahy (7), (8) vyplývají jednoduše z (5). ■

Abychom ocenili význam formule (5), je dobré si uvědomit, že tvar spektra, speciálně hodnota spektrálního poloměru, je vlastnost čistě algebraická; naproti tomu pravá strana závisí na metrických vlastnostech algebry $\mathscr{A}$.

12.2.9 Poznámka: Z příkladu 4 víme, že $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ je Banachova algebra s jedničkou, proto se na omezené operátory vztahují tvrzení vět 5 a 8. Dospěli jsme tak k závěrům, jež jsme odvodili dříve jiným způsobem (uzavřenost spektra) či uvedli bez důkazu (neprázdnost spektra). Současně jsme získali nové výsledky jako vlastnosti spektrálního poloměru apod. Tím nejsou možnosti použití algebraických metod pro vyšetřování omezených operátorů vyčerpány; o některých z nich se ještě zmíníme.

Morfismy Banachových algeber mají některé jednoduché vlastnosti, jejichž odvození přenecháváme čtenáři (cvičení 18). Izomorfismus $\varphi: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ nazýváme *izometrickým*, jestliže pro všechna $a \in \mathscr{A}$ platí $\|\varphi(a)\|_{\mathscr{B}} = \|a\|_{\mathscr{A}}$; takovéto zobrazení zachovává nejen algebraickou a topologickou, ale i metrickou strukturu.

12.2.10 Věta (*Gel'fand-Mazur*): Banachova algebra s jedničkou, v níž každý nenulový prvek je invertibilní, je izometricky izomorfní tělesu komplexních čísel. *Důkaz*: Spektrum $\sigma_{\mathscr{A}}(a)$ nemůže obsahovat dva různé body λ, μ, protože alespoň jeden z prvků $a - \lambda e$, $a - \mu e$ je nenulový, a tedy invertibilní. Z věty 5c plyne, že $\sigma_{\mathscr{A}}(a)$ obsahuje právě jeden bod, jejž označíme $\lambda(a)$; z neinvertibility prvku $a - \lambda(a)e$ plyne, že $a = \lambda(a)e$. Zobrazení $\varphi: \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ definované vztahem $\varphi(a) = \lambda(a)$ je zjevně izomorfismus, dále $\|a\| = |\lambda(a)| = \|\varphi(a)\|_{\mathbb{C}}$, takže φ je současně izometrie. ∎

12.3 C*-ALGEBRY

Je-li topologická algebra $\mathscr{A}$ vybavena involucí, jež je spojitá v dané topologii, nazýváme ji *topologickou *-algebrou*. Je-li $\mathscr{A}$ normovaná algebra a pro každé $a \in \mathscr{A}$ platí

$$\|a^*\| = \|a\|, \tag{1}$$

mluvíme o *normované *-algebře*; podobně je definována *Banachova *-algebra*. Je zjevné, že podmínka (1) zajišťuje spojitost involuce.

12.3.1 Příklad: Na algebře $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ se lze přesvědčit, že první definice je netriviální. Podle příkladů 12.1.4 a 12.2.1 je $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ $*$-algebra a současně topologická algebra vzhledem k τ_s; víme však, že involuce není spojitá vůči silné operátorové topologii, pokud uvažujeme netriviální případ $\dim \mathscr{H} = \infty$ (cvičení 5.10).

Naproti tomu slabá operátorová topologie vytváří z $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, resp. každé její $*$-podalgebry topologickou $*$-algebru; takovými algebrami se budeme zabývat v příští kapitole. Podle příkladu 12.2.4 a vztahu (5.1.3b) dále $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ Banachova $*$-algebra vzhledem k operátorové normě, jež má kromě (1) ještě dodatečnou vlastnost, totiž $\|B^*B\| = \|B\|^2$ pro každý operátor $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ (příklad 5.3.3).

Užijeme rovnosti tohoto typu, abychom vymezili jednu velice důležitou třídu algeber. Banachovu $*$-algebru $\mathscr{A}$ nazveme **C*-algebrou**, jestliže pro každý prvek $a \in \mathscr{A}$ platí

$$\|a^*a\| = \|a\|^2. \tag{2}$$

Uvedený příklad tedy říká, že $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ *je* C^**-algebra*, a totéž samozřejmě platí pro každou její $*$-podalgebru, jež je uzavřená v operátorové normě. Povšimněme si toho, že podmínka (2) implikuje (1): pro každé $a \in \mathscr{A}$ platí $\|a\|^2 = \|a^*a\| \leqq \|a^*\|\,\|a\|$, tj. $\|a\| \leqq \|a^*\|$, a podobně $\|a^*\| \leqq \|a\|$.

Probereme stručně základní vlastnosti C*-algeber. Začneme tím, že bez újmy na obecnosti lze uvažovat pouze C*-algebry s jedničkou:

12.3.2 Tvrzení: Nechť $\tilde{\mathscr{A}}$ je algebra získaná připojením jedničky k C*-algebře $\mathscr{A}$, potom existuje právě jedno rozšíření normy algebry $\mathscr{A}$, které činí z $\tilde{\mathscr{A}}$ C*-algebru.

Důkaz: Zmíněné rozšíření je definováno vztahem

$$\|[\alpha, a]\|_{\tilde{\mathscr{A}}} := \sup_{\|b\| \leqq 1} \|\alpha b + ab\| \, ; \tag{3}$$

ověření toho, že tato norma vytváří z $\tilde{\mathscr{A}}$ C*-algebru je poměrně pracné (viz [[Di 2]], § 1.3). Důkaz toho, že existuje nanejvýš jedna norma s uvedenou vlastností, přenecháváme čtenáři (cvičení 21). ■

Dále ukážeme, že $*$-morfismy C*-algeber jsou automaticky spojité; to plyne z výsledku cvičení 18 a následujícího tvrzení.

12.3.3 Tvrzení: Nechť $\varphi: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ je $*$-morfismus Banachovy $*$-algebry $\mathscr{A}$ do C*-algebry $\mathscr{B}$, potom pro všechna $a \in \mathscr{A}$ platí $\|\varphi(a)\|_{\mathscr{B}} \leqq \|a\|_{\mathscr{A}}$.

Důkaz: Předpokládejme nejprve, že $\mathscr{A}$ má jedničku, potom $\varphi(\mathscr{A})$ je podalgebra v $\mathscr{B}$ s jedničkou $\varphi(e)$, a pro každé $a \in \mathscr{A}$ tedy platí $\sigma_{\mathscr{B}}(\varphi(a)) \subset \sigma_{\varphi(\mathscr{A})}(\varphi(a))$. Dále existence prvku $(a - \lambda e)^{-1}$ implikuje existenci $(\varphi(a) - \lambda\varphi(e))^{-1} \equiv \varphi((a - \lambda e)^{-1})$, tj. $\sigma_{\varphi(\mathscr{A})}(\varphi(a)) \subset \sigma_{\mathscr{A}}(a)$. Tyto inkluze spolu s nerovností (12.2.6) dávají

$$r(\varphi(a)) \leqq r(a) \leqq \|a\|_{\mathscr{A}} \, . \tag{4}$$

Pro libovolný hermitovský prvek $b \in \mathscr{B}$ platí $\|b^2\|_{\mathscr{B}} = \|b\|^2_{\mathscr{B}}$, a odtud indukcí $\|b^m\|^{1/m}_{\mathscr{B}} = \|b\|_{\mathscr{B}}$ pro $m = 2^n$, takže v limitě $n \to \infty$ dostáváme

$$r(b) = \|b\|_{\mathscr{B}} \qquad \text{pro} \quad b = b^* \in \mathscr{B} \, . \tag{5}$$

Podle předpokladu je φ $*$-morfismus, proto je prvek $\varphi(a^*a)$ hermitovský a stačí jen vhodně zkombinovat relace (4) a (5),

$$\|\varphi(a)\|^2_{\mathscr{B}} = \|\varphi(a)^*\,\varphi(a)\|_{\mathscr{B}} = \|\varphi(a^*a)\|_{\mathscr{B}} = r(\varphi(a^*a)) \leqq$$
$$\leqq \|a^*a\|_{\mathscr{A}} \leqq \|a^*\|_{\mathscr{A}}\,\|a\|_{\mathscr{A}} = \|a\|^2_{\mathscr{A}} \, .$$

Pokud jednička v $\mathscr{A}$ nebo v obou algebrách chybí, doplníme je připojením jedničky na Banachovu $*$-algebru $\tilde{\mathscr{A}}$, resp. C*-algebru $\tilde{\mathscr{B}}$ (viz (3) a cvičení 21). Pro $*$-morfismus $\tilde{\varphi}: \tilde{\mathscr{A}} \to \tilde{\mathscr{B}}$ definovaný vztahem $\tilde{\varphi}(\alpha e_{\mathscr{A}} + a) = \alpha e_{\mathscr{B}} + \varphi(a)$ tvrzení platí, proto tím spíše platí pro $\varphi = \tilde{\varphi} \restriction \mathscr{A}$. ■

Podmínka (2), která hraje podstatnou roli v důkazech obou tvrzení, má řadu dalších důležitých důsledků. Pomocí ní lze např. odvodit různé spektrální vlastnosti pro prvky C*-algeber, jež jsou analogické vlastnostem omezených operátorů (cvičení 23–25). Tato podobnost není náhodná: v příštím paragrafu uvidíme, že každou C*-algebru lze věrně reprezentovat v nějakém $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. V C*-algebrách lze také podstatně zesílit závěr plynoucí z věty 12.2.8, což nám umožní v dalším vypouštět index charakterizující algebru v označení spektra.

12.3.4 Věta: Nechť $\mathscr{A}$ je C*-algebra a $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ je C*-podalgebra obsahující jedničku algebry $\mathscr{A}$, potom pro libovolný prvek $b \in \mathscr{B}$ platí $\sigma_{\mathscr{B}}(b) = \sigma_{\mathscr{A}}(b)$.

Inkluze $\sigma_{\mathscr{A}}(b) \subset \sigma_{\mathscr{B}}(b)$ platí zjevně, k důkazu opačné inkluze užijeme dvou pomocných tvrzení:

12.3.5 Lemma: Nechť $\mathscr{A}$ je Banachova algebra s jedničkou a $\{a_n\}$ je cauchyovská posloupnost v množině $\mathscr{R}$ všech invertibilních prvků algebry $\mathscr{A}$. Je-li $a = \lim_{n\to\infty} a_n \in bd(\mathscr{R}) = \bar{\mathscr{R}} \setminus \mathscr{R}$, pak platí $\lim_{n\to\infty} \|a_n^{-1}\| = \infty$.

Důkaz: Předpokládejme opak, potom existuje K takové, že $\|a_n^{-1}\| < K$ platí pro nekonečně mnoho n. Současně pro všechna dostatečně velká n platí $\|a_n - a\| < K^{-1}$, tudíž lze vybrat n tak, aby $\|e - a_n^{-1}a\| = \|a_n^{-1}(a_n - a)\| < 1$. Podle lemmatu 12.2.7 existuje potom prvek $(a_n^{-1}a)^{-1}$, a tedy také a^{-1} (cvičení 6). Prvek a tedy patří do množiny $\mathscr{R}$, jež je otevřená; to odporuje předpokladu $a \in bd(\mathscr{R})$. ■

12.3.6 Lemma: Nechť $\mathscr{B}$ je uzavřená podalgebra v Banachově algebře $\mathscr{A}$, jež obsahuje jedničku algebry $\mathscr{A}$, potom pro $b \in \mathscr{B}$ platí $bd(\sigma_{\mathscr{B}}(b)) \subset \sigma_{\mathscr{A}}(b)$.

Důkaz: Množiny $\mathscr{R}(\mathscr{A})$, $\mathscr{R}(\mathscr{B})$ všech invertibilních prvků v $\mathscr{A}$, resp. $\mathscr{B}$ jsou podle věty 12.2.5 otevřené a $\mathscr{R}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{R}(\mathscr{A})$. K libovolnému $b \in bd(\mathscr{R}(\mathscr{B}))$ lze vybrat posloupnost $\{b_n\} \subset \mathscr{R}(\mathscr{B})$ tak, že $b_n \to b$. Patří-li b současně do $\mathscr{R}(\mathscr{A})$, pak ze spojitosti inverze plyne $b_n^{-1} \to b^{-1}$, tj. posloupnost $\{\|b_n^{-1}\|\}$ je omezená. To je však v rozporu s tvrzením předchozího lemmatu, proto $\mathscr{R}(\mathscr{A}) \cap bd(\mathscr{R}(\mathscr{B})) = \emptyset$. Snadno se přesvědčíme, že $\lambda \in bd(\varrho_{\mathscr{B}}(b))$ implikuje $b - \lambda e \in bd(\mathscr{R}(\mathscr{B}))$. V takovém případě $b - \lambda e \notin \mathscr{R}(\mathscr{A})$, jinými slovy, $\lambda \in \sigma_{\mathscr{A}}(b)$. To znamená, že $\sigma_{\mathscr{A}}(b)$ obsahuje množinu $bd(\varrho_{\mathscr{B}}(b))$; ta je ale totožná s $bd(\sigma_{\mathscr{B}}(b)) = bd[\mathbb{C} \setminus \varrho_{\mathscr{B}}(b)]$. ■

Důkaz věty 4: Pro každá $a \in \mathscr{B}$ je prvek a^*a hermitovský, takže $\sigma_{\mathscr{B}}(a^*a) \subset \mathbb{R}$ (cvičení 24). Každý bod spektra je tedy hraniční (vzhledem k $\mathbb{C}$), proto $\sigma_{\mathscr{B}}(a^*a) = bd(\sigma_{\mathscr{B}}(a^*a)) \subset \sigma_{\mathscr{A}}(a^*a) \subset \sigma_{\mathscr{B}}(a^*a)$, tj. platí $\sigma_{\mathscr{B}}(a^*a) = \sigma_{\mathscr{A}}(a^*a)$. Nyní chceme dokázat totéž pro obecný prvek $b \in \mathscr{B}$. Zvolíme $\lambda \notin \sigma_{\mathscr{A}}(b)$ a označíme $a \equiv b - \lambda e$; je nutné ověřit, že $\lambda \notin \sigma_{\mathscr{B}}(b)$, tj. že $a^{-1} \in \mathscr{B}$. Víme, že to platí pro $c = a^*a$, kde $a \in \mathscr{B}$: pokud c^{-1} existuje, patří do $\mathscr{B}$. Prvek $a_l \equiv (a^*a)^{-1} a^*$ patří do $\mathscr{B}$, přičemž $a_l a = e$; podobně $a_r \equiv a^*(aa^*)^{-1} \in \mathscr{B}$ splňuje $aa_r = e$, takže z jednoznačnosti inverzního prvku (cvičení 4) plyne $a_l = a_r = a^{-1} \in \mathscr{B}$, tj. hledaná inkluze $\sigma_{\mathscr{B}}(b) \subset \sigma_{\mathscr{A}}(b)$. ■

Závěrem se zmíníme o několika způsobech, jimiž lze z daných C*-algeber konstruovat C*-algebry nové. Jsou to
(i) omezení na uzavřenou podalgebru v C*-algebře $\mathscr{A}$,
(ii) faktorizace C*-algebry $\mathscr{A}$ podle uzavřeného ideálu (cvičení 19). Netriviální je zde pouze ověření toho, že faktorová norma splňuje podmínku (2) – viz ⟦BR 1⟧, prop. 2.2.19 nebo ⟦Di2⟧, § 1.8.2,
(iii) nechť $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je nějaký (konečný nebo nekonečný) systém C*-algeber. V jejich kartézském součinu vybereme podmnožinu

$$\mathscr{A} = \{a = [a_\alpha] : a_\alpha \in \mathscr{A}_\alpha, \, \|[a_\alpha]\|_\infty := \sup_{\alpha \in I} \|a_\alpha\|_\alpha < \infty\} .$$

Každá z algeber $\mathscr{A}_\alpha$ je B-prostor, proto lze $\mathscr{A}$ chápat jako Banachův prostor $\prod_{\alpha \in I} \mathscr{A}_\alpha$ definovaný v § 3.1. Zavedeme-li v $\mathscr{A}$ navíc, rovněž po složkách, násobení a involuci, $[a_\alpha]\,[b_\alpha] := [a_\alpha b_\alpha]$ a $[a_\alpha]^* := [a_\alpha^*]$, stává se z $\mathscr{A}$ C*-algebra (dokažte!), kterou nazýváme *direktním* (*přímým*) *součtem* algeber $\mathscr{A}_\alpha$, $\alpha \in I$,
(iv) zavádí se rovněž tenzorový součin C*-algeber – viz komentář.

12.4 GNS-KONSTRUKCE

Nejprve se zmíníme o pozitivních prvcích a funkcionálech. Nechť $\mathscr{A}$ je C*-algebra s jedničkou. O prvku $a \in \mathscr{A}$ říkáme, že je **pozitivní**, jestliže je hermitovský a $\sigma(a) \subset [0, \infty)$. Symbolicky to zapisujeme nerovností $a \geqq 0$, dále $a \geqq b$ značí $a - b \geqq 0$. Množinu $\mathscr{P}$ ve vektorovém prostoru nazýváme *kuželem*, pokud prvky αa, $a + b$ patří do $\mathscr{P}$ pro všechna $a, b \in \mathscr{P}$, $\alpha \geqq 0$. Kužel je vždy konvexní množina: jsou-li α, $1 - \alpha$ nezáporná čísla, pak pro $a, b \in \mathscr{P}$ platí $\alpha a + (1 - \alpha)\, b \in \mathscr{P}$. Pozitivní prvky mají následující vlastnosti (viz komentář):

12.4.1 Věta: Nechť $\mathscr{A}$ je C*-algebra s jedničkou, potom pro všechna $a \in \mathscr{A}$ platí $a^*a \geqq 0$, a naopak, každý pozitivní prvek $b \in \mathscr{A}$ lze vyjádřit ve tvaru $b = a^*a$ pro nějaké $a \in \mathscr{A}$. Množina $\mathscr{A}_+ \equiv \{a \in \mathscr{A} : a \geqq 0\}$ je uzavřený kužel v $\mathscr{A}$ splňující podmínku $\mathscr{A}_+ \cap (-\mathscr{A}_+) = \{0\}$.

O lineárním funkcionálu f na *-algebře $\mathscr{A}$ říkáme, že je **pozitivní**, jestliže pro každé $a \in \mathscr{A}$ platí $f(a^*a) \geqq 0$. Je-li $\mathscr{A}$ Banachova *-algebra a pro pozitivní funkcionál platí $\|f\| = 1$, pak jej nazýváme **stavem** (na algebře $\mathscr{A}$). Pozitivitu funkcionálu označujeme $f \geqq 0$, nerovnost $f \geqq g$ opět znamená $f - g \geqq 0$. Je-li $\mathscr{A}$ C*-algebra s jedničkou, pak podle přechozí věty je funkcionál f pozitivní právě tehdy, když $f(b) \geqq 0$ pro každý pozitivní prvek $b \in \mathscr{A}$. Shrneme jednoduché vlastnosti pozitivních funkcionálů:

12.4.2 Tvrzení: Nechť f je pozitivní funkcionál na C*-algebře $\mathscr{A}$ s jedničkou, a nechť a, b jsou libovolné prvky algebry $\mathscr{A}$, potom platí
(a) je-li současně $f \leqq 0$, pak $f = 0$,
(b) $f(a^*) = \overline{f(a)}$,
(c) zobecněná Schwarzova nerovnost $|f(a^*b)|^2 \leqq f(a^*a)\, f(b^*b)$,
(d) $|f(a)|^2 \leqq f(e)\, f(a^*a) = f(e)^2\, r(a^*a)$,
(e) f je spojitý, přičemž $\|f\| = f(e)$,

Důkaz: Podle předpokladu je $f((a^* + \bar{\alpha}e)(a + \alpha e)) = f(a^*a) + \bar{\alpha}f(a) + \alpha f(a^*) + |\alpha|^2 f(e)^2 \geqq 0$; pro $\alpha = 1$, i odtud plyne, že veličiny $f(a) + f(a^*)$, resp. $i(f(a^*) - f(a))$ jsou reálné, tj. část (b). Dále $[a, b] \mapsto f(a^*b)$ je pozitivní symetrická seskvilineární forma (viz cvičení 1.9), proto platí (c), a odtud pak dosazením $b = e$ dostaneme první nerovnost v (d). Prvek $c = r(a^*a)\, e - a^*a$ je pozitivní, takže $f(c) \geqq 0$, což spolu s linearitou funkcionálu f dává $f(a^*a) \leqq f(e)\, r(a^*a)$. Dále užijeme části (c) a vztahů (12.2.6), (12.3.2): platí $|f(a)|^2 \leqq f(e)\, f(a^*a) \leqq f(e)^2\, r(a^*a) \leqq f(e)^2\, \|a^*a\| = f(e)^2\, \|a\|^2$. Tím jsme dokázali (d), spojitost f a současně nerovnost $\|f\| \leqq f(e)$; opačná nerovnost plyne z podmínky $\|e\| = 1$. Zbývá dokázat (a). Za uvedeného předpokladu pro všechna $a \in \mathscr{A}$ platí $f(a^*a) = 0$, a podle (d) je tedy $f(a) = 0$. ■

Naším cílem je nyní dokázat zmíněné tvrzení, že každou C*-algebru lze věrně reprezentovat v nějakém $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Důkaz je založen na konstruktivní metodě, již zformulovali ve čtyřicátých letech I. Gel'fand, M. Najmark a I. Segal.

12.4.3 Věta (GNS-konstrukce): Nechť $\mathscr{A}$ je Banachova $*$-algebra s jedničkou a f je pozitivní funkcionál na $\mathscr{A}$, potom existuje Hilbertův prostor $\mathscr{H}$ a reprezentace $\pi\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ s cyklickým vektorem ψ_0 tak, že pro každé $a \in \mathscr{A}$ platí $f(a) = (\psi_0, \pi(a)\psi_0)$. Je-li $\{\mathscr{H}', \pi', \psi_0'\}$ jiná trojice s těmito vlastnostmi, pak existuje unitární operátor $U \in \mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{H}')$ takový, že $\psi_0' = U\psi_0$ a $U\pi(a) = \pi'(a)\, U$ pro všechna $a \in \mathscr{A}$.

Důkaz: Východiskem pro konstrukci $\mathscr{H}$ je sama algebra $\mathscr{A}$. Zmínili jsme se již, že pro pozitivní f je zobrazení $\varphi\colon \mathscr{A} \times \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ definované vztahem $\varphi(a, b) = f(a^*b)$ pozitivní symetrická seskvilineární forma. Rovnost $f(a^*a) = 0$ obecně neznamená $a = 0$, ale tento nedostatek je možno odstranit standardní faktorizací. Množina $\mathscr{I}_f \equiv \{a\colon f(a^*a) = 0\}$ tvoří podprostor v $\mathscr{A}$: pomocí tvrzení 2c se snadno přesvědčíme, že $\alpha a + b \in \mathscr{I}_f$ pro všechna $a, b \in \mathscr{I}_f$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Navíc pro $a \in \mathscr{A}$, $b \in \mathscr{I}_f$ platí $|f((ab)^*ab)|^2 \leqq f((a^*ab)^*a^*ab)\, f(b^*b) = 0$, takže $\mathscr{I}_f$ je také *levý ideál* v $\mathscr{A}$. Na faktorovém prostoru $\mathscr{A}/\mathscr{I}_f$ zadáme skalární součin vztahem

$$(\tilde{a}, \tilde{b}) := f(a^*b)\,, \tag{1}$$

kde a, b jsou prvky reprezentující třídy $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathscr{A}/\mathscr{I}_f$. Aby byla definice korektní, nesmí záviset na reprezentantech $a \in \tilde{a}$, $b \in \tilde{b}$; k tomu stačí, aby $f(a^*b) = 0$, 402 jakmile aspoň jeden z prvků a, b patří do $\mathscr{I}_f$. Pro $b \in \mathscr{I}_f$ to plyne přímo z tvrzení 2c, pro $a \in \mathscr{I}_f$ užijeme navíc rovnosti $f(a^*b) = \overline{f(b^*a)}$. Je zřejmé, že $(.,.)$ je pozitivní symetrická seskvilineární forma; rovnost $(\tilde{a}, \tilde{a}) = 0$ nastane jen když $\tilde{a} = \mathscr{I}_f$, což je nulový prvek prostoru $\mathscr{A}/\mathscr{I}_f$. Tím jsme vybavili $\mathscr{A}/\mathscr{I}_f$ skalárním součinem; Hilbertův prostor $\mathscr{H}$ pak zkonstruujeme jako úplný obal prostoru $\mathscr{A}/\mathscr{I}_f$.

Obraťme se nyní k reprezentaci π. Pro libovolné $a \in \mathscr{A}$ definujeme na $\mathscr{A}/\mathscr{I}_f$ operátor $\pi_0(a)$: $\pi_0(a)\,\tilde{b} = \widetilde{ab}$, kde b je prvek reprezentující $\tilde{b}$; definice je konzistentní, protože $\mathscr{I}_f$ je levý ideál v $\mathscr{A}$. Operátor $\pi_0(a)$ je zjevně lineární. Ověříme, že je omezený. Pro libovolné $b \in \mathscr{A}/\mathscr{I}_f$ platí

$$\|\pi_0(a)\,\tilde{b}\|^2 = (\widetilde{ab}, \widetilde{ab}) = f(b^*a^*ab) \equiv \varphi_b(a^*a)\,,$$

kde $\varphi_b(c) := f(b^*cb)$. Z uvedené rovnosti mj. plyne, že funkcionál φ_b je pozitivní, proto lze aplikovat tvrzení 2e, jež dává

$$\|\pi_0(a)\,\tilde{b}\|^2 \leqq \varphi_b(e)\,\|a^*a\|_{\mathscr{A}} \leqq f(b^*b)\,\|a\|_{\mathscr{A}}^2 = \|\tilde{b}\|^2\,\|a\|_{\mathscr{A}}^2\,.$$

Podle věty 3.2.4 pak existuje spojité rozšíření operátoru $\pi_0(a)$ na prostor $\mathscr{H}$, jež označíme $\pi(a)$. Norma operátoru přitom zůstává zachována, tj.

$$\|\pi(a)\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H})} \leqq \|a\|_{\mathscr{A}}\,. \tag{2}$$

Ověříme, že π je reprezentace algebry $\mathscr{A}$. Podprostor $\mathscr{A}/\mathscr{I}_f$ je hustý v $\mathscr{H}$, proto stačí pro libovolná $a, b \in \mathscr{A}$, $\tilde{c}, \tilde{d} \in \mathscr{A}/\mathscr{I}_f$, $\alpha \in \mathbb{C}$ dokázat vztahy

$$\begin{aligned} \pi(\alpha a + b)\,\tilde{c} &= \alpha\pi(a)\,\tilde{c} + \pi(b)\,\tilde{c}\,, \\ \pi(ab)\,\tilde{c} &= \pi(a)\,\pi(b)\,\tilde{c}\,, \\ (\tilde{c}, \pi(a^*)\,\tilde{d}) &= (\tilde{c}, \pi(a)^*\,\tilde{d})\,. \end{aligned} \tag{3}$$

První dva z nich plynou přímo z definice, k ověření třetího využijeme navíc vztahu (1): platí $(\tilde{c}, \pi(a^*)\,\tilde{d}) = (\tilde{c}, (a^*d)^\sim) = f(c^*a^*d) = (\widetilde{ac}, \tilde{d}) = (\pi(a)\,\tilde{c}, \tilde{d})$, což je požadovaný výsledek.

Platí $\pi(\mathscr{A})\,\tilde{e} = \mathscr{A}/\mathscr{I}_f$ a podprostor $\mathscr{A}/\mathscr{I}_f$ je hustý v $\mathscr{H}$, proto je $\psi_0 \equiv \tilde{e}$ cyklickým vektorem reprezentace π. Snadno se přesvědčíme, že pro každé $a \in \mathscr{A}$ platí

$$(\psi_0, \pi(a)\,\psi_0) = (\tilde{e}, \tilde{a}) = f(e^*a) = f(a)\,. \tag{4}$$

Tím jsme dokázali, že existuje alespoň jedna trojice $\{\mathscr{H}, \pi, \psi_0\}$ s požadovanými vlastnostmi. Každou takovou trojici nazveme *GNS-trojicí* (příslušnou algebře $\mathscr{A}$ a funkcionálu f) a o π mluvíme jako o *GNS-reprezentaci.*

Předpokládejme konečně, že $\{\mathscr{H}', \pi', \psi_0'\}$ je jiná GNS-trojice. Označíme $\mathscr{H}_0 = \pi(\mathscr{A})\,\psi_0 \equiv \mathscr{A}/\mathscr{I}_f$ a $\mathscr{H}_0' = \pi'(\mathscr{A})\,\psi_0'$ a definujeme bijektivní operátor $U_0: \mathscr{H}_0 \to \mathscr{H}_0'$ vztahem

$$U_0\pi(a)\,\psi_0 = \pi'(a)\,\psi_0' \tag{5}$$

pro všechna $a \in \mathscr{A}$. Ze vztahů (3), (4) plyne rovnost

$$\| U_0 \pi(a)\, \psi_0 \|^2_{\mathscr{H}'} = \| \pi'(a)\, \psi_0' \|^2_{\mathscr{H}'} = (\psi_0', \pi'(a^* a)\, \psi_0')_{\mathscr{H}'} = f(a^* a) = \| \pi(a)\, \psi_0 \|^2,$$

tj. U_0 zachovává normu. Současně je lineární, a protože podprostory $\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_0'$ jsou podle předpokladu husté v $\mathscr{H}$, resp. $\mathscr{H}'$, lze jej spojitě rozšířit (viz tvrzení 5.5.4) na unitární operátor $U \in \mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{H}')$. Dosadíme-li $a = e$ do vztahu (5), dostaneme $U\psi_0 = \psi_0'$; zpětné dosazení do (5) pak dává $U\pi(a)\, \psi_0 = \pi'(a)\, U\psi_0$. Na tuto rovnost aplikujeme operátor $\pi'(b)$:

$$\pi'(b)\, U\pi(a)\, \psi_0 = \pi'(ba)\, U\psi_0 = U\pi(ba)\, \psi_0 = U\pi(b)\, \pi(a)\, \psi_0 ,$$

a protože podprostor $\pi(\mathscr{A})\, \psi_0$ je hustý v $\mathscr{H}$, plyne odtud $\pi'(b)\, U = U\pi(b)$ pro libovolné $b \in \mathscr{A}$. ■

Uveďme pro ilustraci několik jednoduchých příkladů:

12.4.4 Příklad: Nechť $\mathscr{A}$ je uzavřená podalgebra v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ obsahující jednotkový operátor. Pro libovolně vybraný vektor $\psi \in \mathscr{H}$ je funkcionál

$$f_\psi : f_\psi(B) = (\psi, B\psi) \qquad \text{pro všechna} \quad B \in \mathscr{A} \tag{6}$$

zjevně pozitivní. Podprostor $\mathscr{A}_\psi \subset \mathscr{H}$ je invariantní vůči operátorům algebry $\mathscr{A}$, proto i uzavřený podprostor $\mathscr{H}_\psi \equiv \overline{\mathscr{A}_\psi}$ je invariantní (cvičení 2.30). To nám umožňuje definovat zobrazení $\pi_\psi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H}_\psi)$ vztahem

$$\pi_\psi(B) = B_\psi \equiv B \restriction \mathscr{H}_\psi . \tag{7}$$

Není těžké se přesvědčit, že $\{\mathscr{H}_\psi, \pi_\psi, \psi\}$ je GNS-trojice odpovídající funkcionálu (6). Zvláště jednoduchá situace nastává, když $\mathscr{H}_\psi = \mathscr{H}$; potom π_ψ je identické zobrazení a ψ je současně cyklickým vektorem operátorové algebry $\mathscr{A}$.

12.4.5 Příklad: Ne každý pozitivní funkcionál na C*-algebře $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ lze vyjádřit ve tvaru (6). Vyšetříme obecnější případ. Nechť W je statistický operátor na $\mathscr{H}$ (viz § 6.4 a vztahy (6.2.3b), resp. (6.2.5) se spektrálním rozkladem $W = \sum_{k=1}^{N} w_k E_k$, kde $N = \dim (\ker W)^\perp$ a E_k jsou jednorozměrné projektory odpovídající jednotkovým vlastním vektorům ψ_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, s nenulovými vlastními hodnotami w_k. Tyto hodnoty splňují podmínku $\operatorname{Tr} W = \sum_{k=1}^{N} w_k = 1$. Pomocí operátoru W definujeme na algebře $\mathscr{A}$ pozitivní funkcionál

$$f_W : f_W(B) = \operatorname{Tr} WB = \sum_{k=1}^{N} w_k(\psi_k, B\psi_k) . \tag{8}$$

Podprostory $\mathscr{H}_k = \overline{\mathscr{A}\psi_k}$ jsou podobně jako v předchozím příkladě invariantní vůči algebře $\mathscr{A}$. Sestrojíme Hilbertův prostor $\mathscr{H}_W$ jako direktní součet $\sum_{k=1}^{N}{}^{\oplus} \mathscr{H}_k^W$, kde prostor $\mathscr{H}_k^W$ získáme z $\mathscr{H}_k$ změnou skalárního součinu na $(.,.)_k \equiv w_k(.,.)$. Jinými slovy, prvky prostoru $\mathscr{H}_W$ jsou posloupnosti $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^N$, kde $\varphi_k \in \mathscr{H}_k$, takové, že $\|\Phi\|_W < \infty$; přitom norma $\|.\|_W$ odpovídá skalárnímu součinu

$$(\Phi, \chi)_W = \sum_{k=1}^{N} (\varphi_k, \chi_k)_k = \sum_{k=1}^{N} w_k(\varphi_k, \chi_k)\,.$$

K danému $B \in \mathscr{A}$ sestrojíme operátor $\pi_W(B) \equiv B_W$ na $\mathscr{H}_W$ následovně:

$$B_W\{\varphi_k\}_{k=1}^N := \{B\varphi_k\}_{k=1}^N\,; \tag{9}$$

snadno se přesvědčíme, že $\|B_W\| \leqq \|B\|$. Pokud $\mathscr{A}$ obsahuje jednotkový operátor, patří do $\mathscr{H}_W$ i jednotkový vektor $\Psi_W \equiv \{\psi_k\}_{k=1}^N$, pro nějž platí

$$(\Psi_W, \pi_W(B)\,\Psi_W)_W = f_W(B)\,.$$

Jednoduše lze též ověřit, že zobrazení $\pi_W : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H}_W)$ je reprezentace algebry $\mathscr{A}$. Přesto ještě $\{\mathscr{H}_W, \pi_W, \Psi_W\}$ nemusí být GNS-trojice odpovídající f_W, protože Ψ_W obecně není cyklickým vektorem reprezentace π_W. Jako příklad lze vzít algebru skalárních operátorů $\mathbb{C}(\mathscr{H}) := \{\alpha I:\ \alpha \in \mathbb{C}\}$, pro niž $\pi_W(\mathbb{C}(\mathscr{H}))\,\Psi_W = (\Psi_W)_{\mathrm{lin}}$; tato množina zjevně není hustá v $\mathscr{H}_W$, jakmile $N > 1$. Dokážeme však, že vektor *Ψ_W je cyklický pro π_W, pokud projektory E_k, $k = 1, \ldots, N$, patří do algebry $\mathscr{A}$.* Předpokládejme, že pro vektor $\Phi \in \mathscr{H}_W$ a všechna $B \in \mathscr{A}$ platí

$$(\Phi, \pi_W(B)\,\Psi_W)_W = \sum_{k=1}^{N} w_k(\varphi_k, B\psi_k) = 0\,.$$

Vezmeme-li $B = CE_n$, kde $C \in \mathscr{A}$, dostaneme odtud $(\varphi_n, C\psi_n) = 0$ pro $n = 1, \ldots, N$; množina $\mathscr{A}\psi_n$ je však hustá v $\mathscr{H}_n$, proto platí $\varphi_n = 0$, $n = 1, \ldots, N$, a tudíž také $\Phi = 0$. V tomto případě je tedy $\{\mathscr{H}_W, \pi_W, \Psi_W\}$ hledaná GNS-trojice odpovídající funkcionálu (8). Povšimněme si rovněž toho, že pro $N > 1$ je reprezentace π_W *reducibilní*: ze vztahu (9) plyne $\pi_W(B) = \sum_{k=1}^{N}{}^{\oplus}\, \pi_k(B)$, kde $\pi_k(B) \equiv$ $\equiv B \restriction \mathscr{H}_k$ pro každé $B \in \mathscr{A}$.

12.4.6 Příklad: GNS-reprezentace *nemusí být věrná.* Vezměme Hilbertův prostor $\mathscr{H}$, jenž je ortogonálním součtem podprostorů $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$ a algebru $\mathscr{A} = \mathscr{B}(\mathscr{H}_1) \oplus \mathscr{B}(\mathscr{H}_2) \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$. K libovolně zvolenému nenulovému vektoru $\psi \in \mathscr{H}_1$ vezmeme funkcionál (6), jemuž odpovídající GNS-reprezentace je podle příkladu 4 dána vztahem $\pi_\psi(B) = B_1$ pro každé $B = B_1 \oplus B_2 \in \mathscr{A}$, neboť $\mathscr{H}_\psi = \mathscr{H}_1$. Tato reprezentace má zjevně netriviální jádro $\mathscr{A}_2 = \{B \in \mathscr{A}:\ B_1 = 0\}$, jež tvoří uzavřený ideál v $\mathscr{A}$ (nikoli však v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$!).

Posledně uvedený příklad ukazuje, že věta 3 sama o sobě ještě neřeší zmíněný problém. Naším cílem je ukázat, že pro libovolnou C^*-algebru $\mathscr{A}$ existuje reprezentace $\pi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$, jež je nejen věrná, ale i reprodukuje strukturu $\mathscr{A}$ po všech stránkách. K tomu je nutné, aby π byla současně izometrií; v takovém případě jí budeme říkat *izometrická reprezentace*. Abychom takovou reprezentaci mohli sestrojit pomocí věty 3, musíme mít k dispozici dostatečně bohatou zásobu pozitivních funkcionálů na $\mathscr{A}$:

12.4.7 Tvrzení: Nechť $\mathscr{A}$ je C^*-algebra s jedničkou. Ke každému nenulovému prvku $a \in \mathscr{A}$ existuje pozitivní funkcionál f_a takový, že $f_a(e) = 1$ (takže f_a je stav na $\mathscr{A}$) a současně $f_a(a^*a) = \|a\|^2$.

Důkaz je obměnou důkazu Hahnova-Banachova teorému (viz komentář). ■

12.4.8 Věta: Pro každou C^*-algebru $\mathscr{A}$ existuje izometrická reprezentace $\pi:\mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ na nějakém Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$.

Důkaz: Je zřejmé, že bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat případ, kdy $\mathscr{A}$ obsahuje jedničku. Každému nenulovému prvku $a \in \mathscr{A}$ lze podle předchozího tvrzení přiřadit pozitivní funkcionál f_a, a tomu dále odpovídá nějaká GNS-trojice $\{\mathscr{H}_a, \pi_a, \psi_a\}$; skalární součin v $\mathscr{H}_a$ označíme $(.,.)_a$. Sestrojíme Hilbertův prostor $\mathscr{H}$ jako direktní součet (viz § 4.5)

$$\mathscr{H} = \sum_{0 \neq a \in \mathscr{A}}^{\oplus} \mathscr{H}_a ; \tag{10}$$

připomeňme, že libovolný vektor $\Phi = \{\varphi_a : 0 \neq a \in \mathscr{A}\} \in \mathscr{H}$ má nejvýše spočetně mnoho nenulových komponent. Reprezentaci π sestrojíme jako direktní součet reprezentací π_a: pro libovolné $b \in \mathscr{A}$ definujeme $\pi(b)\,\Phi := \{\pi_a(b)\,\varphi_a : 0 \neq a \in \mathscr{A}\}$. Podle tvrzení 12.3.3 platí $\|\pi_a(b)\|_a \leqq \|b\|_{\mathscr{A}}$, a proto s použitím vztahu (4.5.7a) snadno ukážeme, že

$$\|\pi(b)\|_b \leqq \|\pi(b)\| \leqq \|b\|_{\mathscr{A}}, \tag{11}$$

tj. že operátor $\pi(b)$ je omezený. Snadno se přesvědčíme, že zobrazení $\pi: \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je reprezentace. Dokážeme, že je izometrická. Z věty 3 a tvrzení 7 plyne, že cyklické vektory ψ_a jsou jednotkové, $\|\psi_a\|_a^2 = f_a(e) = 1$. Potom platí

$$\|\pi_b(b)\|_b^2 \geqq \|\pi_b(b)\,\psi_b\|_b^2 = (\psi_b, \pi_b(b)^*\,\pi_b(b)\,\psi_b)_b = f_b(b^*b) = \|b\|_{\mathscr{A}}^2 ;$$

Zkombinujeme-li tento vztah s nerovností (11), dostaneme $\|b\|_{\mathscr{A}} \leqq \|\pi_b(b)\| \leqq \leqq \|\pi(b)\| \leqq \|b\|_{\mathscr{A}}$, tj. požadovanou vlastnost, $\|\pi(b)\| = \|b\|_{\mathscr{A}}$ pro všechna $b \in \mathscr{A}$. ■

Reprezentace π sestrojená v důkazu je samozřejmě věrná, neboť z izometričnosti snadno plyne její injektivita. K praktickým účelům se však nehodí: prostor $\mathscr{H}$ je „nadměrně velký" (každý vektor z $\mathscr{H}$ má např. nekonečně mnoho komponent odpovídajících násobkům jediného prvku $\mathscr{A}$) a reprezentace π je „až příliš" reducibilní. Izometrické reprezentace C^*-algeber konstruujeme zpravidla jinými způsoby; význam věty 8 spočívá v tom, že zajišťuje jejich existenci.

406 Závěrem se zmíníme o jiném použití GNS-reprezentace. Nechť $\mathscr{A}$ je opět C^*-algebra s jedničkou a $S_{\mathscr{A}}$ je množina všech stavů na $\mathscr{A}$. Snadno se přesvědčíme, že tato množina je konvexní (viz komentář k § 1.1): pro $f_1, f_2 \in S_{\mathscr{A}}$ a nezáporná čísla α, $1-\alpha$ je $f = \alpha f_1 + (1-\alpha) f_2$ pozitivní funkcionál, pro nějž platí $\|f\| = f(e) = \alpha f_1(e) + (1-\alpha) f_2(e) = 1$, tj. stav na $\mathscr{A}$. Extremální body množiny $S_{\mathscr{A}}$ budeme nazývat **čistými stavy**. Ukazuje se, že čistota stavu $f \in S_{\mathscr{A}}$ souvisí s vlastnostmi odpovídající GNS-reprezentace.

12.4.9 Věta (*Segal*): Nechť $\mathscr{A}$ je C^*-algebra s jedničkou. Stav $f \in S_{\mathscr{A}}$ je čistý právě tehdy, když jemu odpovídající GNS-reprezentace π_f je ireducibilní.

Komentář

§ **12.1:** Uvedená definice komutantu se liší od definice komutantu operátorové množiny, proto bývá zvykem centrum *operátorové* algebry psát ve tvaru $\mathscr{A} \cap \mathscr{A}'$. Místo morfismus se často říká *homomorfismus* (algebry $\mathscr{A}$ do algebry $\mathscr{B}$). Reprezentacím $*$-algeber ve smyslu uvedené definice se říkává *symetrické*. Někdy se užívá termínu *unitárně ekvivalentní* reprezentace, pokud se berou v úvahu též ekvivalence zprostředkované jinými regulárními operátory.

§ **12.2:** O teorii analytických vektorových funkcí se lze poučit např. v ⟦DS 1⟧, § III.4; ⟦Nai 1⟧, §§ 3.12, 4.7; ⟦Ru 2⟧, kap. 3 apod. Alternativní způsob důkazu věty 8, jenž umožňuje vyhnout se použití Cauchyho formule, je uveden v ⟦BR 1⟧, tvrzení 2.2.2.

§ **12.3:** Pojem C^*-algebry zavedli I. M. Gel'fand a M. A. Najmark (1943). Ve stejném smyslu se užívá i termínu B^*-algebra (⟦Ru 2⟧, kap. 11; ⟦Tich⟧); normované algebře splňující podmínku (2) se někdy říká totálně regulární algebra (⟦Nai 1⟧, §§ 16, 24). V původní definici C^*-algebry byl též obsažen požadavek, že všechny prvky $e + a^*a$ musí být invertibilní, teprve později se vyjasnilo, že je splněn automaticky – viz větu 12.4.1, a též ⟦BR 1⟧, komentář ke kap. 2.

- Struktura komutativních C^*-algeber je obsahem Gel'fandovy teorie, o níž se lze poučit např. v ⟦BR 1⟧, § 2.3.5; ⟦Mau⟧, kap. VIII; ⟦Nai 1⟧, kap. III; ⟦Ru 2⟧, kap. 11; ⟦Sa⟧, § 1.2; [Si 1], § 4. Podle ní je každá taková algebra s jedničkou izometricky $*$-izomorfní algebře $C(\Delta)$ spojitých funkcí na kompaktním Hausdorffově prostoru Δ, který je tvořen všemi multiplikativními (tj. takovými, že $f(a)\,f(b) = f(ab)$) funkcionály na $\mathscr{A}$, a izomorfismus $\mathscr{A} \to C(\Delta)$ je dán tzv. Gel'fandovou transformací, $\hat{a}(f) := f(a)$ pro všechna $f \in \Delta$. Aplikace Gel'fandovy teorie na důkaz spektrálního teorému se probírá v ⟦Mau⟧, § IX.2; ⟦Nai 1⟧, § 17.4; ⟦Ru 2⟧, kap. 12.
- Místo „direktní součet" se někdy říká C^*-součin algeber $\mathscr{A}_i$, $i \in I$ – viz ⟦Di 2⟧, § 1.3.3. Direktní součet C^*-algeber není totožný s direktním součtem Banachových prostorů $\mathscr{A}_i$, $i \in I$ (viz § 3.1). Definice tenzorového součinu C^*-algeber není jednoduchá, protože existuje více kandidátů na roli normy v $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ – viz komentář k § 4.6. Nejčastěji se užívá toho, že každá C^*-algebra $\mathscr{A}_j$ má věrnou reprezentaci $\pi_j\colon \mathscr{A}_j \to \mathscr{B}(\mathscr{H}_j)$ a za realizaci tenzorového součinu $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ se

považuje součin podmnožin $\pi(\mathscr{A}_1) \otimes \pi(\mathscr{A}_2)$, kterou dostaneme jako uzávěr množiny $\{A_1 \otimes A_2 : A_j \in \mathscr{A}_j\}_{\text{lin}}$ vůči operátorové normě. Ukazuje se, že všechny takovéto realizace jsou vzájemně izomorfní – ⟦BR1⟧, § 2.2.2, ⟦Di2⟧, § 2.12.15. Obecnou diskusi způsobu zavedení tenzorového součinu C*-algeber lze najít v [Lan1].

§ **12.4:** Pojem kužele se zavádí s různými obměnami – viz např. ⟦Nai 1⟧, § 3.10; ⟦RS 1⟧, § IV.4. Důkaz věty 1 využívá některých výsledků funkcionálního počtu na C*-algebrách; lze jej najít v ⟦BR 1⟧, § 2.2.2; ⟦Di 2⟧, § 1.6; ⟦Ru 2⟧, § 11.28; ⟦Sa⟧, § 1.4. Tvrzení 2 platí rovněž pro Banachovy algebry s jedničkou, ale důkaz je pak složitější – viz ⟦Ru 2⟧, § 11.31. Další vlastnosti pozitivních funkcionálů lze najít v ⟦BR 1⟧, § 2.3.2.

• GNS-konstrukce byla zformulována v pracích [GN 1], [Seg 1]. Podle věty 3 jsou všechny GNS-reprezentace odpovídající dvojici $\mathscr{A}, f$ vzájemně ekvivalentní, proto lze mluvit o vlastnostech takovéto reprezentace bez bližší specifikace. Důkaz tvrzení 7 je uveden v ⟦Ru 2⟧, věta 12.39; viz též ⟦BR 1⟧, lemma 2.3.2; ⟦Di 2⟧, věta 2.6.1.

• Čistý stav f na $\mathscr{A}$ lze ekvivalentně definovat jako takový, že nerovnost $f \geqq g$ pro pozitivní funkcionál g implikuje $g = \lambda f$, $\lambda \in [0, 1]$ – viz ⟦BR 1⟧, § 2.3.2. Neextremálním bodům množiny S se říká *smíšené* stavy. Věta 9 byla odvozena v [Seg 1]; její důkaz lze najít např. v ⟦BR 1⟧, věta 2.3.19; ⟦Di 2⟧, § 2.5.

Cvičení

1. Dokažte, že $\dim \mathscr{B}(\mathscr{H}) = (\dim \mathscr{H})^2$. Sestrojte bázi v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ pro $\dim \mathscr{H} < \infty$.

2. Každá algebra $\mathscr{A}$ má nanejvýš jednu jedničku. Nemá-li žádnou, můžeme sestrojit rozšíření $\tilde{\mathscr{A}}$ jako množinu párů $[\alpha, a]$, kde $\alpha \in \mathbb{C}$, $a \in \mathscr{A}$, v níž definujeme $[\alpha, a] + \gamma[\beta, b] := [\alpha + \gamma\beta, a + \gamma b]$ a $[\alpha, a]\,[\beta, b] := [\alpha\beta, \alpha b + \beta a + ab]$; prvek $[1, 0]$ pak tvoří jedničku v $\tilde{\mathscr{A}}$.

3. Dokažte tvrzení 12.1.2.

4. Ke každému $a \in \mathscr{A}$ existuje nanejvýš jeden prvek a^{-1}. Prvek a je invertibilní právě tehdy, když nepatří do žádného jednostranného ideálu algebry $\mathscr{A}$.

5. Každá abelovská podalgebra v $\mathscr{A}$ je podalgebrou některé maximální abelovské podalgebry.

6. Nechť $\mathscr{A}$ je algebra s jedničkou, potom
(a) jsou-li prvky a, ab invertibilní, je i b invertibilní,
(b) jsou-li prvky ab, ba invertibilní, jsou i a, b invertibilní,
(c) platí-li $ab = e$, je prvek ba idempotentní, obecně však různý od jedničky,
(d) je-li $\dim \mathscr{A} < \infty$, pak $ab = e$ implikuje $ba = e$.
Návod: (c) Užijte operátorů S^*, S z příkladu 5.1.7.
(d) Je-li $\{c_j\}_{j=1}^n$ báze v $\mathscr{A}$, pak $\{bc_j\}_{j=1}^n$ je rovněž báze a pro libovolné $c \in \mathscr{A}$ platí $bac = c$.

408 7. Nechť $\mathscr{A}$ je algebra s jedničkou, potom
(a) je-li prvek $e - ab$ invertibilní, je i $e - ba$ invertibilní,
(b) platí $\sigma_{\mathscr{A}}(ab) \setminus \{0\} = \sigma_{\mathscr{A}}(ba) \setminus \{0\}$, přičemž bod $\lambda = 0$ může obecně patřit jen do jednoho ze spekter,
(c) je-li a invertibilní, platí $\sigma_{\mathscr{A}}(ab) = \sigma_{\mathscr{A}}(ba)$.
Návod: Vyšetřete prvek $e + b(e - ab)^{-1} a$ a užijte výsledku předchozího cvičení.

8. V algebře $\mathscr{A}$ s jedničkou pro každý invertibilní prvek platí $\sigma_{\mathscr{A}}(a^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma_{\mathscr{A}}(a)\}$.
Návod: Užijte vztahů $b - \mu e = \mu b(\mu^{-1} e - b^{-1})$ pro $b = a, a^{-1}$, $\mu = \lambda, \lambda^{-1}$.

9. Nechť $\mathscr{A}$ je $*$-algebra, potom
(a) každý prvek lze vyjádřit jako lineární kombinaci dvou hermitovských prvků; má-li $\mathscr{A}$ jedničku, platí $e^* = e$,
(b) a^* je invertibilní právě tehdy, když a je invertibilní, přičemž $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$,
(c) pro každé $a \in \mathscr{A}$ platí $\sigma_{\mathscr{A}}(a^*) = \overline{\sigma_{\mathscr{A}}(a)}$.

10. Nechť $\mathscr{A}$ je $*$-algebra, potom
(a) podalgebra $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ je $*$-podalgebra právě tehdy, když $\mathscr{B}^* = \mathscr{B}$; průnik libovolného systému $*$-podalgeber ($*$-ideálů) v $\mathscr{A}$ je $*$-podalgebra ($*$-ideál),
(b) každý $*$-ideál v $\mathscr{A}$ je oboustranný,
(c) pro podmnožinu $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ platí $\mathscr{A}_0^*(\mathscr{S}) = \mathscr{A}_0(\mathscr{S} \cup \mathscr{S}^*)$,
(d) je-li $\mathscr{S}$ symetrická, pak $\mathscr{S}'$ a $\mathscr{S}''$ jsou $*$-podalgebry v $\mathscr{A}$.

11. Množina $C(M)$ všech spojitých komplexních funkcí na kompaktním prostoru M, na níž definujeme přirozeným způsobem algebraické operace a involuci vztahem $(f^*)(x) = \overline{f(x)}$ pro všechna $x \in M$, je abelovská $*$-algebra; norma $\|.\|_\infty$ z ní vytváří C^*-algebru.

12. Morfismus $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ zachovává algebraickou strukturu. Je-li surjektivní, pak φ-obraz jedničky (ideálu, maximálního ideálu, maximální abelovské podalgebry) je jednička (ideál, ...) v $\mathscr{A}$, a naopak φ-vzor podalgebry (ideálu) je podalgebra (ideál) v $\mathscr{A}$. Je předpoklad surjektivity podstatný? Za jakých předpokladů je $\varphi^{(-1)}(\mathscr{B})$ komutativní? Najděte příklad morfismu, při němž obraz jedničky (ideálu) není jednička (ideál).

13. Nechť $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ je ($*$-)morfismus. Jeho jádro $\mathscr{J}$ je ($*$-)ideál v $\mathscr{A}$ a platí $\varphi = \pi \circ \varphi_c^{(\mathscr{J})}$, kde $\varphi_c^{(\mathscr{J})}$ je kanonický morfismus $\mathscr{A} \to \mathscr{A}/\mathscr{J}$ a $\pi : \mathscr{A}/\mathscr{J} \to \varphi(\mathscr{A})$ je ($*$-)izomorfismus definovaný vztahem $\pi(\tilde{a}) = \varphi(a)$ pro všechna $a \in \mathscr{A}$.

14. Nechť $\mathscr{A}$ je topologická algebra a $\mathscr{S}$, resp. $\mathscr{B}$ je její podmnožina, resp. podalgebra, potom
(a) $\overline{\mathscr{B}}$ je uzavřená podalgebra v $\mathscr{A}$. Je-li $\mathscr{B}$ abelovská, pak totéž platí pro $\overline{\mathscr{B}}$; každá maximální abelovská podalgebra je uzavřená,
(b) platí $\mathscr{A}(\mathscr{S}) = \overline{\mathscr{A}_0(\mathscr{S})}$,

(c) podalgebry $\mathscr{S}'$, $\mathscr{S}''$ jsou uzavřené a platí $(\bar{\mathscr{S}})' = \mathscr{S}'$,
(d) je-li $\mathscr{B}$ ideál, $\bar{\mathscr{B}} \neq \mathscr{A}$, pak $\bar{\mathscr{B}}$ je rovněž ideál v $\mathscr{A}$; každý maximální ideál je uzavřený,
(e) jádro spojitého morfismu $\varphi: \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ je uzavřený ideál v $\mathscr{A}$.
Návod: (a, d) Aplikujte výsledky cvičení 2.30 na zobrazení $g_a, f_b, h_b \equiv g_b - f_b$. (c) Množinu $\mathscr{S}'$ lze zapsat jako průnik komutantů jednobodových množin, jež jsou uzavřené.

15. Operátorové násobení v algebře $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ je odděleně spojité vzhledem k topologiím τ_s a τ_w.

16. Nechť $\mathscr{A}$ je Banachova algebra s jedničkou. Rezolventa prvku $a \in \mathscr{A}$ je pro $|\lambda| > r(a)$ dána vztahem (12.2.3). Je-li navíc $|\lambda| > \|a\|$, pak platí $\|r_a(\lambda)\| \leqq$ $\leqq (|\lambda| - \|a\|)^{-1}$.

17. Spektrum libovolného prvku Banachovy algebry s jedničkou je neprázdná kompaktní množina.

18. Nechť $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ jsou Banachovy algebry, potom
(a) morfismus $\varphi: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ je spojitý právě tehdy, když existuje konstanta C taková, že pro všechna $a \in \mathscr{A}$ platí $\|\varphi(a)\|_{\mathscr{B}} \leqq C\|a\|_{\mathscr{A}}$,
(b) jsou-li $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ úplné obaly normovaných algeber $\mathscr{A}_0$, resp. $\mathscr{B}_0$, pak každý spojitý morfismus $\varphi_0: \mathscr{A}_0 \to \mathscr{B}_0$ má právě jedno spojité rozšíření $\varphi: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$,
(c) jestliže existuje spojitý izomorfismus $\varphi: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, pak jsou $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ topologicky izomorfní.
Návod: (a) Ohledně nutné i postačující podmínky viz tvrzení 3.2.3. (b) Úvaha je analogická důkazu věty 6.2.4; navíc je nutno ověřit $\varphi(a)\,\varphi(b) = \varphi(ab)$. (c) Užijte věty o inverzním operátoru.

19. Nechť $\mathscr{J}$ je uzavřený ideál v Banachově algebře $\mathscr{A}$, potom $\mathscr{A}/\mathscr{J}$ je Banachova algebra vzhledem k normě $\|a\| := \inf_{b \in \mathscr{J}} \|a - b\|_{\mathscr{A}}$.
Návod: Užijte výsledků uvedených v komentáři k § 3.1 a ověřte splnění podmínek (na2), (na3).

20. Nechť $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ jsou Banachovy algebry a $\mathscr{J}$ je jádro spojitého surjektivního morfismu $\varphi: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, potom algebry $\mathscr{A}/\mathscr{J}$ a $\mathscr{B}$ jsou topologicky izomorfní.
Návod: Užijte zobrazení $\pi: \mathscr{A}/\mathscr{J} \to \mathscr{B}$ definovaného ve cvičení 13.

21. Nechť $\tilde{\mathscr{A}}$ je algebra vzniklá připojením jedničky k normované algebře $\mathscr{A}$, potom norma $\|[\alpha, a]\| := |\alpha| + \|a\|_{\mathscr{A}}$ z ní vytváří normovanou algebru.

22. V každé C*-algebře platí $\|a\| = \sup_{\|b\| \leqq 1} \|ab\| = \sup_{\|b\| = 1} \|ab\| = \max_{\|b\| = 1} \|ab\|$.

23. Nechť $\mathscr{A}$ je C*-algebra s jedničkou. Jestliže prvek $a \in \mathscr{A}$ splňuje $a^*a = e$, platí $r(a) = 1$. Je-li navíc a unitární, platí $\sigma_{\mathscr{A}}(a) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| = 1\}$.
Návod: Užijte vztahu (12.2.5) a cvičení 8, 9.

410 24. Nechť $\mathscr{A}$ je C*-algebra s jedničkou, potom pro každý normální prvek $a \in \mathscr{A}$ platí $r(a) = \|a\|$; je-li a navíc hermitovský, platí $\sigma_{\mathscr{A}}(a) \subset [-\|a\|, \|a\|]$.
Návod: Ukažte, že $\|(aa^*)^m\| = \|a\|^{2m}$ pro $m = 2^n$, a užijte vztahu (12.2.5). Pro $a = a^*$, $|\lambda| > \|a\|$ aplikujte výsledky předchozího cvičení na unitární prvek $(a + \mathrm{i}|\lambda|\, e)(a - \mathrm{i}|\lambda|\, e)^{-1}$.

25. Nechť $\mathscr{A}$ je C*-algebra s jedničkou a p je komplexní polynom, potom pro každý prvek $a \in \mathscr{A}$ platí $\sigma_{\mathscr{A}}(p(a)) = p(\sigma_{\mathscr{A}}(a))$.
Návod: Je-li podmnožina $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathscr{A}$ komutativní, pak prvek $a_1 \ldots a_n$ je invertibilní, platí-li totéž pro $a_1, \ldots, a_n$. Užijte kořenového rozkladu komplexního polynomu p.

13.1 ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI W*-ALGEBER

Předmětem našeho zájmu budou nyní algebry omezených operátorů na nějakém pevně zvoleném Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$. Je-li množina $\mathscr{S} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ lze definici komutantu danou vztahem (10.5.11a) přepsat ve tvaru $\mathscr{S}' := \{B \in \mathscr{B}(\mathscr{H}):\ BC = CB,\ C \in \mathscr{S}\}$ a dále definovat *bikomutant* $\mathscr{S}'' := (\mathscr{S}')' \subset \mathscr{S}''_{\mathrm{ex}}$ (viz vztah (10.5.11b)). Při přebírání výsledků předchozí kapitoly je nutno mít na paměti, že pro podmnožinu $\mathscr{S}$ v operátorové algebře $\mathscr{A}$ je komutant definovaný v § 12.1 roven $\mathscr{S}' \cap \mathscr{A}$.

Je-li $\mathscr{S}$ symetrická podmnožina v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, pak $\mathscr{S}'$, $\mathscr{S}''$ jsou podle cvičení 12.10 $*$-podalgebry v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Můžeme tedy formulovat následující definici: $*$-algebru $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ nazveme **W*-algebrou (von Neumannovou algebrou)**, je-li rovna svému bikomutantu, $\mathscr{A} = \mathscr{A}''$. Jak vidno, jde o pojem vymezený čistě algebraicky. W*-algebry lze však charakterizovat také topologicky, jak se o tom za chvíli zmíníme.

13.1.1 Poznámka: Topologie τ_u, τ_s, τ_w nejsou jediné, které lze na algebře $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ zavést. Zmíníme se o dalších dvou. Nechť $\tilde{\mathscr{H}}$ je množina všech posloupností $\Phi = \{\varphi_k\} \subset \mathscr{H}$ takových, že $\sum_k \|\varphi_k\|^2 < \infty$. Pro $\Phi \in \tilde{\mathscr{H}}$ a všechna $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ můžeme definovat

$$p_\Phi(B) := \left[\sum_{k=1}^{\infty} \|B\varphi_k\|^2\right]^{1/2} ; \tag{1}$$

z Minkowského nerovnosti plyne, že $p_\Phi\colon \mathscr{B}(\mathscr{H}) \to \mathbb{R}^+$ je seminorma. Snadno ověříme, že systém $\{p_\Phi\}_{\sigma s} \equiv \{p_\Phi\colon \Phi \in \tilde{\mathscr{H}}\}$ odděluje body; odpovídající lokálně konvexní topologie $\tau_{\sigma s}$ se nazývá **σ-silná (ultrasilná)**. Podobně definujeme seminormy

$$p_{\Phi\Psi}(B) := \left|\sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k, B\psi_k)\right| , \tag{2}$$

jejichž systém $\{p_{\Phi\Psi}\}_{\sigma w} \equiv \{p_{\Phi\Psi}\colon \Phi,\ \Psi \in \tilde{\mathscr{H}}\}$ zadává na $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ **σ-slabou (ultraslabou)** topologii $\tau_{\sigma w}$. Obě definice lze pohodlně formulovat, chápeme-li $\tilde{\mathscr{H}}$ jako direktní součet $\sum_k^{\oplus} \mathscr{H}_k$, kde $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2 = \ldots = \mathscr{H}$, vybavený skalárním součinem

$(\Phi, \Psi)_{\hat{\mathscr{H}}} := \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k, \psi_k)$. Označíme-li $\tilde{B}$ direktní součet identických kopií operátoru B, $\tilde{B}\Phi := \{B\varphi_k\}$, pak definice (1), (2) lze přepsat do tvaru

$$p_\Phi(B) = \|\tilde{B}\Phi\|_{\hat{\mathscr{H}}}, \qquad p_{\Phi\Psi}(B) = |(\Phi, \tilde{B}\Psi)_{\hat{\mathscr{H}}}| . \tag{3}$$

Mezi takto zavedenými topologiemi na $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ platí jednoduché vztahy

$$\begin{array}{ccccc} & & \tau_{\sigma w} & & \\ & \supset & & \supset & \\ \tau_u \supset \tau_{\sigma s} & & & & \tau_w \\ & \supset & & \supset & \\ & & \tau_s & & \end{array} \tag{4}$$

(cvičení 1). Méně triviální je skutečnost, že pro $\dim \mathscr{H} = \infty$ jsou všechny tyto topologie vzájemně různé – viz ⟦Di 1⟧, § I.3. Podle potřeby budeme v dalším užívat indexů vystupujících ve vztazích (4) ke specifikaci topologie; tak třeba $(\bar{\mathscr{S}})_{\sigma w}$ bude značit σ-slabý uzávěr množiny $\mathscr{S}$, symbol $\mathscr{A}_w(\mathscr{S})$ znamená slabě uzavřenou algebru generovanou množinou $\mathscr{S}$ apod.

13.1.2 Tvrzení: Každá W*-algebra $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je slabě uzavřená. Díky tomu je uzavřená i v ostatních topologiích (4), krom jiného je to C*-algebra.

Důkaz: Slabá uzavřenost $\mathscr{A}$ plyne ze cvičení 12.14, neboť $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ je topologická algebra vůči τ_w; uzavřenost vzhledem k ostatním topologiím plyne ze vztahů (4) a tvrzení 2.3.2. V případě τ_u to znamená, že $\mathscr{A}$ je uzavřená vůči operátorové normě, a ta splňuje podmínku (12.3.2). ■

Tento výsledek vyvolává přirozeně otázku, zda je každá slabě uzavřená $*$-podalgebra v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, resp. každá operátorová C*-algebra současně také W*-algebrou. Odpověď je v obou případech *negativní.*

13.1.3 Příklad: Nechť $E \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je projektor různý od $0, I$. Algebra $\mathscr{A} \equiv \equiv \mathscr{A}_0(\{E\})$ tvořená všemi násobky projektoru E je slabě uzavřená, ale neobsahuje skalární operátory, které patří do W*-algebry $\mathscr{A}_W(\{E\}) = \{E\}''$ (cvičení 4, 5), kde symbolem $\mathscr{A}_W(\mathscr{S})$ rozumíme nejmenší W*-algebru obsahující množinu $\mathscr{S}$. $\mathscr{A}_W(E)$ dostaneme připojením jedničky k algebře $\mathscr{A}$.

13.1.4 Příklad: Budiž Q operátor násobení nezávisle proměnnou na $L^2(J)$, kde $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Symbolem $\mathscr{A}_C$ označíme algebru $\{f(Q): f \in C(J)\}$, přičemž zobrazení $f \mapsto f(Q)$ zadává izometrický $*$-izomorfismus C*-algebry $C(J)$ s algebrou $\mathscr{A}_C$ (viz větu 9.3.3 a cvičení 12.11). To znamená, že $\mathscr{A}_C$ je C*-podalgebra v $\mathscr{B}(L^2(J))$. Dokážeme, že *není slabě uzavřená.* K tomu stačí vzít vhodnou posloupnost funkcí $\{g_n\} \subset C(J)$, např. $g_n(x) = \max\{1, [(x-a)/(c-a)]^n\}$ pro nějaké $c \in (a, b)$. Podle již citované věty 9.3.3 existuje $\text{w-}\lim_{n\to\infty} g_n(Q) = \chi_{[c,b]}(Q)$, proto tento operátor patří do $(\overline{\mathscr{A}_C})_w$, přičemž současně nepatří do $\mathscr{A}_C$.

Chceme tedy najít nutnou a postačující podmínku pro to, aby daná slabě uzavřená $*$-algebra $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ byla W*-algebrou. Začneme tím, že každé množině $\mathscr{S} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ přiřadíme projektor $E_\mathscr{S}$ takový, že $BE_\mathscr{S} = B$ pro všechna $B \in \mathscr{S}$ (cvičení 6). O množině $\mathscr{S}$ říkáme, že je *nedegenerovaná*, je-li $E_\mathscr{S} = I$; to platí např. tehdy, když $\mathscr{S}$ obsahuje jednotkový operátor.

13.1.5 Věta: Nechť $\mathscr{S}$ je symetrická podmnožina v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, potom
(a) $\mathscr{A}_\mathscr{S} := \{B \in \mathscr{S}'' : B = E_\mathscr{S} B E_\mathscr{S}\}$ je slabě uzavřená $*$-podalgebra v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$,
(b) algebra $\mathscr{A}_w(\mathscr{S}) \equiv (\overline{\mathscr{A}_0(\mathscr{S})})_w$ je rovna σ-silnému uzávěru $(\overline{\mathscr{A}_0(\mathscr{S})})_{\sigma s}$
(c) platí $\mathscr{A}_w(\mathscr{S}) = \mathscr{A}_\mathscr{S}$.

Důkaz: (a) Množina $\mathscr{A}_\mathscr{S}$ je zjevně $*$-podalgebra v $\mathscr{S}''$. Je-li $B \in (\overline{\mathscr{A}_\mathscr{S}})_w$, pak pro všechna $\varepsilon > 0$, $\varphi, \psi \in \mathscr{H}$ existuje operátor $C \in \mathscr{A}_\mathscr{S}$ takový, že $B - C$ leží ve slabém okolí $W_\varepsilon(\{\varphi\}, \{\psi, E_\mathscr{S}\psi\})$ (viz vztah (5.2.2)). Platí $CE_\mathscr{S} = C$, takže lze psát nerovnost $|(\varphi, B(I - E_\mathscr{S})\,\psi)| \leqq |(\varphi, (B - C)\,\psi)| + |(\varphi, (B - C)\,E_\mathscr{S}\psi)| < 2\varepsilon$; odtud $(\varphi, B(I - E_\mathscr{S})\,\psi) = 0$ pro všechna $\varphi, \psi \in \mathscr{H}$, tj. $B = BE_\mathscr{S}$. Podobně dokážeme $B = E_\mathscr{S}B$, což dohromady dává $B = E_\mathscr{S}BE_\mathscr{S}$.

(b, c) Nejsložitější je ověřit inkluzi $\mathscr{A}_\mathscr{S} \subset (\overline{\mathscr{A}_0(\mathscr{S})})_{\sigma s}$. Podle cvičení 3 stačí ukázat, že v každém okolí $U_\varepsilon(C; \Phi)$ operátoru $C \in \mathscr{A}_\mathscr{S}$ leží nějaký operátor $B \in \mathscr{A}_0(\mathscr{S})$. Užijeme značení zavedeného v poznámce 1 a definujeme $\tilde{E}$ jako projektor na uzávěr podprostoru $M_\Phi := \{\tilde{B}\Phi : B \in \mathscr{A}_0(\mathscr{S})\} \subset \tilde{\mathscr{H}}$. K důkazu uvedené inkluze potřebujeme ověřit rovnost

$$\tilde{E}\tilde{C}\Phi = \tilde{C}\Phi\,, \tag{5}$$

tj. $\tilde{C}\Phi \in \overline{M}_\Phi$, protože potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje operátor $B(\varepsilon)$ takový, že $p_\Phi(B(\varepsilon) - C) \equiv \|\tilde{B}(\varepsilon)\,\Phi - \tilde{C}\Phi\|_{\tilde{\mathscr{H}}} < \varepsilon$.

Dokážeme nejprve, že všechny operátory množiny $(\mathscr{A}_0(\mathscr{S}))^\sim := \{\tilde{B} : B \in \mathscr{A}_0(\mathscr{S})\}$ jsou redukovány projektorem $\tilde{E}$. Platí $M_\Phi = (\mathscr{A}_0(\mathscr{S}))^\sim\,\Phi$, takže $(\mathscr{A}_0(\mathscr{S}))^\sim\,M_\Phi \subset$ $\subset M_\Phi$, a protože operátory z $(\mathscr{A}_0(\mathscr{S}))^\sim$ jsou omezené, platí také $(\mathscr{A}_0(\mathscr{S}))^\sim\,\overline{M_\Phi} \subset$ $\subset \overline{M_\Phi}$ (viz cvičení 2.30) čili $\tilde{E}\tilde{B}\tilde{E} = \tilde{B}\tilde{E}$ pro všechna $\tilde{B} \in (\mathscr{A}_0(\mathscr{S}))^\sim$. Snadno se přesvědčíme, že množina $(\mathscr{A}_0(\mathscr{S}))^\sim$ je symetrická, proto obdobná rovnost platí i pro $\tilde{B}^*$; odtud plyne $\tilde{B}\tilde{E} = \tilde{E}\tilde{B}$. Navíc podle definice projektoru $\tilde{E}$ platí $\tilde{E}\tilde{B}\Phi = \tilde{B}\Phi$, tj. $\tilde{B}\tilde{E}\Phi = \tilde{E}\tilde{B}\Phi = \tilde{B}\Phi$ pro všechna $\tilde{B} \in (\mathscr{A}_0(\mathscr{S}))^\sim$.

Zavedeme dále projektory $\tilde{E}_k$: $\tilde{E}_k\Phi = \{0, \ldots, 0, \varphi_k, 0, \ldots\}$, pro něž platí $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{E}_k = \tilde{I}$, přičemž konvergence této a dalších obdobných řad se rozumí vzhledem k topologii τ_s. Pro daný operátor $\tilde{A} \in \mathscr{B}(\tilde{\mathscr{H}})$ definujeme $\tilde{A}_{ij} := \tilde{E}_i\tilde{A}\tilde{E}_j$. Dále existuje pro každé j přirozený izomorfismus V_j: $\tilde{E}_j\tilde{\mathscr{H}} \to \mathscr{H}$, pomocí nějž můžeme takovýmto „maticovým elementům" přiřadit operátory $A_{ij} := V_i\tilde{A}_{ij}V_j^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$.

Z rovnosti $\tilde{B}\tilde{E}\Phi = \tilde{B}\Phi$ plyne $\tilde{E}_k\tilde{B}(I - \tilde{E})\,\Phi = 0$ pro všechna $k = 1, 2, \ldots$, a odtud dále

$$0 = \sum_{i,j=1}^{\infty} \tilde{E}_k\tilde{B}\tilde{E}_i(I - \tilde{E})\,\tilde{E}_j\Phi = \sum_{i,j=1}^{\infty} \delta_{ki}\tilde{B}_{kk}(\delta_{ij}\tilde{E}_j - \tilde{E}_{ij})\,\Phi\,.$$

Vysčítáme přes i a užijeme izomorfismu V_k, potom lze tuto rovnost přepsat ve tvaru $B(\varphi_k - \sum_{j=1}^{\infty} E_{kj}\varphi_j) = 0$. Protože to platí pro libovolný operátor $B \in \mathscr{A}_0(\mathscr{S})$, dostáváme dále

$$\varphi_k - \sum_{j=1} E_{kj}\varphi_j \in \bigcap_{B \in \mathscr{A}_0(\mathscr{S})} \ker B \subset \bigcap_{B \in \mathscr{S}} \ker B = \ker E_{\mathscr{S}}\,.$$

Operátor C patří podle předpokladu do $\mathscr{A}_{\mathscr{S}}$, proto $C = CE_{\mathscr{S}}$ a z posledně uvedeného vztahu plyne

$$C\left(\varphi_k - \sum_{j=1}^{\infty} E_{kj}\varphi_j\right) = 0\,. \tag{6}$$

Dále víme, že operátory $\tilde{B} \in (\mathscr{A}_0(\mathscr{S}))^{\sim}$ komutují s $\tilde{E}$ a současně se všemi projektory $\tilde{E}_k$. Platí tedy $\tilde{B}_{ii}\tilde{E}_{ij} = \tilde{E}_{ij}\tilde{B}\tilde{E}\tilde{E}_j = \tilde{E}_i\tilde{E}\tilde{B}\tilde{E}_j = \tilde{E}_{ij}\tilde{B}_{jj}$, což lze opětovným použitím izomorfismu V_i přepsat jako rovnost $BE_{ij} = E_{ij}B$, jež platí pro všechna $B \in \mathscr{A}_0(\mathscr{S})$, $i, j = 1, 2, \ldots$. Odtud plyne $E_{ij} \in \mathscr{S}'$, a protože operátor C patří do $\mathscr{S}''$, z rovnosti (6) plyne

$$C\varphi_k = \sum_{j=1}^{\infty} E_{kj}C\varphi_j\,.$$

Přejdeme-li zpět k operátorům na prostoru $\mathscr{H}$, platí $\tilde{E}_k\tilde{C}\Phi = \tilde{E}_k\tilde{E}\tilde{C}\Phi$, a vysčítáním přes k dostaneme rovnost (5).

Zbytek důkazu je již snadný. Podle cvičení 6 pro každé $B \in \mathscr{S}$ platí $B = E_{\mathscr{S}}BE_{\mathscr{S}}$, a zjevně to platí též pro $B \in \mathscr{A}_0(\mathscr{S})$. Současně $\mathscr{A}_0(\mathscr{S}) \subset \mathscr{S}''$, proto $\mathscr{A}_0(\mathscr{S}) \subset \mathscr{A}_{\mathscr{S}}$. Podle tvrzení (a) je algebra $\mathscr{A}_{\mathscr{S}}$ slabě uzavřená, což spolu se vztahy (4) a výsledkem předchozích úvah dává

$$(\overline{\mathscr{A}_0(\mathscr{S})})_{\mathrm{w}} \subset \mathscr{A}_{\mathscr{S}} \subset (\overline{\mathscr{A}_0(\mathscr{S})})_{\sigma s} \subset (\overline{\mathscr{A}_0(\mathscr{S})})_{\mathrm{w}}. \quad \blacksquare$$

Z dokázané věty snadno plyne odpověď na naši otázku. Jestliže slabě uzavřená $*$-algebra $\mathscr{A}$ obsahuje jednotkový operátor, platí $\mathscr{A}_{\mathscr{A}} = \mathscr{A}''$, což se podle tvrzení (c) rovná $(\overline{\mathscr{A}_0(\mathscr{A})})_{\mathrm{w}} = (\overline{\mathscr{A}})_{\mathrm{w}} = \mathscr{A}$. Je-li naopak $\mathscr{A} = \mathscr{A}''$, pak $I \in \mathscr{A}$, protože jednotkový operátor patří do komutantu libovolné podmnožiny $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Dohromady tedy platí:

13.1.6 Důsledek: Slabě uzavřená $*$-algebra $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je W*-algebra právě tehdy, když obsahuje jednotkový operátor.

13.1.7 Poznámka: Uvedené tvrzení nám dává možnost formulovat ekvivalentní definici W*-algebry. Jiný důsledek věty 5 představuje tzv. *věta o bikomutantu*: nechť $\mathscr{A}$ je nedegenerovaná $*$-podalgebra v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, potom následující výroky jsou ekvivalentní:

(a) $\mathscr{A} = \mathscr{A}''$,

(b) $\mathscr{A}$ je uzavřená v některé z topologií τ_w, τ_s, $\tau_{\sigma w}$, $\tau_{\sigma s}$,

(c) $\mathscr{A}$ je uzavřená ve všech topologiích τ_w, τ_s, $\tau_{\sigma w}$, $\tau_{\sigma s}$.

Toto tvrzení lze rozšířit i na některé další topologie na $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, navíc jsou výroky (a)–(c) ekvivalentní uzavřenosti množiny $\mathscr{A}_1 := \{B \in \mathscr{A}: \|B\| \leqq 1\}$ ve zmíněných topologiích (viz komentář).

Odpověď na naši druhou otázku je již jednoduchá: C*-algebra $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je W*-algebra, je-li slabě (což je totéž co σ-silně) uzavřená a $I \in \mathscr{A}$. Podstatně složitější je příbuzný problém, totiž za jakých okolností může být abstraktní C*-algebra reprezentována W*-algebrou (viz komentář). Názornou ilustrací rozdílu mezi oběma třídami algeber je skutečnost, že W*-algebry obsahují „dostatečně mnoho" projektorů. Abychom se o tom přesvědčili, označme $\mathscr{A}^E$ množinu všech projektorů ve W*-algebře $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Protože $I \in \mathscr{A}$, je také $I \in \mathscr{A}^E$, takže algebra $\mathscr{A}_w(\mathscr{A}^E)$ je W*-algebra.

13.1.8 Tvrzení: W*-algebra $\mathscr{A}_W(\mathscr{A}^E)$ generovaná množinou $\mathscr{A}^E$ je rovna algebře $\mathscr{A}$.

Důkaz: Podle cvičení 4 je $\mathscr{A}_W(\mathscr{A}^E) = (\mathscr{A}^E)''$. Z inkluze $\mathscr{A}^E \subset \mathscr{A}$ plyne $\mathscr{A}^E \subset (\mathscr{A}^E)'' \subset \mathscr{A}'' = \mathscr{A}$; libovolný projektor tedy patří do $\mathscr{A}$ právě tehdy, když patří do $(\mathscr{A}^E)''$. Dále užijeme lemmatu 14.1.5, jež dokážeme v příští kapitole: podle něj hermitovský operátor A patří do slabě uzavřené algebry s jedničkou právě tehdy, když do ní patří všechny projektory jeho spektrálního rozkladu $\{E_t\}$. Pro $A \in \mathscr{A}$ tedy platí $\{E_t\} \subset \mathscr{A}$, z čehož plyne $\{E_t\} \subset \mathscr{A}^E \subset (\mathscr{A}^E)''$, a opětovným užitím lemmatu 14.1.5 dostaneme $A \in (\mathscr{A}^E)''$. Protože libovolný operátor $B \in \mathscr{A}$ je lineární kombinací dvou hermitovských operátorů, platí $(\mathscr{A}^E)'' = \mathscr{A}$. ■

13.1.9 Příklad: Pro C*-algebry analogické tvrzení neplatí. V algebře $\mathscr{A}_C$ z příkladu 4 je jediným nenulovým projektorem jednotkový operátor, $\mathscr{A}_C^E = \{0, I\}$. Algebra $\mathscr{A}_0(\mathscr{A}_C^E)$ je tedy tvořena skalárními operátory na $L^2(J)$, a podle cvičení 5 je slabě uzavřená, přičemž zjevně $\mathscr{A}_0(\mathscr{A}_C^E) \neq \mathscr{A}_C$.

Závěrem odstavce probereme některé jednoduché vlastnosti W*-algeber a zavedeme pojmy, které budeme v dalším potřebovat. Algebře $\mathscr{A}$ říkáme *faktor*, pokud její centrum $\mathscr{Z}_{\mathscr{A}} = \mathscr{A} \cap \mathscr{A}'$ obsahuje pouze skalární operátory. Pro W*-algebru platí $\mathscr{A}'' = \mathscr{A}$, proto je-li $\mathscr{A}$ faktor, je i $\mathscr{A}'$ faktor. Jednoduchými příklady jsou $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ a algebra skalárních operátorů $\mathbb{C}(\mathscr{H})$. Povšimněme si toho, že faktor $\mathscr{A}$ jakožto operátorová množina může být reducibilní (viz dále § 14.3); důležité je, že není redukován žádným projektorem z $\mathscr{A}$. Opakem faktoru je v jistém smyslu komutativní algebra; ta je rovna svému centru a každý projektor v ní obsažený ji redukuje.

Nechť E je libovolný projektor z $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Pro každé $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je operátor EBE plně určen svou částí v $E\mathscr{H}$, kterou označíme B_E (někdy se užívá symbolu $\mathrm{pr}_E B$); dané množině $\mathscr{S} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ můžeme potom přiřadit množinu $\mathscr{S}_E := \{B_E\colon B \in \mathscr{S}\} \subset \mathscr{B}(E\mathscr{H})$. Je-li $\mathscr{A}$ W*-algebra a projektor E patří do $\mathscr{A}$, platí vztahy

$$(\mathscr{A}_E)' = (\mathscr{A}')_E\,, \qquad \mathscr{Z}_{\mathscr{A}_E} = (\mathscr{Z}_{\mathscr{A}})_E \tag{7}$$

(cvičení 8). Z prvního z nich je vidět, že $\mathscr{A}_E$ je W*-algebra; říkáme jí *redukovaná* W*-algebra. Současně je $(\mathscr{A}')_E$ W*-algebra (cvičení 4), z čehož je vidět, že $\mathscr{A}_E$ je W*-algebra také pro každý projektor $E \in \mathscr{A}'$. Říkáme, že projektor $E \in \mathscr{A}$ je *abelovský* (vzhledem k algebře $\mathscr{A}$), jestliže redukovaná algebra $\mathscr{A}_E$ je abelovská; speciálně každý minimální projektor v $\mathscr{A}$ je abelovský (cvičení 9).

O projektorech E, F z W*-algebry $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ říkáme, že jsou *ekvivalentní*, pokud v $\mathscr{A}$ existuje operátor U takový, že $U^*U = E$ a $UU^* = F$, tj. částečná izometrie s počátečním prostorem $E\mathscr{H}$ a koncovým $F\mathscr{H}$. Projektory E, F jsou ekvivalentní vzhledem k $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ právě tehdy, mají-li stejnou dimenzi; obecně je rovnost dimenzí nutnou, nikoli však postačující podmínkou ekvivalence projektorů.

Jednoduché vlastnosti *-morfismů W*-algeber jsou shrnuty ve cvičení 10. Důležitou třídu zobrazení mezi W*-algebrami $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ a $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}(\mathscr{G})$ tvoří prostorové izomorfismy: říkáme, že *-izomorfismus $\varphi\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ je *prostorový*, jestliže existuje unitární operátor $U \in \mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{G})$ takový, že $\varphi(B) = UBU^{-1}$ pro všechna $B \in \mathscr{A}$. V takovém případě je φ současně prostorovým izomorfismem algeber $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ a $\mathscr{B}(\mathscr{G})$, a zobrazuje na sebe nejenom centra algeber $\mathscr{A}, \mathscr{B}$, ale i jejich komutanty, $\varphi(\mathscr{A}') = \mathscr{B}'$; je také zřejmé, že $\dim \mathscr{H} = \dim \mathscr{G}$. Ne každý izomorfismus W*-algeber je prostorový, to je vidět na příkladě přirozeného izomorfismu $\varphi\colon \mathbb{C}(\mathscr{H}) \to \mathbb{C}$, $\varphi(aI) = a$, pro $\dim \mathscr{H} > 1$.

Uvažujme dále systém W*-algeber $\mathscr{A}_j \subset \mathscr{B}(\mathscr{H}_j)$, kde index j probíhá nějakou indexovou množinu J. Jejich direktní součet (viz § 12.3) může být ztotožněn s operátorovou *-algebrou na $\mathscr{H} := \sum_{j \in J}^{\oplus} \mathscr{H}_j$, jestliže každému $[B_j]$ přiřadíme operátor $B\colon B[\varphi_j] = [B_j\varphi_j]$. Takováto algebra má následující jednoduché vlastnosti (cvičení 11):

13.1.10 Tvrzení: Pro normu operátoru B platí $\|B\| = \sup_{j \in J} \|B_j\|_j = \|[B_j]\|$. Označíme-li $\mathscr{A} = \sum_{j \in J}^{\oplus} \mathscr{A}_j$ a $\mathscr{B} = \sum_{j \in J}^{\oplus} \mathscr{A}_j'$, platí $\mathscr{A}' = \mathscr{B}$ a $\mathscr{B}' = \mathscr{A}$. Projektory $E_j := [\delta_{jk} I_k]$, kde I_k je jednotkový operátor na $\mathscr{H}_k$, patří do $\mathscr{A}$ pro všechna $j \in J$; operátor $C \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ patří do $\sum_{j \in J}^{\oplus} \mathscr{B}(\mathscr{H}_j)$ právě tehdy, když komutuje se všemi E_j.

Odtud plyne, že $\mathcal{A} \equiv \sum_{j\in J}^{\oplus}\mathcal{A}_j$ je W*-algebra; budeme ji nazývat *direktním součtem* W*-algeber $\mathcal{A}_j$. Pro její centrum tvrzení 10 dává

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A}} = \sum_{j\in J}^{\oplus}\mathcal{Z}_{\mathcal{A}_j}. \tag{8}$$

13.2 NORMÁLNÍ STAVY NA W*-ALGEBRÁCH

Libovolný stav f na W*-algebře $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je podle definice aditivní, speciálně pro ortogonální projektory $E_1, \dots, E_n$ platí $f(E_1 + \dots + E_n) = f(E_1) + \dots + f(E_n)$. Obecně však stav f nemusí být σ-aditivní, tj. obdobná rovnost nemusí platit pro nekonečné systémy projektorů. Požadavek σ-aditivity vymezuje důležitou třídu v množině všech stavů: říkáme, že stav f na $\mathcal{A}$ je **normální**, jestliže pro libovolný systém $\{E_\alpha\colon \alpha \in J\}$ vzájemně ortogonálních projektorů v $\mathcal{A}$ platí

$$f\left(\sum_{\alpha\in J} E_\alpha\right) = \sum_{\alpha\in J} f(E_\alpha). \tag{1}$$

Nenulový pozitivní funkcionál g na $\mathcal{A}$ nazýváme *normálním*, je-li stav $\|f\|^{-1} f$ normální.

13.2.1 Poznámka: Je-li indexová množina J nejvýše spočetná, je smysl rovnosti (1) jasný: projektory E_α můžeme seřadit do posloupnosti, definovat $\sum_{\alpha\in J} E_\alpha$ jako silnou limitu posloupnosti částečných součtů a pravou stranu jako součet odpovídající řady; čísla $f(E_\alpha)$ jsou nezáporná, proto nezáleží na zvoleném uspořádání. V případě neseparabilního $\mathcal{H}$ může ovšem množina J být nespočetná. Tehdy definujeme $\sum_{\alpha\in J} E_\alpha$ jako projektor na direktní součet $\sum_{\alpha\in J}^{\oplus} E_\alpha\mathcal{H}$, což je v souladu s definicí užitou ve „spočetném" případě; lze dokázat, že tento projektor patří do $\mathcal{A}_+$ ([Di 1], dodatek II). Zbývá vypořádat se s pravou stranou. V případě nejvýše spočetné množiny J snadno zjistíme, že uvažovaný výraz je roven supremu množiny „konečných částečných součtů",

$$\sum_{\alpha\in J} f(E_\alpha) = \sup_{K\in\mathcal{F}} \sum_{\alpha\in K} f(E_\alpha), \tag{2}$$

kde $\mathcal{F} \subset 2^J$ je systém všech konečných podmnožin v J. Pro nespočetnou množinu J užijeme rovnosti (2) jako definičního vztahu pro „součet" vystupující na levé straně. Tato definice má přirozenou motivaci (viz cvičení 5.26) a z ní vyplývající definice normálního stavu je ekvivalentní častěji užívané definici, podle níž *je stav f normální, jestliže pro každý neklesající usměrněný soubor $\{A_\alpha\} \subset \mathcal{A}_+$ platí $f(\sup_\alpha A_\alpha) = \sup_\alpha f(A_\alpha)$* (viz [BR 1], § 2.3.4; [Di 1], § I.4 a cvičení 9 k němu).

 Existuje také ekvivalentní formulace užívající posloupností ([BR 1], věta 2.7.11): *stav f je normální právě tehdy, když pro každou posloupnost* $\{A_j\} \subset \mathscr{A}_+$, *pro niž* $A \equiv \text{w-}\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} A_j \in \mathscr{A}_+$, *platí* $f(A) = \sum_{j=1}^{\infty} f(A_j)$. Tento výsledek není překvapující, uvědomíme-li si, že pravá strana rovnosti (2) může být konečná pouze tehdy, když nejvýše spočetně mnoho čísel $f(E_\alpha)$ je nenulových.

Naším hlavním cílem v tomto paragrafu je odvodit podmínky charakterizující normální stavy v množině všech stavů a najít jejich obecné vyjádření. Výsledek, k němuž dospějeme přes několik pomocných tvrzení, lze zformulovat následovně:

13.2.2 Věta: Nechť f je stav na W*-algebře $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$; potom následující výroky jsou ekvivalentní:

(a) f je normální,

(b) f je σ-slabě spojitý,

(c) existuje statistický operátor $W \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$ takový, že pro všechna $B \in \mathscr{A}$ platí $f(B) = \mathrm{Tr}\,(WB)$.

13.2.3 Poznámka: Statistický operátor na separabilním Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ jsme v § 6.4 definovali jako pozitivní jaderný operátor W takový, že $\mathrm{Tr}\, W = 1$. Tuto definici lze přirozeně rozšířit: v případě neseparabilního $\mathscr{H}$ budeme statistickým operátorem rozumět pozitivní operátor $W \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$ takový, že podprostor $(\mathrm{Ker}\, W)^\perp = \mathrm{Ran}\, W$ je separabilní a netriviální část daného operátoru (zúžení $W \restriction (\mathrm{Ker}\, W)^\perp$) splňuje uvedené požadavky.

13.2.4 Lemma: Funkcionál f, který je limitou posloupnosti σ-silně spojitých lineárních funkcionálů (ve smyslu normy v duálním prostoru $\mathscr{A}$) na W*-algebře $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je σ-silně spojitý.

Důkaz: Z nerovnosti $|f(B)| \leqq \|f_n(B)\| + \|f - f_n\|\,\|B\|$ a předpokladu $\|f - f_n\| \to 0$ pro $n \to \infty$ jednoduše plyne, že funkcionál f je σ-silně spojitý na jednotkové kouli $\mathscr{A}_1 \equiv \{B \in \mathscr{A}: \|B\| \leqq 1\}$. Jeho spojitost v $\mathscr{A}$ vyplývá z následující ekvivalence (jež není triviální – viz [Di 1], § I.3): lineární funkcionál f na σ-slabě uzavřeném podprostoru $\mathscr{M} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je σ-slabě (σ-silně) spojitý právě tehdy, když zúžení $f \restriction \mathscr{M}_1$ je σ-slabě (σ-silně) spojité. Algebra $\mathscr{A}$ je podle tvrzení 13.1.2 slabě, a tedy i σ-slabě uzavřená. ■

13.2.5 Lemma: Pro lineární funkcionál f na W*-algebře $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ jsou následující výroky ekvivalentní:

(a) existuje posloupnost $\Phi = \{\varphi_k\} \in \tilde{\mathscr{H}}$ (viz poznámku 13.1.1) taková, že pro všechna $B \in \mathscr{A}$ platí $|f(B)| \leqq p_\Phi(B)$,

(b) existují posloupnosti $\Phi, \Psi \in \tilde{\mathscr{H}}$ takové, že pro všechna $B \in \mathscr{A}$ platí

$$f(B) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k, B\psi_k)\,, \tag{3}$$

(c) f je σ-slabě spojitý,
(d) f je σ-silně spojitý.

Důkaz: Stačí ověřit řetěz implikací (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a). Prostřední dvě jsou jednoduché. Poslední dokážeme sporem. Předpokládejme, že (a) neplatí, potom ke každému $\Phi \in \tilde{\mathscr{H}}$ existuje operátor $B_\Phi \in \mathscr{A}$ takový, že $|f(B_\Phi)| > \|\tilde{B}_\Phi \Phi\|_{\tilde{\mathscr{H}}}$. Ze σ-silné spojitosti funkcionálu f podle cvičení 3 mj. plyne, že lze najít $\delta > 0$ a nenulový vektor $\Psi \in \tilde{\mathscr{H}}$ tak, že $|f(B)| < 1$ pro všechna $B \in \mathscr{A}$ splňující podmínku $\|\tilde{B}\Psi\|_{\tilde{\mathscr{H}}} < \delta$. Jak snadno nahlédneme, tuto nerovnost splňuje operátor $C = \|\tilde{B}_\Phi \Phi\|_{\tilde{\mathscr{H}}}^{-1} B_\Phi$, kde $\Phi \equiv (2/\delta)\,\Psi$. Potom ovšem musí být $f(C) = \|\tilde{B}_\Phi \Phi\|_{\tilde{\mathscr{H}}}^{-1} f(B_\Phi) < 1$, což odporuje našemu předpokladu.

Zbývá ověřit, že (a) implikuje (b). Na podprostoru $\{\tilde{B}\Phi : B \in \mathscr{A}\}$ v $\tilde{\mathscr{H}}$ definujeme lineární funkcionál g_0: $g_0(\tilde{B}\Phi) = f(B)$; protože $\tilde{B} \neq \tilde{C}$ implikuje $B \neq C$, je definice funkcionálu g_0 korektní. Podle předpokladu platí $|f(B)| \leqq \|B\Phi\|_{\tilde{\mathscr{H}}}$ pro všechna $B \in \mathscr{A}$, proto je funkcionál g_0 omezený a podle tvrzení 3.3.2, resp. věty 1.2.1 jej lze rozšířit na omezený funkcionál $g: \tilde{\mathscr{H}} \to \mathbb{C}$. Z Rieszova lemmatu pak plyne $g(\hat{\Phi}) = (\Psi, \hat{\Phi})_{\tilde{\mathscr{H}}}$ pro nějaké $\Psi \in \tilde{\mathscr{H}}$ a všechna $\hat{\Phi} \in \tilde{\mathscr{H}}$, speciálně $f(B) = g(\tilde{B}\Phi) = (\Psi, \tilde{B}\Phi)_{\tilde{\mathscr{H}}}$ pro každé $B \in \mathscr{A}$, což je (až na záměnu Φ, Ψ) právě rovnost (3). ■

13.2.6 Lemma: Nechť f je pozitivní funkcionál na W*-algebře $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$, potom

(a) jestliže pro nějaký vektor $\psi \in \mathscr{H}$ a všechna $B \in \mathscr{A}_+$ platí $f(B) \leqq (\psi, B\psi)$, pak existuje operátor $C \in \mathscr{A}'$ takový, že $f(B) = (C\psi, BC\psi)$ pro všechna $B \in \mathscr{A}$,

(b) pokud lze f vyjádřit ve tvaru $f(B) = (\varphi, B\psi)$ pro nějaká $\varphi, \psi \in \mathscr{H}$, pak existuje vektor $\chi \in \mathscr{H}$ takový, že $f(B) = (\chi, B\chi)$ pro všechna $B \in \mathscr{A}$.

Důkaz: Nejprve si povšimněme, že $f(C^*B) = f(B^*C) = 0$ pro libovolná $B \in \mathscr{A}$ a $C \in \mathscr{A}$ taková, že $C\psi = 0$. Ze zobecněné Schwarzovy nerovnosti (tvrzení 12.4.2c) a našeho předpokladu totiž plyne

$$|f(C^*B)|^2 \leqq f(C^*C)\, f(B^*B) \leqq f(B^*B)\,(\psi, C^*C\psi) = 0\,, \tag{4}$$

a podobně postupujeme i ve druhém případě. Nyní můžeme na podprostoru $\mathscr{A}\psi \subset \mathscr{H}$ definovat seskvilineární formu g vztahem $g(B_1\psi, B_2\psi) := f(B_1^*B_2)$ a tato definice je korektní: existuje-li $C_1 \neq B_1$ takové, že $C_1\psi = B_1\psi$, je $f(B_1^*B_2) = f(C_1^*B_2)$, jak je třeba a jak také plyne z předcházející úvahy. Pomocí tvrzení 12.4.2 se snadno přesvědčíme, že g je symetrická a pozitivní. Je také omezená, což plyne z první nerovnosti (3) a vztahu

$$|f(C^*C)| \leqq (\psi, C^*C\psi) = \|C\psi\|^2\,.$$

 Proto ji můžeme spojitě dodefinovat na pozitivní symetrickou omezenou seskvilineární formu na uzavřeném podprostoru $\overline{\mathscr{A}\psi} \subset \mathscr{H}$. Podle tvrzení 5.1.4 pak existuje pozitivní operátor $A_g \in \mathscr{B}(\overline{\mathscr{A}\psi})$ takový, že $f(B_1^* B_2) = (B_1\psi, A_g B_2\psi)$. Potom také platí $(B_1\psi, A_g B_3 B_2\psi) = f(B_1^* B_3 B_2) = f((B_3^* B_1)^* B_2) = (B_3^* B_1\psi, A_g B_2\psi) = (B_1\psi, B_3 A_g B_2\psi)$, tj.

$$(A_g B_3 - B_3 A_g) \restriction \overline{\mathscr{A}\psi} = 0 \qquad \text{pro všechna} \quad B_3 \in \mathscr{A} .$$

Operátor $A := A_g \oplus 0$, kde 0 je nulový operátor na $(\mathscr{A}\psi)^\perp$, je tedy pozitivní a patří do $\mathscr{A}'$, neboť, jak lze snadno ověřit, $\mathscr{A}_+(\mathscr{A}\psi)^\perp \subset (\mathscr{A}\psi)^\perp$. Totéž platí pro $C = A^{1/2}$ (tvrzení 5.3.6) a $f(B) = (\psi, AB\psi) = (\psi, C^2 B\psi) = (C\psi, BC\psi)$ pro všechna $B \in \mathscr{A}$.

(b) Pro libovolný operátor $B \in \mathscr{A}$ platí

$$4f(B) = 2f(B) + 2\,\overline{f(B^*)} = 2(\varphi, B\psi) + 2(\psi, B\varphi) =$$
$$= (\varphi + \psi, B(\varphi + \psi)) - (\varphi - \psi, B(\varphi - \psi)) .$$

Je-li B pozitivní, pak $4f(B) \leqq (\varphi + \psi, B(\varphi + \psi))$, a podle tvrzení (a) existuje operátor $C \in \mathscr{A}'$ takový, že $f(B) = (\chi, B\chi)$ pro $\chi \equiv \frac{1}{2}C(\varphi + \psi)$. ■

13.2.7 Lemma: Nechť f, g jsou normální pozitivní funkcionály na W*-algebře $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Jestliže pro nějaký projektor $E \in \mathscr{A}$ platí $f(E) < g(E)$, potom v $\mathscr{A}$ existuje nenulový projektor $F \leqq E$ takový, že pro všechny operátory $B \in \mathscr{A}$ splňující $0 \leqq B \leqq F$ platí $f(B) \leqq g(B)$.

Důkaz: Vezmeme množinu projektorů $M := \{P \leqq E : f(P) \geqq g(P)\}$ v $\mathscr{A}$, jež je částečně uspořádaná prostřednictvím nerovností mezi projektory. Nechť N je nějaká úplně uspořádaná podmnožina v M. Je-li spočetná, můžeme ji psát jako neklesající posloupnost $\{P_n\}$, a ta podle věty 5.4.9 silně konverguje k nějakému projektoru P. Funkcionály f, g jsou podle předpokladu normální, proto

$$f(P) = \lim_{n\to\infty} f(P_n) \geqq \lim_{n\to\infty} g(P_n) = g(P)$$

a množina N má horní hranici. Je-li N nespočetná, pak existence horní hranice plyne z obdobné úvahy užívající definice normálního stavu pomocí usměrněných souborů zmíněné v poznámce 1. Podle Zornova lemmatu tedy množina M obsahuje alespoň jeden maximální prvek E_0.

Projektor $F \equiv E - E_0$ je nenulový, protože jinak by platilo $f(E) = f(E_0) \geqq g(E_0) = g(E)$. Předpokládejme, že v $\mathscr{A}$ existuje operátor B takový, že $0 \leqq B \leqq F$ a $f(B) > g(B)$, a označme $E_B(.)$ jemu odpovídající projektorovou míru. Podle tvrzení 13.1.2 a lemmatu 14.1.5 patří spolu s operátorem B do $\mathscr{A}$ také projektory $E_B(J)$ pro libovolný interval $J \subset \mathbb{R}$. Ukážeme, že není možné, aby pro všechny tyto projektory platilo $f(E_B(J)) \leqq g(E_B(J))$. Pokud by tomu tak bylo, mohli bychom vzít vhodnou posloupnost $\{B_N\}$, např.

$$B_N := \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{N} E_B(J_k^N), \qquad J_k^N = \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right],$$

jež konverguje v normě k operátoru B (viz cvičení 9.11); využíváme ještě faktu, že spektrum B leží v intervalu $[0, 1]$, jak vyplývá z implikace $0 \leqq B \leqq F \Rightarrow$ $\Rightarrow 0 \leqq \|B\| \leqq \|F\| \leqq 1$ (viz (5.3.7)). Funkcionály f, g jsou podle tvrzení 12.4.2 omezené, takže $f(B) = \lim_{N\to\infty} f(B_N) \leqq \lim_{N\to\infty} g(B_N) = g(B)$ ve sporu s předpokladem. To znamená, že existuje alespoň jeden *nenulový* projektor $E_1 \equiv E_B(J_1)$ odpovídající intervalu $J_1 \subset (0, 1]$ takový, že $f(E_1) > g(E_1)$.

Z nerovností $0 \leqq B \leqq F$ plyne $0 \leqq \|B^{1/2}\psi\|^2 \leqq \|F\psi\|^2$ pro všechna $\psi \in \mathscr{H}$, a odtud $\operatorname{Ker} F \subset \operatorname{Ker} B$, tj. $E_B(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \leqq F$. Podle definice je pak $E_1 = E_B(J_1) \leqq$ $\leqq E_B(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \leqq F$. Platí tedy $E_1 \leqq F \leqq E$, z čehož dále plyne $E_0 E_1 =$ $= (E - F)\, E_1 = 0$. Operátor $E_0 + E_1$ je tudíž projektor, který by měl patřit do M, to však není možné, protože E_0 je maximální prvek v M. ■

Důkaz věty 2: Poměrně nejsložitější je dokázat implikaci (a) $\Rightarrow$ (b). Pro libovolný projektor $E \in \mathscr{A}$ definujeme $f_E(B) := f(BE)$ a označíme $M = \{E \in \mathscr{A}\colon f_E\ \sigma\text{-sil}$- ně spojitý$\}$. Vezmeme libovolnou posloupnost vzájemně ortogonálních projektorů $\{E_j\} \subset M$ a položíme $P_k := \sum_{j=1}^{k} E_j$, $P := \operatorname{s-lim}_{k\to\infty} P_k$. Pro libovolný projektor $E \in \mathscr{A}$ a všechna $B \in \mathscr{A}$ platí $|f(BE)|^2 \leqq f(BB^*)\, f(E) \leqq f(E)\, \|B\|^2$ (viz tvrzení 12.4.2 a vztah (12.3.5)); položíme-li $E = P - P_k$, dostáváme odtud

$$\|f_P - f_{P_k}\|^2 \leqq f(P - P_k)\,.$$

Stav f je podle předpokladu normální, proto $\lim_{k\to\infty} f(P - P_k) = 0$. Podle lemmatu 4 je pak funkcionál f_P σ-silně spojitý, tj. P patří do M. Tvrzení lemmatu a celou předchozí úvahu lze dále snadno zobecnit na případ, kdy $\{P_k\}$ nahradíme obecně nespočetnou neklesající množinou projektorů $\{P_\alpha\}$: projektor $P := \sup_\alpha P_\alpha$ opět patří do M. Ze Zornova lemmatu pak plyne, že M obsahuje alespoň jeden maximální prvek E_0.

Předpokládejme, že projektor $E_1 \equiv I - E_0$ je nenulový. Vezmeme vektor $\varphi \in E_1\mathscr{H}$, $\|\varphi\| > 1$ a definujeme funkcionál g_φ: $g_\varphi(B) = (\varphi, B\varphi)$, jenž je zjevně pozitivní a normální. Platí $f(E_1) \leqq \|E_1\| = 1 < \|\varphi\|^2 = g_\varphi(E_1)$, takže podle lemmatu 7 v $\mathscr{A}$ existuje nenulový projektor $E_2 \leqq E_1$ takový, že $f(B) \leqq (\varphi, B\varphi)$ pro všechna $B \in \mathscr{A}$, $0 \leqq B \leqq E_2$. Tyto nerovnosti splňuje operátor $B \equiv$ $\equiv \|C\|^{-2} E_2 C^* C E_2$, kde C je libovolný nenulový operátor z $\mathscr{A}$, proto platí $\|C\|^{-2} f(E_2 C^* C E_2) \leqq \|C\|^{-2} \|C E_2 \varphi\|^2$, a dále

$$|f(CE_2)|^2 \leqq f(I)\, f(E_2 C^* C E_2) \leqq \|C E_2 \varphi\|^2\,.$$

422 To znamená, že funkcionál f_{E_2} je silně spojitý, a tedy také σ-silně spojitý. Platí $E_2E_0 = E_2(I - E_1) = 0$, proto je $E_0 + E_2$ projektor, který by měl patřit do množiny M; to však odporuje skutečnosti, že projektor E_0 je maximální. Odtud plyne $E_0 = I$, takže funkcionál f je σ-silně spojitý, a podle lemmatu 5 současně σ-slabě spojitý.

Dokážeme dále, že z (b) plyne existence vektoru $\Phi \in \tilde{\mathscr{H}}$ takového, že $\|\Phi\|^2_{\tilde{\mathscr{H}}} = \sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_k\|^2 = 1$ (viz poznámku 13.1.1) a

$$f(B) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k, B\varphi_k) \tag{5}$$

pro všechna $B \in \mathscr{A}$. Nejprve definujeme na W*-algebře $\tilde{\mathscr{A}} = \{\tilde{B}: B \in \mathscr{A}\} \subset \subset \mathscr{B}(\tilde{\mathscr{H}})$ funkcionál $\tilde{f}$: $\tilde{f}(\tilde{B}) = f(B)$. Podle lemmatu 5 platí $\tilde{f}(\tilde{B}) = (X, \tilde{B}\Psi)_{\tilde{\mathscr{H}}}$ pro nějaké vektory $X, \Psi \in \tilde{\mathscr{H}}$, a protože $\tilde{f}$ je pozitivní, lemma 6 implikuje existenci vektoru $\Phi \in \tilde{\mathscr{H}}$ takového, že $\tilde{f}(\tilde{B}) = (\Phi, \tilde{B}\Phi)_{\tilde{\mathscr{H}}}$ pro všechna $B \in \mathscr{A}$, tj. vyjádření (5). Navíc je f stav, proto $f(I) = \|\Phi\|^2_{\tilde{\mathscr{H}}} = 1$.

Z vyjádření (5) dále plyne tvrzení (a). Nechť $\{E_\alpha: \alpha \in J\}$ je systém vzájemně ortogonálních projektorů v $\mathscr{A}$ a $E \equiv \sum_{\alpha \in J} E_\alpha$. Ke každému k existuje nejvýše spočetná množina J_k taková, že $E_\alpha\varphi_k = 0$ pro $\alpha \in J \setminus J_k$. Množina $K = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$ je rovněž nejvýše spočetná, takže jí odpovídající podsystém projektorů lze uspořádat v posloupnost $\{E_j\}$, přičemž $\sum_{j=1}^{\infty} E_j = E$. Platí tedy $f(E) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k, E\varphi_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \|E_jE\varphi_k\|^2$. Navíc je $f(E) \leqq \|E\| = 1$, takže posledně uvedená řada absolutně konverguje a lze ji přerovnat,

$$f(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k, E_j\varphi_k) = \sum_{j=1}^{\infty} f(E_j) = \sum_{\alpha \in J} f(E_\alpha),$$

tj. stav f je normální.

Zbývá ověřit, že existence vyjádření (5) je ekvivalentní tvrzení (c). Platí-li (5), můžeme definovat $W\psi := \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k, \psi)\, \varphi_k$, kde řada konverguje vzhledem k normě v $\mathscr{H}$. Platí

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{n} (\varphi_k, \psi)\, \varphi_k \right\| \leqq \sum_{k=m+1}^{n} |(\varphi_k, \psi)|\, \|\varphi_k\| \leqq \|\psi\| \sum_{k=m+1}^{n} \|\varphi_k\|^2,$$

proto je operátor W definován na celém $\mathscr{H}$; snadno ověříme, že W je pozitivní a $\|W\| \leqq 1$. Nechť $\{\psi_\alpha\}$ je nějaká totální ortonormální množina v $\mathscr{H}$. Každý z vektorů φ_k má nejvýše spočetně mnoho nenulových Fourierových koeficientů, proto existuje nejvýše spočetná podmnožina v $\{\psi_\alpha\}$ taková, že její doplněk patří do

Ker W. Uspořádáme-li ji v posloupnost $\{\psi_j\}$, můžeme psát $\operatorname{Tr} W = \sum_j (\psi_j, W\psi_j) = \sum_j \sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi_k, \psi_j)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_k\|^2 = 1$. To znamená, že W je statistický operátor; podle věty 6.4.2 pak pro každé $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ řada vyjadřující $\operatorname{Tr}(WB)$ absolutně konverguje a platí

$$\operatorname{Tr}(WB) = \sum_j (\psi_j, WB\psi_j) = \sum_j \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k, B\psi_j)(\psi_j, \varphi_k) =$$

$$= \sum_j \sum_{k=1}^{\infty} (B^*\varphi_k, \psi_j)(\psi_j, \varphi_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (B^*\varphi_k, \varphi_k) = f(B)\,,$$

tj. tvrzení (c). Je-li naopak W statistický operátor s potřebnými vlastnostmi a $\sum_k w_k(\psi_k, .)\,\psi_k$ je jeho spektrální rozklad, definujeme $\varphi_k := w_k^{1/2}\psi_k$, popřípadě doplníme vzniklou posloupnost nulami, je-li $\dim \operatorname{Ran} W < \infty$. Je snadné ověřit, že tomuto Φ odpovídá vyjádření funkcionálu f ve tvaru (5) ■

Každému normálnímu stavu f tedy odpovídá nějaký statistický operátor W, obecně vzato však není určen jednoznačně a nemusí patřit do algebry $\mathscr{A}$. Jednoduchou ilustraci těchto skutečností dává algebra skalárních operátorů $\mathbb{C}(\mathscr{H})$, na níž existuje jediný stav f: $f(\alpha I) = \alpha$, který je normální a čistý. Za W potom můžeme vzít libovolný statistický operátor z $\mathscr{B}(\mathscr{H})$; je zřejmé, že W nepatří do $\mathbb{C}(\mathscr{H})$, je-li $\dim \mathscr{H} > 1$. Ukážeme, že zmíněnou nejednoznačnost lze odstranit, omezíme-li se na speciální třídu W*-algeber (viz též cvičení 15). Budeme předpokládat, že
(ao1) pro algebru $\mathscr{A}$ platí

$$\mathscr{A} = \sum_{\alpha \in J}{}^{\oplus} \mathscr{B}(\mathscr{H}_\alpha)\,, \tag{6}$$

kde $\{\mathscr{H}_\alpha\}$ je nějaký systém Hilbertových prostorů, $\sum_{\alpha \in J}{}^{\oplus} \mathscr{H}_\alpha = \mathscr{H}$.
(ao2) každý minimální projektor v $\mathscr{A}$ je jednorozměrný.

S takovými algebrami se setkáme jako s algebrami pozorovatelných v kvantové mechanice. Přitom podmínka (ao2) je diktována požadavkem jednoduchosti: je zbytečné přiřazovat dané pozorovatelné n-tici *totožných* operátorů.

13.2.8 Věta: Pro W*-algebru $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ splňující podmínky (ao1), (ao2) platí
(a) mezi normálními stavy f na $\mathscr{A}$ a statistickými operátory $W \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$, jež jsou redukovány všemi podprostory $\mathscr{H}_\alpha$, existuje bijektivní přiřazení takové, že pro všechna $B \in \mathscr{A}$ platí

$$f(B) = \operatorname{Tr}(WB)\,, \tag{7}$$

(b) normální stav f na $\mathscr{A}$ je čistý právě tehdy, když jemu odpovídající statistický operátor W je jednorozměrný projektor.

Důkaz: (a) Stav f lze podle věty 2 vyjádřit ve tvaru (5) a $\mathscr{A}$ lze ztotožnit s algebrou (6). Označíme E_α projektory na podprostory $\mathscr{H}_\alpha$. Každý z vektorů φ_k má nejvýše spočetně mnoho nenulových komponent $\varphi_{k\alpha} \equiv E_\alpha \varphi_k$ odpovídajících podmnožině $J_k \subset J$, takže systém $\{\varphi_{k\alpha}: k$ přirozené, $\alpha \in J_k\}$ lze uspořádat v posloupnost $\{\varphi^{(j)}\}$. Vzhledem k tomu, že každý operátor $B \in \mathscr{A}$ komutuje se všemi E_α, platí $f(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in J} (\varphi_{k\alpha}, B\varphi_{k\alpha})$, dále z podmínky $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in J} \|\varphi_{k\alpha}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_k\|^2 = 1$ plyne, že uvedená řada absolutně konverguje, a že ji tedy lze přerovnat,

$$f(B) = \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi^{(j)}, B\varphi^{(j)}) .$$

Dostali jsme tak pro stav f nové vyjádření typu (5), přičemž nyní každý z vektorů $\varphi^{(j)}$ patří do některého z podprostorů $\mathscr{H}_\alpha$. Přiřadíme-li posloupnosti $\{\varphi^{(j)}\}$ statistický operátor W podobně jako v důkazu věty 2, potom pro libovolná $\alpha \in J$, $\psi \in \mathscr{H}$ platí

$$WE_\alpha\psi = \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi^{(j)}, E_\alpha\psi)\, \varphi^{(j)} = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_{k\alpha}, \psi)\, \varphi_{k\alpha} = \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi^{(j)}, \psi)\, E_\alpha\varphi^{(j)} = E_\alpha W\psi ,$$

tj. W komutuje se všemi projektory E_α, a patří tudíž do algebry $\mathscr{A}$.

Předpokládejme dále, že danému f odpovídají statistické operátory $W_1, W_2 \in \mathscr{A}$ takové, že pro oba platí vztah (7). Operátor $W \equiv W_1 - W_2$ je potom hermitovský a jaderný, a pro všechna $B \in \mathscr{A}$ platí $\mathrm{Tr}\,(WB) = 0$, speciálně $\mathrm{Tr}\, W^2 = \|W\|_2 = 0$, tj. $W = 0$. Přiřazení $f \mapsto W$ je tedy injektivní. Je také surjektivní: pro každý statistický operátor W vztah (7) definuje stav na $\mathscr{A}$, o němž se lze podobně jako v důkazu věty 2 přesvědčit, že je normální.

(b) Podle věty 12.4.9 je stav f odpovídající statistickému operátoru W čistý právě tehdy, když jemu odpovídající GNS-reprezentace je ireducibilní. Reprezentaci π_W jsme sestrojili v příkladu 12.4.5; viděli jsme, že je reducibilní, je-li $\dim\,(\mathrm{Ker}\, W)^\perp > 1$. V opačném případě je W jednorozměrný projektor odpovídající vektoru $\psi \in \mathscr{H}$. Operátor W patří do $\mathscr{A}$, proto komutuje se všemi E_α, a vektor ψ tudíž musí patřit do podprostoru $\mathscr{H}_\beta$ pro některé $\beta \in J$. Pro GNS-reprezentaci π_ψ sestrojenou v příkladu 12.4.4 ze vztahu (6) plyne $\mathscr{H}_\psi = \mathscr{H}_\beta$ a dále $\pi_\psi(\mathscr{A}) = \mathscr{B}(\mathscr{H}_\beta)$; jinými slovy, π_ψ je ireducibilní. ∎

Komentář

§ **13.1:** Základy teorie W*-algeber byly zformulovány v sérii prací J. von Neumanna počínající rokem 1929. Existuje řada monografií, z nichž se lze o této teorii poučit, např. ⟦BR 1⟧, kap. 2; ⟦Di 1⟧, a též dodatek A k ⟦Di 2⟧; ⟦Em⟧, kap. 2; ⟦Nai 1⟧, kap. VII; ⟦Sa⟧ apod. Úplnější verzi věty o bikomutantu lze najít v ⟦BR 1⟧, věta 2.4.11; ⟦Di 1⟧, § I.4. Jiným důsledkem věty 5 je tzv. *von Neumannova věta o hustotě* (cvičení 7). Zesílením tohoto výsledku je Kaplanského věta o hustotě – viz ⟦BR 1⟧, věta 2.4.16; ⟦Di 1⟧, § I.5.

§ **13.2:** Stavům splňujícím podmínku (1) se také někdy říká *totálně aditivní* – viz např. práci [Kad 1], kde je rovněž dokázáno, že takovéto stavy jsou normální (ve smyslu usměrněných souborů) a naopak. Uvedený důkaz věty 2 je adaptován z ⟦Di 1⟧, poněkud jiný důkaz lze najít v ⟦BR 1⟧, věta 2.4.21. V případě $\dim \mathscr{H} < \infty$ je každý stav normální, potom pouze tvrzení (c) věty 2 poskytuje netriviální informaci.

Cvičení

1. Dokažte vztahy (13.1.4)

2. σ-slabou topologii na $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ lze ekvivalentně definovat pomocí seminorem $p'_{\Phi\Psi}$: $p'_{\Phi\Psi}(B) = \sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi_k, B\psi_k)|$.

3. Báze σ-silné topologie je tvořena okolími $U_\varepsilon(B; \Phi) := \{C: p_\Phi(C - B) < \varepsilon\}$ pro všechna $\Phi \in \tilde{\mathscr{H}}$. Platí obdobné tvrzení pro σ-slabou topologii?
Návod: Z vektorů $\Phi_j = \{\varphi_k^{(j)}\} \in \tilde{\mathscr{H}}$, $j = 1, \dots, n$, lze utvořit vektor $\Phi := \{\varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_2^{(n)}, \dots\}$.

4. Nechť $\mathscr{S}$ je symetrická podmnožina v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, potom $\mathscr{S}'$ je W*-algebra. Dále W*-algebra $\mathscr{A}_W(\mathscr{S})$ generovaná množinou $\mathscr{S}$ je rovna $\mathscr{S}''$, přičemž $\mathscr{S}$ a $(\bar{\mathscr{S}})_w$ generují tutéž W*-algebru.

5. Nechť $E \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je projektor různý od 0, I. Algebra $\mathscr{A} = \{\alpha E: \alpha \in \mathbb{C}\}$ je slabě uzavřená a $\mathscr{A}'' = \{\alpha E + \beta(I - E): \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$.
Návod: Z definice slabé operátorové topologie lze ověřit, že operátor $B \in (\bar{\mathscr{A}})_w$ má tvar $B = \alpha E$ pro nějaké $\alpha \in \mathbb{C}$.

6. Pro množinu $\mathscr{S} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ definujeme podprostor $\mathscr{G}_\mathscr{S} := [\bigcap_{B \in \mathscr{S}} \operatorname{Ker} B]^\perp$ a jemu odpovídající projektor označíme $E_\mathscr{S}$. Pro všechna $B \in \mathscr{S}$ potom platí $BE_\mathscr{S} = B$; je-li $\mathscr{S}$ symetrická, platí také $E_\mathscr{S} B = B$.

7. *Věta (von Neumann)*: Nedegenerovaná *-podalgebra $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je hustá v $\mathscr{A}''$ vzhledem k libovolné z topologií τ_w, τ_s, $\tau_{\sigma w}$, $\tau_{\sigma s}$.

8. Dokažte vztahy (13.1.7).

9. Nechť $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je W*-algebra. O projektoru $E \in \mathscr{A}$ říkáme, že je *minimální*, pokud v $\mathscr{A}$ neexistují nenulové projektory E_1, E_2 takové, že $E = E_1 + E_2$. V tomto případě pro všechna $\varphi \in E\mathscr{H}$, $B \in \mathscr{A}$ platí $\|B\varphi\| = \|BE\| \, \|\varphi\|$. Každý minimální projektor v $\mathscr{A}$ je abelovský.
Návod: Algebra $\mathscr{A}_E$ neobsahuje jiné projektory než nulový a jednotkový operátor na $E\mathscr{H}$. Z lemmatu 14.1.5 pak plyne $EBE = \lambda(B) E$, kde λ je pozitivní funkcionál na $\mathscr{A}$.

10. Nechť $\varphi: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ je *-morfismus W*-algeber, potom

(a) je-li operátor $B \in \mathscr{A}$ hermitovský (resp. pozitivní, projektor, unitární), pak totéž platí pro $\varphi(B)$,
(b) pro všechna $B \in \mathscr{A}$ je $\|\varphi(B)\| \leqq \|B\|$; je-li φ injektivní, platí rovnost,
(c) je-li operátor $A \in \mathscr{A}$ hermitovský a g je spojitá reálná funkce, $g(0) = 0$, pak $\varphi(g(A)) = g(\varphi(A))$,
(d) je-li φ bijektivní, platí $\varphi(\mathscr{Z}_{\mathscr{A}}) = \mathscr{Z}_{\mathscr{B}}$.
Návod: (b) Viz tvrzení 12.3.3. (c) Tvrzení dokažte nejprve pro polynomy, pak užijte tvrzení (b) spolu s Weierstrassovou větou a větou 9.3.3.

11. Dokažte tvrzení 13.1.10.

12. Nechť $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je W*-algebra, jejíž centrum obsahuje úplný systém projektorů, tj. množinu vzájemně ortogonálních projektorů $\{E_j : j \in J\}$ takovou, že $\sum_{j \in J} E_j = I$, potom existuje prostorový izomorfismus algeber $\mathscr{A}$ a $\sum_{j \in J}^{\oplus} \mathscr{A}_{E_j}$.

13. Předpoklad, že W komutuje se všemi E_α, ve větě 13.2.8 je podstatný: k danému f mohou existovat i jiné statistické operátory takové, že platí vztah (13.2.6).

Návod: Uvažujte algebru $\mathscr{A} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ a operátory $W_\vartheta \equiv \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 1 \end{pmatrix}$.

14. Ke každému σ-slabě spojitému lineárnímu funkcionálu na W*-algebře $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ existuje jaderný operátor W takový, že pro všechna $B \in \mathscr{A}$ platí $f(B) = \mathrm{Tr}\,(WB)$. Zobecněte obdobně tvrzení (a) věty 13.2.8.

Návod: Užijte lemmatu 13.2.5 a položte $W\psi = \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j, \psi)\, \psi_j$; obměňte postup z důkazu věty 13.2.2.

14.1 STRUKTURA KOMUTATIVNÍCH SYMETRICKÝCH MNOŽIN

V § 12.1 jsme zavedli pojmy symetričnosti a komutativity pro podmnožiny v involutivní algebře, speciálně pro libovolnou množinu omezených operátorů na daném Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$. Budeme-li uvažovat množiny obsahující neomezené operátory, musíme definice formulovat opatrněji. O operátorové množině $\mathscr{S}$ říkáme, že je **symetrická**, pokud spolu s každým $T \in \mathscr{S}$ obsahuje také operátor T^*. O symetričnosti má tedy smysl mluvit pouze tehdy, když všechny operátory obsažené v $\mathscr{S}$ jsou hustě definovány. Symetričnost se zachovává při některých množinových operacích (cvičení 1):

14.1.1 Tvrzení: Nechť $\mathscr{S}$ je symetrická operátorová množina, potom každý operátor $T \in \mathscr{S}$ lze uzavřít a $\bar{T} \in \mathscr{S}$. Jsou-li $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$ symetrické množiny a množina $\mathscr{S}_1 \backslash \mathscr{S}_2$ obsahuje pouze uzavřené operátory, pak je rovněž symetrická. Sjednocení, resp. průnik libovolného systému symetrických operátorových množin je symetrická operátorová množina.

Příklady symetrických operátorových množin je snadné najít. Množina $\mathscr{L}_{sa}(\mathscr{H})$ všech samosdružených operátorů na daném $\mathscr{H}$ je symetrická, naproti tomu množina $\mathscr{L}_s(\mathscr{H})$ všech symetrických operátorů symetrická *není,* protože operátor sdružený k symetrickému nemusí být symetrický (např. operátor $\tilde{P} = \dot{P}^*$ z příkladu 7.2.7). Ze symetričnosti množiny $\mathscr{S} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ plyne symetričnost $\mathscr{S}_{\rm lin}$; v obecném případě to neplatí, protože operátory z lineárního obalu symetrické množiny nemusí být hustě definovány.

Pojem komutativity operátorů T, S jsme zavedli pro případ, kdy alespoň jeden z nich je omezený (viz vztah (7.4.4)). Jsou-li oba operátory neomezené, jsme o komutativitě schopni mluvit jen v některých speciálních případech, např. když T, S jsou samosdružené. Označíme tedy symbolem $\mathscr{L}_{b,sa}(\mathscr{H})$ množinu, která vznikne doplněním $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ o samosdružené operátory na $\mathscr{H}$, $\mathscr{L}_{b,sa}(\mathscr{H}) \equiv$ $\equiv \mathscr{B}(\mathscr{H}) \cup \mathscr{L}_{sa}(\mathscr{H})$. O množině $\mathscr{S} \subset \mathscr{L}_{b,sa}(\mathscr{H})$ říkáme, že je **komutativní**, jestliže libovolné operátory $T, S \in \mathscr{S}$ spolu komutují. Každá podmnožina komutativní množiny je komutativní, speciálně průnik komutativních množin je komutativní množina. Množinám $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2 \subset \mathscr{L}_{b,sa}(\mathscr{H})$, obecně nekomutativním, říkáme *komutující* množiny, pokud libovolný operátor $T_1 \in \mathscr{S}_1$ komutuje se všemi $T_2 \in \mathscr{S}_2$. Sjednocení komutujících komutativních množin je komutativní množina.

428 Někdy je výhodné studovat místo dané operátorové množiny $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}_{b,sa}(\mathcal{H})$ nějakou množinu z ní sestrojenou. Definujeme množiny

$$\mathcal{S}_R := \{\mathcal{S} \cap \mathcal{L}_{sa}(\mathcal{H})\} \cup \{\mathrm{Re}\, B, \mathrm{Im}\, B : B \in \mathcal{S} \cap \mathcal{B}(\mathcal{H})\}, \tag{1}$$

$$\mathcal{S}_p := \{\mathcal{S} \cap \mathcal{B}(\mathcal{H})\} \cup \{E_A(M) : A \in \mathcal{L}_{sa}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{S},\ M \text{ borelovská}\}, \tag{2}$$

$$\mathcal{S}_f := \{\mathcal{S} \cap \mathcal{B}(\mathcal{H})\} \cup \{f(A) : A \in \mathcal{L}_{sa}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{S},\ f \text{ omezená borelovská}\}. \tag{3}$$

14.1.2 Tvrzení: Pro množinu $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}_{b,sa}(\mathcal{H})$ platí:
(a) množina $\mathcal{S}_p$ je symetrická právě tehdy, když $\mathcal{S}$ je symetrická; v takovém případě je i $\mathcal{S}_f$ symetrická,
(b) je-li kterákoli z množin $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_p$, $\mathcal{S}_f$ komutativní, jsou i zbývající dvě komutativní,
(c) je-li $\mathcal{S}$ symetrická, pak komutativita $\mathcal{S}$ je ekvivalentní komutativitě $\mathcal{S}_R$,
(d) $\mathcal{S}' = (\mathcal{S}_p)' = (\mathcal{S}_f)' \supset (\mathcal{S}_R)'$; je-li $\mathcal{S}$ symetrická, platí též $\mathcal{S}' = (\mathcal{S}_R)'$.

Důkaz: Ověření části (a)–(c) přenecháváme čtenáři (cvičení 3). Pro operátor $B \in \mathcal{S}'$ a všechna $C \in \mathcal{S} \cap \mathcal{B}(\mathcal{H})$ platí $[B, C] = 0$. Jestliže dále B komutuje se samosdruženým operátorem A, pak pro každou omezenou borelovskou funkci f platí $[f(A), B] = 0$, neboť $f(A) \in \{A\}'' \subset \mathcal{S}''$ podle vztahu (10.5.12). Platí tedy $\mathcal{S}' \subset (\mathcal{S}_f)'$, dále z inkluze $\mathcal{S}_p \subset \mathcal{S}_f$ plyne $(\mathcal{S}_f)' \subset (\mathcal{S}_p)'$. Je-li $B \in (\mathcal{S}_p)'$, pak operátor B komutuje se všemi $C \in \mathcal{S} \cap \mathcal{B}(\mathcal{H})$, a pro samosdružený operátor $A \in \mathcal{S}$ platí $[E_A(M), B] = 0$ pro všechny borelovské množiny M, tj. B komutuje s A; dohromady dostáváme řetěz inkluzí $\mathcal{S}' \subset (\mathcal{S}_f)' \subset (\mathcal{S}_p)' \subset \mathcal{S}'$. Operátor $B \in (\mathcal{S}_R)'$ komutuje se všemi samosdruženými operátory v $\mathcal{S}$, a dále s $\mathrm{Re}\, C$, $\mathrm{Im}\, C$ pro každý operátor $C \in \mathcal{S} \cap \mathcal{B}(\mathcal{H})$; odtud $(\mathcal{S}_R)' \subset \mathcal{S}'$. Je-li $\mathcal{S}$ navíc symetrická, pak každý operátor $B \in \mathcal{S}'$ komutuje s operátory C, C^* pro všechna $C \in \mathcal{S} \cap \mathcal{B}(\mathcal{H})$, a tedy i s $\mathrm{Re}\, C$, $\mathrm{Im}\, C$. ∎

Vyšetřování struktury dané operátorové množiny se zjednoduší, existují-li mezi jejími prvky funkcionální vztahy umožňující zvolit „nezávislé“ operátory a ostatní vyjádřit pomocí nich. Uveďme nejprve několik jednoduchých ilustrací týkajících se operátorových množin v konečnědimenzionálních prostorech:

14.1.3 Příklady: (a) Nechť jsou dány operátory $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$, přičemž *$A$ je hermitovský a má jednoduché spektrum* $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$; odpovídající vlastní vektory tedy tvoří ortonormální bázi $\{e_j\}_{j=1}^n$ v $\mathbb{C}^n$. Dokážeme, že *pokud operátory A, B komutují, je B funkcí A*, konkrétně polynomem řádu $\leqq n-1$. Z předpokladu komutativity plyne $A(Be_j) = \lambda_j Be_j$, $j = 1, \dots, n$, a protože každý vlastní podprostor operátoru A je jednorozměrný, platí $Be_j = \mu_j e_j$, $j = 1, \dots, n$, kde ovšem vlastní hodnoty $\mu_j \in \mathbb{C}$ nemusí být vzájemně různé. Soustava lineárních rovnic

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_j^k = \mu_j\,, \qquad j = 1, \dots, n\,,$$

má právě jedno řešení $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$, neboť jejím determinantem je Vandermondův determinant odpovídající n-tici vzájemně různých čísel $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, který je tím pádem nenulový. Odtud snadno dostaneme vztah $B = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k$.

(b) Nechť E_1, E_2, E_3 jsou vzájemně ortogonální jednorozměrné projektory na $\mathbb{C}^3$. Operátory $A_1 \equiv E_1 + E_2$ a $A_2 \equiv E_2 + E_3$ jsou hermitovské a komutují spolu, žádný z nich však není funkcí druhého: kdyby bylo např. $A_2 = f(A_1)$, muselo by platit $f(1)(E_1 + E_2) + f(0)E_3 = E_2 + E_3$, což zjevně není možné. Lze však najít hermitovský operátor A takový, že komutuje se všemi E_j a operátory A_1, A_2 jsou jeho funkcemi: stačí vzít $A = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j E_j$, kde λ_j jsou vzájemně různá reálná čísla.

(c) Pokud operátorová množina $\mathscr{S}$ je nekomutativní nebo nesymetrická, nemusí existovat hermitovský operátor takový, aby všechny operátory z $\mathscr{S}$ byly jeho funkcemi. Jako příklad vezměme operátor $B \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^2)$ reprezentovaný maticí $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Množina $\{B\}$ není symetrická, množina $\{B, B^*\}$ zase není komutativní, přitom operátor B není funkcí žádného hermitovského operátoru, neboť v takovém případě by musel být normální.

Hermitovský operátor $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ budeme nazývat **generujícím operátorem** množiny $\mathscr{S} \subset \mathscr{L}_{\mathrm{b,sa}}(\mathscr{H})$, jestliže ke každému $T \in \mathscr{S}$ existuje borelovská funkce f_T taková, že $T = f_T(A)$. Je zřejmé, že generující operátor není určen jednoznačně: jiný hermitovský operátor $\tilde{A}$ takový, že $A = h(\tilde{A})$ pro nějakou borelovskou funkci h, je rovněž generujícím operátorem množiny $\mathscr{S}$, přičemž $\tilde{f}_T \equiv f_T \circ h$. Z uvedených příkladů je vidět, že generující operátor nemusí patřit do množiny $\mathscr{S}$, a že nemusí existovat, není-li $\mathscr{S}$ symetrická a komutativní. Dokážeme nejprve následující tvrzení:

14.1.4 Věta (von Neumann): Nechť $\mathscr{H}$ je separabilní a $\mathscr{A}$ je slabě uzavřená komutativní $*$-podalgebra v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, potom existuje hermitovský operátor $A \in \mathscr{A}$, který algebru $\mathscr{A}$ generuje, $\mathscr{A} = \mathscr{A}_{\mathrm{w}}(\{A\})$.

14.1.5 Lemma: Nechť $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je slabě uzavřená algebra. Hermitovský operátor A se spektrálním rozkladem $\{E_t\}$ patří do $\mathscr{A}$ právě tehdy, když v $\mathscr{A}$ leží projektory E_t pro všechna $t < 0$ a $I - E_t$ pro $t \geqq 0$. Označíme-li tuto množinu projektorů $\{P_t^{(A)}\}$, platí $\mathscr{A}_{\mathrm{w}}(\{A\}) = \mathscr{A}_{\mathrm{w}}(\{P_t^{(A)}\})$.

Důkaz: Začneme ověřením postačující podmínky. Spektrum $\sigma(A)$ leží v nějakém intervalu $(-b, b)$ a operátory

$$A_n := \sum_{k=-n+1}^{n} \frac{kb}{n} E_A(J_k^n),$$

430 kde $J_k^n = \left(\frac{b(k-1)}{n}, \frac{bk}{n}\right]$, $n = 1, 2, \ldots$, leží v $\mathscr{A}$. Skutečně, že vztahu (9.1.8) vyplývá $E_A(J_k^n) = E_{bk/n} - E_{b(k-1)/n}$ a je-li $k < 0$, je $E_A(J_k^n) \in \mathscr{A}$, protože $E_{bk/n} \in \mathscr{A}$. Stejný vztah platí i pro $k \geqq 1$, jelikož lze psát $E_A(J_k^n) = (I - E_{bk/n}) - (I - E_{b(k-1)/n})$ a $I - E_{b(k-1)/n} \in \mathscr{A}$ pro tato k.

Podle pravidel funkcionálního počtu (věta 9.3.3d) posloupnost $\{A_n\}$ silně, a tudíž i slabě konverguje k A, takže v důsledku slabé uzavřenosti je $A \in \mathscr{A}$.

Nutná podmínka vyplývá také snadno z pravidel funcionálního počtu. Podle tvrzení 10.1.5 a 10.1.3 existuje posloupnost polynomů $\{P_n\}$ taková, že pro funkci $\chi_{[-b,s]}$ platí $\lim_{n\to\infty} P_n(t) = \chi_{[-b,s]}(t)$. Stejnou vlastnost má i posloupnost homogenních polynomů $\{\tilde{P}_n\}$ definovaná vztahem $\tilde{P}_n(t) := P_n(t) - P_n(0)$, jejíž předností je, že $\tilde{P}_n(A) \in \mathscr{A}$, i když $I \notin \mathscr{A}$. Protože $\operatorname{s-lim}_{n\to\infty} \tilde{P}_n(A) = \mathscr{T}_b(\chi_{[-b,s]}) = E_s$ (viz větu 9.3.3d a vztah (9.3.2b)), je také $E_s = \operatorname{w-lim}_{n\to\infty} \tilde{P}_n(A)$ a $E_s \in \mathscr{A}$ v důsledku slabé uzavřenosti $\mathscr{A}$ pro $s < 0$; pro $s \geqq 0$ se obdobně dokáže $I - E_s \in \mathscr{A}$.

Poslední tvrzení lemmatu plyne jednoduše z dokázané ekvivalence. ■

14.1.6 Lemma: Nechť $\mathscr{H}$ je separabilní, potom z libovolné nekonečné množiny $\mathscr{S} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ lze vybrat spočetnou podmnožinu $\mathscr{S}_0$ tak, že pro každý operátor $B \in \mathscr{S}$ existuje posloupnost $\{B_n\} \in \mathscr{S}_0$ splňující podmínky $\operatorname{s-lim}_{n\to\infty} B_n = B$ a $\operatorname{s-lim}_{n\to\infty} B_n^* = B^*$.

Důkaz: Množinu $\mathscr{S}$ lze vyjádřit jako spočetné sjednocení $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{B \in \mathscr{S} : n - 1 \leqq \|B\| < n\}$, proto stačí uvažovat případ, kdy existuje K takové, že pro všechna $B \in \mathscr{S}$ je $\|B\| \leqq K$. Sestrojíme Hilbertův prostor $\tilde{\mathscr{H}}$ jako direktní součet spočetného systému identických kopií prostoru $\mathscr{H}$ (podobně jako v poznámce 13.1.1); ze separability $\mathscr{H}$ plyne, že i $\tilde{\mathscr{H}}$ je separabilní. Vezměme nějakou spočetnou množinu $\{\varphi_j\}$ nenulových vektorů, která je hustá v $\mathscr{H}$, a každému operátoru $B \in \mathscr{S}$ přiřadíme vektor $\Phi_B \in \tilde{\mathscr{H}}$ předpisem

$$\Phi_B = \{c_1 B\varphi_1, c_1 B^*\varphi_1, c_2 B\varphi_2, c_2 B^*\varphi_2, \ldots\}, \qquad c_j^{-1} = 2^j \|\varphi_j\| .$$

Podmnožina $\Phi_{\mathscr{S}} = \{\Phi_B : B \in \mathscr{S}\}$ v separabilním metrickém prostoru $\tilde{\mathscr{H}}$ je sama separabilní (cvičení 2.10), proto lze vybrat spočetnou množinu $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}$ takovou, že jí odpovídající $\Phi_{\mathscr{S}_0}$ je hustá v $\Phi_{\mathscr{S}}$. Jinými slovy, ke každému $B \in \mathscr{S}$ existuje posloupnost $\{B_n\} \in \mathscr{S}_0$, pro kterou platí

$$\|\Phi_B - \Phi_{B_n}\|_{\tilde{\mathscr{H}}}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 \|B\varphi_j - B_n\varphi_j\|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 \|B^*\varphi_j - B_n^*\varphi_j\|^2 \to 0 ,$$

když $n \to \infty$; odtud plyne $B_n\varphi_j \to B\varphi_j$ a $B_n^*\varphi_j \to B^*\varphi_j$ pro všechna j. Pro libovolný vektor $\varphi \in \mathscr{H}$ potom dostaneme $\|B\varphi - B_n\varphi\| \leqq \|B\varphi - B\varphi_j\| + \|B\varphi_j - B_n\varphi_j\| + \|B_n\varphi_j - B_n\varphi\|$, což podle předpokladu dává

$$\limsup_{n\to\infty} \|B\varphi - B_n\varphi\| \leqq 2K\|\varphi - \varphi_j\| .$$

Množina $\{\varphi_j\}$ je hustá v $\mathscr{H}$, proto lze pravou stranu zvolit menší než libovolné kladné číslo. Odtud $\operatorname{s-lim}_{n\to\infty} B_n = B$, a obdobně se dokáže vztah pro sdružené operátory. ■

14.1.7 Lemma: Nechť $\mathscr{A}$ je slabě uzavřená komutativní $*$-podalgebra v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, kde $\mathscr{H}$ je separabilní, potom $\mathscr{A}$ obsahuje posloupnost $\{E_k\}$ vzájemně komutujících projektorů, která ji generuje, $\mathscr{A} = \mathscr{A}_w(\{E_k\})$.

Důkaz: $\mathscr{A}$ je podle předpokladu $*$-algebra, proto platí inkluze $\mathscr{A}_R \subset \mathscr{A} \subset \mathscr{A}_0(\mathscr{A}_R)$, jež dávají $\mathscr{A} \equiv \mathscr{A}_w(\mathscr{A}) = \mathscr{A}_w(\mathscr{A}_R)$. Označíme $\mathscr{S}_P \equiv \{P_t^{(A)}: A \in \mathscr{A}_R, t \in \mathbb{R}\}$; podle tvrzení 2 je tato množina komutativní, neboť $\mathscr{S}_P \subset (\mathscr{A}_R)_f$. Z lemmatu 5 plyne inkluze $\mathscr{S}_P \subset \mathscr{A}_R$, jež implikuje $\mathscr{A}_w(\mathscr{S}_P) \subset \mathscr{A}_w(\mathscr{A}_R) = \mathscr{A}$, a naopak $\mathscr{S}_P \subset \mathscr{A}_w(\mathscr{S}_P)$ dává $\mathscr{A}_R \subset \mathscr{A}_w(\mathscr{S}_P)$, tj. dohromady $\mathscr{A} = \mathscr{A}_w(\mathscr{S}_P)$. Konečně podle lemmatu 6 můžeme z $\mathscr{S}_P$ vybrat spočetnou množinu $\{E_k\}$ vzájemně komutujících projektorů. Zjevně platí $\mathscr{A}_w(\{E_k\}) \subset \mathscr{A}$, z druhé strany ke každému $E \in \mathscr{S}_P$ lze najít posloupnost $\{E_{k_j}\}$, jež konverguje k E silně, a tedy i slabě; odtud $\mathscr{S}_P \subset \overline{(\{E_k\})}_w \subset \mathscr{A}_w(\{E_k\})$, takže $\mathscr{A}_w(\{E_k\}) \supset \mathscr{A}_w(\mathscr{S}_P) = \mathscr{A}$. ■

Důkaz věty 4: Z právě dokázaného lemmatu víme, že algebra $\mathscr{A}$ je generována posloupností $\{E_k\}$ vzájemně komutujících projektorů. Abychom z ní mohli sestrojit rozklad jedničky, musíme nejprve nahradit $\{E_k\}$ uspořádanou množinou projektorů. Položíme $F_1 := E_1$, a dále $F_2 := E_2F_1$, $F_3 := F_1 + E_2(I - F_1)$. Z komutativity operátorů E_1, E_2 plyne, že F_1, F_2, F_3 jsou projektory, jež navzájem komutují; navíc patří do $\mathscr{A}$ (přítomnost jednotkového operátoru v definici F_3 je pouze zdánlivá) a splňují nerovnosti $F_2 \leqq F_1 \leqq F_3$. Ve třetím kroku přidáme operátor E_3 a sestrojíme komutující projektory

$$F_4 := 0 + E_3(F_2 - 0), \qquad F_5 := F_2 + E_3(F_1 - F_2),$$
$$F_6 := F_1 + E_3(F_3 - F_1), \qquad F_7 := F_3 + E_3(I - F_3),$$

které patří do $\mathscr{A}$ a vyhovují nerovnostem $F_4 \leqq F_2 \leqq F_5 \leqq F_1 \leqq F_6 \leqq F_3 \leqq F_7$. Schéma dalšího postupu je zřejmé: v k-tém kroku přidáme k dosud sestrojeným $2^{k-1} - 1$ projektorům projektor E_k a mezi každé dva sousední projektory $F \leqq F'$ „vložíme" projektor $F'' := F + E_k(F' - F)$: zjevně platí $F \leqq F'' \leqq F'$ (za levého (pravého) „souseda" nejmenšího (největšího) projektoru pokládáme nulový (jednotkový) operátor). Operátory E_k lze zpětně vypočítat ze vztahu

$$E_k = \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} F_j - \sum_{j=1}^{2^{k-1}-1} F_j\,,$$

takže každý (homogenní) polynom sestavený z operátorů E_k lze současně vyjádřit jako polynom v operátorech F_j. Podle cvičení 12.14 jsou potom slabě uzavřené algebry generované oběma množinami operátorů totožné, $\mathscr{A}_w(\{E_k\}) = \mathscr{A}_w(\{F_j\})$.

Hledaný rozklad jedničky nyní sestrojíme tak, že interval $[-1,0)$ rozdělíme na tři stejné části; prostřední otevřený interval $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ označíme J_1. Každý z obou zbývajících intervalů rozdělíme opět na tři části a položíme $J_2 := (-\frac{8}{9}, -\frac{7}{9})$, $J_3 := (-\frac{2}{9}, -\frac{1}{9})$; opakováním tohoto postupu dostaneme posloupnost disjunktních otevřených intervalů $\{J_j\}$. Pro libovolné $t \in \mathbb{R}\backslash M_C$, kde $M_C := [-1,0)\backslash \bigcup_{j=1}^{\infty} J_j$, definujeme projektor

$$E_t := \begin{cases} 0 & \dots\ t < -1\,, \\ F_j & \dots\ t \in J_j\,, \\ I & \dots\ t \geqq 0\,. \end{cases} \tag{4}$$

Zobrazení $t \mapsto E_t$ definované tímto způsobem na $\mathbb{R}\backslash M_C$ je spojité, a tudíž zprava spojité; z konstrukce systémů $\{F_j\}$ a $\{J_j\}$ je zřejmé, že je neklesající. Abychom dostali rozklad jedničky, je nutné je vhodně dodefinovat na M_C, jež je typu Cantorova diskontinua, a proto je její doplněk $\mathbb{R}\backslash M_C$ hustý v $\mathbb{R}$ – viz [[Jar1]], § V.1. Podobně je pro dané t množina $(t,\infty)\backslash M_C$ hustá v $[t,\infty)$; ke každému $t \in \mathbb{R}$ tedy existuje nerostoucí posloupnost $\{t_n\} \subset \mathbb{R}\backslash M_C$ taková, že $t_n \to t$. Posloupnost $\{E_{t_n}\}$ je potom rovněž nerostoucí a konverguje silně k nějakému projektoru. Položíme

$$E_t := \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} E_{t_n}\,, \qquad t \in M_C\,. \tag{5}$$

Tato definice má smysl: je-li $\{t'_n\}$ jiná nerostoucí posloupnost, $t'_n \to t$, platí $\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} E_{t'_n} = E_t$. Skutečně, z posloupností $\{t_n\}$ a $\{t'_n\}$ lze vybrat dvě posloupnosti tak, že posloupnost $\{t_{k_1}, t'_{l_1}, t_{k_2}, t'_{l_2}, \dots\}$ je nerostoucí, a je tedy nerostoucí i příslušná posloupnost projektorů. Tato nová posloupnost proto silně konverguje, a tedy vybrané posloupnosti sudých, resp. lichých členů konvergují k témuž operátoru. Tyto dvě posloupnosti jsou však vybrány také z konvergentních posloupností $\{E_{t_n}\}$, resp. $\{E_{t'_n}\}$, a tedy $\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} E_{t_n} = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} E_{t'_n}$. Snadno ověříme, že zobrazení $t \mapsto E_t$ je neklesající a zprava spojité i v bodech množiny M_C (viz lemma 9.1.4), a že tedy vztahy (4), (5) definují rozklad jedničky.

Z lemmatu 7 a inkluze $\{F_j\} \subset \{E_t\colon t < 0\}$ plyne $\mathscr{A} = \mathscr{A}_w(\{E_k\}) = \mathscr{A}_w(\{F_j\}) \subset \subset \mathscr{A}_w(\{E_t\colon t < 0\})$. Ze vztahů (4), (5) je však vidět, že množina $\{E_t\colon t < 0\}$ patří do (slabě uzavřené) algebry $\mathscr{A}$; odtud plyne opačná inkluze, tj. rovnost $\mathscr{A} = \mathscr{A}_{\mathrm{w}}(\{E_t : t < 0\})$. Pro $t \geqq 0$ je $I - E_t = 0$, proto $\{E_t : t < 0\} = \{P_t^{(A)}\}$, kde A je hermitovský operátor odpovídající rozkladu jedničky $\{E_t\}$ (jeho spektrum leží v množině M_{C}). Z lemmatu 5 potom plyne, že $A \in \mathscr{A}$ a $\mathscr{A}_{\mathrm{w}}(A) = \mathscr{A}_{\mathrm{w}}(\{P_t^{(A)}\}) = \mathscr{A}$. Podle věty 13.1.5 je $\mathscr{A} \equiv \mathscr{A}_{\mathrm{w}}(\{A\}) \subset \{A\}''$ a libovolný prvek z množiny $\{A\}'' \subset \{A\}''_{\mathrm{ex}}$ je roven $f(A)$ při vhodné volbě borelovské funkce f (věta 10.5.9).

Pomocí tohoto výsledku můžeme odvodit tvrzení o struktuře obecnějších operátorových množin:

14.1.8 Věta: K libovolné komutativní symetrické množině $\mathscr{S} \subset \mathscr{L}_{\mathrm{b,sa}}(\mathscr{H})$, kde $\mathscr{H}$ je separabilní, existuje generující operátor A ležící v $\mathscr{S}''$.

Důkaz: Jestliže $\mathscr{S}$ obsahuje neomezené operátory, sestrojíme k ní podle cvičení 4 množinu omezených operátorů $\mathscr{S}_{\mathrm{a}}$, jež je rovněž komutativní a symetrická. Je-li f_T^{a} borelovská funkce, je funkce tg $f_T^{\mathrm{a}}(.)$ rovněž borelovská, dále platí $\mathscr{S}'' = \mathscr{S}''_{\mathrm{a}}$; stačí tedy dokázat větu pro případ $\mathscr{S} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$.

Z vlastností množiny $\mathscr{S}$ plyne, že $\mathscr{A}_0(\mathscr{S})$ je komutativní $*$-podalgebra v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Totéž platí pro $\mathscr{A}_{\mathrm{w}}(\mathscr{S}) \equiv \overline{(\mathscr{A}_0(\mathscr{S}))}_{\mathrm{w}}$, takže podle věty 4 existuje hermitovský operátor $A \in \mathscr{A}_{\mathrm{w}}(\mathscr{S})$, který tuto algebru generuje, $\mathscr{A}_{\mathrm{w}}(\mathscr{S}) \subset \{A\}''$. Platí tedy $\mathscr{S} \subset \{A\}''$, a protože podle věty 13.1.5 $\mathscr{S}'' \supset \mathscr{A}_{\mathrm{w}}(\mathscr{S})$, operátor A patří do $\mathscr{S}''$. ■

Obdobné tvrzení lze odvodit i pro obecnější operátorové množiny, v nichž má stále ještě smysl mluvit o komutativitě neomezených operátorů (cvičení 5). Patří-li generující operátor A do $\mathscr{S}''$, platí $\{A\}' = \mathscr{S}'$ a $\{A\}'' = \mathscr{S}''$ (cvičení 6). Dále $A \in \{A\}'$ dává $\{A\}' \supset \{A\}''$, tj. $\mathscr{S}' \supset \mathscr{S}''$; algebra $\mathscr{S}''$ je tedy abelovská. Rovnost v poslední inkluzi nastává právě tehdy, když operátor A má prosté spektrum (věta 10.9.6); tímto případem se budeme zabývat v příštím paragrafu.

14.2 ÚPLNÉ SOUBORY KOMUTUJÍCÍCH SAMOSDRUŽENÝCH OPERÁTORŮ

Nechť $\mathscr{S}$ je komutativní podmnožina v $\mathscr{L}_{\mathrm{sa}}(\mathscr{H})$. V předchozím paragrafu jsme se zabývali vnitřními vlastnostmi takových množin; nyní si položíme otázku, jaké podmínky musí $\mathscr{S}$ splňovat, aby ji nebylo možné doplnit „nezávislými" komutujícími operátory. Bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat jen doplnění operátory omezenými; je tedy nutné, aby komutant $\mathscr{S}'$ byl tvořen pouze funkcemi operátorů z $\mathscr{S}$. Jinými slovy, musí platit $\mathscr{S}' \subset \mathscr{S}''$; množinu $\mathscr{S}$ s touto vlastností nazýváme **úplným souborem komutujících** (samosdružených) **operátorů**, ve zkratce ÚSKO.

14.2.1 Věta: Nechť $\mathscr{S}$ je komutativní podmnožina v $\mathscr{L}_{\mathrm{sa}}(\mathscr{H})$, kde $\mathscr{H}$ je separabilní, potom následující podmínky jsou ekvivalentní

(a) $\mathscr{S}$ je ÚSKO
(b) algebra $\mathscr{S}''$ je maximální abelovská, tj. $\mathscr{S}' = \mathscr{S}''$,
(c) množina $\mathscr{S}$ má cyklický vektor, tj. existuje $\varphi \in \mathscr{H}$ takové, že $\overline{\mathscr{S}''\varphi} = \mathscr{H}$.

Důkaz: Podle věty 14.1.8 a cvičení 6 lze najít generující operátor A množiny $\mathscr{S}$ tak, aby $\mathscr{S}' = \{A\}'$ a $\mathscr{S}'' = \{A\}''$. Implikace (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a) potom plynou z věty 10.9.6. Zbývá dokázat (a) $\Rightarrow$ (b). Množina $\mathscr{S}_{\mathrm{f}}$ je podle tvrzení 14.1.2 komutativní, přičemž $\mathscr{S}' = (\mathscr{S}_{\mathrm{f}})'$. Platí tedy $\mathscr{S}_{\mathrm{f}} \subset (\mathscr{S}_{\mathrm{f}})'$, a odtud dále $(\mathscr{S}_{\mathrm{f}})' \supset (\mathscr{S}_{\mathrm{f}})''$, tj. $\mathscr{S}' \supset \mathscr{S}''$. Podle předpokladu je $\mathscr{S}$ ÚSKO, proto $\mathscr{S}' = \mathscr{S}''$. ■

Zmínili jsme se o tom, že množina $\mathscr{S}$ tvoří ÚSKO, jestliže její generující operátor $A \in \mathscr{S}''$ má jednoduché spektrum. Tato skutečnost je zvlášť názorná v případě, kdy $\mathscr{S} = \{A_j\}_{j=1}^{N}$ *je konečná množina a operátory* A_j *mají čistě bodová spektra.* Zavedeme nejprve příslušná označení; i nadále budeme předpokládat, že Hilbertův prostor $\mathscr{H}$ je separabilní. Vlastní hodnoty operátoru A_j označíme $\lambda_k^{(j)}$ a jim odpovídající spektrální projektory $P_k^{(j)}$, $k = 1, 2, \ldots$. Z komutativity $\mathscr{S}$ vyplývá, že množina těchto projektorů je komutativní, proto je

$$P_{\{k\}} := \prod_{j=1}^{N} P_{k_j}^{(j)}, \qquad \{k\} = \{k_1, \ldots, k_N\} \tag{1}$$

projektor pro každou N-tici přirozených čísel $\{k\}$. Snadno se přesvědčíme, že projektory odpovídající různým N-ticím jsou vzájemně ortogonální. Zajímáme se pochopitelně jen o takové N-tice $\{k\}$, jimž odpovídají nenulové projektory $P_{\{k\}}$. Jejich množinu označíme K_N; podle předpokladu je nejvýše spočetná, proto ji můžeme uspořádat v posloupnost, $K_N = \{\{k\}_1, \{k\}_2, \ldots, \{k\}_n, \ldots\}$, a označíme $P^{(n)} \equiv P_{\{k\}_n}$.

14.2.2 Věta: Množina $\mathscr{S} = \{A_j\}_{j=1}^{N}$ komutujících samosdružených operátorů na separabilním $\mathscr{H}$, jejichž spektra jsou čistě bodová, tvoří ÚSKO právě tehdy, když $\dim P^{(n)} = 1$ pro všechna $\{k\}_n \in K_N$.

Důkaz: Začneme postačující podmínkou. Projektory $P^{(n)}$ splňují následující vztahy (cvičení 8):

$$P^{(n)} \in \mathscr{S}'' \quad \text{pro všechna} \quad \{k\}_n \in K_N\,, \tag{2}$$

$$\sum_n P^{(n)} = I\,. \tag{3}$$

Z každého jednorozměrného podprostoru $P^{(n)}\mathscr{H}$ vybereme jednotkový vektor φ_n; ze vztahu (3) potom plyne, že $\{\varphi_n\}$ je ortonormální báze v $\mathscr{H}$. Sestrojíme vektor $\psi := \sum_n 2^{-n}\varphi_n$. Množina $M = \{P^{(n)}\psi \colon \{k\}_n \in K_N\}$ je totální v $\mathscr{H}$ a její lineární obal je podle (2) obsažen v $\mathscr{S}''\psi$. Platí tedy $\mathscr{H} = \overline{M_{\mathrm{lin}}} \subset \overline{\mathscr{S}''\psi} \subset \mathscr{H}$, tj. ψ je cyklický vektor množiny $\mathscr{S}$.

Nechť naopak množina $\mathscr{S}$ je ÚSKO a ψ je cyklickým vektorem algebry $\mathscr{S}''$. Ke každému nenulovému vektoru $\varphi \in P^{(m)}\mathscr{H}$ existuje podle předpokladu posloupnost $\{B_n\} \subset \mathscr{S}''$ taková, že $B_n\psi \to \varphi$. Z komutativity množiny $\mathscr{S}$ a vztahu (2) pak plyne $\varphi = P^{(m)}\varphi = \lim_{n\to\infty} B_n P^{(m)}\psi$; vektor φ je nenulový, proto i $P^{(m)}\psi \neq 0$. Předpokládejme, že v podprostoru $P^{(m)}\mathscr{H}$ existuje vektor $\chi \perp P^{(m)}\psi$; jemu odpovídající projektor označíme E_χ. Vektor χ je společným vlastním vektorem operátorů A_j, proto $E_\chi \in \mathscr{S}' = \mathscr{S}''$. Pro libovolné $B \in \mathscr{S}''$ pak platí $B\chi = BE_\chi\chi = E_\chi B\chi$, tj. $B\chi = \alpha(B)\chi$. Odtud dostáváme $(B\psi, \chi) = (B\psi, P^{(m)}\chi) = \alpha(B^*)(P^{(m)}\psi, \chi) = 0$ neboli $\chi \in \{\mathscr{S}''\psi\}^\perp$; protože však ψ je cyklický vektor množiny $\mathscr{S}$, platí $\chi = 0$. ■

Úplné soubory mohou mít různou mohutnost, je však výhodné pracovat s ÚSKO tvořenými co nejmenším počtem operátorů. Extrémním případem je situace, kdy ÚSKO sestává z jediného samosdruženého operátoru; podle věty 10.9.6 tvoří množina $\{A\}$ ÚSKO právě tehdy, když operátor A má jednoduché spektrum. V případě operátoru s čistě bodovým spektrem je to názorně vidět z předchozí věty. Připomeňme další důležité případy:

14.2.3 Příklady: (a) Množina $\{P\}$ tvoří ÚSKO v $L^2(\mathbb{R})$ (příklady 10.9.2, 7.4.12 a cvičení 10.19).
(b) Množina $\{Q_\mu\}$ tvoří ÚSKO v $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$, kde μ je borelovská míra na $\mathbb{R}$ (příklad 10.9.2).

14.2.4 Příklad: Nechť Q_j, $j = 1,2$, jsou operátory na $L^2(\mathbb{R}^2, d(\mu_1 \otimes \mu_2))$ zavedené v příkladu 10.7.4 $(Q_j\psi)(x_1, x_2) = x_j\psi(x_1, x_2)$. O mírách μ_j předpokládáme, že jsou borelovské, ale ne nutně konečné. Dokážeme, že *množina* $\{Q_1, Q_2\}$ *tvoří* ÚSKO. Víme, že pro operátor $Q \equiv Q_\mu$ na $L^2(\mathbb{R}, d\mu_j)$ platí, že množina $\{Q\}''$ má cyklický vektor, jejž označíme φ_j (viz větu 10.9.6); množina $\{f(Q)\varphi_j : f$ omezená borelovská$\}$ je potom hustá v $L^2(\mathbb{R}, d\mu_j)$. Odtud podle tvrzení 4.6.4 plyne, že množina M_{12} tvořená vektory ψ_{fg}: $\psi_{fg}(x_1, x_2) = f(x_1)\,\varphi_1(x_1)\,g(x_2)\,\varphi_2(x_2)$, kde f, g jsou omezené borelovské funkce na $\mathbb{R}$, je hustá v $L^2(\mathbb{R}^2, d(\mu_1 \otimes \mu_2))$. Je snadné ověřit, že f_{12}: $f_{12}(x_1, x_2) = f(x_1)g(x_2)$ je omezená borelovská funkce na $\mathbb{R}^2$; z tvrzení 10.7.2 a poznámky 10.7.3 potom plyne $f_{12}(Q_1, Q_2) = f(Q_1)g(Q_2) \in \{Q_1, Q_2\}''$. Vektor φ_{12}: $\varphi_{12}(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$ patří do $L^2(\mathbb{R}^2, d(\mu_1 \otimes \mu_2))$ a podle příkladu 9.4.5 platí $\psi_{fg} = f_{12}(Q_1, Q_2)\varphi_{12}$. Odtud dostáváme inkluzi $M_{12} \subset \{Q_1, Q_2\}''\varphi_{12}$, a protože $\overline{M}_{12} = L^2(\mathbb{R}^2, d(\mu_1 \otimes \mu_2))$, plyne z ní, že φ_{12} je cyklickým vektorem množiny $\{Q_1, Q_2\}$; tím je tvrzení dokázáno (viz též komentář).

Výsledek předchozího příkladu je možno vyjádřit ještě jiným způsobem, jehož zobecněním dostaneme metodu umožňující konstruovat ÚSKO na tenzorovém součinu $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ ze znalosti úplných souborů na Hilbertových prostorech $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$. Podle příkladu 10.7.4 lze psát $Q_1 = \overline{\tilde{Q}}_1 := \overline{Q_{\mu_1} \otimes I_2}$, resp. $Q_2 = \overline{\tilde{Q}}_2 :=$

$= \overline{I_1 \otimes Q_{\mu_2}}$, a tento výsledek je potom speciálním případem následujícího tvrzení, jehož důkaz přenecháváme čtenáři (cvičení 10):

14.2.5 Tvrzení: Nechť samosdružený operátor A_j na separabilním Hilbertově prostoru $\mathscr{H}_j$, $j = 1,2$, má cyklický vektor φ_j, potom množina $\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\}$ tvoří ÚSKO na $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ s cyklickým vektorem $\varphi_1 \otimes \varphi_2$.

Naším cílem bude nyní zobecnit toto tvrzení na případ, kdy ÚSKO v každém z prostorů $\mathscr{H}_j$ nemusí být tvořeno jediným operátorem. Nejprve zavedeme pro symetrické množiny $\mathscr{S}_j \subset \mathscr{B}(\mathscr{H}_j)$, $j = 1,2$, následující označení:

$$\tilde{\mathscr{S}}_j := \{\tilde{B}_j :\ B_j \in \mathscr{S}_j\}, \qquad j = 1,2, \tag{4}$$

budeme též psát $\mathscr{S}_\Sigma := \tilde{\mathscr{S}}_1 \cup \tilde{\mathscr{S}}_2$. Zajímá nás vztah mezi W*-algebrami generovanými těmito množinami:

14.2.6 Věta: Pro W*-algebry generované symetrickými množinami $\mathscr{S}_j \subset \mathscr{B}(\mathscr{H}_j)$, $j = 1,2$, resp. množinou $\mathscr{S}_\Sigma \subset \mathscr{B}(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2)$ platí

$$\mathscr{A}_{\mathrm{W}}(\tilde{\mathscr{S}}_1 \cup \tilde{\mathscr{S}}_2) = \mathscr{A}_{\mathrm{W}}(\mathscr{S}_1) \otimes \mathscr{A}_{\mathrm{W}}(\mathscr{S}_2)\,. \tag{5}$$

14.2.7 Lemma: Pro symetrické množiny $\mathscr{S}_j \subset \mathscr{B}(\mathscr{H}_j)$, $j = 1,2$, platí

$$(\tilde{\mathscr{S}}_j)'' = (\mathscr{S}_j'')^{\sim}\,. \tag{6}$$

Důkaz: Nechť $\{\psi_\alpha\}$ je ortonormální báze v $\mathscr{H}_2$ a $E^{(\alpha)}$ jsou odpovídající jednorozměrné projektory. Označíme $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ a definujeme unitární operátor $V_\alpha :\ \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_1 \otimes E^{(\alpha)}\mathscr{H}_2 = \tilde{E}_2^{(\alpha)}\mathscr{H}$ vztahem $V_\alpha \varphi = \varphi \otimes \psi_\alpha$. Inverzní operátor rozšíříme na celý prostor $\mathscr{H}$ tak, že položíme $V_\alpha^+ \chi := V_\alpha^{-1}\tilde{E}_2^{(\alpha)}\chi$. Platí následující vztahy (cvičení 11):

$$V_\alpha^+(B \otimes I)V_\beta = \delta_{\alpha\beta}B \quad \text{pro} \quad B \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_1)\,, \tag{7}$$

$$V_\alpha V_\beta^+ = \tilde{E}_2^{(\alpha\beta)}\,, \qquad E^{(\alpha\beta)}\varphi := (\psi_\beta, \varphi)\psi_\alpha\,, \tag{8}$$

z nichž mj. plyne, že operátory V_α, V_α^+ jsou částečné izometrie. Dále snadno ověříme, že také $V_\alpha V_\beta^+$ je částečná izometrie pro libovolná α, β. Dokážeme, že operátor $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, který komutuje se všemi $V_\alpha V_\beta^+$, je tvaru $B_1 \otimes I$ pro nějaké $B_1 \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_1)$. Podle předpokladu je $V_\beta^+ B V_\alpha = V_\gamma^+ V_\gamma V_\beta^+ B V_\alpha = V_\gamma^+ B V_\gamma V_\beta^+ V_\alpha = \delta_{\alpha\beta} V_\gamma^+ B V_\gamma$ pro nějaké γ; položíme-li zde $\alpha = \beta$, dostaneme $V_\alpha^+ B V_\alpha = V_\gamma^+ B V_\gamma := B_1$ pro všechna α. Operátory V_α^+, V_α jsou částečné izometrie, proto B_1 patří do $\mathscr{B}(\mathscr{H}_1)$. Dostali jsme tak vyjádření $V_\beta^+ B V_\alpha = \delta_{\alpha\beta}B_1$, z nějž plyne

$$B(\varphi \otimes \psi_\alpha) = \sum_\beta V_\beta V_\beta^+ B(\varphi \otimes \psi_\alpha) = \sum_\beta V_\beta \delta_{\alpha\beta} B_1 \varphi =$$

$$= B_1 \varphi \otimes \psi_\alpha = (B_1 \otimes I)(\varphi \otimes \psi_\alpha).$$

Oba operátory jsou lineární a omezené, proto z jejich rovnosti na totální množině $\mathscr{H}_1 \otimes \{\psi_\alpha\}$ plyne $B = B_1 \otimes I$, což jsme chtěli dokázat.

Nyní již můžeme přistoupit k důkazu vlastního tvrzení. Ověříme pro $j = 1$ vztah (6). Definujeme množinu $V(\mathscr{S}_1) := \{B \in \mathscr{B}(\mathscr{H}) : V_\beta^+ B V_\alpha \in \mathscr{S}_1 \cup \{0\}$ pro všechna $\alpha, \beta\}$. Pro libovolné operátory $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $C \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_1)$ ze vztahů (7), (8) dostáváme

$$\tilde{C}_1 B = \sum_{\alpha\beta\gamma} V_\alpha V_\alpha^+ (C \otimes I) V_\beta V_\beta^+ B V_\gamma V_\gamma^+ = \sum_{\beta\gamma} V_\beta C (V_\beta^+ B V_\gamma) V_\gamma^+ .$$

Podobně můžeme vyjádřit součin $B\tilde{C}_1$; odtud plyne, že operátory B, $\tilde{C}_1$ komutují právě tehdy, když spolu komutují operátory C, $V_\beta^+ B V_\alpha$ pro všechna α, β. Vezmeme-li $B \in V(\mathscr{S}_1)$, $C \in \mathscr{S}_1'$, resp. $B \in (\tilde{\mathscr{S}}_1)'$, $C \in \mathscr{S}_1$, dostaneme z této ekvivalence inkluze

$$(\mathscr{S}_1')^\sim \subset V(\mathscr{S}_1)', \quad \text{resp.} \quad (\tilde{\mathscr{S}}_1)' \subset V(\mathscr{S}_1'). \tag{9}$$

Předpokládejme na okamžik, že $I \in \mathscr{S}_1$; potom operátory $V_\alpha V_\beta^+$ patří do $V(\mathscr{S}_1)$ pro všechna α, β, a podle výše dokázaného tvrzení má každý prvek komutantu $V(\mathscr{S}_1)'$ tvar $C \otimes I$. Takový operátor však komutuje se všemi $B \in V(\mathscr{S}_1)$ právě tehdy, když $[C, V_\beta^+ B V_\alpha] = 0$ pro všechna α, β, tj. když $C \in \mathscr{S}_1'$, Tento závěr spolu s prvou z inkluzí (9) dává rovnost $(\mathscr{S}_1')^\sim = V(\mathscr{S}_1)'$, platnou pokud $I \in \mathscr{S}_1$. Aplikujeme-li tuto rovnost na komutant $\mathscr{S}_1'$, jenž obsahuje jednotkový operátor, dostaneme

$$V(\mathscr{S}_1')' = (\mathscr{S}_1'')^\sim \supset \tilde{\mathscr{S}}_1 . \tag{10}$$

Odtud dále plyne $V(\mathscr{S}_1') \subset V(\mathscr{S}_1')'' \subset (\tilde{\mathscr{S}}_1)'$, což spolu s druhou z inkluzí (9) dává $V(\mathscr{S}_1') = (\tilde{\mathscr{S}}_1)'$. Z rovnosti komutantů těchto množin a vztahu (10) dostáváme konečně požadovaný výsledek, $(\tilde{\mathscr{S}}_1)'' = V(\mathscr{S}_1')' = (\mathscr{S}_1'')^\sim$. ■

14.2.8 Poznámka: Jestliže $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ komutuje s operátory $I \otimes C$ pro každé $C \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_2)$, komutuje speciálně se všemi $V_\alpha V_\beta^+$, takže podle důkazu lemmatu platí $B = B_1 \otimes I$ pro nějaké $B_1 \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_1)$. Dostáváme tak rovnost $(\mathbb{C}(\mathscr{H}_1) \otimes \mathscr{B}(\mathscr{H}_2))' = \mathscr{B}(\mathscr{H}_1) \otimes \mathbb{C}(\mathscr{H}_2)$. Jestliže navíc B komutuje se všemi operátory tvaru $C \otimes I$ pro každé $C \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_1)$ je také $B = I \otimes B_2$. Z výsledků cvičení 4.4 potom plyne $B = cI$; dokázali jsme tak vztah $(\mathscr{B}(\mathscr{H}_1) \otimes \mathscr{B}(\mathscr{H}_2))' = \mathbb{C}(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2)$.

Důkaz věty 6: Vezměme operátory $B_j \in \mathcal{S}_j'' \equiv \mathcal{A}_W(\mathcal{S}_j)$. Podle předchozího lemmatu je $\tilde{B}_j \in (\tilde{\mathcal{S}}_j)''$, tudíž tyto operátory komutují s libovolným $C \in (\mathcal{S}_\Sigma)' = (\tilde{\mathcal{S}}_1)' \cap (\tilde{\mathcal{S}}_2)'$ a platí $[B_1 \otimes B_2, C] = [\tilde{B}_1 \tilde{B}_2, C] = 0$. To znamená, že $B_1 \otimes B_2 \in (\mathcal{S}_\Sigma)''$; odtud dostáváme inkluzi $\mathcal{A}_W(\mathcal{S}_1) \otimes \mathcal{A}_W(\mathcal{S}_2) \subset \mathcal{A}_W(\mathcal{S}_\Sigma)$. Současně platí $\mathcal{S}_\Sigma = \tilde{\mathcal{S}}_1 \cup \tilde{\mathcal{S}}_2 \subset \{B_1 \otimes B_2 : B_i \in \mathcal{A}_W(\mathcal{S}_i), i = 1, 2\}$; z kombinace obou inkluzí a vztahu (13.1.9) plyne (5). ■

Nyní již můžeme zformulovat a dokázat zmíněný výsledek zobecňující tvrzení 5. Úplný soubor na $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ sestrojíme z daných ÚSKO $\mathcal{S}_j$ na $\mathcal{H}_j$ jako množinu $\mathcal{S}_\Sigma$; obsahuje-li neomezené operátory, je nutné vzít jejich uzávěry.

14.2.9 Věta: Nechť množiny $\mathcal{S}_j$ tvoří ÚSKO na separabilních Hilbertových prostorech $\mathcal{H}_j$, $j = 1, 2$, potom množina $\mathcal{S} := \{\overline{\tilde{A}}_1 : A_1 \in \mathcal{S}_1\} \cup \{\overline{\tilde{A}}_2 : A_2 \in \mathcal{S}_2\}$ tvoří ÚSKO na $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Je-li φ_j cyklický vektor pro $\mathcal{S}_j$, pak $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ je cyklický vektor množiny $\mathcal{S}$.

Důkaz: Předpokládejme nejprve, že $\mathcal{S}_j \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_j)$, potom operátory A_j jsou uzavřené a $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\Sigma$. Protože množina $\{B\varphi_j : B \in \mathcal{S}_j''\}$ je totální v $\mathcal{H}_j$, je množina $\{B_1\varphi_1 \otimes B_2\varphi_2 : B_j \in \mathcal{S}_j''\}$ totální v $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Navíc

$$\{B_1 \otimes B_2, B_j \in \mathcal{S}_j''\}_{\text{lin}} \subset \{B_1 \otimes B_2, B_j \in \mathcal{S}_j''\}'' = \mathcal{S}'' ,$$

kde poslední rovnost plyne z věty 6 a cvičení 13.4, takže

$$\mathcal{H} = \overline{\{B_1\varphi_1 \otimes B_2\varphi_2, B_j \in \mathcal{S}_j''\}_{\text{lin}}} \subset \overline{\mathcal{S}''(\varphi_1 \otimes \varphi_2)} \subset \mathcal{H}$$

a tvrzení platí. Jestliže množiny $\mathcal{S}_j$ obsahují neomezené operátory, sestrojíme k nim podle cvičení 4 množiny $\mathcal{S}_{ja} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_j)$. Platí $\mathcal{S}_j'' = \mathcal{S}_{ja}''$, proto je $\mathcal{S}_{ja}$ ÚSKO s týmž cyklickým vektorem jako $\mathcal{S}_j$; podle dokázaného tvrzení je pak $\tilde{\mathcal{S}}_{1a} \cup \tilde{\mathcal{S}}_{2a}$ ÚSKO s cyklickým vektorem $\varphi_1 \otimes \varphi_2$. Užijeme konečně cvičení 10.28, podle něhož $\operatorname{arctg} \overline{\tilde{A}}_j = (\operatorname{arctg} A_j)^\sim$, tj. $\tilde{\mathcal{S}}_{1a} \cup \tilde{\mathcal{S}}_{2a} = \mathcal{S}_a$, a protože $\mathcal{S}_a'' = \mathcal{S}''$, důkaz je dokončen. ■

14.3 IREDUCIBILNÍ OPERÁTOROVÉ MNOŽINY

V § 7.4 jsme definovali invariantní podprostor operátoru a řekli jsme, co znamená, že operátor je redukován (uzavřeným) podprostorem. Nyní zavedeme obdobné pojmy pro operátorové množiny.

Budeme říkat, že podprostor $L \subset \mathcal{H}$ je **invariantním podprostorem** operátorové množiny $\mathcal{S}$, je-li invariantním podprostorem každého operátoru $T \in \mathcal{S}$. Uzavřený podprostor $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ **redukuje množinu** $\mathcal{S}$, jestliže redukuje každý operátor této množiny. Podobně jako dříve budeme také říkat, že odpovídající *projektor* $E_\mathcal{G}$ *redukuje množinu* $\mathcal{S}$. Operátorovou množinu $\mathcal{S}$ nazýváme **ireducibilní**, pokud neexistuje žádný netriviální uzavřený podprostor, jenž by ji redukoval, v opačném případě je $\mathcal{S}$ reducibilní. Ekvivalentně lze říci, že množina $\mathcal{S}$ je reducibilní právě tehdy, když existuje netriviální projektor, který komutuje se všemi operátory množiny $\mathscr{S}$. V případě, že $\mathscr{S}$ je symetrická, platí jednodušší podmínka obdobná podmínce uvedené ve cvičení 7.28 pro symetrický operátor.

14.3.1 Tvrzení: Symetrická operátorová množina $\mathscr{S}$ je reducibilní právě tehdy, když má netriviální invariantní uzavřený podprostor $\mathscr{G}$ a pro každý operátor $T \in \mathscr{S}$ platí $E_{\mathscr{G}}D(T) \subset D(T)$.

Důkaz: Nutná podmínka platí zjevně. Pro libovolné $T \in \mathscr{S}$ je $T^* \in \mathscr{S}$, proto $E_{\mathscr{G}}D(T^*) \subset D(T^*)$. Operátor T^* je podle tvrzení 14.1.1 hustě definován; snadno ověříme, že množina $E_{\mathscr{G}}D(T^*) = \mathscr{G} \cap D(T^*)$ je hustá v $\mathscr{G}$. Podle předpokladu je $\mathscr{G}$ uzavřený invariantní podprostor operátoru T^*, proto pro libovolné vektory $\psi \in E_{\mathscr{G}}D(T^*)$, $\varphi \in \mathscr{G}^{\perp} \cap D(T)$ platí $(T^*\psi, \varphi) = 0 = (\psi, T\varphi)$, tj. $\mathscr{G}^{\perp}$ je rovněž invariantním podprostorem operátoru T. ■

Jsou-li všechny operátory dané množiny omezené, odpadne podmínka týkající se definičních oborů: symetrická množina $\mathscr{S} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je reducibilní právě tehdy, když má netriviální uzavřený invariantní podprostor. Je rovněž zřejmé, že pro operátorové množiny $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}_2$ reducibilita $\mathscr{S}_2$ implikuje reducibilitu $\mathscr{S}_1$, a naopak, ireducibilita $\mathscr{S}_1$ implikuje ireducibilitu $\mathscr{S}_2$. Jestliže podprostor $\mathscr{G}$ redukuje množinu $\mathscr{S}$, můžeme k ní sestrojit množinu $\mathscr{S}_{\mathscr{G}} := \{T \restriction \mathscr{G} \colon T \in \mathscr{S}\}$ a obdobně $\mathscr{S}_{\mathscr{G}^{\perp}}$. Každý operátor $T \in \mathscr{S}$ je ortogonálním součtem svých částí v podprostorech $\mathscr{G}$, $\mathscr{G}^{\perp}$, proto říkáme, že množina $\mathscr{S}$ je *ortogonálním součtem* příslušných množin, $\mathscr{S} = \mathscr{S}_{\mathscr{G}} \oplus \mathscr{S}_{\mathscr{G}^{\perp}}$. Obě množiny mají stejnou mohutnost jako $\mathscr{S}$, jejich struktura je však jednodušší, protože působí na „menších" prostorech. Je-li alespoň jedna z nich reducibilní, můžeme v redukci pokračovat – aniž je ovšem zaručeno, že dojdeme k ireducibilním množinám (viz dále příklad 5).

Zjišťovat ireducibilitu dané operátorové množiny přímo z definice nemusí být vždy praktické. V následující větě shrneme dvě často užívaná kritéria ireducibility:

14.3.2 Věta: Pro symetrickou množinu $\mathscr{S} \subset \mathscr{L}_{b,sa}(\mathscr{H})$, kde $\dim\mathscr{H} > 1$, jsou následující výroky ekvivalentní:

(a) $\mathscr{S}$ je ireducibilní,

(b) komutant množiny $\mathscr{S}$ je tvořen pouze skalárními operátory, $\mathscr{S}' = \mathbb{C}(\mathscr{H})$,

(c) každý nenulový vektor $\varphi = \mathscr{H}$ je cyklickým vektorem množiny $\mathscr{S}''$.

14.3.3 Poznámka: Je-li $\dim\mathscr{H} = 1$, pak podmínky (a), (b) jsou splněny automaticky, zatímco (c) platí pouze pro $\mathscr{S} \neq \{0\}$. Ekvivalenci výroků (a), (b) se většinou říká *Schurovo lemma*, i když v teorii reprezentací grup se stejného názvu užívá pro poněkud jiné tvrzení. Podrobněji se o terminologických otázkách spojených s pojmem ireducibility zmíníme v komentáři.

Důkaz věty 2: Dokážeme implikace (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a). Nechť $\mathscr{S}$ je ireducibilní a $C \in \mathscr{S}'$. Je-li C projektor, musí být roven 0 nebo I. Je-li C hermitovský operátor se spektrálním rozkladem $\{E_\lambda\}$, pak podle věty 10.1.6 platí $\{C\}' = \{E_\lambda\}'$. Odtud dostáváme $\{E_\lambda\} \subset \{E_\lambda\}'' = \{C\}'' \subset \mathscr{S}'$. Protože E_λ smí být rovno pouze 0 nebo I, z monotonie spektrálního rozkladu plyne, že existuje $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ takové, že $E_\lambda = 0$ pro $\lambda < \lambda_0$, resp. $E_\lambda = I$ pro $\lambda \geqq \lambda_0$, tj. $C = \lambda_0 I$. Nechť konečně C je obecný omezený operátor z $\mathscr{S}'$. Ze symetrie $\mathscr{S}$ plyne, že množina $\mathscr{S}_{\mathrm{p}}$ je symetrická, takže také $\mathscr{S}' = (\mathscr{S}_{\mathrm{p}})'$ je symetrická. Hermitovské operátory Re C, Im C potom patří do $\mathscr{S}'$, proto jsou skalární, a tedy i operátor C je skalární, tj. platí (b). Z rovnosti $\mathscr{S}' = \mathbb{C}(\mathscr{H})$ plyne $\mathscr{S}'' = \mathscr{B}(\mathscr{H})$, takže $\mathscr{S}''\varphi = \mathscr{H}$ pro každý nenulový vektor $\varphi \in \mathscr{H}$, který je tím pádem cyklický. Předpokládejme konečně, že $\mathscr{S}$ není ireducibilní, potom existuje netriviální projektor $E \in \mathscr{S}' = (\mathscr{S}'')'$. Pro nenulový vektor $\varphi \in E\mathscr{H}$ potom platí $\mathscr{S}''\varphi \subset E\mathscr{H}$, tj. φ není cyklickým vektorem množiny $\mathscr{S}''$. ■

14.3.4 Příklad: Symetrická *komutativní množina* $\mathscr{S} \subset \mathscr{L}_{\mathrm{b,sa}}(\mathscr{H})$, kde $\dim \mathscr{H} > 1$, *je vždy reducibilní.* Stačí předpokládat, že $\mathscr{S}$ obsahuje alespoň jeden neskalární operátor T, protože jinak $\mathscr{S} \subset \mathbb{C}(\mathscr{H})$ a $\mathscr{S}' = \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Je-li operátor T omezený, patří do $\mathscr{S}'$. Je-li neomezený samosdružený, pak do $\mathscr{S}'$ patří jeho spektrální rozklad $\{E_\lambda\}$; protože T je neskalární, $\mathscr{S}'$ obsahuje alespoň jeden netriviální projektor. Ve všech případech je tedy $\mathscr{S}' \neq \mathbb{C}(\mathscr{H})$, čímž je tvrzení dokázáno.

14.3.5 Příklad: Zmínili jsme se o tom, že při postupné redukci operátorové množiny nemusíme nakonec dospět k ireducibilním množinám. Podle předchozího příkladu je množina $\{A\}$ tvořená jediným samosdruženým operátorem reducibilní, pokud $\dim \mathscr{H} > 1$. Totéž platí pro $\{A \upharpoonright E_A(M)\mathscr{H}\}$, kde M je libovolná borelovská množina v $\mathbb{R}$. Úplný rozklad množiny $\{A\}$ na ireducibilní (jednobodové) množiny je tedy možný jenom tehdy, když A má totální množinu vlastních vektorů, tj. čistě bodové spektrum.

14.3.6 Příklad: V nekonečnědimenzionálním separabilním $\mathscr{H}$ s ortonormální bází $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ uvažujme operátor pravého posunutí S (příklad 5.17; připomeňme, že platí $S\varphi_j = \varphi_{j+1}$, $S^*\varphi_j = (1 - \delta_{j1})\,\varphi_j$). Dokážeme, že *množina* $\{S, S^*\}$ *je ireducibilní.* Pro libovolný operátor $C \in \{S, S^*\}'$ platí $S^*C\varphi_1 = CS^*\varphi_1 = 0$, a odtud $C\varphi_1 = \alpha\varphi_1$, protože $\operatorname{Ker} S^* = \{\varphi_1\}_{\mathrm{lin}}$. Pro libovolný vektor báze tedy platí $C\varphi_j = CS^{j-1}\varphi_1 = S^{j-1}C\varphi_1 = \alpha\varphi_j$, a protože $C \in \mathscr{S}' \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$, dostáváme $C = \alpha I$; tím je tvrzení dokázáno.

14.3.7 Příklad: Z výsledku předchozího příkladu plyne, že také množina $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ je ireducibilní. Tento závěr ovšem platí bez ohledu na dimenzi prostoru $\mathscr{H}$: operátory $B_{\varphi\psi} := (\varphi, .)\,\psi$ jsou omezené pro všechna $\varphi, \psi \in \mathscr{H}$, proto je každý nenulový vektor $\varphi \in \mathscr{H}$ cyklický pro $\mathscr{B}(\mathscr{H})$.

14.3.8 Příklad: Dokážeme, že operátory $\{Q, P\}$ *tvoří ireducibilní množinu na* $L^2(\mathbb{R})$. Z příkladu 14.2.3a víme, že $\{Q\}$ je ÚSKO, proto k libovolnému operátoru $B \in \{Q, P\}'$ existuje omezená borelovská funkce f_B taková, že $B = f_B(Q)$. Podle předpokladu dále platí $BP \subset PB$, takže pro všechna $\psi \in D(P)$ patří funkce $B\psi$: $(B\psi)(x) = f_B(x)\,\psi(x)$ do $D(P)$. Pro libovolný omezený interval $J \subset \mathbb{R}$ můžeme vybrat $\psi_J \in D(P)$ tak, aby platilo $\psi_J(x) = 1$ pro $x \in J$; odtud plyne, že funkce f_B je absolutně spojitá v $\mathbb{R}$. Inkluze $BP \subset PB$ dále implikuje

$$-\mathrm{i}f_B(x)\,\psi'(x) = (BP\psi)(x) = (PB\psi)(x) = -\mathrm{i}(f_B(x)\,\psi(x))',$$

tj. $f'_B(x)\,\psi(x) = 0$ pro všechna $\psi \in D(P)$ a s. v. $x \in \mathbb{R}$. Z absolutní spojitosti funkce f_B pak plyne $f_B(x) = c$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$; to znamená, že operátor B je skalární.

Nyní bychom rádi našli metodu, jíž lze z ireducibilních množin $\mathscr{S}_j$ na Hilbertových prostorech $\mathscr{H}_j$ sestrojit ireducibilní množinu na tenzorovém součinu $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$. Ukazuje se, že lze použít stejné konstrukce jako pro úplné soubory komutujících samosdružených operátorů:

14.3.9 Věta: Nechť $\mathscr{S}_j \subset \mathscr{L}_{\mathrm{b,sa}}(\mathscr{H}_j)$ jsou symetrické ireducibilní množiny operátorů na Hilbertových prostorech $\mathscr{H}_j$, $j = 1, 2$, potom $\mathscr{S} := \{\overline{A}_1 : A_1 \in \mathscr{S}_1\} \cup \cup \{\overline{A}_2 : A_2 \in \mathscr{S}_2\}$ je ireducibilní množina na $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$.

Důkaz: Podle předpokladu je $\mathscr{S}'_j = \mathbb{C}(\mathscr{H}_j)$, tj. $\mathscr{S}''_j = \mathscr{B}(\mathscr{H}_j)$. Nechť nejprve $\mathscr{S}_j \subset \mathscr{B}(\mathscr{H}_j)$, potom $\mathscr{S} = \mathscr{S}_\Sigma$ a z věty 14.2.6 plyne $\mathscr{A}_{\mathrm{W}}(\mathscr{S}_\Sigma) = (\mathscr{S}_\Sigma)'' = = \mathscr{S}''_1 \otimes \mathscr{S}''_2 = \mathscr{B}(\mathscr{H}_1) \otimes \mathscr{B}(\mathscr{H}_2)$, odtud dále vyplývá, že

$$(\mathscr{S}_\Sigma)' = (\mathscr{B}(\mathscr{H}_1) \otimes \mathscr{B}(\mathscr{H}_2))' = \mathbb{C}(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2)$$

(viz poznámku 14.2.8). Dále je zřejmé, že množina $\mathscr{S} = \mathscr{S}_\Sigma$ je symetrická, takže podle Schurova lemmatu je ireducibilní. Pokud některá z množin $\mathscr{S}_j$ obsahuje neomezené samosdružené operátory, postupujeme obdobně jako v důkazu věty 14.2.9. Sestrojíme množiny $\mathscr{S}_{ja}$, pro něž platí $\mathscr{S}'' = \mathscr{S}''_{\mathrm{a}} = (\mathscr{S}_{1\mathrm{a}} \otimes \mathscr{S}_{2\mathrm{a}})'' = = \mathscr{S}''_{1\mathrm{a}} \otimes \mathscr{S}''_{2\mathrm{a}}$, a protože $\mathscr{S}''_{ja} = \mathscr{S}''_j = \mathscr{B}(\mathscr{H}_j)$, množina $\mathscr{S}$ je opět ireducibilní. ∎

Komentář

§ 14.1: Často se místo „symetrická množina“ užívá termínu *$*$-invariantní množina*, což je v jistém smyslu výstižnější, pokud takováto množina obsahuje neomezené neuzavřené operátory (viz cvičení 1). Hlavním výsledkem tohoto paragrafu je věta 4, obvykle nazývaná ***větou o generujícím operátoru.*** Toto tvrzení stejně jako větu 8 pro případ komutativní množiny $\mathscr{S} \subset \mathscr{L}_{\mathrm{sa}}(\mathscr{H})$ odvodil J. von Neumann v roce 1929 – viz ⟦Di 1⟧, § I.7; ⟦RN⟧, § IX.1 nebo ⟦AG⟧, §§ 90, 92. V případě separabilního $\mathscr{H}$ můžeme podle věty 10.5.9 generující operátor množiny $\mathscr{S} \subset \mathscr{L}_{\mathrm{b,sa}}(\mathscr{H})$ ekvivalentně definovat jako takový, že $\mathscr{S} \subset \{A\}''_{\mathrm{ex}}$. Věty 8 a jejího zobecnění ze cvičení 5 můžeme užít rovněž k charakterizaci nesymetrických operátorových množin, pokud jsme schopni v takové množině $\mathscr{S}$ vybrat symetrickou

442 podmnožinu $\mathscr{S}_0$ a vyjádřit prvky $\mathscr{S} \setminus \mathscr{S}_0$ jako (borelovské) funkce operátorů z $\mathscr{S}_0$; přitom je samozřejmě nutné, aby $\mathscr{S}$ byla komutativní.

§ **14.2:** Nechť $\mathscr{S}$ je libovolná podmnožina $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Říkáme, že $\varphi \in \mathscr{H}$ je cyklický vektor $\mathscr{S}$, jestliže $\overline{\mathscr{A}_0(\mathscr{S})\,\varphi} = \mathscr{H}$. Je-li $\mathscr{S}$ $*$-algebra s jedničkou, je φ cyklický vektor $\mathscr{S}$ právě tehdy, když je cyklickým vektorem $\mathscr{S}''$ (cvičení 13). Generující vektor hermitovského operátoru definovaný v § 10.9 je současně cyklickým vektorem algebry $\{A\}''$ (viz tvrzení 10.9.5).

• Příklad 4 má zajímavý matematický důsledek. Je-li $A \in \mathscr{S}''$ generující operátor množiny $\mathscr{S} = \{Q_1, Q_2\}$, pak existují reálné borelovské funkce g, f_j takové, že $A = g(Q_1, Q_2)$ a $Q_j = f_j(A)$, $j = 1, 2$. Funkce $f_j \circ g$ můžeme podle potřeby změnit na $(\mu_1 \otimes \mu_2)$-nulové množině a tím docílit, aby rovnosti $f_j(g(x_1, x_2)) = x_j$ platily pro všechna $[x_1, x_2]$ z libovolně zvoleného omezeného intervalu $J \subset \mathbb{R}^2$; získáme tak bijekci mezi J a jistou podmnožinou v $\mathbb{R}$. Podobné zobrazení, tzv. Peanova křivka, se konstruuje v teorii množin, když se dokazuje, že $\mathbb{R}^2$ má mohutnost kontinua – viz např. [[vN]], § II.10, a též [[Al]], § 5.2.

§ **14.3:** Reprezentaci π algebry $\mathscr{A}$ pomocí lineárních operátorů na nějakém vektorovém prostoru V nazýváme *algebraicky ireducibilní*, pokud množina $\pi(\mathscr{A})$ nemá žádný netriviální invariantní podprostor. Je-li V topologický vektorový prostor a množina $\pi(\mathscr{A})$ nemá netriviální *uzavřený* invariantní podprostor, říkáme, že π je *topologicky ireducibilní* – viz např. [[Di 2]], § 2.3; [[Kir]], § 7.1; [[Nai 3]], § III.4. Je zřejmé, že algebraická ireducibilita dané reprezentace implikuje její ireducibilitu topologickou. Opačné tvrzení obecně neplatí ani tehdy, když $\pi(\mathscr{A}) \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$; lze sice užít výsledku cvičení 18, není však zaručeno, že $\bar{L} \neq \mathscr{H}$ (s výjimkou případu $\dim \mathscr{H} < \infty$). Ireducibilitou reprezentací budeme v dalším rozumět vždy ireducibilitu topologickou. V případě reprezentací, jejichž hodnoty jsou neomezené operátory, se k podmínce neexistence netriviálního uzavřeného invariantního podprostoru přidávají ještě požadavky na definiční obory operátorů z $\pi(\mathscr{A})$ – viz např. [[BaR]], § 11.1 a též § 16.5.

• Kritéria ireducibility vyjadřovaná větou 2 jsou standardní – viz např. [[BR 1]], tvrzení 2.3.8; [[Di 2]], tvrzení 2.3.1. V teorii reprezentací grup se pod názvem Schurovo lemma většinou rozumí následující implikace ([[Ham]], § 3.14): jestliže množina $\mathscr{S}$ operátorů na konečnědimenzionálním vektorovém prostoru V nemá netriviální invariantní podprostor, platí $\mathscr{S}' = \mathbb{C}(V)$ (viz též cvičení 14). Obdobné tvrzení platí i v případě, že algebraická dimenze prostoru V je spočetná – [[Kir]], § 8.2. Někdy se také jako Schurovo lemma uvádí obecnější věta o operátorech spojujících dvě reprezentace dané grupy nebo algebry – viz např. [[Ham]], § 3.14; [[Kir]], § 8.2. Analogii Schurova lemmatu pro operátory na reálném vektorovém prostoru spočetné dimenze lze najít např. v [[Kir]], § 8.2; zobecnění pro operátorové množiny na reálném Hilbertově prostoru je uvedeno v [CM 1].

Cvičení

1. Dokažte tvrzení 14.1.1. Je předpoklad uzavřenosti operátorů z $\mathscr{S}_1 \setminus \mathscr{S}_2$ podstatný?
Návod: Viz větu 7.2.4a.

2. Každá reálná podalgebra v množině všech hermitovských operátorů na daném $\mathscr{H}$ je komutativní.

3. Dokažte tvrzení 14.1.2a–c. Množina $\mathscr{S}_{\mathrm{f}}$ může být symetrická, i když $\mathscr{S}$ a $\mathscr{S}_{\mathrm{p}}$ symetrické nejsou.
Návod: Vyšetřete množinu $\mathscr{S} = \{E, \mathrm{i}E\}$, kde E je projektor.

4. K dané množině $\mathscr{S} \subset \mathscr{L}_{\mathrm{b,sa}}(\mathscr{H})$ sestrojíme množinu $\mathscr{S}_{\mathrm{a}}$ následovně: ponecháme všechny omezené operátory a každý neomezený samosdružený operátor $A \in \mathscr{S}$ nahradíme hermitovským operátorem $A_{\mathrm{a}} \equiv \operatorname{arctg} A$. Pro množinu $\mathscr{S}_{\mathrm{a}}$ platí totéž co pro $\mathscr{S}_{\mathrm{p}}$ ve tvrzení 14.1.2.

5. Označme $\mathscr{L}_{\mathrm{b,n}}(\mathscr{H})$ množinu vzniklou doplněním $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ o všechny normální operátory na $\mathscr{H}$. Zobecněte větu 14.1.8 pro případ, kdy $\mathscr{S}$ je komutativní symetrická podmnožina v $\mathscr{L}_{\mathrm{b,n}}(\mathscr{H})$ a $\mathscr{H}$ je separabilní.

6. Jestliže operátor A generující množinu $\mathscr{S} \subset \mathscr{L}_{\mathrm{b,sa}}(\mathscr{H})$ v separabilním $\mathscr{H}$ patří do $\mathscr{S}''$, platí $\{A\}' = \mathscr{S}'$ a $\{A\}'' = \mathscr{S}''$. Je podmínka $A \in \mathscr{S}''$ podstatná?
Návod: Platí $\mathscr{S} \subset \{A\}''_{\mathrm{ex}}$, takže stačí ověřit $(\{A\}''_{\mathrm{ex}})' = \{A\}'$.

7. Pro množinu $\mathscr{S} \subset \mathscr{L}_{\mathrm{b,sa}}(\mathscr{H})$ platí inkluze $\mathscr{S}' \supset \bigcup_{B \subset \mathscr{S}} \{B\}''$, obecně však nikoli rovnost.
Návod: Vyšetřete množinu $\mathscr{S} = \{A_1, A_2\}$ z příkladu 14.1.3b.

8. Dokažte vztahy (14.2.2), (14.2.3).
Návod: Užijte inkluze $\mathscr{S}'' \supset \mathscr{S}_{\mathrm{p}}$ a toho, že $\mathscr{S}''$ je algebra. Součet $\sum_n P^{(n)}$ chápaný ve smyslu silné topologie je projektor. Stačí tedy dokázat, že z podmínky $P_{\{k\}}\varphi = 0$ pro všechna $\{k\} \in K_N$ plyne $\varphi = 0$; to lze ověřit indukcí v N.

9. Nechť A je generující operátor množiny $\mathscr{S} \subset \mathscr{L}_{\mathrm{sa}}(\mathscr{H})$, kde $\mathscr{H}$ je separabilní. Jestliže $\mathscr{S}$ tvoří ÚSKO, platí $A \in \mathscr{S}''$.

10. Dokažte tvrzení 14.2.5.
Návod: Podobně jako v příkladu 14.2.4 dokažte, že množina vektorů $[f(A_1) \otimes g(A_2)]\,(\varphi_1 \otimes \varphi_2)$, kde f, g jsou omezené borelovské funkce, je hustá v $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$.

11. Dokažte vztahy (14.2.7), (14.2.8). Operátor $V_\alpha V_\beta^+$ je částečná izometrie s počátečním prostorem $\tilde{E}_2^{(\beta)}\mathscr{H}$ a koncovým $\tilde{E}_2^{(\alpha)}\mathscr{H}$.

12. Pro W*-algebry generované symetrickými množinami $\mathscr{S}_j \subset \mathscr{B}(\mathscr{H}_j)$, $j = 1, 2$, platí $\mathscr{A}_{\mathrm{W}}(\tilde{\mathscr{S}}_1) = \mathscr{A}_{\mathrm{W}}(\mathscr{S}_1) \otimes \mathbb{C}(\mathscr{H}_2)$ a obdobný vztah pro $\mathscr{A}_{\mathrm{W}}(\tilde{\mathscr{S}}_2)$. Pokud množiny

 $\mathscr{S}_j$ obsahují jednotkové operátory, platí také $\mathscr{A}_W(\{A_1 \otimes A_2 \colon A_j \in \mathscr{S}_j\}) = \mathscr{A}_W(\mathscr{S}_1) \otimes \mathscr{A}_W(\mathscr{S}_2)$.
Návod: Užijte věty 14.2.6.

13. Nechť $\mathscr{A}$ je $*$-podalgebra v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ obsahující jednotkový operátor. Je-li pro vektor $\varphi \in \mathscr{H}$ množina $\mathscr{A}''\varphi$ hustá v $\mathscr{H}$, platí také $\overline{\mathscr{A}\varphi} = \mathscr{H}$.
Návod: Platí $\mathscr{A}'' = (\bar{\mathscr{A}})_w = (\bar{\mathscr{A}})_s$.

14. Nesymetrická množina $\mathscr{S} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ může mít invariantní podprostor, i když $\mathscr{S}' = \mathbb{C}(\mathscr{H})$.

Návod: Vyšetřete množinu všech operátorů tvaru $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ v $\mathscr{B}(\mathbb{C}^2)$.

15. Nechť $\mathscr{S} \subset \mathscr{L}_{b,sa}(\mathscr{H})$ je symetrická množina. Je-li kterákoli z množin $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}''$, $\mathscr{S}_R$, $\mathscr{S}_p$, $\mathscr{S}_f$ a $\mathscr{S}_a$ (viz § 14.1 a cvičení 4) ireducibilní, jsou také ostatní ireducibilní.

16. Zobecněte tvrzení vět 14.2.9 a 14.3.9 na případ operátorových množin $\mathscr{S}_j$ na Hilbertových prostorech $\mathscr{H}_j$, $j = 1, \ldots, n$.

17. Nechť $\mathscr{S}_j \subset \mathscr{L}_{b,sa}(\mathscr{H}_j)$, $j = 1, 2$, jsou symetrické ireducibilní množiny a každá z nich obsahuje jednotkový operátor, potom $\mathscr{S} := \{A_1 \otimes A_2 \colon A_j \in \mathscr{S}_j\}$ je ireducibilní množina na $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$.

18. Je-li $L \subset \mathscr{H}$ invariantní podprostor množiny $\mathscr{S} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$, pak totéž platí pro uzávěr $\bar{L}$.

15.1 MATEMATICKÝ POPIS STAVŮ A POZOROVATELNÝCH

Nejprve je nutné říci něco o fyzikálním významu stavů a pozorovatelných. Tyto pojmy sice patří k základním v každé fyzikální disciplině, nicméně pro kvantovou teorii je jejich pečlivý rozbor zvlášť důležitý.

Zabývejme se nejprve otázkou co rozumět pod pojmem stav systému. Obecně vzato je to výsledek celé jeho předchozí historie, může tedy vyniknout buď vývojem (podle příslušných dynamických zákonů) nebo jako produkt řady operací cílevědomě provedených experimentátorem, popřípadě kombinací obou postupů. V některých oborech připadá v úvahu jen prvý způsob nebo je aspoň silně preferován, třeba v astrofyzice či v geofyzice, kde stavy aktivně připravené experimentátorem jsou vzácností (např. uměle vyvolané otřesy zemské kůry). Naproti tomu u mikroobjektů (elementárních částic, atomových jader apod.) jde většinou o *přípravu stavu* v pravém slova smyslu.

Kdyby byl rozdíl mezi oběma způsoby vzniku stavu jen technickou záležitostí, nemuseli bychom o něm mluvit. Obecně tomu ale tak není, a to díky *měření*, jímž daný stav určujeme. Klasická fyzika předpokládá – v oblasti makroskopických jevů právem – že vliv měřicího procesu na zkoumaný objekt lze učinit libovolně malým. Zcela jinak je tomu u objektů mikroskopických rozměrů. Naše měřicí přístroje jsou makroskopické a jejich vliv na zkoumané mikroobjekty nelze podle zkušeností zanedbávat. Tato skutečnost by ještě nemusela být na závadu, kdybychom uměli stanovit dynamické zákony popisující měřicí proces. Potíž je v tom, že systém složený z makroskopického měřicího přístroje a mikroobjektu neumíme deterministickým způsobem popsat. V rámci kvantové teorie sice umíme vyšetřit např. chování atomu interagujícího s elektromagnetickým polem; co však předpovědět neumíme, je třeba *které* zrno emulze zčerná nebo *který* z Geigerových počítačů umístěných za Sternovým-Gerlachovým přístrojem zaznamená puls. Umíme spočíst a pokusně ověřit jenom pravděpodobnosti těchto jevů.

Podmínky, za nichž příprava stavu probíhá, ovlivňují výsledek v nestejné míře; podle toho je můžeme rozdělit na podmínky *podstatné* a *nepodstatné*. O podstatnosti té které podmínky lze rozhodnout pouze na základě rozboru konkrétní fyzikální situace; žádné obecné kriterium neexistuje.

Mezi obecná hlediska, z nichž stavy fyzikálních systémů posuzujeme, patří jejich *reprodukovatelnost*. Pro mikrofyziku je nejen snadno technicky realizovatelná, ale představuje i základní požadavek, bez jehož splnění by nebylo možné ověřovat pravděpodobnostní předpovědi teorie. Reprodukovat daný stav znamená v této souvislosti vyrobit jej podle téhož receptu, tj. při zachování všech podstatných podmínek.

Dospíváme tak k formulaci, která bývá uváděna jako *definice stavu*: stav je výsledkem posloupnosti fyzikálních manipulací se systémem, jež úhrnem tvoří přípravu tohoto stavu. Dva stavy jsou totožné, jestliže všechny podstatné podmínky jejich přípravy jsou totožné. Obdobně lze „operacionalisticky" zavést pojem *pozorovatelné* (*dynamické proměnné*), přiřadíme-li jí uvedení systému do interakce s vhodnými přístroji (měřicím zařízením), na nichž lze odečíst (zaznamenat) naměřenou hodnotu.

V takovéto definici není ovšem zahrnuta skutečnost, že jednu a tutéž fyzikální veličinu můžeme měřit podstatně různými způsoby. Užíváme-li tedy zmíněných „operacionalistických" definic, musíme mít na paměti, že *mezi pozorovatelnými a přístroji neexistuje jednoznačné přiřazení.* O vzájemné zastupitelnosti přístrojů můžeme rozhodnout teprve v konkrétních případech. Protože měření je součástí přípravy stavu, musí se při reprodukci „za totožných podstatných podmínek" shodovat výsledky všech provedených měření bez ohledu na použité experimentální techniky. V § 15.6 uvidíme, že shodnost výsledků určitých měření zaručuje naopak rovnost stavů.

15.1.1. Poznámky: (a) Co se někdy rozumí systémem, může být jindy chápáno jako stav nebo skupina stavů obecnějšího systému. Tak třeba dvojici fotonů a elektron-pozitronový pár můžeme považovat za dva stavy téhož systému, protože časovým vývojem může přejít jedno v druhé (jsou-li splněny příslušné kinematické podmínky). Podobně tři piony π^+, π^0, π^- lze chápat jako tři (izotopické) stavy jediné částice; další příklady si čtenář najde snadno sám.
(b) Mezi podstatné podmínky přípravy stavu – nejen v mikrofyzice – nepatří čas ani místo, kdy a kde příslušný děj nastal. Toto poznání bylo historicky prvním fyzikálním zákonem invariance, a teprve ono umožnilo konstituování fyziky jako exaktní vědy.
(c) Kromě dynamických proměnných (spojených vždy s konkrétním systémem) se setkáváme i s jinými měřitelnými fyzikálními veličinami, které v teorii zpravidla vystupují jako parametry nebo jako konstanty. Důležitým příkladem je čas, jenž je univerzálním parametrem v popisu všech nerelativistických systémů. Jiným příkladem je situace, kdy se systém nalézá v daném vnějším poli. Charakteristiky tohoto pole, např. jeho intenzita, hrají při popisu systému roli parametrů, připomeňme třeba Zeemanův jev nebo Starkův jev. Příkladem druhé zmíněné možnosti mohou být různé univerzální konstanty: náboj elektronu e, Planckova konstanta $\hbar$ apod.

Po tomto úvodu nyní probereme způsob, jímž se popisují stavy a pozorovatelné v kvantové teorii. Základní předpoklady týkající se stavů zformulujeme následovně:

(q1-a) každému kvantovému systému přísluší komplexní Hilbertův prostor $\mathscr{H}$, který nazýváme **stavovým (Hilbertovým) prostorem** daného systému,

(q1-b) každému stavu uvažovaného systému odpovídá nějaký **paprsek**, tj. jednorozměrný podprostor v $\mathscr{H}$.

O konkrétních způsobech volby stavového prostoru budeme mluvit podrobně dále. Poznamenejme ještě, že stavům popisovaným paprsky se říká čisté; v § 15.3 probereme obecnější pojem stavu a zreformulujeme odpovídajícím způsobem postulát (q1-b).

Každý paprsek Ψ je generován nějakým jednotkovým vektorem ψ, $\Psi = \{\alpha\psi\colon \alpha \in \mathbb{C}\}$; v obvyklém způsobu vyjadřování se rozdíl mezi oběma pojmy často opomíjí. Někdy se také danému stavu přiřazuje *normalizovaný paprsek* $\{e^{i\gamma}\psi\colon \gamma \in \mathbb{R}\}$, jehož prvky se navzájem liší pouze *fázovým faktorem* $e^{i\gamma}$.

Dříve než budeme ve výkladu pokračovat, připomeňme stručně hlavní body myšlenkového postupu vedoucího k uvedeným postulátům a také k dalším, jimiž se budeme za chvíli zabývat. Východiskem je rozbor jednoduchých experimentů, jako je např. pozorování interferenčních jevů v polarizovaném světle chápaném jako proud korpuskulí (fotonů), měření spinu dvojicí různě orientovaných Sternových-Gerlachových přístrojů apod. Abychom vysvětlili výsledky těchto pokusů, jsme nuceni vzdát se základních principů klasické fyziky a přijmout následující předpoklady:

(a) provádíme-li na mikrosystému ve stavu Ψ měření určité pozorovatelné, pak v důsledku měření přejde do některého stavu z množiny $\{\Psi_j\}_{j=1}^N$, jež je určena danou pozorovatelnou. V tomto smyslu je možno každý stav uvažovaného systému považovat za složený ze stavů množiny $\{\Psi_j\}_{j=1}^N$,

(b) výsledky měření mají obecně *pravděpodobnostní charakter*, tj. můžeme určit pouze pravděpodobnost $P(\Psi, \Psi_j)$ toho, že v důsledku měření ke zmíněnému přechodu dojde. Tato pravděpodobnost přechází v jistotu, je-li Ψ rovno některému Ψ_j; potom platí $P(\Psi_j, \Psi_k) = \delta_{jk}$.

Podrobnější rozbor konkrétních experimentů, v nichž je počet stavů $\Psi_1, \ldots, \Psi_N$ konečný, ukazuje, že množinu stavů, jež jsou v uvedeném smyslu složeny z N různých stavů, lze charakterizovat $2(N-1)$ reálnými parametry. Jednoduchá možnost, jak takovéto skládání matematicky formulovat, je předpokládat existenci injektivního zobrazení R z množiny stavů do množiny jednorozměrných podprostorů (paprsků) v nějakém komplexním vektorovém prostoru. Stav Ψ budeme potom nazývat *superpozicí* stavů Ψ_1 Ψ_2, pokud existují vektory $\psi_j \in R(\Psi_j)$ takové, že vektor $\psi_1 + \psi_2$ patří do $R(\Psi)$. Snadno nahlédneme korektnost této definice. Pokud je zobrazení R současně surjektivní, říkáme, že platí *princip superpozice.* Obecně tomu tak být nemusí, podrobněji se k této otázce vrátíme v § 15.4.

Z praktických důvodů budeme v dalším užívat pro stav i jemu odpovídající paprsek téhož symbolu. Zdůrazněme ještě, že pokud se někdy setkáme s výrazem, 448 že Ψ je lineární kombinací stavů Ψ_1, Ψ_2, jde vždy o superpozici ve smyslu uvedené definice, protože lineární kombinace dvojice paprsků není definována.

Vraťme se nyní k předpokladům (a), (b). V terminologii, kterou jsme zavedli, je Ψ superpozicí stavů množiny $\{\Psi_j\}_{j=1}^N$, jež při měření přejde s pravděpodobností $P(\Psi, \Psi_j)$ ve stav Ψ_j. V některý ze stavů $\Psi_1, \dots, \Psi_N$ přitom systém přejde určitě, proto musí platit $\sum_{j=1}^{N} P(\Psi, \Psi_j) = 1$.

Budeme-li nyní předpokládat, že stavový prostor je vybaven skalárním součinem $(.,.)$, vůči němuž jsou paprsky Ψ_j vzájemně ortogonální, můžeme položit $P(\Psi, \Psi_j) = |(\psi, \psi_j)|^2 \|\psi\|^{-2} \|\psi_j\|^{-2}$, kde ψ, ψ_j jsou libovolné nenulové vektory z odpovídajících paprsků. Pro takto definovanou funkci P zjevně platí $P(\Psi_j, \Psi_k) = \delta_{jk}$ a normalizační podmínka je splněna v důsledku Parsevalovy rovnosti.

Daný systém umíme zpravidla připravit nejenom v některém ze stavů množiny $\{\Psi_j\}_{j=1}^N$, ale i v dalších, které jsou jejich superpozicemi; k tomu stačí měřit na systému jinou vhodnou pozorvatelnou. Proto je účelné rozšířit uvedenou definici, a zavést pro libovolné stavy Φ, Ψ pravděpodobnost přechodu mezi nimi vztahem $P(\Phi, \Psi) = |(\varphi, \psi)|^2 \|\varphi\|^{-2} \|\psi\|^{-2}$. Snadno se přesvědčíme, že definice je konzistentní, tj. že výraz na pravé straně nezávisí na volbě vektorů reprezentujících paprsky Φ, Ψ; speciálně platí

$$P(\Phi, \Psi) = |(\varphi, \psi)|^2 \tag{1}$$

pro libovolné *jednotkové* vektory $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$.

V experimentech, o nichž jsme se zmínili úvodem, je N konečné číslo. Stejně lze postupovat i tehdy, když množina $\{\Psi_j\}_{j=1}^N$ je nekonečná, navíc však vzniká otázka, zda do stavového prostoru máme zahrnout také všechny „nekonečné superpozice" stavů Ψ_j. Odpověď je spíše věcí konvence, protože v žádném skutečném měření nedovedeme odlišit takovouto „superpozici" od vhodné superpozice dostatečně velkého konečného počtu stavů; konkrétněji se k tomuto problému vrátíme např. v § 15.4. Požadavek matematické jednoduchosti nás vede k předpokladu, že stavový prostor je úplný, tj. Hilbertův.

Uvedené úvahy nelze samozřejmě chápat jako „odvození" hilbertovské struktury stavového prostoru, ilustrují pouze heuristický postup, jímž lze ke shora uvedeným postulátům dojít. Stejným způsobem posloužily před více než půlstoletím zakladatelům kvantové mechaniky; oprávněnost přiřazení matematické struktury fyzikálním pojmům byla pak potvrzena úspěšnými předpověďmi takto vzniklé teorie.

15.1.2 Poznámka: Je nicméně možné položit si otázku, zda kvantová teorie nemůže pracovat stejně úspěšně se stavovým prostorem jiné struktury. Podrobná diskuse této otázky ukazuje, že volnost máme v podstatě jen ve výběru tělesa skalárů:

kromě komplexních čísel do úvahy připadají ještě čísla reálná nebo těleso kvaternionů – viz např. [[Pir]], [[Ja]].

V kvantové *mechanice* se postulát (q1-a) obvykle doplňuje dalším požadavkem matematické povahy: předpokládáme, že

(q1-a) stavový prostor kvantověmechanického systému má strukturu komplexního *separabilního* Hilbertova prostoru.

Ze zkušenosti víme, že se separabilními Hilbertovými prostory vystačíme nejenom v kvantové mechanice, ale také ve většině úloh kvantové teorie polí. Znamená to možnost užívat spočetných ortonormálních bází a víme rovněž, že v separabilních prostorech lze odvodit některá tvrzení, jež obecně neplatí. Pro uvedenou verzi postulátu (q1-a) lze najít heuristické argumenty, o nichž se zmíníme později (viz poznámku 18.1.1c).

Obraťme se nyní k popisu pozorovatelných. K uvedeným dvěma postulátům přidáme další:

(q1-c) každé pozorovatelné daného systému (se stavovým prostorem $\mathscr{H}$) odpovídá nějaký samosdružený operátor na $\mathscr{H}$.

Také v tomto případě budeme o konkrétních způsobech přiřazení mluvit později. Chceme-li postulát (q1-c) motivovat, můžeme se opět obrátit k jednoduchému systému s N nezávislými stavy Ψ_j, do kterých může systém přejít v důsledku měření pozorovatelné a. Z předchozího víme, že paprsky $\{\Psi_j\}_{j=1}^N$ jsou vzájemně ortogonální. Dále máme k dispozici posloupnost reálných čísel $\{a_j\}_{j=1}^N$ reprezentujících možné výsledky měření pozorovatelné a. Z příkladu 7.2.2 víme, že tím je jednoznačně určen samosdružený operátor A takový, že pro každé j je Ψ_j vlastním podprostorem odpovídajícím vlastní hodnotě a_j. Postulát (q1-c) rozšiřuje toto přiřazení na všechny pozorovatelné, tedy i takové, jimž odpovídají operátory s neprázdným spojitým spektrem.

Podívejme se nyní podrobněji, jaké výsledky můžeme při měření konkrétní pozorovatelné dostat.

15.1.3 Příklad: Hilbertův prostor $\mathscr{H}_s = \mathbb{C}^2$ odpovídá např. spinovým stavům elektronu. Jak známo, průmětům spinu do směru j-té osy, $j = 1, 2, 3$, odpovídají operátory $S_j = \frac{1}{2}\sigma_j$, kde σ_j jsou Pauliho matice. Každý z nich má prosté spektrum, $\sigma(S_j) = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$, a odpovídající spektrální rozklad má tvar

$$S_j = \tfrac{1}{2}E_j^{(+)} - \tfrac{1}{2}E_j^{(-)}, \tag{2}$$

kde $E_j^{(\pm)} = \frac{1}{2}(I \pm \sigma_j)$ (cvičení 1). Předpokládejme nyní, že měříme veličinu S_j na elektronu, jehož spinový stav je reprezentován jednotkovým vektorem $\chi \in \mathscr{H}_s$. Ze zkušenosti víme, že

(a) možnými výsledky měření jsou vlastní hodnoty $\pm\frac{1}{2}$ operátoru S_j,

450 (b) pravděpodobnost naměření té které hodnoty je rovna $w(\{\pm\frac{1}{2}\}, S_j; \chi) \equiv w_\pm = (\chi, E_j^{(\pm)}\chi)$, přičemž samozřejmě $w_+ + w_- = 1$,
(c) pro střední hodnotu výsledků měření $\langle S_j \rangle_\chi \equiv \frac{1}{2}w_+ - \frac{1}{2}w_-$ pak odvodíme snadno $\langle S_j \rangle_\chi = (\chi, S_j\chi)$.

15.1.4 Poznámka: Přesněji řečeno, složkám spinu odpovídají operátory $S_j = (\hbar/2)\,\sigma_j$. Hodnota Planckovy konstanty zde není podstatná, proto klademe $\hbar = 1$, což budeme činit i nadále. Pro usnadnění vyjadřování se budeme dopouštět i jiných zjednodušení: pozorovatelnou a jí odpovídající operátor budeme většinou značit týmž symbolem apod.

Tvrzení, která jsme v příkladu zformulovali pro spin elektronu, postulujeme pro každý kvantový systém; také tyto postuláty později zobecníme pro stavy, jež nejsou čisté. Mějme tedy systém se stavovým prostorem $\mathscr{H}$ a pozorovatelnou popsanou samosdruženým operátorem A; odpovídající projektorovou míru, resp. rozklad jedničky označíme $E_A(.)$, resp. $\{E_\lambda^{(A)}\}$. Je-li systém ve stavu Ψ daném jednotkovým vektorem $\psi \in \mathscr{H}$, pak

(q2-a) možnými výsledky měření veličiny A jsou body spektra $\sigma(A)$ operátoru A,
(q2-b) pravděpodobnost toho, že naměříme hodnotu ležící v borelovské množině $\Delta \subset \mathbb{R}$, je rovna

$$w(\Delta, A; \psi) = \int_\Delta d(\psi, E_\lambda^{(A)}\psi) = \|E_A(\Delta)\psi\|^2, \tag{3}$$

(q2-c) pro střední hodnotu výsledků měření platí

$$\langle A \rangle_\psi = (\psi, A\psi)\,, \tag{4}$$

pokud pravá strana této rovnosti má smysl.

Vzhledem k tomu, že $\sigma(A)$ je pro libovolný samosdružený operátor A podmnožinou v $\mathbb{R}$, jsou výsledky měření podle postulátu (q2-a) reálná čísla (viz ovšem poznámku 15.5.9b). Dále se musíme ujistit, že výraz definovaný vztahem (3) můžeme skutečně interpretovat jako pravděpodobnost. V Kolmogorovově axiomatickém pojetí je pravděpodobnostní míra definována jako (nezáporná, σ-aditivní) míra na σ-algebře, jejíž prvky nazýváme událostmi, která je normována na jedničku. Tyto požadavky jsou zde splněny: z tvrzení 9.1.2c víme, že $w(., A; \psi)$ je borelovská míra a $w(\sigma(A), A; \psi) = 1$. Událostí Δ se přitom rozumí, že výsledek měření padne do množiny $\Delta \in \mathscr{B}$. Poznamenejme ještě, že (q2-c) není postulát v pravém slova smyslu; již z příkladu je vidět, že plyne z (q2-b). Je však výhodné formulovat toto tvrzení spolu s postuláty, protože vztah (4) je jednoduchý a často se jej užívá.

Měření složek spinu, jímž jsme se zabývali v příkladu 3, představuje nejjednodušší netriviální (dichotomický) případ měření: existují jen dva možné výsledky, jež se vzájemně vylučují. Pro takováto měření se užívá názvu **ano-ne experiment**. Naprostá většina skutečně prováděných měření má samozřejmě složitější strukturu, hlavní význam ano-ne experimentů však spočívá v tom, že *měření libovolné pozorovatelné můžeme* (alespoň v principu) *interpretovat jako soubor ano-ne experimentů*. Vždy si totiž můžeme rozdělit škálu měřicího přístroje na intervaly a ptát se: padne naměřená hodnota do daného intervalu – ano či ne? Velmi ilustrativní je ekvivalence se souborem ano-ne experimentů u přístrojů typu mnohokanálového analyzátoru, s nimiž se v experimentální fyzice často pracuje.

Jako každé pozorovatelné odpovídá danému ano-ne experimentu nějaký samosdružený operátor. Podle postulátu (q2-a) by měl mít právě dvě různé vlastní hodnoty $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že tyto hodnoty jsou $\alpha = 1$ (ano, kladný výsledek) a $\beta = 0$ (ne, záporný výsledek). Každému ano-ne experimentu tedy odpovídá projektor na nějaký podprostor v $\mathscr{H}$.

Ztotožnění pozorovatelné se systémem ano-ne experimentů se nyní stává názornějším. Odpovídá-li projektor P_Δ ano-ne experimentu „leží naměřená hodnota veličiny A v množině Δ?“, pak musí platit $w(\{1\}, P_\Delta; \psi) = w(\Delta, A; \psi)$. Jelikož $E_{P_\Delta}(\{1\}) = P_\Delta$, z postulátu (q2-b) plyne

$$(\psi, P_\Delta \psi) = (\psi, E_A(\Delta)\psi)$$

pro každý vektor ψ, jemuž odpovídá nějaký stav systému. Platí-li to pro všechna $\psi \in \mathscr{H}$, plyne odtud $P_\Delta = E_A(\Delta)$ pro každou borelovskou množinu $\Delta \subset \mathbb{R}$. V § 15.4 sice uvidíme, že tento předpoklad není v důsledku tzv. superselekčních pravidel obecně splněn, tvrzení však zůstane v platnosti, protože současně s omezením na množinu stavů přijmeme i omezení na množinu přípustných pozorovatelných. Projektory odpovídající popsaným ano-ne experimentům jsou tedy hodnotami projektorové míry $E_A(.)$.

Víme už, jaké matematické objekty se přiřazují stavům a pozorovatelným, a jakého druhu předpovědi můžeme očekávat pro výsledky měření. Potřebujeme ještě zodpovědět otázku, co se stane se stavem systému, který prestál měření. Z heuristických úvah, jimiž jsme motivovali předchozí postuláty, víme, co nastane při měření pozorovatelné, jejíž spektrum je čistě bodové a jednoduché. V případě obecné pozorovatelné zformulujeme odpověď pro ano-ne experiment, který jsme před chvílí diskutovali, jako další postulát:

(q3) je-li výsledek experimentu kladný (naměřená veličina leží v množině Δ), pak se po měření systém ocitne ve stavu daném jednotkovým vektorem $E_A(\Delta)\psi / \|E_A(\Delta)\psi\|$; v opačném případě je stav systému po měření dán vektorem obdobného typu se záměnou $E_A(\Delta)$ na $E_A(\mathbb{R}\backslash\Delta) = I - E_A(\Delta)$.

Použitý zápis má smysl jenom tehdy, když normy vystupující ve jmenovateli jsou kladné. S tím však potíže mít nebudeme, protože např. $\|E_A(\Delta)\psi\| = 0$ platí právě tehdy, když pravděpodobnost nalezení výsledku v množině Δ (pro systém ve stavu ψ) je nulová. V tomto případě dostaneme s jistotou záporný výsledek, $\|E_A(\mathbb{R}\backslash\Delta)\psi\| = 1$, a stav systému po měření bude popsán opět vektorem ψ. Budeme-li ovšem daný ano-ne experiment chápat jako *filtr*, tj. budeme-li dále uvažovat jen ty případy, kdy výsledek byl kladný, pak $E_A(\Delta)\psi = 0$ znamená, že filtr je pro systém ve stavu ψ uzavřen; v takovém případě zjevně nemá smysl mluvit o stavu systému po průchodu filtrem.

Postulát (q3) má následující závažný důsledek: jestliže v daném ano-ne experimentu dostaneme např. kladný výsledek, potom *týž výsledek* dostaneme s jistotou při bezprostředně následujícím opakování tohoto experimentu. Skutečně, vektor $\psi' = E_A(\Delta)\psi / \|E_A(\Delta)\psi\|$ je projektorem $E_A(\Delta)$ reprodukován, takže podle postulátu (q2-b) je pravděpodobnost $w(\{1\}, E_A(\Delta); \psi')$ rovna jedné. Také tento závěr je v souladu s experimentální zkušeností, což znovu potvrzuje přijatelnost postulátu (q3). Musíme ovšem upozornit na neurčitost obsaženou ve slovech „bezprostředně následující". V reálném experimentu jde o to, aby změnu stavu způsobenou časovým vývojem mezi oběma měřeními bylo možno zanedbat; podmínky pro to lze u konkrétního systému stanovit teprve ze znalosti jeho dynamiky.

Výše uvedené postuláty jsme motivovali jednoduchými úvahami o pozorovatelných s čistě bodovým spektrem. Nyní musíme naopak prověřit, zda pro každou takovouto pozorovatelnou dostaneme očekávané výsledky.

15.1.5 Příklad *(pozorovatelné s čistě bodovým spektrem)*: Nechť pozorovatelnáA je popsána samosdruženým operátorem na separabilním $\mathscr{H}$, jehož spektrum je čistě bodové, $\sigma(A) = \overline{\sigma_p(A)} = \overline{\{\lambda_j : j = 1, 2, \dots\}}$. Označme $P_j = E_A(\{\lambda_j\})$ projektory na vlastní podprostory. Je-li stav před měřením dán jednotkovým vektorem $\psi \in \mathscr{H}$, pak

(a) možnými výsledky měření jsou vlastní hodnoty λ_j, $j = 1, 2, \dots$,

(b) pravděpodobnost naměření hodnoty λ_j je rovna $w(\{\lambda_j\}, A; \psi) = (\psi, P_j\psi) = \|P_j\psi\|^2$,

(c) naměříme-li hodnotu λ_j, pak stav systému po měření je dán vektorem $P_j\psi / \|P_j\psi\|$.

Přitom implicitně předpokládáme, že přístroj umí rozlišit libovolné dvě vlastní hodnoty operátoru A. Obměnu tvrzení pro případ omezené rozlišovací schopnosti není těžké zapsat. Důležité je uvědomit si přitom podstatný rozdíl od situace, kdy přístroj naměří konkrétní hodnotu z množiny $\Delta = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, ale my zaregistrujeme pouze, že výsledek leží v množině Δ; o tom budeme mluvit podrobněji v § 15.6.

Pozorný čtenář může proti tvrzení (a) namítnout, že podle postulátu (q2-a) jsou možnými výsledky měření *navíc* body patřící do uzávěru množiny $\sigma_p(A)$, ale nikoli do množiny samotné. Tento rozdíl však nemá měřitelné důsledky: podle věty 10.4.1b pro každé $\lambda \in \overline{\sigma_p(A)} \setminus \sigma_p(A)$ platí $E_A(\{\lambda\}) = 0$, a tedy $w(\{\lambda\}, A; \psi) = 0$. Bylo by ostatně divné, kdyby tomu bylo jinak, protože žádné měření nedokáže (ani v principu) odlišit veličiny „libovolně blízké“.

15.1.6 Příklad: Nechť stavu Φ popisovaném jednotkovým vektorem φ odpovídá ano-ne experiment „Je systém ve stavu Φ?“. Najdeme odpovídající projektor E_φ. Veličina $w(\{1\}, E_\varphi; \psi)$ není nic jiného než pravděpodobnost přechodu definovaná vztahem (1); to znamená, že pro jakýkoli stav ψ platí $\|E_\varphi \psi\|^2 = |(\varphi, \psi)|^2$. Odpovídá-li každému jednotkovému $\psi \in \mathscr{H}$ nějaký stav, plyne odtud, že E_φ je projektor na jednorozměrný podprostor Φ v $\mathscr{H}$:

$$E_\varphi \psi = (\varphi, \psi)\varphi \quad \text{pro všechna} \quad \psi \in \mathscr{H}. \tag{5}$$

Totéž platí i obecně, jak bude patrno z výkladu v § 15.4.

15.1.7 Příklad: Mějme borelovské množiny $\Delta_1, \Delta_2 \subset \mathbb{R}$. Veličinu $w(\Delta_1 \cap \Delta_2, A; \psi)$ je možné vyjádřit pomocí dvojice měření. Uvažujme např. situaci, kdy jsme nejprve provedli ano-ne experiment $E_A(\Delta_1)$: s pravděpodobností $\|E_A(\Delta_1)\psi\|^2$ najdeme kladný výsledek, přičemž stav systému po měření bude v tomto případě dán vektorem $\psi' = E_A(\Delta_1)\psi / \|E_A(\Delta_1)\psi\|$. Provedeme-li nyní ano-ne experiment $E_A(\Delta_2)$, pravděpodobnost nalezení kladného výsledku je rovna

$$\|E_A(\Delta_2)\psi'\|^2 = \frac{\|E_A(\Delta_2)E_A(\Delta_1)\psi\|^2}{\|E_A(\Delta_1)\psi\|^2}.$$

Je zřejmé, že popsaná dvě měření, tj. ano-ne experiment $E_A(\Delta_1)$ na systému ve stavu Ψ následovaný ano-ne experimentem $E_A(\Delta_2)$ na systému ve stavu Ψ', jsou nezávislé jevy, proto pro pravděpodobnost nalezení obou kladných výsledků platí

$$w(\Delta_2, \Delta_1, A; \psi) = w(\Delta_2, A; \psi')w(\Delta_1, A; \psi) = \|E_A(\Delta_2)E_A(\Delta_1)\psi\|^2.$$

Z vlastnosti (9.1.3a) projektorové míry plyne, že tento výraz se rovná $w(\Delta_1 \cap \Delta_2, A; \psi)$. Provedeme-li stejnou úvahu se záměnou pořadí obou ano-ne experimentů, dostaneme

$$w(\Delta_1 \cap \Delta_2, A; \psi) = w(\Delta_2, \Delta_1, A; \psi) = w(\Delta_1, \Delta_2, A; \psi)\,; \tag{6}$$

také stav je v obou případech dán týmž vektorem $E_A(\Delta_1 \cap \Delta_2)\psi / \|E_A(\Delta_1 \cap \Delta_2)\psi\|$. Protože tento výsledek platí pro libovolný stav ψ, plyne odtud, že *ano-ne experiment $E_A(\Delta_1 \cap \Delta_2)$ je ekvivalentní ano-ne experimentům $E_A(\Delta_j)$, $j = 1{,}2$, provedeným v libovolném pořadí*, pokud za kladný výsledek považujeme nalezení kladných výsledků v obou těchto experimentech. Tento závěr lze snadno rozšířit na případ libovolného konečného počtu měření (viz cvičení 13).

Dříve než budeme pokračovat ve výkladu, probereme několik jednoduchých příkladů. Jde vesměs o úlohy známé z úvodních kapitol učebnic kvantové mechaniky. Přesto může být jejich rozbor užitečný, jestliže z něj bude vidět, co se v těchto učebnicích zpravidla opomíjí. Ve většině příkladů tohoto paragrafu jsou za Hilbertovy prostory stavů brány prostory $L^2(\mathbb{R})$ a $L^2(\mathbb{R}^+)$. Ačkoli tyto prostory nejsou stavovými prostory žádného reálného fyzikálního systému, lze jich s úspěchem užít k modelovému popisu konkrétních fyzikálních systémů. Kromě toho řešení problému spojeného s reálným kvantově mechanickým systémem lze často převést na řešení jednodušší úlohy prostřednictvím separace proměnných (viz § 18.5, kde např. ukážeme, jak se převádí popis pohybu částice ve sféricky symetrickém potenciálu na studium určitého operátoru v $L^2(\mathbb{R}^+)$).

15.2.1 Příklad (*bezspinová částice na přímce*): Za stavový Hilbertův prostor se bere $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R})$; základními dynamickými proměnnými „jednorozměrné" částice jsou její **poloha (souřadnice)** a **impuls (hybnost)** reprezentované operátory Q, resp. P z příkladů 7.1.5, 7.2.7. O důvodech vedoucích k tomuto přiřazení se zmíníme v § 16.2.

Uvažujme nejprve operátor polohy Q: podle příkladu 7.3.8 je jeho spektrum čistě spojité, $\sigma(Q) = \mathbb{R}$, takže výsledkem měření polohy může být jakékoli reálné číslo. Předpokládejme, že stav částice je dán jednotkovým vektorem $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ (neboli *vlnovou funkcí*, jak bývá zvykem říkat, je-li stavový prostor funkcionální). Z postulátu (q2-b) a příkladu 10.5.1 plyne

$$w(\Delta, Q; \psi) = \int_\Delta |\psi(x)|^2 \, dx \tag{1}$$

pro každou lebesgueovsky měřitelnou množinu $\Delta \subset \mathbb{R}$, specielně pro všechna $\Delta \in \mathscr{B}$. Pravděpodobnostní míra $w(., Q;\psi)$ je generována funkcí $|\psi(.)|^2$ a Lebesgueovou mírou (v učebnicích kvantové mechaniky se obvykle říká, že $|\psi(x)|^2$ je *hustota pravděpodobnosti* nalezení částice v bodě x). Pokud jsme zjistili, že částice se nachází v množině Δ, pak její stav po měření je dán vektorem

$$\psi_\Delta : \psi_\Delta(x) = \frac{(E_Q(\Delta)\psi)(x)}{\|E_Q(\Delta)\psi\|} = \frac{\chi_\Delta(x)\psi(x)}{(w(\Delta, Q; \psi))^{1/2}}, \tag{2}$$

kde χ_Δ je charakteristická funkce množiny Δ.

Vyšetřování operátoru impulsu nám usnadní jeho unitární ekvivalence s operátorem Q: podle příkladu 7.4.12 platí

$$P = F^{-1} Q F, \tag{3}$$

kde F je Fourierův-Plancherelův operátor. Pravděpodobnost nalezení impulsu částice v borelovské množině Δ je tedy rovna $w(\Delta, P; \psi) = \|E_Q(\Delta)F\psi\|^2$, protože F je unitární a $F^{-1}E_Q(.)F$ je podle příkladů 10.3.7a a 10.5.2 projektorová míra příslušející operátoru P. Odtud pro libovolné $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ plyne $w(\Delta, P; \psi) = \int_\Delta |\varphi(k)|^2\,dk$, kde $\varphi \equiv F\psi$ je dána vztahem

$$\varphi(k) = (2\pi)^{-1/2} \frac{d}{dk} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ikx} - 1}{-ix}\, \psi(x)\, dx\,;$$

pokud je *navíc* $\psi \in L^1(\mathbb{R})$, zjednoduší se toto vyjádření na Fourierovu transformaci, $\varphi(k) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}\psi(x)\,dx$.

Jinou význačnou pozorovatelnou jednorozměrné částice (o hmotnosti m) je její kinetická energie, jíž odpovídá operátor $H_0 = (1/2m)P^2$. Jeho spektrum je čistě spojité, $\sigma_c(H_0) = \mathbb{R}^+$, jak je vidět např. z tvrzení 10.5.4. Pravděpodobnost naměření hodnoty z množiny Δ lze pak snadno najít: platí

$$w(\Delta, H_0; \psi) = \int_{f^{(-1)}(\Delta)} |\varphi(k)|^2\, dk\,, \tag{4}$$

kde $f(k) := k^2/2m$. Pro volnou částici operátor H_0 pochopitelně charakterizuje její celkovou energii.

15.2.2 Příklad (*částice na polopřímce*): Stavovým prostorem je v tomto případě $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^+)$. Operátor polohy Q: $(Q\psi)(x) = x\psi(x)$ s definičním oborem $D(Q) = \{\psi\colon \int_0^\infty x^2|\psi(x)|^2\,dx < \infty\}$ je samosdružený a snadno je pro něj možno modifikovat závěry předchozího příkladu. Na rozdíl od toho s částicí na polopřímce nespojujeme operátor charakterizující impuls: přirozenými kandidáty by byly ty, jež odpovídají formálnímu výrazu $-i\,d/dx$, z příkladu 7.2.7 však víme, že žádný takový samosdružený operátor na $L^2(\mathbb{R}^+)$ neexistuje. Nejzajímavější je situace s operátorem kinetické energie, který by měl podobně odpovídat formálnímu výrazu $-d^2/dx^2$ (pro jednoduchost zanedbáváme číselný faktor, tj. položíme $m = \frac{1}{2}$).

Problémem konstrukce samosdružených operátorů odpovídajících diferenciálnímu výrazu $-d^2/dx^2$ jsme se zabývali v příkladu 8.6.9 kde jsme dospěli k následujícím závěrům:

(a) Množina všech takovýchto operátorů je tvořena operátory $T(c)$, $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definovaných vztahem

$$T(c)\psi = -\psi'' \tag{5}$$

456 pro $\psi \in D(c) := \{\psi \in AC^2(0,\infty),\ \psi'(0) + c\psi(0) = 0\}$, resp. $\psi \in D(\infty) := = \{\psi \in AC^2(0,\infty),\ \psi(0) = 0\}$.
(b) Spektrum $\sigma(T(c)) \supset [0,\infty)$, v případě $c \leqq 0$ zde platí rovnost, pro $c > 0$ přistupuje ještě jedna vlastní hodnota $-c^2$ přičemž vlastní vektor $\varphi_c \subset D(T(c))$ je dán vztahem

$$\varphi_c\colon\ \varphi_c(x) = (2c)^{1/2}\,\mathrm{e}^{-cx}. \tag{6}$$

Ptejme se nyní jakou fyzikální interpretaci lze těmto skutečnostem přisoudit. Pro daná $k \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$ definujeme nejprve vektor

$$\varphi_{k\varepsilon}\colon\ \varphi_{k\varepsilon}(x) = (\mathrm{e}^{-ikx} + R_\varepsilon\,\mathrm{e}^{ikx})\,\mathrm{e}^{-\varepsilon x^2}, \tag{7}$$

kde koeficient R_ε volíme tak, aby $\varphi_{k\varepsilon} \in D(T(c))$, tj.

$$R_\varepsilon = \frac{ik + \varepsilon - c}{ik - \varepsilon + c}. \tag{8}$$

Podle cvičení 2 je $\operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\to 0}\,(T(c) - k^2)\varphi_{k\varepsilon} = 0$, na základě čehož se funkce φ_{k0} ve fyzice interpretuje jako „vlastní vektor" operátoru $T(c)$ s vlastní hodnotou k^2 ležící ve spojitém spektru. Argument, který uvedeme, bude mít jenom heuristický význam, protože takovéto „vektory" nepatří do $\mathscr{H}$; přesto vystihuje podstatu problému, pro niž je důležité chování vlnových funkcí v okolí bodu $x = 0$. Výraz $\varphi_k(x) = \mathrm{e}^{-ikx} + R\mathrm{e}^{ikx}$ lze chápat jako superpozici dopadající vlny a odražené vlny, jejíž fáze je změněna o arg R. Pro každé c je tato veličina jinou funkcí proměnné k, specielně $c = \infty$ odpovídá odrazu na „dokonale tvrdé" bariéře, kdy $R = -1$ pro všechna $k \in \mathbb{R}$. V případě $c > 0$ může navíc částice existovat ve stavu „vázaném k bariéře", jenž je charakterizován vektorem φ_c. Vidíme tedy, že *různým samosdruženým rozšířením* daného formálního hamiltoniánu $-\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ *odpovídají různé fyzikální situace.* Jinou názornou ilustraci této skutečnosti lze najít ve cvičení 4.

15.2.3 Příklad: Vyšetříme dále operátory popisující *polohu a impuls reálné částice s nulovým spinem,* jejímž stavovým prostorem je $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$. Třem kartézským složkám polohového vektoru $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ připíšeme operátory $Q_j\colon (Q_j\psi)(\boldsymbol{x}) = x_j\psi(\boldsymbol{x})$, $j = 1, 2, 3$, s definičními obory

$$D(Q_j) = \left\{\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)\colon \int_{\mathbb{R}^3} x_j^2 |\psi(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} < \infty\right\}.$$

Podle příkladů 7.3.3 a 7.3.8 jsou operátory Q_j samosdružené s čistě spojitým spektrem $\sigma(Q_j) = \mathbb{R}$ a pro libovolnou borelovskou množinu $\Delta \subset \mathbb{R}$ platí

$$(E_{Q_j}(\Delta)\psi)(\boldsymbol{x}) = \chi_\Delta(x_j)\psi(\boldsymbol{x}), \tag{9}$$

kde χ_Δ je charakteristická funkce množiny Δ. Odtud je snadné vyjádřit pravděpodobnost $w(\Delta, Q_j;\, \psi)$ a stav částice po takovémto měření. Připomeňme ještě, že operátory Q_j lze vyjádřit pomocí operátoru Q z příkladu 1: platí rovnosti

$$Q_1 = \overline{Q \otimes I \otimes I}, \text{ atd.} \tag{10}$$

jež lze odvodit stejně jako v příkladu 10.7.4 (viz formule (10.7.5)).

Třem kartézským složkám impulsu přiřadíme operátory P_j, jež v analogii se vztahem (10) definujeme následovně

$$P_1 = \overline{P \otimes I \otimes I}, \text{ atd.}; \tag{11}$$

z věty 10.8.2 plyne, že jsou samosdružené. Dokážeme, že obdobně jako v příkladu 1 jsou operátory P_j a Q_j unitárně ekvivalentní prostřednictvím Fourierova-Plancherelova operátoru,

$$P_j = F_3^{-1} Q_j F_3, \quad j = 1, 2, 3. \tag{12}$$

Ze cvičení 5.48 plyne $P_1 \subset \overline{F_3^{-1}(Q \otimes I \otimes I)F_3} = F_3^{-1} Q_1 F_3$, a z rovnosti $Q = FPF^{-1}$ obdobným způsobem dostáváme $Q_1 \subset F_3 P_1 F_3^{-1}$. Snadno ověříme implikaci

$$T_1 \subset T_2, \quad U \text{ unitární} \Rightarrow UT_1U^{-1} \subset UT_2U^{-1}, \tag{13}$$

z níž vyplývá $P_1 \supset F_3^{-1} Q_1 F_3$, tj. dohromady rovnost (12) pro $j = 1$; podobně lze tvrzení dokázat pro $j = 2,3$. Z unitární ekvivalence (12) plyne, že operátory P_j mají čistě spojitá spektra, $\sigma(P_j) = \mathbb{R}$.

Z definičních vztahů (11) je vidět, jak operátory P_j konkrétně působí jen pro některé vektory z $D(P_j) = F_3^{-1} D(Q_j)$; totiž pro ty, které patří do definičního oboru neuzavřeného tenzorového součinu, tj. $\psi(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{l=1}^{3} \psi_l^{(k)}(x_l)$, kde $\psi_j^{(k)} \in D(P)$ a $\psi_l^{(k)} \in L^2(\mathbb{R})$ pro ostatní dvě hodnoty indexu l různé od j; ze vztahu (7.6.1) plyne

$$(P_j\psi)(\boldsymbol{x}) = -\mathrm{i}\, \frac{\partial \psi(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}. \tag{14}$$

Tato rovnost je ovšem splněna i pro jiné vektory; ověříme např., že *platí pro všechna* $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$. Podle příkladu 3.2.6 zobrazuje operátor F_3^{-1} množinu $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ na sebe, takže z inkluze $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3) \subset D(Q_j)$ plyne $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3) \subset D(P_j)$. Dále pro $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ platí

$$\psi(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}} (F_3\psi)(\boldsymbol{k})\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}.$$

458 Derivace integrandu podle x_j má integrabilní majorantu $|(Q_j F_3 \psi)(.)|$ nezávislou na x, můžeme tedy zaměnit pořadí integrování a derivace. Odtud plyne

$$-\mathrm{i}\,\frac{\partial \psi(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}} k_j (F_3 \psi)(\boldsymbol{k})\, \mathrm{d}\boldsymbol{k} =$$

$$= (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}} (Q_j F_3 \psi)(\boldsymbol{k})\, \mathrm{d}\boldsymbol{k} = (F_3^{-1} Q_j F_3 \psi)(\boldsymbol{x}) = (P_j \psi)(\boldsymbol{x}),$$

což jsme slíbili dokázat.

15.2.4 Poznámky: (a) Pokud bychom chtěli operátory P_j definovat vztahem (14), jak se to v učebnicích kvantové mechaniky většinou dělá, musíme specifikovat definiční obor. Vezmeme-li za něj třeba $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, pak o takto definovaných operátorech lze dokázat, že jsou v podstatě samosdružené (cvičení 5). Současně podle výsledků předchozího příkladu představují zúžení samosdružených operátorů (11); tím je dáno, že obě definice jsou ekvivalentní.
(b) Podobně lze definovat operátory Q_j, P_j na $L^2(\mathbb{R}^n)$ a odvodit pro ně závěry získané v příkladu pro $n = 3$. Je-li např. $n = 3N$, pak takovéto operátory popisují souřadnice a impulsy soustavy N bezspinových částic.

Mezi nejdůležitější pozorovatelné patří **operátor celkové energie** neboli **hamiltonián**. S hamiltoniány volné částice jsme se setkali v prvních dvou příkladech. Probereme další dva případy jednoduchých jednorozměrných systémů.

15.2.5 Příklad (*lineární harmonický oscilátor*): Vezmeme opět $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R})$ a vyšetříme operátor

$$H:\ (H\psi)(y) = -\psi''(y) + y^2\psi(y), \tag{15}$$

$$D(H) = \left\{ \psi \in \mathscr{H}:\ \psi, \psi' \ \text{ absolutně spojité}, \ \int_{\mathbb{R}} |-\psi''(y) + y^2\psi(y)|^2\, \mathrm{d}y < \infty \right\},$$

který je až na rozměrový faktor $\frac{1}{2}\hbar\omega$ roven hamiltoniánu lineárního harmonického oscilátoru formálně danému výrazem

$$H_{\mathrm{osc}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \tag{16}$$

pokud položíme $y = (m\omega/\hbar)^{1/2}x$. Podle důsledku 8.5.14 je H samosdružený operátor; ukážeme, že platí $H = P^2 + Q^2$. Lehko nahlédneme platnost vztahu $P^2 + Q^2 \subset H$. K ověření opačné inkluze vyjdeme z toho, že $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ je invariantním podprostorem obou operátorů P^2 a Q^2, přičemž pro všechna $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ platí rovnost $[P, Q^n]\psi = -inQ^{n-1}\psi$. Odtud plyne

$$\|(P^2 + Q^2)\psi\|^2 = ((P^2 + Q^2)^2\psi, \psi) =$$
$$= ((P^4 + Q^4 + 2PQ^2P + [P,[P, Q^2]])\psi, \psi) =$$
$$= \|P^2\psi\|^2 + \|Q^2\psi\|^2 + 2\|QP\psi\|^2 - 2\|\psi\|^2,$$

takže platí nerovnost

$$\|(P^2 + Q^2)\psi\|^2 + 2\|\psi\|^2 \geqq \|P^2\psi\|^2 + \|Q^2\psi\|^2. \tag{17}$$

Dále je dobře známo, že Hermiteovy funkce $\psi_n \in D(H) \cap \mathscr{S}(\mathbb{R})$ definované vztahy (4.3.4) jsou vlastními vektory operátoru H; protože tvoří ortonormální bázi v $L^2(\mathbb{R})$, je $H \restriction \mathscr{S}(\mathbb{R})$ v podstatě samosdružený (viz příklad 7.2.2). Proto ke každému $\varphi \in D(\overline{H \restriction \mathscr{S}(\mathbb{R})}) \equiv D(H)$ existuje podle tvrzení 3.4.11 posloupnost $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$ taková, že $\varphi_n \to \varphi$ a $H\varphi_n \to H\varphi$. Pro tato φ_n platí

$$H\varphi_n = (P^2 + Q^2)\varphi_n, \tag{18}$$

takže nerovnost (17) lze přepsat do tvaru

$$\|H(\varphi_n - \varphi_m)\|^2 + 2\|\varphi_n - \varphi_m\|^2 \geqq \|P^2(\varphi_n - \varphi_m)\|^2 + \|Q^2(\varphi_n - \varphi_m)\|^2. \tag{19}$$

Vidíme, že posloupnosti $\{P^2\varphi_n\}$ a $\{Q^2\varphi_n\}$ jsou cauchyovské; z uzavřenosti obou operátorů potom plyne $P^2\varphi_n \to P^2\varphi$ a $Q^2\varphi_n \to Q^2\varphi$, tj. $\varphi \in D(P^2) \cap D(Q^2)$ a ze vztahu (18) rovnost $H\varphi = P^2\varphi + Q^2\varphi$, což bylo třeba dokázat.

15.2.6 Příklad (*pravoúhlá potenciální jáma*): Uvažujme opět $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R})$, na němž je tentokrát dán operátor

$$H: (H\psi)(x) = -\psi''(x) + v(x)\psi(x) \tag{20a}$$

s definičním oborem $D(H) = D(P^2)$, přičemž funkce v je tvaru

$$v(x) := -V_0\chi_{[-a,a]}(x) \tag{20b}$$

pro daná kladná V_0, a. Operátor násobení funkcí v je podle příkladu 9.4.5 totožný s operátorem $V := v(Q)$. Tento operátor je pro funkci (20b) omezený, $\|V\| = V_0$, proto můžeme psát $H = P^2 + V$. Dále V je hermitovský, takže H je samosdružený. Až na faktor $\hbar^2/2m$ je operátor (20) totožný s hamiltoniánem částice interagující s potenciálem tvaru pravoúhlé jámy; operátory $T = P^2$ a V odpovídají její *kinetické*, resp. *potenciální energii*.

Z omezenosti operátoru V dále vyplývá, že H je *zdola omezený*, tj. že existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$(\psi, H\psi) \geqq c\|\psi\|^2 \quad \text{pro všechna} \quad \psi \in D(H)\,. \tag{21}$$

V našem konkrétním případě se snadno přesvědčíme, že $c \geqq -V_0$; odtud podle důsledku 7.3.6 vyplývá inkluze $\sigma(H) \subset [-V_0, \infty)$. Vyšetříme nyní spektrum operátoru H podrobněji. *Bodové spektrum* je dobře známo: vlastní hodnoty leží v intervalu $(-V_0, 0)$, mají jednotkovou násobnost a je jich konečný počet. Zavedeme-li pro $E \in (-V_0, 0)$ veličiny $k = (E + V_0)^{1/2}$ a $\varkappa = (-E)^{1/2}$, pak vlastní hodnoty $E_n = -\varkappa_n^2$ jsou dány řešeními rovnic

$$ka\,\mathrm{tg}\,(ka) = \varkappa a\,, \qquad ka\,\mathrm{ctg}\,(ka) = -\varkappa a\,;$$

konvenčně je číslujeme počínajíce nejmenší, $E_n < E_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Jim odpovídající jednotkové vlastní vektory jsou

$$\psi_n:\ \psi_n(x) = \begin{cases} C_n \sin\left(k_n x - \dfrac{n\pi}{2}\right) & \ldots\ |x| \leqq a \\[2ex] C_n(\mathrm{sg}\,x)^{n+1} \sin\left(k_n a - \dfrac{n\pi}{2}\right) \mathrm{e}^{\varkappa_n(a-|x|)} & \ldots\ |x| \geqq a\,, \end{cases} \tag{22}$$

kde normovací faktor $C_n = [\varkappa_n/(1 + a\varkappa_n)]^{1/2}$. Vlastních hodnot je právě N, kde N je určeno nerovnostmi $(N-1)\pi < 2(V_0 a^2)^{1/2} \leqq N\pi$.

Připomeňme, že vlastní hodnoty hledáme tak, že „sešíváme" řešení příslušných diferenciálních rovnic v intervalech $(-\infty, -a)$, $(-a, a)$, (a, ∞) tak, aby výsledná funkce byla kvadraticky integrabilní a spojitá i se svou první derivací v bodech $x = \pm a$. Jinými slovy, mezi kandidáty na roli vlastního vektoru vybíráme ty funkce, které *patří do definičního oboru* operátoru H. Podobně se lze přesvědčit, že žádná vlastní hodnota neleží mimo interval $(-V_0, 0)$.

Protože mají vlastní hodnoty konečnou násobnost a nemají hromadný bod, ostatní body spektra patří do $\sigma_{\mathrm{ess}}(H)$. Poměrně snadno lze ukázat, že do spektra patří všechny body ležící nad „břehem" jámy, tj. $\sigma(H) \supset \mathbb{R}^+$ (cvičení 8). Obtížnější je ověřit přímo, že body intevalu $[-V_0, 0)$ s výjimkou vlastních hodnot nepatří do spektra; k tomu je nutné sestrojit rezolventu a dokázat její omezenost. Tomu se lze vyhnout tím, že užijeme výsledku z komentáře k § 10.4: z příkladu 1 víme, že $\sigma_{\mathrm{ess}}(P^2) = \mathbb{R}^+$, proto platí

$$\sigma_c(H) = \sigma_{\mathrm{ess}}(H) = \mathbb{R}^+\,, \tag{23}$$

pokud je operátor V relativně kompaktní vůči P^2. Abychom to mohli ověřit, potřebujeme následující integrální vyjádření rezolventy operátoru P^2 (cvičení 10): pro $\varkappa > 0$ platí

$$((P^2 + \varkappa^2 I)^{-1}\psi)(x) = \int_{\mathbb{R}} K_\varkappa(x, y)\psi(y)\,\mathrm{d}y, \tag{24a}$$

$$K_\varkappa(x, y) = \frac{1}{2\varkappa}\,\mathrm{e}^{-\varkappa|x-y|}. \tag{24b}$$

Operátory V a $(P^2 + \varkappa^2 I)^{-1}$ jsou omezené, proto je omezený i operátor $V(P^2 + \varkappa^2 I)^{-1}$ a je definován na celém $\mathscr{H}$; je to integrální operátor s jádrem $v(x)\,K_\varkappa(x, y)$. Integrál

$$\int_{\mathbb{R}^2} |v(x)|^2 |K_\varkappa(x, y)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4\varkappa^2}\,\|v\|^2$$

je podle předpokladu konečný, proto je operátor $V(P^2 + \varkappa^2 I)^{-1}$ Hilbertův-Schmidtův, a tedy kompaktní; tím je rovnost (23) dokázána.

15.3 SMÍŠENÉ STAVY

Stavy kvantových systémů jsme v § 15.1 ztotožnili s paprsky ve stavovém prostoru. Toto pojetí není vždy dostatečně obecné, proto je účelné pojem stavu rozšířit.

15.3.1 Příklad: Předpokládejme, že elektron, jehož spinový stav je dán vektorem $\chi \in \mathscr{H}_s$, prochází Sternovým-Gerlachovým přístrojem nastaveným ve směru j-té osy doplněným magnetickým kolimátorem. Ostatní dynamické proměnné elektronu přitom zanedbáváme stejně jako skutečnost, že přístrojem fakticky procházejí atomy vodíku, a ne samotné elektrony. Z příkladu 15.1.3 víme, že jeden z detektorů $D_\pm$ zaznamená puls, a to s pravděpodobností $w_\pm = \|E_j^{(\pm)}\chi\|^2$. Z kolimátoru tedy vycházejí elektrony v jednom ze stavů $\varphi_\pm := E_j^{(\pm)}\chi / \|E_j^{(\pm)}\chi\|$. Předpokládejme, že na nich budeme dále měřit např. k-tou složku spinu. Takové měření můžeme uskutečnit různými způsoby:

(a) vybereme si elektrony, pro jejichž j-tou složku spinu jsme dostali např. hodnotu $+\frac{1}{2}$, zatímco elektrony ve stavu φ_- propustíme bez povšimnutí. Pravděpodobnost naměření hodnoty $(\alpha/2)$, kde $\alpha = \pm 1$, je potom rovna

$$w\left(\left\{\frac{\alpha}{2}\right\}, S_k; \varphi_+\right) \equiv w_\alpha^{(+)} = (\varphi_+, E_k^{(\alpha)}\varphi_+).$$

Budeme-li naopak propouštět bez povšimnutí elektrony ve stavu φ_+, dostaneme výsledek $(\alpha/2)$ s pravděpodobností

$$w\left(\left\{\frac{\alpha}{2}\right\}, S_k;\, \varphi_-\right) \equiv w_\alpha^{(-)} = (\varphi_-, E_k^{(\alpha)}\varphi_-),$$

(b) můžeme ovšem také přestat mezi elektrony rozlišovat a měřit S_k na každém elektronu, který prošel prvním přístrojem. V tomto případě je pravděpodobnost naměření hodnoty $(\alpha/2)$ rovna součtu $\tilde{w}_\alpha = w_+ w_\alpha^{(+)} + w_- w_\alpha^{(-)}$, tj.

$$\tilde{w}_\alpha = w_+(\varphi_+, E_k^{(\alpha)}\varphi_+) + w_-(\varphi_-, E_k^{(\alpha)}\varphi_-)\,.$$

Vektory φ_+ a φ_- tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathscr{H}_s$, proto jde posledně uvedený výraz zapsat ve tvaru

$$\tilde{w}_\alpha = \mathrm{Tr}(E_k^{(\alpha)} W)\,, \tag{1}$$

kde $W := w_+ E_j^{(+)} + w_- E_j^{(-)}$. Povšimněme si toho, že operátor W je pozitivní a má jednotkovou stopu, tj. že je to statistický operátor. Podstatné je to, že pravděpodobnost $\tilde{w}_\alpha$ můžeme vypočítat bez detailní znalosti toho, který elektron byl ve stavu φ_+ a který ve stavu φ_-; stačí vědět, že každý elektron je v některém z těchto stavů, spolu s pravděpodobností, že tato možnost nastane.

15.3.2 Poznámka: Měření popsané v části (b) se samozřejmě liší od případu, kdy detektory nejsou zapojeny: tehdy je stav elektronu po průchodu přístrojem popsán opět vektorem χ. Rozdíl mezi oběma situacemi je experimentálně snadno ověřitelný: je-li např. $j = 3$ a $k = 1$, a elektron je před prvním měřením ve stavu χ takovém, že $S_1\chi = \frac{1}{2}\chi$, pak $\tilde{w}_\alpha = \frac{1}{2}$, kdežto $w(\{\alpha/2\}, S_1; \chi) = \delta_{\alpha 1}$.

V reálných experimentech jsou měření typu (b) natolik častá, že je účelné zobecnit pro ně pojem stavu. Stavům v dosavadním smyslu, jimž odpovídají paprsky v Hilbertově prostoru, budeme říkat **čisté**. Obecněji budeme stavu systému přiřazovat nějaký statistický operátor $W = \sum_j w_j E_j$ a interpretovat jej tak, že daný systém je s pravděpodobností w_j v čistém stavu $\Phi_j \equiv E_j\mathscr{H}$. Je zřejmé, že čisté stavy jsou speciálním případem obecnější definice a odpovídají situaci, kdy některé w_j je rovno jedné. Ostatním stavům, pro něž jsou všechna $w_j < 1$, říkáme **smíšené**. Pro takto zobecněnou definici stavu můžeme postulát (q1-b) z § 15.1 zobecnit následujícím způsobem:

(q1-b) každému stavu odpovídá nějaký statistický operátor (matice hustoty) W na stavovém prostoru $\mathscr{H}$.

Odtud a ze zavedení smíšeného stavu vyplývá:

(q2-b) pravděpodobnost toho, že na systému ve stavu W naměříme hodnotu pozorovatelné A ležící v borelovské množině $\Delta \subset \mathbb{R}$, je rovna

$$w(\Delta, A; W) = \mathrm{Tr}(E_A(\Delta) W), \tag{2}$$

proto tímto předpokladem nahradíme v následujícím postulát (q2-b) z § 15.1.

Je zřejmé, že je-li W čistý stav, tj. $W = E_\varphi$, kde E_φ je projektor generovaný jednotkovým vektorem φ, je $\mathrm{Tr}\, E_A(\Delta) W = (\varphi, E_A(\Delta)\varphi) = \|E_A(\Delta)\varphi\|^2$ a vztah (2) přechází v relaci (15.1.3).

Smíšené stavy mají velký praktický význam. Víme, že pravděpodobnostní předpovědi kvantové teorie lze ověřovat jedině tím, že příslušné měření provedeme na velkém počtu identických kopií daného systému. Ve skutečném experimentu je ovšem obvykle technicky nemožné dosáhnout toho, aby všechny prvky takového souboru byly v daném čistém stavu; často však jako důsledek předcházející přípravy víme, že jednotlivé exempláře jsou v některých stavech ze známé množiny a známe též pravděpodobnosti, se kterými se v těchto stavech nacházejí. Potom je užitečné předpokládat, že jsou všechny v tomtéž smíšeném stavu popsaném vhodným statistickým operátorem.

15.3.3 Příklad (*polarizační matice hustoty*): Najdeme obecný tvar statistického operátoru na prostoru $\mathscr{H}_s = \mathbb{C}^2$. Libovolný hermitovský operátor na $\mathscr{H}_s$ lze reprezentovat jako reálnou lineární kombinaci matic $I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Z podmínky $\mathrm{Tr}\, W = 1$ plyne

$$W = \frac{1}{2}(I + \xi \,.\, \sigma), \tag{3}$$

kde $\xi \,.\, \sigma = \sum_{j=1}^{3} \xi_j \sigma_j$, $\xi_j \in \mathbb{R}$, neboť $\mathrm{Tr}\, \sigma_j = 0$. Dále musí být operátor W pozitivní. Jeho vlastní hodnoty najdeme snadno, $w^{(\pm)} = \frac{1}{2}(1 \pm |\xi|)$, kde $|\xi| = (\sum_{j=1}^{3} \xi_j^2)^{1/2}$; to znamená, že *$W$ je statistický operátor právě tehdy, když $|\xi| \leqq 1$.* Najdeme dále střední hodnotu výsledků měření j-té složky spinu. Jednoduchým výpočtem zjistíme, že

$$\langle S_j \rangle_W = \mathrm{Tr}\,(W S_j) = \frac{1}{2}\xi_j\,. \tag{4}$$

Vektor ξ, obvykle nazývaný *polarizací*, má tudíž význam dvojnásobku střední hodnoty spinu. Maticí hustoty W lze popisovat např. spinový stav elektronů v určitém souboru, třeba svazku produkovaném urychlovačem. Je-li $|\xi| = 1$, platí $W^2 = W$, tj. stav W je čistý (cvičení 11). Opačným extrémem je případ, kdy $\xi = 0$; potom $W = \frac{1}{2}I$ a všechny výsledky spinových měření jsou stejně pravděpodobné. Takováto matice hustoty popisuje spinové stavy elektronů v nepolarizovaném svazku.

Vraťme se nyní k postulátům, které jsme zformulovali výše. Abychom je mohli přijmout, musíme se přesvědčit, že vztah (2) skutečně zadává pravděpodobnostní míru na $\mathscr{B}$. Současně bychom rádi odvodili vyjádření pro střední hodnoty, jež by bylo zobecněním vztahu (15.1.4) pro případ smíšených stavů, podobně jako jsme to udělali v předcházejícím příkladu. To je obsahem následující věty.

15.3.4 Věta: Nechť A je samosdružený a W je statistický operátor na $\mathscr{H}$.
(a) Zobrazení $w(., A; W)$ definované vztahem (2) na σ-algebře $\mathscr{B}$ je pravděpodobnostní míra, která je totožná s Lebesgue-Stieltjesovou mírou $\mu_W^{(A)}$ generovanou funkcí

$$\lambda \mapsto f_W^{(A)}(\lambda) := \mathrm{Tr}(E_\lambda^{(A)} W) . \tag{5}$$

(b) Pro střední hodnotu výsledků měření pozorovatelné A platí

$$\langle A \rangle_W \equiv \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\mu_W^{(A)}(\lambda) = \mathrm{Tr}(AW) = \mathrm{Tr}(\overline{WA}) , \tag{6a}$$

pokud pravá strana má smysl, tj. pokud $AW \in \mathscr{J}_1$.

15.3.5 Poznámka: Integrály podle uvedené míry se často pro názornost zapisují tak, že místo $d\mu_W^{(A)}$ píšeme $d\,\mathrm{Tr}(E_\lambda^{(A)} W)$; jako příklad uveďme integrální vyjádření střední hodnoty (6a),

$$\langle A \rangle_W = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\,\mathrm{Tr}(E_\lambda^{(A)} W) , \tag{7}$$

jež plyne z tvrzení (a). Pravá strana této rovnosti může existovat i v některých případech, kdy $\mathrm{Tr}(AW)$ nemá smysl. Je-li např. $W = E_\psi$, pak $\mathrm{Tr}(AW) = (\psi, A\psi)$ existuje pro $\psi \in D(A)$, kdežto pro existenci integrálu v (7) stačí $\psi \in D(|A|^{1/2})$.

Důkaz: (a) Podle věty 6.4.2 je $E_A(\Delta) W \in \mathscr{J}_1$, takže pravá strana vztahu (2) má smysl. Spektrální rozklad operátoru W má tvar

$$W = \sum_{j=1}^{\dim \mathscr{H}} w_j E_j \equiv \sum_j w_j E_j , \tag{8}$$

kde E_j jsou jednorozměrné projektory odpovídající jednotkovým vlastním vektorům φ_j operátoru W, přičemž $W\varphi_j = w_j \varphi_j$, $j = 1, 2, \ldots$. Pro množinovou funkci $w(., A; W)$ definovanou vztahem (2) pak platí

$$w(\Delta, A; W) \equiv w(\Delta) = \sum_j w_j \mu_j(\Delta) \leqq 1 , \qquad \Delta \in \mathscr{B} \tag{9}$$

kde μ_j je pravděpodobnostní míra odpovídající čistému stavu φ_j, tj. $\mu_j(\Delta) = (\varphi_j, E_A(\Delta)\varphi_j)$. Z vlastností těchto měr ihned plyne, že $w(\emptyset) = 0$

a $w(\mathbb{R}) = 1$. Zbývá ověřit σ-aditivitu. Vezměme disjunktní sjednocení borelovských množin $\Delta = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k$; formule (9) dává

$$w(\Delta) = \sum_j w_j \mu_j\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k\Big) = \sum_j w_j\Big(\sum_k \mu_j(\Delta_k)\Big).$$

Na pravé straně je konvergentní dvojnásobná řada s nezápornými členy, proto můžeme zaměnit pořadí sčítání (viz např. [[Fi]], § XI.5). Pomocí (8) pak dostáváme

$$w(\Delta) = \sum_k\Big(\sum_j w_j \mu_j(\Delta_k)\Big) = \sum_k w(\Delta_k).$$

Tím jsme ověřili, že vztah (2) definuje pravděpodobnostní míru na $\mathscr{B}$. K dokončení důkazu tvrzení (a) nejprve ověříme, že funkce (5), která je zjevně neklesající a omezená, je zprava spojitá. Pro libovolná reálná λ a μ, $\mu > \lambda$, platí

$$f_W^{(A)}(\mu) - f_W^{(A)}(\lambda) = \sum_j w_j(\varphi_j, [E_\mu^{(A)} - E_\lambda^{(A)}]\,\varphi_j).$$

Řada vpravo má konvergentní majorantu $\sum_j w_j$ nezávislou na μ, takže můžeme provést limitu $\mu \to \lambda^+$ po členech; z vlastností projektorové míry pak plyne $\lim_{\mu \to \lambda^+} f_W^{(A)}(\mu) = f_W^{(A)}(\lambda)$. Ze vztahů (2), (5) a (A.4.13) dále zjistíme, že $\mu_W^{(A)}(J) = w(J)$ pro každý interval $J \subset \mathbb{R}$. Podle důsledku A.4.7 potom platí $\mu_W^{(A)}(\Delta) = w(\Delta)$ pro každou borelovskou množinu $\Delta \subset \mathbb{R}$, což jsme potřebovali dokázat.

(b) Operátor A je samosdružený a W hermitovský, takže $(WA)^* = A^*W^* = AW$. Jelikož $\mathscr{J}_1$ je $*$-ideál v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, patří $\overline{WA} = (WA)^{**}$ do $\mathscr{J}_1$ a $\operatorname{Tr}(\overline{WA}) = \overline{\operatorname{Tr}(WA)^*} = \overline{\operatorname{Tr}(AW)}$. Dále užijeme rozkladu (8). Operátor $AW \in \mathscr{J}_1$ je definovaný na celém $\mathscr{H}$, takže $\varphi_j \in D(A)$ pokud $w_j > 0$. Veličina

$$\operatorname{Tr}(AW) = \sum_j (\varphi_j, AW\varphi_j) = \sum_{\{j:\, w_j > 0\}} w_j(\varphi_j, A\varphi_j)$$

je reálná; tím je dokázána druhá rovnost v (6a).

K ověření první rovnosti stačí zřejmě ukázat, že z podmínky $AW \in \mathscr{J}_1$ plyne existence integrálů $\int_{\mathbb{R}^\pm} \mathrm{id}\, d\mu_W^{(A)}$ a rovnost

$$\pm \int_{\mathbb{R}^\pm} \mathrm{id}\, d\mu_W^{(A)} = \int_{\mathbb{R}^\pm} |x|\, d\mu_W^{(A)}(x) = \pm \operatorname{Tr}(E_A(\mathbb{R}^\pm) AW). \tag{10}$$

Nechť $\{s_n\}$ je neklesající posloupnost nezáporných jednoduchých funkcí na $\mathbb{R}^+$ splňující vztahy $\lim_{n \to \infty} s_n(x) = x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^+$ a

$$\int_{\mathbb{R}^+} \mathrm{id}\, \mathrm{d}\mu_W^{(A)} = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^+} s_n \, \mathrm{d}\mu_W^{(A)}$$

(viz poznámku (b) k větě A.6.4). Pro jednoduchou funkci $s \equiv \sum_j c_j \chi_{\Delta_j}$ z tvrzení (a), formulí (9.3.2b) a (8) plyne

$$\int_{\mathbb{R}^+} s \, d\mu_W^{(A)} = \sum_j c_j \operatorname{Tr}(E_A(\Delta_j)W) = \operatorname{Tr}(s(A)W) = \sum_j w_j(\varphi_j, s(A)\varphi_j)\,,$$

takže

$$\int_{\mathbb{R}^+} \mathrm{id}\, \mathrm{d}\mu_W^{(A)} = \lim_{n\to\infty} \sum_j w_j(\varphi_j, s_n(A)\varphi_j)\,. \tag{11}$$

Víme, že pro $w_j \neq 0$ patří φ_j do $D(A)$, což implikuje existenci integrálu $\int_{\mathbb{R}^+} \mathrm{id}\, \mathrm{d}\mu_j = (\varphi_j, E_A(\mathbb{R}^+)A\varphi_j)$, přičemž z nerovnosti $s_n \leqq \mathrm{id}$ plyne pro všechna n a j:

$$(\varphi_j, E_A(\mathbb{R}^+)A\varphi_j) \geqq (\varphi_j, s_n(A)\varphi_j) = \int_{\mathbb{R}^+} s_n \, \mathrm{d}\mu_j\,. \tag{12}$$

Podle Leviho věty platí $\lim_{n\to\infty} (\varphi_j, s_n(A)\varphi_j) = (\varphi_j, E_A(\mathbb{R}^+)A\varphi_j)$ a současně ze vztahu (12) vidíme, že nekonečná řada na pravé straně (11) má konvergentní majorantu nezávislou na n. Limitní přechod můžeme proto opět provést po členech, čímž získáme vztah (10) pro horní znaménko; pro dolní znaménko je postup stejný. ■

Z postulátu (q3) vyplývá jednoduše, v jakém stavu se nachází systém po měření, byl-li předtím ve stavu W. Výsledky zformulujeme opět pro ano-ne experiment $E_A(\Delta)$; k jeho obecnější podobě se vrátíme v § 15.5:

(q3) nechť systém před měřením je ve stavu W. Je-li výsledek experimentu kladný (naměřená hodnota veličiny A leží v množině Δ), pak stav systému po měření je popsán statistickým operátorem

$$W' = \frac{E_A(\Delta)WE_A(\Delta)}{\operatorname{Tr}(E_A(\Delta)W)}\,.$$

O stavu W' můžeme mluvit pouze tehdy, je-li pravděpodobnost $w(\Delta, A; W)$ nenulová; v tomto případě má definiční výraz smysl a W' je opět statistický operátor (cvičení 12). Také důsledek předpokladu (q3), který jsme uvedli v § 15.1, zůstává v platnosti: při bezprostředně následujícím opakování ano-ne experimentu $E_A(\Delta)$ dostaneme s jistotou týž výsledek jako při prvním měření.

15.4 SUPERSELEKČNÍ PRAVIDLA

Postulát (q1-b) neříká nic o tom, zda každému paprsku ve stavovém prostoru $\mathscr{H}$ odpovídá nějaký stav systému. Podobně se můžeme ptát, zda každému samosdruženému operátoru na $\mathscr{H}$ odpovídá nějaká pozorovatelná. Odpověď je v obou případech obecně záporná:

15.4.1 Příklad: Proton a neutron lze chápat jako dva izotopické stavy jediné částice – nukleonu. Stavovým prostorem je v tomto případě $\mathscr{H}_{\rm i} = \mathbb{C}^2$. Budeme-li pro jednoduchost předpokládat, že elementární náboj $e = 1$, pak operátor náboje na $\mathscr{H}_{\rm i}$ je reprezentován maticí $Q = \frac{1}{2}(\sigma_3 + I)$, přičemž vlastní vektory $\psi_{\rm p}$: $Q\psi_{\rm p} = \psi_{\rm p}$, resp. $\psi_{\rm n}$: $Q\psi_{\rm n} = 0$ popisují protonový, resp. neutronový stav nukleonu.

Až potud je popis izospinových stavů podobný příkladu 15.1.3. Mezi oběma případy však existuje podstatný rozdíl: z experimentální zkušenosti víme, že

(a) žádný stav není superpozicí neutronového a protonového stavu nukleonu, neboli jinými slovy vektoru $\psi = \alpha\psi_{\rm p} + \beta\psi_{\rm n}$ pro nenulová α, β neodpovídá žádný realizovatelný stav nukleonu,

(b) libovolná pozorovatelná A komutuje s operátorem $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, a lze ji tedy vyjádřit ve tvaru $A = \lambda_+ E_3^{(+)} + \lambda_- E_3^{(-)}$, kde $E_3^{(+)} = I - E_3^{(-)} = Q$.

Druhé tvrzení je přitom důsledkem prvního. Kdyby existovala pozorovatelná $B = \mu_1 E_1 + \mu_2 E_2$ nekomutující s Q, potom s Q nemohou komutovat ani jednorozměrné spektrální projektory E_j. Po měření pozorovatelné B by se nukleon podle postulátu (q3) ocitl ve stavu popisovaném jedním z vlastních vektorů operátoru B; ty ale neleží v podprostorech $E_3^{(\pm)}\mathscr{H}_{\rm i}$.

Uvažujeme nyní obecný kvantový systém se stavovým prostorem $\mathscr{H}$. Z příkladu je vidět, že v $\mathscr{H}$ mohou existovat jednotkové vektory, jimž neodpovídá žádný stav systému. Označíme symbolem F množinu těch vektorů, jimž stavy odpovídají. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že F je totální v $\mathscr{H}$. To plyne z postulátu (q3), podle nějž pro libovolnou pozorovatelnou A a množinu $\Delta \in \mathscr{B}$ je $E_A(\Delta)F \subset F$, a tedy také $E_A(\Delta)\mathscr{H}_F \subset \mathscr{H}_F$, kde $\mathscr{H}_F := \overline{F_{\rm lin}}$. Nechť E_F je projektor na podprostor $\mathscr{H}_F$; pro každé $\psi \in \mathscr{H}$ patří vektor $E_A(\Delta)E_F\psi$ do $\mathscr{H}_F$, tj. $E_A(\Delta)E_F\psi = E_F E_A(\Delta)E_F\psi$. Odtud dostáváme $E_A(\Delta)E_F = E_F E_A(\Delta)$ a z věty 10.3.2b pak plyne, že pozorovatelná A je redukována podprostorem $\mathscr{H}_F$. Z postulátu (q2-b) je zřejmé, že o části operátoru A v $\mathscr{H}_F^\perp$ nemůžeme experimentálně nic zjistit, protože všechny vektory odpovídající realizovatelným stavům leží v $\mathscr{H}_F$. Budeme-li tedy předpokládat, že F je totální množina, tj. že $\mathscr{H} = \mathscr{H}_F$, neztrácíme žádnou informaci o systému.

Podmožinu $M \subset F$ nazveme **koherentní**, pokud neexistují neprázdné ortogonální množiny M_1, M_2 takové, že $M = M_1 \cup M_2$; jestliže navíc M není podmnožinou žádné jiné koherentní množiny, říkáme, že M je **maximální koherentní**

 množina. Podprostor $\overline{M_{\text{lin}}}$ generovaný maximální koherentní množinou M nazveme **koherentním podprostorem.**

15.4.2 Tvrzení: Ve stavovém Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ existuje systém navzájem ortogonálních koherentních podprostorů $\{\mathscr{H}_\alpha : \alpha \in J\}$ takový, že

$$\mathscr{H} = \sum_{\alpha \in J}^{\oplus} \mathscr{H}_\alpha . \tag{1}$$

Důkaz: Vzhledem k tomu, že množina F je podle předpokladu totální, stačí najít rozklad $F = \bigcup_{\alpha \in J} F_\alpha$, kde $\{F_\alpha\}$ je systém navzájem ortogonálních maximálních koherentních množin. Formule (1) pak platí pro $\mathscr{H}_\alpha := \overline{(F_\alpha)_{\text{lin}}}$; to plyne z inkluzí $F \subset \sum_{\alpha \in J}^{\oplus} \mathscr{H}_\alpha \subset \mathscr{H}$ a podmínky $F^\perp = \{0\}$.

K získání uvedeného rozkladu zavedeme na F následující relaci ekvivalence: $\varphi \sim \psi$, pokud existuje koherentní množina $M \subset F$, jež vektory φ a ψ obsahuje. Reflexivita a symetričnost této relace jsou zřejmé, stačí tedy ověřit tranzitivitu. Je-li $\varphi \sim \psi$ a $\psi \sim \chi$, existují koherentní množiny M_1, M_2 takové, že $\varphi, \psi \in M_1$ a $\psi, \chi \in M_2$. Kdyby $M := M_1 \cup M_2$ nebyla koherentní, mohli bychom ji vyjádřit jako sjednocení neprázdných ortogonálních množin N_1, N_2. Předpokládejme např. $\psi \in N_1$, takže $M_1 \cap N_1$ je neprázdná. Současně je ortogonální k $M_1 \cap N_2$, a protože $M_1 = (M_1 \cap N_1) \cup (M_1 \cap N_2)$ je koherentní, musí být $M_1 \cap N_2 = \emptyset$. Koherence množiny M_2 podobně implikuje $M_2 \cap N_2 = \emptyset$, takže celkem $N_2 = (M_1 \cap N_2) \cup (M_2 \cap N_2) = \emptyset$, proto platí $\varphi \sim \chi$. Množinu tříd ekvivalence označíme $\{F_\alpha : \alpha \in J\}$.

Ukážeme, že množiny F_α jsou navzájem ortogonální. Jsou-li vektory $\varphi, \psi \in F$ neortogonální, je dvoubodová množina $\{\varphi, \psi\}$ koherentní, tj. $\varphi \sim \psi$. Patří-li tedy vektory φ, ψ do různých tříd ekvivalence, musí být ortogonální. Ověříme dále, že F_α jsou vesměs maximální koherentní množiny. Předpokládejme, že existují neprázdné množiny G_α, $\tilde{G}_\alpha$ takové, že $G_\alpha \perp \tilde{G}_\alpha$, $F_\alpha = G_\alpha \cup \tilde{G}_\alpha$, a nechť $\varphi \in G_\alpha$, $\tilde{\varphi} \in \tilde{G}_\alpha$. Jelikož $\varphi \sim \tilde{\varphi}$, musí existovat koherentní množina M, která oba tyto vektory obsahuje; to je však ve sporu s rozkladem $M = M \cap F = [\bigcup_{\beta \neq \alpha} (M \cap F_\beta)] \cup (M \cap G_\alpha) \cup (M \cap \tilde{G}_\alpha)$, v němž všechny množiny jsou vzájemně ortogonální a alespoň poslední dvě jsou neprázdné. Každá množina F_α je tedy koherentní. Nechť dále $N \supset F_\alpha$ je koherentní množina; potom $N = N_\alpha \cup F_\alpha$, kde $N_\alpha := \bigcup_{\beta \neq \alpha} (N \cap F_\beta)$. Z ortogonality systému $\{F_\alpha : \alpha \in J\}$ plyne $N_\alpha \perp F_\alpha$, a protože N je koherentní, musí $N_\alpha = \emptyset$, tj. $N = F_\alpha$; F_α je proto maximální koherentní množina.

15.4.3 Poznámky: (a) Jestliže $\mathscr{H}$ je separabilní, je indexová množina J nejvýše spočetná.

(b) Každý vektor $\psi \in F$ patří právě do jednoho z podprostorů $\mathscr{H}_\alpha$; jestliže tedy nějaké $\varphi \in \mathscr{H}$ má nenulové projekce alespoň do dvou podprostorů $\mathscr{H}_\alpha$, není stav φ fyzikálně realizovatelný.

Z tvrzení 2 neplyne nic o tom, které vektory uvnitř daného koherentního podprostoru odpovídají fyzikálně realizovatelným stavům. Ve shodě s experimentální zkušeností předpokládáme, že množiny F_α jsou podprostory v $\mathscr{H}$; z důvodů jednoduchosti budeme předpokládat více, totiž že množiny F_α jsou *uzavřené*,

$$\mathscr{H}_\alpha = \mathscr{H}_\alpha \cap F = F_\alpha , \qquad \alpha \in J . \tag{2}$$

K diskusi tohoto předpokladu se vrátíme v závěru paragrafu. O systému budeme říkat, že je **koherentní**, je-li jeho stavový prostor koherentní, tj. platí-li $\mathscr{H} = F$.

15.4.4 Poznámka: Zatím jsme mluvili o realizovatelných čistých stavech. Uvažujme smíšený stav popsaný statistickým operátorem W. Projektory E_j ve spektrálním rozkladu (15.3.8) odpovídají čistým stavům; má-li být tedy stav W realizovatelný, musí příslušné paprsky ležet v některém z koherentních podprostorů. Z předpokladu (2) plyne i opačné tvrzení: je-li W redukován všemi koherentními podprostory, pak každý čistý stav zastoupený ve směsi je realizovatelný. Dohromady tedy platí, že statistický operátor W popisuje realizovatelný stav systému právě tehdy, když je redukován všemi koherentními podprostory.

Symbolem $\mathscr{O}$ označíme množinu všech pozorovatelných daného systému. Důležitou podmnožinu v ní tvoří *omezené pozorovatelné* popisované hermitovskými operátory v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$; označíme ji $\mathscr{O}_{\mathrm{b}}$. Dále bude pro nás důležitá W*-algebra $\mathscr{A} := \mathscr{A}_{\mathrm{W}}(\mathscr{O}_{\mathrm{b}})$ generovaná omezenými pozorovatelnými, o níž budeme stručně mluvit jako o **algebře pozorovatelných** daného systému. Přitom musíme mít na paměti, že ne každý prvek algebry $\mathscr{A}$ odpovídá pozorovatelné.

15.4.5 Věta: Nechť pro stavový prostor $\mathscr{H}$ platí rozklad (1). Je-li splněn předpoklad (2), potom

(a) algebra pozorovatelných je redukována všemi koherentními podprostory; v případě nejvýše spočetné množiny J lze tedy psát

$$\mathscr{A} \subset \sum_{\alpha \in J}^{\oplus} \mathscr{B}(\mathscr{H}_\alpha) , \tag{3}$$

(b) je-li jedna z množin $\mathscr{O}, \mathscr{O}_{\mathrm{b}}$, resp. $\mathscr{A}$ ireducibilní, pak také ostatní jsou ireducibilní; v takovém případě je systém koherentní.

Důkaz: (a) Podle tvrzení 13.1.8 stačí k ověření tvrzení (a) dokázat, že každý projektor $E \in \mathscr{A}$ je redukován všemi projektory E_α odpovídajícími koherentním podprostorům. Předpokládejme, že existuje $E \in \mathscr{A}$ a $\alpha \in J$ takové, že E nekomutuje s E_α; potom lze zvolit jednotkový vektor $\psi \in \mathscr{H}_\alpha$ takový, že $E_\alpha E\psi$ a $(I - E_\alpha)E\psi$ jsou nenulové. Abychom toto tvrzení dokázali, předpokládejme nejprve $(I - E_\alpha)E\varphi = 0$ pro všechna $\varphi \in \mathscr{H}_\alpha$. Potom platí $(I - E_\alpha)EE_\alpha = 0$ a současně $E_\alpha E(I - E_\alpha) = ((I - E_\alpha)EE_\alpha)^* = 0$, tj. $EE_\alpha = E_\alpha EE_\alpha = E_\alpha E$; projektory E, E_α však podle předpokladu nekomutují. Existuje tedy jednotkový vektor $\psi \in \mathscr{H}_\alpha$ takový, že $(I - E_\alpha)E\psi \neq 0$. Kdyby bylo $E_\alpha E\psi = 0$, pak $(I - E_\alpha)E\psi = E\psi$, tj. $E\psi \in \mathscr{H}_\alpha^\perp$. V takovém případě by však $\|E\psi\|^2 = (\psi, E\psi) = 0$, což je ve sporu se vztahem $(I - E_\alpha)E\psi \neq 0$.

Vektoru ψ odpovídá podle předpokladu (2) realizovatelný stav a projektor E patří do algebry pozorovatelných. Pravděpodobnost kladného výsledku v ano-ne experimentu E je rovna $\|E\psi\|^2 \neq 0$; stav systému po měření je v takovém případě popsán vektorem $\psi' = E\psi/\|E\psi\|$. Tento vektor má však nenulové ortogonální projekce jak v $\mathscr{H}_\alpha$, tak i v $\mathscr{H}_\alpha^\perp$, proto mu nemůže odpovídat žádný stav systému.

(b) Dokážeme nejprve, že je-li kterákoli z množin $\mathscr{O}$, $\mathscr{O}_b$, $\mathscr{A}$ ireducibilní, jsou i zbývající dvě ireducibilní. Z výsledku cvičení 13.4 plyne $\mathscr{A} = \mathscr{O}_b''$, tj. $\mathscr{A}' = \mathscr{O}_b'$. V § 15.1 jsme řekli, že měření libovolné pozorovatelné je ekvivalentní souboru ano-ne experimentů $\mathscr{E}_A := \{E_A(\Delta) : \Delta \in \mathscr{B}\}$, takže $A \in \mathscr{O}$ je ekvivalentní $\mathscr{E}_A \subset \mathscr{O}_b$. V terminologii § 14.1 to lze vyjádřit jako rovnost $\mathscr{O}_b = \mathscr{O}_p$, takže z tvrzení 14.1.2d plyne

$$\mathscr{A}' = \mathscr{O}_b' = \mathscr{O}' \, ; \tag{4}$$

požadovaný výsledek pak dostaneme z Schurova lemmatu. Jsou-li uvedené množiny ireducibilní, platí $\mathscr{A}' = \mathbb{C}(\mathscr{H})$, a tedy $\mathscr{A} = \mathscr{A}'' = \mathscr{B}(\mathscr{H})$, což podle tvrzení (a) znamená, že systém je koherentní. ■

Závěr vyjadřovaný rovností (4) se nevztahuje jen na omezené pozorovatelné: z ekvivalence pozorovatelné A se souborem $\mathscr{E}_A$ a věty 10.3.2 plyne

15.4.6 Důsledek: Každý samosdružený operátor odpovídající nějaké pozorovatelné je redukován všemi koherentními podprostory.

Tvrzení (b) věty se hodí k praktickému zjišťování, zda daný systém je koherentní. Najdeme-li operátory reprezentujícími pozorovatelné podmnožinu, jež je ireducibilní, pak množina $\mathscr{O}$ je sama také ireducibilní a systém je koherentní.

15.4.7 Příklad (*částice na přímce*): Stačí vzít operátory souřadnice a impulsu. Množina $\{Q, P\} \subset \mathscr{O}$ je podle příkladu 14.3.8 ireducibilní, takže „jednorozměrná" částice představuje koherentní systém a $\mathscr{A} = \mathscr{B}(L^2(\mathbb{R}))$.

15.4.8 Příklad (*soustava bezspinových částic*): Vezměme nyní operátory Q_j, P_j, $j = 1, \ldots, n$, na $L^2(\mathbb{R}^n)$ – viz příklad 15.2.3 a poznámku 15.2.4b. Užijeme tvrzení věty 14.3.9, jež lze snadno zobecnit na případ n-násobného tenzorového součinu. Z definice operátorů Q_j, P_j a toho, že množina $\{Q, P\}$ je ireducibilní v $L^2(\mathbb{R})$, plyne, že *množina* $\{Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_n\}$ *je ireducibilní v* $L^2(\mathbb{R}^n)$. Odpovídající systém, např. soustava N bezspinových částic pro $n = 3N$, je tedy koherentní a $\mathscr{A} = \mathscr{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$.

Omezení na množinu přípustných stavů, jež pro nekoherentní systémy představuje rozklad (1), se říká **superselekční pravidla**. Zpravidla je zadáváme pomocí konkrétních pozorovatelných, o nichž se někdy mluví jako o *superselekčních operátorech.* Takovou pozorovatelnou je třeba elektrický náboj, jak jsme připomněli v příkladu 1; jinými příklady jsou baryonové číslo a celočíselnost, resp. poločíselnost spinu. Superselekční operátory jsou obvykle tvaru

$$A = \sum_{\alpha \in J} \lambda_\alpha E_\alpha \,, \tag{5}$$

tj. mají čistě bodové spektrum a odpovídající vlastní podprostory jsou koherentní podprostory $\mathscr{H}_\alpha$. Všechny takovéto operátory vzájemně komutují; o této skutečnosti se zpravidla mluví jako o *komutativitě superselekčních pravidel.*

Vraťme se nyní k předpokladu (2) o uzavřenosti množiny stavů. Chceme-li jej přijmout, musíme se vyrovnat se skutečností, že pro některé stavy nemusí mít smysl střední hodnoty důležitých pozorovatelných, jako je např. energie.

Střední hodnota energie existuje např. pro všechny čisté stavy dovolené superselekčními pravidly, jež jsou reprezentovány vektory z $D(H)$ a obecněji pro stavy W, pro který integrál $\int_{\mathbb{R}} |\lambda| \, \mathrm{d}\, \mathrm{Tr}(E_\lambda^{(H)} W)$ konverguje (viz poznámku 15.3.5).

Mohli bychom tedy nahradit (2) předpokladem, že fyzikálně realizovatelným (čistým) stavům odpovídá hustá podmnožina $F_\alpha = \mathscr{H}_\alpha \cap D(|H|^{1/2})$ v každém z koherentních podprostorů. V takovém případě bychom se však museli ptát, zda nemáme po „skutečných“ stavech požadovat také konečnost středních hodnot jiných význačných pozorovatelných jako souřadnic, impulsů apod. Naštěstí se ukazuje, že rozdíl mezi takovýmito předpoklady a předpokladem (2) *nemá měřitelné důsledky.* Důvodem je to, že experimentálně zjišťujeme pouze pravděpodobnosti (15.3.2), a nikoli přímo střední hodnoty; konvergence integrálů typu (15.3.7) je tedy záležitostí naší extrapolace.

15.5 KOMPATIBILITA

Jak již víme, důsledkem měření provedeného na kvantovém systému je změna stavu. Provedeme-li tedy postupně několik měření, výsledek může záviset na jejich pořadí.

V některých případech však na pořadí měření nezáleží. Budeme říkat, že pozorovatelné A_1, A_2 jsou **kompatibilní**, jestliže pro každý stav W daného systému a libovolné borelovské množiny $\Delta_1, \Delta_2 \subset \mathbb{R}$ platí

$$w(\Delta_2, A_2; \Delta_1, A_1; W) = w(\Delta_1, A_1; \Delta_2, A_2; W) \,. \tag{1a}$$

472 O pozorovatelných A_β, kde β probíhá libovolnou indexovou množinu I, říkáme, že jsou **kompatibilní**, jsou-li vzájemně kompatibilní libovolné dvě z nich.

15.5.1 Tvrzení: Pozorovatelné $\{A_\beta : \beta \in I\}$ jsou kompatibilní právě tehdy, když jim odpovídající operátory tvoří komutativní množinu. Pro libovolnou konečnou podmnožinu $\{A_{\beta_1}, \dots, A_{\beta_n}\}$ platí

$$w(\Delta_n, A_{\beta_n}; \dots; \Delta_1, A_{\beta_1}; W) = w(\Delta_{\pi(n)}, A_{\beta_{\pi(n)}}; \dots; \Delta_{\pi(1)}, A_{\beta_{\pi(1)}}; W)\,, \qquad (1b)$$

kde π je jakákoli permutace množiny $\{1, \dots, n\}$. Kompatibilita je vlastnost reflexivní a symetrická, nikoli však tranzitivní.

Důkaz: Z definice komutativní operátorové množiny je zřejmé, že stačí ověřit danou ekvivalenci pro dvojici operátorů A_1, A_2. Jestliže komutují, potom komutují i projektory $E_{A_1}(\Delta_1)$, $E_{A_2}(\Delta_2)$ pro libovolné borelovské množiny $\Delta_1, \Delta_2 \subset \mathbb{R}$. Rovnost (1a) potom plyne ze cvičení 13; podobně ověříme (1b) pro libovolnou konečnou množinu komutujících samosdružených operátorů. K důkazu nutné podmínky stačí uvažovat pouze čisté stavy $W = E_\psi$. Vztah (1a) má pro ně tvar

$$(\psi, EE'E\psi) = (\psi, E'EE'\psi)\,, \qquad (2)$$

kde pro stručnost píšeme $E = E_{A_1}(\Delta_1)$, $E' = E_{A_2}(\Delta_2)$. Rovnost (2) platí podle předpokladu pro všechny fyzikálně realizovatelné stavy, tj. pro každý vektor ležící v některém z koherentních podprostorů $E_\alpha\mathscr{H}$. Projektory E, E' komutují podle věty 15.4.5 se všemi E_α, a totéž platí pro operátor $C = EE'E - E'EE'$. Rovnost (2) tedy znamená $(E_\alpha\varphi, CE_\alpha\varphi) = (\varphi, CE_\alpha\varphi) = 0$ pro všechna $\varphi \in \mathscr{H}$, odkud snadno vyvodíme $C = 0$. Označíme dále $B = EE' - E'E$, pak $C = 0$ implikuje $B^*B = 0$ a z příkladu 5.3.3 plyne $B = 0$. Z předpokladu kompatibility tedy vyplývá komutativita projektorů $E_{A_1}(\Delta_1)$, $E_{A_2}(\Delta_2)$ pro libovolné borelovské množiny $\Delta_1, \Delta_2 \subset \mathbb{R}$, tj. komutativita operátorů A_1, A_2.

Reflexivita a symetričnost jsou zřejmé ze vztahu (1a). Každá pozorovatelná je kompatibilní s triviální pozorovatelnou reprezentovanou jednotkovým operátorem. Kdyby tedy byla kompatibilita tranzitivní, musela by být algebra pozorovatelných abelovská; snadno najdeme příklad, že toto tvrzení neplatí. ■

15.5.2 Příklad: Vezměme operátory Q_j z příkladu 15.2.3. Podle příkladu 10.7.4 a lemmatu 10.8.4 tyto operátory vzájemně komutují; to znamená že *kartézské souřadnice jsou kompatibilní.* Podobné závěry můžeme učinit také pro operátory P_j: z unitární ekvivalence (15.2.12) plyne, že *kartézské složky impulsu jsou kompatibilní.* Kompatibilita odpovídajících pozorovatelných je experimentálně ověřený fakt, který nám umožňuje mluvit o měření polohy nebo impulsu dané částice; totéž platí pro souřadnice a impulsy v soustavě N částic (viz poznámku 15.2.4b). Naproti tomu kartézské souřadnice *nejsou kompatibilní* s odpovídajícími složkami impulsu, protože operátory Q_j, P_j vzájemně nekomutují. To má závažné důsledky, jimiž se budeme zabývat v příští kapitole.

Z tvrzení 9.2.6 víme, že komutujícím samosdruženým operátorům $A_1, \ldots, A_n$ můžeme přiřadit projektorovou míru E takovou, že pro libovolné borelovské množiny $\Delta_1, \ldots, \Delta_n \subset \mathbb{R}$ platí

$$E(\Delta_1 \times \ldots \times \Delta_n) = E_{A_1}(\Delta_1) \ldots E_{A_n}(\Delta_n) . \tag{3}$$

K míře E můžeme dále pro jakýkoli stav W definovat zobrazení $\mathscr{B}^{(n)} \to [0, 1]$ vztahem

$$w(\Delta, \{A_1, \ldots, A_n\}; W) := \mathrm{Tr}(E(\Delta) W) , \qquad \Delta \in \mathscr{B}^{(n)} . \tag{4}$$

Pro toto zobrazení lze snadno zobecnit část tvrzení věty 15.3.4a; stačí si uvědomit, že v příslušném důkazu jsme nikde nevyužili skutečnosti, že $E_A(.)$ je projektorová míra na $\mathbb{R}$.

15.5.3 Tvrzení: Pro libovolné kompatibilní pozorovatelné $A_1, \ldots, A_n$ a stav W je zobrazení $w(., \{A_1, \ldots, A_n\}; W)$ definované vztahem (4) pravděpodobnostní míra na $\mathbb{R}^n$.

Ptejme se nyní, jak souvisí tato míra s pravděpodobností toho, že výsledek měření pozorovatelných $A_1, \ldots, A_n$ chápaný jako n-tice čísel $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ padne do množiny $\Delta \subset \mathbb{R}^n$. Je-li Δ interval v $\mathbb{R}^n$, $\Delta = \Delta_1 \times \ldots \times \Delta_n$, pak ze vztahu (3) a cvičení 13 plyne, že hledaná pravděpodobnost je rovna $\mathrm{Tr}(E(\Delta) W)$, tj. hodnotě pravděpodobnostní míry (4). Současně víme, že jiná borelovská míra s touto vlastností neexistuje: jsou-li dvě borelovské míry shodné na intervalech v $\mathbb{R}^n$, jsou podle důsledku A.4.7 shodné pro všechna $\Delta \in \mathscr{B}^{(n)}$. Tato úvaha motivuje přirozené zobecnění postulátů potvrzené experimentální zkušeností:

(q2-b) pravděpodobnost toho, že výsledek současného měření kompatibilních pozorovatelných $A_1, \ldots, A_n$ na systému ve stavu W leží v množině $\Delta \in \mathscr{B}^{(n)}$, je rovna $\mathrm{Tr}(E(\Delta) W)$, tj. vyjadřuje se vztahem (4) chápaným jako rovnost,
(q3) stav systému po takovémto měření je (v případě kladného výsledku) popsán statistickým operátorem $W' := [\mathrm{Tr}(E(\Delta) W)]^{-1} E(\Delta) W E(\Delta)$.

Tento postulát se týká situací, kdy nelze měření redukovat na posloupnost elementárních aktů (zjišťování přítomnosti částice uvnitř kulového objemu nelze provést postupným měřením trojice souřadnic).

15.5.4 Příklad: Operátory Q_j kartézských souřadnic jsou podle předchozího příkladu kompatibilní. Míru E snadno najdeme: platí $E(\Delta) = \chi_\Delta(Q_1, Q_2, Q_3)$, kde χ_Δ je jako obvykle charakteristická funkce množiny Δ, takže pomocí příkladu 10.7.4 dostáváme

$$(E(\Delta)\psi)(\boldsymbol{x}) = \chi_\Delta(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x}) . \tag{5a}$$

Speciálně pro systém v čistém stavu ψ odtud plyne

$$w(\Delta, \{Q_1, Q_2, Q_3\}; \psi) = \int_\Delta |\psi(x)|^2 \,\mathrm{d}x \tag{5b}$$

pro libovolnou množinu $\Delta \in \mathscr{B}^{(3)}$. Tento výsledek představuje zobecnění vztahu (15.2.1); připomeňme, že sehrál historicky důležitou roli při vytváření kvantové mechaniky (statistická interpretace vlnové funkce – M. Born, P. Dirac, P. Jordan, 1926). Zobecnění vztahů (5) na případ, kdy konfiguračním prostorem je $\mathbb{R}^n$, je jednoduché.

15.5.5 Příklad (*částice se spinem*): Spinem rozumíme jednak trojici pozorovatelných S_j, $j = 1, 2, 3$, jednak číslo $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$. Za stavový prostor částice se spinem se bere $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^{2s+1})$, což obvykle vyjadřujeme vztahem

$$\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^{2s+1} \tag{6}$$

(viz (4.6.5)), přičemž prostory $\mathscr{H}_c = L^2(\mathbb{R}^3)$, resp. $\mathscr{H}_s = \mathbb{C}^{2s+1}$ se připisují konfiguračním, resp. spinovým stavům částice. Operátory S_j na $\mathscr{H}_s$ se nejčastěji zadávají pomocí ortonormální báze $\{\chi_m\}_{m=-s}^{s}$ tvořené vlastními vektory operátoru S_3:

$$\begin{aligned} (S_1 \pm \mathrm{i}S_2)\chi_m &= ((s \mp m)(s \pm m + 1))^{1/2}\chi_{m\pm 1}\,, \\ S_3\chi_m &= m\chi_m\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Snadno ověříme, že operátory S_j jsou hermitovské, a že pro ně platí

$$[S_j, S_k] = \mathrm{i}\sum_l \varepsilon_{jkl} S_l\,, \tag{8a}$$

$$S^2 \equiv S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = s(s+1)I_s\,, \tag{8b}$$

kde I_s je jednotkový operátor na $\mathscr{H}_s$. Jejich spektra jsou totožná, $\sigma(S_j) = \{-s, -s+1, \ldots, s\}$. Dynamické proměnné jako jsou poloha, impuls, spin apod. ovšem připisujeme částici jako celku, proto jim musí odpovídat operátory na stavovém prostoru $\mathscr{H}$. Tyto operátory mají tvar

$$\tilde{Q}_j = \overline{Q_j \otimes I_s}\,, \qquad \tilde{P}_j = \overline{P_j \otimes I_s}\,, \qquad \tilde{S}_j = I_c \otimes S_j\,, \tag{9a}$$

kde $j = 1, 2, 3$ a I_c je jednotkový operátor na $\mathscr{H}_c$.

Potřebné vlastnosti operátorů (9a) získáme jednoduše z věty 10.8.2 a lemmatu 10.8.4. Všechny jsou samosdružené a pro jejich spektra platí

$$\sigma(\tilde{Q}_j) = \sigma(\tilde{P}_j) = \mathbb{R}\,, \qquad \sigma(\tilde{S}_j) = \{-s, -s+1, \ldots, s\}\,. \tag{9b}$$

Vzhledem k (8a) žádné dva z operátorů $\tilde{S}_j$ spolu nekomutují, ale každý z nich komutuje s operátory $\tilde{Q}_k$, resp. $\tilde{P}_k$, $k = 1, 2, 3$. Z komutativity operátorů Q_j, Q_k plyne, že operátory $\tilde{Q}_j$, $j = 1, 2, 3$, vzájemně komutují; stejný závěr je možno učinit pro $\tilde{P}_j$, $j = 1, 2, 3$. Za množinu kompatibilních pozorovatelných tedy můžeme brát jednu ze složek spinu (nebo jednu jejich reálnou lineární kombinaci) spolu se souřadnicemi, resp. složkami impulsu. Nejčastěji se pracuje s množinami

$$\mathscr{S}_{qs} := \{\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \tilde{Q}_3, \tilde{S}_3\}, \qquad \mathscr{S}_{ps} := \{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \tilde{S}_3\}. \tag{10}$$

Povšimněme si, že platí $\tilde{S}^2 \equiv I_c \otimes S^2 = s(s+1)I$. Setkáváme se tak s příkladem konkrétní pozorovatelné, jež je reprezentována násobkem jednotkového operátoru. Výsledkem měření může být v tomto případě pouze hodnota $s(s+1)$; to nám dává právo mluvit o částici se spinem s.

15.5.6 Poznámka: Nebudeme-li chtít v dalším zdůrazňovat vztah k operátorům na $\mathscr{H}_c$, resp. $\mathscr{H}_s$, budeme i pro operátory na $\mathscr{H}$ užívat písmen Q_j, P_j, S_j apod.

15.5.7 Příklad: Vraťme se nyní k otázce, jak se při měření mění stav systému. Předpokládejme, že na systému (ve stavu W) jsme uskutečnili n-tici kompatibilních ano-ne experimentů $E = \{E_1, \ldots, E_n\}$; výsledkem měření je tedy uspořádaná n-tice $r = \{r_1, \ldots, r_n\}$, kde čísla r_j nabývají hodnot 0,1. Abychom mohli vyjádřit pravděpodobnosti $w(r) \equiv w(r, E; W)$, zavedeme projektory

$$E(r) := \prod_{j=1}^{n} (E_j \delta_{1r_j} + (I - E_j)\delta_{0r_j}). \tag{11a}$$

Zjevně platí $E(r)E(r') = 0$ pro $r \neq r'$, a dále

$$\sum_{r \in M} E(r) = I, \tag{11b}$$

kde se sčítá přes množinu M všech 2^n různých n-tic r. Zatím nejde o nic jiného než o speciální případ konstrukce míry (3); jejím nosičem je zde množina M. Pro hledanou pravděpodobnost platí $w(r) = \mathrm{Tr}(E(r)W)$ a stav po měření je popsán statistickým operátorem $E(r)WE(r)/w(r)$.

Předpokládejme nyní, že z výsledku měření jsme zaregistrovali jenom část, tj. že nerozlišujeme stavy z podmnožiny $M_{reg} \subset M$. Příklady:
(i) zaregistrujeme jenom výsledek $\tilde{r}_1$ experimentu E_1, pak $M_{reg} = \{r\colon r_1 = \tilde{r}_1\}$,
(ii) pokud jsme si zapamatovali, že výsledek obsahoval k jedniček, pak $M_{reg} = \{r\colon r_1 + \ldots + r_n = k\}$,
(iii) pokud jsme výsledek zaregistrovali úplně, pak M_{reg} sestává z jediné n-tice. Jestliže jsme naopak nezaregistrovali nic, platí $M_{reg} = M$.
Stav systému po takovém měření je směsí stavů $E(r)WE(r)/w(r)$ pro všechna $r \in M_{reg}$ s vahami $w(r)$, tj.

$$W' = N \sum_{r \in M_{\text{reg}}} E(r) W E(r)\,, \tag{12a}$$

kde normalizační faktor je dán vztahem $N^{-1} = \sum_{r \in M_{\text{reg}}} w(r) = \mathrm{Tr}(E(M_{\text{reg}})W)$; z ortogonality projektorů $E(r)$ plyne, že $E(M_{\text{reg}}) := \sum_{r \in M_{\text{reg}}} E(r)$ je projektor. Speciálně po měření, v němž nezaregistrujeme nic, je stav popsán operátorem $W'_M := \sum_{r \in M} E(r) W E(r)$. Snadno se přesvědčíme, že platí

$$W' = \frac{E(M_{\text{reg}}) W'_M E(M_{\text{reg}})}{\mathrm{Tr}(E(M_{\text{reg}}) W'_M)}\,. \tag{12b}$$

To znamená, že uvažované měření můžeme také chápat jako složené ze dvou operací: nejprve necháme systém projít měřicím přístrojem, aniž bychom zaregistrovali výsledky, a poté provedeme ano-ne experiment $E(M_{\text{reg}})$. Poznamenejme ještě, že získané závěry se zjednoduší, jsou-li ano-ne experimenty $E_1, \dots, E_n$ disjunktní (cvičení 15–17).

Důležitou vlastností kompatibilních pozorovatelných je to, že mezi nimi lze zavádět funkcionální vztahy. Podívejme se na tuto záležitost podrobněji. V klasické fyzice je význam funkcionální závislosti mezi dynamickými proměnnými jasný: vztah $b = f(a_1, \dots, a_n)$ znamená, že nabývají-li veličiny a_j hodnot $\tilde{a}_j$, nabývá b hodnoty $f(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n)$.

V kvantové teorii máme ovšem právo mluvit pouze o pravděpodobnostech výsledků měření. Zformulujeme proto definici následovně: nechť $a_1, \dots, a_n$ jsou kompatibilní pozorovatelné a f je reálná borelovská funkce na $\mathbb{R}^n$; potom pozorovatelná $b = f(a_1, \dots, a_n)$, jestliže platí

$$\mathrm{w}(\Delta, B; W) = w(f^{(-1)}(\Delta), \{A_1, \dots, A_n\}; W) \tag{13}$$

pro každý stav W a libovolnou borelovskou množinu $\Delta \subset \mathbb{R}$; přitom $B, A_1, \dots, A_n$ jsou samosdružené operátory odpovídající daným pozorovatelným. Operátor $A := f(A_1, \dots, A_n)$ je podle definice uvedené v § 10.7 a pravidel funkcionálního počtu samosdružený; ukážeme, že platí $B = A$. Z předpokladu (13) plyne

$$(\psi, E_B(\Delta)\psi) = (\psi, E(f^{(-1)}(\Delta))\psi)$$

pro každý realizovatelný čistý stav Ψ, kde E je projektorová míra odpovídající operátorům $A_1, \dots, A_n$. Oba projektory jsou redukovány všemi koherentními podprostory; odtud snadno plyne $E_B(\Delta) = E(f^{(-1)}(\Delta))$ pro všechna $\Delta \in \mathscr{B}$. Na druhé straně podle poznámky 9.4.13 je $E_A(J) = E(f^{(-1)}(J))$, tj. $E_A(J) = E_B(J)$ pro každý interval $J \subset \mathbb{R}$. Oba operátory mají tedy stejné spektrální rozklady, proto jsou totožné. Dokázali jsme tak, že funkcionální vztah mezi pozorovatelnými definovaný rovností (13) je vyjádřen stejnou funkční závislostí mezi odpovídajícími samosdruženými operátory. Proto budeme nadále opět značit pozorovatelné a jim odpovídající operátory týmiž symboly.

Podle formule (10.7.6b) patří operátor A do $\{A_1, \ldots, A_n\}''_{ex}$, proto komutuje se všemi projektory $E_{A_k}(\Delta)$, a tedy také s operátory $A_1, \ldots, A_n$. Je-li f spojitá, pak možné výsledky měření pozorovatelné A, tj. spektrum $\sigma(A)$ lze vyjádřit pomocí tvrzení 10.7.6. Shrneme získané závěry.

15.5.8 Tvrzení: Nechť $A_1, \ldots, A_n$ jsou kompatibilní pozorovatelné a $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je borelovská funkce. Pozorovatelná $A := f(A_1, \ldots, A_n)$ je kompatibilní s $A_1, \ldots, A_n$. Je-li funkce f spojitá, platí

$$\sigma(A) = \overline{f(\sigma(A_1) \times \ldots \times \sigma(A_n))}\,. \tag{14}$$

15.5.9 Poznámky: (a) Výše uvedenou úvahu lze obrátit. Máme-li pozorovatelné reprezentované komutujícími operátory $A_1, \ldots, A_n$, potom vztah $B = f(A_1, \ldots, A_n)$ definuje novou pozorovatelnou, která splňuje požadavek (13). Její interpretace je snadná: budeme ji měřit stejným přístrojem, jímž provádíme společné měření pozorovatelných $A_1, \ldots, A_n$, ale změníme škálu: bod λ na ní bude odpovídat hodnotám z $f^{(-1)}(\lambda)$ při původním měření.

(b) V praxi se často mezi měřitelnými veličinami objevují i takové, jejichž „hodnoty“ jsou komplexní čísla; příkladem může být rozptylový operátor (viz § 20.1). Zpravidla jsou takové veličiny reprezentovány funkcemi nějakého samosdruženého operátoru, resp. komutujících samosdružených operátorů. V takovém případě nevznikají žádné problémy: jediný rozdíl oproti situaci popsané v předchozí poznámce je v tom, že stupnici nyní přecejchujeme pomocí komplexních čísel. Vzhledem k různým technickým zjednodušením, která to může přinést, budeme v případě potřeby za *pozorovatelné v širším smyslu* považovat také všechny komplexní borelovské funkce „reálných“ kompatibilních pozorovatelných; podle (10.7.1b) a věty 9.4.10 jim odpovídají normální operátory.

15.5.10 Příklad: Kartézské složky impulsu jsou podle příkladu 2 kompatibilní. Kinetické energii bezspinové částice přiřadíme operátor

$$T := \frac{1}{2m}\,\varphi(P_1, P_2, P_3)\,, \quad \varphi(t_1, t_2, t_3) = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2\,. \tag{15}$$

Je-li uvažovaná částice volná, odpovídá operátor T celkové energii; z tohoto důvodu se někdy značí H_0. Jakožto reálná funkce komutujících samosdružených operátorů je operátor T samosdružený; ve vztahu (14) plyne $\sigma(T) = \mathbb{R}^+$. Užitím unitární ekvivalence (15.2.12) se dále snadno přesvědčíme, že platí

$$T = F_3^{-1} T_h F_3\,. \tag{16a}$$

kde T_h je operátor násobení funkcí $\boldsymbol{x} \mapsto h(\boldsymbol{x}) := (2m)^{-1}\boldsymbol{x}^2$. Odtud dostáváme vyjádření pro definiční obor operátoru T:

$$D(T) = F_3^{-1}D_h\,, \quad \text{kde} \quad D_h := \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}^3) : \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{x}^4 |\psi(\boldsymbol{x})|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} < \infty \right\}. \tag{16b}$$

Operátor T se nejčastěji vyjadřuje pomocí Laplaceova operátoru Δ: z rovnosti (5.2.14) a inkluze $P_j\mathscr{S}(\mathbb{R}^3) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ pro všechna $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ plyne

$$(T\psi)(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2m}(\Delta\psi)(\boldsymbol{x}) \equiv -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{x})}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{x})}{\partial x_3^2}\right). \tag{17}$$

Tato rovnost platí i pro některé další vektory z $D(T)$. Důležité je, že operátor $-(2m)^{-1}\Delta$ s definičním oborem $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ je v podstatě samosdružený (cvičení 18).

Poznamenejme, že vedle operátoru T můžeme definovat operátor $T' := = (1/2m)(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2)$ jako součet kvadrátů tří operátorů s definičním oborem $D(T') = D(P_1^2) \cap D(P_2^2) \cap D(P_3^2)$. Protože však $P_i = \varphi_i(P_1, P_2, P_3)$ pro $\varphi_i(t_1, t_2, t_3) = t_i$, není těžké dokázat s použitím příkladu 9.4.9 a pravidel funkcionálního počtu, že $T' = T$.

Uvedeme ještě dvě důležité vlastnosti spektra, resp. definičního oboru operátoru T. Ze vztahu (16a) a výsledků příkladů 10.3.7a a 10.4.13b vyplývají rovnosti

$$\mathscr{H}_{ac}(T) = L^2(\mathbb{R}^3)\,, \tag{18a}$$

$$\sigma_{ac}(T) = \sigma_{ess}(T) = \sigma(T) = \mathbb{R}^+\,. \tag{18b}$$

Ukážeme dále, že $D(T) \subset L^\infty(\mathbb{R}^3)$, přičemž pro každou dvojici $a > 0$, $c \in D(T)$ existuje b, které nezávisí na ψ, takové, že

$$\|\psi\|_\infty \leqq a\|T\psi\|_2 + b\|\psi\|_2\,. \tag{19}$$

Při ověření vyjdeme z toho, že podle (16b) platí

$$\varphi := F_3\psi \in D_h\,. \tag{20a}$$

Z identity $\varphi = (1 + h)^{-1}(1 + h)\varphi$ a toho, že funkce $(1 + h)^{-1}$ a $(1 + h)\varphi$ patří do $L^2(\mathbb{R}^3)$, plyne $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^3)$ (srov. se cvičením 7.5). Pro $\psi = F_3^{-1}\varphi$ pak ze vztahu (3.2.15) dostáváme $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ a

$$(2\pi)^{3/2}\,\|\psi\|_\infty \leqq \|\varphi\|_1\,, \tag{20b}$$

přičemž Schwarzova nerovnost dává

$$\|\varphi\|_1 \leqq \|(I + T_h)\varphi\|_2 \leqq c(\|T_h\varphi\|_2 + \|\varphi\|_2)\,; \qquad (20c)$$

zde $c := \|(1 + h)^{-1}\|_2$, takže toto číslo nezávisí na ψ. Dále definujeme pro libovolné $r > 0$ funkci $\varphi_r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ předpisem $\varphi_r(\boldsymbol{x}) := r^3\varphi(r\boldsymbol{x})$. Ze vztahů

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi_r(\boldsymbol{x})|^2\, d\boldsymbol{x} = r^3\|\varphi\|_2^2\,, \qquad \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{x}^4|\varphi_r(\boldsymbol{x})|^2\, d\boldsymbol{x} = \frac{1}{r}\|T_h\varphi\|_2^2$$

je vidět, že $\varphi_r \in D_h$ pro všechna $r > 0$. Do nerovnosti (20c), která platí pro každé $\varphi \in D_h$, dosadíme $\varphi = \varphi_r$; užijeme-li vztahů $\|\varphi_r\|_1 = \|\varphi\|_1$, (20b) a dále (16a), (20a) a unitarity operátoru F_3, dostaneme

$$(2\pi)^{3/2}\|\psi\|_\infty \leqq cr^{-1/2}\|T_h\varphi\|_2 + cr^{3/2}\|\varphi\|_2 = cr^{-1/2}\|T\psi\|_2 + cr^{3/2}\|\psi\|_2\,.$$

Odtud pro $r = (c/a)^2$ plyne nerovnost (19), v níž $b = c^4/a^3$.

Na závěr poznamenejme, že vztahy (18a,b) zůstávají v platnosti pro n-rozměrné zobecnění operátoru T, tj. operátor $T_n := F_n^{-1}T_{h_n}F_n$ na $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n = 1, 2, \ldots$, zatímco inkluze $D(T_n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ a nerovnost (19) platí jen pro $n = 1, 2, 3$ (pro $n \geqq 4$ totiž funkce $(1 + h_n)^{-1}$ nepatří do $L^2(\mathbb{R}^n)$). Dá se však ukázat (viz např. [[RS 2]], § IX.7), že pro $n \geqq 4$ je $D(T_n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$, kde $q \in [2, 2n/(n-4))$, a že pro všechna $a > 0$, $\psi \in D(T_n)$ je splněna nerovnost $\|\psi\|_q \leqq a\|T_n\psi\|_2 + b\|\psi\|_2$ pro nějaké $b > 0$, které nezávisí na ψ.

15.6 ÚPLNÉ MNOŽINY KOMPATIBILNÍCH POZOROVATELNÝCH

Nechť $\mathcal{S}$ je množina kompatibilních pozorovatelných. Mezi pozorovatelné, které jsou kompatibilní s celou množinou $\mathcal{S}$, patří podle tvrzení 15.5.8 také všechny funkce pozorovatelných z $\mathcal{S}$. Může se stát, že tím se nám podaří množinu pozorovatelných kompatibilních s $\mathcal{S}$ vyčerpat, tj. že množinu $\mathcal{S}$ nelze doplnit dalšími „nezávislými" kompatibilními pozorovatelnými. Takovýmto množinám budeme říkat **úplné množiny kompatibilních pozorovatelných**. Z tvrzení 15.5.1 a § 14.2 je zřejmé, že operátory reprezentující pozorovatelné z $\mathcal{S}$ tvoří úplný soubor komutujících operátorů; kvůli stručnosti budeme většinou užívat zkratky ÚSKO pro obojí. Máme-li množinu kompatibilních pozorovatelných, je přirozené se ptát, zda ji lze doplnit na ÚSKO.

15.6.1 Věta: K libovolné množině kompatibilních pozorovatelných $\mathcal{S}$ existuje ÚSKO $\mathcal{S}_{\max}$ obsahující tuto množinu, $\mathcal{S}_{\max} \supset \mathcal{S}$.

Důkaz: Operátorová množina $\mathcal{S}$ je podle předpokladu komutativní a symetrická. Podle tvrzení 14.1.2 totéž platí pro množinu $\mathcal{S}_f$; odtud dále plyne, že $\mathcal{S}'' = \mathcal{S}_f''$ je abelovská $*$-podalgebra v $\mathcal{A}$, algebře pozorovatelných daného systému. Pomocí Zornova lemmatu se snadno dokáže, že v $\mathcal{A}$ existuje nějaká maximální abelovská

$*$-podalgebra $\mathscr{B}$, jež obsahuje $\mathscr{S}''$; z inkluze $\mathscr{S}'' \subset \mathscr{B}$ pak plyne $\mathscr{S}' \supset \mathscr{B}'$. K algebře $\mathscr{B}$ sestrojíme podle (14.1.1) množinu $\mathscr{B}_{\mathrm{R}}$; z tvrzení 14.1.2 plyne $\mathscr{B}' = (\mathscr{B}_{\mathrm{R}})'$. Současně podle věty 12.1.3 platí $\mathscr{B} = \mathscr{B}' = \mathscr{B}''$, protože $\mathscr{B}$ je maximální abelovská podalgebra, což dává $(\mathscr{B}_{\mathrm{R}})' = (\mathscr{B}_{\mathrm{R}})''$, tj. $\mathscr{B}_{\mathrm{R}}$ je ÚSKO podle definice. Obsahuje-li $\mathscr{S}$ neomezené operátory, nemusí platit $\mathscr{S} \subset \mathscr{B}_{\mathrm{R}}$; můžeme však sestrojit komutativní množinu $\mathscr{S}_{\max} := \mathscr{S} \cup \mathscr{B}_{\mathrm{R}} \subset \mathscr{L}_{\mathrm{sa}}(\mathscr{H})$, která $\mathscr{S}$ obsahuje. Platí $\mathscr{S}'_{\max} = \mathscr{S}' \cap (\mathscr{B}_{\mathrm{R}})' = \mathscr{S}' \cap \mathscr{B}' = \mathscr{B}'$, a protože $\mathscr{B}' = \mathscr{B}''$, dostáváme $\mathscr{S}'_{\max} = \mathscr{S}''_{\max}$; tím je tvrzení dokázáno. ■

Množina $\mathscr{S}_{\max}$, kterou jsme v důkazu sestrojili, je zbytečně velká. Je-li stavový prostor $\mathscr{H}$ separabilní, pak lze dokonce z množiny $\mathscr{S}$ vytvořit ÚSKO přidáním jediného hermitovského operátoru (cvičení 19). V této podobě má sice uvedený výsledek jen abstraktní význam, nicméně se v praxi vždy zajímáme o úplné množiny tvořené nevelkým počtem konkrétních pozorovatelných.

15.6.2 Příklad: Pro bezspinovou částici jsou $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$, resp. $\{P_1, P_2, P_3\}$ úplné množiny kompatibilních pozorovatelných – viz příklady 14.2.3a, 15.5.2 a větu 14.2.9. Podobně se ověří, že pro částici se spinem tvoří ÚSKO např. množiny $\mathscr{S}_{\mathrm{qs}}$, $\mathscr{S}_{\mathrm{ps}}$ definované vztahy (15.5.10).

Úplné množiny kompatibilních pozorovatelných hrají důležitou roli při přípravě stavu. Měření, jež jsou součástí této přípravy, nazýváme souhrnně *přípravným měřením*. Jeho výsledek závisí podle postulátu (q3) na stavu systému před měřením, ten však neznáme. Této závislosti se lze zbavit, jestliže pozorovatelné, jejichž hodnoty v přípravném měření zjišťujeme, tvoří ÚSKO.

Uvažujme nejprve úplnou množinu $\mathscr{S} = \{A_1, \dots, A_N\}$, jež tvoří pozorovatelné s čistě bodovými spektry; pro jednoduchost budeme předpokládat, že stavový prostor $\mathscr{H}$ je separabilní. Užijeme označení zavedeného v § 14.2: pro libovolné $\{k\} \in K_N$ je pravděpodobnost naměření N-tice hodnot $\Lambda_{\{k\}} = \{\lambda^{(1)}_{k_1}, \dots, \lambda^{(N)}_{k_N}\}$ rovna $w(\Lambda_{\{k\}}, \mathscr{S}; W) = \mathrm{Tr}(P_{\{k\}} W)$ a stav systému po takovémto měření je popsán statistickým operátorem $W' = (\mathrm{Tr}(P_{\{k\}} W))^{-1} P_{\{k\}} W P_{\{k\}}$. Dimenze projektorů jsou podle věty 14.2.2 pro všechna $\{k\} \in K_N$ jednotkové. Zvolíme-li si v každém z odpovídajících podprostorů jednotkový vektor $\psi_{\{k\}}$, lze uvedené vztahy zjednodušit. Speciálně pro stav systému po měření dostáváme

$$W' \varphi = \frac{(\psi_{\{k\}}, \varphi)}{(\psi_{\{k\}}, W \psi_{\{k\}})} P_{\{k\}} W \psi_{\{k\}} = (\psi_{\{k\}}, \varphi) \psi_{\{k\}},$$

což znamená, že $W' = E_{\psi_{\{k\}}} = P_{\{k\}}$. Dospíváme tak k následujícímu závěru.

15.6.2 Tvrzení: Nechť $\mathscr{H}$ je separabilní a $\mathscr{S} = \{A_1, \dots, A_N\}$ je úplná množina kompatibilních pozorovatelných s čistě bodovými spektry. Naměříme-li hodnoty $\lambda^{(1)}_{k_1}, \dots, \lambda^{(N)}_{k_N}$, pak stav systému po měření bude popsán příslušným společným vlastním vektorem $\psi_{\{k\}}$ bez ohledu na to, v jakém stavu se systém nacházel před měřením.

Je také zřejmé, že tímto způsobem lze (alespoň v principu) získat všechny nezávislé stavy, protože vektory $\psi_{\{k\}}$ tvoří ortonormální bázi v $\mathscr{H}$. Situace je poněkud složitější, užijeme-li pro přípravné měření ÚSKO obsahující pozorovatelné s neprázdným spojitým spektrem. V tomto případě se nám nepodaří se závislosti na výchozím stavu zcela zbavit. Přesto platí jistá obdoba tvrzení 2 spočívající v tom, že čím přesněji měříme, tím „méně" závisí výsledný stav na tom, v jakém stavu byl systém před měřením.

15.6.3 Příklad: Předpokládejme, že měříme impuls částice, která je v čistém stavu Ψ. Jestliže zjistíme, že hodnota impulsu leží v množině $\Delta \subset \mathbb{R}^3$, pak stav po měření bude popsán vektorem

$$\psi'_\Delta = N(\Delta) F_3^{-1} E(\Delta) F_3 \psi , \tag{1}$$

kde projektor $E(\Delta)$ je definován vztahem (15.5.5a) a normalizační faktor $N(\Delta) = \| E(\Delta) F_3 \psi \|^{-1}$. Za množinu Δ vezmeme nyní kouli $U_\varepsilon(\boldsymbol{k}_0)$ a vyšetříme, jak se stav (1) chová v limitě $\varepsilon \to 0$.

Budeme předpokládat, že vektor ψ patří do $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, a že platí $(F_3\psi)(\boldsymbol{k}_0) > 0$. Protože funkce $F_3\psi$ patří podle příkladu 3.2.6 opět do $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, je spojitá a pro dostatečně malé ε je $|(F_3\psi)(\boldsymbol{k})| > 0$ v celé množině $U_\varepsilon(\boldsymbol{k}_0)$. Podle věty o střední hodnotě pro normalizační faktor $N(\Delta)$ platí

$$N(\Delta)^{-2} \equiv \int_{U_\varepsilon(\boldsymbol{k}_0)} |(F_3\psi)(\boldsymbol{k})|^2 \, d\boldsymbol{k} = |(F_3\psi)(\boldsymbol{k}_\varepsilon)|^2 V_\varepsilon ,$$

kde $\boldsymbol{k}_\varepsilon$ je nějaký bod množiny $U_\varepsilon(\boldsymbol{k}_0)$ a $V_\varepsilon \equiv \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$. Pro funkci ψ'_Δ snadno získáme vyjádření

$$\psi'_\Delta(x) = \frac{N(\Delta)}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}} \chi_\Delta(\boldsymbol{k}) \left[\int_{\mathbb{R}^3} e^{i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{y}} \psi(\boldsymbol{y}) \, d\boldsymbol{y} \right] d\boldsymbol{k} ,$$

v němž lze v důsledku předpokladu $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ zaměnit pořadí integrace, a vnitřní integrál elementárně vypočítat (viz též cvičení 20),

$$\int_{\mathbb{R}^3} \chi_\Delta(\boldsymbol{k}) \, e^{i\boldsymbol{k}.(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \, d\boldsymbol{k} = \int_{U_\varepsilon(\boldsymbol{k}_0)} e^{i\boldsymbol{k}.(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \, d\boldsymbol{k} = V_\varepsilon g(\varepsilon|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|) \, e^{i\boldsymbol{k}_0.(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} ,$$

kde $g(z) = 3z^{-3}(\sin z - z\cos z)$. Platí tedy vztah

$$V_\varepsilon^{-1/2}\psi'_\Delta(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{x}}\,\frac{1}{|(F_3\psi)(\boldsymbol{k}_\varepsilon)|}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{y}}\,g(\varepsilon|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\psi(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,. \tag{2}$$

Snadno zjistíme (viz cvičení 22), že existuje $K_0 > 0$ takové, že pro všechna $K > K_0$ a $z \in \mathbb{R}^+$ platí

$$|g(z) - 1| < Kz^2\,. \tag{3}$$

Odtud především vyplývá, že je možno ve vztahu (2) zaměnit integrál s limitou při $\varepsilon \to 0+$. Vzhledem k tomu, že z odhadu (3) současně vyplývá $\lim_{\varepsilon\to 0+} g(\varepsilon z) = 1$, je tento integrál roven $(2\pi)^{1/2}(F_3\psi)(\boldsymbol{k}_0)$. Při $\varepsilon \to 0+$ však $\boldsymbol{k}_\varepsilon \to \boldsymbol{k}_0$ a v důsledku spojitosti funkce $F_3\psi$ platí $|(F_3\psi)(\boldsymbol{k}_\varepsilon)| \to |(F_3\psi)(\boldsymbol{k}_0)| = (F_3\psi)(\boldsymbol{k}_0)$. Limitním přechodem ve vztahu (2) tedy dostáváme

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} V_\varepsilon^{-1/2}\psi'_\Delta(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-3/2}\,\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{x}}\,, \tag{4}$$

přičemž konvergence je stejnoměrná na každé omezené množině $M \subset \mathbb{R}^3$, jak se lze přesvědčit opětným použitím odhadu (3). Dostáváme tak *nezávisle na* ψ obvyklý výraz pro rovinnou vlnu. Tato funkce samozřejmě nepatří do $L^2(\mathbb{R}^3)$; získaný výsledek však říká, že dostatečně přesným měřením impulsu lze docílit toho, aby vlnová funkce částice byla ve zvolené (omezené) prostorové oblasti M libovolně blízko aproximována rovinnou vlnou s impulsem $\boldsymbol{k}_0$.

Komentář

§ **15.1**: Obsah této a následujících kapitol nemá pochopitelně sloužit jako záměna učebnic kvantové teorie, spíše jako jejich protějšek, jehož cílem je pomoci čtenáři pochopit její podstatu a metody z pohledu, který bývá ve standardních kursech opomíjen. O kvantové mechanice se lze poučit z řady knih, jež sice nejsou shodné co do rozsahu a pojetí, ale zpracovávají zhruba týž základní materiál; jmenujme alespoň několik z nich, např. ⟦Dav⟧, ⟦Dir⟧, ⟦For⟧, ⟦Mes⟧.

Vedle toho existuje rozsáhlá literatura věnovaná rozboru základních pojmů a matematické struktury kvantové mechaniky. Průkopnickými díly v tomto směru byly klasické monografie ⟦vN⟧ a ⟦Sto⟧, které inspirovaly řadu dalších autorů, např. ⟦Ja⟧, ⟦Pir⟧, ⟦Pru⟧, ⟦Ri 1⟧, ⟦Var 1,2⟧ a další. Zobecněními standardního formalismu se zabývá např. ⟦Da 1⟧, kap. 2–4. Jiné monografie jako ⟦RS 2–4⟧, ⟦Sche⟧, ⟦Si 1⟧, ⟦Thi⟧ jsou naopak orientovány na matematicky korektní vyšetřování různých konkrétních kvantověmechanických systémů.

§ **15.2**: Spojitá část spektra se ve fyzikální literatuře běžně vyšetřuje pomocí „nenormovaných vlastních vektorů“; to sice není rigorózní, ale získaný výsledek lze často využít k důkazu toho, že daná „vlastní hodnota“ patří do spektra (viz např. cvičení 2,8). Závažné chyby vznikají nezřídka tam, kde místo důkazu toho, že daný operátor je (v podstatě) samosdružený, se spokojíme s formálním zjištěním, že je „hermitovský", tj. symetrický. Příklad 2 ukazuje, jaké problémy mohou nastat, když existuje více než jedno samosdružené rozšíření; jiné ilustrace této skutečnosti lze najít např. v monografii ⟦AGHH⟧.

§ **15.3**: K libovolné pravděpodobnostní míře ω_S na $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ se definují její momenty $m_k(S) := \int_{\mathbb{R}} x^k \, d\omega_S(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, samozřejmě pokud integrál existuje. Momentu $m_1(S)$ se říká *střední hodnota* $\langle S \rangle$ náhodné veličiny S. Pomocí prvních dvou momentů se dále definuje *směrodatná odchylka* $\Delta S := [m_2(S) - m_1(S)^2]^{1/2}$. Snadno zjistíme, že $(\Delta S)^2 = \int_{\mathbb{R}} (x - \langle S \rangle)^2 \, d\omega_S(x)$; této veličině se říká *disperze*.

§ **15.4**: První příklad superselekčního pravidla objevili G. Wick, A. Wightman a E. Wigner, kteří z transformačních vlastností vlnových funkcí odvodili, že stavy, jejichž celkový spin je celočíselný, resp. poločíselný, leží v různých koherentních podprostorech – viz [WWW 1], a též ⟦Wig⟧, kap. 24. V téže práci byla vyslovena hypotéza, že také elektrický náboj a baryonové číslo zadávají superselekční pravidla. Podmínka fyzikální realizovatelnosti pro smíšené stavy byla zformulována v práci [WWW 2]. Můžeme uvést též příklad „spojitého" superselekčního pravidla: v *nerelativistické* kvantové mechanice z požadavku galileovské invariance vyplývá, že stavy s různou hmotností patří do různých koherentních podprostorů. Této skutečnosti si první povšiml V. Bargmann – viz [Ba 3], a též [LeL 1].

• Předpoklad o konečnosti střední hodnoty energie fyzikálně realizovatených stavů lze najít např. v ⟦SW⟧, § 1.1; jiní autoři požadují dokonce, aby realizovatelné čisté stavy byly reprezentovány vektory z D(H) – viz ⟦BLT⟧, § 2.1.3. Skutečnost, že takovéto předpoklady nemají měřitelné důsledky, byla diskutována v práci [HE 1], viz též ⟦Ex⟧, § I.6.

§ **15.5**: V definici kompatibility mlčky předpokládáme, že obě měření následují bezprostředně po sobě. Jak jsme se již zmínili v § 15.1, jde o to, aby změnu stavu mezi nimi bylo možno zanedbat.

§ **15.6**: Tvrzení obsažené ve větě 1 vyslovil první P. Dirac – viz ⟦Dir⟧, § III.14. Jeho argumenty se ovšem hodí jen pro operátory s čistě bodovým spektrem, proto se někdy mluví o *Diracově hypotéze*. Důkaz pro případ, kdy $\mathscr{S}$ je tvořena omezenými pozorovatelnými, lze najít v [Mau 1], viz též ⟦Mau⟧, § VIII.5.

Cvičení

1. Dokažte, že platí spektrální rozklad (15.1.2).
Návod: Užijte vztahu $\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} I + i \sum_m \varepsilon_{jkm} \sigma_m$, kde ε_{jkm} je Leviho-Civitův symbol.

2. Dokažte, že pro operátory $T(c)$ z příkladu 15.2.2 platí $\sigma(T(c)) \supset \mathbb{R}^+$.

Návod: Spočtěte $\lim_{\varepsilon \to 0} \|(T(c) - k^2)\varphi_{k\varepsilon}\|^2 / \|\varphi_{k\varepsilon}\|^2$.

3. Nechť $T(c)$, $c > 0$, je operátor z příkladu 15.2.2 a φ_c je jeho vlastní vektor (15.2.6). Dokažte, že operátor $T(c) \upharpoonright \{\varphi_c\}^\perp$ je pozitivní.
Návod: Ověřte, že libovolné $\psi \in D(c)$ lze vyjádřit ve tvaru $\psi = \alpha\varphi_c + \beta\varphi$, kde $\varphi \in D(c)$ a spočtěte $(\psi, T(c)\psi)$ pro $\psi \perp \varphi_c$.

4. Vyšetřete případ částice, jejíž pohyb je vázán na omezený interval $J = [a, b]$. Za jakých podmínek je možné impulsu a energii přiřadit samosdružené operátory na $\mathscr{H} = L^2(J)$ odpovídající formálním operátorům $-\mathrm{i}\,\mathrm{d}/\mathrm{d}x$, resp. $-\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$? Najděte spektra těchto operátorů. Je každý operátor energie kvadrátem nějakého operátoru impulsu? Jakou fyzikální interpretaci lze jednotlivým případům přiřadit?
Návod: Viz příklady 7.2.7 a 8.6.2.

5. Nechť P_j jsou operátory složek impulsu z příkladu 15.2.3, potom operátory $P_j \upharpoonright \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ jsou v podstatě samosdružené.
Návod: Ověřte, že $Q \upharpoonright \mathscr{S}(\mathbb{R})$ je v podstatě samosdružený, a že z unitární ekvivalence (15.2.3) plyne totéž pro $P \upharpoonright \mathscr{S}(\mathbb{R})$; dále užijte věty 10.8.2.

6. Nechť $\mathscr{H}$ je separabilní Hilbertův prostor s ortonormální bází $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$. Uvažujme operátor a: $a\left(\sum_{n=0}^\infty c_n\varphi_n\right) = \sum_{n=0}^\infty n^{1/2} c_n \varphi_{n-1}$ s definičním oborem $D(a) = \left\{\psi = \sum_{n=0}^\infty c_n\varphi_n : \sum_{n=0}^\infty n|c_n|^2 < \infty\right\}$. Dokažte, že $D(a^*) = D(a)$, a také $a^*\left(\sum_{n=0}^\infty c_n\varphi_n\right) = \sum_{n=0}^\infty (n+1)^{1/2} c_n\varphi_{n+1}$. Dokažte dále, že $D(a^*a) = D(aa^*)$, a že pro $\psi \in D(a^*a)$ platí $(aa^* - a^*a)\psi = \psi$.

7. Dokažte, že hamiltonián (15.2.15a) lze vyjádřit ve tvaru $H = 2a^*a + 1$, kde $a = 2^{-1/2}(Q + \mathrm{i}P)$; pomocí toho ověřte, že operátor H je samosdružený a najděte jeho spektrum.
Návod: K důkazu samosdruženosti užijte předchozího cvičení a věty 7.2.11. Vyjádřete operátor $Ha - aH$ a dokažte, že existuje vektor φ_0 takový, že $a\varphi_0 = 0$.

8. Nechť v je omezená měřitelná reálná funkce na $\mathbb{R}$ taková, že $\lim_{x \to \pm\infty} v(x) = v_1$, potom pro operátor $H = P^2 + v(Q)$ platí $\sigma(H) \subset [v_1, \infty)$.

9. Jestliže funkci $V: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lze zapsat ve tvaru $V = V_2 + V_\infty$, kde $V_2 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ a $V_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, pak součet operátorů T z příkladu 15.5.10 a $V(Q_1, Q_2, Q_3)$ je samosdružený operátor s definičním oborem $D(T)$ a podprostor $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ je oborem podstatné samosdruženosti operátoru $T + V(Q_1, Q_2, Q_3)$.
Návod: Užijte nerovnosti (15.5.19) a Katovy-Rellichovy věty.

10. Pro rezolventu operátoru P^2 z příkladu 15.2.1 platí integrální vyjádření (15.2.24).
Návod: Viz příklad 10.5.2.

11. Pro každý stav W platí $\mathrm{Tr}\, W^2 \leqq 1$; je-li $\dim \mathscr{H} = n$, platí současně $\mathrm{Tr}\, W^2 \geqq (1/n)$.

12. Nechť W je statistický operátor a E je projektor takový, že $\mathrm{Tr}(EW) \neq 0$, potom
(a) operátor $W' : (\mathrm{Tr}(EW))^{-1} EWE$ je statistický,
(b) je-li W jednorozměrný projektor určený jednotkovým vektorem φ, pak také W' je jednorozměrný projektor a je určen vektorem $\varphi' = E\varphi / \|E\varphi\|$.

13. Předpokládejme, že na systému ve stavu W měříme postupně pozorovatelné $A_1, \ldots, A_n$, a označme $E_j = E_{A_j}(\Delta_j)$. Dokažte, že platí $w(\Delta_n, A_n; \ldots; \Delta_1, A_1; W) = \mathrm{Tr}\, W_n$, kde $W_n := E_n \ldots E_1 W E_1 \ldots E_n$, a že stav po takovémto měření je popsán statistickým operátorem $W' := W_n / \mathrm{Tr}\, W_n$. Je-li speciálně

$$A_1 = \ldots = A_n = A, \quad \text{platí} \quad w(\Delta_n, \ldots, \Delta_1, A; W) = \mathrm{Tr}\left\{ E_A\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \Delta_j \right) W \right\}.$$

14. Pro ano-ne experimenty se někdy užívá následující definice kompatibility. Provedeme tři měření v pořadí $E_1 E_2 E_1$, přičemž ano-ne experiment se nechápe jako filtr; jestliže při druhém měření E_1 dostaneme *s jistotou* týž výsledek jako při prvním, pak jsou E_1, E_2 kompatibilní. Ověřte, že tato definice je ekvivalentní definici kompatibility pozorovatelných E_1, E_2.

15. Ano-ne experimenty $E_1, \ldots, E_n$ jsou *disjunktní*, jestliže kladný výsledek jednoho z nich vylučuje kladný výsledek kteréhokoli z ostatních. To je splněno právě tehdy, když projektory $E_1, \ldots, E_n$ jsou ortogonální, což implikuje jejich kompatibilitu.

16. Nechť W je statistický operátor a $\{E_j : j = 1, 2, \ldots, N\}$, $N \leqq \infty$, je množina ortogonálních projektorů taková, že $\mathrm{Tr}(EW) \neq 0$, kde $E := \sum_{j=1}^{N} E_j$. Potom $\sum_{j=1}^{N} E_j W E_j / \mathrm{Tr}(EW)$ je statistický operátor.

17. Specifikujte závěry příkladu 15.5.7 pro případ, že ano-ne experimenty $E_1, \ldots, E_n$ jsou disjunktní. Zobecněte na případ nekonečné množiny disjunktních ano-ne experimentů.

18. Operátor $-\Delta$ s definičním oborem $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ je v podstatě samosdružený, a totéž platí pro jeho zúžení na $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.
Návod: Užijte unitární ekvivalence (5.2.12) a dokažte $-\Delta \upharpoonright \mathscr{S} \subset \overline{(-\Delta \upharpoonright C_0^\infty)}$.

19. Ke každé komutativní množině $\mathscr{S} \subset \mathscr{L}_{sa}(\mathscr{H})$, kde $\mathscr{H}$ je separabilní, existuje hermitovský operátor $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ takový, že $\mathscr{S} \cup \{A\}$ je ÚSKO.

Návod: Množinu $\mathscr{B}_R$ v důkazu věty 15.6.1 nahraďte operátorem A, který ji generuje.

20. Nechť Q_j, P_j jsou operátory z příkladu 15.2.3 a $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ je borelovská funkce. Potom
(a) $f(P_1, P_2, P_3) = F_3^{-1} f(Q_1, Q_2, Q_3) F_3$, speciálně projektorové míry odpovídající operátorům $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ a $\{P_1\ P_2\ P_3\}$ jsou unitárně ekvivalentní,
(b) je-li $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$, pak pro libovolné $\psi \in D(f(P_1, P_2, P_3))$ platí $(f(P_1, P_2, P_3)\psi)(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} (F_3^{-1} f)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}\boldsymbol{y}$

Návod: Postupujte podobně jako při odvození analogických vztahů pro operátory Q, P na $L^2(\mathbb{R})$ – viz příklad 10.5.2.

21. Najděte pravděpodobnosti $w(\Delta, \{P_1, P_2, P_3\}; \psi)$ a $w(\Delta, T; \psi)$, kde P_j jsou operátory složek impulsu a T je operátor kinetické energie z příkladu 15.5.10.
Návod: Pomocí výsledku předchozího cvičení dokažte, že $E_T([0, \lambda))$ je integrální operátor s jádrem $K_\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (2\pi^2)^{-1}(2m\lambda)^{3/2} z^{-3}(\sin z - z \cos z)$, kde $z = (2m\lambda)^{1/2}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$.

22. Dokažte odhad (15.6.3). Ověřte, že rovnost (15.6.4) platí i tehdy, když
(i) platí $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3)$ a $\int_{\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{y}\psi(\boldsymbol{y})|\, \mathrm{d}\boldsymbol{y} < \infty$,
(ii) místo kulových okolí užitých v příkladu vezmeme jednoparametrickou množinu $\{U_\varepsilon\colon \varepsilon > 0\}$ okolí bodu $\boldsymbol{k}_0$ takových, že diam $U_\varepsilon = 2_\varepsilon$ a $\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^3 V_\varepsilon^{-1} < \infty$, kde $V_\varepsilon := \int_{U_\varepsilon} \mathrm{d}\boldsymbol{k}$.

Návod: Dokažte, že $\lim_{z \to 0} z^{-2}[g(z) - 1]$ je konečná.

16.1 RELACE NEURČITOSTI

Nekompatibilita pozorovatelných s sebou přináší omezení na výsledky jejich měření. Nejznámější z nich jsou nerovnosti pro směrodatné odchylky výsledků měření, jimiž se nyní budeme zabývat. Připomeňme, že směrodatná odchylka při měření pozorovatelné A na systému ve stavu W je rovna

$$(\Delta A)_W := [\langle A^2\rangle_W - \langle A\rangle_W^2]^{1/2} = \left[\int_{\mathbb{R}} (\lambda - \langle A\rangle_W)^2 \,\mathrm{d}\,\mathrm{Tr}(E_\lambda^{(A)} W)\right]^{1/2} \tag{1}$$

(viz komentář k § 15.3). Základní výsledek lze pak zformulovat následovně:

16.1.1 Věta (*relace neurčitosti*): Předpokládejme, že na systému ve stavu W měříme pozorovatelné A_1, A_2. Jsou-li operátory $A_j W$, $A_j A_k W$ jaderné pro $j, k = 1, 2$, pak směrodatné odchylky splňují nerovnost

$$(\Delta A_1)_W (\Delta A_2)_W \geqq \frac{1}{2} |\mathrm{Tr}[\mathrm{i}(A_1 A_2 - A_2 A_1) W]| \,. \tag{2a}$$

Důkaz: Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $\langle A_j\rangle_W = 0$. Kdyby tomu tak nebylo, vezmeme operátory $A_j' := A_j - \langle A_j\rangle_W I$; snadno se přesvědčíme, že splňují-li operátory A_j předpoklady věty, splňují je též operátory A_j' a platí

$$(\Delta A_j)_W^2 = (\Delta A_j')_W^2 = \langle (A_j')^2\rangle_W \,,$$
$$\mathrm{i}(A_1 A_2 - A_2 A_1) W = \mathrm{i}(A_1' A_2' - A_2' A_1') W \,.$$

Z předpokladu plyne, že libovolné $\varphi \in \mathrm{Ran}\, W$ patří do $D(A_1) \cap D(A_2)$ a $A_j \varphi \in D(A_k)$ pro $j, k = 1, 2$. Pro takové φ a jakékoli reálné α potom platí

$$0 \leqq \|(A_1 + \mathrm{i}\alpha A_2)\varphi\|^2 = \|A_1\varphi\|^2 - 2\alpha \mathrm{Im}(A_1\varphi, A_2\varphi) + \alpha^2 \|A_2\varphi\|^2 =$$
$$= (\varphi, A_1^2\varphi) + \mathrm{i}\alpha(\varphi, (A_1 A_2 - A_2 A_1)\varphi) + \alpha^2(\varphi, A_2^2\varphi) \,.$$

Odtud dostáváme pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ nerovnost

$$\mathrm{Tr}(A_1^2 W) + \alpha\, \mathrm{Tr}\,(\mathrm{i}(A_1 A_2 - A_2 A_1) W) + \alpha^2\, \mathrm{Tr}(A_2^2 W) \geqq 0 \,;$$

stačí vyjádřit příslušné stopy v bázi vlastních vektorů operátoru W. Diskriminant kvadratické formy, definované levou stranou poslední nerovnosti, je tedy nekladný. Z toho plyne nerovnost (2a), neboť $\mathrm{Tr}(A_j^2 W) = (\Delta A_j)_W^2$. ■

16.1.2 Poznámka: Operátor $C := \mathrm{i}(A_1A_2 - A_2A_1)$ nemusí být hustě definovaný; předpoklady věty vyžadují pouze $\mathrm{Ran}\, W \subset D(C)$. Je-li C hustě definován, pak z tvrzení 7.1.3 a symetričnosti operátorů A_1, A_2 plyne $C^* \supset C$; to znamená, že C je symetrický, obecně však nemusí mít samosdružená rozšíření (cvičení 2). Pokud ale víme, že C je zúžením nějakého samosdruženého operátoru $\tilde{C}$, pak z předpokládané omezenosti operátoru CW plyne $CW = \tilde{C}W$ a nerovnost (2a) můžeme zapsat jednodušeji

$$(\Delta A_1)_W(\Delta A_2)_W \geqq \frac{1}{2}|\langle\tilde{C}\rangle_W|\,. \tag{2b}$$

16.1.3 Příklad (*čisté stavy*): Snadno se přesvědčíme, že operátor AE_ψ je jaderný právě tehdy, když $\psi \in D(A)$. Je-li tedy $\psi \in D(A_jA_k)$ pro $j,k = 1,2$, potom pro směrodatné odchylky $(\Delta A_j)_\psi = [\|A_j\psi\|^2 - (\psi, A_j\psi)^2]^{1/2}$ platí

$$(\Delta A_1)_\psi(\Delta A_2)_\psi \geqq \frac{1}{2}|(\psi, \mathrm{i}(A_1A_2 - A_2A_1)\psi)|\,. \tag{2c}$$

16.1.4 Příklad (*kompatibilní pozorovatelné*): Předpokládejme, že operátory A_1, A_2 komutují. Z příkladu 10.7.5 potom plyne, že $C := \mathrm{i}(A_1A_2 - A_2A_1)$ je zúžením nulového operátoru. V tomto případě věta 1 nedává nic nového, protože směrodatné odchylky jsou podle definice nezáporné, a nerovnost $(\Delta A_1)_W(\Delta A_2)_W \geqq 0$ platí, jakmile má její levá strana smysl.

V této souvislosti je přirozené se zeptat, je-li přesnost dosažitelná při měření dané pozorovatelné A nějak omezena.

16.1.5 Tvrzení: (a) Je-li $\lambda \in \sigma(A)$, pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje čistý stav reprezentovaný vektorem ψ_ε takový, že

$$|\lambda - \langle A\rangle_{\psi_\varepsilon}| \leqq \varepsilon\,, \qquad (\Delta A)_{\psi_\varepsilon} \leqq 2\varepsilon\,. \tag{3}$$

(b) Rovnost $(\Delta A)_W = 0$ platí právě tehdy, když $\lambda_0 \equiv \langle A\rangle_W$ je vlastní hodnotou operátoru A a pro stav W platí $W = E_A(\{\lambda_0\})WE_A(\{\lambda_0\})$. Speciálně pro čistý stav ψ platí $(\Delta A)_\psi = 0$ právě tehdy, když ψ je vlastní vektor operátoru A odpovídající vlastní hodnotě $\langle A\rangle_\psi$.

Důkaz: (a) Podle věty 10.4.1 můžeme zvolit jednotkový vektor $\psi_\varepsilon \in \mathrm{Ran}\, E_A(\Delta_\varepsilon)$, kde $\Delta_\varepsilon = (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že ψ_ε popisuje realizovatelný stav. Kdyby tomu tak nebylo, vybereme koherentní podprostor $\mathscr{H}_\alpha$ takový, že $E_\alpha\psi_\varepsilon \neq 0$, a položíme $\psi'_\varepsilon = E_\alpha\psi_\varepsilon/\|E_\alpha\psi_\varepsilon\|$; projektor $E_A(\Delta_\varepsilon)$ jakožto pozorovatelná komutuje s E_α, proto $\psi'_\varepsilon \in \operatorname{Ran} E_A(\Delta_\varepsilon)$. Vztahy (15.3.7) a $E_A(\Delta_\varepsilon)\psi_\varepsilon = \psi_\varepsilon$ umožňují vyjádřit střední hodnotu

$$\langle A\rangle_{\psi_\varepsilon} = \int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon} \xi \, d(\psi_\varepsilon, E_\xi^{(A)}\psi_\varepsilon) .$$

Odtud snadno plyne $\lambda - \varepsilon \leqq \langle A\rangle_{\varphi_\varepsilon} \leqq \lambda + \varepsilon$, tj. prvá z nerovností (3). Z ní dále dostáváme $|\xi - \langle A\rangle_{\psi_\varepsilon}| \leqq |\xi - \lambda| + \varepsilon$, tj.

$$(\Delta A)^2_{\psi_\varepsilon} = \int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon} (\xi - \langle A\rangle_{\psi_\varepsilon})^2 \, d(\psi_\varepsilon, E_\xi^{(A)}\psi_\varepsilon) \leqq 4\varepsilon^2 .$$

(b) Postačující podmínka je snadná. Je-li naopak $(\Delta A)_W = 0$, pak ze vztahu (1) plyne $w(\mathbb{R}\setminus\{\lambda_0\}, A; W) = 0$, tj. $w(\{\lambda_0\}, A; W) = 1$. Označíme-li $E \equiv E_A(\{\lambda_0\})$ a $E' \equiv I - E$, můžeme tyto rovnosti přepsat do tvaru $\operatorname{Tr}(EW) = 1$, resp. $\operatorname{Tr}(E'W) = 0$. Podle první z nich je $E \neq 0$, tj. λ_0 je vlastní hodnota operátoru A. Vyjádříme-li dále operátor W ve tvaru (15.3.8), platí

$$Tr(EW) = \sum_j w_j \| E\varphi_j\|^2 = 1 ,$$

což (vzhledem k tomu, že je vždy $\|E\varphi\| \leqq \|\varphi\|$) implikuje $\|E\varphi_j\| = \|\varphi_j\|$ neboli $EE_j = E_j$ pro ta j, pro něž $w_j > 0$. Odtud plyne $EW = WE = EWE$. Operátor $E'WE'$ je pozitivní, takže nulovost jeho stopy znamená $E'WE' = 0$; dohromady dostáváme $EWE = W$. ■

16.1.6 Příklad (*složky spinu*): Operátory S_j reprezentující složky spinu splňují komutační relace (15.5.8a). Platí tedy nerovnost

$$(\Delta S_1)_W (\Delta S_2)_W \geqq \frac{1}{2} |\langle S_3\rangle_W| \tag{4}$$

a obdobné vztahy, které odtud získáme cyklickou záměnou indexů. Pravá strana podstatně závisí na stavu W. Je-li např. W čistý stav reprezentovaný některým z vlastních vektorů operátoru S_1 nebo S_2, stojí nalevo nula, a tedy $\langle S_3\rangle_W = 0$. Je-li naopak $W = E_{\chi_m}$ (viz (15.5.7)), pak pravá strana je rovna $\frac{1}{2}|m|$.

Obraťme se nyní k nejznámější aplikaci nerovností (2):

16.1.7 Příklad (*Heisenbergovy relace*): Uvažujeme operátory Q, P z příkladu 15.2.1. Operátor $C := i(PQ - QP)$ je hustě definován, protože např. $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset D(P) \cap D(Q)$, přičemž $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ je invariantní vůči oběma operátorům. Pro všechna $\psi \in D(C)$ platí $(C\psi)(x) = (x\psi)'(x) - x\psi'(x) = \psi(x)$, takže C je zúžením jednotkového operátoru. To znamená, že pro všechna $\psi \in D(C) \cap D(P^2) \cap D(Q^2)$ platí

$$(\Delta P)_\psi(\Delta Q)_\psi \geqq \frac{1}{2}. \tag{5a}$$

Je-li W smíšený stav splňující předpoklady věty 1, pak operátor CW je jaderný. Dále $C \subset I$ implikuje $CW \subset W$, a tedy $CW = W$; nerovnost (2a) potom zní

$$(\Delta P)_W(\Delta Q)_W \geqq \frac{1}{2}. \tag{5b}$$

16.1.8 Příklad (*n-rozměrné Heisenbergovy relace*): Uvažujme operátory Q_j, P_k na $L^2(\mathbb{R}^n)$. Pomocí lemmatu 10.8.4 se snadno přesvědčíme, že pro $j \neq k$ operátory Q_j, P_k komutují; v tom případě pro ně platí závěry příkladu 4. Pro $j = k$ můžeme postupovat jako v předchozím příkladu; musíme se však omezit na ty vektory, pro něž jsme dokázali vztah (15.2.14). Závěr lze zformulovat např. takto: nechť operátory $Q_j^r P_k^s W$, $P_k^s Q_j^r W$, kde r, s jsou celá nezáporná čísla splňující $r + s \leqq 2$, jsou jaderné a $\operatorname{Ran} W \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, potom

$$(\Delta P_k)_W(\Delta Q_j)_W \geqq \frac{1}{2}\,\delta_{jk}. \tag{6a}$$

Pro čisté stavy se předpoklady zjednoduší, protože $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ je invariantní vůči Q_j, P_k: je-li $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, platí

$$(\Delta P_k)_\psi(\Delta Q_j)_\psi \geqq \frac{1}{2}\,\delta_{jk}. \tag{6b}$$

Někdy se zavádějí také veličiny globálně charakterizující neurčitost při měření polohy, resp. impulsu

$$(\Delta Q)_W^2 := \left\langle \sum_{j=1}^{n} (Q_j - \langle Q_j \rangle_W)^2 \right\rangle_W = \sum_{j=1}^{n} (\Delta Q_j)_W^2,$$

$$(\Delta P)_W^2 := \left\langle \sum_{j=1}^{n} (P_j - \langle P_j \rangle_W)^2 \right\rangle_W = \sum_{j=1}^{n} (\Delta P_j)_W^2$$

(viz cvičení 3). Jsou-li tedy např. splněny předpoklady vedoucí ke vztahu (6a), pak užitím Hölderovy nerovnosti snadno odvodíme

$$(\Delta P)_W(\Delta Q)_W \geqq \frac{n}{2}. \tag{7a}$$

Nerovnostem (5)–(7) se říká **(Heisenbergovy) relace neurčitosti**; často se téhož názvu užívá i pro obecnější nerovnosti (2). Připomeňme několika slovy, jaký je jejich smysl. Směrodatná odchylka $(\Delta A)_W$ charakterizuje přesnost, s níž lze změřit veličinu A na systému ve stavu W. Tvrzení 5a říká, že v principu lze uskutečnit libovolně přesné měření: je možné připravit (čistý) stav ψ takový, že $(\Delta A)_\psi$ je menší než libovolné předem zadané číslo. Tento stav ovšem závisí na pozorovatelné A. Věta 1 udává netriviální omezení na přesnost, jíž lze dosáhnout při měření nekompatibilních pozorovatelných A_1, A_2 *v tomtéž stavu.* Pro kompatibilní pozorovatelné žádné omezení nedostáváme, což odpovídá skutečnosti, že jsou současně měřitelné.

Jedny z nejdůležitějších jsou relace neurčitosti mezi kartézskými souřadnicemi a kartézskými složkami impulsu probrané v posledních dvou příkladech. V běžných jednotkách mají tvar

$$(\Delta P_k)_W(\Delta Q_j)_W \geqq \frac{\hbar}{2}\,\delta_{jk}\,, \tag{6c}$$

resp.

$$(\Delta P)_W(\Delta Q)_W \geqq \frac{n\hbar}{2}\,. \tag{7b}$$

Upozorněme dále, že při formálním používání relací neurčitosti lze snadno dojít k chybným závěrům. Tak třeba v příkladu 8 bylo podstatné, že jsme uvažovali polohu a impuls v kartézských souřadnicích.

16.1.9 Příklad: Zavedeme-li v $\mathbb{R}^3$ sférické souřadnice (viz (18.5.11)), pracujeme s operátory

$$Q_\varphi\colon\ (Q_\varphi f)(\varphi) = \varphi f(\varphi)\,, \qquad D(Q_\varphi) = L^2(0,2\pi)\,, \tag{8a}$$

$$P_\varphi\colon\ (P_\varphi f)(\varphi) = -\mathrm{i}f'(\varphi)\,, \qquad D(P_\varphi) = \{f \in AC(0,2\pi)\colon f(0) = f(2\pi)\} \tag{8b}$$

na $L^2(0,2\pi)$, jež reprezentují azimutální úhel a k němu kanonicky sdružený impuls (třetí složku impulsmomentu). Z příkladů 7.3.3, 7.3.8 a 7.2.7 víme, že oba operátory jsou samosdružené, přičemž Q_φ má čistě spojité spektrum, $\sigma(Q_\varphi) = [0,2\pi]$, zatímco P_φ má čistě bodové spektrum, $\sigma(P_\varphi) = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ (viz cvičení 7.24). Operátor Q_φ je omezený; pro vektor $f \in D(P_\varphi^2) \cap D(P_\varphi Q_\varphi)$ tedy platí

$$(\Delta P_\varphi)_f(\Delta Q_\varphi)_f \geqq \frac{1}{2}\,. \tag{9}$$

Nebezpečí spočívající ve formálním užívání tohoto vztahu je zřejmé. Je-li $f = f_m$, kde $f_m(\varphi) := (2\pi)^{-1/2}\,e^{im\varphi}$ je vlastní vektor operátoru P_φ, levá strana nerovnosti (9) je nulová. K žádnému sporu však nedochází, neboť $(Q_\varphi f_m)(0) = 0$ a $(Q_\varphi f_m)(2\pi) = (2\pi)^{1/2}$, takže $f_m \notin D(P_\varphi Q_\varphi)$. Snadno se přesvědčíme, že $D(P_\varphi^2) \cap D(P_\varphi Q_\varphi) = \{f \in AC^2(0,2\pi)\colon f(0) = f(2\pi) = 0, f'(0) = f'(2\pi)\}$.

492 Stavům, pro něž relace neurčitosti přecházejí v rovnost, říkáme *stavy s minimální neurčitostí*. Omezíme se pro jednoduchost na čisté stavy (viz cvičení 4) popisované vektory $\psi \in D(A_j A_k)$, $j,k = 1,2$, jež splňují rovnost

$$(\Delta A_1)_\psi (\Delta A_2)_\psi = \frac{1}{2} |(\psi, C\psi)| , \tag{10}$$

kde $C := \mathrm{i}(A_1 A_2 - A_2 A_1)$. Z tohoto předpokladu vyplývá, že kvadratický polynom v proměnné α, uvažovaný ve větě 1, má jeden dvojný kořen

$$\alpha = -\frac{|(\psi, C\psi)|}{2(\Delta A_2)^2_\psi} = -\frac{(\Delta A_1)_\psi}{(\Delta A_2)_\psi}, \tag{11a}$$

pro nějž platí

$$[A_1 - \langle A_1 \rangle_\psi + \mathrm{i}\alpha(A_2 - \langle A_2 \rangle_\psi)]\psi = 0 . \tag{11b}$$

Zadáme-li střední hodnoty a poměr směrodatných odchylek, můžeme ψ najít řešením rovnice (11b).

16.1.10 Příklad: Uvažujme opět operátory P, Q na $L^2(\mathbb{R})$ a předpokládejme, že platí

$$(\Delta P)_\psi (\Delta Q)_\psi = \frac{1}{2} . \tag{12a}$$

Pro jednoduchost označíme $\langle P \rangle_\psi \equiv p$, $\langle Q \rangle_\psi \equiv q$ a $(\Delta Q)_\psi \equiv \Delta q$. Pro $\psi \in D(P^2) \cap D(Q^2) \cap D(C)$ dává (11b) diferenciální rovnici prvního řádu, jejímž řešením je jednotkový vektor

$$\psi :\ \psi(x) = (2\pi(\Delta q)^2)^{-1/4} \exp\left\{ -\frac{(x-q)^2}{4(\Delta q)^2} + \mathrm{i}px - \frac{\mathrm{i}}{2} pq \right\} \tag{13a}$$

(cvičení 5). Poslední člen v exponentu, odpovídající integrační konstantě, nemá pro zadání stavu význam. Omezíme se nyní na případ, kdy $\Delta q = 2^{-1/2}$, tj.

$$(\Delta P)_\psi = (\Delta Q)_\psi = 2^{-1/2} ; \tag{12b}$$

toho lze vždy dosáhnout vhodnou volbou jednotek. Vektory (13a) mají potom tvar

$$\psi_{q,p} :\ \psi_{q,p}(x) = \pi^{-1/4} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(x-q)^2 + \mathrm{i}px - \frac{\mathrm{i}}{2} pq \right\} . \tag{13b}$$

Položíme-li nyní $w = 2^{-1/2}(q - \mathrm{i}p)$ (viz cvičení 4.18), snadno se přesvědčíme, že $\psi_{q,p}$ nejsou nic jiného než vektory ψ_w definované vztahem (4.4.6). Dospíváme tak k zajímavému závěru, že *podmínkami minimální neurčitosti (12) je v* $L^2(\mathbb{R})$ *určena množina koherentních stavů.*

Nerovnosti (5)–(7) jsou nejznámějším, rozhodně však ne jediným vyjádřením omezení přesnosti při měření polohy a impulsu systému v určitém stavu systému; další výsledky tohoto typu lze nalézt v literatuře citované v komentáři.

16.2 KANONICKÉ KOMUTAČNÍ RELACE

Základním vztahem nerelativistické kvantové mechaniky jsou komutační relace mezi operátory popisujícími polohu a impuls, jež můžeme formálně zapsat ve tvaru

$$PQ - QP = -\mathrm{i}I\,, \tag{1a}$$

resp.

$$P_k Q_j - Q_j P_k = -\mathrm{i}\delta_{jk} I \tag{1b}$$

pro systémy, jejichž konfiguračním prostorem je $\mathbb{R}^n$ (či jak se říká, s n stupni volnosti). Těchto relací jsme již několikrát použili: k ověření ireducibility množiny $\{Q, P\}$, při důkazu relací neurčitosti i jinde. Podívejme se nyní na ně podrobněji.

Vztahům (1) se říká **kanonické komutační relace**. Základní otázka, již musíme zodpovědět, se týká existence a jednoznačnosti jejich reprezentace; ptáme se, jak mohou vypadat operátory splňující relace (1). S tím úzce souvisí jiný problém. Snadno se přesvědčíme, že neexistuje reprezentace kanonických komutačních relací pomocí omezených operátorů (cvičení 5.2). Vztahy (1) proto nelze chápat jako operátorové rovnosti. Tento nedostatek lze odstranit, nahradíme-li je vhodnými vztahy mezi omezenými funkcemi operátorů polohy a impulsu. Abychom se inspirovali, uvedeme nejprve následující kriterium kompatibility pozorovatelných:

16.2.1 Věta: Pro samosdružené operátory A_1, A_2 jsou následující podmínky ekvivalentní:

(a) operátory A_1, A_2 komutují,

(b) operátory $\exp(\mathrm{i}tA_1)$, $\exp(\mathrm{i}sA_2)$ komutují pro všechna $s, t \in \mathbb{R}$,

(c) rezolventy $R_{A_1}(\lambda)$, $R_{A_2}(\mu)$ komutují pro všechna $\mu, \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

Jsou-li tyto podmínky splněny, pak pro každý vektor $\psi \in D(A_1A_2 - A_2A_1)$ platí $A_1A_2\psi = A_2A_1\psi$.

Všechna tato tvrzení již byla dokázána dříve: ekvivalence (a) a (b) je obsahem důsledku 11.1.5, ekvivalence (a) a (c) je dokázána ve větě 7.4.6 a konečně poslední tvrzení snadno vyplývá z příkladu 10.7.5.

Operátory A_1, A_2 tedy nekomutují, jestliže existuje alespoň jeden vektor ψ takový, že $A_1A_2\psi \neq A_2A_1\psi$. Naproti tomu, ověřování komutativity pomocí operátoru $A_1A_2 - A_2A_1$ vyžaduje značnou opatrnost. Zdálo by se, že stačí ověřit rovnost $A_1A_2\psi = A_2A_1\psi$ pro dostatečně mnoho vektorů. Abychom ukázali nebezpečí, která v sobě tento postup skrývá, předpokládejme, že samosdružené operátory A_1, A_2 splňují následující podmínky:

494 (a) existuje společný hustý invariantní podprostor D, tj. $\bar{D} = \mathscr{H}$ a $A_j D \subset D$ pro $j = 1, 2$

(b) pro všechna $\psi \in D$ platí $A_1 A_2 \psi = A_2 A_1 \psi$,

(c) operátory $A_j \restriction D$ jsou v podstatě samosdružené.

Navzdory přirozenému očekávání splnění těchto podmínek *nestačí* k tomu, aby operátory A_1, A_2 komutovaly.

16.2.2 Příklad (Nelson): Nechť M je Riemannova plocha funkce $z \mapsto \sqrt{z}$. Z teorie funkcí komplexní proměnné víme, že tato plocha je dvoulistá, tj. že její body jsou dvojice $\{z, j\}$, kde $z \in \mathbb{C}$ a $j = 1, 2$. Číslo $z = x + \mathrm{i}y$ nazýváme průmětem daného bodu do $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$; pomocí něj můžeme zavést v M euklidovské souřadnice x, y. To nám dále umožňuje zavést na M lokálně euklidovskou metriku. Globálně je topologie plochy M složitější: okolí bodů, jejichž průměty leží na polopřímce $\{z:\ y = 0,\ x > 0\}$, který říkáme *řez*, obsahují body ležící na různých listech.

Je zřejmé, že libovolnou funkci $\psi\colon M \to \mathbb{C}$ lze zadat pomocí dvojice komplexních funkcí ψ_j takových, že $\psi_j(z) = \psi(\{z; j\})$. Budeme proto psát $\psi = \{\psi_1, \psi_2\}$. Funkce ψ je spojitá, jsou-li funkce ψ_j spojité mimo řez a platí-li

$$\lim_{\substack{z \to x \\ \pm \operatorname{Im} z > 0}} \psi_j(z) = \lim_{\substack{z \to x \\ \mp \operatorname{Im} z > 0}} \psi_{3-j}(z) .$$

Dále můžeme na M zavést míru, jež je lokálně ztotožnitelná s Lebesgueovou mírou na $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$, a jí odpovídající prostor $L^2(M)$ tvořený všemi funkcemi ψ, pro něž

$$\|\psi\|^2 \equiv \int_{\mathbb{C}} (|\psi_1(z)|^2 + |\psi_2(z)|^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y < \infty .$$

Podprostor $D = C_0^\infty(M \backslash \{0\})$ je tvořen funkcemi, jež mají všechny derivace spojité ve výše uvedeném smyslu a kompaktní nosič neobsahující bod $0 \equiv \{0,1\} = \{0,2\}$. Na množině D definujeme operátory

$$\begin{aligned} A_1&\colon\ A_1\psi = \{-\mathrm{i}\partial\psi_1/\partial x, -\mathrm{i}\partial\psi_2/\partial x\}, \\ A_2&\colon\ A_2\psi = \{-\mathrm{i}\partial\psi_1/\partial y, -\mathrm{i}\partial\psi_2/\partial y\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Je snadné ověřit, že splňují podmínky (a), (b). Abychom ukázali, že platí rovněž podmínka (c), sestrojíme unitární grupy generované operátory $\bar{A}_j$.

Vezměme nejprve množinu $D_x = \{\psi \in D\colon \text{nosič } \psi \text{ neobsahuje osy } x\}$, která je hustá v $L^2(M)$ (cvičení 13), a pro libovolné $\psi \in D_x$ položme $U_1(t)\psi := \{\psi_1^t, \psi_2^t\}$, kde $\psi_j^t(x, y) = \psi_j(x + t, y)$. Takto definované operátory jsou izometrické, zachovávají D_x a tvoří jednoparametrickou grupu. Protože $\bar{D}_x = \overline{U_1(t) D_x} = L^2(M)$ a zobrazení $t \mapsto U_1(t)\psi$ pro $\psi \in D_x$ je spojité, je podle cvičení 11.3 $\{\overline{U_1(t)}\colon t \in \mathbb{R}\}$ silně spojitá unitární grupa. Poznamenejme, že důvodem, proč

„dosazovací" operátor $U_1(t)$ je definován složitějším způsobem než v případě $L^2(\mathbb{R}^n)$ (viz příklad 5.5.3), je netriviální topologická struktura M v bodech řezu. Pro $\psi \in D_x$ ukážeme obdobným způsobem jako ve cvičení 11.7, že $\lim_{t\to 0} t^{-1}(U_1(t)\psi - \psi) = iA_1\psi$. Navíc je $U_1(t)D_x \subset D_x$, takže podle cvičení 11.4 je operátor $A_1 \upharpoonright D_x$ v podstatě samosdružený, a operátor A_1 jakožto jeho symetrické rozšíření je rovněž v podstatě samosdružený. Podobně definujeme na množině $D_y = \{\psi \in D\colon$ nosič ψ neobsahuje osy $y\}$ operátory $U_2(s)$, reprezentující posunutí o s po ploše M ve směru osy y:

$$\begin{aligned}(U_2(s)\{\psi_1,\psi_2\})(x,y) = \{&(1-\varkappa_s(y))\,\psi_1(x,y+s) + \varkappa_s(y)\,\psi_2(x,y+s)\,,\\ &\varkappa_s(y)\,\psi_1(x,y+s) + (1-\varkappa_s(y))\,\psi_2(x,y+s)\},\\ \varkappa_s(y) &:= \operatorname{sgn} s(\Theta(y+s) - \Theta(y))\,,\end{aligned}$$

kde Θ je skoková funkce definovaná vztahem $\Theta(x) = 0$ pro $x < 0$ a $\Theta(x) = 1$ pro $x \geqq 0$. Povšimněme si, že při tomto posunu může dojít k přechodu z jednoho listu na druhý. Stejně jako v předcházejícím případě nyní dokážeme, že operátor A_2 je v podstatě samosdružený.

Kdyby operátory A_1, A_2 komutovaly, muselo by podle věty 1 platit $U_1(t)U_2(s) = U_2(s)U_1(t)$ pro všechna $s,t \in \mathbb{R}$. Vezmeme-li však např. funkci $\psi \in D$, jejíž nosič leží v dostatečně malém okolí bodu $\{[-1,-1],1\}$, pak

$$U_1(2)\,U_2(2)\,\psi \neq U_2(2)\,U_1(2)\,\psi\,.$$

protože nosič funkce na levé straně leží v okolí bodu $\{[1,1],2\}$, zatímco nosič funkce vpravo v okolí $\{[1,1],1\}$.

16.2.3 Poznámka:Patologickým situacím tohoto druhu lze zabránit, jestliže poněkud zesílíme předpoklady. Platí např. následující tvrzení (viz komentář): nechť operátory A_1, A_2 splňují podmínky (a), (b) spolu s

(c′) operátor $(A_1^2 + A_2^2)\upharpoonright D$ je v podstatě samosdružený.

Potom operátory $A_j \upharpoonright D$ jsou rovněž v podstatě samosdružené a jejich uzávěry komutují.

Jestliže tedy máme dvě silně spojité jednoparametrické grupy unitárních operátorů $U_j(t) = \exp iA_jt$, pro které platí $U_1(t)U_2(s) = U_2(s)U_1(t)$, $t,s \in \mathbb{R}$, pak generátory těchto grup, tj. operátory $A_j = \mathrm{d}U_j(t)/\mathrm{d}t|_{t=0}$ splňují rovnost $(A_1A_2 - A_2A_1)\psi = 0$ pro všechna $\psi \in D(A_1A_2 - A_2A_1)$. Stejným postupem bychom chtěli najít i samosdružené operátory P, Q splňující vztah (1a) pro dostatečně mnoho vektorů. Operátorům P, Q odpovídají silně spojité grupy unitárních operátorů

$$U(t) := e^{iPt}\,, \qquad V(s) := e^{iQs} \tag{3a}$$

 pro $s, t \in \mathbb{R}$. Namísto vztahu $U_1(t)\,U_2(s) = U_2(s)\,U_1(t)$ odvodíme formálně ze vztahu (1a) relaci

$$U(t)\,V(s) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}st}\,V(s)\,U(t) \tag{4a}$$

(cvičení 14). Podobně postupujeme v případě relací (1b). Pro vektory v $\mathbb{R}^n$ budeme užívat značení $t = (t_1, \ldots, t_n)$, $s\,.\,t = \sum_{j=1}^{n} s_j t_j$ apod., pomocí nějž definujeme

$$U(t) := \exp\left(\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} P_k t_k\right), \qquad V(s) := \exp\left(\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n} Q_j s_j\right); \tag{3b}$$

relace (1b) potom nahradíme rovností

$$U(t)\,V(s) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}s.t}\,V(s)\,U(t)\,. \tag{4b}$$

Vztahy (4) mají na rozdíl od (1) smysl jako operátorové rovnosti. Říkáme jim **Weylovy relace** (nebo Weylova forma kanonických komutačních relací). Očekáváme samozřejmě, že pro standardní operátory souřadnic a složek impulsu, o nichž se obvykle mluví jako o **Schrödingerově reprezentaci** kanonických komutačních relací, budou rovnosti (4) splněny.

16.2.4 Příklad: Uvažujme operátory Q, P na $L^2(\mathbb{R})$ z příkladu 15.2.1, resp. Q_j, P_k na $L^2(\mathbb{R}^n)$ z příkladu 15.2.3. Odpovídající grupy unitárních operátorů (3) mají tvar

$$(U(t)\,\psi)(x) = \psi(x + t)\,, \tag{5a}$$

$$(V(s)\,\psi)(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}s.x}\psi(x) \tag{5b}$$

pro všechna $s, t \in \mathbb{R}^n$. První z těchto vztahů je pro $n = 1$ relace (10.5.5); pro $n \geqq 2$ užijeme rozkladu $U(t) = \prod_{k=1}^{n} \exp(\mathrm{i}P_k t_k)$, který vyplývá z cvičení 10.28. Podobně lze dokázat vztah (5b). Ověření platnosti Weylových relací je nyní snadné,

$$\begin{aligned}(U(t)\,V(s)\,\psi)(x) &= (V(s)\,\psi)(x + t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}s.(x+t)}\psi(x + t) = \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}s.t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}s.x}\,(U(t)\,\psi)(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}s.t}(V(s)\,U(t)\,\psi)(x)\,.\end{aligned}$$

O operátorech (5) mluvíme jako o *Schrödingerově reprezentaci Weylových relací* (4b). *Dokážeme dále, že tato reprezentace je ireducibilní.* Z příkladu 15.4.8 víme, že množina $\{Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_n\}$ je ireducibilní; ověříme, že to je ekvivalentní ireducibilitě množiny $\mathscr{S}_n$ tvořené operátory (5) pro všechna $s, t \in \mathbb{R}^n$. Tato množina je symetrická, proto můžeme užít Schurova lemmatu. Pro $n = 1$ tvrzení plyne ze Stoneova teorému, podle nějž $\{U(t)\}' = \{P\}'$ a $\{V(s)\}' = \{Q\}'$, tj. $\mathscr{S}_1' = \{Q, P\}' = \mathbb{C}(L^2(\mathbb{R}))$. Pro $n \geqq 2$ můžeme postupovat obdobně (cvičení 15).

Můžeme také užít věty 14.3.9: označíme-li $t^{(j)} = (0, \dots, 0, t_j, 0, \dots, 0)$, pak z rovnosti $U(t^{(j)}) = I \otimes \dots \otimes I \otimes e^{iPt_j} \otimes I \otimes \dots \otimes I$ a analogického vyjádření pro $V(s^{(j)})$, plyne, že množina $\mathscr{R}_n = \{U(t^{(k)}),\ V(s^{(j)}):\ t_k, s_j \in \mathbb{R},\ j, k = 1, \dots, n\}$ je ireducibilní, a tedy $\mathscr{S}_n \supset \mathscr{R}_n$ je rovněž ireducibilní.

16.2.5 Poznámka: Zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathscr{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$ definovaná vztahy (5) jsou silně spojitá. Pro $n = 1$ to plyne ze Stoneova teorému, pro $n \geqq 2$ užijeme navíc vztahu $U(t) = e^{iPt_1} \otimes \dots \otimes e^{iPt_n}$ a obdobného vyjádření pro $V(s)$ (cvičení 16). Lze tedy říci, že zobrazení $U(.)$, resp. $V(.)$ zadávají unitární silně spojité reprezentace grupy T_n translací prostoru $\mathbb{R}^n$.

Podstatně složitější je otázka, jaký je obecný tvar operátorů splňujících relace (4). Podobně jako v předchozí poznámce se přitom omezíme na unitární silně spojité reprezentace, což je přirozený požadavek, mají-li takováto $U(t)$, $V(s)$ odpovídat prostřednictvím vztahů (3) nějakým samosdruženým operátorům P_k, Q_j. Odpověď je obsažena v následujícím teorému:

16.2.6 Věta (Stone-von Neumann): Nechť $U(.)$, $V(.)$ jsou unitární silně spojité reprezentace grupy translací prostoru $\mathbb{R}^n$ v Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ splňující Weylovy relace. Potom

(a) existuje rozklad $\mathscr{H} = \sum_{\alpha \in I}^{\oplus} \mathscr{H}_\alpha$ prostoru $\mathscr{H}$ v ortogonální součet uzavřených podprostorů $\mathscr{H}_\alpha$,

(b) podprostory $\mathscr{H}_\alpha$ jsou invariantní vůči operátorům $U(t)$, $V(s)$ pro všechna $s, t \in \mathbb{R}^n$,

(c) pro každé $\alpha \in I$ existuje unitární operátor $S_\alpha : \mathscr{H} \to L^2(\mathbb{R}^n)$ takový, že pro všechna $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ a $s, t \in \mathbb{R}^n$ platí

$$(S_\alpha U(t) S_\alpha^{-1} \psi)(x) = \psi(x + t),$$

$$(S_\alpha V(s) S_\alpha^{-1} \psi)(x) = e^{is.t} \psi(x).$$

Speciálně odtud vyplývá, že každá ireducibilní (unitární, silně spojitá) reprezentace Weylových relací (4) je unitárně ekvivalentní Schrödingerově reprezentaci (5).

Důkaz: K libovolným $s, t \in \mathbb{R}^n$ sestrojíme unitární operátory

$$R(t, s) := \exp\left(-\frac{i}{2} s.t\right) U(t) V(s), \tag{6}$$

pro něž z relací (4) dostáváme

$$R(t, s) R(v, u) = \exp\left\{\frac{i}{2}(t.u - s.v)\right\} R(t + v, s + u). \tag{7}$$

Naším cílem je nejprve rozložit množinu $\{R(t, s):\ s, t \in \mathbb{R}^n\}$ na ireducibilní kom-

498 ponenty. Začneme tím, že pro libovolnou funkci $f \in L(\mathbb{R}^{2n})$ a vektory $\varphi, \psi \in \mathscr{H}$ definujeme

$$b_f(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(t,s)(\varphi, R(t,s)\,\psi)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\,; \tag{8a}$$

pravá strana má smysl, protože funkce $(\varphi, R(.,.)\psi)$ je podle předpokladu omezená a spojitá. Snadno se přesvědčíme, že $b_f(.,.)$ je omezená seskvilineární forma, proto existuje právě jeden operátor $B_f \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ takový, že pro všechna $\varphi, \psi \in \mathscr{H}$ platí

$$b_f(\varphi, \psi) = (\varphi, B_f \psi)\,. \tag{8b}$$

Zobrazení $f \mapsto B_f$ definované tímto způsobem je zjevně lineární; dále ze vztahů (7), (8) plyne

$$(B_f)^* = B_{f^*}\,, \qquad f^*(t,s) := \overline{f(-t,-s)}\;; \tag{9a}$$

$$B_{f_1}B_{f_2} = B_{f_{12}}\,,$$

$$f_{12}(t,s) := \int_{\mathbb{R}^{2n}} f_1(t-v, s-u) f_2(v,u) \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2}(t.u - s.v)\right\} \mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \tag{9b}$$

(cvičení 18). Potřebujeme ověřit také jeho injektivitu:

16.2.7 Lemma: $B_f = 0$ právě tehdy, když $f(t,s) = 0$ s.v. v $\mathbb{R}^{2n}$.

Důkaz: Je-li $B_f = 0$, platí též $R((-v,-u)\,B_f R(v,u) = 0$ pro všechna $u, v \in \mathbb{R}^n$, tj.

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} f(t,s)(\varphi, R(-v,-u)\,R(t,s)\,R(v,u)\;\psi)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t.u-s.v)} f(t,s)(\varphi, R(t,s)\,\psi)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = 0\,.$$

Z injektivity Fourierovy transformace (viz komentář k § 3.2) pak plyne $(\varphi, f(t,s)\,R(t,s)\,\psi) = 0$ pro všechna $\varphi, \psi \in \mathscr{H}$ a s.v. $s, t \in \mathbb{R}^n$, tj. $f(t,s)\,R(t,s) = 0$ pro s.v. $s, t \in \mathbb{R}^n$. Operátory $R(t,s)$ jsou unitární, proto $f = 0$.

Pokračování důkazu věty 6: Vyšetříme nyní operátor $B := B_{f_0}$, kde $f_0(t,s) = (2\pi)^{-n} \exp\{-\frac{1}{4}(t^2 + s^2)\}$, který je vzhledem k lemmatu a vztahu (9a) nenulový a hermitovský. Užitím vztahů (7), (8) lze ověřit, že $BR(t,s)\,B = B_g$, kde

$$g(v,u) = (2\pi)^{-2n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \exp\{-\tfrac{1}{4}(t-x)^2 - \tfrac{1}{4}(s-y)^2 - \tfrac{1}{4}(v-x)^2 - \tfrac{1}{4}(u-y)^2 +$$

$$+ \tfrac{i}{2}(v.y - u.x - s.x + t.y)\}\, dx\, dy = \exp\{-\tfrac{1}{4}(t^2+s^2)\} f_0(v,u)\,,$$

tj.

$$BR(t,s)B = \exp\{-\tfrac{1}{4}(t^2+s^2)\} B \tag{10}$$

(cvičení 19). Speciálně pro $s = t = 0$ odtud plyne $B^2 = B$, takže operátor B je (nenulový) projektor. Jiným důsledkem této formule a vztahu (7) je rovnost

$$(R(t,s)\,\varphi, R(v,u)\,\psi) =$$

$$= \exp\{-\tfrac{1}{4}(t-v)^2 - \tfrac{1}{4}(s-u)^2 + \tfrac{i}{2}(s.v - t.u)\}(\varphi,\psi)\,, \tag{11}$$

jež platí pro všechna $\varphi, \psi \in B\mathscr{H} = \operatorname{Ran} B$ a $s,t,u,v \in \mathbb{R}^n$.

Tím máme připraveny prostředky k rozkladu. V podprostoru $\operatorname{Ran} B$ zvolíme nějakou ortonormální bázi $\{\psi_\alpha : \alpha \in I\}$ a označíme $M_\alpha = \{R(t,s)\psi_\alpha : s,t \in \mathbb{R}^n\}$, resp. $\mathscr{H}_\alpha = \overline{(M_\alpha)_{\text{lin}}}$. Z rovnosti (11) plyne $M_\alpha \perp M_\beta$ pro $\alpha \neq \beta$, a tedy také $\mathscr{H}_\alpha \perp \mathscr{H}_\beta$; současně odtud dostáváme, že $\dim(\mathscr{H}_\alpha \cap \operatorname{Ran} B) = 1$, neboli že projektor $B \restriction \mathscr{H}_\alpha$ je jednorozměrný. Dále ze vztahu (7) plyne $R(t,s)M_\alpha \subset M_\alpha$, a odtud $R(t,s)\mathscr{H}_\alpha \subset \mathscr{H}_\alpha$; podprostory $\mathscr{H}_\alpha$ jsou tedy invariantní vůči operátorům $R(t,s)$ pro všechna $s,t \in \mathbb{R}^n$. Operátorová množina $\mathscr{R} = \{R(t,s) : s,t \in \mathbb{R}^n\}$ je symetrická, proto je redukována všemi podprostory $\mathscr{H}_\alpha$. Dokážeme, že množiny $\mathscr{R} \restriction \mathscr{H}_\alpha$ jsou ireducibilní. Předpokládejme, že existuje vlastní uzavřený podprostor $\mathscr{G}_\alpha \subset \mathscr{H}_\alpha$ invariantní vůči $\mathscr{R}$, potom také jeho ortogonální doplněk $\mathscr{G}_\alpha^\perp \subset \mathscr{H}_\alpha$ je invariantní vůči $\mathscr{R}$. Ze vztahů (8) plyne, že rovněž operátor B je redukován podprostory $\mathscr{G}_\alpha$, $\mathscr{G}_\alpha^\perp$, a podle lemmatu 7 jsou $B \restriction \mathscr{G}_\alpha$ a $B \restriction \mathscr{G}_\alpha^\perp$ nenulové projektory. To však není možné, protože jejich součet je roven jednorozměrnému projektoru $B \restriction \mathscr{H}_\alpha$.

Nyní dokážeme rovnost

$$\mathscr{H} = \sum_{\alpha \in I}^{\oplus} \mathscr{H}_\alpha\,. \tag{12}$$

Označíme symbolem $\mathscr{G}$ ortogonální doplněk pravé strany. Pro vektory $\alpha \in \mathscr{G}$, $\psi \in \mathscr{G}^\perp$ platí $(\psi, R(t,s)\varphi) = (R(-t,-s)\,\psi, \varphi) = 0$, tj. $\mathscr{G}$ je rovněž invariantní vůči $\mathscr{R}$. Je-li $\mathscr{G} \neq \{0\}$, pak z lemmatu 7 plyne, že operátor $B \restriction \mathscr{G}$ je nenulový. Z konstrukce podprostorů $\mathscr{H}_\alpha$ je však zřejmé, že $\operatorname{Ran} B \subset \mathscr{G}^\perp$. Platí tedy vztah (12) a jemu odpovídající rozklad množiny $\mathscr{R}$ na ireducibilní komponenty.

Ptejme se nyní, jaký je vztah mezi získanými ireducibilními reprezentacemi. Pro dvojici různých indexů $\alpha, \beta \in I$ označíme $\psi_{t,s}^{(\alpha)} = R(t,s)\,\psi_\alpha$, $\psi_{v,u}^{(\beta)} = R(v,u)\,\psi_\beta$ a definujeme zobrazení $M_\alpha \to M_\beta$ vztahem $U\psi_{t,s}^{(\alpha)} := \psi_{t,s}^{(\beta)}$. Ze vztahu (11) plyne, že toto zobrazení je izometrické, a protože množiny M_α, M_β jsou totální v $\mathscr{H}_\alpha$, resp. $\mathscr{H}_\beta$, můžeme je rozšířit na unitární operátor $U: \mathscr{H}_\alpha \to \mathscr{H}_\beta$ (viz tvrzení 5.5.4). V důsledku relace (7) platí vztahy

$$R(t,s)\,\psi^{(j)}_{v,u} = \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2}(t\,.\,u - s\,.\,v)\right\}\psi^{(j)}_{t+v,s+}$$

pro $j = \alpha, \beta,$ z nichž plyne rovnost

$$U^{-1}R(t,s)\,U\psi^{(\alpha)}_{v,u} = \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2}(t\,.\,u - s\,.\,v)\right\}\psi^{(\alpha)}_{t+v,s+u} = R(t,s)\,\psi^{(\alpha)}_{v,u}\,,$$

jejímž rozšířením na $\overline{(M_\alpha)_{\text{lin}}} = \mathscr{H}_\alpha$ dostaneme $U^{-1}R_\beta(t,s)\,U = R_\alpha(t,s)$, speciálně $U^{-1}U_\beta(t)\,U = U_\alpha(t)$ a $U^{-1}V_\beta(s)\,U = V_\alpha(s)$, kde jsme označili $R_j(t,s) = R(t,s)\restriction\mathscr{H}_j$ apod. To znamená, že libovolné dvě ireducibilní reprezentace jsou unitárně ekvivalentní, což spolu s výsledkem příkladu 4 završuje důkaz věty. ■

16.2.8 Poznámky: (a) V důkazu jsme ověřili ireducibilitu množin $\mathscr{R}\restriction\mathscr{H}_\alpha$, jež jsou širší než $\{U(t), V(s) : s, t \in \mathbb{R}^n\}\restriction\mathscr{H}_\alpha$. Ze vztahu (6) je však zřejmé, že je-li $\mathscr{G}$ invariantním podprostorem operátorů $U(t)$, $V(s)$, je invariantní též vůči operátorům $R(t,s)$. Jde tedy o ireducibilitu ve stejném smyslu jako v příkladu 4.

(b) Ve Schrödingerově reprezentaci ze vztahů (5) plyne

$$(R(t,s)\psi)(x) = \exp\left\{\mathrm{i}s\,.\left(x + \frac{1}{2}t\right)\right\}\psi(x+t) \tag{13}$$

pro všechna $s, t \in \mathbb{R}^n$. Pomocí toho můžeme vyjádřit projektor B:

$$(B\psi)(x) = \pi^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right\}\psi(y)\,\mathrm{d}y \tag{14}$$

(viz cvičení 20). Podmínce $B\psi = \psi$ vyhovují pouze násobky vektoru ψ_0: $\psi_0(x) = \pi^{-n/4}\mathrm{e}^{-x^2/2}$. Z konstrukce provedené v důkazu je zřejmé, že počet ireducibilních komponent dané reprezentace je roven dim B; tím jsme znovu dokázali ireducibilitu Schrödingerovy reprezentace.

Pro operátor $R(t,s)$ definovaný vztahem (6) se někdy užívá názvu **Weylův operátor**, jindy se pod tímto pojmem rozumí operátor

$$W(t,s) := R(-t,s) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\overline{(sQ - tP)}} \tag{15}$$

(viz cvičení 21), jenž má názorný význam.

16.2.9 Příklad: Uvažujme Schrödingerovu reprezentaci pro $n = 1$, a pro libovolný vektor $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ označme

$$\psi_{q,p} := W(q,p)\psi . \tag{16a}$$

Ze vztahu (13) plyne

$$\psi_{q,p}(x) = \exp\left\{ip\left(x - \frac{1}{2}q\right)\right\} \psi(x - q) . \tag{16b}$$

Symetrická role, v níž zde vystupují souřadnice a impuls, je vidět ze vztahu

$$(F\psi_{q,p})(k) = \exp\left\{-iq\left(k - \frac{1}{2}p\right)\right\} (F\psi)(k - p) , \tag{16c}$$

který snadno ověříme aproximujíce ψ funkcemi z $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Odtud pro $\psi \in D(Q) \cap D(P)$ dostáváme

$$\langle Q \rangle_{\psi_{q,p}} = \langle Q \rangle_\psi + q , \qquad \langle P \rangle_{\psi_{q,p}} = \langle P \rangle_\psi + p , \tag{17}$$

zatímco směrodatné odchylky, pokud existují, jsou nezávislé na q, p. Vezmeme-li za ψ vektor ψ_0: $\psi_0(x) = \pi^{-1/4} e^{-x^2/2}$ popisující základní stav harmonického oscilátoru, pak $\psi_{q,p}$ nejsou nic jiného než koherentní stavy (16.1.13b).

Jak jsme poznamenali v komentáři k § 16.1, vztahy (16) určují množiny koherentních stavů i pro jiná $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Zobrazení $(q,p) \mapsto \psi_{q,p}$ je spojité (cvičení 17); dokážeme nejprve, že je-li $\|\psi\| = (2\pi)^{-1/2}$ a vektory $\psi, \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, pak

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^2} (\psi_{q,p}, \varphi)\, \psi_{q,p}(x)\, dq\, dp . \tag{18a}$$

Užijeme toho, že Fourierova transformace zobrazuje prostor $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ do sebe. Platí

$$(\psi_{q,p}, f) = e^{ipq/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} \bar{\psi}(x - q)\, \varphi(x)\, dx =$$

$$= (2\pi)^{-1/2} e^{ipq/2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(px + qk)} e^{ikx} (\bar{\psi})^\wedge(k)\, \varphi(x)\, dx\, dk ,$$

kde přechod od dvojnásobného integrálu k dvojnému byl umožněn tím, že funkce f: $f(x,k) = e^{ikx} (\bar{\psi})^\wedge(k)\, \varphi(x)$ patří do $\mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$, protože podle předpokladu je $(\bar{\psi})^\wedge \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Totéž pak platí pro Fourierův obraz funkce f, tj. pro funkci

$(q,p) \mapsto (\psi_{q,p}, \varphi)$. Pravá strana vztahu (18a) má tedy smysl. Přímým výpočtem lze ověřit, že

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\varepsilon^2 x^2} (\psi_{q,p}, \varphi)\, \psi_{q,p}(x)\, dq\, dp = 2\pi \|\psi\|^2 \varphi(x) \tag{19}$$

(cvičení 22) a levá strana této rovnosti je podle Lebesgueovy věty totožná s hledaným integrálem. Vztah (18) platí i pro jiné vektory; jeho ověření může však být složitější. Omezíme se na to, že dokážeme rovnost

$$(\chi, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} (\chi, \psi_{q,p})(\psi_{q,p}, \varphi)\, dq\, dp \tag{18b}$$

za předpokladu, že $\chi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ a $\|\psi\| = (2\pi)^{-1/2}$. Ze vztahu (18a) plyne

$$(\chi, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} dx\, \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^2} dq\, dp\, (\chi, \psi_{q,p})\, \overline{\psi_{q,p}}(x)\,,$$

a jelikož

$$\int_{\mathbb{R}^2} dq\, dp\, |(\chi, \psi_{q,p})| \int_{\mathbb{R}} dx\, |\varphi(x)\psi_{q,p}(x)| \leqq \|\varphi\|\, \|\psi\| \int_{\mathbb{R}} dq\, dp\, |(\chi, \psi_{q,p})| < \infty\,,$$

dostaneme odtud rovnost (18b) užitím Fubiniovy věty.

16.2.10 Poznámka: Jestliže $U(.)$ a $V(.)$ splňují předpoklady Stoneovy-von Neumanovy věty, platí

$$U(.) = \sum_{\alpha \in I}^{\oplus} S_\alpha^{-1} U_S(.) S_\alpha\,, \qquad V(.) = \sum_{\alpha \in I}^{\oplus} S_\alpha^{-1} V_S(.) S_\alpha\,,$$

kde $U_S(.)$ a $V_S(.)$ jsou definovány vztahy (5). Z vlastností Schrodingerovy reprezentace probraných v příkladu 4 plynou následující závěry pro operátory $P_k = -i(\partial U(t)/\partial t_k)_{t=0}$ a $Q_k \equiv -i(\partial V(t)/\partial t_k)_{t=0}$:

(a) existuje společný hustý invariantní podprostor $D = \sum_{\alpha \in I}^{\oplus} S_\alpha^{-1} \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

(b) pro libovolný vektor $\psi \in D$ platí $(P_k Q_j - Q_j P_k)\psi = -i\delta_{jk}\psi$,

(c) operátory $P_k \restriction D$, jsou v podstatě samosdružené. Naopak, podobně jako v příkladu 2 splnění těchto podmínek *nestačí* k tomu, aby grupy $\{U(t)\}$, $\{V(s)\}$ odpovídající operátorům P_k, resp. Q_j prostřednictvím vztahů (8) splňovaly Weylovy relace (viz cvičení 7). Postačující podmínku dostaneme, zaměníme-li (c) předpokladem (c′) operátor $\sum_{j=1}^{n}(P_j^2 + Q_j^2) \restriction D$ je v podstatě samosdružený (viz komentář). Povšimněme si toho, že ve Schrödingerově reprezentaci je podmínka (c′) splněna např. pro $D = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (cvičení 8).

Upozorněme závěrem, že pro platnost věty 6 je podstatné, že uvažujeme konečný počet stupňů volnosti. Pro systémy s nekonečně mnoha stupni volnosti jako jsou kvantová pole obdobné tvrzení neplatí – viz § 19.3.

Komentář

§ **16.1**: Relacemi neurčitosti se zabývá snad každá učebnice kvantové mechaniky; namátkou můžeme jmenovat ⟦Dir⟧, kap. IV; ⟦For⟧, §§ 1.2.4, 2.4; ⟦Ja⟧, odst. 11.1; ⟦Mes⟧, kap. IV; ⟦vN⟧, § III.4 apod. Příklad 9 ukazuje, že při nerespektování předpokladů nemusí relace neurčitosti platit ani tehdy, když obě strany mají smysl. Je vhodné si uvědomit důležitý fyzikální rozdíl mezi omezeními, jež představují předpoklady, řekněme, v příkladech 7 a 9. Experimentálně se nelze přesvědčit např. o tom, že stavový vektor patří do $\mathscr{S}(\mathbb{R})$; to je podobný problém jako ten, jímž jsme se zabývali v § 15.4. Naproti tomu stav f_m narušující nerovnost (9) je možné snadno připravit pomocí dostatečně přesného měření pozorovatelné P_φ.
• V příkladu 10 se setkáváme opět s *koherentními stavy*, o nichž jsme se již zmínili v § 4.4. Tohoto označení se užívá pro různé podmnožiny $\mathscr{C} = \{\psi_z : z \in I\}$ ve stavovém prostoru $\mathscr{H}$, kde I je nespočetná indexová množina vybavená vhodnou topologií a mírou. Požadujeme, aby
(i) zobrazení $z \mapsto \psi_z$ bylo spojité,
(ii) platila relace úplnosti typu (4.4.5): $\psi = \int_I (\psi_z, \psi)\psi_z \, dz$ pro všechna $\psi \in \mathscr{H}$.
Množinu koherentních stavů (13b) lze získat z vektoru ψ_0 popisujícího základní stav harmonického oscilátoru pomocí Weylova operátoru (viz příklad 16.2.9). Užijeme-li místo ψ_0 jiného vektoru $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, dostaneme rovněž množinu koherentních stavů, jež však už nejsou stavy s minimální neurčitostí a nelze je reprezentovat pomocí analytických funkcí.
• Množiny stavů (13b) si první povšiml E. Schrödinger v roce 1926. Pojem koherentních stavů byl zaveden počátkem šedesátých let v pracech [Gla 1, 2], [Kla 1]. Hilbertův prostor analytických funkcí, jenž se stavy (13b) úzce souvisí, byl zaveden v téže době – viz [Ba 1, 2]; ⟦Seg⟧, kap. VI. Zmíněným koherentním stavům se říká kanonické. Koherentní stavy lze konstruovat i jinými způsoby; podrobnější poučení o takovýchto stavech a jejich aplikacích lze najít ve sborníku ⟦KS⟧.
• Modifikací Heisenbergových relací jsou nerovnosti mezi směrodatnými odchylkami pozorovatelné $\boldsymbol{P}^2$ a mocninami pozorovatelné $\boldsymbol{Q}^2$ [Ba 4]; další výsledky tohoto typu najde čtenář v pracích [Ex 2], [Far 1].

§ **16.2**: Příklad 2 je převzat z práce [Nel 1], viz též ⟦RS 1⟧, § VIII.5; ⟦Thi⟧, § 3.1. O Riemannových plochách je možno se poučit např. v ⟦Šab⟧. Ve zmíněné práci

E. Nelson dokázal rovněž větu o integrabilitě reprezentací Lieových algeber, již lze najít také v ⟦BaR⟧, § 11.5. Tvrzení uvedené v poznámce 3 představuje speciální případ této věty pro dvourozměrnou komutativní Lieovu algebru. Jiným speciálním případem Nelsonovy věty je tvrzení uvedené v poznámce 10; viz též [Di 1]. Jednodušší příklad operátorů splňujících relace (1) na husté podmnožině v $\mathscr{H}$, pro něž odpovídající $U(t)$, $V(s)$ nesplňují relace (4), je uveden ve cvičení 9; zde ovšem nelze splnit podmínku (c).

• Kanonické komutační relace ve tvaru (4) zformuloval H. Weyl v roce 1927; tvrzení o jednoznačnosti jejich reprezentace (věta 6) se objevilo poprvé v pracech [Sto 1] a [vN 4]. Náš důkaz sleduje v zásadě postup z původní von Neumannovy práce, jenž je reprodukován např. v ⟦Pru⟧, § IV.6; jeho další obměny a zobecnění lze najít např. v ⟦Thi⟧, § 3.1 apod. Poněkud jiný důkaz, v němž se konstruují analytické vektory operátoru $P^2 + Q^2 - I$, je naznačen v ⟦RS 2⟧, problém X.30. Věta 6 představuje speciální případ obecnějšího výsledku, jejž odvodil G. Mackey v rámci tzv. teorie imprimitivity – viz např. ⟦BaR⟧, § 20.2; ⟦Ja⟧, odst. 12.3; ⟦Var 2⟧, § 11.3.

Cvičení

1. Jsou-li splněny předpoklady věty 16.1.1, platí $(\Delta A_1)_W^2 + (\Delta A_2)_W^2 \geqq \geqq |\mathrm{Tr}[\mathrm{i}(A_1A_2 - A_2A_1)W]|$. Speciálně pro operátory Q_j, P_k na $L^2(\mathbb{R}^n)$ a $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ platí $(\Delta Q_j)_\psi^2 + (\Delta P_k)^2 \geqq \delta_{jk}$.

2. Nechť A_1, A_2 jsou neomezené samosdružené operátory. Operátor $C := = \mathrm{i}(A_1A_2 - A_2A_1)$ obecně nemusí mít žádné samosdružené rozšíření.
Návod: Vyšetřete operátory Q, $T(c)$ z příkladu 15.2.2.

3. Dokažte, že $(\Delta Q)_W$ z příkladu 16.1.8 je směrodatná odchylka náhodné veličiny $\left(\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \langle Q_j \rangle_W)^2\right)^{1/2}$ vůči pravděpodobnostní míře $w(.,\{Q_1, \dots, Q_n\}; W)$ definované vztahem (15.5.4), a že obdobné tvrzení platí pro $(\Delta P)_W$.

4. Každý stav s minimální neurčitostí je směsí čistých stavů s minimální neurčitostí.

5. Dokažte, že (16.1.13a) zadává stav s minimální neurčitostí, a že vektory (16.1.13b) jsou pro $w = 2^{-1/2}(q - \mathrm{i}p)$ totožné s (4.4.6).

6. Najděte stavy s minimální neurčitostí pro operátory Q_j, P_k na $L^2(\mathbb{R}^n)$.

7. Sestrojte příklad operátorů P, Q, jež splňují podmínky (a)–(c) z poznámky 16.2.10, ale odpovídající $U(t)$, $V(s)$ nesplňují Weylovy relace.
Návod: V označení z příkladu 16.2.2 pro $\psi \in D$ definujte $P\psi := \mathrm{i}\partial\psi/\partial x$, resp. $Q\psi := x\psi - \mathrm{i}\partial\psi/\partial y$.

8. Operátor $H := \sum_{j=1}^{n} (P_j^2 + Q_j^2)$ na $L^2(\mathbb{R}^n)$ je samosdružený a $H \upharpoonright \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ je v podstatě samosdružený.

9. Pro operátory P_φ, Q_φ z příkladu 16.1.9 platí $(P_\varphi Q_\varphi - Q_\varphi P_\varphi)f = -if$ pro všechna f, pro něž má levá strana smysl, ale operátory $U(t) := \exp(iP_\varphi t)$ a $V(s) := \exp(iQ_\varphi s)$ nesplňují Weylovy relace.

10. Uvažujte operátory Q, P na $L^2(\mathbb{R})$ a množinu $M \in \mathscr{B}$. Je-li $\psi \in D(P^2)$, platí $w(M, Q; \psi) \leqq m(M)(\Delta P)_\psi$, kde $m(M)$ je Lebesgueova míra množiny M.
Návod: Nechť $f\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ je absolutně spojitá funkce; potom stejně jako v důkazu věty 16.1.1 dostaneme $\frac{1}{2}\langle f'(Q)\rangle_\psi \leqq \|P'\psi\| \, \|f(Q)\psi\| \leqq (\Delta P)_\psi$, kde $P' \equiv P - \langle P\rangle_\psi I$. Volte f tak, aby $f' = 2m(M)^{-1}\chi_M$.

11. Pro $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ definujeme $f(y) := \int_{\mathbb{R}} \bar{\psi}(x)\psi(x-y)\,dx$. Funkce f je spojitá, splňuje nerovnost $|f(y)| \leqq f(0)$ a $\lim_{y \to \pm\infty} f(y) = 0$.
Návod: Operátory $U_a\colon (U_a\psi)(x) = \psi(x-a)$ tvoří silně spojitou grupu. Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje N takové, že $\int_{|x| \geqq N} |\psi(x)|^2\,dx < \varepsilon$.

12. Dokažte implikaci (c) $\Rightarrow$ (a) ve větě 16.2.1.
Návod: Ze Stoneovy formule plyne, že libovolný operátor $B \in \{R_A(z)\colon z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\}'$ komutuje s $E_A([\lambda, \mu_n]) + E_A((\lambda, \mu_n))$. Pro $\lambda = -\infty$, $\mu_n \to \mu^+$ ze silné spojitosti projektorové míry plyne $B \in \{E_\mu^{(A)}\}'$; dále postupujte jako v důkazu věty.

13. Dokažte, že množiny D_x, D_y z příkladu 16.2.2 jsou husté v $L^2(M)$.

14. Ověřte, že z *formálního* vyjádření operátorů (16.2.3) ve tvaru mocninných řad plynou Weylovy relace. Dokažte, že ve Schrödingerově reprezentaci lze tuto úvahu učinit korektní, jestliže příslušné operátory aplikujeme na vektory z $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Návod: Užijte Hausdorffovy-Bakerovy-Campbellovy formule (platné pro *omezené* operátory): $e^{iA}B\,e^{-iA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} C_k$, kde $C_0 = B$ a $C_k = [A, C_{k-1}]$.

15. Pro operátory (16.2.5) platí $\{U(t)\colon t \in \mathbb{R}^n\}' = \{P_1, \ldots, P_n\}'$ a $\{V(s)\colon s \in \mathbb{R}^n\}' = \{Q_1, \ldots, Q_n\}'$.

16. Nechť $P_1, \ldots, P_n$, resp. $Q_1, \ldots, Q_n$ jsou komutující samosdružené operátory na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$, potom zobrazení $U(.)$, resp. $V(.)$ definovaná vztahy (16.2.3b) jsou silně spojitá.

17. Jsou-li splněny předpoklady věty 16.2.6, pak operátory $R(t,s)$ jsou unitární, splňují vztah (16.2.7) a zobrazení $(t,s) \mapsto R(t,s)$ je silně spojité.

18. Dokažte vztahy (16.2.9).

19. Dokažte rovnosti (16.2.10) a (16.2.11).
Návod: Pro výpočet integrálu užijte formule

$$\int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2 + i\xi.\eta\right) d\xi = (2\pi)^{N/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2\right).$$

20. Dokažte, že projektor B z důkazu věty 16.2.6 je ve Schrödingerově reprezentaci dán vztahem (16.2.14), a že je $\dim B = 1$.
Návod: Aplikujte B na vektory ortonormální báze v $L^2(\mathbb{R}^n)$ zadané pomocí Hermiteových funkcí.

21. Dokažte, že pro Weylův operátor platí vztah (16.2.15).
Návod: Operátor $A := sQ - tP$ je symetrický a $A \upharpoonright \mathscr{S}(\mathbb{R})$ je v podstatě samosdružený; ověřte, že $W(rt, rs) = e^{i\bar{A}r}$ pro všechna $r \in \mathbb{R}$.

22. Dokažte rovnost (16.2.19).

17.1 ZÁKLADNÍ DYNAMICKÝ POSTULÁT

Začneme tím, že zavedeme pojem **unitárního propagátoru**, jímž rozumíme množinu $\{U(t,s)\colon s,t \in \mathbb{R}\}$ unitárních operátorů na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ takovou, že
(i) platí $U(t,s)\,U(s,r) = U(t,r)$ pro všechna $r,s,t \in \mathbb{R}$, odtud speciálně plyne $U(t,t) = I$ pro každé $t \in \mathbb{R}$,
(ii) zobrazení $(s,t) \mapsto U(t,s)$ je silně spojité v $\mathbb{R}^2$.

Statistický operátor reprezentující stav systému v okamžiku t označíme W_t, podobně budeme užívat symbolu ψ_t pro vektor popisující čistý stav v okamžiku t (a podle potřeby též symbolů $W(t)$, $\psi(t)$ apod.). Předpokládejme, že v časovém intervalu J se systém nerušeně vyvíjí, tj. že na něm během této doby neuskutečníme žádné měření. V takovém případě postulujeme, že

(q4-a) časový vývoj systému je popsán unitárním propagátorem:

platí $W_t = U(t,s)\,W_s U(t,s)^{-1}$, resp. $\psi_t = U(t,s)\,\psi_s$ pro všechna $s,t \in J$.

Z vlastností unitárního propagátoru plyne několik jednoduchých důsledků. Podmínky (i), (ii) dávají $U(t,s)^{-1} = U(s,t)$. Dále je zřejmé, že pro všechna $s,t \in J$ platí

$$\operatorname{Tr} W_t^2 = \operatorname{Tr} W_s^2\,; \tag{1}$$

to znamená, že se zachovává veličina, která charakterizuje, „nakolik" je daný stav smíšený. Speciálně čistý stav může časovým vývojem přejít opět jen v čistý stav (viz cvičení 15.11), tj. tvrzení obsažená v postulátu jsou vzájemně konzistentní.

Množině $\{U(t,s)\colon s,t \in \mathbb{R}\}$ se většinou říká stručně *propagátor*; užívá se i termínu *evoluční operátor* nebo *operátor časového vývoje*, a to i pro jednotlivé operátory z dané množiny. Postulát (q4-a) lze motivovat následujícím způsobem. Předpokládejme, že v okamžiku s je stav systému popsán paprskem Φ_s. Necháme-li jej nerušeně vyvíjet v časovém úseku $[s,t]$, přejde ve stav popisovaný paprskem Φ_t. V okamžiku s lze systém pochopitelně připravit v libovolném stavu, proto je vztahem

$$\Phi_t = \tilde{U}(t,s)\ \Phi_s$$

 definováno zobrazení $\tilde{U}(t, s)$ na prostoru stavů. Toto zobrazení má smysl i v případě $t < s$, kdy ovšem Φ_s znamená stav, který se vyvinul v časovém úseku $[t, s]$ ze stavu Φ_t.

Ve shodě se zkušeností předpokládáme, že při časovém vývoji se zachovává pravděpodobnost přechodu mezi stavy (viz (15.1.1)), tj. že platí

$$P(\Phi_s, \Psi_s) = P(\tilde{U}(t, s)\, \Phi_s, \tilde{U}(t, s)\, \Psi_s)$$

pro libovolné stavy Φ_s a Ψ_s. Potom lze užít Wignerovy věty (viz komentář), podle níž existuje unitární nebo antiunitární operátor $U'(t, s)$ takový, že pro libovolný jednotkový vektor $\psi_s \in \Psi_s$ patří $\psi_t \equiv U'(t, s)\psi_s$ do Ψ_s. Operátor $U'(t, s)$ je přitom určen zobrazením $\tilde{U}(t, s)$ až na multiplikativní konstantu (fázový faktor).

Protože vektory $U'(r, t)\, U'(t, s)\psi_s$ a $U'(r, s)\psi_s$ reprezentují týž stav, mohou se lišit nanejvýš fázovým faktorem,

$$U'(r, t)\, U'(t, s)\, \psi_s = e^{i\alpha(r,t,s;\, \psi_s)}\, U'(r, s)\, \psi_s\,.$$

Užitím linearity resp. antilinearity operátorů lze ověřit nezávislost fáze na vektoru ψ_s, a protože za ψ_s můžeme dosadit libovolný vektor ze stavového prostoru, platí operátorová rovnost

$$U'(r, t)\, U'(t, s) = e^{i\alpha(r,t,s)}\, U'(r, s)\,.$$

Použijeme-li tento vztah spolu s asociativitou operátorového násobení k úpravě výrazu $U'(r, t)\, U'(t, s)\, U'(s, 0)$ dostáváme rovnost

$$\alpha(r, s, t) = \beta(r, t) - \beta(r, s) + \beta(t, s)\,,$$

kde $\beta(r, t) \equiv \alpha(r, t, 0)$. Od operátorů $U'(t, s)$ můžeme přejít k $U(t, s) \equiv \equiv e^{-i\beta(t,s)}\, U'(t, s)$. Tento přechod nemá žádný vliv na měřené veličiny a operátory $U(t, s)$ již splňují požadavek (i) kladený na unitární propagátor. Budeme-li požadovat, aby byl splněn i požadavek (ii), snadno dokážeme, že operátory $U(t, s)$ jsou unitární (viz cvičení 1).

Systém označíme za **konzervativní**, jestliže jeho propagátor splňuje podmínku $U(t + \tau, s + \tau) = U(t, s)$ pro všechna $s, t, \tau \in \mathbb{R}$. Ze zkušenosti víme, že každý izolovaný systém je konzervativní (viz poznámku 15.1.1b); totéž platí pro systémy, jejichž interakce se zbytkem světa je sice nezanedbatelná, ale časově nezávislá. Pro konzervativní systémy definujeme $U(t) := U(t + \tau, \tau)$ pro libovolné pevně zvolené τ; postulát (q4-a) potom říká, že množina $\{U(t) \colon t \in \mathbb{R}\}$ je jednoparametrická silně spojitá grupa unitárních operátorů.

Podle Stoneova teorému je grupa $\{U(t)\}$ generována nějakým samosdruženým operátorem A. Základní dynamický postulát spočívá v tom, že ztotožníme operátor $-A$ s hamiltoniánem systému (v běžných jednotkách s operátorem $\hbar^{-1}H$):

(q4-a) propagátor konzervativního systému s hamiltoniánem H je pro libovolné $t \in \mathbb{R}$ dán vztahem

$$U(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}. \tag{2}$$

Odtud snadno plyne pro konzervativní systém s hamiltoniánem H vyjádření časového vývoje v diferenciálním tvaru:

17.1.1 Tvrzení (*Schrödingerova rovnice*): Platí-li $W_s\, D(H) \subset D(H)$ v některém okamžiku s, pak pro všechna $\psi \in D(H)$, $t \in \mathbb{R}$ je funkce $t \mapsto W_t\psi$ diferencovatelná a splňuje rovnici

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_t\psi = (HW_t - W_tH)\,\psi. \tag{3a}$$

Je-li speciálně $\psi_s \in D(H)$ pro nějaké $s \in \mathbb{R}$, pak funkce $t \mapsto \psi_t$ je diferencovatelná a platí

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_t = H\psi_t. \tag{3b}$$

Důkaz: Tvrzení týkající se čistých stavů plyne přímo z tvrzení 11.1.1. Pro libovolné $t \in \mathbb{R}$ platí $W_t\, D(H) \subset U(t-s)\, W_s\, U(s-t)\, D(H) \subset U(t-s)\, W_s\, D(H) \subset \subset D(H)$, protože $U(\tau)$ jakožto omezená funkce operátoru H zobrazuje $D(H)$ do sebe. Pro $\psi \in D(H)$ tedy platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_t\psi = \lim_{\delta\to 0}\frac{W_{t+\delta} - W_t}{\delta}\psi = \lim_{\delta\to 0}\left\{U(\delta)\, W_t\frac{U(-\delta) - I}{\delta}\psi + \frac{U(\delta) - I}{\delta} W_t\psi\right\}.$$

Limita druhého členu podle již zmíněného tvrzení 11.1.1 existuje a je rovna $-\mathrm{i}HW_t\psi$. Pro první člen dostáváme

$$\left\| U(\delta)\, W_t\frac{U(-\delta) - I}{\delta}\psi - \mathrm{i}W_tH\psi\right\| \leqq$$

$$\leqq \|U(\delta)\, W_t\| \left\|\frac{U(-\delta) - I}{\delta}\psi - \mathrm{i}H\psi\right\| + \|(U(\delta) - I)\, W_tH\psi\|,$$

a protože $\|U(\delta)\, W_t\| \leqq 1$, pravá strana jde k nule pro $\delta \to 0$; odtud plyne rovnost (3a). ∎

Snadno ukážeme, že při zadané „počáteční podmínce“ $\psi \equiv \psi_0 \in D(H)$ má rovnice (3b) jediné řešení, a to právě ve tvaru $\psi_t = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\psi$. Jinými slovy, v případě konzervativního systému Schrödingerova rovnice určuje jednoznačně jeho unitární propagátor. Pro nekonzervativní systémy, jejichž hamiltonián závisí na čase, tj. je to funkce $t \mapsto H(t)$ s hodnotami v $\mathscr{L}_{\mathrm{sa}}(\mathscr{H})$, Schrödingerovu rovnici proto postulujeme:

(q4-c) časový vývoj systému s takovýmto hamiltoniánem je pro smíšené, resp. čisté stavy určen rovnicemi

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W_t = H(t)\,W_t - W_t H(t)\,, \tag{4a}$$

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_t = H(t)\,\psi_t\,. \tag{4b}$$

Aby tento postulát skutečně určoval časový vývoj systému, je třeba, aby např. rovnice (4b) měla řešení $t \mapsto \psi_t$ pro „dostatečně mnoho počátečních podmínek“, tj. vektorů ψ_s v určitém počátečním čase $s < t$, čímž se rozumí, že ψ_s tvoří hustou množinu. Potom pro každé $t > s$ vztah $U(t, s)\,\psi_s = \psi_t$ zadává hustě definovaný operátor a je třeba ověřit konzistenci s postulátem (q4-a), tj. přesvědčit se, že spojitá rozšíření operátorů $U(t, s)$ tvoří unitární propagátor. Vzniká úloha vymezit některé třídy hamiltoniánů, které tyto okolnosti respektují. Těmto záležitostem se budeme podrobněji věnovat v § 17.5.

Známe-li časový vývoj stavu, můžeme určit, jak se s časem mění měřitelné veličiny jako pravděpodobnosti, střední hodnoty jednotlivých pozorovatelných apod. Je-li např. $AW_t \in \mathscr{J}_1$, platí

$$\langle A\rangle_{W_t} = \mathrm{Tr}\,(AW_t)\,. \tag{5}$$

Také tuto závislost můžeme vyjádřit v diferenciálním tvaru, pokud zesílíme předpoklady.

17.1.2 Věta: Nechť W_t popisuje stav konzervativního systému s hamiltoniánem H pro všechna t z nějakého otevřeného intervalu $J \subset \mathbb{R}$. Střední hodnota pozorovatelné A splňuje pro $t \in J$ rovnici

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle A\rangle_{W_t} = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{i}(HA - AH)\,W_t)\,. \tag{6a}$$

pokud platí následující předpoklady: (i) operátory AW_t, HAW_t, AHW_t jsou jaderné pro $t \in J$, (ii) funkce $t \mapsto \|AU(t)\,\varphi\|$ je omezená pro všechna $\varphi \in \mathrm{Ran}\,W_s$, je-li $t + s \in J$, (iii) řada vyjadřující pravou stranu rovnosti (6a) konverguje v J stejnoměrně vzhledem k t.

17.1.3 Poznámky; (a) Předpoklad (iii) je splněn např. tehdy, když $\dim \mathrm{Ran}\, W_t < \infty$ pro některé $t \in J$ (je zřejmé, že tato dimenze se s časem nemění). Speciálně to platí pro libovolný čistý stav ψ_t; předpoklad (i) v tomto případě zní $\psi_t \in D(HA - AH)$ pro všechna $t \in J$. Předpoklad (ii) je splněn automaticky, je-li A omezená pozorovatelná; snadno se lze přesvědčit, že derivace na levé straně vztahu (6a) je v tomto případě spojitá.

(b) Je-li operátor $i(HA - AH)$ v podstatě samosdružený, můžeme tvrzení vyjádřit v obvyklejším tvaru

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle_{W_t} = \langle \overline{i(HA - AH)}\rangle_{W_t}. \tag{6b}$$

Důkaz věty 2: Užijeme-li ortonormální báze $\{\varphi_j^s\}$ tvořené vlastními vektory operátoru W_s odpovídající vlastním hodnotám w_j, můžeme psát

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle_{W_t} = \frac{d}{dt}\sum_j w_j(U(t-s)\,\varphi_j^s, AU(t-s)\,\varphi_j^s), \tag{7}$$

kde s je libovolný bod intervalu J. Pro kterýkoli člen této řady platí

$$\frac{d}{dt}(U(t-s)\,\varphi_j^s, AU(t-s)\,\varphi_j^s) =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left\{\left(\frac{U(\delta)-I}{\delta}\,\varphi_j^t, AU(\delta)\,\varphi_j^t\right) + \left(A\varphi_j^t, \frac{U(\delta)-I}{\delta}\,\varphi_j^t\right)\right\},$$

kde $\varphi_j^t = U(t-s)\,\varphi_j^s$; v druhém členu jsme užili toho, že podle předpokladu (i) je $\varphi_j^t \in D(A)$. Pro první člen s ohledem na předpoklady (i), (ii) a postulát (q4-b) dostáváme

$$\left|\left(\frac{U(\delta)-I}{\delta}\,\varphi_j^t, AU(\delta)\,\varphi_j^t\right) - i(H\varphi_j^t, A\varphi_j^t)\right| \leqq$$

$$\leqq \left|\left(\left(\frac{U(\delta)-I}{\delta} + iH\right)\varphi_j^t, AU(\delta)\,\varphi_j^t\right)\right| + |(H\varphi_j^t, A(U(\delta)-I)\,\varphi_j^t)| \leqq$$

$$\leqq \|AU(\delta)\,\varphi_j^t\|\,\left\|\left(\frac{U(\delta)-I}{\delta} + iH\right)\varphi_j^t\right\| + \|AH\varphi_j^t\|\,\|(U(\delta)-I)\,\varphi_j^t\| \to 0$$

pro $\delta \to 0$, dohromady je tedy hledaná derivace rovna $-2\,\mathrm{Im}\,(H\varphi_j^t, A\varphi_j^t) = (\varphi_j^t, i(HA - AH)\,\varphi_j^t)$. Podle předpokladu (iii) můžeme na pravé straně rovnosti (7) derivovat po členech; dosazením pak dostaneme požadovaný výsledek. ■

Výhoda diferenciálního vyjádření je opět v tom, že se hodí i pro nekonzervativní systémy. Snadno se přesvědčíme, že pro systém s hamiltoniánem závislým na čase dostaneme obdobným postupem formálně vztah typu (6a), v němž stojí $H(t)$ místo H. Tuto úvahu je možno učinit korektní, máme-li podrobnější informaci o vlastnostech operátorové funkce $H(.)$.

Nyní uvedeme známý důsledek věty 2, který říká, že v kvantověmechanickém systému N částic interagujících prostřednictvím potenciálu splňují střední hodnoty kartézských souřadnic za určitých předpokladů rovnice klasického typu. Uvažujme reálnou diferencovatelnou funkci $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a označme $F_j \equiv -\partial V/\partial x_j$; potom lze definovat operátory $V := V(Q_1, \ldots, Q_n)$, resp. $F_j := F_j(Q_1, \ldots, Q_n)$ na $L^2(\mathbb{R}^n)$, a dále

$$H = \sum_{j=1}^{n} (2m_j)^{-1} P_j^2 + V ; \tag{8}$$

přitom Q_j, P_j jsou jako obvykle operátory kartézských souřadnic a složek impulsu.

17.1.4 Důsledek (*Ehrenfestova věta*): Předpokládejme, že $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ a odpovídající operátor vyhovuje podmínce $V\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Předpokládejme dále, že operátor $H_{\mathcal{S}} := H \restriction \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je v podstatě samosdružený. Nechť jednotkový vektor ψ_t popisující stav systému, $\psi_t = \exp(-\mathrm{i}\bar{H}_{\mathcal{S}}(t-s))\,\psi_s$, patří do $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pro všechna t z nějakého otevřeného intervalu $J \subset \mathbb{R}$, a nechť funkce $t \mapsto \max\{\|Q_j\psi_t\|, \|P_j\psi_t\|\}$ je omezená v J. Potom funkce $t \mapsto \langle Q_j\rangle_{\psi_t}$ je dvakrát diferencovatelná a platí

$$m_j \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \langle Q_j\rangle_{\psi_t} = \langle F_j\rangle_{\psi_t} . \tag{9a}$$

Důkaz: Každý z operátorů F_j je s ohledem na větu 9.4.8e samosdružený a $D(F_j) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)\colon \int_{\mathbb{R}^n} |F_j(x)\,\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty\}$. Podle předpokladu je $V\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, takže z identity

$$F_j(x)\,\psi(x) = V(x)\,\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\,(V(x)\,\psi(x))$$

plyne $F_j\,\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tj. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset D(F_j)$. Užijeme-li vyjádření (15.2.14), dostaneme pro libovolné $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vztahy $\mathrm{i}(HP_j - P_jH)\,\psi = F_j\psi$, resp. $\mathrm{i}(HQ_j - Q_jH)\,\psi = m_j^{-1}P_j\psi$. Podle předpokladu platí $\psi_t \in D(HQ_j - Q_jH) \cap D(HP_j - P_jH)$ pro $t \in J$; současně je splněn předpoklad (ii) věty 2. Odtud plyne

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle P_j\rangle_{\psi_t} = \langle F_j\rangle_{\psi_t} , \tag{9b}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle Q_j\rangle_{\psi_t} = m_j^{-1}\langle P_j\rangle_{\psi_t} \tag{9c}$$

pro všechna $t \in J$; kombinací těchto vztahů dostáváme (9a). ■

Uvedený výsledek můžeme chápat jako motivaci postulátu (q4-b), protože při odvození správných „klasických" vztahů (9) mezi středními hodnotami bylo podstatné, že za operátor H vystupující ve vztazích (6) dosazujeme hamiltonián (8).

Závěrem tohoto paragrafu se zmíníme o veličinách, jež mají z hlediska časového vývoje zvláštní postavení. Uvažujme konzervativní systém s hamiltoniánem H. O stavu W_t říkáme, že je **stacionární**, jestliže komutuje s hamiltoniánem, $W_t H \subset \subset H W_t$, pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Jde-li speciálně o čistý stav, pak tato podmínka znamená, že ψ_t je vlastním vektorem hamiltoniánu. Pro stacionární stav podle Stoneova teorému platí $W_t = e^{-iH(t-s)} W_s e^{-iH(s-t)} = W_s$ pro libovolná $s, t \in \mathbb{R}$. Podobně pro stacionární čistý stav, $H\psi_s = \lambda\psi_s$, platí $\psi_t = e^{-i\lambda(t-s)}\psi_s$, tj. vektory ψ_t leží uvnitř téhož paprsku. Z tohoto důvodu časovou závislost u stacionárních stavů zpravidla nevyznačujeme.

Je zřejmé, že střední hodnota libovolné pozorovatelné ve stacionárním stavu nezávisí na čase. Je-li A pozorovatelná taková, že střední hodnota $\langle E_A(\Delta)\rangle_{W_t}$ je časově nezávislá pro všechna $\Delta \in \mathcal{B}$ a všechny realizovatelné stavy W_t daného systému, nazýváme ji **integrálem pohybu** (nebo **zachovávající se veličinou**); tato definice se hodí i pro nekonzervativní systémy. Pravděpodobnostní míra $w(.,A;\ W_t)$ v takovém případě nezávisí na čase. To znamená, že pro libovolnou reálnou borelovskou funkci f je střední hodnota $\langle f(A)\rangle_{W_t}$ na čase nezávislá, pokud má smysl o ní mluvit; speciálně to platí o $\langle A\rangle_{W_t}$. Pro konzervativní systémy platí jednoduché kritérium:

17.1.5 Tvrzení: Pozorovatelná A je integrálem pohybu právě tehdy, když operátor A komutuje s hamiltoniánem.

Důkaz: Postačující podmínka je jednoduchá. Je-li A integrál pohybu, platí $(\psi, U(-t)\, E_A(\Delta)\, U(t)\, \psi) = (\psi, E_A(\Delta)\, \psi)$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$, $\Delta \in \mathcal{B}$, jakmile vektor ψ leží v některém z koherentních podprostorů $\mathcal{H}_\alpha$. Operátory H, A odpovídají pozorovatelným, proto jsou redukovány všemi E_α; totéž platí pro $U(t)$. Odtud podobně jako v důkazu tvrzení 15.5.1 odvodíme pro všechna $t \in \mathbb{R}$, $\Delta \in \mathcal{B}$ vztah $E_A(\Delta)\, U(t) = U(t)\, E_A(\Delta)$, jenž je ekvivalentní komutativitě operátorů H, A. ■

17.1.6 Důsledek: Celková energie konzervativního systému je integrálem pohybu.

17.1.7 Důsledek: Každý superselekční operátor je integrálem pohybu.

17.2 RŮZNÁ POJETÍ ČASOVÉHO VÝVOJE

Většina předpovědí kvantové teorie se vyjadřuje pomocí spektrálních vlastností samosdružených operátorů reprezentujících pozorovatelné. Tyto vlastnosti patří mezi unitární invarianty; lze tedy očekávat, že pro teorii je principiálně nepodstatná operace, při níž operátory všech pozorovatelných nahradíme unitárně ekvivalentními operátory získanými pomocí téhož unitárního operátoru. Ve vztahu k popisu časového vývoje je zajímavý zejména případ, kdy je unitární ekvivalence zprostředkována evolučním operátorem.

514 Způsob popisu, jímž jsme se zabývali v předchozím paragrafu, nazýváme **Schrödingerovým pojetím**. Časový vývoj se v něm projevuje závislostí statistických operátorů, resp. vektorů popisujících stavy na čase. Na druhé straně operátory reprezentující pozorovatelné ve Schrödingerově pojetí na čase nezávisí; výjimku představují pozorovatelné, jejichž závislost na čase je parametrická, tj. nesouvisí s dynamikou systému,

V **Heisenbergově pojetí** přiřazujeme libovolné pozorovatelné operátorovou funkci $A_H\colon \mathbb{R} \to \mathscr{L}_{sa}(\mathscr{H})$ definovanou vztahem

$$A_H(t) := U(t,s)^{-1} A\, U(t,s)\,, \tag{1}$$

kde s je pevně zvolený okamžik a $A_H(s) = A$ je operátor reprezentující danou pozorovatelnou ve Schrödingerově pojetí. Stejně jako výše se v běžném způsobu vyjadřování nečiní rozdíl mezi touto funkcí a jejími hodnotami a mluví se o pozorovaelné $A_H(t)$ apod. Z důsledku 17.1.7 je vidět, že libovolná pozorovatelná $A_H(t)$ je redukována všemi koherentními podprostory.

Předpovědi teorie jako jsou střední hodnoty pozorovatelných musí být nezávislé na zvoleném pojetí, proto jsou stavy v Heisenbergerově pojetí popisovány statistickými operátory $W_H(t) := U(t,s)^{-1}\, W_t\, U(t,s)$, resp. vektory $\psi_H(t) := U(t,s)^{-1}\, \psi_t$. Z postulátu (q4-a) potom plyne, že stavy v Heisenbergově pojetí jsou nezávislé na čase; obvykle se proto píše $W_H(t) \equiv W$, resp. $\psi_H(t) \equiv \psi$.

Je-li systém konzervativní, snadno z definice (1) odvodíme vztah mezi operátory reprezentujícími danou pozorovatelnou v různých okamžicích,

$$A_H(t) = U(t'-t)\, A_H(t')\, U(t-t')\,; \tag{2a}$$

pro nekonzervativní systémy analogický vztah obecně *neplatí*, protože propagátor nemusí být v tomto případě komutativní množina. Zcela stejným způsobem jako u tvrzení 17.1.1 můžeme ze vztahu (2a) odvodit diferenciální tvar pohybové rovnice:

17.2.1 Tvrzení: Nechť $A_H(t)$ je omezená pozorovatelná taková, že $A_H(s)\, D(H) \subset \subset D(H)$ pro některé $s \in \mathbb{R}$. Potom funkce $A_H(.)$ je diferencovatelná pro všechna $\psi \in D(H)$ a platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_H(t)\, \psi = \mathrm{i}(H A_H(t) - A_H(t) H)\, \psi\,. \tag{2b}$$

Je ilustrativní porovnat rovnici (2b) se vztahy (17.1.6). Norma operátoru reprezentujícího pozorovatelnou se při časovém vývoji zachovává, proto pozorovatelná, jež je omezená v jednom okamžiku zůstává omezenou i nadále. Pro neomezené pozorovatelné platí formálně stejný vztah; jeho skutečná platnost závisí podstatně na vztazích mezi definičními obory operátorů H a $A_H(t)$. V každém případě ovšem můžeme vyšetřovat časový vývoj neomezených pozorovatelných pomocí jejich omezených funkcí (cvičení 3). V Heisenbergově pojetí se názorně projevují integrály pohybu:

jsou to právě ty pozorovatelné, pro něž je operátorová funkce $A_H(.)$ konstantní, $A_H(t) = A$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Toto tvrzení se týká i nekonzervativních systémů.

Třetím užívaným pojetím je **Diracovo** nebo též **interakční pojetí**, při němž časovou závislost rozdělujeme mezi stavy a pozorovatelné. Tohoto pojetí se užívá pro systémy, jejichž hamiltonián má tvar

$$H = \overline{H_0 + V}, \tag{3a}$$

kde H_0, V jsou samosdružené operátory. U nekonzervativních systémů se hamiltonián rozděluje tak, že operátor H_0 je časově nezávislý,

$$H(t) = \overline{H_0 + V(t)}. \tag{3b}$$

Označíme $U_0(t) := \exp(-\mathrm{i}H_0 t)$. Diracovo pojetí dostaneme ze Schrödingerova unitární transformací $U_0(t-s)$, kde s je opět pevně zvolený okamžik, v němž jsou stavy v obou pojetích popsány týmž statistickým operátorem, resp. vektorem

$$W_\mathrm{D}(t) := U_0(s-t)\, W_t\, U_0(t-s) = U_0(s-t)\, U(t,s)\, W_s\, U(s,t)\, U_0(t-s), \tag{4a}$$

$$\psi_\mathrm{D}(t) := U_0(s-t)\, \psi_t = U_0(s-t)\, U(t,s)\, \psi_s. \tag{4b}$$

Schrödingerovská pozorovatelná A je v Diracově pojetí reprezentována operátorovou funkcí $A_\mathrm{D}(.)$, kde

$$A_\mathrm{D}(t) := U_0(s-t)\, A\, U_0(t-s). \tag{5a}$$

Pozorovatelné tedy na sebe berou tu část časové závislosti, jež odpovídá operátoru H_0. Stejně jako výše můžeme vztah (5a) pro omezené pozorovatelné snadno přepsat do diferenciálního tvaru:

17.2.2 Tvrzení: Nechť $A_\mathrm{D}(t)$ je omezená pozorovatelná a $A_\mathrm{D}(s)\, D(H_0) \subset D(H_0)$; potom pro každé $\psi \in D(H_0)$ je funkce $A_\mathrm{D}(.)\,\psi$ diferencovatelná a platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_\mathrm{D}(t)\, \psi = \mathrm{i}(H_0 A_\mathrm{D}(t) - A_\mathrm{D}(t) H_0)\, \psi. \tag{5b}$$

Přechod k diferenciálnímu vyjádření vztahů (4) je poněkud komplikovanější. Nejjednodušší je situace, kdy V je hermitovský operátor nezávislý na čase, tj. $H = H_0 + V$ je samosdružený a $D(H) = D(H_0)$. Je-li potom $W_s\, D(H_0) \subset$ $\subset D(H_0)$, resp. $\psi_s \in D(H_0)$, platí

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_\mathrm{D}(t)\, \psi = (V_\mathrm{D}(t)\, W_\mathrm{D}(t) - W_\mathrm{D}(t)\, V_\mathrm{D}(t))\, \psi \tag{6a}$$

pro všechna $\psi \in D(H_0)$, resp.

$$i \frac{d}{dt} \psi_D(t) = V_D(t)\, \psi_D(t) \tag{6b}$$

(cvičení 4), kde $V_D(t) := U_0(s-t)\, V\, U_0(t-s)$ odpovídá pozorovatelné V v Diracově pojetí – viz (5a). Rovnice (6) lze formálně odvodit i v jiných případech; o jejich skutečné platnosti a existenci řešení je možné opět rozhodnout teprve na základě konkrétnějších informací o operátorech H_0, $V(t)$. Diracovo pojetí se hodí zejména v situacích, kdy řešení pohybových rovnic odpovídajících některé části celkového hamiltoniánu umíme najít přesně. V řadě úloh lze hamiltonián přirozeně rozdělit na část H_0, jež odpovídá v tom či onom smyslu volnému pohybu, a část V popisující interakci; nejjednodušším příkladem je rozdělení hamiltoniánu nerelativistické bezspinové částice na operátory kinetické a potenciální energie. Volná úloha je zpravidla přesně řešitelná; Diracovo pojetí pak umožňuje studovat odděleně tu „část" propagátoru, jež odpovídá interakčnímu hamiltoniánu V a je pro daný systém charakteristická (odtud pochází název interakční pojetí). Tento problém se často řeší pomocí poruchových metod; s typickým příkladem se setkáme v § 17.5.

Interakčního pojetí se užívá jak v kvantové mechanice, tak i v praktických výpočetních metodách kvantové teorie polí. V posledně uvedeném případě však vznikají obtíže. Obecně vzato *není užívání interakčního pojetí v kvantové teorii polí oprávněné.* Důvodem je skutečnost, že pro systémy s nekonečným počtem stupňů volnosti mohou existovat neekvivalentní reprezentace kanonických komutačních relací.

17.3 DVA PŘÍKLADY

V tomto paragrafu probereme časový vývoj dvou jednoduchých kvantověmechanických systémů. Prvním z nich je *soustava volných částic* popisovaná hamiltoniánem

$$H_0 := \sum_{j=1}^{n} (2m_j)^{-1} P_j^2 \tag{1}$$

na stavovém prostoru $L^2(\mathbb{R}^n)$, kde m_j jsou kladná čísla; fyzikálně zajímavý případ odpovídá situaci, kdy $n = 3N$ a $m_{3k+1} = m_{3k+2} = m_{3k+3}$ pro $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Stejně jako v příkladu 15.5.10 se lze přesvědčit, že *operátor H_0 je samosdružený* a má *čistě spojité spektrum,* $\sigma(H_0) = \mathbb{R}^+$. Dále platí, že operátor $H_0 \upharpoonright C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ je v podstatě samosdružený (podobně jako ve cvičení 15.18). Snadno lze najít explicitní vyjádření propagátoru $U(t) = \exp(-iH_0 t)$.

17.3.1 Tvrzení: Propagátor odpovídající hamiltoniánu (1) působí na libovolné $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ podle vztahu

$$(U(t)\,\psi)\,(x) = \operatorname*{l.i.m}_{k\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{m_j}{2\pi i t}\right)^{1/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{i}{2t}\sum_{j=1}^{n} m_j |x_j - y_j|^2\right) \psi(y)\, f_k(y)\, dy\,, \quad (2a)$$

kde $\{f_k\} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ je posloupnost taková, že $|f_k(x)| \leqq 1$ a $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 1$ pro s. v. $x \in \mathbb{R}^n$. Pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí $U(t)\,\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Důkaz: Ověříme, že pro vektory $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ platí formule bez limitního přechodu

$$(U(t)\,\psi)\,(x) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{m_j}{2\pi i t}\right)^{1/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{i}{2t}\sum_{j=1}^{n} m_j |x_j - y_j|^2\right) \psi(y)\, dy\,, \quad (2b)$$

Vztah (2a) odtud potom plyne na základě spojitosti operátoru $U(t)$ v důsledku toho, že $\psi = \operatorname*{s-lim}_{k\to\infty} \psi f_k$.

Uvažujme dále funkce u_ε: $u_\varepsilon(k) = \exp\left(-i(t - i\varepsilon)\sum_{j=1}^{n}(2m_j)^{-1} k_j^2\right)$ a $u \equiv u_0$. Podle pravidel funkcionálního počtu (viz větu 9.3.3) platí

$$U(t) \equiv u(P_1, P_2, \dots, P_n) = \operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\to 0+} u_\varepsilon(P_1, \dots, P_n)\,. \quad (2c)$$

Působení operátoru na pravé straně můžeme vyjádřit pomocí cvičení 15.20; po jednoduché integraci pro libovolné $\varepsilon > 0$ dostáváme

$$(u_\varepsilon(P_1, \dots, P_n)\,\psi)\,(x) =$$
$$= \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{m_j}{2\pi i(t - i\varepsilon)}\right)^{1/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{i}{2(t - i\varepsilon)}\sum_{j=0}^{n} m_j (x_j - y_j)^2\right) \psi(y)\, dy\,. \quad (2d)$$

Ze vztahu (2c) a ze závěru příkladu 2.2.2 plyne, že ke každému $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ existuje posloupnost $\{\varepsilon_m\}$, $\varepsilon_m \to 0$, taková, že $(u_{\varepsilon_m}(P_1, \dots, P_n)\,\psi)\,(x)$ konverguje pro s. v. $x \in \mathbb{R}^n$ k $(u(P_1, \dots, P_n)\,\psi)\,(x)$. Je-li $\psi \in L^2 \cap L^1$, jsou splněny předpoklady Lebesgueovy věty a limitu lze s integrálem zaměnit; tím je rovnost (2b) dokázána.

Pro důkaz poslední části tvrzení přepíšeme rovnici (2b) ve tvaru

$$(U(t)\,\psi)\,(x) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{m_j}{it}\right)^{1/2} e(x)\,(\mathscr{F}(e\psi)\,(x)\,,$$

kde $x' = [(m_1/2t)\,x_1, \ldots, (m_n/2t)\,x_n]$, funkce e je definována vztahem

$$e(x) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2t}\sum_{j=1}^{n} m_j x_j^2\right)$$

a $\mathcal{F}$ označuje jako obvykle Fourierovu transformaci. Snadno ukážeme, že $e\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, jakmile je $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, a protože také $\mathcal{F}\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, je $U(t)\,\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. ■

Podle cvičení 2 není žádný stav soustavy volných částic stacionární. Znalost explicitního vyjádření propagátoru nám umožňuje učinit silnější závěry.

17.3.2 Příklad (*rozplývání stavů s minimální neurčitostí*): Uvažujme případ $n = 1$, $m_1 = m$, a vezměme za ψ stav (16.1.13a) s daným $q, p \in \mathbb{R}$. Vektor $\psi_t = U(t)\,\psi$ lze najít přímým výpočtem (cvičení 6). Fakticky nás zajímá hustota pravděpodobnosti nalezení částice v bodě x, jež je rovna

$$|\psi_t(x)|^2 = (2\pi(\Delta q)_t^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2(\Delta q)_t^2}\left(x - q - \frac{pt}{m}\right)^2\right\}, \tag{3a}$$

kde

$$(\Delta q)_t^2 := (\Delta q)^2 + \frac{t^2}{4m^2(\Delta q)^2} = (\Delta q)^2 + \frac{(\Delta p)^2\, t^2}{m^2}\,; \tag{3b}$$

poslední rovnost platí díky tomu, že ψ je stav s minimální neurčitostí, $\Delta q \Delta p = \frac{1}{2}$. Impuls je integrálem pohybu (viz tvrzení 17.1.5), proto se jeho směrodatná odchylka s časem nemění, $(\Delta P)_{\psi_t} = (\Delta P)_\psi \equiv \Delta p$. Naproti tomu směrodatná odchylka souřadnice s časem roste, proto ψ_t není pro $t > 0$ stav s minimální neurčitostí.

Závěry, k nimž jsme dospěli v tomto příkladu, platí daleko obecněji.

17.3.3 Věta: Nechť stav soustavy volných částic v nějakém okamžiku s splňuje $\psi_s \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Potom pro všechna $j = 1, \ldots, n$ a $t \geqq s$ platí

$$\langle Q_j \rangle_{\psi_t} = \langle Q_j \rangle_{\psi_s} + v_j(t - s)\,, \tag{4a}$$

$$(\Delta Q_j)_{\psi_t}^2 = (\Delta Q_j)_{\psi_s}^2 + a_j(t - s) + b_j(t - s)^2\,, \tag{4b}$$

kde

$$v_j := m_j^{-1}\langle P_j \rangle_\psi\,,$$

$$a_j := m_j^{-1}(\langle P_j Q_j + Q_j P_j \rangle_{\psi_t} - 2\langle Q_j \rangle_{\psi_t} \langle P_j \rangle_\psi)\,,$$

$$b_j := m_j^{-2}(\Delta P_j)_\psi^2\,.$$

17.3.4 Poznámky: (a) Podobně jako v předchozím příkladu jsou $P_j, P_j^2, \dots$ integrály pohybu, proto časovou závislost u příslušných středních hodnot nevyznačujeme. O veličině $v := (v_1, \dots, v_n)$ se zpravidla mluví jako o *grupové rychlosti* vlnového balíku.

(b) Ze vztahů (3), (4) je vidět, že pro stavy (16.1.13) platí $\langle PQ + QP\rangle_\psi = 2\langle Q\rangle_\psi \langle P\rangle_\psi$.

Důkaz věty 3: Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $s = 0$; označíme $\psi_s = \psi$. Podle tvrzení 1 platí $\psi_t \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ pro všechna $t \geqq 0$. Užijeme relace $U(t) = F_n^{-1} T_u F_n$ z důkazu tohoto tvrzení. Označíme-li pro pohodlí $u_{x_j} \equiv \partial u/\partial x_j$ apod., pak ze vztahu (15.2.14) dostáváme

$$P_j T_u F_n \psi = -\mathrm{i} u_{x_j}(Q_1, \dots, Q_n)\, F_n \psi + u(Q_1, \dots, Q_n)\, P_j F_n \psi =$$
$$= u(Q_1, \dots, Q_n) \left(P_j - \frac{t}{m_j} Q_j \right) F_n \psi\,.$$

Nyní stačí užít vztahů $F_n^{-1} P_j F_n = -Q_j$ a $F_n^{-1}\, u(Q_1, \dots, Q_n)\, F_n = u(P_1, \dots, P_n) = U(t)$, abychom dostali rovnost $Q_j\, U(t)\, \psi = U(t)\, (Q_j + (t/m_j)\, P_j)\, \psi$, z níž plyne relace (4a). Podobně odvodíme

$$P_j^2 T_u F_n \psi =$$
$$= -u_{x_j x_j}(Q_1, \dots, Q_n)\, F_n \psi - 2\mathrm{i} u_{x_j}(Q_1, \dots, Q_n)\, P_j F_n \psi + u(Q_1, \dots, Q_n)\, P_j^2 F_n \psi =$$
$$= u(Q_1, \dots, Q_n) \left(\frac{t^2}{m_j^2} Q_j^2 - \frac{\mathrm{i}t}{m_j} - \frac{2t}{m_j} Q_j P_j + P_j^2 \right) F_n \psi =$$
$$= u(Q_1, \dots, Q_n) \left(\frac{t^2}{m_j^2} Q_j^2 - \frac{t}{m_j} (P_j Q_j + Q_j P_j) + P_j^2 \right) F_n \psi\,.$$

kde jsme užili kanonických komutačních relací (viz poznámku 16.2.10) a skutečnosti, že $F_n \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Aplikujeme-li na tuto rovnost operátor F_n^{-1}, dostaneme

$$Q_j^2\, U(t)\, \psi = U(t) \left(\frac{t^2}{m_j^2} P_j^2 + \frac{t}{m_j} (Q_j P_j + P_j Q_j) + Q_j^2 \right) \psi\,,$$

a když vyjádříme pomocí této rovnosti a (4a) směrodatnou odchylku $(\Delta Q_j)^2_{\psi_t} = \langle Q_j^2 \rangle_{\psi_t} - \langle Q_j \rangle^2_{\psi_t}$, dospějeme ke vztahu (4b). ■

Fyzikálně nejdůležitějším důsledkem věty 3 je to, že v soustavě volných částic se nezachovává lokalizace. Podle tvrzení 16.1.5 je $(\Delta P_j)_\psi > 0$ pro každý stav, speciálně pro všechna $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$; potom platí $\lim_{t \to \infty} (\Delta Q_j)_{\psi_t} = \infty$ bez ohledu na přesnost, s níž jsme stanovili souřadnici x_j v počátečním okamžiku, tj. při přípravě stavu. Navíc toto tvrzení platí i pro jiné vektory; omezení na funkce z $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ je převážně technického rázu. Povšimněme si, že rychlost rozplývání vlnového balíku není ničím omezena, což odpovídá nerelativistickému charakteru vyšetřované soustavy (viz též cvičení 7).

Druhý systém, jímž se zde budeme zabývat, je *lineární harmonický oscilátor*, jehož hamiltonián má tvar

$$H = \frac{1}{2m} P^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 Q^2 . \tag{5}$$

Tento operátor jsme vyšetřili v příkladu 15.2.5: úvahy, jež jsme tam provedli pro $m^{-1} = \omega = 2$ lze snadno modifikovat na případ libovolných kladných m, ω. Při vyšetřování propagátoru odpovídajícího operátoru (5) můžeme s výhodou užít skutečnosti, že jeho spektrum je čistě bodové.

17.3.5 Příklad (*časový vývoj stavů s minimální neurčitostí*): Uvažujme nejprve stavy (16.1.13b). Jejich vyjádření pomocí ortonormální báze tvořené vlastními vektory operátoru $H = P^2 + Q^2$ snadno najdeme pomocí izomorfismu V z poznámky 4.4.4: platí $V\psi_w = e^{-|w|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}^n (n!)^{-1/2} u_n$, takže ψ_w je dáno obdobnou formulí se záměnou u_n na ψ_n. Odtud dále plyne

$$e^{-iHt} \psi_w = e^{-|w|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-it(2n+1)} \frac{\bar{w}^n}{(n!)^{1/2}} \psi_n ,$$

tj.

$$e^{-iHt} \psi_w = e^{-it} \psi_{we^{2it}} , \tag{6a}$$

kde $w = 2^{-1/2}(q - ip)$. Tento vektor můžeme vyjádřit pomocí vztahu (4.4.6); pro hustotu pravděpodobnosti nalezení částice v bodě x odtud dostáváme

$$|(e^{-iHt} \psi_{p,q})(x)|^2 = \pi^{-1/2} \exp\{-(x - q\cos 2t - p \sin 2t)^2\} . \tag{6b}$$

Vlnový balík tedy nemění svůj tvar a pohybuje se po trajektorii klasického oscilátoru s počáteční polohou q a impulsem p. Jednoduchost a elegance této úvahy vynikne ve srovnání s výpočtem naznačeným v příkladu 8.

Také propagátor harmonického oscilátoru je možné vyjádřit ve tvaru integrálního operátoru:

17.3.6 Věta: Pro všechna $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ a $t \neq n\pi/\omega$, $n = 0, \pm 1, \dots$ platí

$$(U(t)\,\psi)(x) = \operatorname*{l.i.m.}_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} K_t(x, y)\, \psi(y)\, f_k(y)\, dy , \tag{7a}$$

kde

$$K_t(x,y) = (2\pi \mathrm{i})^{-1/2} \left(\frac{\omega}{|\sin \omega t|} \right)^{1/2} \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{\mathrm{i}\omega}{2 \sin \omega t} ((x^2 + y^2) \cos \omega t - 2xy) - \frac{\pi \mathrm{i}}{2} \left[\frac{\omega t}{\pi} \right] \right\}, \tag{7b}$$

přičemž symbol $[\,.\,]$ značí celou část a posloupnost $\{f_k\}$ má stejné vlastnosti jako ve tvrzení 1.

17.3.7 Poznámky: (a) Formálně se lze snadno přesvědčit (cvičení 8), že vektory (7a) splňují Schrödingerovu rovnici s hamiltoniánem (5). Úplný důkaz věty 6 je podstatně komplikovanější a my jej nebudeme uvádět (viz komentář). Pro $t = n\pi/\omega$ ztrácí vztahy (7) smysl; operátory $U(n\pi/\omega)$ však přesto existují a mají následující jednoduchý tvar:

$$(U(t)\,\psi)\,(x) = \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} n/2}\, \psi((-1)^n x)\,.$$

(b) Nejdůležitějším rozdílem oproti případu volných částic je to, že nedochází k rozplývání. Tvar vlnových balíků se může s časem měnit, ale pohyb má periodický charakter, $U(t + 2\pi n/\omega) = (-1)^n\, U(t)$ pro libovolné $t \in \mathbb{R}$.

17.3.8 Příklad (*znovu o stavech s minimální neurčitostí*): Vyšetříme časový vývoj stavů (16.1.13a) pomocí integrální reprezentace propagátoru (7). Přímým, i když poněkud zdlouhavým výpočtem (cvičení 9) dostaneme pro $\psi_t = U(t)\,\psi$ výraz

$$\psi_t(x) = (2\pi(\Delta q)_t^2)^{-1/4} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{(\Delta p)_t}{2(\Delta q)_t} \left[x^2 - \frac{\mathrm{i}\Delta q}{(\Delta p)_t} \left(2xz - \frac{z^2}{m\omega} \sin \omega t \right) \right] - q^2 (\Delta p)^2 - \frac{\mathrm{i}}{2}\, qp \right\}, \tag{8a}$$

kde

$$(\Delta q)_t := \Delta q \cos \omega t + \frac{\mathrm{i}\Delta p}{m\omega} \sin \omega t\,,$$

$$(\Delta p)_t := \Delta p \cos \omega t + \mathrm{i} m\omega\, \Delta q \sin \omega t\,, \tag{8b}$$

$$z := p - \frac{\mathrm{i}q}{2(\Delta q)^2} = \frac{p\,\Delta q - \mathrm{i}q\,\Delta p}{\Delta q}\,;$$

v poslední rovnosti jsme užili toho, že $\Delta q\, \Delta p = \frac{1}{2}$. Vztahy (8) se podstatně zjednoduší, zvolíme-li

$$\Delta q = \frac{\Delta p}{m\omega} = (2m\omega)^{-1/2}\,; \tag{9a}$$

vektor ψ s $q = p = 0$ v tomto případě odpovídá základnímu stavu harmonického oscilátoru. Po dosazení a úpravě dostaneme

$$\psi_t(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega t - \frac{m\omega}{2}\left(x - \frac{\mathrm{i}z}{m\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{z^2}{2m\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\cos\omega t - \frac{1}{2}m\omega q^2 - \frac{\mathrm{i}}{2}qp\right\}, \tag{9b}$$

a odtud dále

$$|\psi_t(x)|^2 = \left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left\{-m\omega\left(x - q\cos\omega t - \frac{p}{m\omega}\sin\omega t\right)^2\right\}. \tag{9c}$$

Dospíváme tak znovu k závěru, jejž jsme v příkladu 5 odvodili pro speciální případ $m^{-1} = \omega = 2$: vlnové balíky odpovídající koherentním stavům (16.1.13) splňujícím podmínku (9a) nemění svůj tvar a pohybují se po trajektorii klasického oscilátoru s počáteční polohou q a rychlostí p/m.

Je nutné zdůraznit, že tento závěr platí jenom pro stavy, které dostaneme ze základního stavu hamiltoniánu (5) aplikací Weylova operátoru. Abychom tuto skutečnost ilustrovali, vyšetříme stav (16.1.13a) s $q = p = 0$, jenž nesplňuje podmínku (9a). Ze vztahů (8) v tomto případě plyne

$$|\psi_t(x)|^2 = (2\pi|(\Delta q)_t|^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2|(\Delta q)_t|^2}\right\}, \tag{10a}$$

kde

$$|(\Delta q)_t|^2 = (\Delta q)^2\cos^2\omega t + \frac{(\Delta p)^2}{m^2\omega^2}\sin^2\omega t, \tag{10b}$$

tj. vlnový balík má tvar gaussovské křivky s periodicky se měnící šířkou.

17.4 FEYNMANŮV INTEGRÁL

Uvažujme opět soustavu kvantověmechanických částic s potenciální interakcí. Pro danou funkci $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ označíme

$$H = \sum_{j=1}^{n} (2m_j)^{-1} P_j^2 + V, \tag{1}$$

kde $V := V(Q_1, \ldots, Q_n)$. Na tomto místě nebudeme specifikovat vlastnosti funkce V. Budeme předpokládat, že operátor H s přirozeným definičním oborem je v podstatě samosdružený; pro $n = 3$ uvádíme ve cvičení 15.9 třídu funkcí, pro něž je tento požadavek splněn.

Naším cílem je nyní odvodit jedno užitečné vyjádření propagátoru $U(t) := = e^{-iHt}$. Užijeme toho, že operátor H je součtem samosdružených operátorů, $H = H_0 + V$, kde H_0 je volný hamiltonián, který jsme vyjádřili v předchozím paragrafu. Známe explicitní vyjádření odpovídajícího propagátoru, a právě tak známe působení operátoru e^{-iVt}. Hledaný propagátor potom můžeme vyjádřit pomocí Trotterovy formule

$$U(t) = \operatorname*{s-lim}_{N \to \infty} (e^{-iH_0t/N} e^{-iVt/N})^N .$$

Z této rovnosti pro libovolné $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n) \equiv L^2$ plyne

$$U(t)\,\psi = \lim_{N \to \infty} \psi_t^{(N)} , \tag{2}$$

kde posloupnost $\{\psi_t^{(N)}\}_{N=0}^{\infty} \subset L^2$ je zadána rekurentně vztahy $\psi_t^{(0)} := \psi$ a

$$\psi_t^{(N)} := e^{-iH_0t/N} e^{-iVt/N} \psi_{t(N-1)/N}^{(N-1)} , \qquad N = 1, 2, \ldots .$$

Pro $j = 1, 2, \ldots$ označíme symbolem E_j operátor násobení charakteristickou funkcí množiny $B_j := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqq j\}$. Díky omezenosti operátorů $U_N(t) \equiv \equiv \exp(-iH_0t/N) \exp(-iVt/N)$ dostáváme pro $N = 2$

$$\begin{aligned} \psi_t^{(2)} &= \lim_{j \to \infty} U_2(t)\, E_j\, \psi_{t/2}^{(1)} = \lim_{j \to \infty} \left[U_2(t)\, E_j \lim_{k \to \infty} U_2(t)\, E_k \psi \right] = \\ &= \lim_{j \to \infty} \lim_{k \to \infty} U_2(t)\, E_j\, U_2(t)\, E_k \psi . \end{aligned} \tag{3a}$$

Vektory $U_2(t)\, E_j\, U_2(t)\, E_k \psi$ lze vyjádřit pomocí formule (17.3.2b), neboť $E_k \varphi \in L^1 \cap L^2$ pro každé $\varphi \in L^2$. Dostáváme tak pro s.v. $x \in \mathbb{R}^n$ rovnost

$$(U_2(t)\, E_j U_2(t)\, E_k \psi)(x) = \int_{B_j} K_2(x, y) \left[\int_{B_k} K_2(y, z)\, \varphi(z)\, dz \right] dy ,$$

kde

$$K_2(x, y) := \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{2m_j}{2\pi i t} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{2i}{t} \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{2} (x_j - y_j)^2 - \frac{it}{2} V(y) \right\} .$$

Poslední integrál ještě upravíme pomocí Fubiniovy věty a po dosazení do (3a) dostaneme

$$\psi_t^{(2)}(x) = \operatorname*{l.i.m}_{j \to \infty} \operatorname*{l.i.m}_{k \to \infty} \int_{B_j \times B_k} K_2(x, y)\, K_2(y, z)\, \psi(z)\, dy\, dz .$$

Odtud pomocí indukce získáme pro libovolné N následující integrální reprezentaci platnou pro s.v. $x \in \mathbb{R}^n$

$$\psi_t^{(N)}(x) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{m_j}{2\pi i \delta_N}\right)^{N/2} \operatorname*{l.i.m}_{j_1,\dots,j_N \to \infty} \int_{B_{j1}\times\dots\times B_{jN}} e^{iS_N(y^{(0)},\dots,y^{(N)},t)}\, \psi(y^{(0)})\, dy^{(0)} \dots dy^{(N-1)}, \tag{3b}$$

kde $y^{(N)} := x,\ \ \delta_N := t/N$ a

$$S_N(y^{(0)}, \dots, y^{(N)}, t) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{2\delta_N} (y_j^{(k+1)} - y_j^{(k)})^2 - V(y^{(k)})\, \delta_N \right). \tag{3c}$$

Snadno se přesvědčíme, že k regularizaci integrálů můžeme místo $\{\chi_{B_j}\}$ užít jiné posloupnosti nebo jednoparametrické množiny funkcí s vlastnostmi uvedenými ve tvrzení 17.3.1.

Dospíváme tak k následujícímu závěru:

17.4.1 Věta: Je-li operátor (1) v podstatě samosdružený, pak odpovídající propagátor je pro libovolné $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ dán vztahy (2) a (3b).

Jaký je smysl tohoto výsledku? Uvažujeme soustavu klasických částic, jejíž dynamika je určena Hamiltonovou funkcí

$$h(q, p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j^2}{2m_j} + V(q),$$

kde $q = (q_1, \dots, q_n)$ a $p = (p_1, \dots, p_n)$. Pro libovolnou trajektorii γ: $[0, t] \to \mathbb{R}^n$ této soustavy definujeme akci

$$S(\gamma) := \int_0^t \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j\, \dot\gamma_j(s)^2 - V(\gamma(s)) \right) ds. \tag{4}$$

Je-li speciálně $\gamma(.) \equiv \gamma(y^{(0)}, \dots, y^{(N)}, .)$ po částech lineární trajektorie, jejímž grafem je lomená čára s vrcholy $y^{(k)} = \gamma(kt/N)$, $k = 0, 1, \dots, N$, pak platí

$$\int_0^t \dot\gamma_j(y^{(0)}, \dots, y^{(N)}, s)^2\, ds = \sum_{k=0}^{N-1} |y_j^{(k+1)} - y_j^{(k)}|^2\, \delta_N^{-1},$$

tj. první členy na pravých stranách vztahů (3c) a (4) jsou totožné. Druhé členy obecně totožné nejsou.

Pro širokou třídu potenciálů se však ukazuje, že nahradíme-li člen $\sum_{k=0}^{N-1} V(y^{(k)})\, \delta_N$ ve vztahu (3c) integrálem $\int_0^t V[\gamma(s)]\, ds$ po zmíněné po částech lomené trajektorii, zůstane pro s.v. $x \in \mathbb{R}^n$ limita takto modifikovaného výrazu (3b) rovna $(U(t)\psi)(x)$; platí tedy

$$U(t)\,\psi = \lim_{N\to\infty} \tilde\psi_t^{(N)}, \tag{3d}$$

kde

$$\tilde{\psi}_t^{(N)}(x) := \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{m_k}{2\pi i \delta_N}\right)^{N/2} \operatorname*{l.i.m}_{j_1,\ldots,j_N \to \infty} \int_{B_{j1} \times \ldots \times B_{jN}} e^{iS[\gamma(y^{(0)},\ldots,y^{(N)},t)]}\, \psi(y^{(0)})\, \mathrm{d}y^{(0)} \ldots \mathrm{d}y^{(N-1)}. \tag{3e}$$

Důkaz tohoto tvrzení není nijak jednoduchý s výjimkou nejprostších případů (viz cvičení 14).

Výraz na pravé straně vztahu (3e) můžeme chápat jako integrál funkce $\gamma \mapsto e^{iS(\gamma)}\, \psi[\gamma(0)]$ přes množinu všech po částech lineárních trajektoriích s $N + 1$ vrcholy $y^{(k)} = \gamma(kt/N)$, $k = 0, \ldots, N$, přičemž $y^{(N)} = x$. Jelikož těmito trajektoriemi lze aproximovat libovolnou spojitou trajektorii, vznikla myšlenka vypočítat $(U(t)\,\psi)\,(x)$ přímo, bez užití uvedeného limitního procesu, jako integrál přes množinu všech spojitých trajektorií končících v bodě x, tj.

$$(U(t)\,\psi)\,(x) = \int_{\gamma(t)=x} e^{iS(\gamma)}\, \psi(\gamma(0))\, D\gamma. \tag{5a}$$

Jejím autorem je R. Feynman, po němž bývají integrály tohoto typu nazývány. Je nutné zdůraznit, že výraz na pravé straně vztahu (5a) je pouze formální, mj. proto, že v prostoru trajektorií neexistuje obdoba Lebesgueovy míry (cvičení 10). Dříve než se budeme zabývat otázkou po smyslu pravé strany formule (5a), zmíníme se stručně o jedné z jejích přitažlivých vlastností. Ve Feynmanově vyjádření je velice názorně vidět souvislost mezi kvantovou a klasickou mechanikou. Formule (5a) má v běžných jednotkách tvar

$$(U(t)\,\psi)\,(x) = \int_{\gamma(t)=x} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\, S(\gamma)\right) \psi(\gamma(0))\, D\gamma. \tag{5b}$$

Je-li konstanta $\hbar$ dostatečně malá, můžeme na tento integrál aplikovat formálně větu o stacionární fázi. Podle ní se příspěvky k hodnotě integrálu vzájemně vyruší s výjimkou příspěvků z okolí těch bodů prostoru trajektorií, v nichž je funkce $S(.)$ stacionární. Z klasické mechaniky však víme, že akce nabývá stacionární hodnoty právě pro ty trajektorie, které jsou řešením pohybových rovnic. To znamená, že nezanedbatelný příspěvek k hodnotě Feynmanova integrálu (5b) dají pouze trajektorie blízké klasickým — viz [[FH]]; matematicky korektní rozbor lze najít např. v S. Albeverio, R. Høegh-Krohn, eds.: Feynman Path Integrals, LNP 106, Springer, Berlin 1979.

17.4.2 Poznámka (*o Wienerově míře*): Funkcionální integrál příbuzného typu jako výraz (5) byl studován již dlouho před Feynmanovými pracemi v souvislosti s matematickou teorií Brownova pohybu. Abychom jej mohli stručně charakterizovat, vymezíme speciální třídu funkcí na prostoru trajektorií Γ_x, za který vezmeme množinu funkcí γ: $[0, t] \to \mathbb{R}^n$, jež jsou spojité a splňují $\gamma(t) = x$. Na prostoru Γ_x můžeme zavést topologii prostřednictvím metriky ϱ: $\varrho(\gamma, \tilde{\gamma}) = \sup_{0 \leq s \leq t} |\gamma(s) - \tilde{\gamma}(s)|$; této topologii dále odpovídá systém $\mathscr{B}_x$ borelovských množin v Γ_x. Funkci f: $\Gamma_x \to \mathbb{C}$ nazveme *cylindrickou*, pokud $f(\gamma)$ závisí pouze na hodnotách funkce γ v bodech některé konečné posloupnosti $\{\tau_k$: $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = t\}$; pro takovouto funkci budeme psát $f(\gamma) = f(\gamma(\tau_0) \ldots, \gamma(\tau_{N-1}))$. Označíme $\delta_k = \tau_{k+1} - \tau_k$. Potom pro každé $\sigma > 0$ existuje právě jedna borelovská míra w_σ na Γ_x taková, že pro libovolnou borelovskou funkci f, jež je cylindrická a omezená, platí

$$\int_{\Gamma_x} f(\gamma(\tau_0), \ldots, \gamma(\tau_{N-1}))\, \mathrm{d}w_\sigma(\gamma) = \prod_{k=0}^{N-1} (2\pi \mathrm{i} \delta_k)^{-n/2} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^{nN}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma} \sum_{k=0}^{N-1} |\gamma^{(k+1)} - \gamma^{(k)}|^2 \delta_k^{-1}\right\} f(\gamma^{(0)}, \ldots, \gamma^{(N-1)})\, \mathrm{d}\gamma^{(0)} \ldots \mathrm{d}\gamma^{(N-1)} \quad (6)$$

Míru w_σ nazýváme *Wienerovou mírou* (s disperzí σ) a integrál podle ní *Wienerovým integrálem.*

Feynmanův integrál se v mnohém podobá Wienerovu. Uvažujme pro jednoduchost případ, kdy $m_j = m$ pro $j = 1, \ldots, n$ a označme

$$f(\gamma) := \exp\left(-\mathrm{i} \int_0^t V(\gamma(s))\, \mathrm{d}s\right) \psi(\gamma(0)),$$

potom pravou stranu vztahu (5a) můžeme formálně přepsat ve tvaru

$$\int_{\Gamma_x} f(\gamma) \exp\left(\frac{im}{2} \int_0^t |\dot{\gamma}(s)|^2\, \mathrm{d}s\right) D\gamma. \quad (7)$$

Z porovnání formulí (3) a (6) je zřejmé, že Wienerův integrál $\int_{\Gamma_x} f(\gamma)\, \mathrm{d}w_\sigma(\gamma)$ lze pro libovolnou funkci $f \in L(\Gamma_x, \mathrm{d}w_\sigma)$ vyjádřit formálně opět ve tvaru (7), kde $m = \mathrm{i}/\sigma$. V tomto případě se, zhruba řečeno, singulární chování exponenciálního členu a $D\gamma$ vzájemně vyruší, takže na jejich místě můžeme psát $\mathrm{d}w_\sigma(\gamma)$.

V této úvaze bohužel hraje podstatnou roli skutečnost, že výraz v exponentu je reálný a nekladný. Platí následující tvrzení (viz např. [[Ex]], § 5.1):

17.4.3 Věta (Cameron): Nechť σ je nenulové komplexní číslo, $\operatorname{Re} \sigma \geqq 0$. Konečná komplexní míra w_σ taková, že rovnost (6) platí pro libovolnou borelovskou funkci f: $\Gamma_x \to \mathbb{C}$, jež je cylindrická a omezená, existuje právě tehdy, když $\sigma \in (0, \infty)$.

Odtud plyne, že *Feynmanovy integrály* (7) *nelze interpretovat v rámci standardní teorie integrálu.* Chceme-li užít výhod, jež heuristické úvahy s Feynmanovými integrály slibují, musíme je definovat nějakým jiným způsobem. Jednu možnost představuje postup založený na Trotterově formuli, jenž nás přivedl ke vztahům (3). O pravé straně vztahu (5a) definované tímto způsobem se často mluví jako o *součinovém F-integrálu.* O některých dalších možnostech se lze poučit např. v ⟦Ex⟧, kap. 5 a výše zmíněném sborníku.

Feynmanův návrh měl zpětný vliv na teorii Wienerova integrálu. Byla dokázána tzv. *Feynmanova-Kacova formule,* jež našla řadu aplikací v různých oblastech matematické fyziky. Uvedeme ji pro případ, kdy $n = 3$ a $V \in L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Operátor $H = (1/2m)\, P^2 + V$ je potom samosdružený (viz cvičení 15.9) a pro libovolné $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ platí

$$(\mathrm{e}^{-tH}\psi)(x) = \int_{\Gamma_x} \exp\left(\int_0^t V(\gamma(s))\, \mathrm{d}s\right) \psi(\gamma(0))\, \mathrm{d}w_{1/m}(\gamma)\,. \tag{8}$$

Obdobné tvrzení platí i za mnohem obecnějších okolností; používá se jej i pro konstrukci modelů interagujících kvantových polí.

17.5 NEKONZERVATIVNÍ SYSTÉMY

Jestliže hamiltonián závisí na čase, řešení pohybových rovnic (17.1.4) představuje poměrně složitou úlohu. V tomto paragrafu se zmíníme o některých metodách, jež se k tomu užívají. Nejznámější z nich je založena na rozvoji hledaného řešení v řadu:

17.5.1 Věta (*Dysonův rozvoj*): Nechť $H: \mathbb{R} \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je silně spojitá funkce, jejíž hodnoty jsou hermitovské operátory. Potom existuje unitární propagátor U takový, že pro libovolná $s, t \in \mathbb{R}$ a $\varphi \in \mathscr{H}$ vektorová funkce $t \mapsto \psi_t := U(t, s)\,\varphi$ splňuje rovnici

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\psi_t = H(t)\,\psi_t \tag{1}$$

s počáteční podmínkou $\psi_s = \varphi$. Přitom platí

$$\psi_t = \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t, s)\,\varphi\,, \tag{2a}$$

$$U_n(t, s)\,\varphi := (-\mathrm{i})^n \int_s^t \mathrm{d}t_1 \int_s^{t_1} \mathrm{d}t_2 \ldots \int_s^{t_{n-1}} \mathrm{d}t_n\, H(t_1) \ldots H(t_n)\,\varphi\,, \tag{2b}$$

kde řada $\sum_n U_n(t, s)$ konverguje ve smyslu operátorové normy.

17.5.2 Poznámka: Je-li zobrazení $t \mapsto H(t)$ spojité vůči operátorové normě, potom

$$U_n(t, s) = (-\mathrm{i})^n \int_s^t \mathrm{d}t_1 \int_s^{t_1} \mathrm{d}t_2 \ldots \int_s^{t_{n-1}} \mathrm{d}t_n \, H(t_1) \ldots H(t_n) \, .$$

Je-li navíc množina $\{H(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$ komutativní, lze snadno dokázat, že

$$U_n(t, s) = \frac{1}{n!} \left(-\mathrm{i} \int_s^t H(\tau) \, \mathrm{d}\tau \right)^n$$

(cvičení 11), tj. že platí vyjádření

$$U(t, s) = \exp \left(-\mathrm{i} \int_s^t H(\tau) \, \mathrm{d}\tau \right),$$

které je zobecnění vztahu (17.1.2). V obecném případě se pro rozvoj (2) někdy užívá symbolu

$$\psi_t = T \exp \left(-\mathrm{i} \int_s^t H(\tau) \, \mathrm{d}\tau \right) \varphi \, ,$$

jemuž se říká „časově uspořádaná exponenciála"; přitom časovým uspořádáním se myslí to, že (pro $s \leqq t$) aplikujeme operátory $H(t_j)$ ve výrazech (2b) v pořadí jejich argumentů.

Důkaz věty 1: Nejprve ověříme, že pravá strana vztahu (2b) má smysl. Pro $n = 1$ to vyplývá ze spojitosti vektorové funkce $t \mapsto H(t)$ (viz cvičení 3.38); dále absolutní spojitost integrálu implikuje pro každé $s \in \mathbb{R}$ a $\varphi \in \mathscr{H}$ spojitost vektorové funkce $t \mapsto U_1(t, s)\,\varphi$. Užijeme-li dále vztahu

$$U_{n+1}(t, s) \, \varphi = -\mathrm{i} \int_s^t H(t_1) \, U_n(t_1, s) \, \varphi \, \mathrm{d}t_1 \, , \tag{3a}$$

zjistíme pomocí indukce, že integrál (2b) existuje pro $n = 1, 2, \ldots,$ přičemž vektorová funkce $t \mapsto U_n(t, s)\,\varphi$ je spojitá pro všechna $s \in \mathbb{R}$ a $\varphi \in \mathscr{H}$.

Pro dané $R > 0$ označíme $K_R = \{[s, t]\}\colon s^2 + t^2 \leqq R^2\}$. Vezměme libovolný bod $[s, t] \in K_R$; je zřejmé, že $|t - s| \leqq 2R$, a jestliže $J_{st} \subset \mathbb{R}$ je uzavřený interval s krajními body s, t, pak $J_{st} \subset [-R, R]$. Podle předpokladu je funkce $t \mapsto \|H(t)\,\varphi\|$ spojitá, a tedy omezená na $[-R, R]$ pro každé $\varphi \in \mathscr{H}$. Podle věty 3.4.1 existuje $C_R > 0$ takové, že $\|H(t)\| \leqq C_R$ pro všechna $t \in [-R, R]$. Ze vztahu (2b) a nerovnosti (3.7.6) potom dostáváme odhad

$$\| U_n(t, s) \, \varphi \| \leqq C_R^n \|\varphi\| \, \frac{|t - s|^n}{n!} \leqq \frac{(2RC_R)^n}{n!} \, \|\varphi\| \, , \qquad n = 1, 2, \ldots , \tag{3b}$$

který platí pro všechna $[s, t] \in K_R$ a všechna $\varphi \in \mathscr{H}$; operátor $U_n(t, s)$ je tudíž omezený. Označíme-li $U^{(N)}(t, s) = I + \sum_{n=1}^{N} U_n(t, s)$, plyne z odhadu (3b) pro libovolná $N > M$ nerovnost

$$\| U^{(N)}(t, s) - U^{(M)}(t, s) \| \leqq \sum_{n=M+1}^{N} \frac{1}{n!} (2RC_R)^n ;$$

posloupnost $\{U^{(N)}(t, s)\}$ tedy konverguje v operátorové normě k nějakému $U(t, s) \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, a to stejnoměrně na libovolné kompaktní množině v $\mathbb{R}^2$. Vztah (2a) můžeme nyní zapsat ve tvaru $\psi_t = U(t, s)\, \varphi$.

Dále budeme potřebovat následující vlastnosti operátorů $U_n(t, s)$:

(i) *pro všechna* $t, s \in \mathbb{R}$ *a* $n = 1, 2, \ldots$ *platí* $U_n(t, s)^* = U_n(s, t)$. Tento vztah je důsledkem hermiticity operátorů $H(t)$; z ní pro libovolná $\varphi, \psi \in \mathscr{H}$ po jednoduché transformaci integračního oboru ve vztahu (2b) dostáváme

$$(\psi, U_n(t, s)^* \varphi) = \overline{(\varphi, U_n(t, s)\, \psi)} = \mathrm{i}^n \int_s^t \mathrm{d}t_1 \ldots \int_s^{t_{n-1}} \mathrm{d}t_n (\psi, H(t_n) \ldots H(t_1)\, \varphi) =$$

$$= (-\mathrm{i})^n \int_t^s \mathrm{d}s_1 \int_t^{s_1} \mathrm{d}s_2 \ldots \int_t^{s_{n-1}} \mathrm{d}s_n\, (\psi, H(s_1) \ldots H(s_n)\, \varphi) = (\psi, U_n(s, t)\, \varphi)\,.$$

Ze spojitosti involuce ve stejnoměrné topologii v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ nyní plyne pro všechna $t, s \in \mathbb{R}$ rovnost

$$U(t, s)^* = U(s, t)\,. \tag{4}$$

(ii) *zobrazení* $[s, t] \mapsto U_n(t, s)$ *je spojité vůči operátorové normě.* Pomocí vlastnosti (i) dostáváme

$$\| U_n(t, s) - U_n(t_0, s_0) \| \leqq$$
$$\leqq \| U_n(t, s) - U_n(t_0, s) \| + \| U_n(s, t_0)^* - U_n(s_0, t_0)^* \| =$$
$$= \| U_n(t, s) - U_n(t_0, s) \| + \| U_n(s, t_0) - U_n(s_0, t_0) \|\,. \tag{5}$$

Pro dané $[s_0, t_0]$ stačí uvažovat body $[s, t]$ z jednotkového okolí $V_1(s_0, t_0)$ bodu $[s_0, t_0]$; jestliže $R = 1 + \sqrt{s_0^2 + t_0^2}$, potom $V_1(s_0, t_0)$ leží v K_R a pro všechna $[s, t] \in V_1(s_0, t_0)$ vztahy (3) dávají

$$\| U_n(t, s) - U_n(t_0, s) \| \leqq$$
$$\leqq \sup_{\|\varphi\| = 1} \left[\operatorname{sgn}(t - t_0) \int_{t_0}^{t} \| H(t_1)\, U_{n-1}(t_1, s)\, \varphi \| \, \mathrm{d}t_1 \right] \leqq C_R |t - t_0| \frac{(2RC_R)^{n-1}}{(n-1)!}\,.$$

530 Nahradíme-li $|t - t_0|$ výrazem $|s - t_0|$, dostaneme odhad pro druhý člen na pravé staně nerovnosti (5); tím je vlastnost (ii) dokázána.

Uvážíme-li nyní, že posloupnost $\{U(t, s) - U^{(N)}(t, s)\}_{N=1}^{\infty}$ konverguje k nule stejnoměrně na každé kompaktní množině v $\mathbb{R}^2$, vidíme, že *zobrazení* $[s, t] \mapsto U(t, s)$ *je spojité vůči operátorové normě, a tím spíš je silně spojité.* Ověříme dále, že pro všechna $r, s, t \in \mathbb{R}$ platí

$$U(t, s)\, U(s, r) = U(t, r)\,; \tag{6a}$$

k tomu stačí ověřit rovnosti $\operatorname*{u-lim}_{N\to\infty} U^{(N)}(t, s)\, U^{(N)}(s, r) = U(t, r)$. Pro jednoduchost označíme $U_0(t, s) = I$; potom snadná úprava dává

$$U^{(N)}(t, s)\, U^{(N)}(s, r) = \left(\sum_{n=0}^{N} \sum_{j=0}^{n} + \sum_{n=N+1}^{2N} \sum_{j=n-M}^{N} \right) U_j(t, s)\, U_{n-j}(s, r)\,.$$

Druhou část tohoto součtu odhadneme opět pomocí (3b):

$$\left\| \sum_{n=N+1}^{2N} \sum_{j=n-N}^{N} U_j(t, s)\, U_{n-j}(s, r) \right\| \leqq \sup_{\|\varphi\|=1} \sum_{n=N+1}^{2N} \sum_{j=n-N}^{N} \frac{(2RC_R)^j}{j!} \| U_{n-j}(s, r)\| \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{(2RC_R)^n}{n!} \sum_{j=n-N}^{N} \binom{n}{j} \leqq \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{(4RC_R)^n}{n!} \to 0$$

pro $N \to \infty$. Stačí tedy, aby platila rovnost

$$\sum_{j=0}^{n} U_j(t, s)\, U_{n-j}(s, r) = U_n(t, r)\,, \tag{6b}$$

kterou snadno dokážeme indukcí; pro $n = 1$ užijeme formule (2b) a aditivity integrálu a indukční krok provedeme pomocí vztahu (3a).

Ze vztahů (2) plyne $U(t, t) = I$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$; formule (4) a (6a) potom implikují unitaritu, a zbývá tedy ověřit, že vektorová funkce $t \mapsto \psi_t$ splňuje rovnici (1). Pomocí vztahu (3a) a cvičení 3.39 zjistíme, že pro libovolné přirozené N platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U^{(N)}(t, s)\, \varphi = -\mathrm{i}H(t)\, U^{(N-1)}(t, s)\, \varphi\,; \tag{7a}$$

podobně dostaneme odhad

$$\| [U_n(t + h, s) - U_n(t, s)]\, \varphi \| \leqq$$

$$\leqq \operatorname{sgn} h \int_t^{t+h} \| H(t_1)\, U_{n-1}(t_1, s)\, \varphi\|\, \mathrm{d}t_1 \leqq \frac{|h|\, C_R}{(n-1)!} (2RC_R)^{n-1} \|\varphi\| \tag{7b}$$

pro $R \geqq 1 + \sqrt{s^2 + t^2}$ a $|h| < 1$. Pravá strana rovnosti (7a) konverguje pro $N \to \infty$ k vektoru $-\mathrm{i}H(t)\,\psi_t$. Limita výrazu na levé straně tedy rovněž existuje; stačí dokázat, že je rovna $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\,\psi_t$. Ze vztahů (7) a (3b) plyne

$$\left\| \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} [U_n(t+h,s) - U_n(t,s)]\,\varphi - \sum_{n=0}^{N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U_n(t,s)\,\varphi \right\| \leqq$$

$$\leqq \left\| \sum_{n=0}^{N} \left[\frac{U_n(t+h,s) - U_n(t,s)}{h}\,\varphi - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U_n(t,s)\,\varphi \right] \right\| + C_R \|\varphi\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(2RC_R)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

K libovolnému $\varepsilon > 0$ lze najít N_0 závislé na ε a $R \equiv R(s, t)$ tak, aby druhý člen na pravé straně byl pro $N > N_0$ menší než $\varepsilon/2$, a k tomuto N_0 podle definice derivace existuje $\delta > 0$ takové, že první člen je menší než $\varepsilon/2$, jakmile $0 < |h| < \delta$. Pro všechna $N > N_0$ a $0 < |h| < \delta$ tedy platí

$$\left\| \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} [U_n(t+h,s) - U_n(t,s)]\,\varphi - \sum_{n=0}^{N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U_n(t,s)\,\varphi \right\| < \varepsilon\,.$$

K dokončení důkazu stačí provést limitní přechod $N \to \infty$ a využít existence limity výrazu (7a). ■

Ve většině prakticky zajímavých případů je hamiltonián neomezený operátor; potom věta 1 není bezprostředně použitelná. Někdy lze tuto potíž obejít užitím interakčního pojetí.

Předpokládejme, že hamiltonián má tvar

$$H(t) = H_0 + V(t)\,, \tag{8}$$

kde H_0 je samosdružený, obecně neomezený operátor a operátorová funkce $V(.)$ vyhovuje předpokladům věty 1; operátor (8) je tedy samosdružený a $D(H(t)) = D(H_0)$. Funkce V_D: $V_D(t) = U_0(s-t)\,V(t)\,U_0(t-s)$ také splňuje předpoklady věty, takže rovnice (17.2.6b) má pro libovolné $\psi_s \in \mathscr{H}$ řešení $\psi_D(t) = U_D(t,s)\,\psi_s$, jež je vyjádřeno formulemi (2) se záměnou $H(t_j)$ na $V_D(t_j)$. Definujeme-li

$$\psi_t = U_0(t-s)\,U_D(t,s)\,\psi_s\,,$$

snadno se přesvědčíme, že funkce $t \mapsto \psi_t$ alespoň formálně splňuje rovnici (1). Potíže, které mohou nastat, se týkají definičních oborů, protože obecně není zaručeno, že operátory $U_D(t,s)$ zobrazují $D(H_0)$ do sebe.

Je tedy nutné najít obecnější kritérium existence řešení rovnice (1), než jaké představuje věta 1. Takové tvrzení lze odvodit pomocí vhodné aproximace propagátoru $U(t, s)$. Pro libovolné přirozené n můžeme psát

$$U(t, s) = U\left(t,\ t + \frac{s-t}{n}\right) U\left(t + \frac{s-t}{n},\ t + \frac{2(s-t)}{n}\right) \dots U\left(s + \frac{t-s}{n},\ s\right).$$

Aproximace spočívá v tom, že pro

$$\tau \in \left(t + \frac{k}{n}(s-t),\ t + \frac{k+1}{n}(s-t)\right)$$

nahradíme operátor $H(\tau)$ operátorem $H(\tau_k)$, $\tau_k = t + (k/n)(s-t)$. Odpovídající propagátor má tvar

$$U_n(t, s) = \exp\left(-\frac{i}{n} H(t)\right) \exp\left(-\frac{i}{n} H(\tau_1)\right) \dots \exp\left(-\frac{i}{n} H(\tau_{n-1})\right). \tag{9a}$$

Lze očekávat, že pro funkci $H(.)$, která je dostatečně hladká, budou tyto výrazy aproximovat propagátor $U(t, s)$, tj. bude platit

$$U(t, s) = \operatorname*{s\text{-}lim}_{n \to \infty} U_n(t, s). \tag{9b}$$

Nalezení podmínek, kterým musí funkce $H(.)$ vyhovovat, není jednoduché. Uvedeme bez důkazu jeden výsledek tohoto druhu; o jeho širších souvislostech se zmíníme v komentáři.

17.5.3 Věta: Předpokládejme, že hamiltonián je pro t z otevřeného intervalu $J \subset \mathbb{R}$ tvaru (8), kde H_0, $V(t)$ jsou samosdružené operátory, a označme $C(t, s) = (H(t) - iI)(H(s) - iI)^{-1} - I$. Předpokládejme dále, že

(a) pro každé $t \in J$ je operátor $V(t)$ H_0-omezený s H_0-mezí < 1,

(b) pro každé $\varphi \in \mathcal{H}$ je funkce $(s, t) \mapsto (t-s)^{-1} C(t, s)\varphi$ omezená a stejnoměrně spojitá, pokud $s \neq t$ a s, t leží v libovolném kompaktním podintervalu $J_0 \subset J$,

(c) pro každý $\varphi \in \mathcal{H}$ existuje $C(t)\varphi := \lim_{s \to t} (t-s)^{-1} C(t, s)\varphi$ stejnoměrně v libovolném kompaktním podintervalu, a funkce $C(.)$ je omezená a silně spojitá.

Potom pro libovolná $s \leqq t$ ležící v J existuje operátor $U(t, s)$ daný vztahy (9), přičemž konvergence v (9b) je stejnoměrná pro s, t ležící v nějakém kompaktním podintervalu $J_0 \subset J$. Funkce $t \mapsto \psi_t := U(t, s)\varphi$ je v intervalu J řešením rovnice (1) s počáteční podmínkou $\psi_s = \varphi \in D(H_0)$.

Jedním z důsledků této věty je to, že Dysonova rozvoje pro hamiltonián (8) lze použít, pokud je funkce $V(.)$ silně spojitě diferencovatelná:

17.5.4 Důsledek: Předpokládejme, že hamiltonián je pro všechna t z otevřeného intervalu $J \subset \mathbb{R}$ tvaru (8), kde $V(t) \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$. Jestliže pro všechna $t \in J$, $\varphi \in \mathcal{H}$

existuje $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\, V(t)\,\varphi \equiv G(t)\,\varphi$ a funkce $G(.)$ je silně spojitá v J, pak platí tvrzení věty 3.

Důkaz: Protože jsou operátory $V(t)$ omezené, stačí ověřit splnění předpokladů (b) a (c). Podle (7.3.10a) je $\|H(s) - \mathrm{i}I)^{-1}\| \leq 1$, takže operátory

$$\frac{C(t, s)}{t - s} = \frac{V(t) - V(s)}{t - s}\,(H(s) - \mathrm{i}I)^{-1} \tag{10}$$

pro $t \neq s$ jsou omezené. Vezmeme libovolný omezený uzavřený interval $J_0 \subset J$ a definujeme na $J_0 \times J_0$ funkci

$$F\colon F(s, t) = \begin{cases} (t - s)^{-1}\, C(t, s) & \ldots\ s \neq t\,, \\ G(t)\,(H(t) - \mathrm{i}I)^{-1} & \ldots\ s = t\,. \end{cases}$$

Z druhé rezolventní formule (cvičení 3.33) plyne, že funkce $(H(.) - \mathrm{i}I)^{-1}$ je silně spojitá, a odtud dále (podobně jako ve cvičení 3.22), že $F(.,.)$ je silně spojitá pro $s \neq t$. Podle předpokladu je F silně spojitá i v bodech, kde $s = t$; to znamená, že je silně spojitá v kompaktní množině $J_0 \times J_0$. Pro každé $\varphi \in \mathscr{H}$ je potom funkce $\|F(.,.)\,\varphi\|$ spojitá, a tedy omezená v $J_0 \times J_0$ (z věty 3.4.1 plyne, že také $\|F(.,.)\|$ je omezená). Díky kompaktnosti intervalu $J_0 \times J_0$ je $\|F(.,.)\,\varphi\|$ stejnoměrně spojitá (viz komentář k § 2.5); splnění předpokladů (b), (c) je pak snadné ověřit. ■

Závěrem se zmíníme o tom, že Dysonův rozvoj je často užitečný při řešení konkrétních kvantověmechanických úloh.

17.5.5 Příklad: Předpokládejme, že systém je v okamžiku $t = 0$ ve stavu popisovaném vlastním vektorem φ_j operátoru H_0, a že v intervalu $(0, T)$ na něj působí vnější vliv charakterizovaný interakčním hamiltoniánem $V(t)$. Zajímá nás pravděpodobnost, že pod vlivem této poruchy systém přejde v okamžiku t do jiného vlastního stavu φ_k neporušeného hamiltoniánu, $H_0\varphi_k = \lambda_k\varphi_k$. Víme, že je rovna $|(\varphi_k, U(t, 0)\,\varphi_j)|^2$; jsou-li splněny předpoklady důsledku 4, pak platí

$$\begin{aligned}(\varphi_k, U(t, 0)\,\varphi_j) &= \\ = \sum_{n=1}^{\infty} (-\mathrm{i})^n \int_0^t \mathrm{d}t_1 \ldots \int_0^{t_{n-1}} &\mathrm{d}t_n (\varphi_k, U_0(t - t_1)\, V(t_1)\, U_0(t_1 - t_2)\, V(t_2) \ldots \\ &\ldots V(t_n)\, U_0(t_n)\,\varphi_j)\,, \end{aligned} \tag{11}$$

protože $(\varphi_k, U_0(t, 0)\,\varphi_j) = 0$ pro $j \neq k$. Je-li porucha slabá, postačí nám k výpočtu prvních několik členů. Platí např.

$$(\varphi_k, U(t,0)\,\varphi_j) = -\mathrm{i}\int_0^t \mathrm{d}t_1\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_k(t-t_1)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_j t_1}(\varphi_k, V(t_1)\,\varphi_j) + R_2\,, \qquad (12\mathrm{a})$$

kde zbytek můžeme odhadnout pomocí nerovností typu (3b). Je-li $\|V(t)\| \leqq C$ a $CT \leqq 1$, pak pro všechna $t \in [0, T]$ platí

$$|R_2| \leqq C^2t^2 \qquad (12\mathrm{b})$$

(cvičení 13); obdobně lze postupovat v případě, kdy uvažujeme několik prvních členů řady (11).

Komentář

§ 17.1: Motivace postulátu (q4-a) je založena na následujícím tvrzení:
Věta (Wigner): Nechť $\tilde{\mathscr{H}}$ je množina všech paprsků v $\mathscr{H}$ a $\tilde{U}: \tilde{\mathscr{H}} \to \tilde{\mathscr{H}}$ je bijektivní zobrazení takové, že $P(\Phi, \Psi) = P(\tilde{U}\Phi, \tilde{U}\Psi)$. Potom existuje operátor $U \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, který je buď unitární, nebo antiunitární, takový, že paprsek $\tilde{U}\Phi$ je generován vektorem $U\varphi$ pro libovolné $\varphi \in \Phi$. Operátor U je určen zobrazením $\tilde{U}$ až na multiplikativní konstantu.
Důkaz je uveden např. v [[BaR]], § 13.2.

§ 17.2: V české terminologii se většinou mluví o reprezentacích Schrödingerově, Heisenbergově apod. Domníváme se, že pojmu reprezentace prospěje, když se zbaví jednoho z četných významů, jimiž jej kvantová teorie zatěžuje. Další poznámka se týká Diracova pojetí: operátorová funkce V: $V(t,s) = U_0(s-t)\,U(t,s)$, která zde vystupuje, obecně *nezadává* unitární propagátor; stačí si uvědomit, že s ve vztazích (4) značí pevně zvolený okamžik. Definujeme-li však $U_\mathrm{D}(t,r) := V(t,s)\,V(r,s)^{-1}$, platí $\psi_\mathrm{D}(t) = U_\mathrm{D}(t,r)\,\psi_\mathrm{D}(r)$ pro všechna $r, t \in \mathbb{R}$ a U_D splňuje příslušné požadavky (viz cvičení 5).

§ 17.3: Při vyšetřování harmonického oscilátoru jsme se pro jednoduchost omezili na případ s jedním stupněm volnosti; výsledky lze snadno zobecnit pro n-rozměrný oscilátor. Integrální reprezentaci propagátoru (7) lze formálně nejsnáze dostat pomocí Feynmanova integrálu – viz [[FH]], § 3.6; [[Schu]], kap. 6. Existující důkazy věty 6 jsou zpravidla založeny na nějaké matematicky korektní formulaci tohoto postupu. Nejpřímější z nich, jenž se nepotřebuje odvolávat na pojem Feynmanova integrálu, užívá Trotterovy formule; je uveden v práci [CRRS 1], obecnější tvrzení je dokázáno v [[Ex]], § 6.2.

§ 17.5: Metody řešení rovnice (1), jimiž se v tomto paragrafu zabýváme, jsou inspirovány postupy, jichž se užívá při řešení Cauchyho úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice. Konkrétně v případě věty 1 jde o to, že rovnice (1) je formálně ekvivalentní Volterrově rovnici $\psi_t = \varphi - \mathrm{i}\int_0^t H(\tau)\,\psi_\tau\,\mathrm{d}\tau$; důkaz spočívá v ověření toho, že řada získaná iterací této rovnice má smysl. Rozvoj je pojmenován po F. Dysonovi, který užil této metody ve svých průkopnických pracích o kvantové elektrodynamice (1949). Z důkazu je zřejmé, že formule (2) definují řešení rovnice (1) i v případě, kdy funkce $H(.)$ je zadána na nějakém intervalu $J \subset \mathbb{R}$.

• Pomocí Dysonova rozvoje lze odvodit i některá další v kvantové mechanice užívaná tvrzení. Příkladem je *adiabatická věta* – viz např. [[Thi]], § 3.3. Izolovanou vlastní hodnotu $\lambda(t')$ hamiltoniánu $H(t')$, $s \leqq t' \leqq t$, nazýváme regulární, jestliže projektor $E(t')$ na odpovídající vlastní podprostor má konečnou dimenzi a funkce $E(.)$ a $(H(.) - \lambda(.)I)^{-1}(I - E(.))$ jsou (silně) spojitě diferencovatelné. Adiabatická věta věta potom říká, že pravděpodobnost přechodu z regulárního vlastního stavu hamiltoniánu do kteréhokoli jiného vlastního stavu odpovídající propagátoru

$$U_\tau(s, t) \equiv T \exp\left(-\mathrm{i} \int_s^t H\left(\frac{t'}{\tau}\right) \mathrm{d}t'\right)$$

ubývá pro $\tau \to \infty$ přinejmenším jako τ^{-1}.

Cvičení

1. Nechť $\{U(t, s)\colon s, t \in \mathbb{R}\}$ je množina operátorů, jež jsou buď unitární, nebo antiunitární. Jsou-li splněny podmínky (i)–(iii) z definice propagátoru, pak všechny operátory $U(t, s)$ jsou unitární.
Návod: Je-li $U(t, s)$ antiunitární pro nějaká $t > s$, pak existují neklesající posloupnost $\{s_n\}$, resp. nerostoucí $\{t_n\}$ takové, že např. $t_n - s_n = (t - s)\, 2^{-n}$, a operátory $U(t_n, s_n)$ jsou antinunitární. Z předpokladu silné spojitosti plyne, že $\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} U(t_n, s_n)$ je antilineární, což odporuje podmínce (ii).

2. Má-li hamiltonián konzervativního systému čistě spojité spektrum, pak žádný stav tohoto systému není stacionární.

3. Nechť $A_H(.)$ je pozorovatelná v Heisenbergově pojetí a f je borelovská funkce; potom pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí $f(A_H(t)) = (f(A))_H(t)$.

4. Nechť $H = H_0 + V$, kde H_0 je samosdružený a V je hermitovský. Platí-li $W_s D(H_0) \subset D(H_0)$, resp. $\psi_s \in D(H_0)$, pak odpovídající stavy v Diracově pojetí splňují rovnice (17.2.6).

5. Nechť U_1, U_2 jsou unitární propagátory. Je-li U_3: $U_3(t, s) = U_1(s, t)\, U_2(t, s)$ unitární propagátor, pak operátory $U_1(t, s)$, $U_2(r, s)$ komutují pro všechna $r, s, t \in \mathbb{R}$. Naproti tomu U_τ: $U_\tau(t, s) = U_3(t, \tau)\, U_3(s, \tau)^{-1} = U_1(\tau, t)\, U_2(t, s)\, U_1(s, \tau)$ je unitární propagátor pro libovolné pevně zvolené $\tau \in \mathbb{R}$.

6. Dokažte přímým výpočtem vztahy (17.3.3).

7. Uvažujme soustavu volných částic popisovanou hamiltoniánem (17.3.1). Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je omezená otevřená množina. K libovolným $t > 0$ a $x \notin M$ existuje stav ψ takový, že $\operatorname{supp} \psi \subset M$ a pro $\psi_t = U(t)\psi$ platí $|\psi_t(x)|^2 > 0$.

Návod: Volte $\psi(y) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2t}\sum_{j=1}^{n} m_j|x_j - y_j|^2\right)\chi_M(y)$.

8. Ověřte, že funkce definovaná vztahem (17.3.7b) splňuje rovnici

$$\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)K_t(x, y) = 0\,.$$

9. Odvoďte vztahy (17.3.8)–(17.3.10).
Návod: Užijte formule z návodu ke cvičení 16.19.

10. Nechť Γ je reálný Hilbertův prostor. Netriviální míra na μ taková, že (i) μ nabývá konečných hodnot pro všechny omezené borelovské množiny $\subset \Gamma$, (ii) μ je invariantní vůči posunutím, existuje právě tehdy, když $\dim \Gamma < \infty$.
Návod: Jednotková koule v Γ obsahuje nekonečně mnoho disjunktních koulí poloměru $1/4$, pokud $\dim \Gamma = \infty$.

11. Dokažte indukcí tvrzení obsažená v poznámce 17.5.2.

12. Dokažte rovnost (17.5.6b) indukcí podle n.

13. Dokažte odhad (17.5.12b). Odvoďte obdobnou nerovnost pro případ, kdy bereme prvních N členů řady (17.5.11).
Návod: Najděte odhad zbytku v Taylorově rozvoji funkce $t \mapsto e^{Ct}$.

14. Dokažte vztah (17.4.3d) pro lineární potenciál V: $V(q) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j q_j + \beta$.

Návod: Nejprve odvoďte rovnost

$$S_N(y^{(0)}, \ldots, y^{(N)}, t) = S(y^{(0)}, \tilde{y}^{(1)}, \ldots, \tilde{y}^{(N)}, t) - o\left(\frac{1}{N}\right),$$

kde $\tilde{y}_j^k := y_j^k + (\alpha_j k t^2)/(2N^2 m_j)$, $k = 0, 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, n$, a

$$o\left(\frac{1}{N}\right) := \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha_j^2}{m_j}\right)t^3\,\frac{2N-1}{8N^2}\,.$$

Pomocí věty o substituci potom ukažte, že

$$\psi_t^{(N)}(x) = e^{-\mathrm{i}o(1/N)}\,\tilde{\psi}_t^{(N)}\left(x + \frac{t^2}{2N}a\right),$$

kde $a \equiv (\alpha_1/m_1, \ldots, \alpha_n/m_n)$.

18.1 STAVY A POZOROVATELNÉ

Příkladů složených systémů lze najít mnoho; za všechny jmenujme vodíkový atom jako systém tvořený elektronem a protonem. Nechť S je **složený systém** sestávající z konečného počtu **podsystémů** $S_1, \ldots, S_n$. Příslušné stavové Hilbertovy prostory označíme $\mathscr{H}$, resp. $\mathscr{H}_j$, $j = 1, \ldots, n$. První otázka, kterou musíme vyřešit, je jejich vzájemný vztah.

Setkali jsme se již s případem, kdy každý ze systémů S_j je tvořen bezspinovou částicí; víme, že potom $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^{3n})$. Podle příkladu 4.6.6 lze tento prostor chápat jako tenzorový součin stavových prostorů $\mathscr{H}_j = L^2(\mathbb{R}^3)$. Motivováni touto skutečností přijmeme následující postulát:

(q5-a) stavový prostor složeného systému je tenzorovým součinem stavových prostorů podsystémů, $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}_n$;

přitom předpokládáme, že podsystémy S_j jsou vzájemně různé. Pokud tomu tak není, je nutné jeho znění modifikovat; o tom budeme mluvit v § 18.4.

18.1.1 Poznámky: (a) Abychom si usnadnili formulaci, budeme nadále většinou mluvit o systému složeném ze dvou podsystémů; tvrzení, jež dokážeme, lze snadno zobecnit pro případ libovolného konečného n.

(b) Stavový Hilbertův prostor lze často vyjádřit ve tvaru tenzorového součinu i tehdy, když systém nelze rozdělit na reálné fyzikální podsystémy. Výsledky, které odvodíme, se proto hodí i pro systémy složené z fiktivních podsystémů, jako je třeba reálná bezspinová částice „složená" ze tří „jednorozměrných" částic (příklad 15.2.3) nebo elektron „složený" z „konfiguračního" a „spinového" elektronu (příklad 15.5.5). Tyto rozklady souvisí s pojmem *počtu stupňů volnosti* daného systému, jímž se zpravidla myslí počet nejjednodušších fiktivních podsystémů, na něž lze systém rozdělit (viz komentář).

(c) V § 15.1 jsme uvedli, že u kvantověmechanických systémů se obvykle předpokládá separabilita stavového prostoru. Nyní můžeme zformulovat argument ve prospěch tohoto předpokladu. Typický kvantověmechanický systém sestává z konečného počtu částic, z nichž každá může mít tzv. vnitřní stupně volnosti, jako spin, izospin apod., kterých je rovněž konečný počet. Stavový prostor systému je tedy tenzorovým součinem konečného počtu Hilbertových prostorů. Mezi nimi ty, které odpovídají „konfiguračním" stupňům volnosti, jsou podle Stoneovy-von Neumannovy věty izomorfní $L^2(\mathbb{R})$, a tedy separabilní. Na druhé straně prostory odpovídající známým vnitřním stupňům volnosti jsou dokonce konečnědimenzionální, a tedy rovněž separabilní; s ohledem na důsledek 4.6.5 je potom stavový prostor takového systému separabilní.

Podívejme se nyní, jaké jsou vztahy mezi pozorovatelnými systémů S a S_1, S_2. Budeme užívat značení zavedeného v § 15.4: symboly $\mathscr{O}$, resp. $\mathscr{O}_j$ znamenají množiny pozorovatelných pro příslušné systémy, a podobně označíme množiny omezených pozorovatelných, resp. algebry pozorovatelných pro S a S_j. Uvažujme nejprve pozorovatelné vztahující se pouze k jednomu z podsystémů, např. S_1. Každé takovéto pozorovatelné a odpovídá samosdružený operátor A_1 na $\mathscr{H}_1$, a současně také samosdružený operátor A na $\mathscr{H}$, chápeme-li ji jako pozorovatelnou složeného systému S. Hodnoty, které při měření můžeme dostat, nejsou (aspoň v principu) ovlivněny přítomností podsystému S_2, proto je přirozené předpokládat $A = \overline{\tilde{A}_1}$, kde $\tilde{A}_1 = A_1 \otimes I_2$; z lemmatu 10.8.4 víme, že v takovém případě platí $\sigma(A) = \sigma(A_1)$. Poznamenejme, že přítomnost S_2 je naproti tomu podstatná pro pravděpodobnost toho, že hodnota pozorovatelné a padne při měření do zvolené množiny, protože ta je určena stavem složeného systému; k tomuto problému se vrátíme podrobněji v příštím paragrafu.

18.1.2 Příklad: Uvažujme systém *dvou* (různých) *bezspinových částic*, jehož stavovým prostorem je $L^2(\mathbb{R}^6) = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes L^2(\mathbb{R}^3)$. Označme $Q_k^{(j)}$, $P_k^{(j)}$ operátory kartézských souřadnic, resp. kartézských složek impulsu j-té částice a položme $Q_l = \overline{Q_l^{(1)} \otimes I}$ pro $l = 1, 2, 3$, resp. $Q_l = \overline{I \otimes Q_{l-3}^{(2)}}$ pro $l = 4, 5, 6$; podobně definujeme operátory P_l, $l = 1, \dots, 6$. Ze vztahu (15.2.10) je zřejmé, že platí $Q_1 = \overline{Q \otimes I \otimes \dots \otimes I}$ atd.; to znamená, že volba operátorů souřadnic a složek impulsů pro soustavu částic uvedená v poznámce 15.2.4b je konzistentní.

Uvedenými pozorovatelnými není samozřejmě množina $\mathscr{O}$ vyčerpána. Mohou do ní patřit také operátory typu $\overline{\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2}$ pro $A_j \in \mathscr{O}_j$, jako jsou např. operátory složek celkového impulsu soustavy dvou částic, jiné polynomy v operátorech A_j apod.

18.1.3 Tvrzení: Mezi algebrami pozorovatelných složeného systému a jeho podsystémů platí vztah

$$\mathscr{A} \supset \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 \,. \tag{1}$$

Důkaz: Připomeňme, že $\mathscr{A} \equiv \mathscr{A}_W(\mathscr{O}_b)$, $\mathscr{A}_i \equiv \mathscr{A}_W(\mathscr{O}_{bi})$, $i = 1, 2$ (viz § 15.4), a protože je $\tilde{\mathscr{O}}_{b1} \cup \tilde{\mathscr{O}}_{b2} \subset \mathscr{O}_b$, plyne inkluze z věty 14.2.6. ■

Množiny pozorovatelných vztahujících se pouze k jednomu z podsystémů hrají přesto důležitou roli. Z věty 14.2.9 např. plyne

18.1.4 Tvrzení: Předpokládejme, že prostory $\mathscr{H}_j$ jsou separabilní. Jsou-li $\mathscr{S}_j \subset \mathscr{O}_j$ úplné množiny kompatibilních pozorovatelných podsystémů S_j, pak $\mathscr{S} = \bigcup_j \{\overline{A}_j :\, A_j \in \mathscr{S}_j\}$ je úplná množina kompatibilních pozorovatelných systému S.

18.1.5 Poznámka: Právě zformulované tvrzení také ukazuje, jakým způsobem se přiřazuje stavový Hilbertův prostor danému kvantovému systému. Máme-li množinu kompatibilních pozorovatelných $a_1, \dots, a_n$, o níž jsme přesvědčeni, že je úplná, zvolíme prostor $\mathscr{H}$ a samosdružené operátory $A_1, \dots, A_n$ na $\mathscr{H}$ tak, aby tvořily ÚSKO (ve skutečnosti ovšem není nutné začínat s výběrem stavového prostoru od počátku; tuto námahu nám ušetřili zakladatelé kvantové mechaniky). Časem se může ukázat, že jsme opomněli pozorovatelnou b, která je kompatibilní s $a_1, \dots, a_n$, aniž je přitom jejich funkcí; musíme tedy najít samosdružené operátory $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n, \tilde{B}$ tvořící ÚSKO na prostoru $\tilde{\mathscr{H}}$; přitom požadujeme, aby platilo $\sigma(\tilde{A}_j) = \sigma(A_j)$ pro $j = 1, \dots, n$. Tuto úlohu je nejčastěji možno řešit tak, že volíme $\tilde{\mathscr{H}} \sim \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_b$ a operátory $\tilde{A}_j$ ve tvaru $\overline{A_j \otimes I_b}$. Pozorovatelnou b reprezentujeme operátorem $\tilde{B} = \overline{I \otimes B}$, přičemž operátor B na $\mathscr{H}_b$ volíme tak, aby měl jednoduché spektrum; z věty 10.9.6 a tvrzení 4 pak plyne, že operátory $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n, \tilde{B}$ tvoří ÚSKO. Klasickou ilustrací uvedeného postupu je připojení (třetí složky) spinu ke kompatibilním pozorovatelným částice (příklad 15.5.5).

Podívejme se nyní, kdy může ve vztahu (1) nastat rovnost. Podobně jako v § 15.4 máme jednoduché kritérium koherence:

18.1.6 Tvrzení: Předpokládejme, že $\mathscr{S}_j \subset \mathscr{O}_j$, $j = 1, 2$, jsou ireducibilní množiny, potom $\mathscr{S} = \bigcup_j \{\overline{A}_j :\, A_j \in \mathscr{S}_j\}$ je ireducibilní množina na $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ a systém S je koherentní.

Důkaz: Operátory reprezentující pozorovatelné jsou samosdružené, proto první část tvrzení plyne z věty 14.3.9; množina $\mathscr{O}$ je pak rovněž ireducibilní a koherence plyne z věty 15.4.5b. ■

Z dokázaného tvrzení např. plyne, že soustava (různých) bezspinových částic je koherentní (viz příklad 15.4.8). Podobně lze postupovat i v jiných případech:

18.1.7 Příklad: Uvažujme *částici se spinem* z příkladu 15.5.5. Je dobře známo, že operátory S_j tvoří ireducibilní reprezentaci relací (15.5.8a), tj. že množina $\{S_1, S_2, S_3\}$ je ireducibilní v $\mathbb{C}^{2s+1}$. Z tvrzení 6 pak plyne, že $\{\tilde{Q}_j, \tilde{P}_j, \tilde{S}_j :\, j = 1, 2, 3\}$ je ireducibilní množina v $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^{2s+1}$, a že tedy daná částice představuje koherentní systém. Opakovaným užitím tvrzení 6 zjistíme, že soustava (různých) částic s obecně nenulovými spiny je koherentní.

V každém z těchto příkladů platí $\mathscr{A}_j' = \mathbb{C}(\mathscr{H}_j)$ (viz (15.4.4)), tj. $\mathscr{A}_j = \mathscr{A}_j'' = \mathscr{B}(\mathscr{H}_j)$; potom $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 = \mathscr{B}(\mathscr{H}_1) \otimes \mathscr{B}(\mathscr{H}_2) = \mathscr{B}(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2)$ a v inkluzi

 (1) nastává rovnost. Jsou-li naopak systémy S_1, S_2 nekoherentní, pak rovnost ve vztahu (1) obecně neplatí:

18.1.8 Příklad: Vyšetříme *systém tvořený nukleonem a pionem,* přičemž pro jednoduchost budeme uvažovat jen izospinové stupně volnosti. Stavový prostor nukleonu je potom podle příkladu 15.4.1 roven $\mathscr{H}_N = \mathbb{C}^2$ a libovolná pozorovatelná má tvar $A_N = \sum_{j=0}^{1} \lambda_j E_j^{(N)}$, kde $E_1^{(N)} \equiv I - E_0^{(N)} = \frac{1}{2}(\sigma_3 + I)$. Podobně stavový prostor pionu je $\mathscr{H}_\pi = \mathbb{C}^3$ a libovolná jeho pozorovatelná má tvar $A_\pi = \sum_{k=-1}^{1} \mu_k E_k^{(\pi)}$, kde $E_k^{(\pi)}$ jsou opět projektory na vlastní podprostory operátoru náboje $Q = \sum_{k=-1}^{1} kE_k^{(\pi)}$. Stavový prostor $\mathscr{H}_{N\pi}$ složeného systému je tedy šestirozměrný a snadno se přesvědčíme, že platí

$$\mathscr{A}_N \otimes \mathscr{A}_\pi = \{ \sum_{j=0}^{1} \sum_{k=-1}^{1} \beta_{jk} E_{jk} \colon \beta_{jk} \in \mathbb{C} \} , \tag{2}$$

kde $E_{jk} := E_j^{(N)} \otimes E_k^{(\pi)}$. Superselekční pravidlo pro složený systém je dáno operátorem *celkového* náboje $Q_{N\pi} = \tilde{Q}_N + \tilde{Q}_\pi$, jehož spektrální rozklad je roven $Q_{N\pi} = \sum_{q=-1}^{2} qE_q$, kde $E_q := \sum_{j+k=q} E_{jk}$; vlastní podprostory $\mathscr{H}_q \equiv E_q \mathscr{H}_{N\pi}$ jsou tedy dvourozměrné pro $q = 0, 1$ a jednorozměrné pro $q = -1, 2$. Vzhledem k tomu, že náboj je v daném případě jediným superselekčním pravidlem, platí

$$\mathscr{A}_{N\pi} \subset \sum_{q=-1}^{2}{}^{\oplus} \mathscr{B}(\mathscr{H}_q) \tag{3}$$

(viz (15.4.3)). Kdyby ve vztahu (1) platila rovnost, byla by každá pozorovatelná systému $N\pi$ redukována všemi projektory E_{jk}. Speciálně by to platilo pro hamiltonián, což by podle § 17.1 dále znamenalo, že stavy popisované projektory E_{jk} jsou stacionární. Ze zkušenosti víme, že přechody $p\pi^0 \leftrightarrow n\pi^+$ a $p\pi^- \leftrightarrow n\pi^0$ jsou možné; algebra $\mathscr{A}_{N\pi}$ proto musí obsahovat pozorovatelné, které v množině (2) neleží.

18.1.9 Poznámka: Z posledně uvedeného výroku by bylo možno učinit závěr, že ve vztahu (3) platí rovnost (viz cvičení 1). Situace však není tak jednoduchá. Zanedbání neizospinových stupňů volnosti znamená hrubé zjednodušení, např. hamiltonián určitě není tvaru $I \otimes H$, kde H je nějaký hermitovský operátor na izospinovém prostoru $\mathscr{H}_{N\pi}$; navíc úplný popis uvedených reakcí je možný jenom v rámci kvantové teorie pole. Na závěr učiněný v příkladu však nemají tyto skutečnosti vliv (cvičení 2).

Obecně je tedy algebra pozorovatelných složeného systému vymezena inkluzemi (1) a (15.4.3). V některých případech to představuje úplné určení. Máme-li např.

kvantověmechanický systém tvořený konečným počtem částic bez superselekčních pravidel, pak podobně jako v příkladu 7 můžeme obvykle vybrat pozorovatelné reprezentované ireducibilní množinou operátorů; v takovém případě je systém koherentní a algebra $\mathscr{A}$ je tvořena všemi omezenými operátory na stavovém prostoru.

Rovnost ve vztahu (1) může nastat i v některých případech, kdy platí superselekční pravidla. Uvažujme např. systém tvořený pionem a η-mezonem (který budeme pro tuto chvíli považovat za stabilní bezspinovou částici). Jelikož η-mezon představuje nábojový singlet, tj. je koherentní, platí

$$\mathscr{A}_{\eta\pi} \supset \mathscr{A}_\eta \otimes \mathscr{A}_\pi = \mathscr{B}(\mathscr{H}_\eta) \otimes \sum_{k=-1}^{1}{}^{\oplus} \mathscr{B}(\mathscr{H}_k) = \sum_{k=-1}^{1}{}^{\oplus} \mathscr{B}(\mathscr{H}_\eta \otimes \mathscr{H}_k) \supset \mathscr{A}_{\eta\pi} \,,$$

kde $\mathscr{H}_k = E_k^{(\pi)} \mathscr{H}_\pi$ a $\mathscr{H}_\eta \otimes \mathscr{H}_k$ jsou vlastní podprostory operátoru celkového náboje $Q_{\eta\pi} = \tilde{Q}_\eta + \tilde{Q}_\pi$. Systém je tedy nekoherentní, ale jeho algebra pozorovatelných je stále tvaru (15.7.2):

$$\mathscr{A} = \sum_{\alpha \in J}{}^{\oplus} \mathscr{B}(\mathscr{H}_\alpha) \,. \tag{4}$$

Příklad 8 ukazuje, že této argumentace nelze použít, jsou-li oba (v obecném případě aspoň dva) podsystémy nekoherentní. V takovýchto případech by důkaz rovnosti typu (4) vyžadoval podrobnější informaci o struktuře množiny pozorovatelných: museli bychom např. vědět, jak vypadá hamiltonián (či třída přípustných hamiltoniánů) určující časový vývoj uvnitř vlastních podprostorů operátoru náboje apod. V kvantové mechanice se takováto analýza obvykle neprovádí a *předpokládá se,* že algebra pozorovatelných je tvaru (4), kde $\mathscr{H}_\alpha$ jsou koherentní podprostory systému.

18.2 REDUKOVANÉ STAVY

Postulát (q5-a) v kombinaci s případnými superselekčními pravidly říká, jaké jsou množiny stavů složeného systému S a jeho podsystémů. V tomto paragrafu si položíme složitější otázku: budeme se ptát, v jakých stavech W_1, W_2 jsou podsystémy S_1, S_2, je-li S v daném stavu W, a naopak, co je možno tvrdit o stavu složeného systému, známe-li stavy podsystémů S_1 a S_2.

Budeme užívat obvyklého značení, v němž $\tilde{A}_1 \equiv A_1 \otimes I_2$ atd. Dále budeme v celém paragrafu *uvažovat pouze kvantověmechanický případ,* kdy algebra pozorovatelných každého z podsystémů je tvaru (18.1.4). Nechť tedy systém S je ve stavu W, a stav podsystému S_j označme W_j. Pro libovolnou pozorovatelnou vztahující se pouze k podsystému S_j je přirozené požadovat, aby platilo $\langle \tilde{A}_j \rangle_W = \langle A_j \rangle_{W_j}$. Ze vztahu (15.3.6a) pak plyne, že W_j musí vyhovovat podmínce

$$\mathrm{Tr}\,(\tilde{A}_j W) = \mathrm{Tr}\,(A_j W_j) \,, \qquad j = 1, 2 \,, \tag{1a}$$

542 pro všechna $A_j \in \mathscr{A}_j$. Stavy podsystémů jsou tímto požadavkem určeny jednoznačně:

18.2.1 Tvrzení: Nechť W je statistický operátor popisující stav systému S; potom existuje právě jedna dvojice statistických operátorů $W_j(W)$ odpovídajících realizovatelným stavům a takových, že pro všechna $A_j \in \mathscr{A}_j$ platí

$$\mathrm{Tr}\,(\tilde{A}_j W) = \mathrm{Tr}\,(A_j W_j(W))\,, \qquad j = 1, 2\,. \tag{1b}$$

Důkaz: Uvažujme např. podsystém S_1 a definujme funkcionál f_W: $f_W(A_1) = \mathrm{Tr}\,(\tilde{A}_1 W)$. Snadno lze ověřit, že f_W je lineární, pozitivní a splňuje $f_W(I_1) = 1$, tj. že je to stav na algebře $\mathscr{A}_1$. Dokážeme dále, že f_W je normální. Užijeme ekvivalentní definice z poznámky 13.2.1. Vezměme posloupnost $\{A_1^{(k)}\} \subset \mathscr{A}_{1+}$, pro niž existuje $A_1 = \text{w-lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A_1^{(k)}$. Operátor $\tilde{A}_1$ je potom rovněž pozitivní a platí $\tilde{A}_1 = \text{w-lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \tilde{A}_1^{(k)}$ (cvičení 3). Statistický operátor W zadává podle věty 13.2.2 normální stav na $\mathscr{B}(\mathscr{H}_1) \supset \mathscr{A}_1$, takže

$$f_W(A_1) = \mathrm{Tr}\,(\tilde{A}_1 W) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Tr}\,(\tilde{A}_1^{(k)} W) = \sum_{k=1}^{\infty} f_W(A_1^{(k)})\,.$$

Stav f_W je tedy normální, a protože algebra $\mathscr{A}_1$ je podle předpokladu tvaru (18.1.4), z věty 13.2.8 plyne, že existuje právě jeden statistický operátor $W_1(W)$, který je redukován všemi $\mathscr{H}_\alpha$ a splňuje vztah $f_W(A_1) = \mathrm{Tr}\,(A_1 W_1(W))$ pro každé $A_1 \in \mathscr{A}_1$. ∎

Stavům $W_j(W)$ se říká **redukované** (někdy též **komponentní) stavy** odpovídající stavu W. Za okamžik uvidíme, že je možné nejenom dokázat existenci a jednoznačnost operátorů $W_j(W)$, ale také najít jejich explicitní vyjádření. Nejprve si však položme obrácenou otázku, nakolik je stav systému S určen stavy jeho podsystémů. K daným statistickým operátorům W_j snadno najdeme operátor W takový, že je splněn vztah (1a): podle cvičení 6.23 stačí položit $W = W_1 \otimes W_2$. Zobrazení $W_j(.)$ však obecně nejsou injektivní:

18.2.2 Příklad: Uvažujme systém tvořený dvěma částicemi se spinem $\frac{1}{2}$, třeba dvojicí elektronů nebo elektronem a protonem. Pro jednoduchost opět zanedbáme všechny stupně volnosti kromě spinových tj. položíme $\mathscr{H}_j = \mathbb{C}^2$. Vlastní vektory operátorů třetí složky spinu j-té částice označíme $\varphi_\pm^{(j)}$. Obvykle užívaná ortonormální báze v $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ je tvořena vektory

$$\begin{aligned} \varphi_{10} &= 2^{-1/2}(\varphi_+^{(1)} \otimes \varphi_-^{(2)} + \varphi_-^{(1)} \otimes \varphi_+^{(2)})\,, \\ \varphi_{1,\pm 1} &= \varphi_\pm^{(1)} \otimes \varphi_\pm^{(2)}\,, \\ \varphi_{00} &= 2^{-1/2}(\varphi_+^{(1)} \otimes \varphi_-^{(2)} - \varphi_-^{(1)} \otimes \varphi_+^{(2)})\,. \end{aligned} \tag{2}$$

První tři generují *tripletní* podprostor $\mathscr{H}^{(1)} = E_1\mathscr{H}$, zbývající *singletní* podprostor $\mathscr{H}^{(0)} = E_0\mathscr{H}$. Vezměme nyní matice hustoty $W_j = \frac{1}{2}I_j$ popisující nepolarizované stavy obou částic (viz příklad 15.3.3). Pro libovolný operátor $A_j \in \mathscr{A}_j = \mathscr{B}(\mathbb{C}^2)$ platí $\mathrm{Tr}\,(A_j W_j) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,A_j$; na druhé staně jednoduchým výpočtem v bázi (2) dostáváme $\mathrm{Tr}\,(\tilde{A}_j E_1) = 3\,\mathrm{Tr}\,(\tilde{A}_j E_0) = \frac{3}{2}\mathrm{Tr}\,A_j$. Je-li tedy $W_j = \frac{1}{2}I_j$, pak *pro libovolná nezáporná* w_0, w_1 *splňující* $3w_1 + w_0 = 1$ *vyhovuje statistický operátor* $W = W(w_0, w_1) := w_0 E_0 + w_1 E_1$ *vztahu (1a)*; speciálně to platí pro $W(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = W_1 \otimes W_2$.

Důvod této nejednoznačnosti je zřejmý: vztah (1a) zadává stav složeného systému jako funkcionál definovaný na podmnožině algebry $\mathscr{A}$, konkrétně $\tilde{\mathscr{A}}_1 \cup \tilde{\mathscr{A}}_2$, jež je příliš malá pro jeho plné určení. V některých případech je však možno jednoznačnost stavu W zaručit:

18.2.3 Věta: (a) Je-li podsystém S_1 koherentní a stav W_2 je čistý, pak vztahu (1a) vyhovuje pouze $W = W_1 \otimes W_2$.

(b) Jsou-li stavy obou podsystémů čisté, $W_j = E_{\psi_j}$, pak vztahu (1a) vyhovuje pouze čistý stav $W = E_\psi$, kde $\psi = \psi_1 \otimes \psi_2$.

Důkaz: V prostorech $\mathscr{H}_j$ vybereme ortonormální báze $\{\varphi_i\}$, $\{\chi_k\}$ tvořené vlastními vektory operátorů W_1, resp. W_2 (viz (15.3.8)); odpovídající posloupnosti jednorozměrných projektorů označíme $\{E^{(i)}\}$, resp. $\{F^{(k)}\}$. Je-li stav W_2 čistý, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat $W_2 = F^{(1)}$. Dosadíme-li $A_2 = F^{(k)}$ do vztahu (1a), dostáváme $\delta_{k1} = \mathrm{Tr}\,(\tilde{F}^{(k)} W) = \sum_i W_{ik,ik}$, kde $W_{in,kl} := (\varphi_i \otimes \chi_n, W(\varphi_k \otimes \chi_l))$ jsou maticové elementy operátoru W. Jeho pozitivita dále implikuje

$$W_{ik,ik} = 0 \quad \text{pro } k \neq 1\,. \tag{3a}$$

Pro operátor $A_1 = E^{(i)}$ ze vztahů (1a) a (3a) dostáváme

$$W_{i1,i1} = \sum_k W_{ik,ik} = \mathrm{Tr}\,(E^{(i)} W_1) = w_i^{(1)}\,, \tag{4}$$

kde $w_i^{(1)}$ je příslušná vlastní hodnota operátoru W_1. Nechť dále $\{\psi_k\}$ je ortonormální báze v $\mathscr{H}$ tvořená vlastními vektory operátoru W, tj. $W\psi_k = w_k\psi_k$. Označíme $\alpha_{ij}^{(m)} = (\psi_m, \varphi_i \otimes \chi_k)$; potom užitím omezenosti operátoru W snadno odvodíme $W(\varphi_k \otimes \chi_l) = \sum_m \alpha_{kl}^{(m)} w_m \psi_m$, a odtud

$$W_{in,kl} = \sum_m \bar{\alpha}_{in}^{(m)} \alpha_{kl}^{(m)} w_m\,.$$

Vlastní hodnoty w_m jsou nezáporné; je-li $w_m > 0$ a $n \neq 1$, pak ze vztahu (3a) plyne $\alpha_{in}^{(m)} = 0$, tj.

$$W_{in,kl} = 0 \quad \text{pro } n \neq 1 \quad \text{nebo} \quad l \neq 1\,. \tag{3b}$$

Je-li současně stav W_1 čistý, můžeme volit bázi $\{\varphi_i\}$ tak, aby $W_1 = E^{(1)}$. Zopakujeme-li potom úvahu se záměnou operátorů W_1, W_2, dostaneme $W_{in,kl} = 0$ pro $i \neq 1$ nebo $k \neq 1$. Dohromady platí $W_{in,kl} = \delta_{i1}\delta_{n1}\delta_{k1}\delta_{l1} = (W_1 \otimes W_2)_{in,kl}$ pro všechna i, n, k, l a z rovnosti maticových elementů plyne rovnost operátorů, $W = W_1 \otimes W_2$. Stavy W_j jsou podle předpokladu čisté, $W_j^2 = W_j$, takže $W^2 = W_1^2 \otimes W_2^2 = W$ a stav W je rovněž čistý; tím jsme dokázali tvrzení (b).

Až dosud jsme nepotřebovali předpokládat koherenci. Je-li S_1 koherentní, pak pro libovolné $B_1 \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_1)$ platí $\operatorname{Tr}(B_1 W_1) = \operatorname{Tr}(\tilde{B}_1 W)$, což s pomocí vztahu (4) dává

$$\sum_{\substack{i,k \\ i \neq k}} (B_1)_{ik}\, W_{k1,i1} = 0\,. \tag{5}$$

Platí $\sum_{ik} |W_{k1,i1}|^2 = \sum_{in,kl} |W_{kl,in}|^2 = \|W\|_2^2 < \infty$, proto matice $\{\bar{W}_{k1,i1} : i, k = 1, \ldots, \dim \mathscr{H}_1\}$ reprezentuje nějaký operátor $C_1 \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_1)$. Dosadíme-li $B_1 = C_1$ do rovnosti (5), dostáváme $W_{k1,i1} = 0$ pro $i \neq k$, což v kombinaci se vztahy (3b) a (4) dává $W_{ij,kl} = w_i^{(1)}\delta_{ik}\delta_{j1}\delta_{l1} = (W_1 \otimes W_2)_{ij,kl}$, tj. $W = W_1 \otimes W_2$. ■

Podívejme se nyní, jak vypadají redukované stavy. Redukci smíšeného stavu lze převést na redukci stavů čistých (cvičení 5), proto budeme uvažovat pouze případ, kdy složený systém je v čistém stavu $W = E_\psi$. V prostorech $\mathscr{H}_j$ zvolíme (prozatím libovolné) ortonormální báze $\mathscr{E}_\varphi = \{\varphi_i\}$, resp. $\mathscr{E}_\chi = \{\chi_k\}$ a vektor ψ reprezentující stav W vyjádříme pomocí báze

$$\psi = \sum_{ik} \alpha_{ik}\varphi_i \otimes \chi_k\,. \tag{6a}$$

Podle předpokladu je ψ jednotkový vektor, tj.

$$\sum_{ik} |\alpha_{ik}|^2 = 1. \tag{6b}$$

Levou stranu vztahu (1) můžeme formálně vyjádřit ve tvaru $\sum_{ilk} \bar{\alpha}_{il}\alpha_{kl}(\varphi_i, A_1\varphi_k)_1$. Ověříme, že pro libovolný operátor $A_1 \in \mathscr{A}_1 \cap \mathscr{J}_2(\mathscr{H}_1)$ tato řada absolutně konverguje, takže ji lze přerovnat; platí tedy

$$\operatorname{Tr}(\tilde{A}_1 W) = \sum_{ik} b_{ki}(\varphi_i, A_1\varphi_k)_1\,.$$

kde $b_{ki} := \sum_j \bar{\alpha}_{ij}\alpha_{kj}$. Z Hölderovy nerovnosti a normalizační podmínky (6b) plyne $\sum_{ik} |b_{ik}|^2 \leqq 1$; je-li A_1 Hilbertův-Schmidtův operátor, pak dalším užitím Hölderovy nerovnosti dostáváme absolutní konvergenci zmíněné řady. Matice (b_{ij}) reprezentuje v bázi $\mathscr{E}_\varphi$ operátor z $\mathscr{J}_2(\mathscr{H}_1)$, který označíme $W^{(1)}$. Snadno se lze přesvědčit, že $W^{(1)} \geqq 0$; dále $\operatorname{Tr} W^{(1)} = \sum_i b_{ii} = 1$, takže $W^{(1)}$ je statistický operátor.

Konečně platí $\mathrm{Tr}\,(A_1 W^{(1)}) = \sum_{ik} (\varphi_i, A_1 \varphi_k)_1\, b_{ki}$, tj.

$$\mathrm{Tr}\,(A_1 W^{(1)}) = \mathrm{Tr}\,(A_1 W_1(W)) \tag{7a}$$

pro všechna $A_1 \in \mathscr{A}_1 \cap \mathscr{J}_2(\mathscr{H}_1)$. Podobně zkonstruujeme statistický operátor $W^{(2)} \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_2)$, který je v bázi $\mathscr{E}_\chi$ reprezentován maticí (c_{jl}), kde $c_{jl} := \sum_i \bar{\alpha}_{ij} \alpha_{il}$, přičemž pro každé $A_2 \in \mathscr{A}_2 \cap \mathscr{J}_2(\mathscr{H}_2)$ platí:

$$\mathrm{Tr}\,(A_2 W^{(2)}) = \mathrm{Tr}\,(A_2 W_2(W))\,. \tag{7b}$$

Jsou-li oba podsystémy koherentní, můžeme v rovnostech (7) položit $A_j = W^{(j)} - W_j(W)$; odtud snadno dostaneme $W_j(W) = W^{(j)}$. Pokud je alespoň jeden z podsystémů nekoherentní, pak tento závěr nemusí platit, protože není zaručeno, že $W^{(j)} \in \mathscr{A}_j$. Pomocí projektorů $E_\alpha^{(j)}$ odpovídajících koherentním podprostorům v $\mathscr{H}_j$ však můžeme zkonstruovat statistické operátory

$$W_j := \sum_{\alpha \in J} E_\alpha^{(j)} W^{(j)} E_\alpha^{(j)} \quad \text{(silná konvergence)} \tag{8}$$

takové, že platí $\mathrm{Tr}\,(A_j W_j) = \mathrm{Tr}\,(A_j W^{(j)})$ pro všechna $A_j \in \mathscr{A}_j$ (viz cvičení 6). Nyní již operátory $W_j - W_j(W)$ patří do $\mathscr{A}_j \cap \mathscr{J}_2(\mathscr{H}_j)$, a stejnou úvahou jako výše dostáváme $W_j(W) = W_j$.

Vztah (8) spolu s vyjádřením operátorů $W^{(j)}$ pomocí Fourierových koeficientů vektoru ψ,

$$W^{(1)}\varphi_i = \sum_{k=1}^{n_1} b_{ik}\varphi_k\,, \qquad b_{ik} = \sum_{l=1}^{n_2} \bar{\alpha}_{kl}\alpha_{il}\,, \tag{9a}$$

$$W^{(2)}\chi_i = \sum_{k=1}^{n_2} c_{ik}\chi_k\,, \qquad c_{ik} = \sum_{l=1}^{n_1} \bar{\alpha}_{li}\alpha_{lk}\,, \tag{9b}$$

kde $n_j = \dim \mathscr{H}_j$, plně řeší otázku, jak vypadají redukované stavy odpovídající danému čistému stavu ψ. Speciálně v koherentním případě jsou redukované stavy určeny přímo vztahy (9), kterým se říká **redukční formule**.

Ukážeme dále, že při vhodném výběru ortonormálních bází můžeme tyto formule vyjádřit v jistém standardním tvaru. Nejprve vybereme za $\mathscr{E}_\varphi$ bázi $\tilde{\mathscr{E}}_\varphi = \{\tilde{\varphi}_i\}$ tvořenou vlastními vektory operátoru $W^{(1)}$; odpovídající vlastní hodnoty označíme $w_i^{(1)}$. Ze vztahu (9a) plyne $b_{ik} = w_i^{(1)}\delta_{ik}$ nezávisle na výběru báze $\mathscr{E}_\chi$. Je-li potom $w_i^{(1)} > 0$, pak alespoň jeden z koeficientů α_{ik}, $k = 1, \ldots, n_2$, je nenulový; můžeme proto sestrojit jednotkový vektor $\tilde{\chi}_i := (w_i^{(1)})^{-1/2} \sum_l \alpha_{il}\chi_l$, pro nějž platí

$$(\chi_k, W^{(2)}\tilde{\chi}_i)_2 = (w_i^{(1)})^{-1/2} \sum_l \alpha_{il} c_{lk} = (w_i^{(1)})^{-1/2} \sum_l \alpha_{il} \sum_n \bar{\alpha}_{nl}\alpha_{nk}\,.$$

546 Pomocí Hölderovy nerovnosti, vztahů (9) a $\sum_l w_l^{(1)} = 1$ se snadno přesvědčíme, že řada na pravé straně absolutně konverguje, $\sum_{nl} |\alpha_{in}\alpha_{ln}\alpha_{lk}| \leqq (w_i^{(1)} c_{kk})^{1/2}$. Zaměníme-li pořadí sčítání, dostaneme

$$(\chi_k, W^{(2)}\tilde{\chi}_i)_2 = (w_i^{(1)})^{-1/2} \sum_l \alpha_{lk} b_{li} = \alpha_{ik}(w_i^{(1)})^{1/2},$$

a odtud dále plyne $W^{(2)}\tilde{\chi}_i = w_i^{(1)}\tilde{\chi}_i$. To znamená, že každá nenulová vlastní hodnota operátoru $W^{(1)}$ je současně vlastní hodnotou operátoru $W^{(2)}$. Zopakujeme-li tuto úvahu se záměnou operátorů, dostaneme $\sigma_p(W^{(1)}) \setminus \{0\} = \sigma_p(W^{(2)}) \setminus \{0\}$; tyto společné vlastní hodnoty označíme w_i. Množinu $\{\tilde{\chi}_i\}_{i=1}^n$, kde $n \equiv \dim \mathrm{Ran}\, W^{(1)} = \dim \mathrm{Ran}\, W^{(2)}$, můžeme doplnit na ortonormální bázi $\tilde{\mathscr{E}}_\chi$ v $\mathscr{H}_2$. Označíme $E^{(i)}$, $F^{(i)}$ jednorozměrné projektory odpovídající vektorům báze $\tilde{\mathscr{E}}_\varphi$, resp. $\tilde{\mathscr{E}}_\chi$; potom platí

$$W^{(1)} = \sum_{i=1}^n w_i E^{(i)}, \qquad W^{(2)} = \sum_{i=1}^n w_i F^{(i)}. \tag{10a}$$

Konečně Fourierovy koeficienty vektoru ψ vzhledem k bázi $\tilde{\mathscr{E}}_\varphi \times \tilde{\mathscr{E}}_\chi$ jsou rovny

$$(\tilde{\varphi}_k \otimes \tilde{\chi}_l, \psi) = \sum_{ij} \alpha_{ij} w_l^{-1/2} \sum_m \bar{\alpha}_{lm}(\tilde{\varphi}_k \otimes \chi_m, \tilde{\varphi}_i \otimes \chi_j) = w_l^{-1/2} \sum_m \alpha_{km}\bar{\alpha}_{lm} = w_l^{1/2}\delta_{lk},$$

takže platí

$$\psi = \sum_{i=1}^n w_i^{1/2} \tilde{\varphi}_i \otimes \tilde{\chi}_i. \tag{10b}$$

Shrneme odvozené výsledky:

18.2.4 Věta: Jestliže složený systém je v čistém stavu $W = E_\psi$, potom redukované stavy $W_j(W)$ jsou dány formulemi (8) a (9). Jsou-li speciálně oba podsystémy koherentní, pak existují ortonormální báze $\tilde{\mathscr{E}}_\varphi$ a $\tilde{\mathscr{E}}_\chi$, pomocí nichž lze redukované stavy vyjádřit v normálním tvaru (10).

18.2.5 Příklad: Uvažujme opět systém dvou částic z příkladu 2. Stavům $E_{1,\pm 1} = E_\pm^{(1)} \otimes E_\pm^{(2)}$ odpovídají podle cvičení 4 redukované stavy $W_j(E_{1,\pm 1}) = E_\pm^{(j)}$. Na druhé straně projektor E_0 na singletní podprostor je příkladem čistého stavu, jejž nelze vyjádřit ve tvaru $W_1 \otimes W_2$. Vektor φ_{00}, který jej reprezentuje, má v bázi $\{\varphi_i^{(1)} \otimes \varphi_j^{(2)}: i, j = \pm\}$ Fourierovy koeficienty $\alpha_{++} = \alpha_{--} = 0$ a $\alpha_{+-} = -\alpha_{-+} = 2^{-1/2}$, takže z redukčních formulí (9) dostáváme

$$W_j(E_0) = \frac{1}{2} I_j.$$

Položíme-li $\tilde{\varphi}_\pm := \varphi_\pm^{(1)}$ a $\tilde{\chi}_\pm := \pm\,\varphi_\mp^{(2)}$, můžeme vektor φ_{00} vyjádřit ve tvaru (10b):

$$\varphi_{00} = 2^{-1/2}(\tilde{\varphi}_+ \otimes \tilde{\chi}_+ + \tilde{\varphi}_- \otimes \tilde{\chi}_-) .$$

Pro čistý stav popsaný vektorem φ_{10} dostáváme tytéž redukované stavy, $W_j(E_{10}) = \frac{1}{2}I_j$. Totéž platí pro smíšený tripletní stav $\frac{1}{3}E_1$, kdy z výsledku cvičení 5 dostáváme $W_j(\frac{1}{3}E_1) = \frac{1}{6}I_j + \frac{1}{3}(E_+^{(j)} + E_-^{(j)}) = \frac{1}{2}I_j$, a také pro směs stavů $\frac{1}{3}E_1$ a E_0.

18.3 ČASOVÝ VÝVOJ

Nechť H, resp. H_j jsou hamiltoniány systému S, resp. jeho podsystémů S_j; podobně označíme odpovídající propagátory. Operátor H má zpravidla tvar

$$H = \overline{\tilde{H}_1 + \tilde{H}_2 + H_{\mathrm{int}}} , \tag{1}$$

kde H_{int} je *interakční hamiltonián* popisující energii vzájemného působení obou podsystémů; rozdělení operátoru celkové energie na tuto část a část volnou, která je součtem operátorů energie podsystémů má většinou přímou fyzikální motivaci. Aby mělo vyjádření (1) smysl, musí být operátor $\tilde{H}_1 + \tilde{H}_2 + H_{\mathrm{int}}$ v podstatě samosdružený. To je snadné ověřit, pokud je operátor H_{int} hermitovský (cvičení 8); v jiných případech však tento problém může být značně netriviální.

Je-li $H_{\mathrm{int}} = 0$, říkáme, že podsystémy S_1, S_2 **neinteragují**. V takovém případě lze časový vývoj složeného systému jednoduše popsat, neboť z tvrzení 11.1.7 a jednoznačnosti generátoru unitární grupy plyne:

18.3.1 Tvrzení: Podsystémy S_1, S_2 neinteragují právě tehdy, když mezi jejich propagátory a propagátorem složeného systému platí pro všechna $t \in \mathbb{R}$ vztah

$$U(t) = U_1(t) \otimes U_2(t) . \tag{2}$$

18.3.2 Poznámka: O neinteragujících podsystémech lze mluvit i tehdy, když S_1 nebo S_2 jsou nekonzervativní. V takovém případě můžeme dokázat analogii vztahu (2), pokud jsme schopni ověřit existenci příslušných unitárních propagátorů (viz např. cvičení 9).

Pokud podsystémy S_1, S_2 interagují, je vztah mezi časovým vývojem jejich stavů a stavu složeného systému komplikovanější. Z předchozího paragrafu víme, že každému stavu W_t složeného (kvantověmechanického) systému S odpovídá právě jedna dvojice redukovaných stavů $W_t^{(j)} \equiv W_j(W_t)$ podsystémů S_j. Jejich časová závislost ovšem může vykazovat značně patologické vlastnosti:

(i) nemusí se zachovávat veličina $\mathrm{Tr}\,[(W_t^{(j)})^2]$, speciálně čistý stav může přejít v smíšený a naopak – viz (17.1.1),

(ii) operátory $U^{(j)}(t,s)$: $W_t^{(j)} = U^{(j)}(t,s)\, W_s^{(j)}\, U^{(j)}(s,t)$ nemusí existovat, a pokud existují, nemusí mít vlastnosti, jež vyžaduje definice propagátoru.

548 **18.3.3 Příklad:** Pro systém dvou částic se spinem $1/2$ z příkladů 18.2.2 a 18.2.5 položíme $H = (\varepsilon/2)\,\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma}$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$ a $\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma} := \sum_{j=1}^{3} \sigma_j \otimes \sigma_j$. Tento operátor představuje v našem případě, kdy zanedbáváme všechny stupně volnosti kromě spinových, typickou nerelativistickou interakci uvažovaných částic.

Vyšetříme časový vývoj čistého stavu systému, který je v počátečním okamžiku $t = 0$ popsán vektorem $\varphi_+^{(1)} \otimes \varphi_-^{(2)}$. Operátor $\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma}$ má vlastní hodnoty 1 a -3; podle příkladu 9.3.5 pro evoluční operátor $U(t) = \exp\left(-it(\varepsilon/2)\,\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma}\right)$ dostaneme:

$$U(t) = e^{i(\varepsilon/2)t} \left[\cos \varepsilon t - \frac{i}{2} \sin \varepsilon t \,(I + \boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma}) \right]. \tag{3}$$

Pro vektor $\psi(t) := U(t)\,(\varphi_+^{(1)} \otimes \varphi_-^{(2)})$ pak snadno odvodíme vztah

$$\psi(t) = e^{i(\varepsilon/2)t} [\cos \varepsilon t (\varphi_+^{(1)} \otimes \varphi_-^{(2)}) - i \sin \varepsilon t (\varphi_-^{(1)} \otimes \varphi_+^{(2)})] .$$

Pomocí redukčních formulí (18.2.9) získáme následující tvar redukovaných stavů $W_j(E_{\psi(t)}) \equiv W(t)^{(j)}$

$$W(t)^{(1)} = \cos^2 \varepsilon t \, E_+ + \sin^2 \varepsilon t \, E_- ,$$
$$W(t)^{(2)} = \sin^2 \varepsilon t \, E_+ + \cos^2 \varepsilon t \, E_- ,$$

kde $E_\pm = \frac{1}{2}(I \pm \sigma_3)$. Jelikož $\mathrm{Tr}\,[W(t)^{(j)}]^2 = \frac{1}{4}(3 + \cos 4\varepsilon t)$ pro $j = 1, 2$, vidíme, že redukovaný stav $W(t)^{(1)}$ je čistý, právě když je čistý stav $W(t)^{(2)}$; nastává to pro $t = k\pi/2\varepsilon$, kde k je celé číslo.

Závěrem se vraťme k postulátům časového vývoje z předchozí kapitoly. Při jejich formulaci jsme mlčky předpokládali, že vlivy, jimiž působí zkoumaný systém na zbytek světa, jsou zanedbatelné, tj. že systém je buď izolovaný, nebo interaguje s makroskopickým polem, které není přítomností mikrosystému ovlivněno. Příklad ukazuje, že tento předpoklad je podstatný; není-li splněn, nemůžeme zaručit ani existenci evolučního operátoru.

18.4 IDENTICKÉ ČÁSTICE

V úvodu kapitoly jsme upozornili, že postulát (q5-a) platí pouze za předpokladu, že uvažované systémy jsou vzájemně různé. Nyní se proto budeme zabývat situací, kdy složený systém obsahuje dva nebo více totožných podsystémů. K tomu je nutné nejprve říci několik slov o tom, co znamená pojem totožnosti v kvantové teorii. Pro jednoduchost budeme mluvit o elementárních částicích; závěry se ovšem přenášejí i na systémy složené z „neelementárních“ mikroobjektů, jako jsou jádra, atomy apod.

Vlastnosti dané elementární částice můžeme rozdělit do dvou skupin. Jedna, jako např. prostorová lokalizace, hodnota třetí složky spinu apod., určuje stav částice. Do druhé skupiny patří vnitřní charakteristiky (hmotnost, spin, elektrický náboj) určující příslušnost k danému druhu. Ze zkušenosti víme, že existuje konečný počet druhů elementárních částic, navíc nepříliš velký: stabilních částic je pět druhů, z nichž pouze elektrony a protony mají nenulovou hmotnost, a přidáme-li částice s dobou života $\gtrsim 10^{-16}$ s, dostaneme okolo 30 druhů. Principiální předpoklad kvantové teorie spočívá v tom, že *dvě částice patřící k témuž druhu nelze rozlišit.*

V klasické mechanice je možné rozlišit totožné objekty, např. bodové částice o téže hmotnosti, pomocí jejich stavů: každé z nich lze připsat trajektorii, proto stačí částice nějak v počátečním okamžiku pojmenovat. V kvantové teorii není tato představa použitelná, protože obecně nemůžeme zaručit zachování lokalizace (viz cvičení 17.7). Jakmile se vlnové funkce obou částic překrývají, nelze říci, kterou z nich detektor zaregistroval v průniku jejich nosičů. Proto musíme přijmout výše uvedený **princip nerozlišitelnosti identických částic** se všemi jeho důsledky: musíme vyloučit všechny pozorovatelné, jejichž měření by nám umožňovalo najít nějaké rozlišení.

Uvažujme nejprve systém složený ze dvou částic, z nichž každé přísluší stavový Hilbertův prostor $\mathscr{H}$. Kdyby byly tyto částice různé, měl by stavový prostor složeného systému tvar $\mathscr{H}^{(2)} := \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}$; ukážeme, že nyní vystačíme s jistým jeho podprostorem. Nejprve položíme

$$U_P\left(\sum_{k=1}^{n} \psi_k \otimes \varphi_k\right) := \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \otimes \psi_k \tag{1}$$

pro libovolná $\varphi_k, \psi_k \in \mathscr{H}$ a jakékoli přirozené n. Snadno se přesvědčíme, že tímto předpisem je definován operátor na $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}$, a že jeho spojité rozšíření na $\mathscr{H}^{(2)}$, jež označíme rovněž U_P, je unitární operátor (viz cvičení 11). Uvažujme nyní stavy W a $W_P \equiv U_P W U_P^{-1}$ složeného systému. Jsou-li tyto stavy čisté a popisované vektory ψ, resp. $\psi_P \equiv U_P \psi$, pak redukované stavy snadno najdeme z formulí (18.2.9): vyjádříme-li ψ_P ve tvaru (18.2.6a), jeho Fourierovy koeficienty α_{ik}^P souvisí s Fourierovými koeficienty stavu vztahem $\alpha_{ik}^P = \alpha_{ki}$, takže platí

$$W_1(W) = W_2(W_P) \tag{2}$$

a obdobná rovnost se záměnou stavů W a W_P; pomocí výsledku cvičení 5 lze tento závěr rozšířit na libovolné W. Stavy W a W_P se tedy vzájemně liší záměnou obou částic. Princip nerozlišitelnosti nyní vyžaduje, aby pro každou omezenou pozorovatelnou A dvoučásticového systému a libovolný stav W platilo

$$\operatorname{Tr}(AW) = \operatorname{Tr}(AW_P) = \operatorname{Tr}(U_P^{-1} A U_P W), \tag{3}$$

550 speciálně $(\psi, A\psi) = (\psi, U_P^{-1} A U_P \psi)$ pro každý vektor ψ popisující realizovatelný čistý stav. Operátor A jakožto pozorovatelná komutuje se všemi projektory E_α na koherentní podprostory. Totéž platí pro operátory U_P, protože pro libovolné $\psi \in E_\alpha \mathscr{H}^{(2)}$ představuje $U_P \psi$ realizovatelný stav; kdyby platilo $U_P \psi \notin E_\alpha \mathscr{H}^{(2)}$, dostali bychom se do sporu s principem nerozlišitelnosti. Operátor $B \equiv \equiv A - U_P^{-1} A U_P$ tedy komutuje se všemi E_α a $(\psi, B\psi) = 0$ pro každé ψ patřící do některéhò z podprostorů $E_\alpha \mathscr{H}^{(2)}$; odtud snadno odvodíme, že $B = 0$, tj.

$$A = U_P^{-1} A U_P . \tag{4a}$$

Tento závěr se netýká jenom omezených pozorovatelných. Užijeme-li ztotožnění libovolné pozorovatelné A se souborem ano-ne experimentů (viz § 15.1) a tvrzení spektrálního teorému o komutativitě, vidíme, že

$$U_P A \subset A U_P . \tag{4b}$$

Princip nerozlišitelnosti tedy připouští jenom takové pozorovatelné, které komutují s operátorem U_P.

Definujme dále operátory $S_2 = \frac{1}{2}(I + U_P)$ a $A_2 = \frac{1}{2}(I - U_P)$. Jelikož $U_P^2 = I$, jsou to vzájemně ortogonální projektory takové, že $S_2 + A_2 = I$. Vztahy (4) potom říkají, že *každá pozorovatelná systému dvou identických částic je redukována projektory S_2 a A_2*. Tento výsledek vypadá, jako by totožnost částic vyžadovala zavedení nového superselekčního pravidla. Ze zkušenosti však víme, že realizovatelným stavům složeného systému odpovídá vždy jen jeden z obou podprostorů. To znamená, že libovolný systém dvou identických částic splňuje podmínku

$$U_P \psi = \pm \psi , \tag{5}$$

kde horní, resp. dolní znaménko odpovídá případu $\psi \in S_2 \mathscr{H}^{(2)}$, resp. $\psi \in A_2 \mathscr{H}^{(2)}$. O tomto chování při záměně částic se obvykle mluví jako o *Boseově-Einsteinově*, resp. *Fermiho-Diracově statistice*. Dále je známo, že Boseovou-Einsteinovou statistikou se řídí částice s celočíselným spinem, zatímco Fermiho-Diracovou statistikou se řídí částice se spinem polocelým, pro stručnost se o těchto kategoriích mluví jako o bosonech, resp. fermionech. Tento v rámci kvantové mechaniky empirický fakt může být vysvětlen v relativistické kvantové teorii polí (viz komentář).

Získané závěry nyní rozšíříme na případ systému složeného z n identických částic. Nechť $\mathscr{S}_n$ je grupa permutací n prvků. Tyto permutace budeme značit

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix};$$

symbolem ε_p označíme paritu dané permutace, $\varepsilon_p = \pm 1$. Pro každou permutaci p

a libovolné vektory $\psi_j \in \mathscr{H}$ definujeme zobrazení

$$U(p)\colon\ U(p)\,(\,\psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_n) = \psi_{p_1} \otimes \ldots \otimes \psi_{p_n}\,. \tag{6}$$

Stejně jako výše lze ověřit, že lineární rozšíření tohoto zobrazení je korektně definováno, a že jeho uzávěr, který označíme opět $U(p)$, je unitární operátor na $\mathscr{H}^{(n)} := \mathscr{H} \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}$. Dále platí

$$U(p)\,U(\tilde{p}) = U(p\tilde{p}) \tag{7}$$

pro libovolné permutace $p, \tilde{p} \in \mathscr{S}_n$, speciálně $U(e) = I$ pro identickou permutaci $e \in \mathscr{S}_n$ a $U(p^{-1}) = U(p)^{-1}$. To znamená, že zobrazení $U\colon \mathscr{S}_n \to \mathscr{B}(\mathscr{H}^{(n)})$ je unitární reprezentace grupy $\mathscr{S}_n$. Dále definujeme operátory

$$S_n = \frac{1}{n!} \sum_{p \in \mathscr{S}_n} U(p)\,, \qquad A_n = \frac{1}{n!} \sum_{p \in \mathscr{S}_n} \varepsilon_p\, U(p)\,; \tag{8}$$

snadno se přesvědčíme, že jsou hermitovské. Ze vztahu (7) plynou pro libovolné $p \in \mathscr{S}_n$ rovnosti $U(p)\,S_n = S_n$ a $U(p)\,A_n = \varepsilon_p A_n$, z nichž dále dostáváme $S_n^2 = S_n$ a $A_n^2 = A_n$; to znamená, že *operátory S_n a A_n jsou projektory.*

Nechť A je libovolná pozorovatelná n-částicového systému. Podobně jako v případě $n = 2$ se stavy W a $W_p \equiv U(p)\,W\,U(p)^{-1}$ liší permutací částic: pro j-tý redukovaný stav platí

$$W_j(W) = W_{r_j}(W_p)\,, \tag{9}$$

kde $r = p^{-1}$. Princip nerozlišitelnosti vyžaduje, aby $\mathrm{Tr}\,(AW) = \mathrm{Tr}\,(AW_p)$ pro každý realizovatelný stav W, odkud výše uvedeným postupem vyplývá

$$U(p)\,A \subset A\,U(p) \tag{10a}$$

pro každou permutaci $p \in \mathscr{S}_n$, a tedy platí

$$S_n A \subset A S_n\,, \qquad A_n A \subset A A_n\,. \tag{10b}$$

Také v tomto případě odpovídají realizovatelným čistým stavům vektory pouze jednoho z těchto podprostorů v závislosti na tom, jaký je spin uvažovaných částic.

Na základě těchto úvah můžeme postulát o stavovém prostoru složeného systému zformulovaný v úvodu kapitoly doplnit následovně:

(q5-b) stavovým prostorem n identických částic s celočíselným (poločíselným) spinem je $S_n\mathscr{H}^{(n)}(A_n\mathscr{H}^{(n)})$ v $\mathscr{H}^{(n)} = \mathscr{H} \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}$, kde $\mathscr{H}$ je stavový prostor jedné částice.

Připomeňme stručně fyzikálně nejdůležitější důsledek tohoto postulátu:

18.4.1 Příklad (*Pauliho princip*): Uvažujme soustavu n identických fermionů ve stavu popisovaném vektorem $\psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_n \in A_n\mathscr{H}^{(n)}$. Předpokládejme, že pro dvojici indexů j, k platí $\psi_j = \psi_k$. Nechť p_{jk} značí transpozici j-tého a k-tého prvku. Její parita je záporná, proto $U(p_{jk})\,A_n = -A_n$. Podle předpokladu je $A_n\psi = \psi$ a současně $U(p_{jk})\,\psi = \psi$. Kombinací těchto vztahů dostáváme $\psi = 0$; to znamená, že *v soustavě identických fermionů nemohou být žádné dva současně v tomtéž čistém stavu.*

18.5 SEPARACE PROMĚNNÝCH

Čím je systém složitější, tím obtížnější je studium vlastností jeho pozorovatelných, v prvé řadě hamiltoniánu. Výjimku tvoří případ, kdy je možno systém rozdělit na dva nebo větší počet podsystémů reálných nebo fiktivních, jež vzájemně neinteragují. Často se stává, že hamiltonián H sám není tvaru $\tilde{H}_1 + \tilde{H}_2$ (viz (18.3.1)), ale je možné přejít k unitárně ekvivalentnímu operátoru $U^{-1}HU$, který tuto vlastnost má. Prakticky nejdůležitější je případ, kdy U je vhodný „dosazovací" operátor z příkladu 5.5.3. V tomto paragrafu probereme dvě jednoduché situace tohoto druhu. První se týká separace těžišťového pohybu v soustavě dvou částic.

18.5.1 Příklad: Stavovým prostorem soustavy dvou bezspinových částic je $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^6)$. Prvky konfiguračního prostoru, jež vystupují jako argument ve vlnových funkcích, označíme nyní $(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)})$, kde $\boldsymbol{x}^{(j)} = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, x_3^{(j)})$ odpovídá souřadnicím j-té částice, a $Q_k^{(j)}$ značí odpovídající operátory souřadnic. Podobně označíme operátory složek impulsu. Uvažujme potenciál na $L^2(\mathbb{R}^6)$, tj. operátor násobení funkcí $V\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$, a předpokládejme, že V lze vyjádřit pomocí borelovské funkce $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ následujícím způsobem:

$$V(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}) = v(\boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{x}^{(1)})\,. \tag{1a}$$

Na podprostoru $\mathscr{S}(\mathbb{R}^6) \cap D_V$, kde $D_V = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^6)\colon V\psi \in L^2(\mathbb{R}^6)\}$, definujeme operátor H vztahem

$$H\psi := \left[\frac{1}{2m_1}(\boldsymbol{P}^{(1)})^2 + \frac{1}{2m_2}(\boldsymbol{P}^{(2)})^2 + V\right]\psi\,; \tag{1b}$$

zde $(\boldsymbol{P}^{(j)})^2 := \sum_{k=1}^{3} (P_k^{(j)})^2$ a m_j je hmotnost j-té částice.

Zavedeme následující dosazovací operátor U na $L^2(\mathbb{R}^6)$:

$$(U\psi)(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}) := \psi(\mu_1\boldsymbol{x}^{(1)} + \mu_2\boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{x}^{(1)})\,, \tag{2a}$$

kde $\mu_j := m_j/(m_1 + m_2)$, takže $\mu_1 + \mu_2 = 1$. Z výsledku příkladu 5.5.3 plyne, že U je unitární operátor; pro inverzní operátor dostáváme

$$(U^{-1}\psi)\,(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}) = \psi(\boldsymbol{x}^{(1)} - \mu_2\boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{x}^{(1)} + \mu_1\boldsymbol{x}^{(2)})\,. \tag{2b}$$

Není těžké ověřit, že $U\mathscr{S}(\mathbb{R}^6) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^6)$; totéž platí pro operátor U^{-1} takže

$$U\mathscr{S}(\mathbb{R}^6) = \mathscr{S}(\mathbb{R}^6)\,. \tag{3}$$

Dále pomocí věty o substituci (viz § A.7) pro operátor násobení funkcí $W\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ danou předpisem

$$W(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}) := v(\boldsymbol{x}^{(2)}) \tag{4a}$$

ověříme rovnost $D_W = U^{-1}D_V$; pro každé $\psi \in D_W$ pak z (2b) plyne $W\psi = U^{-1}VU\psi$, takže celkem platí operátorová rovnost

$$W = U^{-1}VU\,. \tag{4b}$$

Zjistíme dále, jak se transformují složky impulsu. Z výsledků příkladů 15.2.3 a vztahů (3) a (2a) pro každé $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^6)$ dostaneme

$$U^{-1}P_k^{(1)}U\varphi = -\mathrm{i}\,U^{-1}[\mu_1\, U(\partial_k^{(1)}\varphi) - U(\partial_k^{(2)}\varphi)] = \mu_1 P_k^{(1)}\varphi - P_k^{(2)}\varphi\,,$$

$$U^{-1}P_k^{(2)}U\varphi = -\mathrm{i}\,U^{-1}[\mu_2\, U(\partial_k^{(1)}\varphi) - U(\partial_k^{(2)}\varphi)] = \mu_2 P_k^{(1)}\varphi - P_k^{(2)}\varphi\,.$$

Jednoduchý výpočet pak dává

$$U^{-1}\left[\frac{1}{2m_1}(\boldsymbol{P}^{(1)})^2 + \frac{1}{2m_2}(\boldsymbol{P}^{(2)})^2\right]U\varphi = \frac{1}{2M}(\boldsymbol{P}^{(1)})^2\,\varphi + \frac{1}{2\mu}(\boldsymbol{P}^{(2)})^2\,\varphi\,, \tag{5}$$

kde M a μ je celková, resp. redukovaná hmotnost uvažované soustavy dvou částic. Užijeme-li ještě rovnosti (4b), vidíme, že pro každé $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^6) \cap D_V$ platí

$$U^{-1}HU\psi = \left[\frac{1}{2M}(\boldsymbol{P}^{(1)})^2 + \frac{1}{2\mu}(\boldsymbol{P}^{(2)})^2 + W\right]\psi\,. \tag{6}$$

Vezměme nyní libovolný hustý podprostor $D \subset L^2(\mathbb{R}^3)$ takový, že $D \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^3) \cap D_v$. Zapíšeme-li stavový prostor ve tvaru $L^2(\mathbb{R}^6) = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes L^2(\mathbb{R}^3)$, plyne ze (4a) inkluze

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^3) \otimes D \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^6) \cap D_W\,; \tag{7}$$

pomocí (6) pak dostaneme

$$U^{-1}HU \restriction (\mathscr{S}(\mathbb{R}^3) \otimes D) = T_{\mathrm{cm}} \otimes I + I \otimes H_{\mathrm{rel}}\,, \tag{8}$$

kde T_{cm} a H_{rel} jsou operátory na $L^2(\mathbb{R}^3)$ s definičními obory $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, resp. D, přičemž pro všechna $\varphi_1 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, resp. $\varphi_2 \in D$ platí

$$T_{\mathrm{cm}}\varphi_1 = -\frac{1}{2M}\Delta\varphi_1\,, \qquad H_{\mathrm{rel}}\varphi_2 = -\frac{1}{2\mu}\Delta\varphi_2 + v\varphi_2\,.$$

Víme, že operátor T_{cm} je v podstatě samosdružený (viz cvičení 15.18); jestliže se nám podaří zvolit podprostor D tak, aby H_{rel} byl rovněž v podstatě samosdružený, bude podle důsledku 10.8.3 v podstatě samosdružený i operátor $T_{\mathrm{cm}} \otimes I + I \otimes H_{\mathrm{rel}}$. Odtud dále vyplývá podstatná samosdruženost operátoru $H \upharpoonright U(\mathscr{S}(\mathbb{R}^3) \otimes D)$ a v důsledku vztahů (7) a (4b) i operátoru H.

K tomu, aby výchozí operátor H na $L^2(\mathbb{R}^6)$ byl v podstatě samosdružený tedy stačí najít vhodný podprostor $D \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^3) \cap D_v$ takový, že operátor $H_{\mathrm{rel}} := (-(1/2\mu)\,\Delta + v) \upharpoonright D$ je v podstatě samosdružený. Potom ze vztahů (8) a cvičení 7.33 dostáváme následující vztahy mezi samosdruženými operátory $\bar{H}$, $\bar{T}_{\mathrm{cm}}$ a $\bar{H}_{\mathrm{rel}}$.

$$U^{-1}\bar{H}U = \overline{T_{\mathrm{cm}} \otimes I + I \otimes H_{\mathrm{rel}}} = \overline{\bar{T}_{\mathrm{cm}} \otimes I + I \otimes \bar{H}_{\mathrm{rel}}}\,. \tag{9}$$

Odpovídající unitární propagátor má podle tvrzení 18.3.1 pak tvar

$$\exp(\mathrm{i}U^{-1}\bar{H}Ut) = U^{-1}\exp \mathrm{i}\bar{H}tU = \exp(-\mathrm{i}\bar{T}_{\mathrm{cm}}t) \otimes \exp(-\mathrm{i}\bar{H}_{\mathrm{rel}}t)\,. \tag{10}$$

Část odpovídající těžišťovému pohybu je navíc známa, protože $\bar{T}_{\mathrm{cm}}$ je hamiltonián volné částice o hmotnosti M; operátory $\exp(-\mathrm{i}\bar{T}_{\mathrm{cm}}t)$ lze tedy vyjádřit pomocí formulí (17.3.2) pro $n = 3$, v nichž za m_j dosadíme celkovou hmotnost M obou částic. Řešení původní úlohy jsme tak převedli na vyšetřování vlastností hamiltoniánu $\bar{H}_{\mathrm{rel}}$ popisujícího relativní pohyb obou částic jako pohyb jedné částice s redukovanou hmotností, což je úloha podstatně jednodušší.

18.5.2 Poznámka: Obdobně lze separovat hamiltonián těžišťového pohybu v systémech N částic interagujících prostřednictvím potenciálů, jež jsou funkcemi rozdílů polohových vektorů částic (viz cvičení 13). Rozdíl spočívá pouze v tom, že zatímco v dvoučásticovém případě existuje jediný přirozený způsob volby příslušného unitárního operátoru pomocí vztahů (2), pro $N \geqq 2$ je takovýchto možností více; jako příklad možno uvést dosazovací operátor určený pomocí atomárních souřadnic

$$\boldsymbol{y}^{(j)} = \boldsymbol{x}^{(j)} - \boldsymbol{x}^{(N)}\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, N-1\,,$$

kde relativní polohu vztahujeme k jedné z částic, resp. Jacobiho souřadnic

$$\boldsymbol{z}^{(j)} = \boldsymbol{x}^{(j)} - \sum_{i=1}^{j} m_i \boldsymbol{x}^{(i)} \left(\sum_{i=1}^{j} m_i\right)^{-1}, \qquad j = 1, \ldots, N-1\,. \tag{11}$$

Druhý případ, jímž se budeme zabývat, se týká pohybu částice ve sféricky symetrickém potenciálu. Nazýváme tak každou funkci V na $\mathbb{R}^3$, kterou lze zapsat pomocí borelovské funkce $v\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ve tvaru

$$V(x_1, x_2, x_3) = v\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right). \tag{12a}$$

Na podprostoru $D \equiv \mathscr{S}(\mathbb{R}^3) \cap D_V$, kde $D_V := \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)\colon V\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$, definujeme operátor H vztahem

$$H\psi := -\frac{1}{2m}\Delta\psi + V\psi. \tag{12b}$$

Ukazuje se, že řadu základních vlastností tohoto operátoru lze získat studiem operátorů na $L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}r)$, které jsou určeny diferenciálními výrazy

$$h_l \equiv -\frac{1}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{2mr^2}\,l(l+1) + v(r) \quad \text{pro} \quad l = 0, 1, 2, \ldots .$$

Vybereme si jednu takovou vlastnost – podstatnou samosdruženost – a na ní budeme toto tvrzení ilustrovat.

Definujme zobrazení $U\colon L^2(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^+ \times J_S, \sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta)$, kde $J_S := (0, 2\pi) \times (0, \pi)$, předpisem

$$(U\psi)(r, \vartheta, \varphi) := r\psi(r\sin\vartheta\cos\varphi,\ r\sin\vartheta\sin\varphi,\ r\cos\vartheta). \tag{13}$$

Snadno ověříme, že U je izometrie prostorů $L^2(\mathbb{R}^3)$ a $L^2(\mathbb{R}^+ \times J_S, \sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta)$. Poslední prostor zapíšeme jako tenzorový součin $L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}r) \otimes L^2_S$ (viz příklad 4.6.6), kde jsme označili

$$L^2_S := L^2(J_S, \sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta).$$

Do tohoto prostoru patří kulové funkce Y_{lm} určené pro $l = 0, 1, \ldots$, $m = -l, \ldots, l$ předpisem

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \left[\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{1/2} P_l^{|m|}(\cos\vartheta)\,\mathrm{e}^{im\varphi}, \tag{14a}$$

kde P_l^n jsou tzv. přidružené Legendreovy funkce, které se pro $n = 0, 1, \ldots$ a $l = n, n+1, \ldots$ definují na intervalu $[-1, 1]$ takto:

$$P_l^n(z) := (1 - z^2)^{n/2}\,\frac{1}{2^l l!}\,\frac{\mathrm{d}^{l+n}}{\mathrm{d}z^{l+n}}\,(z^2 - 1)^l. \tag{14b}$$

Budeme potřebovat některé vlastnosti těchto funkcí.

18.5.3 Tvrzení: Kulové funkce jsou řešením diferenciální rovnice

$$(\Lambda_{\vartheta\varphi} Y_{lm})(\vartheta, \varphi) \equiv$$

$$\equiv \left(\frac{1}{\sin\vartheta}\partial_\vartheta(\sin\vartheta\partial_\vartheta) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\partial^2_{\varphi\varphi}\right) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = -l(l+1)\,Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (15)$$

a množina $\{Y_{lm}\colon l = 0, 1, \ldots, m = -l, \ldots, l\}$ je ortonormální báze v L^2_S.

Důkaz: Vztah (14b) je přímým důsledkem toho, že funkce P_l^n jsou řešením diferenciální rovnice $(1 - z^2) f'' - 2zf' + [l(l+1) - n^2/(1 - z^2)]\, f = 0$ ([[GR]], 8.700 a 8.810). Abychom ověřili, že kulové funkce tvoří ortonormální bázi v L^2_S, vyjádříme tento prostor ve tvaru tenzorového součinu $L^2(0, 2\pi) \otimes L^2((0, \pi), \sin\vartheta\, d\vartheta)$ a užijeme toho, že prostory $L^2((0, \pi), \sin\vartheta\, d\vartheta)$ a $L^2(-1, 1)$ jsou izomorfní. Vzhledem k tomu, že funkce $\varphi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$, $m = 0, \pm 1, \ldots$ tvoří ortonormální bázi v $L^2(0, 2\pi)$, stačí ukázat, že pro $n = 0, 1, \ldots$ je množina $\left\{\left(\frac{2l+1}{2}\frac{(l-n)!}{(l+n)!}\right)^{1/2} P_l^n\colon l = n, n+1, \ldots\right\}$ ortonormální báze v $L^2(-1, 1)$ (viz cvičení 4.28). To však vyplývá z toho, že funkce $\left(\frac{2l+1}{2}\frac{(l-n)!}{(l+n)!}\right)^{1/2} P_l^n$ dostaneme aplikací ortonormalizačního procesu na množinu funkcí $z \mapsto (1 - z^2)^{n/2} z^j$, $j = 0, 1, \ldots$ (viz [[GR]], 8.9362 a 8.904), která je podle příkladu 4.3.3 totální v $L^2(-1, 1)$. ■

Dále budeme potřebovat následující vlastnost zobrazení U.

18.5.4 Lemma: Ke každému $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})$ a každé funkci Y_{lm} existuje $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ tak, že

$$(U\psi)(r, \vartheta, \varphi) = f(r)\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi)\,.$$

Důkaz: Z formulí (14a,b) je vidět, že stačí při daných l a m najít pro každé $k = 0, 1, \ldots, l - |m|$ funkci $\psi_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ tak, aby

$$(U\psi_k)(r, \vartheta, \varphi) = f(r)\,(\sin\vartheta\, e^{\pm i\varphi})^{|m|} \cos^k \vartheta.$$

Zvolíme-li

$$\psi_k(x_1, x_2, x_3) := f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-(|m|+k+1)/2}\,(x_1 \pm ix_2)^{|m|}\, x_3^k\,,$$

pak díky tomu, že $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})$, má funkce ψ_k kompaktní nosič ležící uvnitř nějaké kulové vrstvy $K \subset \mathbb{R}^3$ s nenulovým vnitřním poloměrem; podmínka $\psi_k \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ je tudíž ekvivalentní požadavku $\psi_k \in C^\infty(K)$, který je zjevně splněn. ■

Přejdeme nyní k vyšetřování podstatné samosdruženosti operátoru H. Analogicky jako v předchozím příkladě odvodíme rovnosti

$$U\,\partial_{x_1}U^{-1} = \sin\vartheta\cos\varphi\,\partial_r + \frac{1}{r}\cos\vartheta\cos\varphi\,\partial_\vartheta - \frac{\sin\varphi}{r\sin\vartheta}\,\partial_\varphi - \frac{1}{r}\sin\vartheta\cos\varphi\,,$$

$$U\,\partial_{x_2}U^{-1} = \sin\vartheta\sin\varphi\,\partial_r + \frac{1}{r}\cos\vartheta\sin\varphi\,\partial_\vartheta + \frac{\cos\varphi}{r\sin\vartheta}\,\partial_\varphi - \frac{1}{r}\sin\vartheta\cos\varphi\,,$$

$$U\,\partial_{x_3}U^{-1} = \cos\vartheta\,\partial_r - \frac{1}{r}\sin\vartheta\,\partial_\vartheta - \frac{1}{r}\cos\vartheta\,, \tag{16}$$

které platí pro každou funkci patřící do $U\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$; odtud získáme pro všechna $\Phi \in UD$ vztah

$$UHU^{-1}\Phi = -\frac{1}{2m}\left[\partial_r^2 + \frac{1}{r^2}\Lambda_{\vartheta\varphi}\right]\Phi + v\Phi\,. \tag{17}$$

Z tvrzení 3 vyplývá rozklad

$$L_S^2 = \sum_{l=0}^{\infty}{}^{\oplus}\,\mathscr{G}_l\,,$$

kde $\mathscr{G}_l$: $\{Y_{lm}:\ m = -l, \ldots, l\}_{\text{lin}}$, a z něj dále rovnost

$$U\,L^2(\mathbb{R}^3) = L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}r) \otimes L_S^2 = \sum_{l=0}^{\infty}{}^{\oplus}\,L^2(\mathbb{R}^+) \otimes \mathscr{G}_l \tag{18}$$

(viz cvičení 4.25).

Označme $K_v := \{g \in L^2(\mathbb{R}^+):\ vg \in L^2(\mathbb{R}^+)\}$ a předpokládejme, že pro každé $l = 0, 1, \ldots$ existuje podprostor

$$C_l \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}) \cap K_v$$

takový, že operátor H_l určený na C_l diferenciálním výrazem

$$h_l := -\frac{1}{2m}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] + v(r) \tag{19a}$$

je v podstatě samosdružený. Označíme-li I_l jednotkový operátor na $\mathscr{G}_l$, vidíme, že operátor $H_l \otimes I_1$ na $L^2(\mathbb{R}^+) \otimes \mathscr{G}_l$ s definičním oborem $\mathscr{D}_l = \{fY_{lm}:\ f \in C_l,\ m = -l, \ldots, l\}_{\text{lin}}$ je rovněž v podstatě samosdružený (viz důsledek 10.8.3). Podle lemmatu 4 je $\mathscr{D}_l \subset U\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ a dále díky podmínce $C_l \subset K_v$ pro každé $f \in C_l$ pomocí věty o substituci dostáváme

$$\infty > \|vfY_{lm}\|^2 = \int_{\mathbb{R}^+ \times J_S} |UV\psi|^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = \int_{\mathbb{R}^3} |V\psi|^2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\,,$$

kde $\psi := U^{-1}(fY_{lm}) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$. Vidíme tedy, že pro všechna $l = 0, 1, \ldots$ platí

$$\mathscr{D}_l \subset U(\mathscr{S}(\mathbb{R}^3) \cap D_V) \equiv UD\,.$$

Ze vztahů (17) a (15) nyní plyne

$$UHU^{-1} \upharpoonright \mathscr{D}_l = H_l \otimes I_l\,. \tag{19b}$$

Pomocí operátorů $H_l \otimes I_l$ na prostorech $L^2(\mathbb{R}^+) \otimes \mathscr{G}_l$ nyní sestrojíme v podstatě samosdružený operátor $\tilde{H}$ na $U\,L^2(\mathbb{R}^3)$. Jeho definičním oborem bude algebraický součet podprostorů $\mathscr{D}_l$,

$$\mathscr{D} := \sum_l \mathscr{D}_l \subset UD\,, \tag{20a}$$

tj. každé $\Phi \in \mathscr{D}$ je *konečný* součet vektorů $\varphi_l \in \mathscr{D}_l$; pro $\Phi \in \mathscr{D}$, $\Phi = \sum_l \varphi_l$, definujeme

$$\tilde{H}\Phi := \sum_l (H_l \otimes I_l)\,\varphi_l\,. \tag{20b}$$

Ze symetričnosti operátorů $H_l \otimes I_l$ a vztahu (18) plyne, že $\tilde{H}$ je symetrický, a z definice direktního součtu operátorů (viz komentář k § 7.4) dále snadno ukážeme, že

$$\tilde{H} \subset \sum_l{}^{\oplus} H_l \otimes I_l \subset \overline{\tilde{H}}\,.$$

a odtud

$$\overline{\sum_l{}^{\oplus} H_l \otimes I_l} = \overline{\tilde{H}}\,.$$

Protože operátory $H_l \otimes I_l$ jsou v podstatě samosdružené, má tuto vlastnost i operátor $\sum_l{}^{\oplus} H_l \otimes I_l$, a z poslední rovnosti pak plyne podstatná samosdruženost operátoru $\tilde{H}$. Konečně ze vztahů (19b) a (20a,b) plyne

$$UHU^{-1} \upharpoonright \mathscr{D} = \tilde{H}\,,$$

takže též operátor $U^{-1}\tilde{H}U = H \upharpoonright U^{-1}\mathscr{D}$ je v podstatě samosdružený. Operátor H je proto hustě definovaný, a protože pro každé $\psi \in D$ vztah (12b) dává $(\psi, H\psi) \in \mathbb{R}$ je H, jakožto symetrické rozšíření operátoru $U^{-1}\tilde{H}U$, v podstatě samosdružený. Ověření podstatné samosdruženosti operátoru (12b) na $L^2(\mathbb{R}^3)$ je tak převedeno na vyšetření podstatné samosdruženosti operátorů H_l, $l = 0, 1, \ldots$ na $L^2(\mathbb{R}^+)$ určených diferenciálními výrazy (19a). Ke studiu těchto operátorů lze užít metod popsaných v §§ 8.5 a 8.6. Uvedený postup se ve fyzikální literatuře obvykle nazývá *rozkladem podle parciálních vln.*

18.5.5 Poznámka: Uvedený postup lze zobecnit pro hamiltoniány na $L^2(\mathbb{R}^n)$ typu $-(1/2m)\,\Delta_n + V$ s potenciálem závislým pouze na $r = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}$ pro libovolné $n \geqq 2$. Označme $J_S^n := (0, 2\pi) \times \left[\bigtimes_{j=1}^{n-2} (0, 2\pi)\right]$ a uvažujme zobrazení $w^n \colon \mathbb{R}^+ \times J_S^n \to \mathbb{R}^n$ definované rekurentními vztahy

$$w_k^n := w_k^{n-1} \sin \vartheta_{n-2}\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1\,,$$

$$w_n^n := r \cos \vartheta_{n-2}\,,$$

přičemž $w_1^2 := r \cos \varphi$ a $w_2^2 := r \sin \varphi$. Potom předpis

$$(U_n \psi)\,(r, \varphi, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-2}) := r^{(n-1)/2} (\psi \circ w^n)\,(r, \varphi, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-2})$$

určuje izometrii prostorů $L^2(\mathbb{R}^n)$ a $L^2(\mathbb{R}^+ \times J_S^n, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\Omega_n)$, kde

$$\mathrm{d}\Omega_n := \prod_{j=1}^{n-2} \sin^j \vartheta_j \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\vartheta_1 \ldots d\vartheta_{n-2}\,.$$

Místo vztahu (17) pak pro každé $\Phi \in U_n(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \cap D_V)$ dostaneme

$$U_n \left(-\frac{1}{2m} \Delta_n + V \right) U_n^{-1} \Phi =$$

$$= -\frac{1}{2m} \left[\partial_r^2 - \frac{(n-1)\,(n-3)}{4r^2} + \frac{1}{r^2} \Lambda_n \right] \Phi + v\Phi\,. \tag{21}$$

Zde Λ_n je tzv. Laplaceův-Beltramiho operátor na jednotkové kulové ploše $S^{(n-1)} \subset \mathbb{R}^n$ (viz komentář). Dá se opět ukázat, že existují konečnědimenzionální podprostory $\mathscr{G}_l^n \subset L^2(J_S^n, \mathrm{d}\Omega_n) \cap C^\infty(J_S^n)$ takové, že $L^2(J_S^n, \mathrm{d}\Omega_n) = \sum_{l=0}^{\infty}{}^{\oplus}\, \mathscr{G}_l^n$ a $\Lambda_n Y = -l(l + n - 2)\, Y$ pro všechna $Y \in \mathscr{G}_l^n$.

Studium operátoru $-(1/2m)\,\Delta_n + V$ na $L^2(\mathbb{R}^n)$, kde $V(x_1, \ldots, x_n) = v\left[\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}\right]$ s definičním oborem $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \cap D_V$ se pak dá opět převést na vyšetřování posloupnosti operátorů na $L^2(\mathbb{R}^+)$ určených diferenciálními výrazy $-\frac{1}{2m}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{(n-1)\,(n-3)}{4} + l(l + n - 2)\right)\right] + v(r)$; podrobné výpočty přenecháváme čtenáři (viz též [[RS 2]], dodatek k § X.1).

Komentář

§ **18.1:** Podrobnější zdůvodnění postulátu (q5-a) v rámci axiomatického přístupu lze najít v pracích [AD 1-3]. Počtem stupňů volnosti se v klasické mechanice rozumí počet nezávislých kanonických párů, nebo ekvivalentně poloviční dimenze fázového prostoru. V kvantové mechanice se toto číslo zvětšuje o počet nezávislých kompatibilních pozorovatelných charakterizujících vnitřní stavy částic; žádná obecná definice počtu stupňů volnosti však neexistuje.

• Čtenář se může pozastavit nad tím, že v příkladu 2 mluvíme o dvou elektronech, když jsme v úvodu řekli, že postulát (q5-a) se nevztahuje na systémy identických částic. Výběr antisymetrického podprostoru, o němž budeme mluvit v § 18.4, se však týká celého stavového prostoru. Konkrétně to znamená, že dva elektrony se mohou nacházet jak v singletním, tak i v tripletním spinovém stavu; každému z těchto případů však odpovídá jiná symetrie „konfigurační části" vlnové funkce.

• Formule (9) ukazují, že redukcí čistého stavu dostáváme obecně stavy smíšené; v učebnicích kvantové mechaniky se o nich často mluví jako o *smíšených stavech druhého druhu*. Je ovšem nutné zdůraznit, že pro teorii je lhostejné, zda smíšený stav dostaneme tímto způsobem, nebo zda je výrazem naší neúplné znalosti stavu, v němž se nachází konkrétní systém z nějakého souboru. Redukční formule (9) je možno zapsat v elegantním stavu, užijeme-li speciální realizace tenzorového součinu $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ zmíněné v příkladu 6.3.5 – viz např. ⟦Ja⟧, odst. 11-8. Toto vyjádření, podobně jako normální tvar redukce, se však hodí jen pro případ systému složeného ze dvou podsystémů, zatímco formule (9) lze zobecnit pro případ libovolného konečného počtu podsystémů (cvičení 7).

§ **18.3:** Často se setkáváme s tím, že na pravé straně vztahu (1) se vynechává uzávěr; takováto volnost ve vyjadřování nevadí, pokud jsme schopni ověřit, že příslušný operátor je v podstatě samosdružený.

§ **18.4:** Podrobnější rozbor pojmu totožnosti lze najít v ⟦Ja⟧, § 15.3.

O transformačních vlastnostech stavových vektorů při záměnách částic vyjadřovaných vztahy typu (5), resp. jejich přiřazení jednotlivým druhům částic se mluví stručně jako o *souvislosti spinu se statistikou.* V kvantové mechanice je nutno tuto souvislost považovat za empirický fakt, jehož nejnápadnějším projevem je Pauliho princip zmíněný v příkladu 1. V kvantové teorii polí se souvislostí spinu se statistikou rozumí tvrzení, které s uvedenou transformační vlastností úzce souvisí, totiž že polní operátory v bodech kauzálně nedosažitelných, tj. oddělených intervalem prostorového charakteru, spolu komutují (antikomutují), pokud částice, které dané pole popisuje, mají celočíselný (poločíselný) spin. V rámci axiomatické teorie polí lze toto tvrzení dokázat – viz ⟦SW⟧, § 4.4.

• Kromě Boseovy-Einsteinovy a Fermiho-Diracovy statistiky byly zavedeny další typy statistik tzv. paraboseovské, resp. parafermiovské (viz ⟦OK⟧), není však jasné, zda se jimi řídí nějaké reálné systémy.

§ **18.5** • Složkám *impulsmomentu* se v kvantové mechanice přiřazují operátory

$$L_j := \sum_{k,l} \varepsilon_{jkl} Q_k P_l\,, \qquad j = 1, 2, 3\,, \tag{18a}$$

kde ε_{jkl} je Leviho-Civitův symbol, jejichž explicitní působení lze snadno určit např. pro vektory $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, pro něž podle příkladu 15.2.3 platí

$$(L_j\psi)(x) = -\mathrm{i} \sum_{k,l} \varepsilon_{jkl} x_k \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_l}\,. \tag{18b}$$

Jednoduše můžeme také ověřit, že operátory $L_j \upharpoonright \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ jsou symetrické a $L_j\, \mathscr{S}(\mathbb{R}^3) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$. Z posledně uvedené inkluze plyne, že $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ patří do definičního oboru operátoru $\boldsymbol{L}^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$. Označme

$$\mathscr{E}_Y := \{Y_{lm}\colon\, l = 0, 1, \dots,\ m = -l, \dots, l\}_{\mathrm{lin}}\,;$$

pomocí formulí (16) snadno zjistíme, že pro všechna $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ taková, že $U\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}) \otimes \mathscr{E}_Y$ (každé takové ψ patří podle lemmatu 4 do $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$) platí rovnost

$$U\boldsymbol{L}^2\psi = -(I_r \otimes \hat{\Lambda})\, U\psi\,,$$

kde I_r je jednotkový operátor na $L^2(\mathbb{R}^+)$ a $\hat{\Lambda}$ je operátor definovaný na $C_0^\infty((0, 2\pi) \times (0, \pi))$ pomocí diferenciálního výrazu $\Lambda_{\vartheta\varphi}$ – viz vztah (15). Nyní na základě tvrzení 3 a příkladu 7.2.2 vidíme, že $\hat{\Lambda} \upharpoonright \mathscr{E}_Y$ je v podstatě samosdružený operátor na L_S^2; tutéž vlastnost má pak i operátor $(I_r \otimes \hat{\Lambda}) \upharpoonright C_0^\infty(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}) \otimes \mathscr{E}_Y$ na $L^2(\mathbb{R}^+) \otimes L_S^2 = U\,L^2(\mathbb{R}^3)$ (viz cvičení 15 a důsledek 10.8.3). Konečně z lemmatu 4 a poslední rovnosti plyne podstatná samosdruženost operátoru $\boldsymbol{L}^2 \upharpoonright \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$.

Impulsmoment patří mezi fundamentální kvantověmechanické pozorovatelné. Snadno se lze přesvědčit, že operátory $L_j^{\mathscr{S}} \equiv L_j \upharpoonright \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ splňují komutační relace $[L_j^{\mathscr{S}}, L_k^{\mathscr{S}}] = \mathrm{i}\varepsilon_{jkl} L_l^{\mathscr{S}}$ (sčítání přes l), jež charakterizují Lieovu algebru odpovídající grupě rotací prostoru $\mathbb{R}^3$, tj. grupě SO(3) ⟦BaR⟧. Operátory L_j tedy generují reprezentaci grupy SO(3), jež je redukována vlastními podprostory operátoru $\boldsymbol{L}^2$. Podrobněji se lze o problémech spojených s impulsmomentem poučit např. v ⟦Ja⟧, § 13.3; ⟦Thi⟧, § 3.2 nebo ve speciálních monografiích jako je ⟦BL⟧.

• Laplaceův-Beltramiho operátor Δ_M se v diferenciální geometrii zavádí na libovolné Riemannově varietě M charakterizované metrickým tenzorem g vztahem $(\Delta_M\psi)(x) = -(\det g)^{-1/2}\, (\partial/\partial x^i)\, ((\det g)^{1/2}\, g^{ij}\, \partial\psi/\partial x^j)$. Za zmínku stojí znaménková konvence: v případě $M = \mathbb{R}^n$, kdy $g_{ij} = \delta_{ij}$, platí $\Delta_M = -\Delta$. V našem případě se za M bere kulová plocha $S^{(n-1)}$. Odvození vlastností operátorů $\hat{\Lambda}_n \equiv \Delta_{S^{(n-1)}}$ zmíněných v poznámce 5 a formulí (21) lze najít např. v monografii ⟦Mül⟧. Příklady použití „rozvoje podle parciálních vln“ pro $n > 3$ lze najít v pracích [Ba 4], [Ex 2]. Obecný případ Laplaceova-Beltramiho operátoru byl studován v pracích [LNR] a [LN].

Cvičení

1. Jestliže algebra $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathbb{C}^2)$ obsahuje dva nekomutující hermitovské operátory, platí $\mathscr{A} = \mathscr{B}(\mathbb{C}^2)$.

2. Závěry příkladu 18.1.8 zůstávají v platnosti i tehdy, vezmeme-li v úvahu další stupně volnosti systému $N\pi$.
Návod: Obecně platí $\mathscr{H}_N = \mathscr{G}_N \otimes \mathbb{C}^2$, kde $\mathscr{G}_N$ odpovídá ostatním stupňům volnosti. Ze vztahu (15.4.3) pak plyne $\mathscr{A}_N \subset \left\{ \sum_{j=0}^{1} B_j \otimes E_j^{(N)} : B_j \in \mathscr{B}(\mathscr{G}_N) \right\}$; podobné vztahy platí pro pion. Na druhé straně algebra $\mathscr{A}_{N\pi}$ musí obsahovat operátory, jež nejsou redukovány projektory $\tilde{E}_{jk} \equiv I_{\mathscr{G}_N} \otimes E_j^{(N)} \otimes I_{\mathscr{G}_\pi} \otimes E_k^{(\pi)}$.

3. Nechť $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$. Jestliže posloupnost $\{B_1^{(k)}\} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H}_1)$ konverguje slabě k operátoru B_1, potom pro operátory $\tilde{B}_1^{(k)} \equiv B_1^{(k)} \otimes I_2$ platí $\operatorname*{w-lim}_{k\to\infty} \tilde{B}_1^{(k)} = \tilde{B}_1$.
Návod: Ověřte nejprve, že $(\varphi, \tilde{B}_1^{(k)}\psi) \to (\varphi, \tilde{B}_1\psi)$ pro $\varphi, \psi \in \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$; dále užijte toho, že $\|\tilde{B}_1^{(k)} - \tilde{B}_1\| = \|B_1^{(k)} - B_1\|$ a posloupnost $\{\|B_1^{(k)} - B_1\|\}$ je podobně jako v důkazu tvrzení 5.2.6 omezená.

4. Nechť stav W složeného systému je čistý a platí $W = W_1 \otimes W_2$, kde W_j jsou realizovatelné stavy podsystémů. Potom redukované stavy jsou rovněž čisté a platí $W_j(W) = W_j$, $j = 1, 2,$.
Návod: Z podmínky $W^2 = W$ plyne $W_j^2 = \alpha_j W_j$, kde $\alpha_1\alpha_2 = 1$; dále užijte pozitivity operátorů W_j a nerovností $W_j^2 \leqq W_j$.

5. Je-li stav složeného systému popsán statistickým operátorem $W = \sum_j w_j E^{(j)}$, kde $\{E^{(j)}\}$ je posloupnost jednorozměrných projektorů, pak pro redukované stavy platí $W_j(W) = \sum_j w_j\, W_j(E^{(j)})$ (silná konvergence).

6. Nechť $\{E_\alpha : \alpha \in J\}$ je systém projektorů odpovídajících koherentním podprostorům v $\mathscr{H}$ a $\tilde{W} \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$ je statistický operátor. Potom operátor $W := \sum_{\alpha\in J} E_\alpha \tilde{W} E_\alpha$ (silná konvergence) je rovněž statistický, je redukován všemi E_α a pro libovolné $A \in \sum_{\alpha\in J}^{\oplus} \mathscr{B}(\mathscr{H}_\alpha)$ platí $\operatorname{Tr}(A\tilde{W}) = \operatorname{Tr}(AW)$. Je-li W projektor, je také $\tilde{W}$ projektor, zatímco opačná implikace neplatí.

7. Odvoďte redukční formule pro případ systému složeného z n koherentních podsystémů.

8. Nechť H_j jsou samosdružené operátory na Hilbertových prostorech $\mathscr{H}_j$ a H_{int} je hermitovský operátor na $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$; potom operátor $H = \tilde{H}_1 + \tilde{H}_2 +$

$+ H_{\rm int}$ je v podstatě samosdružený.
Návod: Dokažte, že $H^* = \overline{\tilde{H}_1 + \tilde{H}_2} + H_{\rm int}$ a užijte cvičení 9.12.

9. Nechť $H_j\colon \mathbb{R} \to \mathscr{B}(\mathscr{H}_j)$ jsou silně spojité funkce, jejichž hodnoty jsou hermitovské operátory. Potom unitární propagátor odpovídající hamiltoniánu $H(t) = (H_1(t))^{\sim} + (H_2(t))^{\sim}$ splňuje pro všechna $s, t \in \mathbb{R}$ vztah $U(t,s) = U^{(1)}(t,s) \otimes U^{(2)}(t,s)$, kde $U^{(j)}$ jsou unitární propagátory odpovídající hamiltoniánům $H_j(t)$.

Návod: Stačí dokázat, že $U_n(t,s)(\varphi_1 \otimes \varphi_2) = \sum_{k=0}^{n} U_k^{(1)}(t,s)\,\varphi_1 \otimes U_{n-k}^{(2)}(t,s)\,\varphi_2$ a pomocí odhadu (17.5.4b) ověřte, že $\sum_{n=0}^{N} U_n(t,s)(\varphi_1 \otimes \varphi_2)$ konverguje pro $N \to \infty$ k výrazu na pravé straně hledané rovnosti.

10. Dokažte přímým výpočtem, že množina $\{U(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$ definovaná vztahem (18.3.3) tvoří jednoparametrickou grupu.

11. Operátor $U_{\rm P}$ je předpisem (18.4.1) korektně definován, tj. z $\psi = 0$ plyne $U_{\rm P}\psi = 0$, jeho spojité rozšíření je unitární a $U_{\rm P}^2 = I$. Zobecněte tyto závěry na operátory $U(p)$ definované vztahem (18.4.6).
Návod: K důkazu korektnosti definice užijte důsledku 5.5.5 pro vhodnou ortonormální bázi v $\mathscr{H}^{(n)}$.

12. Dokažte rovnost (18.4.9).
Návod: Viz cvičení 7.

13. Nechť $H_0 = \sum_{j=1}^{N} (2m_j)^{-1} \boldsymbol{P}_j^2$ je hamiltonián soustavy N neinteragujících částic.
(a) Definujme $U\colon (U\psi)(x^{(1)}, \dots, x^{(N)}) = \psi(X, y^{(1)}, \dots, y^{(N-1)})$, kde $\boldsymbol{X} = (1/M) \sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{x}^{(j)}$, $M = \sum_{j=1}^{N} m_j$, a $y^{(j)}$ jsou atomární souřadnice; potom platí

$$U^{-1} H_0 U = \frac{1}{2M} (\tilde{\boldsymbol{P}}^{\rm cm})^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{2\mu_j} (\tilde{\boldsymbol{P}}_j^{\rm at})^2 - \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{m_N} \tilde{\boldsymbol{P}}_j^{\rm at} \tilde{\boldsymbol{P}}_k^{\rm at},$$

kde $\tilde{P}_{ji}^{\rm at}$, $i = 1, 2, 3$, jsou složky operátoru impulsu odpovídajícího atomárním souřadnicím j-té částice a $\mu_j^{-1} := m_j^{-1} + m_N^{-1}$.

(b) Pro Jacobiho souřadnice obdobně platí

$$U^{-1} H_0 U = \frac{1}{2M} (\tilde{\boldsymbol{P}}^{\rm cm})^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{2\mu_j} (\boldsymbol{P}_j^{\rm J})^2,$$

kde $\tilde{P}^{J}_{ji}$ odpovídají Jacobiho souřadicím j-té částice a $\mu_j := m_{j+1}^{-1} + \left(\sum_{k=1}^{j} m_j\right)^{-1}$.

14. Ověřte, že pro operátory složek impulsmomentu platí $L_j\, \mathscr{S}(\mathbb{R}^3) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ a operátory $L_j \upharpoonright \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ jsou symetrické.

15. Ověřte, že podprostor $C_0^\infty(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})$ je hustý v $L^2(\mathbb{R}^+, r^\alpha\, \mathrm{d}r)$ pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$, a podobně, že $C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus M)$ je hustý v $L^2(\mathbb{R}^d)$, je-li M nejvýše spočetná množina bez hromadných bodů.
Návod: Viz příklad 3.1.7 a cvičení 3.7.

19.1 DRUHÉ KVANTOVÁNÍ JEDNOČÁSTICOVÉHO OPERÁTORU

Nejprve se musíme zeptat, jak může vypadat stavový prostor systému s libovolným počtem částic. Nechť $\mathscr{H}$ je nějaký Hilbertův prostor. Stejně jako v § 18.4 označíme $\mathscr{H}^{(n)} = \mathscr{H} \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}$ a navíc položíme $\mathscr{H}^{(0)} = \mathbb{C}$. Nyní můžeme definovat Hilbertův prostor $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ jako direktní součet

$$\mathscr{F}(\mathscr{H}) := \sum_{n=0}^{\infty}{}^{\oplus}\, \mathscr{H}^{(n)}\,; \tag{1a}$$

nazveme jej **Fockovým prostorem** nad prostorem $\mathscr{H}$. Označíme-li tedy normu, resp. skalární součin v $\mathscr{H}^{(n)}$ indexem n, pak prvky $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ jsou posloupnosti $\Psi = \{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $\psi_n \in \mathscr{H}^{(n)}$, takové, že $\sum_{n=0}^{\infty} \|\psi_n\|_n^2 < \infty$; pro skalární součin $(.\,,.)_{\mathrm{F}}$ v $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ platí

$$(\Phi, \Psi)_{\mathrm{F}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_n, \psi_n)_n\,. \tag{1b}$$

Předpokládejme, že $\mathscr{H}$ je stavovým prostorem nějaké částice. Z postulátu (q5-a) je zřejmé, že (čisté) stavy systému těchto částic lze popisovat vektory z $\mathscr{F}(\mathscr{H})$. Je-li počet částic roven n, patří tyto vektory do podprostoru $\{\Psi = \{\psi_k\}: \psi_k = 0$ pro $k \neq n\}$, který budeme pro jednoduchost značit rovněž symbolem $\mathscr{H}^{(n)}$. Jednorozměrnému podprostoru $\mathscr{H}^{(0)}$ potom odpovídá stav s nulovým počtem částic, jemuž říkáme **vakuum**; pro vektor $\{1, 0, 0, \ldots\}$, který určuje tento stav, se často užívá symbolu Ω_0.

Jelikož vyšetřujeme systémy identických částic, ne každému vektoru z $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ odpovídá realizovatelný stav. Z § 18.4 víme, že systému n identických bosonů (fermionů) odpovídá podprostor $S_n\mathscr{H}^{(n)}$, resp. $A_n\mathscr{H}^{(n)}$ v $\mathscr{H}^{(n)}$; přitom jsme předpokládali $n \geqq 2$. Pro $n = 0, 1$ nemá smysl o záměnách částic mluvit; v těchto případech položíme $S_n = A_n = I$. Nyní můžeme definovat **symetrický Fockův prostor** jako

$$\mathscr{F}_S(\mathscr{H}) := \sum_{n=0}^{\infty}{}^{\oplus}\, S_n\mathscr{H}^{(n)} \tag{2a}$$

a **antisymetrický Fockův prostor** jako

$$\mathscr{F}_A(\mathscr{H}) := \sum_{n=0}^{\infty}{}^{\oplus} A_n \mathscr{H}^{(n)} ; \qquad (2b)$$

tyto prostory hrají roli stavového prostoru, a to $\mathscr{F}_S(\mathscr{H})$ v případě, že uvažované částice jsou bosony, a $\mathscr{F}_A(\mathscr{H})$ v případě fermionů.

19.1.1 Poznámka (*několik slov o značení*): Symboly $(.,..)$ a $\|.\|$ vyhradíme pro skalární součin, resp. normu v prostoru $\mathscr{H}$. Pro tento prostor a veličiny k němu se vztahující bude užívat přívlastku *jednočásticový*; podobně budeme prostor $\mathscr{H}^{(n)}$, jeho prvky, operátory na něm apod. označovat *n-částicové*. Skalární součin a normu v $\mathscr{H}^{(n)}$, resp. $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ budeme značit indexem n, resp. F. Je rovněž užitečné zavést symbol P_n jako společné označení pro oba zmíněné projektory, symetrizátor S_n a antisymetrizátor A_n; všechny formule, v nichž se tento symbol vyskytuje, platí jak v symetrickém, tak i v antisymetrickém případě. Podobně budeme psát $\mathscr{F}_P(\mathscr{H})$ místo $\mathscr{F}_S(\mathscr{H})$ a $\mathscr{F}_A(\mathscr{H})$, symbolem $\mathscr{H}_P^{(n)}$ označovat n-částicový podprostor v $\mathscr{F}_P(\mathscr{H})$ apod.

19.1.2 Příklad: Je-li jednočásticový prostor $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$, potom podle příkladu 4.6.6 je $\mathscr{H}^{(n)} = L^2(\mathbb{R}^{3n})$. Fockův prostor $\mathscr{F}(L^2(\mathbb{R}^3))$ je tvořen posloupnostmi $\Psi = \{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ (tříd ekvivalence) funkcí $\psi_n \colon \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{C}$ takovými, že

$$\|\Psi\|_F^2 = \|\psi_0\|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{3n}} |\psi_n(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)|^2 \, d\boldsymbol{x}_1 \dots d\boldsymbol{x}_n < \infty . \qquad (3)$$

Podívejme se, jak vypadá podprostor $\mathscr{F}_s(L^2(\mathbb{R}^{3n}))$. Vezmeme libovolnou ortonormální bázi v $L^2(\mathbb{R}^3)$ a sestrojíme podle tvrzení 4.6.4 ortonormální bázi v $L^2(\mathbb{R}^{3n})$; pomocí ní a definičního vztahu (18.4.6) lze snadno ověřit, že pro každou permutaci $p \in \mathscr{S}_n$ platí

$$(U(p^{-1})\psi_n)(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) = \psi_n(\boldsymbol{x}_{p1}, \dots, \boldsymbol{x}_{pn}) \qquad (4a)$$

s.v. v $\mathbb{R}^{3n}$. Je-li $\psi_n \in S_n L^2(\mathbb{R}^{3n})$, platí $U(p^{-1})\,\psi_n = U(p^{-1})\, S_n\psi_n = S_n\psi_n = \psi_n$; jinými slovy,

$$\psi_n(\boldsymbol{x}_{p1}, \dots, \boldsymbol{x}_{pn}) = \psi_n(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) \qquad (4b)$$

s.v. v $\mathbb{R}^{3n}$. Podprostor $S_n L^2(\mathbb{R}^{3n})$ je tedy tvořen funkcemi, jež jsou (s případnou výjimkou množiny míry nula) symetrické vůči libovolné permutaci polohových vektorů částic, a prostor $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$ je tvořen posloupnostmi takovýchto funkcí. Podobně $\mathscr{F}_a(\mathscr{H})$ je tvořen posloupnostmi funkcí, jež jsou antisymetrické vůči permutacím polohových vektorů,

$$\psi_n(\boldsymbol{x}_{p1}, \dots, \boldsymbol{x}_{pn}) = \varepsilon_p \, \psi_n(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) . \qquad (4c)$$

Povšimněme si, že pouze prvý z obou výsledků má bezprostřední význam, protože $L^2(\mathbb{R}^3)$ není stavovým prostorem žádného reálného fermionu. Poznamenejme rovněž, že stejné výsledky dostaneme i pro jiné dimenze konfiguračního prostoru, tj. vezmeme-li za výchozí prostor $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$ pro nějaké přirozené d.

Popíšeme nyní standardní postup, jímž lze k danému operátoru T na prostoru $\mathscr{H}$ sestrojit operátor na $\mathscr{F}_P(\mathscr{H})$. Nechť T je hustě definovaný lineární operátor na $\mathscr{H}$. Stejně jako dříve bude symbol $\tilde{T}_j$ značit tenzorový součin $I \otimes \ldots \otimes I \otimes T \otimes I \otimes \ldots \otimes I$, v němž operátor T stojí na j-tém místě. Pro libovolné $n \geqq 1$ zavedeme operátory

$$T_n^{\Sigma} := \sum_{j=1}^{n} \tilde{T}_j\,, \qquad T_n^{\Pi} := T \otimes \ldots \otimes T\,,$$

jejichž definiční obor $D_n(T) = \mathscr{H}^{(n)}$, je-li T omezený operátor a $D_n(T) = D(T) \otimes \ldots \otimes D(T)$, pokud je T neomezený; je zřejmé, že $D_n(T)$ je hustý v $\mathscr{H}^{(n)}$. Speciálně pro $n = 1$ máme $T_1^{\Sigma} = T_1^{\Pi} = T$, dále položíme $T_0^{\Sigma} = 0$ a $T_0^{\Pi} = I$. Potom můžeme zavést následující operátory na $\mathscr{F}(\mathscr{H})$:

$$\mathscr{T}^{\Sigma}(T)\colon\ \mathscr{T}^{\Sigma}(T)\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty} = \{T_n^{\Sigma}\psi_n\}_{n=0}^{\infty}\,, \tag{5a}$$

$$\mathscr{T}^{\Pi}(T)\colon\ \mathscr{T}^{\Pi}(T)\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty} = \{T_n^{\Pi}\psi_n\}_{n=0}^{\infty}\,, \tag{5b}$$

jejichž společným definičním oborem je podprostor

$$\mathscr{D}(T) \equiv$$

$$\equiv \{\Psi_N = \{\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_N, 0, \ldots\}\colon\ \psi_n \in D_n(T),\ N = 0, 1, 2, \ldots\} \subset \mathscr{F}(\mathscr{H})\,. \tag{5c}$$

19.1.3 Tvrzení: Operátory $\mathscr{T}^{\Sigma}(T)$ a $\mathscr{T}^{\Pi}(T)$ jsou hustě definovány. Každý z nich je redukován podprostory $\mathscr{F}_P(\mathscr{H})$ a jeho části v těchto podprostorech, jež označíme $\mathscr{T}_P^{\Sigma}(T)$, resp. $\mathscr{T}_P^{\Pi}(T)$ jsou rovněž hustě definovány.

Důkaz: Z definice normy $\|\,.\,\|_F$ vyplývá, že k libovolným $\Psi = \{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\varepsilon > 0$ existuje N takové, že pro $\Psi_N \equiv \{\psi_0, \ldots, \psi_N, 0, \ldots\}$ platí $\|\Psi - \Psi_N\|_F < \frac{1}{2}\varepsilon$. Užijeme-li ještě toho, že $\overline{D_n(T)} = \mathscr{H}^{(n)}$, snadno zjistíme, že podprostor $\mathscr{D}(T)$ je hustý v $\mathscr{F}(\mathscr{H})$.

Dokážeme dále tvrzení o redukci. Projektor P na podprostor $\mathscr{F}_P(\mathscr{H})$ je dán vztahy (2): pro libovolné $\Psi = \{\psi_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathscr{F}(\mathscr{H})$ platí $P\Psi = \{P_n\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$. Uvažujme libovolnou n-tici vektorů $f_j \in D(T)$. Pro jakoukoli permutaci $p \in \mathscr{S}_n$ platí $f_{p_1} \otimes \ldots \otimes f_{p_n} \in D_n(T)$; s ohledem na cvičení 18.11 to znamená, že $U(p)\,D_n(T) \subset D_n(T)$, a tedy též $P_n\,D_n(T) \subset D_n(T)$. Z definičního vztahu (5c) potom plyne $P\Psi \in \mathscr{D}(T)$ pro libovolné $\Psi \in \mathscr{D}(T)$, tj.

$$P\,\mathscr{D}(T) \subset \mathscr{D}(T)\,. \tag{6}$$

568 Nechť $\{f_j\}$, $\{g_j\}$ jsou n-tice vektorů v $D(T)$ a $p \in \mathscr{S}_n$. Označíme-li $r = p^{-1}$, můžeme psát

$$(g_1 \otimes \ldots \otimes g_n, U(p)\, T_n^{\Sigma}(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n))_n =$$

$$\sum_{j=1}^{n} (g_{r_1} \otimes \ldots \otimes g_{r_n}, f_1 \otimes \ldots \otimes Tf_j \otimes \ldots \otimes f_n)_n =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (g_{r_j}, Tf_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (g_{r_k}, f_k) = \sum_{l=1}^{n} (g_l, Tf_{p_l}) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^{n} (g_m, f_{p_m}) =$$

$$= (g_1 \otimes \ldots \otimes g_n, T_n\, U(p)\, (f_1 \otimes \ldots \otimes f_n))_n \,.$$

Z podmínky $\overline{D(T)} = \mathscr{H}$ a tvrzení 4.6.4 potom plyne $U(p)\, T_n(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) = T_n\, U(p)\,(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)$ pro libovolná $f_j \in D(T)$. Tuto rovnost můžeme lineárně rozšířit na $D_n(T)$, a jelikož platí pro všechna $p \in \mathscr{S}_n$, dostáváme odtud dále $P_n T_n^{\Sigma} \psi_n = T_n^{\Sigma} P_n \psi_n$ pro libovolné $\psi_n \in D_n(T)$. Vezměme vektor $\Psi_N = \{\psi_0, \ldots, \psi_N, 0, \ldots,\} \in \mathscr{D}(T)$. Podle inkluze (6) patří $P\Psi_N = \{P_0\psi_0, \ldots, P_N\psi, 0, \ldots\}$ do $\mathscr{D}(T)$ a platí

$$P\, \mathscr{T}^{\Sigma}(T)\, \psi_N = \{P_n T_n^{\Sigma} \psi_n\}_{n=0}^{\infty} = \{T_n^{\Sigma} P_n \psi_n\}_{n=0} = \mathscr{T}^{\Sigma}(T)\, P\, \psi_N \,,$$

tj. operátor $\mathscr{T}^{\Sigma}(T)$ je redukován podprostory $\mathscr{F}_{\mathrm{P}}(\mathscr{H})$. Z podmínky $\overline{\mathscr{D}(T)} = \mathscr{F}(\mathscr{H})$ plyne, že podprostor $P\,\mathscr{D}(T)$ je hustý v $\mathscr{F}_{\mathrm{P}}(\mathscr{H})$, neboli že operátor $\mathscr{T}_{\mathrm{P}}^{\Sigma}(T)$ je hustě definován. Důkaz tvrzení pro operátor $\mathscr{T}_{\mathrm{P}}^{\Pi}(T)$ je obdobný; přenecháváme jej čtenáři. ■

Operátor $\mathscr{T}^{\Sigma}(T)$ se nazývá *druhým kvantováním* (*jednočásticového*) *operátoru T.* Takového operátory slouží k popisu některých pozorovatelných uvažovaného systému identických částic. Z toho, co jsme řekli úvodem o stavech systému, je vidět, že nás nebude zajímat celý operátor $\mathscr{T}^{\Sigma}(T)$, ale pouze jedna z jeho částí $\mathscr{T}_{\mathrm{P}}^{\Sigma}(T)$ v závislosti na tom, zda je systém tvořen bozony nebo fermiony. Také tomuto operátoru se říká *druhé kvantování operátoru T.* Abychom se přesvědčili, že operátory $\mathscr{T}_{\mathrm{P}}^{\Sigma}(T)$ mohou popisovat pozorovatelné, musíme podrobněji vyšetřit jejich vlastnosti v případě, že T je samosdružený.

19.1.4 Věta: Je-li A samosdružený operátor na $\mathscr{H}$, pak operátory $\mathscr{T}^{\Sigma}(A)$ a $\mathscr{T}_{\mathrm{P}}^{\Sigma}(A)$ jsou v podstatě samosdružené.

Důkaz: Direktní součet $\mathscr{T}^{\oplus}(A) := \sum_{n=0}^{\infty}{}^{\oplus} A_n$ operátorů A_n je definován vztahem (5a) na definičním oboru

$$D[\mathscr{T}^{\oplus}(A)] = \left\{ \Phi = \{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathscr{F}(\mathscr{H}),\ \varphi_n \in D_n,\ \sum_{n=0}^{\infty} \|A_n \varphi_n\|_n^2 < \infty \right\},$$

(viz komentář k § 7.4). Je vidět, že $\mathscr{T}^{\Sigma}(A) \subset \mathscr{T}^{\oplus}(A)$, přičemž oba operátory jsou zjevně symetrické; ukážeme, že

$$\mathscr{T}^{\oplus}(A) \subset \overline{\mathscr{T}^{\Sigma}(A)}\,. \tag{7}$$

Pro libovolné $\Phi \in D(\mathscr{T}^{\oplus}(A))$ je $\Phi_N := \{\varphi_0, \dots, \varphi_N, 0, \dots\} \in D(\mathscr{T}^{\Sigma}(A))$ taková posloupnost, že $\mathscr{T}^{\Sigma}(A)\,\Phi_N$ konverguje; to vyplývá z toho, že $\sum_{n=0}^{\infty} \|A_n\varphi_n\|_n^2$ je konečný a platí

$$\sum_{n=N+1}^{M} \|A_n\varphi_n\|_n^2 = \|\mathscr{T}^{\Sigma}(A)\,(\Phi_M - \Phi_N)\|^2\,,$$

odkud plyne Cauchyova podmínka. Platí tedy $\Phi \in D(\overline{\mathscr{T}^{\Sigma}(A)})$ a vztah (7) je dokázán. Z uvedených inkluzí dále dostáváme rovnost uzávěrů uvažovaných operátorů

$$\overline{\mathscr{T}^{\Sigma}(A)} = \overline{\mathscr{T}^{\oplus}(A)}\,.$$

Je-li nyní A v podstatě samosdružený, platí totéž i pro operátor A_n^{Σ} (viz § 10.8). Podle komentáře k § 7.4 je potom uzávěr $\overline{\mathscr{T}^{\oplus}(A)}$ samosdružený, neboli $\mathscr{T}^{\Sigma}(A)$ je v podstatě samosdružený; s ohledem na tvrzení 3 a cvičení 3 k této kapitole platí totéž i pro $\mathscr{T}_{\mathrm{P}}^{\Sigma}(A)$. ■

19.1.5 Příklad (*operátor počtu částic*): Uvažujme nejjednodušší netriviální případ, druhé kvantování jednotkového operátoru I na $\mathscr{H}$. Operátor $\mathscr{T}^{\Sigma}(I)$ je podle předchozí věty v podstatě samosdružený a pro $\mathscr{N} = \overline{\mathscr{T}^{\Sigma}(I)}$ platí $\sigma(\mathscr{N}) \subset$ $\subset \{0, 1, 2, \dots\}$ – viz cvičení 4. Ukážeme, že v této inkluzi platí rovnost. Operátory I_n^{Σ} jsou omezené a pro libovolná $f_1, \dots, f_n \in \mathscr{H}$ platí $I_n^{\Sigma}(f_1 \otimes \dots \otimes f_n) =$ $= n(f_1 \otimes \dots \otimes f_n)$. Dostáváme tak $I_n^{\Sigma} = nI_n$, kde I_n je jednotkový operátor na $\mathscr{H}^{(n)}$, pomocí toho je snadné se přesvědčit, že samosdružený operátor $\mathscr{N}$ má čistě bodové spektrum, přičemž vlastními podprostory jsou n-částicové podprostory $\mathscr{H}^{(n)}$. Dále je zřejmé, že $D_n(I) \equiv \mathscr{H}^{(n)}$ je invariantní vůči všem operátorům $U(p)$, a tedy i vůči P_n. Operátory $\mathscr{T}_{\mathrm{P}}^{\Sigma}(I)$ potom působí na podprostorech $\mathscr{H}_{\mathrm{P}}^{(n)}$ jako n-násobek jednotkového operátoru. Odtud plyne, že operátory $\mathscr{N}_{\mathrm{P}} \equiv \overline{\mathscr{T}_{\mathrm{P}}^{\Sigma}(I)}$ mají čistě bodová spektra, $\sigma(\mathscr{N}_{\mathrm{P}}) = \{0, 1, 2, \dots\}$, přičemž vlastní hodnotě n odpovídá vlastní podprostor $\mathscr{H}_{\mathrm{P}}^{(n)}$. Operátoru $\mathscr{N}$ se z přirozených důvodů říká *operátor počtu částic*; téhož názvu se užívá i pro operátory $\mathscr{N}_{\mathrm{P}}$, případně jejich v podstatě samosdružená zúžení.

Věta 4 nám dává právo jednočásticové pozorovatelné A přiřadit pozorovatelnou $\overline{\mathscr{T}_{\mathrm{P}}^{\Sigma}(A)}$ uvažovaného mnohočásticového systému, přičemž $P = A, S$ podle druhu částic. Z konstrukce operátoru druhého kvantování je navíc zřejmé, že obě pozorovatelné popisují tutéž veličinu, přinejmenším pro veličiny aditivního charakteru jako jsou energie, impuls apod. Je-li např. H jednočásticový hamiltonián, pak $\overline{\mathscr{T}_{\mathrm{P}}^{\Sigma}(H)}$ má význam hamiltoniánu soustavy neinteragujících částic. Tuto korespondenci je možno rozšířit i na některé funkce pozorovatelných:

19.1.6 Věta: Předpokládejme, že $\{U(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$ je jednoparametrická silně spojitá grupa unitárních operátorů na $\mathscr{H}$, jejímž generátorem je operátor A. Potom $\{\overline{\mathscr{T}^{\Pi}(U(t))}\colon t \in \mathbb{R}\}$ je silně spojitá grupa unitárních operátorů na $\mathscr{F}(\mathscr{H})$, jež je generována operátorem $\mathscr{A} \equiv \overline{\mathscr{T}^{\Sigma}(A)}$; podobně $\{\overline{\mathscr{T}_{\mathrm{P}}^{\Pi}(U(t))}\colon t \in \mathbb{R}\}$ je silně spojitá grupa unitárních operátorů na $\mathscr{F}_{\mathrm{P}}(\mathscr{H})$ s generátorem $\mathscr{A}_{\mathrm{P}} \equiv \overline{\mathscr{T}_{\mathrm{P}}^{\Sigma}(A)}$.

Důkaz: Zúžení $\mathscr{T}^{\Pi}(U(t)) \upharpoonright \mathscr{H}^{(n)}$ je izomorfní operátoru $U_n^{\Pi}(t) \equiv U(t) \otimes \otimes \ldots \otimes U(t)$. Protože $\{U_n^{\Pi}(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$ je silně spojitá jednoparametrická grupa unitárních operátorů (viz § 11.1), platí totéž i pro operátory $\mathscr{T}^{\Pi}(U(t)) \upharpoonright \mathscr{H}^{(n)}$. Jelikož operátory $\mathscr{T}^{\Pi}(U(t))$ jsou částí ortogonálního součtu operátorů $U_n^{\Pi}(t)$, $n = 1, 2, \ldots,$ jsou samy unitární. Jejich definiční obor nezávisí na t a je roven algebraickému součtu $\sum_n \mathscr{H}^{(n)} \equiv D$ (viz (5c)). Je zřejmé, že D je invariantní vůči všem operátorům $\mathscr{T}^{\Pi}(U(t))$ a pro každé $\psi \in D$ je zobrazení $t \mapsto \mathscr{T}^{\Pi}(U(t))\,\psi$ spojité, přičemž platí

$$\mathscr{T}^{\Pi}(U(t))\,\mathscr{T}^{\Pi}(U(t'))\,\psi = \mathscr{T}^{\Pi}(U(t+t'))\,\psi\,. \tag{8}$$

Podle cvičení 11.3 pak odtud plyne, že $\overline{\mathscr{T}^{\Pi}(U(t))}$ je jednoparametrická silně spojitá grupa unitárních operátorů.

Existence operátoru $\mathscr{A}$ plyne ze Stoneova teorému. Jeho definiční obor je tvořen těmi $\Psi \in \mathscr{F}(\mathscr{H})$, pro něž existuje $\Phi \equiv \lim_{t\to 0}\,[\overline{\mathscr{T}^{\Pi}(U(t))}\,\Psi - \Psi]\,t^{-1}$, a platí $\mathscr{A}\Psi = -\mathrm{i}\Phi$. Užijeme toho, že generátor grupy $\{U_n^{\Pi}(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$, $n = 2, 3, \ldots,$ je podle tvrzení 11.1.7 roven $A_n = \overline{A_n^{\Sigma}}$; dále zjevně platí $A_1 = A$ a $A_0 = 0$. Vezměme libovolný vektor $\Psi \in \mathscr{D}(A)$, tj. $\Psi = \{\psi_0, \ldots, \psi_N, 0, \ldots\}$, $\psi_n \in D_n(A)$. Platí

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{1}{t}\,[\overline{\mathscr{T}^{\Pi}(U(t))}\,\Psi - \Psi] - \mathrm{i}\mathscr{T}^{\Sigma}(A)\Psi\right\|_{\mathrm{F}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\lim_{t\to 0}\left\|\frac{1}{t}\,[\,U_n^{\Pi}(t) - I\,]\,\psi_n - \mathrm{i}A_n\psi_n\right\|_n^2 = 0\,,$$

takže $\mathscr{T}^{\Sigma}(A) \subset \mathscr{A}$. Odtud plyne $\overline{\mathscr{T}^{\Sigma}(A)} \subset \mathscr{A}$, a vzhledem k tomu, že oba operátory jsou samosdružené, platí mezi nimi rovnost. Omezíme-li se na vektory $\Psi \in \mathscr{D}(A) \cap \mathscr{F}_{\mathrm{P}}(\mathscr{H})$, můžeme obdobně dokázat zbývající tvrzení. ■

19.2 KREAČNÍ A ANIHILAČNÍ OPERÁTORY

V dalším budeme předpokládat, že jednočásticový prostor $\mathscr{H}$ je separabilní. Nechť $\mathscr{E} = \{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ je nějaká ortonormální báze v $\mathscr{H}$; potom vektory $\varphi_{j_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{j_n}$, kde $j_k = 1, 2, \ldots$ a $k = 1, \ldots, n$, tvoří ortonormální bázi $\mathscr{E}_n$ v $\mathscr{H}^{(n)}$. Z hlediska podprostorů $P_n\mathscr{H}^{(n)}$ má tato báze nevýhodu v tom, že některé její vektory mají nenulové ortogonální projekce jak v $P_n\mathscr{H}^{(n)}$, tak i v ortogonálním doplňku. Sestrojíme proto nejprve pomocí $\mathscr{E}_n$ jinou ortonormální bázi.

Každý vektor báze $\mathscr{E}_n$ je určen n-ticí přirozených čísel $j \equiv \{j_1, \ldots, j_n\}$; budeme jej značit $\varphi_n(j)$ a j budeme nazývat *variací*. Pro libovolnou permutaci $p \in \mathscr{S}_n$ platí

$$U(p)\,\varphi_n(j) = \varphi_{j_{p_1}} \otimes \ldots \otimes \varphi_{j_{p_n}} \equiv \varphi_n(j \circ p)\,.$$

Některá z čísel j_k mohou být totožná. Neklesající variace, tj. takové, že $j_1 \leqq j_2 \leqq \ldots \leqq j_n$, označme symbolem $\hat{j}$ a definujme

$$\mathscr{H}_n(\hat{j}) := \{\varphi_n(\hat{j} \circ p),\ p \in \mathscr{S}_n\}_{\text{lin}} \tag{1a}$$

Jaká je dimenze tohoto prostoru? Protože některá z čísel j_k mohou být stejná, platí pro ně vztahy

$$j_1 = j_2 = \ldots = j_{n_1} < j_{n_1+1} = \ldots =$$
$$= j_{n_1+n_2} < \ldots < j_{n_1+\ldots+n_{M-1}+1} = \ldots = j_{n \equiv n_1+\ldots+n_m}\,.$$

Zvolíme-li nyní pevně $p \in \mathscr{S}_n$, je snadné ukázat (viz cvičení 5), že počet permutací $p' \in \mathscr{S}_n$ takových, že $\hat{j} \circ p = \hat{j} \circ p'$ je nezávislý na p a je roven $n_1! \ldots n_m!$. Množina $\{\hat{j} \circ p\colon p \in \mathscr{S}_n\}$ tedy obsahuje jen $n!/(n_1! \ldots n_m!)$ prvků, proto

$$\dim \mathscr{H}_n(\hat{j}) = \frac{n!}{n_1! \ldots n_m!} \equiv c(\hat{j})\,. \tag{1b}$$

Pro projektory $P_n = S_n, A_n$ zjevně platí

$$P_n\mathscr{H}_n(\hat{j}) \subset \mathscr{H}_n(\hat{j})\,;$$

najdeme operátory $P_n \upharpoonright \mathscr{H}_n(\hat{j})$. Uvažujme vektor

$$\varphi_n^{\mathrm{S}}(\hat{j}) := \frac{c_{\mathrm{S}}}{\sqrt{n!}} \sum_{p \in \mathscr{S}_n} \varphi_n(\hat{j} \circ p)\,, \tag{2a}$$

kde c_{S} je normalizační konstanta, kterou určíme pomocí formule (1b): součet v tomto vztahu má $n!$ sčítanců, mezi nimiž je však jen $c(\hat{j})$ vektorů různých. Tyto vektory tvoří ortonormální množinu, přičemž každý se vyskytuje v součtu právě

 $n_1! \dots n_m!$-krát. Odtud vyplývá

$$\| \varphi_n^{\mathrm{S}}(\hat{j}) \|^2 = \frac{c_{\mathrm{S}}^2}{n!} (n_1! \dots n_m!)^2 \, c(\hat{j}) = \frac{c_{\mathrm{S}}^2 n!}{c(\hat{j})},$$

a zvolíme-li $c_{\mathrm{S}} = \sqrt{c(\hat{j})/(n!)}$, bude $\varphi_n^{\mathrm{S}}(\hat{j})$ jednotkový vektor. Najdeme nyní akci symetrizátoru S_n na vektor $\varphi_n(\hat{j} \circ p)$ pro libovolné $p \in \mathscr{S}_n$:

$$S_n \varphi_n(\hat{j} \circ p) = \frac{1}{n!} \sum_{p' \in \mathscr{S}_n} \varphi_n[(\hat{j} \circ p) \circ p'] = \frac{1}{n!} \sum_{p' \in \mathscr{S}_n} \varphi_n[\hat{j} \circ (p \circ p')] =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{p'' \in \mathscr{S}_n} \varphi_n(\hat{j} \circ p'') = \frac{1}{\sqrt{n!}\, c_{\mathrm{S}}} \varphi_n^{\mathrm{S}}(\hat{j}).$$

Podle definice (1a) plyne odtud vztah

$$S_n \mathscr{H}_n(\hat{j}) = \{\varphi_n^{\mathrm{S}}(\hat{j})\}_{\mathrm{lin}} \tag{2b}$$

takže *operátor* $S_n \restriction \mathscr{H}_n(\hat{j})$ *je jednodimenzionální projektor na podprostor* $\{\varphi_n^{\mathrm{S}}(\hat{j})\}_{\mathrm{lin}}$.

Pro antisymetrizátor A_n platí obdobné závěry. Předně je zřejmé, že $A_n \mathscr{H}_n(\hat{j}) = 0$, pokud se ve variaci $\hat{j}$ opakují některá čísla j_k. Je-li variace $\hat{j}$ bez opakování, dokážeme stejnými úvahami jako v předcházejícím případě, že

$$A_n \mathscr{H}_n(\hat{j}) = \{\varphi_n^{\mathrm{A}}(\hat{j})\}_{\mathrm{lin}} \tag{3a}$$

kde jednotkový vektor $\varphi_n^{\mathrm{A}}(\hat{j})$ je definován vztahem

$$\varphi_n^{\mathrm{A}}(\hat{j}) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{p \in \mathscr{S}_n} \varepsilon_p \, \varphi_n(\hat{j} \circ p). \tag{3b}$$

Podprostory $\mathscr{H}_n(\hat{j})$ jsou navzájem ortogonální a pro jejich ortogonální součet platí

$$\{\mathscr{E}_n\}_{\mathrm{lin}} = \sum_{\hat{j}}^{\oplus} \mathscr{H}_n(\hat{j}) \subset \mathscr{H}^{(n)};$$

z podmínky $\overline{\{\mathscr{E}_n\}_{\mathrm{lin}}} = \mathscr{H}^{(n)}$ pak plyne

$$\sum_{\hat{j}}^{\oplus} \mathscr{H}_n(\hat{j}) = \mathscr{H}^{(n}$$

Pro podprostory $P_n\mathscr{H}^{(n)}$ pomocí rovností (2b) a (3a) dostáváme

$$P_n\mathscr{H}^{(n)} = P_n \sum_{\hat{j}}^{\oplus} \mathscr{H}_n(\hat{j}) = \sum_{\hat{j}}^{\oplus} P_n\mathscr{H}_n(\hat{j}) = \sum_{\hat{j}}^{\oplus} \{\varphi_n^{\mathrm{P}}(\hat{j})\}_{\mathrm{lin}},$$

kde $\{\varphi_n^{\mathrm{A}}(\hat{j})\}_{\mathrm{lin}} = 0$, je-li $\hat{j}$ variace s opakováním. Tento vztah ukazuje, že vektory $\varphi_n^{\mathrm{S}}(\hat{j})$, kde $\hat{j} = \{j_1, \ldots, j_n\}$ je libovolná neklesající variace, tvoří ortonormální bázi v $S_n\mathscr{H}^{(n)}$ a vektory $\varphi_n^{\mathrm{A}}(\hat{j})$, kde $\hat{j}$ je libovolná neklesající variace bez opakování, tvoří bázi v $A_n\mathscr{H}^{(n)}$.

Dané variaci $\hat{j}$ můžeme přiřadit posloupnost $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, kde čísla n_i značí počet prvků variace rovných i. Tuto skutečnost lze interpretovat tak, že stav φ_i se ve $\varphi_n(\hat{j})$ vyskytuje (je obsazen) právě n_i-krát; proto se o $\{n_i\}$ mluví jako o **posloupnosti obsazovacích čísel** (stručněji, *ON-posloupnosti*). Posloupnost $\{n_i\}$ má $m \leqq n$ nenulových členů n_{i_k}, $1 \leqq k \leqq m$, přičemž platí

$$\sum_{i=1}^{\infty} n_i = \sum_{k=1}^{m} n_{i_k} = n\,; \tag{4}$$

množinu všech ON-posloupností splňujících tuto podmínku označíme symbolem $\mathscr{O}_n^{\mathrm{S}}$.

Je zřejmé, že zobrazení $\hat{j} \mapsto \{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ je bijekce množiny všech neklesajících variací na množinu $\mathscr{O}_n^{\mathrm{S}}$; je proto možné provést ztotožnění $\hat{j} \equiv \{n_i\}_{i=1}^{\infty}$. Podobně nahlédneme, že obrazem podmnožiny všech variací bez opakování je při tomto zobrazení podmnožina $\mathscr{O}_n^{\mathrm{A}}$ posloupností $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ sestavených z nul a jedniček. Pomocí tohoto značení můžeme zformulovat náš výsledek takto:

19.2.1 Tvrzení: Pro každé $n \geqq 2$ je množina $\mathscr{E}_n^{\mathrm{P}} := \{\varphi_n^{\mathrm{P}}\{n_i\} : \{n_i\} \in \mathscr{O}_n^{\mathrm{P}}\}$ ortonormální bází v prostoru $P_n\mathscr{H}^{(n)}$.

Pomocí vektorů $\varphi_n^{\mathrm{P}}\{n_i\}$ snadno zkonstruujeme ortonormální bázi v podprostoru $\mathscr{F}_{\mathrm{P}}(\mathscr{H})$, kterou označíme $\mathscr{E}_{\mathrm{P}}$. Tato báze je tvořena vektory $\Phi_n^{\mathrm{P}}\{n_i\}$ pro $n = 0, 1, \ldots$ a $\{n_i\} \in \mathscr{O}_n^{\mathrm{P}}$, které jsou definovány následujícím předpisem (viz cvičení 4.20):

$$\Phi_n^{\mathrm{P}}\{n_i\} := \begin{cases} \{1, 0, \ldots\}, & n = 0, \\ \{0, \varphi_1\{n_i\}, 0, \ldots\}, & n = 1, \\ \{0, \ldots, 0, \varphi_n^{\mathrm{P}}\{n_i\}, 0, \ldots\}, & n \geqq 2, \end{cases} \tag{5}$$

přičemž $\varphi_1\{n_i\} := \varphi_j$ pro to j, pro něž $n_j = 1$, a pro $n \geqq 2$ stojí nenulová komponenta na n-tém místě. Každý prvek báze $\mathscr{E}_{\mathrm{P}}$ je tedy určen číslem n a nějakou ON-posloupností $\{n_i\} \in \mathscr{O}_n^{\mathrm{P}}$; proto se o $\mathscr{E}_{\mathrm{P}}$ mluví jako o **bázi obsazovacích čísel**.

Po tomto úvodu můžeme přistoupit k vlastnímu námětu paragrafu. Libovolným $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{H}$ odpovídá vektor z $\mathscr{F}_{\mathrm{P}}(\mathscr{H})$ definovaný vztahem $\Psi_n^{\mathrm{P}}(f_1, \ldots, f_n) = \{0, \ldots, 0, P_n(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n), 0, \ldots\}$. Množinu všech takovýchto vektorů označíme $\mathscr{D}_{\mathrm{P}}^{(n)}$; pro $n = 0$ klademe $\mathscr{D}_{\mathrm{P}}^{(0)} \equiv \Omega_0 \equiv \psi_0^{\mathrm{P}}$. Dále zavedeme množinu

$$\mathscr{D}_{\mathrm{P}} = \left\{ \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{D}_{\mathrm{P}}^{(n)} \right\}_{\mathrm{lin}},$$

která je hustá v $\mathscr{F}_{\mathrm{P}}(\mathscr{H})$, protože obsahuje lineární obal báze tohoto prostoru.

Pro libovolný vektor $f \in \mathscr{H}$ definujeme **kreační operátor** $a^*(f)$ a **anihilační operátor** $a(f)$ jakožto zobrazení $\mathscr{D}_{\mathrm{P}} \to \mathscr{D}_{\mathrm{P}}$ získaná lineárním rozšířením vztahů

$$a^*(f)\, \Psi_n^{\mathrm{P}}(f_1, \ldots, f_n) = \sqrt{n+1}\, \Psi_{n+1}^{\mathrm{P}}(f, f_1, \ldots, f_n)\,. \tag{6a}$$

$$a(f)\, \Psi_n^{\mathrm{P}}(f_1, \ldots, f_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \delta_{j-1}^{\mathrm{P}}(f, f_j)\, \Psi_{n-1}^{\mathrm{P}}(f_1, \ldots, f_{j-1}, f_{j+1}, \ldots)\,. \tag{6b}$$

kde $\delta_k^{\mathrm{P}} = 1$ pro $\mathrm{P} = \mathrm{S}$ a $\delta_k^{\mathrm{P}} = (-1)^k$ pro $\mathrm{P} = \mathrm{A}$, přičemž vztah (6b) platí pro $n \geqq 1$, zatímco pro $n = 0$ máme

$$a(f)\, \Omega_0 = 0\,. \tag{6c}$$

Povšimněme si toho, že podle definice *je zobrazení* $f \mapsto a^*(f)$ *lineární*, zatímco $f \mapsto a(f)$ je *antilineární*. Přímým důsledkem vztahu (6a) je vyjádření libovolného vektoru množiny $\mathscr{D}_{\mathrm{P}}^{(n)}$ pomocí kreačních operátorů a vakua,

$$\Psi_n^{\mathrm{P}}(f_1, \ldots, f_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}}\, a^*(f_1) \ldots a^*(f_n)\, \Omega_0\,. \tag{7}$$

Aby byla definice korektní, je nutné, aby vztahy (6a,b) zadávaly lineární zobrazení na $\mathscr{D}_{\mathrm{P}}^{(n)}$, tj. aby pro libovolná $f, f_1, \ldots, f_n, g_k \in \mathscr{H}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ platilo

$$\begin{aligned} a^{\#}(f)\ \Psi_n^{\mathrm{P}}(f_1, \ldots, \alpha f_k + g_k, \ldots, f_n) &= \\ = \alpha a^{\#}(f)\ \Psi_n^{\mathrm{P}}(\ldots, f_k, \ldots) &+ a^{\#}(f)\ \Psi_n^{\mathrm{P}}(\ldots, g_k, \ldots)\,, \end{aligned}$$

kde užíváme symbolu $a^{\#}(f)$ jako *společného označení* pro $a^*(f)$ a $a(f)$; o tom se lze snadno přesvědčit. Stačilo by tedy zadat působení operátorů $a^{\#}(f)$ na vektory vhodné lineárně nezávislé podmnožiny v $\mathscr{D}_{\mathrm{P}}$, jako je např. báze obsazovacích čísel, kterou jsme před chvílí zkonstruovali. Abychom mohli vztahy (6a,b) přepsat pro tento speciální případ, definujeme k libovolné $\{n_i\} \in \mathscr{O}_n^{\mathrm{S}}$ posloupnosti $\{n_i\}_k^{(\pm)} = \{n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k \pm 1, n_{k+1}, \ldots\}$ a čísla $s_k = \sum_{i=1}^{k-1} n_i$, přičemž posloupnost $\{n_i\}_k^{(-)}$ je definována pouze tehdy, když $n_k \geqq 1$. Je-li f rovno některému vektoru jednočásticové báze $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$, potom vztahy (6a,b) v antisymetrickém případě dávají

$$a^*(\varphi_k)\,\Phi_n^A\{n_i\} = (-1)^{s_k}(1-n_k)\,\Phi_{n+1}^A\{n_i\}_k^{(+)}\,, \tag{8a}$$

$$a(\varphi_k)\,\Phi_n^A\{n_i\} = (-1)^{s_k}n_k\,\Phi_{n-1}^A\{n_i\}_k^{(-)} \tag{8b}$$

(viz cvičení 6), přičemž samozřejmě uvažujeme jen ON-posloupnosti $\{n_i\} \in \mathscr{O}_n^A$. V symetrickém případě podobně dostaneme

$$a^*(\varphi_k)\,\Phi_n^S\{n_i\} = \sqrt{n_k+1}\,\Phi_{n+1}^S\{n_i\}_k^{(+)}\,, \tag{9a}$$

$$a(\varphi_k)\,\Phi_n^S\{n_i\} = \sqrt{n_k}\,\Phi_{n-1}^S\{n_i\}_k^{(-)}\,. \tag{9a}$$

V případě obecného vektoru $f \in \mathscr{H}$ využijeme toho, že (anti)lineární závislost operátorů $a^{\#}(f)$ na f lze rozšířit na „nekonečné součty": pro libovolné $\Psi \in \mathscr{D}_P$ platí

$$a^*(f)\,\psi = \sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_k, f)\,a^*(\varphi_k)\,\psi\,, \tag{10a}$$

$$a(f)\,\psi = \sum_{k=1}^{\infty}(f, \varphi_k)\,a(\varphi_k)\,\psi\,, \tag{10b}$$

kde řady konvergují vzhledem k normě v $\mathscr{F}_P(\mathscr{H})$ – viz cvičení 7.

Z definice (6) je zřejmé, že operátory $a^{\#}(f)$ zobrazují podprostor $\mathscr{D}_P$ do sebe. To znamená, že polynomy sestavené z kreačních a anihilačních operátorů jsou dobře definované operátory. Významné místo mezi nimi zaujímá polynom

$$[a^{\#}(f), a^{\#}(g)]_P := \begin{cases} a^{\#}(f)\,a^{\#}(g) - a^{\#}(g)\,a^{\#}(f) \;\ldots\; P = S \\ a^{\#}(f)\,a^{\#}(g) + a^{\#}(g)\,a^{\#}(f) \;\ldots\; P = A \end{cases}$$

V symetrickém případě se mu říká *komutátor* a index $P = S$ se vynechává; v antisymetrickém případě jde o *antikomutátor*, který se zpravidla značí $[\,.\,,\,.\,]_+$.

19.2.2 Věta: Kreační a anihilační operátory splňují pro libovolné vektory $f, g \in \mathscr{H}$ a $\Psi \in \mathscr{D}_P$ vztahy

$$[a(f), a(g)]_P\,\Psi = [a^*(f), a^*(g)]_P\,\Psi = 0\,, \tag{11a}$$

$$[a(f), a^*(g)]_P\,\Psi = (f, g)\,\Psi \tag{11b}$$

a platí

$$a^*(f) = a(f)^* \upharpoonright \mathscr{D}_P\,, \qquad a(f) = a^*(f)^* \upharpoonright \mathscr{D}_P\,. \tag{12}$$

V symetrickém případě jsou pro libovolný nenulový vektor $f \in \mathscr{H}$ operátory $a^{\#}(f)$ neomezené, v antisymetrickém případě jsou naopak tyto operátory omezené a $\|a^{\#}(f)\| = \|f\|$.

 Důkaz: Nejprve ověříme vztahy (12). Podprostor $\mathscr{D}_{\mathrm{P}}$ je hustý v $\mathscr{F}_{\mathrm{P}}(\mathscr{H})$, proto sdružené operátory $a^{\#}(f)^*$ existují. Pro vektory $\Psi \in \mathscr{D}_{\mathrm{P}}^{(m)}$, $\Phi \in \mathscr{D}_{\mathrm{P}}^{(n)}$ platí

$$(\Psi, a^*(f)\,\Phi)_{\mathrm{F}} = 0\,, \tag{13}$$

pokud $m - n \neq 1$. Nechť $n \geqq 2$; vezmeme libovolné vektory $f_2, \ldots, f_n, g_1, \ldots \ldots, g_n \in \mathscr{H}$. Z definičního vztahu (6a) a výsledku cvičení 8 plyne

$$(\Psi_n^{\mathrm{P}}(g_1, \ldots, g_n), a^*(f)\,\Psi_{n-1}^{\mathrm{P}}(f_2, \ldots, f_n))_{\mathrm{F}} = \frac{\sqrt{n}}{n!} \sum_{p \in \mathscr{S}_n} \nu_p^{\mathrm{P}}(g_{p_1}, f)\,(g_{p_2}, f_2) \ldots (g_{p_n}, f_n) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}(n-1)!} \sum_{k=1}^{n} \delta_{k-1}^{\mathrm{P}}(g_k, f) \sum_{r \in \mathscr{S}_{n-1}^{(k)}} \nu_r^{\mathrm{P}}(g_{r_1}, f_2) \ldots (g_{r_{k-1}}, f_k)\,(g_{r_{k+1}}, f_{k+1}) \ldots (g_{r_n}, f_n) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \delta_{k-1}^{\mathrm{P}}(g_k, f)\,(\Psi_{n-1}^{\mathrm{P}}(g_1, \ldots, g_{k-1}, g_{k+1}, \ldots, g_n), \Psi_{n-1}^{\mathrm{P}}(f_2, \ldots, f_n))_{\mathrm{F}} =$$

$$= (a(f)\,\Psi_n^{\mathrm{P}}(g_1, \ldots, g_n), \Psi_{n-1}^{\mathrm{P}}(f_2, \ldots, f_n))_{\mathrm{F}}\,,$$

kde $\nu_p^{\mathrm{S}} = 1$ a $\nu_p^{\mathrm{A}} = \varepsilon_p$. Jednoduchým výpočtem se přesvědčíme, že tento vztah platí i pro $n = 1$. Užitím linearity skalárního součinu dostáváme pro libovolné $\Psi \in (\mathscr{D}_{\mathrm{P}}^{(n-1)})_{\mathrm{lin}}$ vztah

$$(\Psi_n^{\mathrm{P}}(g_1, \ldots, g_n), a^*(f)\,\Psi)_{\mathrm{F}} = (a(f)\,\Psi_n^{\mathrm{P}}(g_1, \ldots, g_n), \Psi)_{\mathrm{F}}\,,$$

který spolu s (13) ukazuje, že $\Psi_n^{\mathrm{P}}(g_1, \ldots, g_n) \in D(a^*(f)^*)$ a $a^*(f)^*\,\Psi_n^{\mathrm{P}}(g_1, \ldots, g_n) = a(f)\,\Psi_n^{\mathrm{P}}(g_1, \ldots, g_n)$. Odtud snadno vyplývá druhý ze vztahů (12). Pro libovolná $\Psi, \Phi \in \mathscr{D}_{\mathrm{P}}$ dále platí

$$(\Psi, a(f)\,\Phi)_{\mathrm{F}} = (\Psi, a^*(f)^*\,\Phi)_{\mathrm{F}} = (a^*(f)\,\Psi, \Phi)_{\mathrm{F}}\,;$$

to znamená, že $\Psi \in D(a(f)^*)$ a $a(f)^*\,\Psi = a^*(f)\,\Psi$, tj. že platí i prvý ze vztahů (12).

Relace (11) stačí zjevně ověřit pro $\Psi \in \mathscr{D}_{\mathrm{P}}^{(n)}$. Rovnost $[a^*(f), a^*(g)]_{\mathrm{P}}\,\Psi = 0$ plyne z definic (6) a vztahu $\Psi_n^{\mathrm{P}}(f_{p_1}, \ldots, f_{p_n}) = \nu_n^{\mathrm{P}}\,\Psi_n^{\mathrm{P}}(f_1, \ldots, f_n)$; z ní pak dále dostáváme zbývající rovnost v (11a) – viz cvičení 9. K důkazu relace (11b) užijeme rozpisu

$$a(f)\,a^*(g)\,\Psi_n^{\mathrm{P}}(f_1, \ldots, f_n) = \sqrt{n+1}\,a(f)\,\Psi_{n+1}^{\mathrm{P}}(g, f_1, \ldots, f_n) =$$

$$= (f, g)\,\Psi_n^{\mathrm{P}}(f_1, \ldots, f_n) + \sum_{j=2}^{n+1} \delta_{j-1}^{\mathrm{P}}(f, f_{j-1})\,\Psi_n^{\mathrm{P}}(g, f_1, \ldots, f_{j-2}, f, f_j, \ldots, f_n) =$$

$$= (f, g)\,\Psi_n^{\mathrm{P}}(f_1, \ldots, f_n) \pm a^*(g)\,a(f)\,\Psi_n^{\mathrm{P}}(f_1, \ldots, f_n)\,,$$

kde horní znaménko odpovídá případu $\mathrm{P} = \mathrm{S}$ a dolní $\mathrm{P} = \mathrm{A}$.

Uvažujme dále symetrický případ; vzhledem k (anti)linearitě stačí ověřit, že operátory $a^{\#}(f)$ jsou neomezené pro všechny jednotkové vektory $f \in \mathscr{H}$. To je však snadné: vektory $\Psi_n^S(f, \dots, f)$ jsou rovněž jednotkové a zvolíme-li bázi $\{\varphi_j\}$ např. tak, že $\varphi_1 = f$, pak ze vztahů (9) plyne $\|a^*(f)\, \Psi_n^S(f, \dots, f)\|_F = \sqrt{n+1}$, resp. $\|a(f)\, \Psi_n^S(f, \dots, f)\|_F = \sqrt{n}$.

V antisymetrickém případě vezměme nejprve operátory $a^*(\varphi_k)$ odpovídající některému vektoru báze $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$. Pro různé ON-posloupnosti $\{n_i\}$, $\{m_i\}$ jsou vektory $\Phi_n^A\{n_i\}$ a $\Phi_m^A\{m_i\}$ ortogonální a ze vztahu (8a) plyne, že také $a^*(\varphi_k)\, \Phi_n^A\{n_i\} \perp$ $\perp a^*(\varphi_k)\, \Phi_m^A\{m_i\}$. Odtud vyplývá, že pro lineární kombinaci $\Psi = \sum_j \alpha_j \Phi_{n_j}^A\{n_i^{(j)}\}$ můžeme psát nerovnost

$$\|a^*(\varphi_k)\, \Psi\|_F^2 = \sum_j |\alpha_j|^2\, \|a^*(\varphi_k)\, \Phi_{n_j}^A\{n_i^{(j)}\}\|_F^2 = \sum_j |\alpha_j|^2\, (1 - n_k^{(j)})^2 \leqq \|\Psi\|_F^2\,,$$

jež přechází v rovnost např. pro $\Psi = \Omega_0$. Vektory tohoto tvaru však tvoří hustou množinu v $\mathscr{F}_P(\mathscr{H})$, proto je $\|a^*(\varphi_k)\| = 1$. Pro obecný nenulový vektor f můžeme zvolit bázi $\{\varphi_j\}$ tak, aby $\varphi_1 = f / \|f\|$. Z linearity $a^*(.)$ pak plyne $\|a^*(f)\| =$ $= \|f\|$ a vztahy (5.1.3b) a (12) dávají $\|a(f)\| = \|a(f)^*\| = \|a^*(f)\|$. ■

Význam kreačních a anihilačních operátorů spočívá krom jiného v tom, že pomocí nich můžeme vyjadřovat jiné operátory působící na prostoru $\mathscr{F}_P(\mathscr{H})$ – viz komentář. Při práci s operátory $a^{\#}(f)$ hrají důležitou roli jejich algebraické vlastnosti vyjadřované vztahy (11). V antisymetrickém případě jim říkáme **kanonické antikomutační relace**; v symetrickém případě vztahy (11) nazýváme **kanonickými komutačními relacemi**. Zacházení s nimi je obtížnější díky neomezenosti operátorů $a^{\#}(f)$. Tuto nesnáz je možno odstranit tím, že je nahradíme vhodnými relacemi pro jejich omezené funkce podobně jako jsme to udělali v § 16.2. O tom se zmíníme v příštím paragrafu, kde také uvidíme, že relace (11) představují přímé zobecnění kanonických komutačních relací diskutovaných v § 16.2.

19.3 SYSTÉMY S LIBOVOLNÝM POČTEM NEINTERAGUJÍCÍCH ČÁSTIC

Formalismus druhého kvantování má četné fyzikální aplikace. Není v našich možnostech se jimi podrobně zabývat; uvedeme jenom několik základních poznatků. Fockův prostor, resp. jeho podprostory byly definovány tak, aby mohly sloužit k popisu soustav tvořených libovolným počtem částic. Nejjednodušším příkladem takové soustavy je volné skalární kvantové pole, jemuž věnujeme větší část tohoto paragarafu.

Nejprve definujeme operátory, jimiž se takové pole popisuje, a vyšetříme jejich vlastnosti, jež jsou nezávislé na volbě jednočásticového stavového prostoru $\mathscr{H}$. Operátoru

$$\Phi_S(f) := \frac{a(f) + a^*(f)}{\sqrt{2}} \tag{1a}$$

 s definičním oborem $\mathscr{D}_S \subset \mathscr{F}_S(\mathscr{H})$ se říká *Segalův polní operátor.* Jak uvidíme za chvíli, operátory $\Phi_S(f)$ jsou pro všechna $f \in \mathscr{H}$ v podstatě samosdružené; to umožňuje definovat operátory $\exp(\mathrm{i}\,\overline{\Phi_S(f)})$, pro něž lze odvodit vztahy analogické Weylovým relacím (16.2.4b).

19.3.1 Věta: (a) Operátor $\Phi_S(f)$ je v podstatě samosdružený pro každé $f \in \mathscr{H}$.
(b) Množina $\{\Phi_S(f_1)\dots\Phi_S(f_n)\,\Omega_0\colon f_j \in \mathscr{H},\ n = 0, 1, \dots\}$ je totální v $\mathscr{F}_S(\mathscr{H})$; jinými slovy, vakuum je cyklickým vektorem algebry generované jednotkovým operátorem a polními operátory $\Phi_S(f)$ pro všechna $f \in \mathscr{H}$.
(c) Pro libovolné vektory $f, g \in \mathscr{H}$ a $\Psi \in \mathscr{D}_S$ platí

$$[\Phi_S(f),\ \Phi_S(g)]\ \Psi = \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(f, g)\ \Psi.$$

Důkaz: Z tvrzení 7.1.3d a vztahů (19.2.12) plyne, že operátor $\Phi_S(f)$ je symetrický, stačí tedy najít k němu hustou množinu analytických vektorů. Pro libovolné přirozené m je operátor $\Phi_S(f)^m$ polynom v operátorech $a^{\#}(f)$, takže každý vektor $\Psi \in \mathscr{D}_S$ patří do $D(\Phi_S(f)^m)$. Podprostor $\mathscr{D}_S$ obsahuje vektory popisující stavy s konečným počtem částic, tj. k danému $\Psi \in \mathscr{D}_S$ existuje přirozené n takové, že $\Psi \in \sum_{k=0}^{n}{}^{\oplus}\,\mathscr{H}_S^{(k)}$. Dále je zřejmé, že operátor $\Phi_S(f)$ zobrazuje $\mathscr{H}_S^{(k)}$ do $\mathscr{H}_S^{(k-1)} \oplus \mathscr{H}_S^{(k+1)}$. Užijeme-li výsledku cvičení 11, dostáváme odhad

$$\|\Phi_S(f)^m\ \Psi\|_F \leqq 2^{m/2}(n+m)^{1/2}\,(n+m-1)^{1/2}\dots(n+1)^{1/2}\ \|\Psi\|_F\ \|f\|^m,$$

z nějž plyne

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!}\ \|\Phi_S(f)^m\ \Psi\|_F \leqq \|\Psi\|_F \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}\|f\|\,t)^m}{m!}\left(\frac{(n+m)!}{n!}\right)^{1/2} < \infty$$

pro libovolné $t > 0$. Množina $\mathscr{D}_S$, jež je podle tvrzení 19.1.3 hustá v $\mathscr{F}_S(\mathscr{H})$, je tedy tvořena analytickými vektory. Tvrzení (b) plyne ze vztahů (19.2.6c) a (19.2.7) a tvrzení 19.1.3, a komutační relace (5a) dostaneme jednoduchým výpočtem z (19.2.11). ■

Abychom mohli zapsat zmíněné kanonické komutační relace, definujme pro libovolné $f \in \mathscr{H}$ unitární operátor

$$W(f) = \exp(\mathrm{i}\,\overline{\Phi_S(f)}), \tag{1b}$$

jenž je obdobou Weylova operátoru (16.2.6). Pro množinu těchto operátorů platí:

19.3.2 Lemma: Nechť $\{\varphi_j\}$ je ortonormální báze v $\mathscr{H}$. Množina

$$\{W(t\varphi_j),\ W(\mathrm{i}t\varphi_j)\colon j = 1, 2, \dots,\ t \in \mathbb{R}\}$$

je ireducibilní.

Důkaz: Podle definice je $W(-f) = W^*(f)$, takže uvažovaná množina je symetrická. Podle Schurova lemmatu potom stačí ukázat, že libovolný omezený operátor na $\mathscr{F}_S(\mathscr{H})$, pro který platí

$$B\,W(tf_j) = W(tf_j)\,B \tag{2a}$$

kde $f_j = \varphi_j$ nebo $i\varphi_j$, je roven násobku jednotkového operátoru. Derivováním vztahu (2a) se podobně jako ve cvičení 11.6 přesvědčíme, že

$$B\,\overline{\Phi_S(f_j)} \subset \overline{\Phi_S(f_j)}\,B\,; \tag{2b}$$

odkud pro operátory $N(\varphi_j)$ definované vztahem

$$N(f) := \frac{1}{2}\left(\overline{\Phi_S(f)}^2 + \overline{\Phi_S(if)}^2 - \|f\|^2\right),$$

pro $f \in \mathscr{H}$ vyplývá

$$B\,N(\varphi_j) \subset N(\varphi_j)\,B\,. \tag{3}$$

Lze snadno ukázat (cvičení 16), že platí následující relace

$$N(f) \upharpoonright \mathscr{D}_S = \tilde{N}(f) \upharpoonright \mathscr{D}_S = a^*(f)\,a(f)\,, \tag{4}$$

kde

$$\tilde{N}(f) := \overline{\mathscr{T}_S^{\Sigma}((f,\cdot\cdot)f)}\,.$$

Vezměme vektor $\Psi = \{\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots\} \in \bigcap_j D(N(\varphi_j))$ takový, že

$$n(\Psi) := \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} (\Psi, N(\varphi_i)\,\Psi)$$

existuje a je konečná; protože $N(f)\mathscr{H}^{(n)} \subset \mathscr{H}^{(n)}$, platí

$$(\Psi, N(\varphi_i)\,\Psi) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (\psi_k, N_k(\varphi_i)\,\psi_k)_k\,,$$

kde $N_k(\varphi_i) := N(\varphi_i) \upharpoonright \mathscr{H}^{(k)}$, a tedy také

$$n(\Psi) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{n} (\psi_k, N_k(\varphi_i)\,\psi_k)_k\,. \tag{5}$$

Operátory $N(\varphi_i)$ jsou pozitivní (cvičení 16), takže členy této dvojnásobné řady jsou nezáporné. V důsledku toho je možno limity ve výrazu (5) zaměnit, tj.

$$n(\Psi) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \left(\Psi_n, \sum_{i=1}^{m} N(\varphi_i)\,\Psi_n\right),$$

 kde $\Psi_n := \{\psi_0, \dots, \psi_n, 0, \dots\}$. Každý takový vektor patří do $D(N)$, proto pro něj platí

$$N\Psi_n = \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} N(\varphi_i)\,\Psi_n\,,$$

(viz cvičení 10), takže

$$n(\Psi) = \lim_{n \to \infty} (\Psi_n, N\Psi_n) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} k\|\Psi_k\|_k^2\,. \tag{6}$$

Vektor $B\Omega_0$ patří do $\bigcap_j D(N(\varphi_j))$, protože $\Omega_0 \in \bigcap_j D(N(\varphi_j))$ a ze vztahu (3) vyplývá krom jiného $BD(N(\varphi_j)) \subset D(N(\varphi_j))$ pro každé j. Dále odtud a ze vztahu (4) plyne $N(\varphi_j)\,B\Omega_0 = BN(\varphi_j)\Omega_0 = 0$, takže $n(B\Omega_0)$ existuje a navíc platí $n(B\Omega_0) = 0$; rovnost (6) pak implikuje

$$B\Omega_0 = \alpha\Omega_0$$

pro nějaké $\alpha \in \mathbb{C}$. Jelikož $a^*(f) = (1/\sqrt{2})\,(\Phi_S(f) - \Phi_S(\mathrm{i}f))$, využitím vztahů (19.2.7) a (2b) snadno odvodíme

$$B\psi_n^S(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_n}) = \alpha\psi_n^S(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_n})\,. \tag{7}$$

Získanou rovnost můžeme lineárně rozšířit na podprostor $\mathscr{D}_S$, a protože $\overline{\mathscr{D}}_S = \mathscr{F}_S(\mathscr{H})$ a B je omezený, plyne odtud $B = \alpha I$. ■

Nejdůležitější vlastností množiny $\{W(f)\colon f \in \mathscr{H}\}$ shrnuje následující věta.

19.3.3 Věta: Pro jakoukoli dvojici vektorů $f, g \in \mathscr{H}$ platí

$$W(f)\,W(g) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f,g)/2}\,W(f+g)\,. \tag{8}$$

Zobrazení $f \mapsto W(f)$ je silně spojité a množina $\{W(f)\colon f \in \mathscr{H}\}$ je ireducibilní. *Důkaz* ireducibility je přímým důsledkem předcházejícího lemmatu; o způsobu ověření relace (8) a silné spojitosti se zmiňujeme v komentáři. ■

Ze vztahu (8) vyplývá, že pro libovolné vektory $f, g \in \mathscr{H}$ platí

$$W(f)\,W(g) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f,g)}\,W(g)\,W(f)\,. \tag{9}$$

Pro ortonormální bázi $\{\varphi_j\} \subset \mathscr{H}$ definujeme silně spojité jednoparametrické grupy unitárních operátorů

$$U_j(t) := W(t\varphi_j) = \exp\left[\mathrm{i}t\,\overline{\Phi_S(\varphi_j)}\right],$$
$$V_j(t) := W(\mathrm{i}t\varphi_j) = \exp\left[\mathrm{i}t\,\overline{\Phi_S(\mathrm{i}\varphi_j)}\right],$$

pro něž ze vztahu (9) plyne

$$U_j(t)\, V_k(s) = \exp\left(-\mathrm{i}\delta_{jk}ts\right) V_k(s)\, U_j(t)\,, \tag{10}$$

$j, k = 1, 2, \ldots$. Docházíme tak k výše zmíněnému zobecnění Weylových komutačních relací na případ nekonečně mnoha stupňů volnosti; někdy se v této souvislosti mluví také o *Fockově reprezentaci kanonických komutačních relací.*

Vlastnosti této reprezentace závisí pochopitelně na volbě jednočásticového prostoru $\mathscr{H}$. Důležité je, že v případě $\dim \mathscr{H} = \infty$ obecně neplatí tvrzení obdobné Stoneově-von Neumanově větě. Abychom tuto skutečnost ilustrovali, uvažujme prostor $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ a definujme na něm operátor $\mu(m)^{-1} \in \mathscr{B}[L^2(\mathbb{R}^3)]$ vztahem

$$(\mu(m)^{-1} f)\,(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{\sqrt[4]{m^2 + \boldsymbol{p}^2}}\, f(\boldsymbol{p})$$

a antilineární operátor C vztahem

$$(Cf)\,(\boldsymbol{p}) = \bar{f}(-\boldsymbol{p})\,.$$

Dále budeme potřebovat též neomezený operátor $\mu(m)$: $(\mu(m)\, f)\,(\boldsymbol{p}) = \sqrt[4]{m^2 + \boldsymbol{p}^2}\, f(\boldsymbol{p})$ s obvyklým definičním oborem. Z definice snadno ověříme, že $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ je společným invariantním podprostorem těchto operátorů, proto v dalším nebudeme dělat rozdíl mezi nimi a jejich zúženími na $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$. Označme ještě

$$\mathscr{S}_C(\mathbb{R}^3) = \{f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3):\ Cf = f\}$$

a pro libovolné $f \in \mathscr{S}_C(\mathbb{R}^3)$ definujeme

$$\Phi_m(f) := \Phi_S\left(\frac{1}{\mu(m)} f\right), \qquad \Phi_m(\mathrm{i}f) := \Phi_S(\mathrm{i}\mu(m)\, f)\,, \tag{11}$$

kde $\Phi_S(f)$ je Segalovo pole na $L^2(\mathbb{R}^3)$, a dále

$$W_m(g) := \exp\left(\mathrm{i}\, \overline{\Phi_m(g)}\right),$$

kde $g = f, \mathrm{i}f$. Potom platí

19.3.4 Věta: Nechť operátor $U \in \mathscr{B}[\mathscr{F}_S(L^2(\mathbb{R}^3))]$ splňuje podmínku

$$UW_m(g) = W_{m'}(g)U\,, \tag{12}$$

pro nějaká $m \neq m'$ a všechna $g = f, \mathrm{i}f$, kde $f \in \mathscr{S}_C(\mathbb{R}^3)$; potom $U = 0$.

Důkaz: Nechť naopak $U \neq 0$; bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že U je unitární (cvičení 17). Ukážeme nejprve, že vakuum je vlastním vektorem operátoru U. Zvolme pevné $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ a definujme unitární operátor $V \in \mathscr{B}[L^2(\mathbb{R}^3)]$

vztahem

$$(Vf)(\boldsymbol{p}) = e^{ia\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{p}) .$$

Snadno nahlédneme, že $\mathscr{S}_C(\mathbb{R}^3)$ je invariantním podprostorem tohoto operátoru, a že pro unitární operátor $\mathscr{T}_S^{\Pi}(V)$ platí

$$(\mathscr{T}_S^{\Pi}(V) F_n)(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n) = e^{ia(\boldsymbol{p}_1 + \ldots + \boldsymbol{p}_n)} F_n(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n) \tag{13}$$

pro každé $F_n \in S_n \mathscr{H}^{(n)} = S_n L^2(\mathbb{R}^{3n})$. Podle výsledků cvičení 14 je

$$\Phi_S(Vg) = \overline{\mathscr{T}_S^{\Pi}(V)}\, \Phi_S(g)\, \overline{\mathscr{T}_S^{\Pi}(V)}^{-1} ,$$

odkud dále plyne

$$\Phi_{\tilde{m}}(Vg) = \overline{\mathscr{T}_S^{\Pi}(V)}\, \Phi_{\tilde{m}}(g)\, \overline{\mathscr{T}_S^{\Pi}(V)}^{-1} ,$$

kde $\tilde{m} = m$ nebo m'. Podle pravidel funkcionálního počtu odtud dostáváme vztah

$$W_{\tilde{m}}(Vg) = \overline{\mathscr{T}_S^{\Pi}(V)}\, W_{\tilde{m}}(g)\, \overline{\mathscr{T}_S^{\Pi}(V)}^{-1} , \tag{14}$$

jenž platí speciálně pro $g = f, if$, kde $f \in \mathscr{S}_C(\mathbb{R}^3)$. Užitím vztahů (12) a (14) snadno ověříme komutativitu $W_m(g)$ s operátorem $U^{-1}\, \overline{\mathscr{T}_S^{\Pi}(V)}^{-1}\, U\, \overline{\mathscr{T}_S^{\Pi}(V)}$, a protože jsou splněny předpoklady lemmatu 19.3.2, platí

$$U^{-1}\, \overline{\mathscr{T}_S^{\Pi}(V)}^{-1}\, U\, \overline{\mathscr{T}_S^{\Pi}(V)} = \gamma I \tag{15}$$

pro nějaké nenulové $\gamma \in \mathbb{C}$. Nechť nyní

$$U\Omega_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{F}_n \in \mathscr{F}_S[L^2(\mathbb{R}^3)] ,$$

kde $\tilde{F}_n = \{0, \ldots, 0, F_n, 0, \ldots\}$. Ze vztahů (13) a (15) ihned plyne

$$F_n(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n) = e^{ia(\boldsymbol{p}_1 + \ldots + \boldsymbol{p}_n)} \gamma F_n(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n) ,$$

což je při $\gamma \neq 0$ možné jen tehdy, když $F_n = 0$ pro $n = 1, 2, \ldots$; to znamená, že $U\Omega_0 = \gamma\Omega_0$.

K dokončení důkazu stačí vypočítat dvěma způsoby normu $\| \Phi_m(f)\, \Omega_0 \|_F^2$ pro $f \in \mathscr{S}_C(\mathbb{R}^3)$. Přímý výpočet dává

$$\| \Phi_m(f)\, \Omega_0 \|_F^2 = \left\| \Phi_S \left(\frac{1}{\mu(m)} f \right) \Omega_0 \right\|_F^2 =$$

$$= \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \left[a\left(\frac{1}{\mu(m)} f \right) + a^* \left(\frac{1}{\mu(m)} f \right) \right] \Omega_0 \right\|_F^2 = \frac{1}{2} \int \frac{|f(\boldsymbol{p})|^2}{\sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}^2}}\, d\boldsymbol{p}$$

(viz 19.2.6c) a (19.2.7)). Na druhé straně užitím unitarity operátoru U a inkluze $U\,\overline{\Phi_m(f)} \subset \overline{\Phi_{m'}(f)}\,U$, kterou obdržíme derivováním rovnosti (12), dostaneme

$$\|\Phi_m(f)\,\Omega_0\|_F^2 = \|U\Phi_m(f)\,\Omega_0\|_F^2 = \|\Phi_{m'}(f)\,U\,\Omega_0\|_F^2 = |\gamma|^2\,\|\Phi_{m'}(f)\,\Omega_0\|_F^2 = = \frac{|\gamma|^2}{2}\int\frac{|f(\boldsymbol{p})|^2}{\sqrt{(m')^2+\boldsymbol{p}^2}}\,d\boldsymbol{p}\,;$$

získané výrazy se evidentně nemohou rovnat pro všechna $f \in \mathscr{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^3)$. ■

Zvolme dále ortonormální bázi $\{\varphi_j\} \subset L^2(\mathbb{R}^3)$, která leží v $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^3)$; takovou bázi lze snadno sestrojit např. pomocí Hermiteových funkcí. Pro každé $m > 0$ dostáváme posloupnost dvojic jednoparametrických (silně spojitých) grup unitárních operátorů

$$U_j^{(m)}(t) := W_m(t\varphi_j)\,, \qquad V_j^{(m)}(t) := W_m(\mathrm{i}t\varphi_j)\,, \tag{16}$$

které splňují vztahy (10), jinými slovy, máme různé reprezentace těchto relací.

19.3.5 Důsledek: Reprezentace $\{U_j^{(m)}(t),\ V_j^{(m)}(t)\colon j = 1, 2, \dots\}$ jsou při $m \neq m'$ neekvivalentní, tj. neexistuje invertibilní omezený operátor U takový, že

$$U\,U_j^{(m)}(t)\,U^{-1} = U_j^{(m')}(t)\,, \qquad U\,V_j^{(m)}(t)\,U^{-1} = V_j^{(m')}(t) \tag{17}$$

pro všechna $j = 1, 2, \dots$.

Důkaz: Pro určitost předpokládejme třeba $m' > m$, a nechť operátor U splňující podmínky (17) existuje. Z definice (16) a vztahů (8) a (17) vyplývá rovnost $UW_m(f) = W_{m'}(f)U$, kde f je libovolná lineární kombinace vektorů báze $\{\varphi_j\}$. Takováto množina je však hustá v $L^2(\mathbb{R}^3)$, a proto z ní lze pro každé $f \in \mathscr{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^3)$ vybrat posloupnost $\{h_n\}$, která konverguje k $\mu(m')\,f \in \mathscr{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^3)$. Potom bude posloupnost $\{f_n\}$, $f_n := \mu(m')^{-1}\,h_n$ konvergovat k funkci f a posloupnost $\{\mu(m)\,f_n\}$ k funkci $\mu(m)\,f$; kromě toho jsou limity posloupností $\{\mu(m')^{-1}f_n\}$ a $\{\mu(m)^{-1}f_n\}$ v důsledku omezenosti operátorů $\mu(m)^{-1}$ a $\mu(m')^{-1}$ rovny $\mu(m')^{-1}f$ a $\mu(m)^{-1}f$. Podle věty 19.3.3 je zobrazení $f \mapsto W(f)$ spojité, proto pro každé $f \in \mathscr{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^3)$ platí

$$W_{\tilde m}(f_n) \equiv W\left(\frac{1}{\mu(\tilde m)}f_n\right) \to W\left(\frac{1}{\mu(\tilde m)}f\right) \equiv W_{\tilde m}(f)$$

a

$$W_{\tilde m}(\mathrm{i}f_n) \equiv W(\mathrm{i}\mu(\tilde m)\,f_n) \to W(\mathrm{i}\mu(\tilde m)\,f) \equiv W_{\tilde m}(\mathrm{i}f)\,,$$

kde $\tilde m = m, m'$. Z těchto vztahů a omezenosti operátoru U vyplývá, že rovnost $UW_m(g_n) = W_{m'}(g_n)U$, jež platí pro $g_n = f_n, \mathrm{i}f_n$ lze rozšířit na všechny funkce $f, \mathrm{i}f$, kde $f \in \mathscr{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^3)$; to však odporuje předcházející větě. ■

584 Operátory $\Phi_m(f)$ definované vztahem (11) odpovídají fyzikálně významnému případu volného pole relativistických částic s nulovým spinem. Kvantovou mechanikou relativistických částic jsme se nezabývali; omezíme se proto na několik poznámek a pro bližší poučení odkazujeme čtenáře k literatuře uvedené v komentáři. Nejsnáze lze takové částice popsat v impulsové reprezentaci. Stavový prostor částice o hmotnosti $m > 0$ je $\mathscr{H}_m = L^2(\mathbb{R}^3, d\omega_m)$, kde míra ω_m je definována vztahem

$$\omega_m(M) = \int_M \frac{d\boldsymbol{p}}{\sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}^2}}\,.$$

Operátory násobení nezávisle proměnnými na $\mathscr{H}_m$ mají význam složek impulsu a volný hamiltonián pro danou částici má tvar H_0: $(H_0 f)(\boldsymbol{p}) = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}^2}\, f(\boldsymbol{p})$ pro f z přirozeného definičního oboru.

Vyjádření vlnové funkce pomocí prostoročasových proměnných $x = (t, \boldsymbol{x})$ je poněkud složitější s ohledem na relativistický vztah mezi energií a impulsem. Pro libovolné $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ definujeme

$$\tilde{f}(p_0, \boldsymbol{p}) := (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^4} e^{i(p_0 t - \boldsymbol{p}\boldsymbol{x})} f(x)\, dx \tag{18a}$$

a této funkci dále přiřadíme $E_m f \in L^2(\mathbb{R}^3, d\omega_m)$ vztahem

$$(E_m f)(\boldsymbol{p}) := \tilde{f}(\sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}^2}, \boldsymbol{p})\,. \tag{18b}$$

Dále definujeme

$$\Phi^{(m)}(f) := \Phi_S(E_m \operatorname{Re} f) + i\Phi_S(E_m \operatorname{Im} f)\,, \tag{18c}$$

kde Φ_S je Segalův polní operátor na $\mathscr{F}_S(\mathscr{H}_m)$. Zobrazení $f \mapsto \Phi^{(m)}(f)$ nazýváme **volným skalárním hermitovským polem hmotnosti** m. Pozoruhodnou vlastností pole $\Phi^{(m)}(.)$ je, že pro každé $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathscr{D}_S$ je zobrazení z_{ψ_1,ψ_2}: $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4) \to \mathbb{C}$ definované vztahem $z_{\psi_1,\psi_2}(f) := (\Psi_1, \Phi^{(m)}(f)\, \Psi_2)$ temperovaná distribuce ([[RS 2]], § X.7); z tohoto důvodu mluvíme o kvantových polích jako o *operátorových distribucích.*

19.3.6 Poznámka: Definice (18) se obvykle rozšiřují i na zobecněné funkce tvaru f_g: $f_g(x) = g(\boldsymbol{x})\, \delta(t)$, kde $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, pro které lze odvodit vztah $E_m f_g = \hat{g}$. Pro takovéto funkce tedy platí

$$\Phi^{(m)}(f_g) = \Phi_S(\widehat{\operatorname{Re} g}) + i\, \Phi_S(\widehat{\operatorname{Im} g})\,; \tag{19}$$

zobrazení $g \mapsto \Phi^{(m)}(f_g)$ se fyzikálně interpretuje jako *pole v okamžiku* $t = 0$. Operátory $\Phi^{(m)}(f_g)$ souvisí s operátory definovanými vztahem (11) následujícím způsobem. Unitární operátor T_m: $\mathscr{H}_m \to L^2(\mathbb{R}^3)$ definovaný vztahem $(T_m g)(\boldsymbol{p}) =$

$= (m^2 + \boldsymbol{p}^2)^{-1/4}\, g(\boldsymbol{p})$ zobrazuje podprostor $\mathcal{S}_C(\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{H}_m$ na $\mathcal{S}_C(\mathbb{R}^3) \subset L^2(\mathbb{R}^3)$. Podle cvičení 15 je potom Segalův operátor $\Phi_S(\hat{g})$ na prostoru $\mathcal{F}_S(\mathcal{H}_m)$ unitárně ekvivalentní operátoru $\Phi(T_m g)$ na $\mathcal{F}_S(L^2(\mathbb{R}^3))$, a ten je podle definice (11) pro $\hat{g} \in \mathcal{S}_C(\mathbb{R}^3)$ roven $\Phi_m(\hat{g})$.

Kvantová pole nejsou jedinou oblastí, v níž se formalismu druhého kvantování užívá. Uvedeme ještě jeden příklad, tentokrát z oblasti statistické fyziky.

19.3.7 Příklad: Systému velkého počtu identických částic (fermionů, bozonů), jež spolu vzájemně neinteragují a jsou uzavřeny v nějaké oblasti $M \subset \mathbb{R}^3$, říkáme **ideální** (Fermiho, resp. Boseho) **plyn**. Jednočásticovým stavovým prostorem může být např. $L^2(M; \mathbb{C}^{2s+1})$ a roli jednočásticového operátoru pak zpravidla hraje operátor $H = \tilde{H} \otimes I_s$, kde $\tilde{H}$ je nějaké samosdružené rozšíření symetrického operátoru H_0: $H_0\psi = -\Delta\psi$ s definičním oborem $D(H_0) = C_0^\infty(M)$ a I_s je jednotkový operátor na $\mathbb{C}^{2s+1}$. Počet částic se v takovémto případě zachovává, proto bychom vystačili s podprostorem $\mathcal{H}_P^{(n)}$ v $\mathcal{F}_P(\mathcal{H})$ pro nějaké pevně zvolené velké číslo n (typická hodnota je $n \approx 10^{23}$), je však pohodlnější pracovat ve Fockově prostoru.

Za algebru pozorovatelných bereme v antisymetrickém případě C*-algebru $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{F}_A(\mathcal{H}))$ generovanou kreačními a anihilačními operátory pro všechna $f \in \mathcal{H}$. V symetrickém případě, kdy jsou operátory $a^\#(f)$ neomezené, definujeme $\mathcal{A}$ jako C*-algebru generovanou odpovídajícími Weylovými operátory (viz vztah (1b)). Mezi stavy na algebře $\mathcal{A}$ zaujímají význačné místo *Gibbsovy stavy*

$$\omega\colon\ \omega(A) = \frac{\operatorname{Tr}(e^{-\beta K}A)}{\operatorname{Tr}(e^{-\beta K})}, \tag{20}$$

kde $K = \overline{\mathcal{T}_P^\Sigma(H)}$, jež popisují plyn v termodynamické rovnováze při inverzní teplotě β.

Mezi symetrickým a antisymetrickým případem je důležitý fyzikální rozdíl. Abychom jej mohli vysvětlit, předpokládejme, že jednočásticový hamiltonián H má čistě diskrétní spektrum (viz komentář) tvořené vlastními hodnotami $E_1 \leqq$ $\leqq E_2 \leqq \dots$ (s opakováním podle násobnosti) odpovídajícími vlastním vektorům $\varphi_1, \varphi_2, \dots$. Snadno se přesvědčíme, že v odpovídající bázi obsazovacích čísel jsou $\Phi_n^P\{n_i\}$ vlastními vektory operátoru $\overline{\mathcal{T}_P^\Sigma(H)}$ odpovídajícími vlastním hodnotám

$$E \equiv E\{n_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} n_i E_i\,. \tag{21}$$

Energeticky nejnižší stav, v němž může existovat ideální Fermiho plyn sestávající z n částic, tedy odpovídá vektoru $\Phi_n^A\{1, \dots, 1, 0, \dots\}$; každý z n nejnižších stavů hamiltoniánu je obsazen jedinou částicí. V ideálním Boseho plynu naproti tomu může být jednočásticový základní stav φ_1 obsazen větším počtem částic nebo dokonce všemi; energeticky nejnižším stavem je zde $\Phi_n^S(n, 0, \ldots)$. Tomuto jevu se říká *Boseova-Einsteinova kondenzace.*

Formalismus druhého kvantování se tedy hodí pro popis soustav libovolného počtu neinteragujcích částic. Často se jej užívá i v případech, kdy částice spolu interagují. To ovšem vyžaduje vyšetřit, zda má takový popis v konkrétní situaci smysl, což se často opomíjí.

Komentář

§ **19.1.** Zavedení Fockova prostoru má dvojí motivaci. Jednak umožňuje popisovat situace, kdy se počet částic mění v průběhu časového vývoje, což je typické pro procesy studované v kvantové teorii polí, dále se hodí při popisu velkých systémů, jakými se obvykle zabýváme ve statistické fyzice. V tomto případě se sice počet částic zachovává, ale je technicky nemožné jej určit, proto je pohodlnější pracovat v rámci Fockova prostoru. Příklady obou zmíněných situací uvedeme v § 19.3. Prostorům (2) se často říká *Boseův-Fockův,* resp. *Fermiho-Fockův prostor.*

• Základy metody druhého kvantování byly zformulovány v práci [Fo 1] a jejich výklad na formální úrovni lze najít ve většině učebnic kvantové teorie polí – viz např. ⟦Schwe⟧, část II; ⟦BŠ⟧, kap. II apod.; o rigorózní podobě metody druhého kvantování poučit z řady zdrojů, např. ⟦Ber⟧; ⟦BR 2⟧, § 5.2; ⟦GJ⟧, kap. 6; ⟦RS 2⟧, § X.7; ⟦Šv⟧, kap. 3 a 6.

§ **19.2.** Operátory $a^{\#}(f)$ jsou užitečným prostředkem pro vyjadřování jiných operátorů na $\mathscr{F}_P(\mathscr{H})$. Jednoduchým příkladem je vyjádření operátoru počtu částic – viz cvičení 10. Pro druhé kvantování $\mathscr{T}_P^{\Sigma}(T)$ jednočásticového operátoru T a ortonormální bázi $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ v $\mathscr{H}$ lze podobně odvodit formální vyjádření $\mathscr{T}_P^{\Sigma}(T) = \sum_{j,k}(\varphi_j, T\varphi_k)\, a^*(\varphi_j)\, a(\varphi_k)$. Smysl této řady závisí na tom, jaký je operátor T; užíváme-li však uvedené formule k výpočtu maticových elementů operátoru $\mathscr{T}_P^{\Sigma}(T)$ v bázi $\mathscr{E}_P$ odpovídající $\{\varphi_j\}$, redukuje se řada na konečný součet a žádné problémy nevznikají. Uvedené vyjádření je zvláště názorné, má-li T čistě bodové spektrum a $\{\varphi_j\}$ je báze jeho vlastních vektorů.

§ **19.3.** O vlastnostech operátorových distribucí se čtenář může poučit např. v ⟦BLT⟧, § 3.1; ⟦SW⟧, § 3-1; ⟦Ber⟧, § I.1; ⟦Si 2⟧, § II.1.

• Stejně jako v případě konečného počtu stupňů volnosti lze pomocí Weylova operátoru zavést koherentní stavy na $\mathscr{F}_S(\mathscr{H})$ (⟦Da 1⟧, kap. 8).

• Rovnost (8) lze dokázat např. přímým výpočtem pomocí mocninných řad na množině analytických vektorů $\mathscr{D}_S$; tento způsob je uveden v ⟦RS 2⟧, § X.7. Alternativní důkaz lze najít v ⟦BR 2⟧, § 5.2. Na týchž místech je uveden důkaz silné spojitosti zobrazení $W(.)$, který je založen na výsledku cvičení 14 a skutečnosti, že $\mathscr{D}_S$ je oblast podstatné samosdruženosti operátorů $\Phi_S(f)$.

• V příkladu 7 jsme nespecifikovali oblast M. Ve statistické fyzice se nejčastěji vychází z předpokladu, že M je omezená, a poté se vyšetřuje chování výsledků při jejím zvětšování; o tomto přechodu se mluví jako o *termodynamické limitě.* Omezenost M znamená, že jednočásticové hamiltoniány typu zmíněného v příkladu (násobek Laplaceova operátoru, jehož samosdružené rozšíření je určeno vhodnými hraničními podmínkami) mají čistě diskrétní spektrum; toto tvrzení lze snadno ověřit pro oblasti tvaru kvádru (viz tvrzení 10.8.5 a cvičení 15.4), platí však obecněji. Povšimněme si, že diskrétní charakter spektra je podstatný např. pro to, aby stavy (20) měly smysl. Podrobnější informace o ideálních plynech lze najít ve většině učebnic kvantové statistické mechaniky; obsáhlý a matematicky korektní výklad je uveden v ⟦BR 2⟧, § 5.3, viz též ⟦Ja⟧, kap. 15.

Cvičení

1. Fockův prostor $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ je separabilní právě tehdy, když $\mathscr{H}$ je separabilní.

2. Dokažte tvrzení 19.1.3 pro operátor $\mathscr{T}^{\Pi}(T)$.

3. Dokažte následující tvrzení:
(a) Nechť T je lineární operátor na prostoru $\mathscr{H}$, který lze uzavřít. Jestliže projektor E redukuje operátor T, redukuje také $\overline{T}$.
(b) Nechť projektor E redukuje v podstatě samosdružený operátor A; potom operátor $A \upharpoonright E\mathscr{H}$ je rovněž v podstatě samosdružený.
(c) Nechť projektor E redukuje unitární operátor U; potom operátor $U \upharpoonright E\mathscr{H}$ je rovněž unitární.

4. Nechť A je samosdružený operátor. Mezi jeho spektrem a spektrem operátoru $\overline{\mathscr{T}^{\Sigma}(A)}$ platí vztah $\sigma(\overline{\mathscr{T}^{\Sigma}(A)}) \supset \bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma(\overline{A_n^{\Sigma}}) \supset \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{\Sigma}(\sigma(A) \times \ldots \times \sigma(A))$, kde $P_{\Sigma}(t_1, \ldots, t_n) := t_1 + \ldots + t_n$.
Návod: Užijte důsledku 7.3.6 a vztahu (10.8.8).

5. Dokažte vztah (19.2.1b).
Návod: n_1 čísel i_1 lze rozestavit po n místech $\binom{n}{n_1}$ způsoby atd.

6. Dokažte vztahy (19.2.8) a (19.2.9).
Návod: Ověřte vztahy pro kreační operátory, potom užijte rovností (19.2.12).

7. Dokažte vztahy (19.2.10).
Návod: Nejprve ověřte platnost vztahů pro $\Psi \in \mathscr{D}_{\mathrm{P}}^{(n)}$.

8. Uvažujte zobrazení $F_n\colon \mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, kde $\mathbb{N}$ je množina přirozených čísel. Dokažte, že platí

$$\sum_{p \in \mathscr{S}_n} \nu_p^{\mathrm{P}} F_n(j_{p_1}, \ldots, j_{p_n}) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{k-1}^{\mathrm{P}} \sum_{r \in \mathscr{S}_{n-1}^{(k)}} \nu_r^{\mathrm{P}} F_n(j_k, j_{r_1}, \ldots, j_{r_{k-1}}, j_{r_{k+1}}, \ldots, j_{r_n}),$$

kde δ_j^{P} má stejný význam jako v (19.2.6b) a $\mathscr{S}_{n-1}^{(k)}$ je množina permutací čísel $(1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$.

9. Dokažte vztah

$$(a^*(f_1)\dots a^*(f_n)\,a(g_1)\dots a(g_m))^* \upharpoonright \mathscr{D}_P = a^*(g_m)\dots a^*(g_1)\,a(f_n)\dots a(f_1)$$

a obdobný vztah se záměnou kreačních a anihilačních operátorů.

10. Nechť $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ je ortonormální báze v $\mathscr{H}$. Dokažte, že pro libovolný vektor $\Psi \in \mathscr{D}_P$ lze působení operátoru počtu částic vyjádřit vztahem

$$\mathscr{N}_P \Psi = \sum_{j=1}^{\infty} a^*(\varphi_j)\,a(\varphi_j)\,\Psi,$$

kde řada konverguje ve smyslu normy v $\mathscr{F}_P(\mathscr{H})$.
Návod: Dokažte platnost vztahu pro $\Psi \in \mathscr{D}_P^{(n)}$ indukcí podle n.

11. Dokažte, že v symetrickém případě platí pro $\Psi \in \mathscr{D}$ nerovnosti $\|a^*(f)\Psi\|_F \leqq \|f\|\,\|(\mathscr{N}_S + 1)^{1/2}\,\Psi\|_F$ a $\|a(f)\,\Psi\|_F \leqq \|f\|\,\|\mathscr{N}_S^{1/2}\,\Psi\|_F$.
Návod: Odvoďte vztah

$$\frac{1}{n!}\Big\|\sum_{j\in\mathscr{S}_n} f_{j_1}\otimes f_{j_2}\otimes\dots\otimes f_{j_{k\ 1}}\otimes f\otimes f_{j_{k+1}}\otimes\dots\otimes f_{j_n}\Big\| = \|f\|\,\|S_n(f_1\otimes\dots\otimes f_n\|\,.$$

12. Dokažte tvrzení vyjadřované vztahem (19.3.21).

13. Nechť posloupnost $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathscr{H}$ konverguje k $f \in \mathscr{H}$; potom pro polní operátory (19.3.1a) a libovolný vektor $\Psi \in D_S$ platí $\Phi_S(f_j)\Psi \to \Phi_S(f)\Psi$.
Návod: Užijte výsledku cvičení 11.

14. Nechť U je unitární operátor na jednočásticovém prostoru $\mathscr{H}$. Dokažte, že pro Segalův polní operátor platí

$$\overline{\mathscr{T}_S^{\Pi}(U)}\;\Phi_S(f)\;\overline{\mathscr{T}_S^{\Pi}(U)}^{-1} = \Phi_S(Uf)\,.$$

15. Je-li $V\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$, definujeme $\overline{\mathscr{T}^{\Pi}(V)}\colon \mathscr{F}(\mathscr{H}) \to \mathscr{F}(\mathscr{H}')$ pomocí vztahu $\mathscr{T}_S^{\Pi}(V)\,\psi_n(f_1,\dots,f_n) = S_n\,\psi_n(Vf_1,\dots,Vf_n)$. Dokažte, že $\mathscr{T}_S^{\Pi}(V)$ je izometrie a jsou-li $\Phi_S(f)$, resp. $\Phi_S'(f')$ Segalovy polní operátory na prostoru $\mathscr{F}_S(\mathscr{H})$, resp. $\mathscr{F}_S(\mathscr{H}')$, pak platí

$$\overline{\mathscr{T}_S^{\Pi}(V)}\;\Phi_S(f)\;\overline{\mathscr{T}_S^{\Pi}(V)}^{-1} = \Phi_S'(Vf)\,.$$

16. Dokažte vztah (19.3.4) a pozitivitu operátorů $N(f)$.

17. Ukažte, že platí-li vztah (19.3.12) pro nějaké $U \neq 0$, pak existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že αU je unitární.
Návod: Dokažte, že U^*U, resp. UU^* komutuje s W_m, resp. $W_{m'}$ a užijte lemmatu 19.3.2.

20.1 ZÁKLADNÍ POJMY

S úlohou o rozptylu určitých objektů (částic, vln) na překážce (terči) se setkáváme v řadě oblastí fyziky. Pro mikrofyziku je mimořádně důležitá, protože záměrně připravené srážky částic (jader, atomů apod.) představují jeden z mála účinných postupů, jimiž lze studovat jejich vlastnosti a strukturu.

Úvodem připomeňme několik fyzikálních pojmů souvisejících s rozptylem. Výchozím objektem při rozptylových experimentech je svazek částic připravený vhodným urychlovačem. Svazek buď necháme dopadat na pevný terč obsahující částice, na nichž chceme rozptyl provádět, nebo jej zkřížíme se svazkem těchto částic pod úhlem blízkým k 180° (tomu se říká *experiment se vstřícnými svazky*). Rozptyl je možno studovat i v soustavě více než dvou částic; příkladem je rozptyl elektronů na jádrech, jader na jádrech apod. O rozptylu říkáme, že je *pružný*, pokud počet částic, jejich druhy a seskupení do vázaných celků a celková kinetická energie jsou před srážkou stejné jako po ní; v opačném případě mluvíme o *nepružném rozptylu*. Tyto procesy se vzájemně nevylučují; mezi daným projektilem a terčem může většinou docházet jak k pružným, tak i k různým druhům nepružných srážek. Popisujeme-li tyto procesy současně, mluvíme obvykle o *mnohokanálovém rozptylu*.

Obraťme se nyní k základním představám teorie rozptylu. Seznámíme se s nimi nejprve pro nejjednodušší případ rozptylu dvou bezspinových částic interagujících prostřednictvím potenciálu V. Po separaci těžišťového pohybu (viz § 18.5) dostáváme jednočásticový systém se stavovým Hilbertovým prostorem $L^2(\mathbb{R}^3)$. Dynamika je určena totálním hamiltoniánem H, který je roven uzávěru operátoru $H_0 + V$, přičemž H_0 je volný hamiltonián z příkladu 15.5.10; předpokládáme tedy, že operátor $H_0 + V$ je v podstatě samosdružený.

Při rozptylovém experimentu je v počáteční a koncové fázi projektil daleko od terče. V relativních souřadnicích je tudíž částice lokalizována daleko od počátku. Předpokládáme-li, že experiment začíná v čase $t \approx -\infty$ a končí v čase $t \approx +\infty$, můžeme také říci, že pravděpodobnost nalezení částice uvnitř koule $B_r := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leqq r\}$ o libovolném poloměru r vymizí při $t \to \pm\infty$. Je-li ψ stav částice v čase $t = 0$, je zmíněná pravděpodobnost rovna $\|F_r U(t)\psi\|^2$, kde $U(t) := e^{-iHt}$ a F_r je projekční operátor násobení funkcí χ_{B_r}. Každý stav ψ s touto vlastností nazveme **rozptylovým stavem** uvažovaného systému. Pro každé

 $A \in \mathscr{L}_{sa}(L^2(\mathbb{R}^3))$ definujeme množinu

$$M_s(A) := \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^3) : \lim_{t\to\pm\infty} F_r e^{-iAt}\psi = 0 \text{ pro všechna } r > 0\} ; \qquad (1)$$

rozptylovými stavy totálního, resp. volného hamiltoniánu pak rozumíme prvky množiny $M_s(H)$, resp. $M_s(H_0)$.

20.1.1 Příklady: (a) Je-li ψ vlastní vektor hamiltoniánu H, je $\psi \notin M_s(H)$, neboť veličina $\|F_r U(t)\psi\| = \|F_r\psi\|$ nezávisí na t, a $\lim_{r\to\infty} \|F_r\psi\| = \|\psi\|$; obecně je tedy $M_s(H) \neq \mathscr{H}$.

(b) Ukážeme, že $M_s(H_0) = L^2(\mathbb{R}^3)$. Skutečně, akce propagátoru $U_0(t) := e^{-iH_0 t}$ na vektor $\psi \in M \equiv L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3)$ je dána formulí (17.3.2b), z níž pro všechna $x \in \mathbb{R}^3$ a $t \neq 0$ plyne $|(U_0(t)\psi)(x)| \leqq (4\pi t)^{-3/2} \|\varphi\|_1$. Odtud pro každé $r > 0$ dostáváme $\|F_r U_0(t)\varphi\| \leqq (4\pi t)^{-3/2} \|\varphi\|_1 (\frac{4}{3}\pi r^3)^{1/2}$, takže $\lim_{|t|\to\infty} F_r U_0(t)\varphi = 0$ pro všechna $\varphi \in M$. Jelikož M je totální v $L^2(\mathbb{R}^3)$ a $\|F_r U_0(t)\| \leqq 1$ pro všechna $r > 0$ a $t \in \mathbb{R}$, je $\lim_{|t|\to\infty} F_r U_0(t)\psi = 0$ pro všechna $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ (viz cvičení 1). *Každý stav volné bezspinové částice je tedy rozptylový.*

20.1.2 Tvrzení: Pro každé $A \in \mathscr{L}_{sa}(L^2(\mathbb{R}^3))$ je množina $M_s(A)$ uzavřený podprostor, který je invariantní vůči operátorům $U_A(t) \equiv e^{-itA}$, $t \in \mathbb{R}$.

Důkaz: Z formule (1) je zřejmé, že $M_s(A)$ je podprostor a že $U_A(t)\psi \in M_s(A)$ pro každé $\psi \in M_s(A)$ a $t \in \mathbb{R}$. Nechť $\varphi \in \overline{M_s(A)}$ a posloupnost $\{\psi_n\} \subset M_s(A)$ konverguje k ψ. K libovolnému $\varepsilon > 0$ najdeme n_ε tak, aby $\|\psi - \psi_{n_\varepsilon}\| < \varepsilon$, a dále čísla $t_\pm \in \mathbb{R}$ taková, že $\|F_r U(t)\psi_{n_\varepsilon}\| < \varepsilon$ pro všechna $t > t_+$, resp. $t < t_-$. Díky tomu, že $\|F_r U(t)\| \leqq 1$, pro všechna $r > 0$ a $t > t_+$, resp. $t < t_-$ platí rovnost $\|F_r U(t)\psi\| \leqq \|F_r U(t)\psi_{n_\varepsilon}\| + \|\psi - \psi_{n_\varepsilon}\| < 2\varepsilon$, z níž plyne, že $\psi \in M_s(A)$. ■

Invariance množiny rozptylových stavů vůči příslušnému propagátoru je vlastnost vyjadřující *homogenitu času*: množina rozptylových stavů nezávisí na okamžiku, v němž se rozhodneme rozptylový experiment provádět.

Pomocí rozptylových stavů se formuluje základní představa, na níž je teorie rozptylu založena, tzv. *asymptotická podmínka*: je-li $\psi \in M_s(H)$, potom pro $t \to \pm\infty$ se částice ve stavu $U(t)\psi$ chová jako volná, tj. existují rozptylové stavy $\psi_\pm$ volného hamiltoniánu takové, že $U(t)\psi \approx U_0(t)\psi_\pm$ pro $t \to \pm\infty$ v následujícím smyslu

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|U(t)\psi - U_0(t)\psi_\pm\| = 0 ; \qquad (2a)$$

díky unitaritě propagátorů existuje ekvivalentní vyjádření ve tvaru

$$\psi_\pm = \lim_{t\to\pm\infty} U_0(t)^* U(t)\psi , \quad \text{resp. } \psi = \lim_{t\to\pm\infty} U(t)^* U_0(t)\psi_\pm . \qquad (2b)$$

Asymptotická podmínka nepředpokládá existenci $\lim_{t\to\pm\infty} U(t)\psi$ a $\lim_{t\to\pm\infty} U_0(t)\psi_\pm$. To by byl příliš silný požadavek, který by nevedl k rozumné teorii. Snadno totiž ověříme, že pokud existuje druhá z uvedených limit, je rovna nule (viz příklad 15.5.10 a cvičení 2).

Z definice rozptylových stavů je intuitivně jasné, že asymptotická podmínka je splněna, pokud potenciál dostatečně rychle klesá k nule pro $|\boldsymbol{x}| \to \infty$, neboť částice ve stavu $U(t)\psi$ je pro $|t| \to \infty$ lokalizována vně oblasti, v níž se projevuje interakce.

Vztahy (2) určují injektivní zobrazení $\psi \to \psi_\pm$ s definičním oborem $M_s(H)$. Použití volného hamiltoniánu k popisu počáteční a koncové fáze rozptylového procesu vyžaduje doplnit asymptotickou podmínku požadavkem, aby oborem hodnot těchto zobrazení byl celý prostor $M_s(H_0)$, což v uvažovaném případě je celý stavový prostor $L^2(\mathbb{R}^3)$. Požadujeme tedy existenci operátorů

$$\Omega_\pm := \operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} U(t)^* U_0(t) \tag{3a}$$

takových, že[1])

$$\operatorname{Ran} \Omega_\pm \subset M_s(H)\,. \tag{3b}$$

Současně se ukazuje, že teorie se může obejít bez požadavku platnosti asymptotické podmínky pro všechna $\psi \in M_s(H)$, tj. obecně $\operatorname{Ran}\Omega_\pm \neq M_s(H)$. Jestliže však $\psi \in \operatorname{Ran}\Omega_-$, tj. (2a) platí pro $t \to -\infty$, musí tato podmínka platit i pro $t \to +\infty$, tj. musí být

$$\operatorname{Ran}\Omega_- \subset \operatorname{Ran}\Omega_+\,. \tag{3c}$$

Tato asymetrie ve vlastnostech operátorů Ω_- a Ω_+ vyplývá z následujícího modelu rozptylového procesu. Počáteční fázi (v čase $t \to -\infty$) odpovídá přiřazení

$$\psi_- \mapsto \psi := \Omega_-\psi_- \in M_s(H)\,, \tag{4a}$$

kde ψ_- je rozptylový stav volného hamiltoniánu v čase $t = 0$; tento stav vznikl časovým vývojem určeným volným propagátorem $U_0(t)$ ze stavu, v němž byla částice připravena v daleké minulosti. Přitom ψ je podle asymptotické podmínky stav systému v čase $t = 0$, který se ze zmíněného stavu připraveného v daleké minulosti vyvinul prostřednictvím $U(t)$. V konečné fázi (pro $t \to +\infty$) platí ve smyslu vztahu (2a) $U(t)\psi \approx U_0(t)\psi_+$ pro nějaké $\psi_+ \in M_s(H_0)$. Díky podmínce (3c) a injektivitě existuje právě jeden takový stav, přičemž

$$\psi = \Omega_+\psi_+\,. \tag{4b}$$

Rozptylový experiment pak spočívá v podstatě v tom, že pro daná ψ_- a $\varphi \in M_s(H_0)$ měříme pravděpodobnost přechodu ze stavu $U_0(t)\psi_+$ do $U_0(t)\varphi$

---

[1]) Jestliže operátor H splňuje některé dodatečné předpoklady, je tato inkluze důsledkem existence operátoru Ω_+ – viz cvičení 6.

592 pro $t \to +\infty$. Příslušnou amplitudu pravděpodobnosti $(U_0(t)\varphi, U_0(t)\psi_+) = (\varphi, \psi_+)$ můžeme vyjádřit pomocí výchozího stavu ψ_-, neboť z podmínek (3a, c) vyplývá existence operátoru S takového, že

$$\psi_+ = S\psi_- ; \tag{4c}$$

nazývá se **operátorem rozptylu** (S-maticí, S-operátorem). Zmíněná amplituda pravděpodobnosti má pak tvar $(\varphi, S\psi_-)$. V popsaném modelu je tedy rozptylový proces plně charakterizován operátorem S.

Základní pojmy a předpoklady teorie rozptylu jsme zatím formulovali pro speciální případ potenciálního rozptylu na prostoru $L^2(\mathbb{R}^3)$. V případě obecného rozptylového procesu charakterizovaného totálním a volným hamiltoniánem H a H_0 na stavovém Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ se užívá analogické formulace; je ovšem třeba specifikovat množiny $M_s(H)$ a $M_s(H_0)$ rozptylových stavů. To samozřejmě závisí na povaze uvažovaného kvantového systému. Definici (1) lze v mnoha případech převzít s tím, že množinu $\{F_r : r > 0\}$ nahradíme vhodnou množinou projektorů na prostoru $\mathscr{H}$. V každém případě se však požaduje, aby *množiny $M_s(H)$ a $M_s(H_0)$ byly uzavřené podprostory v $\mathscr{H}$ invariantní vůči příslušným propagátorům $U(t) = e^{-itH}$*, resp. $U_0(t) = e^{-itH_0}$ (srov. s tvrzením 2). Podmínku invariance vůči propagátorům lze vyjádřit pomocí příslušných projektorů, které označíme $E_s(H)$ resp. $E_s(H_0)$, ve tvaru

$$E_s(H)\,U(t) = U(t)\,E_s(H)\,, \text{ resp. } E_s(H_0)\,U_0(t) = U_0(t)\,E_s(H_0)\,,\ t \in \mathbb{R}\,. \tag{5}$$

Vzhledem k tomu, že obecně $M_s(H_0) \neq \mathscr{H}$, modifikuje se definice (3a) následovně:

$$\Omega_\pm := \operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} U(t)^*\,U_0(t)\,E_s(H_0)\,; \tag{6}$$

podmínky (3b, c) zůstávají přitom beze změny. Takto definované operátory se nazývají **vlnové operátory;** jsou určeny dvojicí hamiltoniánů H, H_0, proto se užívá též označení $\Omega_\pm(H, H_0)$, v němž pořadí argumentů je podstatné. Dříve než odvodíme jejich základní vlastnosti, zmíníme se o speciálním případu, kdy $\operatorname{Ran} \Omega_- = M_s(H)$, což ve výše popsaném modelu rozptylového procesu vyjadřuje tu okolnost, že *každý* rozptylový stav totálního hamiltoniánu je v daleké minulosti totožný s nějakým rozptylovým stavem volného hamiltoniánu. Z inkluzí (3b, c) pak plyne

$$\operatorname{Ran} \Omega_+ = \operatorname{Ran} \Omega_- = M_s(H)\,. \tag{7}$$

Tato rovnost vyjadřuje tzv. **podmínku úplnosti** vlnových operátorů.

20.1.3 Tvrzení: Vlnové operátory $\Omega_\pm \equiv \Omega_\pm(H, H_0)$ jsou parciální izometrie s počátečním podprostorem $M_s(H_0)$, které splňují následující vztahy

$$\Omega_\pm U_0(t) = U(t)\,\Omega_\pm\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,, \tag{8a}$$

$$\Omega_\pm H_0 \subset H\Omega_\pm\,. \tag{8b}$$

Důkaz: Podle (6) jsou $\Omega_\pm$ omezené operátory a $M_s(H_0)^\perp \subset \operatorname{Ker}\Omega_\pm$. Z podmínky $\Omega_+\varphi = 0$ pro každé $\varepsilon > 0$ a všechna dosti velká t plyne

$$\varepsilon > \|U(t)^*\,U_0(t)\,E_s(H_0)\,\varphi\| = \|E_s(H_0)\,\varphi\|\,,$$

takže $\Omega_+\varphi = 0 \Rightarrow E_s(H_0)\varphi = 0$. Je tedy $\operatorname{Ker}\Omega_\pm = M_s(H_0)^\perp$, tj. $M_s(H_0) = (\operatorname{Ker}\Omega_\pm)^\perp$. Nyní pro $\varphi \in M_s(H_0)$ vztah (6) spolu s unitaritou dá $\|\Omega_\pm\varphi\| = \lim_{t\to\pm\infty}\|U(t)^*\,U_0(t)\,E_s(H_0)\,\varphi\| = \|\varphi\|$; operátory $\Omega_\pm$ jsou tudíž parciální izometrie s počátečním podprostorem $M_s(H_0)$.

Pro každé $t \in \mathbb{R}$ lze (6) zapsat ve tvaru $\Omega_\pm = \text{s-}\lim_{u\to\pm\infty} U(t+u)^*\,U_0(t+u)\,E_s(H_0)$ pomocí (5) a vlastností propagátoru (viz (11.1.1a)) dostaneme rovnost $\Omega_\pm = U(t)^*\,\Omega_\pm\,U_0(t)$ a z ní na základě unitarity vztah (8a). K ověření (8b) stačí uvážit, že ze Stoneova teorému a omezenosti operátorů $\Omega_\pm$ plyne

$$\lim_{s\to 0}\Omega_\pm\,\frac{U_0(s)\,\varphi - \varphi}{s} = -\mathrm{i}\Omega_\pm H_0\varphi\,.$$

Podle (8a) pak existuje

$$\lim_{s\to 0}\frac{U(s) - I}{s}\,\Omega_\pm\varphi = -\mathrm{i}\Omega_\pm H_0\varphi\,;$$

opětovné užití Stoneova teorému dá $\Omega_\pm\varphi \in D(H)$ a $H\Omega_\pm\varphi = \Omega_\pm H_0\varphi$. ■

Toto tvrzení umožňuje vyjádřit operátor S pomocí vlnových operátorů. Protože však vztahy (4) definují tento operátor jen na podprostoru $M_s(H_0)$, musíme jej nejprve rozšířit na celé $\mathscr{H}$. Z hlediska teorie je nepodstatné, jak to uděláme, neboť důležitá je pouze jeho akce na volné rozptylové stavy. Z formálních důvodů je výhodné položit

$$S\psi := 0 \qquad \text{pro} \quad \psi \in M_s(H_0)^\perp\,.$$

Z tvrzení 3 a vztahů (4) pak vyplývají následující vlastnosti operátoru rozptylu.

20.1.4 Tvrzení: (a) $S = \Omega_+^*\Omega_-$;

(b) S je parciální izometrie s počátečním podprostorem $M_s(H_0)$, přičemž operátor $S \restriction M_s(H_0)$ je unitární právě tehdy, když $\operatorname{Ran}\Omega_+ = \operatorname{Ran}\Omega_-$;

(c) pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí $U_0(t)\,S = SU_0(t)$, tj. operátor S komutuje s volným hamiltoniánem.

Důkaz: (a) Ze vztahů (4a, b) a rovnosti $\Omega_+^*\Omega_+ = E_s(H_0)$ (viz důsledek 5.5.8) dostáváme $\psi_+ = \Omega_+^*\psi = \Omega_+^*\Omega_-\psi_-$; dokazovaná rovnost nyní plyne ze (4c).

594 (b) Podle důsledku 5.5.8 je $\Omega_+\Omega_+^*$ projektor na Ran Ω_+; z inkluze (3c) pak plyne Ker S = Ker $\Omega_- = M_s(H_0)^\perp$. Dále pro každé $\varphi \in M_s(H_0)$ je $\Omega_-\varphi \in$ Ran $\Omega_- \subset$ $\subset$ Ran Ω_+, a protože Ω_+^*, resp. Ω_- jsou parciální izometrie s počátečními podprostory Ran Ω_+, resp. $M_s(H_0)$, platí $\|S\varphi\| = \|\Omega_+^*(\Omega_-\varphi)\| = \|\Omega_-\varphi\| = \|\varphi\|$. Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby operátor $S \upharpoonright M_s(H_0)$ byl unitární, je rovnost Ran $S = M_s(H_0)$. Nyní

$$\text{Ran } S = \Omega_+^*(\text{Ran } \Omega_-)\,, \tag{8c}$$

a protože parciální izometrie Ω_+^* má počáteční podprostor Ran Ω_+ a koncový $M_s(H_0)$, platí implikace Ran Ω_- = Ran $\Omega_+ \Rightarrow$ Ran $S = M_s(H_0)$. Naopak, platí-li poslední rovnost, pak pro každé $\varphi \in$ Ran Ω_+ je $\Omega_+^*\varphi \in M_s(H_0)$ = Ran S, a z (8c) plyne existence $\eta \in$ Ran Ω_- takového, že $\Omega_+^*\varphi = \Omega_+^*\eta$. Je tedy $\varphi - \eta \in$ Ker $\Omega_+^* = (\text{Ran } \Omega_+)^\perp$ a současně podle (3c) platí $\varphi - \eta \in$ Ran Ω_+; proto $\varphi = \eta$, tj. Ran Ω_+ = Ran Ω_-. Konečně tvrzení (c) plyne z rovnosti (8a) a je ekvivalentní podmínce $SH_0 \subset H_0S$ (viz tvrzení 11.1.4). ■

Vrátíme se k vyšetřování vlastností rozptylových stavů, které jsme zahájili tvrzením 2. Uvažujme nejprve opět jednočásticový systém, jehož stavový Hilbertův prostor je $L^2(\mathbb{R}^3)$, a hledejme stavy, které jsou z hlediska prostorové lokalizace „opakem" rozptylových stavů. Vymezíme je požadavkem, aby pravděpodobnost nalezení částice vně koule B_r byla libovolně malá pro všechny časy, jakmile r je dosti velké. Hledané stavy jsou tedy právě všechny prvky množiny

$$M_b(H) := \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^3):\ \lim_{r\to\infty}\ \sup_{t\in\mathbb{R}} \|(I - F_r)\,e^{-iHt}\psi\|^2 = 0\}\,. \tag{9a}$$

Jestliže částice je ve stavu $\psi \in M_b(H)$, platí $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|F_r\,e^{-iHt}\psi\|^2/\|\psi\|^2 \geqq 1 - \varepsilon$ pro všechna $\varepsilon > 0$ a $r > r_\varepsilon$, tj. částice zůstává lokalizována uvnitř koule o dostatečně velkém poloměru pro všechny časy. Proto nazýváme prvky množiny $M_b(H)$ **vázanými stavy** částice.

20.1.5 Poznámky: (a) Z rovnosti $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|(I-F_r)\,e^{-iHt}\psi\|^2 = \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \|(I-F_r)\,e^{-iHt}\psi\|\right)^2$ plyne

$$M_b(H) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^3):\ \lim_{r\to\infty}\ \sup_{t\in\mathbb{R}} \|(I - F_r)\,e^{-iHt}\psi\| = 0\}\,. \tag{9b}$$

(b) Stejně jako v případě rozptylových stavů hodí se vztahy (9) i pro složitější systémy, zvolíme-li vhodnou množinu projektorů splňující nějakou analogii vztahu $\text{s-lim}_{r\to\infty} F_r = I$. Následující dvě věty platí i v těchto případech, protože se v důkazech neužívá specifických vlastností projektorů F_r.

20.1.6 Věta: Množiny rozptylových a vázaných stavů tvoří vzájemně ortogonální uzavřené podprostory v $\mathscr{H}$. Platí inkluze

$$M_b(H) \supset \mathscr{H}_p(H)\,, \tag{10a}$$

$$M_s(H) \subset \mathscr{H}_c(H)\,, \tag{10b}$$

kde jako obvykle $\mathscr{H}_p(H)$ znamená uzávěr lineárního obalu množiny vlastních vektorů operátoru H a $\mathscr{H}_c(H) = \mathscr{H}_p(H)^\perp = \mathscr{H}_{ac}(H) \oplus \mathscr{H}_{sc}(H)$.

Důkaz: To, že $M_b(H)$ je uzavřený podprostor, se s využitím vztahu (9b) dokáže zopakováním postupu z důkazu tvrzení 2. K ověření vztahu $M_b(H) \perp M_s(H)$ vezměme libovolná $\psi \in M_s(H)$ a $\varphi \in M_b(H)$; pomocí unitarity dostaneme pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a $r > 0$ následující odhad

$$\begin{aligned} |(\psi, \varphi)| &= |(U(t)\,\psi, U(t)\,\varphi)| = \\ &= |(F_r U(t)\,\psi, U(t)\,\varphi) + (U(t)\,\psi, (I - F_r)\,U(t)\,\varphi)| \leqq \\ &\leqq \|F_r U(t)\,\psi\|\,\|\varphi\| + \|\psi\| \sup_{t \in \mathbb{R}} \|(I - F_r)\,U(t)\,\varphi\|\,. \end{aligned}$$

Po limitním přechodu $t \to \pm\infty$ vymizí první člen na pravé straně a další limitní přechod $r \to \infty$ anuluje i druhý člen, takže $(\psi, \varphi) = 0$.

Jelikož každý vlastní vektor ψ operátoru H je též vlastním vektorem operátorů $U(t)$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$, je $\|(I - F_r)\,U(t)\,\psi\| = \|(I - F_r)\,\psi\|$, takže $\lim_{r\to\infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|(I - F_r)\,U(t)\,\psi\| = \lim_{r\to\infty} \|(I - F_r)\,\psi\| = 0$. Vektor ψ tedy patří do $M_b(H)$ a odtud v důsledku uzavřenosti $M_b(H)$ dostáváme inkluzi (10a). Z podmínky $M_s(H) \subset M_b(H)^\perp$ pak plyne

$$M_s(H) \subset M_b(H)^\perp \subset \mathscr{H}_p(H)^\perp = \mathscr{H}_c(H)\,, \tag{10c}$$

tj. inkluze (10b). ■

V příkladu 1b jsme ukázali, že pro volný hamiltonián na $L^2(\mathbb{R}^3)$ je $M_s(H_0) = L^2(\mathbb{R}^3)$, takže v inkluzích (10) platí rovnost. Uvedeme nyní jednu postačující podmínku pro to, aby tato situace nastávala v obecném případě.

20.1.7 Věta: Nechť $\mathscr{H}_c(H) = \mathscr{H}_{ac}(H)$, tj. $\sigma_{sc}(H) = \emptyset$[1]), a nechť operátor $F_r P_j$, kde $P_j := E_H((-j, j])$, je kompaktní pro všechna $r > 0$ a $j = 1, 2, \ldots$; potom

$$M_s(H) = \mathscr{H}_{ac}(H) \quad \text{a} \quad M_b(H) = \mathscr{H}_p(H)\,. \tag{11}$$

Důkaz: Podle věty 9.4.10d operátory $U(t)$ a P_j komutují pro všechna t a j; dále $\|F_r\| = 1$ a pomocí unitarity pro libovolné $\psi \in \mathscr{H}$ dostaneme $\|F_r U(t)\,\psi\| \leqq \|(I - P_j)\,\psi\| + \|F_r P_j U(t)\,\psi\|$. Nyní ze vztahu $\operatorname{s-lim}_{j\to\infty} P_j = I$ (viz (9.1.4a)) plyne $\|(I - P_j)\,\psi\| < \varepsilon$ pro každé $\varepsilon > 0$ a všechna dosti velká j. Jestliže speciálně $\psi \in \mathscr{H}_{ac}(H)$, pak díky kompaktnosti operátoru $F_r P_j$ z výsledku cvičení 2 dostáváme $\lim_{t\to\pm\infty} F_r P_j U(t)\,\psi = 0$. Pro každé $\varepsilon > 0$ tedy platí $\lim_{t\to\pm\infty} \|F_r U(t)\,\psi\| < \varepsilon$, a tudíž

[1]) Viz poznámku 10.4.12b.

$\psi \in M_s(H)$. Odtud $\mathscr{H}_{ac}(H) \subset M_s(H)$, což spolu s rovností $\mathscr{H}_{ac}(H) = \mathscr{H}_c(H)$ a inkluzí (10c) dá (11). ∎

Nyní tuto větu aplikujeme na hamiltonián $H = H_0 + V$ na $L^2(\mathbb{R}^3)$, kde $V \in (L^2 + L^\infty)(\mathbb{R}^3)$ – viz cvičení 15.9. Nejprve uvedeme pomocné tvrzení.

20.1.8 Lemma: Nechť $g \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$ a $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$.
(a) Jestliže $f \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, jsou operátory $f(\boldsymbol{Q})\,g(\boldsymbol{P})$ a $g(\boldsymbol{P})f(\boldsymbol{Q})$ Hilbertovy-Schmidtovy.
(b) Jestliže $\operatorname{Ran} g(\boldsymbol{P}) \subset D(f(\boldsymbol{Q}))$, je $f(\boldsymbol{Q})\,g(\boldsymbol{P})$ Hilbertův-Schmidtův operátor.

Důkaz: (a) Díky omezenosti funkcí f a g je operátor $f(\boldsymbol{Q})\,g(\boldsymbol{P})$ omezený, přičemž ze cvičení 15.20 vyplývá, že jde o integrální operátor s jádrem $K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := (2\pi)^{-3/2} f(\boldsymbol{x})\,(F_3 g)\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$. Jelikož f a $F_3 g$ jsou borelovské funkce na $\mathbb{R}^3$ a funkce h: $h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ je rovněž borelovská, je borelovské i jádro K, neboť je můžeme zapsat ve tvaru $K = (2\pi)^{-3/2} (f \times e)\,[(F_3 g) \circ h]$ – viz příklady 9.3.7, A.2.2 a větu A.2.3. Pomocí unitarity Fourierova-Plancherelova operátoru a Fubiniovy věty dostáváme

$$\int_{\mathbb{R}^6} |K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2 \, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{y} = (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} |f(\boldsymbol{x})|^2 \left[\int_{\mathbb{R}^3} (F_3 g)\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{y} \right] d\boldsymbol{x} =$$

$$= (2\pi)^{-3} \|f\|^2 \, \|g\|^2 < \infty \,. \tag{12}$$

Z věty 6.3.6 pak plyne, že tvrzení (a) platí pro operátor $f(\boldsymbol{Q})\,g(\boldsymbol{P})$. Platí zjevně i pro $\bar{f}(\boldsymbol{Q})\,\bar{g}(\boldsymbol{P})$, a protože v důsledku omezenosti funkcí f a g jsou $f(\boldsymbol{Q})$ a $g(\boldsymbol{P})$ omezené operátory splňující $f(\boldsymbol{Q})^* = \bar{f}(\boldsymbol{Q})$ a $g(\boldsymbol{P})^* = \bar{g}(\boldsymbol{P})$, je $g(\boldsymbol{P})\,f(\boldsymbol{Q}) = (\bar{f}(\boldsymbol{Q})\,\bar{g}(\boldsymbol{P}))^* \in \mathscr{J}_2$ – viz větu 6.3.2.
(b) Operátor $f(\boldsymbol{Q})\,g(\boldsymbol{P})$ je opět integrální a pro jeho jádro platí vztah (12). Dále z předpokladu $\operatorname{Ran} g(\boldsymbol{P}) \subset D(f(\boldsymbol{Q}))$ dostáváme $D(f(\boldsymbol{Q})\,g(\boldsymbol{P})) = L^2(\mathbb{R}^3)$; ze cvičení 5.5 pak plyne $f(\boldsymbol{Q})\,g(\boldsymbol{P}) \in \mathscr{J}_2$. ∎

20.1.9 Tvrzení: Nechť $H = H_0 + V(\boldsymbol{Q})$, kde $V = V_2 + V_\infty$, přičemž $V_2 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ a $V_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, a nechť $\sigma_{sc}(H) = \emptyset$. Potom platí rovnosti (11).
Důkaz: Ze cvičení 15.9 víme, že za uvedených předpokladů je $D(H) = D(H_0) \subset D(V(\boldsymbol{Q}))$; můžeme tedy užít druhé rezolventní formule (cvičení 3.33), jež dává

$$(H - \mathrm{i})^{-1} F_r =$$
$$= (H_0 - \mathrm{i})^{-1} F_r - (H - \mathrm{i})^{-1} V_2(\boldsymbol{Q})\,(H_0 - \mathrm{i})^{-1} F_r - (H - \mathrm{i})^{-1} V_\infty(\boldsymbol{Q})\,(H_0 - \mathrm{i})^{-1} F_r \,.$$

Pro funkce $\boldsymbol{x} \mapsto g(\boldsymbol{x}) := 1/(|\boldsymbol{x}|^2 - \mathrm{i})$ a $f = \chi_{B_r}$, resp. $f = V_2$, jsou splněny předpoklady (a), resp. (b) lemmatu 8, takže $(H_0 - \mathrm{i})^{-1} F_r$ a $V_2(\boldsymbol{Q})\,(H_0 - \mathrm{i})^{-1}$ jsou Hilbertovy-Schmidtovy operátory. Díky omezenosti operátorů $(H - \mathrm{i})^{-1}$, F_r a $V_\infty(\boldsymbol{Q})$ je Hilbertův-Schmidtův i operátor $(H - \mathrm{i})^{-1} F_r$, a tedy také $[(H - \mathrm{i})^{-1} F_r]^* = F_r (H + \mathrm{i})^{-1}$; tvrzení pak plyne ze cvičení 3. ∎

V uvedeném případě lze tedy ztotožnit vázané, resp. rozptylové stavy s paprsky v podprostorech $\mathscr{H}_{\mathrm{p}}(H)$, resp. $\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(H)$, jejichž ortogonálním součtem je celý stavový prostor $\mathscr{H}$.

20.1.10 Poznámka: Při důkazu tvrzení 9 hrál podstatnou roli předpoklad, že H má prázdné singulární spojité spektrum, který nám dovolil užít věty 7, resp. cvičení 3, jež je jejím důsledkem. Je-li $\sigma_{\mathrm{sc}}(H) \neq \emptyset$, pak mohou existovat stavy reprezentované vektory ortogonálními k oběma množinám $M_{\mathrm{b}}(H)$ a $M_{\mathrm{s}}(H)$. Tyto stavy leží v jistém smyslu „mezi" vázanými a rozptylovými stavy: pravděpodobnosti nalezení částice uvnitř omezených prostorových oblastí nemusí mít nulovou limitu při $t \to \pm\infty$, ale jejich střední hodnota je libovolně malá, bereme-li ji přes dostatečně dlouhý časový interval (viz komentář).

Rovnosti (11) lze dokázat i pro jiné rozptylové systémy. Platnost první z nich, tj.

$$M_{\mathrm{s}}(H) = \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(H)\,, \tag{13}$$

má pro další rozvoj formalismu rozhodující význam, protože množina rozptylových stavů $M_{\mathrm{s}}(H)$ v takovém případě závisí pouze na vlastnostech operátoru H. Jak jsme již řekli, existují značně obecné postačující podmínky za nichž rovnost (13) platí; naproti tomu najde-li se případ, kdy je narušena, nelze teorii rozptylu v té podobě, jejíž základy tady vykládáme v následujícím paragrafu, použít.

Nyní můžeme zformulovat dvě základní úlohy, jež si při studiu rozptylového procesu popisovaného dvojicí samosdružených operátorů H_0 a H klademe. První z nich je důkaz *existence vlnových operátorů*, které jsou s ohledem na předpoklad (13) definovány vztahy

$$\Omega_{\pm} := \operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} U(t)^*\, U_0(t)\, P_{\mathrm{ac}}(H_0)\,. \tag{14}$$

Další úloha souvisí s podmínkou úplnosti (7), která má pro volbu (13) tvar

$$\operatorname{Ran}\Omega_+ = \operatorname{Ran}\Omega_- = \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(H)\,; \tag{15}$$

plyne z ní, že rozptylový operátor S je unitární na prostoru $\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(H)$. Spolu s ověřováním úplnosti se obvykle klade otázka, zda je singulárně spojité spektrum uvažovaného hamiltoniánu H prázdné. Její smysl je zřejmý z poznámky 10: je-li $\sigma_{\mathrm{sc}}(H) \neq \emptyset$, mohou existovat „patologické" stavy, o nichž jsme se tam zmínili. Tato okolnost neznamená žádné principiální omezení, ovšem nepřítomnost takovýchto stavů představuje značnou technickou výhodu při vyšetřování operátorů vystupujících při popisu rozptylu. Jsou-li vlnové operátory úplné a $\sigma_{\mathrm{sc}}(H) = \emptyset$, říkáme, že jsou **asymptoticky úplné**. Druhou základní úlohou teorie rozptylu, zpravidla značně složitější, je důkaz *asymptotické úplnosti vlnových operátorů*. Tuto vlastnost se podařilo ověřit pro řadu fyzikálně zajímavých hamiltoniánů, a to nejen pro dvoučásticové systémy, jak o tom budeme mluvit v § 20.3, ale také pro vícečásticové, jak jsme se zmínili již v předmluvě.

Pro systémy, pro něž existují asymptoticky úplné vlnové operátory, poskytuje rigorózní teorie rozptylu řadu výsledků, které se formálně odvozují v kursech kvantové mechaniky. Je však třeba nejprve přejít k tzv. stacionární teorii rozptylu (viz ⟦AJS⟧, kap. VI, ⟦RS 3⟧, § XI.6, ⟦Ka⟧, § X.5). V jejím rámci se odvozuje vztah mezi rozptylovým operátorem a *účinným průřezem*, který je základní pozorovatelnou veličinou v rozptylovém experimentu: udává počet částic rozptýlených do určité prostorové oblasti normovaný na jednotkovou intenzitu dopadajícího svazku. Dále se dokazují disperzní relace, zavádí Bornova řada a vyšetřuje její konvergence, studuje se rozptyl na sféricky symetrickém potenciálu atd.

Z dalších důležitých součástí teorie připomeňme mnohokanálový formalismus, který umožňuje popisovat rozptylové procesy v soustavě tří a více částic, resp. dvou částic s vnitřní strukturou, modifikaci vlnových operátorů a základních výsledků potenciálového rozptylu pro potenciály dlouhého dosahu a konečně studium rozptylových procesů v kvantové teorii polí.

Není samozřejmě možné, abychom tak rozsáhlý materiál zařadili do této knihy; čtenáře odkazujeme k monografiím, které jsme citovali výše (viz též komentář).

20.2 EXISTENCE A ÚPLNOST VLNOVÝCH OPERÁTORŮ

Probereme nyní některé postačující podmínky existence a úplnosti vlnových operátorů (20.1.14). Věty, s nimiž se seznámíme, představují jen zlomek materiálu, který standardně uvádějí monografie věnované matematické teorii rozptylu (např. ⟦AJS⟧, ⟦RS3⟧, ⟦BW⟧; viz též ⟦Ka⟧, § X.4 a ⟦We⟧, § 11.2).

Začneme s jednou vlastností pomocného charakteru.

20.2.1 Tvrzení (*řetězové pravidlo*): Nechť H, H_1 a H_0 jsou samosdružené operátory a předpokládejme, že existují vlnové operátory $\Omega_\pm(H_1, H_0)$ a $\Omega_\pm(H, H_1)$. Potom existují i vlnové operátory $\Omega_\pm(H, H_0)$ a platí

$$\Omega_\pm(H, H_0) = \Omega_\pm(H, H_1)\, \Omega_\pm(H_1, H_0)\,. \tag{1}$$

Důkaz: Pomocí propagátoru $U_1(t) := \exp(-iH_1 t)$ upravíme výraz $U(t)^*\, U_0(t)\, P_{ac}(H_0)$ takto:

$$\begin{aligned} U(t)^*\, U_0(t)\, P_{ac}(H_0) &= U(t)^*\, U_1(t)\, P_{ac}(H_1)\, U_1(t)^*\, U_0(t)\, P_{ac}(H_0) + \\ &+ U(t)^*\, U_1(t)\, [I - P_{ac}(H_1)]\, U_1(t)^*\, U_0(t)\, P_{ac}(H_0)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Nyní podle cvičení 6 je $\underset{t\to\pm\infty}{\text{s-lim}}\,(I - P_{ac}(H_1))\,U_1(t)^*\,U_0(t)\,P_{ac}(H_0) =$ $= (I - P_{ac}(H_1))\,\Omega_\pm(H_1, H_0) = 0$ a z rovnosti (2) pak plyne

$$\underset{t\to\pm\infty}{\text{s-lim}}\; U(t)^*\,U_0(t)\,P_{ac}(H_0) = \Omega_\pm(H, H_1)\,\Omega_\pm(H_1, H_0)$$

– viz cvičení 1(ii) ■

Pomocí řetězového pravidla získáme následující jednoduché kritérium úplnosti.

20.2.2 Věta: Předpokládejme, že vlnové operátory $\Omega_\pm(H, H_0)$ existují; nutnou a postačující podmínkou jejich úplnosti je existence operátorů $\Omega_\pm(H_0, H)$.

Důkaz: Jsou-li $\Omega_\pm(H, H_0)$ úplné, splňují projektory $P_\pm$ na podprostory Ran $\Omega_\pm$ podmínku $P_+ = P_{ac}(H)$ a z cvičení 5 plyne $\Omega_\pm(H_0, H) = \Omega_\pm(H, H_0)^*$. Jestliže naopak existují $\Omega_\pm(H_0, H)$ dává řetězové pravidlo $\Omega_\pm(H, H_0)\,\Omega_\pm(H_0, H) = P_{ac}(H)$, takže Ran $\Omega_\pm(H, H_0) \supset \mathscr{H}_{ac}(H)$; důkaz se dokončí pomocí cvičení 6. ■

Přejdeme k vyšetřování existence vlnových operátorů. Základním výsledkem teorie je následující postačující podmínka.

20.2.3 Věta (*Cookovo kritérium*): Nechť H a H_0 jsou samosdružené operátory a předpokládejme, že existuje množina $D \subset P_{ac}(H_0)\,D(H_0)$, která je hustá v $\mathscr{H}_{ac}(H_0)$, přičemž ke každému $\psi \in D$ lze najít $t_\psi > 0$ s těmito vlastnostmi:

(i) $U_0(\pm t)\,\psi \in D(H)$ pro všechna $t > t_\psi$,

(ii) vektorové funkce $t \mapsto (H - H_0)\,U_0(\pm t)\,\psi$ jsou spojité na intervalu $[r, s]$ pro všechna $s > r > t_\psi$,

(iii) $\displaystyle\int_{t_\psi}^{\infty} \|(H - H_0)\,U_0(\pm t)\,\psi\|\,\mathrm{d}t < \infty$.

Potom vlnové operátory $\Omega_\pm(H, H_0)$ existují.

Důkaz: Pro libovolné $\psi \in D$ a $t > t_\psi$ položíme $\psi(t) := U(t)^*\,U_0(t)\,\psi$. Podle (i) je $\psi(t) \in D(H)$; dále pomocí tvrzení 11.1.1 snadno ověříme, že vektorová funkce $\psi(.)$ je diferencovatelná na intervalu (t_ψ, ∞) a platí $\psi'(t) = \mathrm{i}U(t)^*\,(H - H_0)\,U_0(t)\,\psi$. Vzhledem k předpokladu (ii) je $\psi'(.)$ spojitá. Dále užijeme cvičení 9 a nerovnosti (3.7.6); pro libovolné $s > r > t_\psi$ dostaneme

$$\|\psi(s) - \psi(r)\| = \left\|\int_r^s \psi'(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leq \int_r^s \|(H - H_0)\,U_0(t)\,\psi\|\,\mathrm{d}t\,,$$

Užijeme-li dále předpokladu (iii), vidíme, že $\|\psi(s) - \psi(r)\| \to 0$ pro $r, s \to \infty$, tj. že $\lim_{t\to\infty} U(t)^*\,U_0(t)\,\psi \equiv \lim_{t\to\infty} U(t)^*\,U_0(t)\,P_{ac}(H_0)\,\psi$ existuje pro každé $\psi \in D$. Je zřejmé, že pak existuje $\lim_{t\to\infty} U(t)^*\,U_0(t)\,P_{ac}(H_0)\,\varphi$ pro všechna $\varphi \in D_{\text{lin}} \oplus \oplus\,\mathscr{H}_{ac}(H_0)^\perp$. Nyní z předpokladu $\bar{D} = \mathscr{H}_{ac}(H_0)$ plyne, že podprostor

600 $D_{\text{lin}} \oplus \mathscr{H}_{\text{ac}}(H_0)^{\perp}$ je hustý v $\mathscr{H}$, což spolu s nerovností $\| U(t)^* U_0(t) P_{\text{ac}}(H_0)\| \leqq 1$ zaručuje existenci $\text{s-lim}_{t\to\infty} U(t)^* U_0(t) P_{\text{ac}}(H_0)$ – viz cvičení 1. Důkaz existence operátoru Ω_- je obdobný. ∎

Jinou postačující podmínkou existence vlnových operátorů $\Omega_\pm(H, H_0)$ je požadavek, aby operátor $H - H_0$ byl jaderný, resp. byl jadernému operátoru v jistém slabém smyslu roven. Jak uvidíme, lze tyto předpoklady ještě zobecnit a dokázat pro některá $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ existenci operátorů

$$\Omega_\pm(H, H_0; B) := \operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} U(t)^* B U_0(t) P_{\text{ac}}(H_0)\,. \tag{3}$$

20.2.4 Věta (*Pearson*): Nechť $\mathscr{H}$ je separabilní Hilbertův prostor, $H, H_0 \in \mathscr{L}_{\text{sa}}(\mathscr{H})$, $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ a předpokládejme, že lze najít jaderný operátor C takový, že

$$(H\psi, B\tilde{\psi}) - (\psi, BH_0\tilde{\psi}) = (\psi, C\tilde{\psi}) \tag{4}$$

pro všechna $\psi \in D(H)$ a $\tilde{\psi} \in D(H_0)$; potom existují operátory $\Omega_\pm(H, H_0; B)$.

Dříve než přistoupíme k důkazu, odvodíme některé obecné vlastnosti podprostoru $\mathscr{H}_{\text{ac}} \equiv \mathscr{H}_{\text{ac}}(A)$ pro libovolné $A \in \mathscr{L}_{\text{sa}}(\mathscr{H})$. Především připomeňme, že podle Radonovy-Nikodýmovy věty ke každému $x \in \mathscr{H}_{\text{ac}}$ existuje právě jedno $f_x \in L^1(\mathbb{R})$ takové, že $f_x(t) \geqq 0$ s.v. v $\mathbb{R}$ a pro všechny borelovské množiny platí

$$\mu_x(M) \equiv \|E_A(M)x\|^2 = \int_M f_x(t)\,\mathrm{d}t\,; \tag{5a}$$

speciálně pro $M = \mathbb{R}$ dostáváme

$$\|x\|^2 = \|f_x\|_1\,. \tag{5b}$$

20.2.5 Lemma: Množina

$$\mathscr{M}(A) := \{x \in \mathscr{H}_{\text{ac}}:\ \|f_x\|_\infty < \infty\} \tag{6a}$$

má následující vlastnosti:

(a) $\mathscr{M}(A)$ je podprostor, který je hustý v $\mathscr{H}_{\text{ac}}(A)$;

(b) pro každé $x \in \mathscr{M}(A)$ a $y \in \mathscr{H}$ platí

$$\int_{\mathbb{R}} |(y, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}At}x)|^2\,\mathrm{d}t \leqq 2\pi\|y\|^2\,\|f_x\|_\infty\,. \tag{6b}$$

Důkaz: (a) To, že $\mathscr{M}(A)$ je podprostor, plyne z nerovnosti $\mu_{\alpha x+y} \leqq 2|\alpha|^2\mu_x + 2\mu_y$, z níž pro $x, y \in \mathscr{M}(A)$ pomocí implikace (A.6.20b) dostaneme $\|f_{\alpha x+y}\|_\infty \leqq$ $\leqq 2|\alpha|^2\|f_x\|_\infty + 2\|f_y\|_\infty$. K ověření rovnosti $\overline{\mathscr{M}(A)} = \mathscr{H}_{\text{ac}}$ sestrojíme k libovolnému $z \in \mathscr{H}_{\text{ac}}$ posloupnost $\{x_n\} \subset \mathscr{M}(A)$ takovou, že $x_n \to z$. Příslušný vektor $f_z \in L^1(\mathbb{R})$ (viz (5a)) lze reprezentovat borelovskou funkcí, která pro *všechna* $t \in \mathbb{R}$ splňuje nerovnost $0 \leqq f_z(t) < \infty$. Pro $n = 1, 2, \ldots$ zavedeme borelovské množiny

$S_n := \{t \in \mathbb{R}: f_z(t) > n\}$; zřejmě tvoří nerostoucí posloupnost a $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \emptyset$. Položíme $x_n := (I - E_A(S_n))\, z$; podle formule (9.3.10) a věty A.6.6b platí $\mu_{x_n}(M) = \int_M (1 - \chi_{S_n})\, \mathrm{d}\mu_z = \int_M (1 - \chi_{S_n}(t))\, f_z(t)\, \mathrm{d}t$. Odtud je vidět, že $x_n \in \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}$; platí tedy formule (5a), přičemž $f_{x_n} = (1 - \chi_{S_n})\, f_z$. Nyní ze způsobu zavedení množin S_n plyne $f_{x_n}(t) \leqq n$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$, takže $\|f_{x_n}\|_\infty \leqq n$, čímž je dokázáno, že $x_n \in \mathscr{M}(A)$. Konečně ze vztahů $\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} E_A(S_n) = E_A(\emptyset) = 0$ (viz (9.1.4b)) dostáváme $x_n \to z$.

(b) Vzhledem k tomu, že projektor P_{ac} na podprostor $\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}$ komutuje s A, z předpokladu $x \in \mathscr{M}(A)$ pro míru $\nu_{xy}(.) \equiv (x, E_A(.)\, y)$ plyne $\nu_{xy}(.) = \nu_{P_{\mathrm{ac}}x, y}(.) = \nu_{xz}(.)$, kde $z := P_{\mathrm{ac}} y$. Nyní Schwarzova nerovnost dává

$$|\nu_{xy}(M)|^2 \leqq \mu_x(M)\, \mu_z(M)\,; \tag{7}$$

odtud je vidět, že ν_{xy} je absolutně spojitá vůči Lebesgueově míře. Existuje tedy právě jedno $g_{xy} \in L^1(\mathbb{R})$ splňující rovnost $\nu_{xy}(M) = \int_M g_{xy}(t)\, \mathrm{d}t$ pro všechna $M \in \mathscr{B}$. Pak z formule (9.3.7) a věty A.10.6 plyne

$$(x, \mathrm{e}^{-itA} y) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-it\lambda}\, \mathrm{d}\nu_{xy}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-it\lambda} g_{xy}(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda\,.$$

Jestliže ukážeme, že

$$g_{xy} \in L^2(\mathbb{R})\,, \tag{8a}$$

budeme moci tuto rovnost zapsat pomocí Fourierova-Plancherelova operátoru ve tvaru $(x, \mathrm{e}^{-itA} y) = \sqrt{2\pi}(F g_{xy})\,(t)$ a z unitarity dostaneme

$$\int |(x, \mathrm{e}^{-itA} y)|^2\, \mathrm{d}t = 2\pi \|g_{xy}\|_2^2\,. \tag{8b}$$

K ověření (8a) vyjdeme z toho, že funkce $t \mapsto \nu_{xy}^{(t)}$

$$\nu_{xy}^{(t)} := \nu_{xy}((-\infty, t)) = \int_{-\infty}^{t} g_{xy}(u)\, \mathrm{d}u$$

je absolutně spojitá v $\mathbb{R}$, takže $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\, \nu_{xy}^{(t)} = g_{xy}(t)$ pro všechna $t \in \mathbb{R} \setminus N_\nu$, kde $m(N_\nu) = 0$ (viz poznámku A.9.6). Podobně ze vztahů $\mathrm{d}\mu_x = f_x\, \mathrm{d}m$ a $\mathrm{d}\mu_z = f_z\, \mathrm{d}m$ (viz (5a)) pro všechna $t \in \mathbb{R} \setminus N_\mu$, $m(N_\mu) = 0$, vyplývá $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\, \mu_x^{(t)} = f_x$ a $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\, \mu_z^{(t)} = f_z$. Z nerovnosti (7) pro množinu M rovnající se intervalu s koncovými body t a $t + h$, kde $t \in \mathbb{R} \setminus (N_\nu \cup N_\mu)$ a $h \neq 0$, dostaneme

$$|(\nu_{xy}^{(t+h)} - \nu_{xy}^{(t)})/h|^2 \leqq \frac{1}{h}\,[\mu_x^{(t+h)} - \mu_x^{(t)}]\, \frac{1}{h}\,[\mu_z^{(t+h)} - \mu_z^{(t)}]$$

602 a limitní přechod spolu s podmínkou $x \in \mathcal{M}(A)$ dá $|g_{xy}(t)|^2 \leqq f_x(t)\, f_z(t) \leqq \leqq \|f_x\|_\infty f_z(t)$. Vzhledem k tomu, že $f_z \in L^1$, je $g_{xy} \in L^2(\mathbb{R})$, přičemž $\|g_{xy}\|_2^2 \leqq \leqq \|f_x\|_\infty \|f_z\|_1 = \|f_x\|_\infty \|z\|^2 \leqq \|f_x\|_\infty \|y\|^2$; zde jsme užili (5b) pro $x = z$ a toho, že $z = P_{ac}y$. Konečně po dosazení do (8b) dostaneme nerovnost (6b). ■

Důkaz věty 4: Označme $\Omega(t) := U(t)^* B U_0(t)$ a $\Omega_{t,s} := \Omega(t) - \Omega(s)$. Budeme dokazovat existenci operátoru $\Omega_+(H, H_0; B)$; pro operátor $\Omega_-(H, H_0; B)$ je postup obdobný. Z cvičení 1(i) a lemmatu 5a je vidět, že stačí pro všechna $\eta \in \mathcal{M}(H_0)$ dokázat rovnost

$$\lim_{s,t\to\infty} \|\Omega_{t,s}\eta\| = 0\,. \tag{9}$$

Nejprve najdeme pro všechna $\varphi \in \mathscr{H}$ integrální vyjádření vektoru $\Omega_{t,s}\varphi$. Pro libovolná $\psi \in D(H)$ a $\tilde{\psi} \in D(H_0)$ jsou vektorové funkce $t \mapsto U(t)\psi$ a $t \mapsto BU_0(t)\tilde{\psi}$ diferencovatelné, přičemž $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\, U(t)\psi = -\mathrm{i}HU(t)\psi$ a $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\, BU_0(t)\tilde{\psi} = = -\mathrm{i}BH_0U_0(t)\tilde{\psi}$. Podle cvičení 8 pak existuje derivace $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\,(\psi, \Omega(t)\tilde{\psi})$, pro niž pomocí (4) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi, \Omega(t)\,\tilde{\psi}) = \mathrm{i}(U(t)\,\psi, CU_0(t)\,\tilde{\psi}) = \mathrm{i}(\psi, U(t)^*\, CU_0(t)\,\tilde{\psi})\,.$$

Tato derivace je zjevně spojitá, takže funkce $t \mapsto (\psi, \Omega(t)\,\tilde{\psi})$ je absolutně spojitá; pro libovolná $s, t \in \mathbb{R}$ pak platí (viz poznámku A.9.6)

$$(\psi, \Omega_{t,s}\tilde{\psi}) \equiv (\psi, [\Omega(t) - \Omega(s)]\,\tilde{\psi}) = \mathrm{i}\int_s^t (\psi, U(\tau)^*\, CU_0(\tau)\,\tilde{\psi})\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{10a}$$

Nyní ze spojitosti vektorové funkce $t \mapsto U(t)^*\, CU_0(t)\,\varphi$ vyplývá pro všechna $\varphi \in \mathscr{H}$ existence (Bochnerova) integrálu $J_{ts}(\varphi) := \int_s^t U(\tau)^*\, CU_0(\tau)\,\varphi\,\mathrm{d}\tau \in \mathscr{H}$ (viz cvičení 3.38). Zobrazení $\varphi \mapsto J_{ts}(\varphi)$ je lineární a podle nerovnosti (3.7.6) je $\|J_{ts}(\varphi)\| \leqq |t - s|\, \|C\|\, \|\varphi\|$, takže $J_{ts} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Užijeme-li ještě tvrzení 3.7.6 a (10a) zjistíme, že $(\psi, \Omega_{t,s}\tilde{\psi}) = \mathrm{i}(\psi, J_{ts}(\tilde{\psi}))$ pro všechna $\psi \in D(H)$, $\tilde{\psi} \in D(H_0)$; odtud plyne $\Omega_{ts} = \mathrm{i}J_{ts}$ (viz tvrzení 5.1.3). Hledané integrální vyjádření má tedy tvar

$$\Omega_{t,s}\varphi = \mathrm{i}\int_s^t C(\tau)\,\varphi\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad C(\tau) := U(\tau)^*\, CU_0(\tau)\,. \tag{10b}$$

Pomocí něj nyní dokážeme spojitou diferencovatelnost funkce $\tau \mapsto \|\Omega_{t+\tau,s+\tau}\|^2$ na $\mathbb{R}^+$. Stačí ověřit, že vektorová funkce $\tau \mapsto \Omega_{t+\tau,s+\tau}\varphi$ je spojitě diferencovatelná (viz cvičení 8). Nyní (10b) dává

$$\Omega_{t+\tau,s+\tau}\varphi = \int_0^{t+\tau} C(z)\varphi\,\mathrm{d}z - \int_0^{s+\tau} C(z)\varphi\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{-t}^{\tau} C(z+t)\varphi\,\mathrm{d}z - \int_{-s}^{\tau} C(z+s)\varphi\,\mathrm{d}z$$

a na základě cvičení 3.39 dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\Omega_{t+\tau,s+\tau}\varphi = [C(\tau+t) - C(\tau+s)]\,\varphi\,.$$

Potom

$$\omega_{ts}^{(\varphi)}(\tau) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\|\Omega_{t+\tau,s+\tau}\varphi\|^2 = 2\,\mathrm{Re}\,(\Omega_{t+\tau,s+\tau}\varphi,\,[C(\tau+t) - C(\tau+s)]\,\varphi) =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\,(\Omega_{t,s}U_0(\tau)\,\varphi,\,[C(t) - C(s)]\,U_0(\tau)\,\varphi)\,. \tag{11}$$

Díky spojitosti funkce $\omega_{ts}^{(\varphi)}$ pro každé $k > 0$ máme

$$\|\Omega_{t+k,s+k}\varphi\|^2 - \|\Omega_{t,s}\varphi\|^2 = \int_0^k \omega_{ts}^{(\varphi)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Nyní pro $\eta \in \mathscr{M}(H_0) \subset \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(H_0)$ ze cvičení 2 vyplývá $\lim_{k\to\infty} \Omega_{t+k,s+k}\,\eta \equiv \equiv \lim_{k\to\infty} U(k)^*\,\Omega_{t,s}U_0(k)\,\eta = 0$, neboť operátor $\Omega_{t,s}$ je kompaktní (viz cvičení 10). Pro každé $\eta \in \mathscr{M}(H_0)$ tedy platí

$$\|\Omega_{t,s}\eta\|^2 = -\lim_{k\to\infty}\int_0^k \omega_{ts}^{(\eta)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{12}$$

Poslední krok důkazu spočívá v ověření podmínky $\omega_{t,s}^{(\eta)} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^+)$ a vztahu $\lim_{s,t\to\infty}\int_0^\infty \omega_{t,s}^{(\eta)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0$. Skutečně, ověříme-li toto tvrzení, pak z formule (12) a Lebesgueovy věty dostaneme $\lim_{s,t\to\infty}\|\Omega_{t,s}\eta\|^2 = \lim_{s,t\to\infty}\int_0^\infty \omega_{t,s}^{(\eta)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0$, tj. vztah (9). Zavedeme spojitou funkci $v_{ts}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$,

$$v_{ts}^{(\eta)}(\tau) := |(\Omega_{t,s}U_0(\tau)\,\eta,\,C(t)\,U_0(\tau)\,\eta)| = |(U(t)\,\Omega_{t,s}U_0(\tau)\,\eta,\,CU_0(t+\tau)\,\eta)|\,;$$

potom $|\omega_{ts}^{(\eta)}(\tau)| \leqq 2[v_{ts}^{(\eta)}(\tau) + v_{st}^{(\eta)}(\tau)]$, a protože $\omega_{ts}^{(\eta)}$ je spojitá, a tudíž měřitelná, bude funkce $\omega_{ts}^{(\eta)}$ mít požadované vlastnosti, jestliže ukážeme, že $v_{ts}^{(\eta)} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^+)$ a $\lim_{s,t\to\infty}\int_0^\infty v_{ts}^{(\eta)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0$ pro všechna $s, t \in \mathbb{R}$.

K tomu účelu zapíšeme jaderný operátor C v kanonickém tvaru (6.2.9b): $C = \sum_j \mu(j)\,(g_j, .)\,h_j$, kde $\{g_j\}$ a $\{h_j\}$ jsou ortonormální báze v $\mathscr{H}$ a $\sum_j \mu(j) =$

 $= \mathrm{Tr}\,|C| < \infty$. Pomocí věty o monotónní konvergenci a Hölderovy nerovnosti dostaneme

$$\int_0^\infty v_{ts}^{(\eta)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leqq$$

$$\leqq \sum_j \mu(j) \left[\int_0^\infty |(g_j, U_0(t+\tau)\,\eta_j)|^2\,\mathrm{d}\tau \int_0^\infty |(U(t)\,\Omega_{t,s} U_0(\tau)\,\eta, h_j)|^2\,\mathrm{d}\tau \right]^{1/2}.$$

Jelikož $\eta \in \mathscr{M}_s(H_0)$, lze oba integrály odhadnout pomocí (6b):

$$\int_0^\infty |(g_j, U_0(t+\tau)\,\eta)|^2\,\mathrm{d}\tau = \int_t^\infty |(g_j, U_0(z)\,\eta)|^2\,\mathrm{d}z \leqq 2\pi \|f_\eta\|_\infty\,,$$

$$\int_0^\infty |(U(t)\,\Omega_{t,s} U_0(\tau)\,\eta, h_j)|^2\,\mathrm{d}\tau \leqq 2\pi \|f_\eta\|_\infty \|\Omega_{t,s}^* U(t)^* h_j\|^2 \leqq 8\pi \|f_\eta\|_\infty \|B\|^2\,; \tag{13a}$$

poslední nerovnost plyne z toho, že $\|\Omega_{t,s}^*\| = \|\Omega_{t,s}\| \leqq \|\Omega(t)\| + \|\Omega(s)\| \leqq \leqq 2\|B\|$. Pro všechna $t, s \in \mathbb{R}$ tedy platí $v_{ts}^{(\eta)} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^+)$, neboť

$$0 \leqq \int_0^\infty v_{ts}^{(\eta)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leqq 2\|B\|\,(2\pi\|f_\eta\|_\infty)^{1/2} \sum_j \mu(j)\,\gamma_j(t) \leqq 8\pi\|B\|\,\|f_\eta\|_\infty\,\mathrm{Tr}\,|C|\,; \tag{13b}$$

zde jsme označili

$$\gamma_j(t) = \left[\int_t^\infty |(g_j, U_0(z)\,\eta)|^2\,\mathrm{d}z\right]^{1/2}. \tag{13c}$$

Dále z nerovnosti (13a) plyne stejnoměrná konvergence řady $\sum_j \mu(j)\,\gamma_j(t)$ vzhledem k t, a protože podle (6b) platí $\lim_{t\to\infty} \gamma_j(t) = 0$, je $\lim_{t\to\infty} \sum_j \mu(j)\,\gamma_j(t) = \sum_j \mu(j) \lim_{t\to\infty} \gamma_j(t) = 0$. Nerovnost (13b) pak pro všechna $s \in \mathbb{R}$ dá $\lim_{t\to\infty} \int_0^\infty v_{t,s}^{(\eta)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0$, a tedy také $\lim_{s,t\to\infty} \int_0^\infty v_{t,s}^{(\eta)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0$. ■

20.2.6 Poznámka: Pro $B = I$ a samosdružené operátory H, H_0 takové, že $H - H_0 \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$, zaručuje Pearsonova věta existenci vlnových operátorů $\Omega_\pm(H, H_0)$ i $\Omega_\pm(H_0, H)$; z věty 2 pak plyne jejich úplnost.

Následuje ilustrace toho, jak lze užít operátorů $\Omega_\pm(H, H_0; B)$ s $B \neq I$ k odvození další postačující podmínky existence a úplnosti vlnových operátorů.

20.2.7 Věta (*Birman-Kuroda*): Nechť H a H_0 jsou samosdružené operátory na separabilním $\mathscr{H}$ a operátor $(H - z)^{-1} - (H_0 - z)^{-1}$ je jaderný pro nějaké $z \in \varrho(H) \cap \varrho(H_0)$; potom vlnové operátory $\Omega_\pm(H, H_0)$ existují a jsou úplné.

Důkaz: Označme $B := (H-z)^{-1}(H_0-z)^{-1}$ a $C := (H_0-z)^{-1}-(H-z)^{-1}$; pro libovolná $\psi \in D(H)$ a $\tilde{\psi} \in D(H_0)$ pak platí $(H\psi, B\tilde{\psi}) - (\psi, BH_0\tilde{\psi}) = ((H-\bar{z})\psi, B\tilde{\psi}) - (\psi, B(H_0-z)\tilde{\psi}) = (\psi, C\tilde{\psi})$. Podle věty 4 pro každé $\varphi \in \mathscr{H}$ existují $\lim\limits_{t\to\pm\infty} U(t)^*(H-z)^{-1}(H_0-z)^{-1}U_0(t)P_{ac}(H_0)\varphi$. Položíme-li $\varphi = (H_0-z)\tilde{\psi}$ a užijeme-li komutativity operátorů H_0 a $U_0(t)P_{ac}(H_0)$, vidíme, že pro všechna $\tilde{\psi} \in D(H_0)$ existují $\lim\limits_{t\to\pm\infty} U(t)^*(H-z)^{-1}U_0(t)P_{ac}(H_0)\tilde{\psi}$, a protože $\overline{D(H_0)} = \mathscr{H}$ a pro všechna $t \in \mathbb{R}$ je $\|U(t)^*(H-z)^{-1}U_0(t)P_{ac}(H_0)\| \leq \|(H-z)^{-1}\|$, existují

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} U(t)^*(H-z)^{-1}U_0(t)P_{ac}(H_0) \tag{14}$$

(viz cvičení 1). Dále užijeme cvičení 2: jelikož operátor C je podle předpokladu kompaktní, je $\operatorname*{s-lim}\limits_{t\to\pm\infty} U(t)^*[(H_0-z)^{-1}-(H-z)^{-1}]U_0(t)P_{ac}(H_0) = 0$, což spolu s výsledkem (14) znamená, že pro všechna $\varphi \in \mathscr{H}$ existují $\lim\limits_{t\to\pm\infty} U(t)^*(H_0-z)^{-1}U_0(t)P_{ac}(H_0)\varphi$. Odtud stejně jako při odvození existence limit (14) dokážeme existenci vlnových operátorů $\Omega_\pm(H, H_0)$. V předpokladech věty vystupují operátory H a H_0 symetricky; proto existují i vlnové operátory $\Omega_\pm(H_0, H)$ a úplnost pak plyne z věty 2. ■

Závěrem uvedeme bez důkazu větu, která umožňuje podstatně rozšířit použitelnost předchozích podmínek existence a úplnosti vlnových operátorů (viz též komentář).

20.2.8 Věta (*princip invariance*): Nechť funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ryze monotonní a existuje konečný rozklad $\mathbb{R} = \bigcup\limits_n J_n$ takový, že na vnitřku každého z intervalů J_n je f dvakrát spojitě diferencovatelná. Předpokládejme dále, že operátory $A_0, A_1 \in \mathscr{L}_{sa}(\mathscr{H})$ splňují jednu z podmínek

(i) $A_1 - A_0 \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$,

(ii) $(A_1-z)^{-1} - (A_0-z)^{-1} \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$ pro nějaké $z \in \varrho(A_0) \cap \varrho(A_1)$.

Potom vlnové operátory $\Omega_\pm(f(A_1), f(A_0))$ existují, jsou úplné a platí

$$\Omega_\pm(f(A_1), f(A_0)) = \begin{cases} \Omega_\pm(A_1, A_0), & \text{je-li } f \text{ rostoucí,} \\ \Omega_\mp(A_1, A_0), & \text{je-li } f \text{ klesající.} \end{cases}$$

20.2.9 Důsledek: Předpokládejme, že samosdružené operátory H, H_0 splňují některou z následujících podmínek:

(i) H, H_0 jsou pozitivní a $H^2 - H_0^2 \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$ nebo $(H^2+\alpha)^{-1} - (H_0^2+\alpha)^{-1} \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$ pro nějaké $\alpha > 0$;

(ii) existují kladná čísla α, β taková, že dolní hranice obou operátorů H, H_0 není menší než α a $e^{-\beta H} - e^{-\beta H_0} \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$.

 Potom vlnové operátory $\Omega_{\pm}(H, H_0)$ existují a jsou úplné.

Důkaz: V případě (i) položíme $A_1 = H^2$, $A_0 = H_0^2$, $f(x) := \sqrt{x}$ pro $x \geqq 0$ a $f(x) := x$ pro $x < 0$, v případě (ii) $A_1 = \mathrm{e}^{-\beta H}$, $A_0 = \mathrm{e}^{-\beta H_0}$, $f(x) := -(1/\beta) \ln x$ pro $x \geqq \alpha$ a $f(x) := -(x + (1/\beta) \ln \alpha - \alpha)$ pro $x < \alpha$. ■

20.3 POTENCIÁLOVÝ ROZPTYL

V tomto paragrafu budeme ilustrovat použití některých obecných vět z předchozí části pro popis rozptylu dvou částic, které interagují prostřednictvím potenciálu závisejícího jen na souřadnicích relativního pohybu. Jak bylo řečeno v § 20.1, po odseparování těžišťového pohybu jde o jednočásticový systém na $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ s volným hamiltoniánem H_0 a totálním hamiltoniánem $H = H_0 + V(\boldsymbol{Q})$, kde V: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je borelovská funkce. Budeme předpokládat, že H je samosdružený operátor s definičním oborem $D(H) = D(H_0) \cap \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^3): V\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$. Požadavek samosdruženosti vymezuje jistou třídu potenciálů; patří do ní např. funkce tvaru $V = V_2 + V_\infty$, kde $V_2 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ a $V_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ – viz cvičení 15.9.

Podívejme se nejprve, co lze získat aplikací Cookova kritéria.

20.3.1 Věta (*Cookova-Hackova*): Jestliže $V = V_2 + V_s$, kde $V_2 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ a $V_s \in L^s(\mathbb{R}^3)$ pro nějaké $s \in (2, 3)$, potom vlnové operátory $\Omega_{\pm}(H_0 + V, H_0)$ existují.

Důkaz: Samosdruženost operátoru $H = H_0 + V$ a vztah $D(H) = D(H_0)$ plyne ze cvičení 11 a 15.9; dále podle příkladu 15.5.10 je $\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(H_0) = L^2(\mathbb{R}^3)$. Nejprve zvolíme vhodnou totální množinu $D \subset D(H_0)$. Pro libovolné $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$ zavedeme funkci

$$\boldsymbol{x} \mapsto \psi_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x}) := \mathrm{e}^{-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}|^2/2} \tag{1a}$$

a položíme $D := \{\psi_{\boldsymbol{q}}: \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3\}$. Je zřejmé, že $D \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^3) \subset D(H_0)$; dále z toho, že množina $\{\varphi_a: a \in \mathbb{R}\}$, kde $x \mapsto \varphi_a(x) := \mathrm{e}^{-(x-a)^2/2}$, je totální v $L^2(\mathbb{R})$ (viz cvičení 12), příkladu 4.6.6 a tvrzení 4.6.4 vyplývá, že D je totální v $L^2(\mathbb{R}^3)$. Požadavek $U_0(t)\, D \subset D(H)$ je splněn díky tomu, že $D(H) = D(H_0)$. Zbývá tedy ověřit předpoklady (ii) a (iii) věty 20.2.3.

K tomu potřebujeme znát akci operátoru $U_0(t)$ na vektory (1a). Vzhledem k tomu, že každé $\psi_{\boldsymbol{q}}$ patří do $L^2 \cap L^1$, podle (17.3.2b) platí

$$(U_0(t)\, \psi_{\boldsymbol{q}})\, (\boldsymbol{x}) = (4\pi \mathrm{i} t)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} \exp\, (\mathrm{i}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2/4t)\, \psi_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}\boldsymbol{y} = \prod_{j=1}^{3} J_{q_j}(x_j, t)\,,$$

přičemž

$$J_q(x, t) := (4\pi \mathrm{i} t)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \exp\,[\mathrm{i}(x-y)^2/4t - (y-q)^2/2]\,\mathrm{d}y =$$

$$= a(t)^{1/4} \exp\left[-\frac{(x-q)^2}{2}\,a(t)\right] \exp\left[\mathrm{i}\left((x-q)^2\, t a(t) - \frac{\operatorname{arctg} 2t}{2}\right)\right],$$

kde $a(t) := (1 + 4t^2)^{-1}$ (viz [[GR]], 3.923). Po dosazení dostáváme

$$[(H - H_0)\, U_0(t)\, \psi_{\boldsymbol{q}}]\,(\boldsymbol{x}) = a(t)^{3/4} \exp\left[-3\,\frac{\mathrm{i}}{2} \operatorname{arctg} 2t\right] V(\boldsymbol{x})\,(\psi_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x}))^{a(t)(1+\mathrm{i}t)}\,. \tag{1b}$$

Vzhledem k tomu, že funkce $t \mapsto a(t)^{3/4} \exp(-(3\mathrm{i}/2) \operatorname{arctg} 2t)$ je spojitá na $\mathbb{R}$, stačí k ověření předpokladu (ii) ukázat, že pro všechna $r > r' > 0$ a $t_0 \in [r', r]$ platí

$$\lim_{t \to t_0} \int_{\mathbb{R}^3} |V_s(\boldsymbol{x})|^2 \cdot |(\psi_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x}))^{a(t)(1+\mathrm{i}t)} - (\psi_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x}))^{a(t_0)(1+\mathrm{i}t_0)}|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0\,.$$

a totéž pro funkci V_2. Díky spojitosti integrandu bude tato podmínka splněna, najdeme-li integrabilní majorantu nezávislou na t, a protože $0 < \psi_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x}) \leqq 1$ pro všechna $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, je integrand pro všechna $t \in [r', r]$ majorizován funkcí $4|V_s|^2\, \psi_{\boldsymbol{q}}^{2a(r)}$, jejíž integrabilita plyne z podmínky $V_s \in L^s$ pomocí Hölderovy nerovnosti a toho, že funkce $\psi_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x})^{\alpha} = \mathrm{e}^{-\alpha|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}|^2/2}$ je integrabilní pro každé $\alpha > 0$. Podobně integrabilita funkce $|V_2|^2\, \psi_{\boldsymbol{q}}^{2a(r)}$ plyne z podmínek $V_2 \in L^2$ a omezenosti $\psi_{\boldsymbol{q}}$.

Zbývá dokázat, že funkce $t \mapsto \|V_2 U_0(t)\, \psi_{\boldsymbol{q}}\|$ a $t \mapsto \|V_s U_0(t)\, \psi_{\boldsymbol{q}}\|$ patří do $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ pro všechna $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$. Stejně jako při ověřování předpokladu (ii) zjistíme, že první z nich je majorizována funkcí $a(t)^{3/4}\, \|V_2\|$, která je omezená a pro velká t ubývá jako $t^{-3/2}$; patří tudíž do $\mathscr{L}(\mathbb{R})$. U druhé funkce je situace složitější.

Vyjdeme z rozkladu

$$\|V_s U_0(t)\, \psi_{\boldsymbol{q}}\|^2 = \int_{K(\boldsymbol{q})} f_q^2(\boldsymbol{x}, t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus K(\boldsymbol{q})} f_q^2(\boldsymbol{x}, t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,, \tag{2a}$$

kde jsme označili $K(\boldsymbol{q}) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}| \leqq 1\}$ a $f_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x}, t) := |V_s(\boldsymbol{x})\, U_0(t)\, \psi_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x})|$. Pro $\boldsymbol{x} \in K(\boldsymbol{q})$ užijeme vztahu $f_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x}, t) \leqq a(t)^{3/4}\, |V_s(\boldsymbol{x})|$ (viz (1b)); Hölderova nerovnost pak dá

$$\int_{K(\boldsymbol{q})} f_{\boldsymbol{q}}^2(\boldsymbol{x}, t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqq a(t)^{3/2}\, \|V_s\|_s^2 \left(\frac{4}{3}\,\pi\right)^{1-(s/2)}\,. \tag{2b}$$

Odhad druhého integrálu je založen na následující rovnosti, která platí pro všechna $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$ a $0 < \varepsilon < 1$:

$$f_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x}, t) = a(t)^{1/2+\varepsilon/4}\, |V_s(\boldsymbol{x})|\, |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}|^{(\varepsilon-1)/2}\, [a(t)\, |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}|^2]^{(1-\varepsilon)/4}\, \mathrm{e}^{-a(t)|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}|^2/2}\,.$$

Součin posledních dvou činitelů je omezený pro všechna $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ a $t > 0$ číslem $\beta_\varepsilon := y_\varepsilon^{(1-\varepsilon)/4} \exp\left(-\frac{1}{2}y_\varepsilon\right)$, kde $y_\varepsilon := (1-\varepsilon)/2$. Dále podmínka $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}| > 1$ a trojúhelníková nerovnost dají

$$1 + |\boldsymbol{x}| \leqq |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}| + |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}| + |\boldsymbol{q}| \leqq (2 + |\boldsymbol{q}|)\, |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}|$$

a odtud

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}|^{(\varepsilon-1)/2} \leqq \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{q})\, (1 + |\boldsymbol{x}|)^{(\varepsilon-1)/2}\,.$$

Celkem tedy platí

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus K(\boldsymbol{q})} f_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x}, t)^2\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqq \beta_\varepsilon^2 \gamma_\varepsilon^2(\boldsymbol{q})\, a(t)^{1+\varepsilon/2} \int_{\mathbb{R}^3} |V_s(\boldsymbol{x})|^2\, (1 + |\boldsymbol{x}|)^{\varepsilon-1}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,.$$

Po dosazení tohoto odhadu a (2b) do (2a) zjistíme, že pokud

$$\int_{\mathbb{R}^3} |V_s(\boldsymbol{x})|^2\, (1 + |\boldsymbol{x}|)^{\varepsilon-1}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} < \infty\,, \tag{2c}$$

je funkce $t \mapsto \|V_s U_0(t)\, \psi_{\boldsymbol{q}}\|$ omezená pro všechna $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$ a ubývá pro $t \to \infty$ jako $t^{-1-\varepsilon/2}$, tj. patří do $\mathscr{L}(\mathbb{R})$. Aplikace Hölderovy nerovnosti dá

$$\int_{\mathbb{R}^3} |V_s(\boldsymbol{x})|^2\, (1 + |\boldsymbol{x}|)^{\varepsilon-1}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqq \|V_s\|_s^2 \left[\int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\boldsymbol{x}|)^{s(\varepsilon-1)/(s-2)}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right]^{1-(2/s)}\,.$$

Odtud vyplývá, že podmínka (2c) je splněna, jestliže $2 + s(\varepsilon - 1)/(s-2) < -1$, což platí pro všechna $s \in (2, 3)$ ■

20.3.3 Poznámka: Z předchozího důkazu je vidět, že *vlnové operátory* $\Omega_\pm(H_0 + V(\boldsymbol{Q}), H_0)$ *existují, jestliže*

$$V \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)\,, \tag{3a}$$

tj. $V \in L^2(K)$ pro každou kompaktní množinu $K \subset \mathbb{R}^3$, *a současně existuje* $\varepsilon > 0$ *a kladná* C, R *taková, že*

$$|V(\boldsymbol{x})| \leqq C|\boldsymbol{x}|^{-1-\varepsilon}\,, \tag{3b}$$

jakmile $|\boldsymbol{x}| > R$. Z uvedených předpokladů totiž plyne, že $V = L^2 + L^s$ pro $s \in (2, 3)$. Skutečně, pro $\varepsilon > 1/2$ je zřejmě $V \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Pro $\varepsilon \in (0, 1/2]$ položíme $s := (3 + \varepsilon)/(1 + \varepsilon)$, tj. $s \in (2, 3)$, a $K_R := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \colon |\boldsymbol{x}| \leqq R\}$ potom $V = V\chi_{K_R} + V(1 - \chi_{K_R})$ a první z těchto funkcí patří do L^2 a pro druhou z nerovnosti (3b) plyne $V(1 + \chi_{K_R}) \in L^s$.

20.3.3 Příklad: Existence vlnových operátorů $\Omega_\pm(H, H_0)$ někdy umožňuje určit absolutně spojité spektrum operátoru H, známe-li $\sigma_{ac}(H_0)$. Podle cvičení 6 je $H \upharpoonright \operatorname{Ran} \Omega_+$ samosdružený operátor na Hilbertově prostoru $\operatorname{Ran} \Omega_+ \subset \mathscr{H}_{ac}(H_0)$; užijeme-li tvrzení 20.1.3, zjistíme, že je unitárně ekvivalentní operátoru $H_0 \upharpoonright \mathscr{H}_{ac}(H_0)$, takže

$$\sigma_{ac}(H_0) = \sigma_{ac}(H \upharpoonright \operatorname{Ran} \Omega_+) \subset \sigma_{ac}(H) . \tag{4a}$$

Jsou-li navíc vlnové operátory úplné, plyne odtud rovnost

$$\sigma_{ac}(H_0) = \sigma_{ac}(H) . \tag{4b}$$

Tato rovnost může platit i pro $\operatorname{Ran} \Omega_+ \neq \mathscr{H}_{ac}(H)$. Zkombinujeme-li např. (4a) se vztahem (10.4.11), dostáváme $\sigma_{ac}(H_0) \subset \sigma_{ac}(H) \subset \sigma_{ess}(H)$, takže (4b) bude platit, jestliže $\sigma_{ac}(H_0) = \sigma_{ess}(H)$.

Je-li speciálně H_0 volný hamiltonián na $L^2(\mathbb{R}^3)$, platí $\sigma_{ac}(H_0) = \sigma(H_0) = \mathbb{R}^+$ (viz příklad 15.5.10); pro samosdružený operátor $H = H_0 + V(\boldsymbol{Q})$ tudíž máme implikaci $\sigma_{ess}(H) = \mathbb{R}^+ \Rightarrow \sigma_{ac}(H) = \mathbb{R}^+$.

Pro platnost rovnosti $\sigma_{ess}(H) = \mathbb{R}^+$ stačí, aby operátor $V(\boldsymbol{Q})$ byl H_0-kompaktní, tj. aby

$$V(\boldsymbol{Q})\,(H_0 - \mathrm{i})^{-1} \in \mathscr{K}(\mathscr{H}) \tag{5}$$

(viz komentář k § 10.4). Ukážeme, že tento požadavek je splněn pro potenciál vyhovující podmínkám (3a, b). Označíme-li $V_n := V\chi_{K_n}$, kde $K_n := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : |\boldsymbol{x}| \leqq nR\}$, dostaneme z (3b) vztah $\lim_{n\to\infty} \|V - V_n\|_\infty = 0$, tj. $\|[V(\boldsymbol{Q}) - V_n(\boldsymbol{Q})]\,(H_0 - \mathrm{i})^{-1}\| \to 0$, a protože všechny operátory $V_n(\boldsymbol{Q})\,(H_0 - \mathrm{i})^{-1}$ jsou podle lemmatu 20.1.8b kompaktní, je kompaktní i $V(\boldsymbol{Q})(H_0 - \mathrm{i})^{-1}$. *Pro operátor $H = H_0 + V(\boldsymbol{Q})$, kde V splňuje podmínky (3a, b), tedy platí $\sigma_{ac}(H) = \mathbb{R}^+$.*

Na závěr se zmíníme o asymptotické úplnosti v potenciálovém rozptylu. Jak bylo řečeno v § 20.1, jde o úlohu dokázat, že pro daný potenciál V jsou vlnové operátory $\Omega_\pm(H_0 + V(\boldsymbol{Q}), H_0)$ úplné a singulární spojité spektrum operátorů $H_0 + V(\boldsymbol{Q})$ je prázdné. Metody, pomocí nichž se tato úloha řeší, nejsou jednoduché; proto vypustíme důkazy a omezíme se na to, že uvedeme dvě třídy potenciálů, pro něž je zaručena asymptotická úplnost.

O potenciálu $V: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ budeme říkat, že splňuje *Agmonovu podmínku*, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že operátor T_f násobení funkcí $f: f(\boldsymbol{x}) = (1 + |\boldsymbol{x}|^2)^{1/2+\varepsilon}\, V(\boldsymbol{x})$ je H_0-kompaktní; tato podmínka bude například splněna pro funkci f vyhovující požadavkům (3a, b). Poznamenejme, že H_0-kompaktnost operátoru T_f implikuje jeho H_0-omezenost s nulovou H_0-mezí (viz komentář k § 10.4): potom je H_0-omezený s nulovou H_0-mezí i operátor $V(\boldsymbol{Q})$, neboť v důsledku omezenosti funkce $\boldsymbol{x} \mapsto (1 + |\boldsymbol{x}|^2)^{-1-\varepsilon/2}$ je $D(V(\boldsymbol{Q})) = D(T_f) \supset D(H_0)$ a pro každé $\psi \in D(H_0)$ platí

$\| V(\boldsymbol{Q}) \psi \| \leqq \sup_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3} (1 + |\boldsymbol{x}|^2)^{-1/2-\varepsilon} \| T_f \psi \| = \| T_f \psi \|$. Z Katovy-Rellichovy věty pak vyplývá, že pro každý potenciál V splňující Agmonovu podmínku je operátor $H_0 + V(\boldsymbol{Q})$ samosdružený.

Další třídu potenciálů zavedeme pomocí projekčních operátorů násobení funkcí χ_{B_r}, kde $B_r := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : |\boldsymbol{x}| \leqq r\}$, jichž jsme užívali v § 20.1. Říkáme, že operátor $V(\boldsymbol{Q})$ na $L^2(\mathbb{R}^3)$ splňuje *Enssovu podmínku*, jestliže
(i) $V(\boldsymbol{Q})$ je H_0-omezený s H_0-mezí menší než 1,
(ii) funkce $r \mapsto h(r) := \|(I - F_r)\, V(\boldsymbol{Q})\, (H_0 + \mathrm{i})^{-1}\|$ je integrabilní na $\mathbb{R}^+$.
Poznamenejme, že z podmínky (i) plyne samosdruženost operátoru $H_0 + V(\boldsymbol{Q})$, a rovněž omezenost operátoru $V(\boldsymbol{Q})\,(H_0 + \mathrm{i})^{-1}$ (viz důkaz Katovy-Rellichovy věty), takže funkce h je definována na $\mathbb{R}^+$. Snadno se přesvědčíme, že tato funkce je nerostoucí, takže pokud je splněna podmínka (ii), musí být $\lim_{r \to \infty} h(r) = 0$.

20.3.4 Příklady: (a) Nechť pro funkci $V \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ platí (3b). Operátor $V(\boldsymbol{Q})$ je omezený, takže je i H_0-omezený s nulovou H_0-mezí. Dále pro všechna $r > R$ platí odhad

$$\|(I - F_r)\, V(\boldsymbol{Q})\, (H_0 + \mathrm{i})^{-1}\| \leqq \|(H_0 + \mathrm{i})^{-1}\|\; \|(1 - \chi_{B_r})\, V\|_\infty = \|(H_0 + \mathrm{i})^{-1}\| \frac{C}{r^{1+\varepsilon}}\,.$$

Uvažovaný potenciál tedy splňuje Enssovu podmínku.
(b) Předpokládejme, že potenciál V splňuje Agmonovu podmínku. Jak jsme již uvedli, operátor $V(\boldsymbol{Q})$ je H_0-omezený s nulovou H_0-mezí. Příslušná funkce h je majorizována funkcí $r \mapsto \| T_f (H_0 + \mathrm{i})^{-1} \| \, (1 + r^2)^{-1/2-\varepsilon}$, která je zjevně integrabilní na $\mathbb{R}^+$. Každý potenciál V splňující Agmonovu podmínku tedy splňuje i podmínku Enssovu.

20.3.5 Věta: Jestliže potenciál V splňuje Agmonovu nebo Enssovu podmínku, pak vlnové operátory $\Omega_\pm(H_0 + V(\boldsymbol{Q}), H_0)$ existují a jsou asymptoticky úplné.

20.3.6 Poznámka: Z předchozí věty plyne $\sigma_{ac}(H_0 + V(\boldsymbol{Q})) = \sigma_{ac}(H_0) = \mathbb{R}^+$; splňuje-li potenciál Agmonovu podmínku, je i $\sigma_{ess}(H_0 + V(\boldsymbol{Q})) = \mathbb{R}^+$, neboť operátor $V(\boldsymbol{Q})$ je H_0-kompaktní. Z Enssovy podmínky H_0-kompaktnost operátoru $V(\boldsymbol{Q})$ nevyplývá; dá se však ukázat, že operátor $H \equiv H_0 + V(\boldsymbol{Q})$ nemá nenulové vlastní hodnoty nekonečné násobnosti a že množina $\sigma_p(H)$ má nejvýše jeden hromadný bod $\lambda = 0$. Jelikož $\sigma_{sc}(H) = \emptyset$ a $\sigma_{ac}(H) = \mathbb{R}^+$, plyne ze vztahu (10.4.10), že každé záporné $\lambda \in \sigma(H)$ je izolovaným bodem spektra, přičemž $\dim E_H(\{\lambda\}) < \infty$, takže $\sigma_{ess}(H) \subset \mathbb{R}^+$. Tato inkluze spolu se vztahem $\sigma_{ess}(H) \supset \supset \sigma_{ac}(H) = \mathbb{R}^+$ dává $\sigma_{ess}(H) = \mathbb{R}^+$. *Pro každý potenciál V splňující Agmonovu nebo Enssovu podmínku tedy platí* $\sigma_{ac}(H_0 + V(\boldsymbol{Q})) = \sigma_{ess}(H_0 + V(\boldsymbol{Q})) = \mathbb{R}^+$.

Na závěr poznamenejme, že ačkoliv fyzikální interpretace Agmonovy a Enssovy podmínky není nijak průhledná, příklad 20.3.4 ilustruje, jak jsou tyto podmínky užitečné pro aplikaci i jak široká třída fyzikálně zajímavých potenciálů tyto podmínky splňuje.

§ **20.1:** • Při popisu rozptylových experimentů se často mluví o svazcích částic dané energie. Takový výrok není přesný, protože rozptylové stavy odpovídají vždy spojitému spektru hamiltoniánu. Jeho skutečný smysl je následující: užijeme-li pro volný hamiltonián spektrální reprezentace, pak stavu nalétávající částice odpovídá vlnová funkce nebo obecněji statistický operátor W, jehož energetický nosič (tj. nosič míry $w(., H; W)$ – viz § 15.3) leží v okolí určité hodnoty, přičemž toto okolí je dostatečně malé v energetické škále, v níž se odehrávají sledované procesy. Při rezonančním rozptylu se např. volí „monochromatičnost" svazku dopadajících částic tak, aby byla podstatně menší než šířky studovaných rezonancí.

• Předpoklad o tom, že projektil a terč se na velkých vzdálenostech chovají jako volné, resp. že existují asymptotické stavy $\psi_\pm$, jehož jsme užili při zavedení vlnových operátorů, neplatí v případě sil dlouhého dosahu, jako je např. elektrostatická interakce. V těchto případech je nutné pojem vlnového operátoru modifikovat – podrobněji o tom např. v ⟦AJS⟧, kap. 13; ⟦RS 3⟧, § XI.9. Poznamenejme, že ve fyzikální literatuře se z historických důvodů užívá nejčastěji konvence, v níž vlnové operátory $\Omega_\pm$ odpovídají limitám $t \to \mp\infty$.

• Tvrzení, která jsme odvodili o rozptylových stavech, lze modifikovat pro případ $\sigma_{sc}(H) \neq \emptyset$ pomocí podprostoru

$$\tilde{M}_s(H) := \left\{\psi \in \mathscr{H}\colon \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|F_r\, e^{-iHt}\psi\|^2\, dt = 0 \text{ pro všechna } r > 0\right\}.$$

Lze dokázat, že $\tilde{M}_s(H) = \mathscr{H}_c(H)$ – viz [AG1] a též ⟦AJS⟧, § 7.6, nebo ⟦RS 3⟧, dodatek k § XI.17. Stavům zmíněným v poznámce 10 tedy odpovídají vektory z ortogonálního doplňku podprostoru $M_s(H)$ v $\tilde{M}_s(H)$.

• Základní fyzikální informaci týkající se teorie rozptylu lze najít v mnoha učebnicích kvantové mechaniky, podrobnější poučení např. v ⟦Ta⟧, ⟦New⟧. Rigorózní formulaci teorie rozptylu jsou věnovány např. monografie ⟦Am⟧, ⟦AJS⟧, ⟦BW⟧, ⟦Pe⟧, ⟦RS 3⟧. Upozorněme, že terminologie užívaná v literatuře není jednotná; často se třeba říká (silná) asymptotická úplnost místo (asymptotická) úplnost apod. Vlnovým operátorům se někdy říká *Møllerovy operátory* podle autora, který je jako první formálně zavedl. Poznamenejme ještě, že metod Hilbertova prostoru se užívá i při popisu rozptylových procesů v akustice a optice – viz ⟦LP⟧.

§ **20.2:** • Tvrzení 2 vypadá na první pohled jako jednoduchý prostředek důkazu úplnosti vlnových operátorů; ne vždy jej však lze použít, protože důkaz existence operátorů $\Omega_\pm(H_0, H)$ bývá často obtížný.

• Věty 4, 5 a 7 tvoří základ tzv. *Katovy-Birmanovy teorie* pojmenované na počest autorů, kteří ji spolu s S. Kurodou, R. Putnamem, M. G. Kreinem, D. B. Pearsonem a dalšími sestrojili; věta 4 umožnila značně zjednodušit původní důkazy. Tvrzení uvedené v poznámce 6 je nejstarším výsledkem teorie. Bylo odvozeno

M. Rosenblumem pro případ, že $\mathscr{H}_{ac}(H_0) = \mathscr{H}_{ac}(H) = \mathscr{H}$; T. Kato je zobecnil pro operátory H, H_0 s neprázdným singulárním spektrem. Poznamenejme, že existují příklady ukazující, že ve větě 7 není možno zaměnit předpoklad, že operátor $C \equiv (H - z)^{-1} - (H_0 - z)^{-1}$ je jaderný, podmínkou $C \in \mathscr{J}_p(\mathscr{H})$ pro nějaké $p > 1$. Odkazy na literaturu týkající se Katovy-Birmanovy teorie viz ⟦RS 3⟧, poznámky k § XI.3.
Důkaz principu invariance lze najít v ⟦Ka⟧, § X.4, za poněkud obecnějších předpokladů o funkci f. Další zobecnění uvádí např. ⟦RS 3⟧, § XI.3 a dodatek 3 k němu.

§ **20.3:** • Aby nevznikl dojem, že úplnost vlnových operátorů je zcela přirozená vlastnost, kterou je pouze obtížné dokázat, poznamenejme, že v práci [Pea 1] byl sestrojen příklad potenciálu krátkého dosahu, který je kombinací centrálně symetrických pravoúhlých potenciálních jam a bariér, takového, že odpovídající vlnové operátory nejsou úplné (viz též ⟦Pe⟧, § 1.5.1).
• Agmonova i Enssova podmínka se formuluje beze změny pro potenciály $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, s tím, že B_r jsou nyní n-dimenzionální koule. Věta 5 pak platí pro operátory na $L^2(\mathbb{R}^n)$ a totéž zobecnění se týká příkladů 4 a poznámky 6.

Důkaz věty 5 pro Agmonovu podmínku lze najít např. v ⟦RS 4⟧, § XIII.8. V obecnějším případě Enssovy podmínky byla nalezena zcela odlišná tzv. geometrická metoda důkazu. Jejím autorem je V. Enss; podstata metody spočívá v odhadech asymptotického chování rozplývajících se vlnových balíků – viz ⟦Pe⟧, § 2.7, ⟦RS 3⟧, § XI.17 a původní práce [En 1, 2].

Cvičení

1. Je dáno zobrazení $B(.): \mathbb{R} \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ takové, že $\|B(t)\| \leqq c$ pro všechna dosti velká $t > 0$.
(i) Jestliže $\lim_{t\to\infty} B(t)x = Bx$ pro všechny prvky x nějaké množiny M, která je totální v $\mathscr{H}$, potom $\operatorname{s-lim}_{t\to\infty} B(t) = B$.
(ii) Nechť $\operatorname{s-lim}_{t\to\infty} B(t) = B$ a pro zobrazení $C(.): \mathbb{R} \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ platí $\operatorname{s-lim}_{t\to\infty} C(t) = C$; potom $\operatorname{s-lim}_{t\to\infty} B(t)\,C(t) = BC$.

2. Nechť A je samosdružený a B kompaktní operátor na $\mathscr{H}$; potom $\operatorname{s-lim}_{|t|\to\infty} B\,\mathrm{e}^{-iAt}P_{ac}(A) = 0$.
Návod: Pro všechna $x, y \in \mathscr{H}$ je míra $\nu(.) := (y, E_A(.)\,P_{ac}(A)\,x)$ absolutně spojitá vůči Lebesgueově míře; z Radonovy-Nikodýmovy věty, věty A.10.6 a Riemanova-Lebesgueova lemmatu pak plyne $\operatorname{w-lim}_{|t|\to\infty} \mathrm{e}^{-iAt}P_{ac}(A) = 0$.

3. Jestliže $\sigma_{sc}(H) = \emptyset$ a operátor $F_r(H - z)^{-n}$ je kompaktní pro nějaké přirozené n, $z \in \varrho(H)$ a všechna $r > 0$, potom platí rovnosti (20.1.11).

Návod: Pro $P_j := E_H(-j, j]$, $j = 1, 2, \ldots$, je $(H - z)^n P_j$ omezený operátor.

4. Podprostory Ran $\Omega_\pm(H, H_0)$ redukují operátor H.

Návod: Pomocí (20.1.8a) ukažte, že projektory $\Omega_\pm \Omega_\pm^*$ komutují s $U(t)$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

5. Dokažte následující vlastnosti operátorů $\Omega_\pm^*$:

(i) $\Omega_\pm^* = \operatorname{s-lim}_{t \to \pm\infty} U_0(t)^* U(t) P_\pm$, kde $P_\pm$ jsou projektory na podprostory Ran $\Omega_\pm$,

(ii) pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí $U_0(t) \Omega_\pm^* = \Omega_\pm^* U(t)$,

(iii) $H_0 \Omega_\pm^* \supset \Omega_\pm^* H$.

Návod: (i) Dokažte, že pro všechna $x \in \mathscr{H}$ je

$$\lim_{t \to \pm\infty} \| U_0(t)^* U(t) \Omega_\pm x - E_s(H_0) x \| = 0\,.$$

Dále $P_\pm = \Omega_\pm \Omega_\pm^*$ a $E_s(H_0) P_\pm^* = P_\pm^*$.

6. Pro vlnové operátory $\Omega_\pm$ určené vztahem (20.1.14) platí Ran $\Omega_\pm \subset \mathscr{H}_{ac}(H)$.

Návod: Pomocí (20.1.8b) a výsledků předchozího cvičení ukažte, že pro operátor $H_+ := H \upharpoonright \operatorname{Ran} \Omega_+$ na Hilbertově prostoru Ran Ω_+ platí $H_+ = \Omega_+(H_0 \upharpoonright \mathscr{H}_{ac}(H_0)) \Omega_+^*$. Dále užijte cvičení 9.21 k ověření inkluze Ran $\Omega_+ \equiv \Omega_+(\mathscr{H}_{ac}(H_0)) \subset \mathscr{H}_{ac}(H)$.

7. Nechť H a H_0 jsou samosdružené operátory takové, že H je H_0-omezený; potom vektorová funkce $t \to (H - H_0) U_0(t) \psi$ je spojitá.

Návod: Pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a $\psi \in D(H_0)$ je $H_0 U_0(t) \psi = U_0(t) H_0 \psi$.

8. Jestliže vektorové funkce $\varphi(.)$, $\psi(.)$: $\mathbb{R} \to \mathscr{H}$ jsou diferencovatelné, je komplexní funkce $t \mapsto f(t) := (\varphi(t), \psi(t))$ rovněž diferencovatelná, přičemž $f'(t) = (\varphi'(t), \psi(t)) + (\varphi(t), \psi'(t))$.

9. Jestliže vektorová funkce $t \mapsto \varphi(t) \in \mathscr{H}$ je spojitá na intervalu $[a, b]$, pak pro všechna $c, d \in (a, b)$, $c < d$, platí $\psi(d) - \psi(c) = \int_c^d \psi'(t)\, dt$.

Návod: Užijte cvičení 3.39 a 8.

10. Operátor $\Omega_{t,s}$ definovaný pro všechna $\varphi \in \mathscr{H}$ formulí (20.2.10b) je kompaktní.

Návod: Vektorová funkce $\tau \mapsto C(\tau)\varphi$ je spojitá, a tudíž integrabilní na každém omezeném intervalu J, a má majorantu $\|C\| \, \|\varphi\| \in \mathscr{L}(J)$. Na základě toho a vět 3.5.3b, 3.7.7 ověřte implikaci $\varphi_n \xrightarrow{w} \varphi \Rightarrow \Omega_{t,s}\varphi_n \to \Omega_{t,s}\varphi$.

11. Nechť $p > q \geqq 1$ a μ je borelovská míra na $\mathbb{R}^n$, obecně nekonečná. Ukažte, že ke každému $\psi \in L^p \equiv L^p(\mathbb{R}^n, d\mu)$ existuje $\varphi \in L^q$ a $\eta \in L^\infty$ tak, že $\psi = \varphi + \eta$.

Návod: Ukažte, že pro množinu $M := \{x : |\varphi(x)| \geqq 1\}$ platí $\mu(M) < \infty$ a uvažujte funkci $\psi \chi_M$.

614 12. Jestliže $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ a pro všechna $a \in [-1, 1]$ platí

$$J(a) \equiv \int_{\mathbb{R}} \exp -(x^2/2 + ax)\, \psi(x)\, \mathrm{d}x = 0\,,$$

potom $\psi = 0$.
Návod: Vyjádřete $J^{(n)}(0)$ a užijte příkladu 4.3.4.

A.1 SYSTÉMY MNOŽIN. ZOBRAZENÍ. RELACE

Předpokládáme, že čtenář je obeznámen s elementy teorie množin v rozsahu probíraném v úvodním kursu analýzy (viz např. ⟦Jar 1⟧, kap. I, ⟦KF⟧, §§ I.1–3). Cílem tohoto paragrafu je zavést označení, připomenout některé vztahy, na něž se v dalším často odvoláváme, a shrnout základní poznatky o množinových okruzích a σ-algebrách potřebné pro teorii míry.

Jestliže M je podmnožina prvků $x \in X$, které splňují podmínky $P_1(x), \ldots, P_n(x)$, píšeme

$$M = \{x \in X: P_1(x), \ldots, P_n(x)\}.$$

Symbol card M znamená mohutnost množiny M. Pro množiny, jejichž prvky jsou opět množiny, užíváme většinou názvu *systém*; systém všech podmnožin dané množiny X značíme 2^X (viz dále příklad 3).

Sjednocení, průnik a rozdíl dvojice množin značíme standardními symboly $M \cup N$, $M \cap N$ a $M \setminus N$. Operace sjednocení a průniku jsou komutativní a asociativní; kromě toho jsou distributivní, tj. pro libovolné množiny M, N a P platí

$$\begin{aligned} (M \cup N) \cap P &= (M \cap P) \cup (N \cap P), \\ (M \cap N) \cup P &= (M \cup P) \cap (N \cup P). \end{aligned} \tag{1}$$

Symboly $\bigcup_\alpha M_\alpha$ a $\bigcap_\alpha M_\alpha$ označují sjednocení, resp. průnik množinového systému $\{M_\alpha\}$ libovolné mohutnosti. Jejich vztah vyjadřují **de Morganova pravidla**

$$X \setminus \bigcup_\alpha M_\alpha = \bigcap_\alpha (X \setminus M_\alpha), \qquad X \setminus \bigcap_\alpha M_\alpha = \bigcup_\alpha (X \setminus M_\alpha); \tag{2}$$

zde X je libovolná množina (nejčastěji se setkáme s případem, kdy $M_\alpha \subset X$ pro všechna α).

Z dalších vztahů pro základní množinové operace připomeňme rovnosti

$$M \setminus (N \setminus P) = (M \setminus N) \cup (M \cap P),$$
$$(M \cap N) \setminus P = (M \setminus P) \cap N = (M \setminus P) \cap (N \setminus P) = (M \cap N) \setminus (P \cap N)$$

$$\tag{3a}$$

$$(M \cup N) \setminus P = (M \setminus P) \cup (N \setminus P), \tag{3b}$$

a inkluzi

$$M \setminus N = [(M \setminus P) \cup (M \cap P)] \setminus N \subset (M \setminus P) \cup (P \setminus N). \tag{3c}$$

Z nich vyplývá např. následující tvrzení: ke každému nejvýše spočetnému systému $\{M_n\}$ existuje disjunktní systém $\{N_n\}$ stejné mohutnosti, takový, že $N_n \subset M_n$ a $\bigcup_n N_n = \bigcup_n M_n$. K jeho ověření stačí položit

$$N_1 := M_1, \ N_n := M_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} N_j, \qquad n = 2, 3, \ldots, \tag{4}$$

a indukcí dokázat, že pro všechna n je systém $\{N_j\}_{j=1}^n$ disjunktní a $\bigcup_{j=1}^n N_j = \bigcup_{j=1}^n M_j$.

Symetrickou diferencí množin M a N, tj. množinu $(M \setminus N) \cup (N \setminus M)$, značíme $M \triangle N$. Je zřejmé, že $M \triangle N = N \triangle M$; dále budeme potřebovat rovnosti

$$M \triangle N = (M \cup N) \setminus (M \cap N), \tag{5a}$$

$$M \triangle N = (X \setminus M) \triangle (X \setminus N) \quad \text{pro} \quad \text{každé } X \supset M \cup N \tag{5b}$$

a inkluzi

$$M \subset (M \triangle N) \cup N. \tag{5c}$$

Pomocí (3c) zjistíme, že pro všechna M, N a P platí

$$(M \triangle N) \subset (M \triangle P) \cup (P \triangle N). \tag{5d}$$

Dále z (3a, b) plyne *distributivnost symetrické diference s průnikem*

$$(M \triangle N) \cap P = (M \cap P) \triangle (N \cap P) \tag{5e}$$

a rovnost $M \triangle (N \triangle P) = [M \setminus (N \cup P)] \cup [N \setminus (M \cup P)] \cup [P \setminus (M \cup N)] \cup \cup (M \cap N \cap P)$, z níž je vidět, že na levé straně lze libovolně permutovat symboly M, N a P; odtud plyne *asociativita symetrické diference*

$$M \triangle (N \triangle P) = (M \triangle N) \triangle P. \tag{5f}$$

Systém $\mathscr{R}$ nazýváme **množinovým okruhem**, jestliže pro každou dvojici $M, N \in \mathscr{R}$ platí $M \triangle N \in \mathscr{R}$ a $M \cap N \in \mathscr{R}$. Z rovnosti $M \setminus N = (M \triangle N) \cap M$ dostáváme implikaci $M, N \in \mathscr{R} \Rightarrow M \setminus N \in \mathscr{R}$ a odtud dále $\emptyset \in \mathscr{R}$ a $M \cup N \in \mathscr{R}$, neboť podle (5a) je $(M \setminus N) \triangle N = (M \setminus N) \cup N = M \cup N$. Pomocí (5f) a vztahu $(M \triangle \emptyset) = M$ zjistíme, že systém $\mathscr{R}$ s binární operací $M, N \mapsto M \triangle N$ je komutativní grupa, přičemž inverzním prvkem k M je opět M. Vezmeme-li ještě v úvahu (5e), vidíme, že množinový okruh vyhovuje obecné algebraické definici okruhu (viz § 12.1), jestliže sčítáním rozumíme symetrickou diferenci a násobením průnik.

A.1.1 Příklad: Uvažujme systém $\mathscr{R}^d$, $d = 1, 2, \ldots$, tvořený všemi konečnými sjednoceními omezených intervalů $J \subset \mathbb{R}^d$ a prázdnou množinou. Tvrdíme, že $\mathscr{R}^d$ je okruh. Protože průnik omezených intervalů je opět omezený interval a $\bigcup_j J_j \setminus \bigcup_k K_k = \bigcup_j \bigcap_k (J_j \setminus K_k)$, stačí ověřit, že rozdíl libovolných dvou omezených intervalů patří do $\mathscr{R}^d$. To je zřejmé, je-li $d = 1$; pro $d > 1$ se užije rozklad $(J \times K) \setminus (J' \times K') = [J \times (K \setminus K')] \cup [(J \setminus J') \times K]$ (viz níže formuli (13e)). Do každého okruhu obsahujícího systém $\mathscr{J}^d$ všech omezených intervalů v $\mathbb{R}^d$ musí patřit všechna konečná sjednocení těchto intervalů, a tedy celé $\mathscr{R}^d$, takže *$\mathscr{R}^d$ je minimální okruh obsahující $\mathscr{J}^d$*. Připomeňme ještě, že pomocí (4) lze každé $R \in \mathscr{R}^d$ vyjádřit jako konečné *disjunktní* sjednocení omezených intervalů.

Množinový okruh $\mathscr{R} \subset 2^X$ takový, že $X \in \mathscr{R}$, nazýváme **množinovou algebrou** (v jazyce § 12.1 jde o okruh s jednotkovým prvkem X, nikoli o algebru!). Systém $\mathscr{A} \subset 2^X$ nazveme **σ-algebrou**, pokud $\mathscr{A}$ je množinová algebra a pro libovolný podsystém $\{M_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{A}$ platí $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \in \mathscr{A}$; z de Morganových pravidel plyne, že také $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \in \mathscr{A}$. Pomocí těchto pravidel dále snadno ověříme, že *systém $\mathscr{A} \subset 2^X$ obsahující množinu X je σ-algebrou právě tehdy, když $X \setminus M \in \mathscr{A}$ pro každé $M \in \mathscr{A}$ a pro libovolný nejvýše spočetný podsystém $\{M_n\} \subset \mathscr{A}$ platí $\bigcup_n M_n \in \mathscr{A}$.*

Pro daný množinový systém $\mathscr{S} \subset 2^X$ uvažujme všechny σ-algebry $\mathscr{A} \subset 2^X$, které obsahují $\mathscr{S}$; alespoň jedna vždy existuje: $\mathscr{A} = 2^X$. Průnik všech uvažovaných σ-algeber je opět σ-algebra obsahující $\mathscr{S}$; značíme ji $\mathfrak{A}(\mathscr{S})$ a nazýváme **σ-algebrou generovanou systémem $\mathscr{S}$**.

A.1.2 Příklad: Užijeme označení z příkladu 1. Prvky σ-algebry $\mathscr{B}^d := \mathfrak{A}(\mathscr{J}^d)$ nazýváme **borelovskými množinami** prostoru $\mathbb{R}^d$. Do $\mathscr{B}^d$ patří mj. všechny otevřené a uzavřené množiny, a tedy také všechny množiny kompaktní. Tato σ-algebra je generována i jinými systémy, např. systémem τ_d všech otevřených množin v $\mathbb{R}^d$. Obecně definujeme borelovské množiny topologického prostoru (X, τ) jako prvky algebry $\mathfrak{A}(\tau)$.

Posloupnost množin $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *neklesající*, resp. *nerostoucí*, jestliže $M_n \subset M_{n+1}$, resp. $M_n \supset M_{n+1}$ pro $n = 1, 2, \ldots$. Množinový systém $\mathfrak{M}$ je **monotónní**, obsahuje-li spolu s každou neklesající posloupností $\{M_n\}$ množinu $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ a spolu s každou nerostoucí posloupností $\{N_n\}$ množinu $\bigcap_{n=1}^{\infty} N_n$. Příkladem monotónního systému je každá σ-algebra. K libovolnému systému $\mathscr{S}$ existuje minimální monotónní systém $\mathfrak{M}(\mathscr{S})$ obsahující $\mathscr{S}$ (konstrukce je analogická jako v případě

 σ-algebry $\mathfrak{A}(\mathscr{S})$); protože $\mathfrak{A}(\mathscr{S})$ je monotónní systém, platí

$$\mathfrak{M}(\mathscr{S}) \subset \mathfrak{A}(\mathscr{S}) . \tag{6a}$$

Pokud systém $\mathscr{R}$ je okruh, je $\mathfrak{M}(\mathscr{R})$ rovněž okruh (viz [[Hal 1]], § 6); odtud plyne, že pro libovolný podsystém $\{M_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}(\mathscr{R})$ patří $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ do $\mathfrak{M}(\mathscr{R})$, neboť množiny $S_n := \bigcup_{k=1}^{n} M_k \in \mathscr{M}(\mathscr{R})$ tvoří neklesající posloupnost. Platí-li navíc $X \equiv \bigcup_{M \in \mathscr{R}} M \in \mathfrak{M}(\mathscr{R})$, je $\mathfrak{M}(\mathscr{R})$ σ-algebra, tj. $\mathfrak{A}(\mathscr{R}) \subset \mathfrak{M}(\mathscr{R})$, což spolu s (6a) vede k následujícímu závěru: pro každý okruh $\mathscr{R}$ platí implikace

$$\bigcup_{M \in \mathscr{R}} M \in \mathfrak{M}(\mathscr{R}) \Rightarrow \mathfrak{M}(\mathscr{R}) = \mathfrak{A}(\mathscr{R}) . \tag{6b}$$

Je-li každému prvku $x \in X$ přiřazen právě jeden prvek $y = f(x)$ množiny Y, říkáme, že je definováno **zobrazení** $x \mapsto f(x)$ množiny X do Y; užívá se též zápisu $f\colon X \to Y$. Pro $Y = \mathbb{R}$, resp. $Y = \mathbb{C}$ nazýváme zobrazení f *reálnou*, resp. *komplexní funkcí* na X. Je užitečné uvažovat též přiřazení $x \mapsto f(x)$, která mají smysl jen pro x z jisté podmnožiny $D_f \subset X$. I v tomto případě mluvíme o zobrazení a užíváme zápis $f\colon X \to Y$; k jeho určení je však nyní kromě předpisu $x \mapsto f(x)$ třeba udat i množinu D_f, kterou nazýváme **definičním oborem**. Množině

$$\operatorname{Ran} f := \{y \in Y\colon y = f(x), x \in D_f\}$$

říkáme **obor hodnot** zobrazení f. Pro $M \subset D_f$ se užívá též symbolu $f(M) := \{y \in Y\colon y = f(x), x \in M\}$, takže $\operatorname{Ran} f = f(D_f)$.

Zobrazení $f\colon X \to Y$ je **injektivní**, platí-li pro libovolná $x, x' \in D_f$ implikace $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$, resp. **surjektivní**, je-li $\operatorname{Ran} f = Y$. Má-li f obě tyto vlastnosti, nazýváme je **bijekcí**. Připomeňme v této souvislosti, že množiny X a Y mají stejnou mohutnost, existuje-li bijekce $f\colon X \to Y$ taková, že $D_f = X$.

Mějme zobrazení $f\colon X \to Y$ a $g\colon X \to Y$; vztah $f = g$ definitoricky znamená, že $D_f = D_g$ a $f(x) = g(x)$ pro všechna $x \in D_f$. Jestliže $D_f \supset D_g$, přičemž $f(x) = g(x)$ pro všechna $x \in D_g$, říkáme, že f je **rozšířením** g (píšeme $f \supset g$), nebo že g je **zúžením** f na množinu D_g (píšeme $g = f \restriction D_g$).

A.1.3 Příklad: Každé podmnožině $M \subset X$ přiřadíme reálnou funkci χ_M předpisem

$$\chi_M(x) := \begin{cases} 1, & x \in M\,, \\ 0, & x \in X \setminus M\,; \end{cases}$$

nazýváme ji **charakteristickou funkcí** (indikátorem) množiny M. Zobrazení $M \to \chi_M$ je bijekce systému 2^X na množinu všech funkcí $f\colon X \to \mathbb{R}$ takových, že $\operatorname{Ran} f = \{0, 1\}$. Je-li X konečná množina o n prvcích, je mohutnost množiny takových funkcí rovna $2^n \equiv 2^{\mathrm{card}\, X}$. Odtud pochází označení 2^X pro systém všech podmnožin množiny X.

Pro dané zobrazení $f\colon X \to Y$ a libovolné $N \subset Y$ nazýváme množinu

$$f^{(-1)}(N) := \{x \in D_f\colon f(x) \in N\}$$

vzorem množiny N při zobrazení f; má tyto základní vlastnosti.

A.1.4 Tvrzení: Nechť M, resp. N jsou libovolné podmnožiny v D_f, resp. Y, a I je indexová množina libovolné mohutnosti; potom

$$f^{(-1)}\Big(\bigcup_{\alpha\in I} N_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha\in I} f^{(-1)}(N_\alpha)\,, \qquad f^{(-1)}\Big(\bigcap_{\alpha\in I} N_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha\in I} f^{(-1)}(N_\alpha)\,, \tag{7a}$$

$$f^{(-1)}(N_1 \setminus N_2) = f^{(-1)}(N_1) \setminus f^{(-1)}(N_2)\,, \tag{7b}$$

$$f^{(-1)}(f(M)) \supset M\,, \tag{7c}$$

$$f(f^{(-1)}(N)) = \mathrm{Ran}\, f \cap N\,. \tag{7d}$$

Ve vztahu (7c) platí rovnost, je-li f injektivní.

Mějme zobrazení $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$ taková, že $f^{(-1)}(D_g) \neq \emptyset$; **složené zobrazení** $g \circ f\colon X \to Z$ je definováno na množině

$$D_{g\circ f} := f^{(-1)}(D_g) = f^{(-1)}(D_g \cap \mathrm{Ran}\, f) \tag{8a}$$

předpisem

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))\,; \tag{8b}$$

je zřejmé, že pro libovolné $P \subset Z$ platí

$$(g \circ f)^{(-1)}(P) = f^{(-1)}(g^{(-1)}(P))\,. \tag{8c}$$

A.1.5 Příklad: Je dáno zobrazení $f\colon X \to Y$, $D_f = X$, a σ-algebra $\mathscr{B} \subset 2^Y$. Ze vztahů (7a, b) a $f^{(-1)}(Y) = X$ ihned plyne, že systém

$$f^{(-1)}(\mathscr{B}) := \{f^{(-1)}(N)\colon N \subset \mathscr{B}\} \subset 2^X$$

je σ-algebra. Podobně pro σ-algebru $\mathscr{A} \subset 2^X$ je σ-algebrou systém $\{N \subset Y\colon f^{(-1)}(N) \in \mathscr{A}\} \subset 2^Y$. Pro dané zobrazení $f\colon X \to Y$ a každý systém $\mathscr{S} \subset 2^Y$ tedy můžeme pomocí σ-algebry $\mathfrak{A}(\mathscr{S})$ sestrojit σ-algebru $f^{(-1)}(\mathfrak{A}(\mathscr{S})) \subset 2^X$; ukážeme, že je totožná se σ-algebrou generovanou systémem $f^{(-1)}(\mathscr{S})$, tj. že platí

$$f^{(-1)}(\mathfrak{A}(\mathscr{S})) = \mathfrak{A}(f^{(-1)}(\mathscr{S}))\,. \tag{9}$$

Především z inkluze $f^{(-1)}(\mathscr{S}) \subset f^{(-1)}(\mathfrak{A}(\mathscr{S}))$ plyne $\mathfrak{A}(f^{(-1)}(\mathscr{S})) \subset f^{(-1)}(\mathfrak{A}(\mathscr{S}))$, protože $f^{(-1)}(\mathfrak{A}(\mathscr{S}))$ je σ-algebra. K ověření opačné inkluze užijeme následující σ-algebru $\mathscr{B} \subset 2^Y$:

$$\mathscr{B} := \{N \subset Y\colon f^{(-1)}(N) \in \mathfrak{A}(f^{(-1)}(\mathscr{S}))\}\,;$$

 je zřejmé, že $\mathscr{S} \subset \mathscr{B}$ a $f^{(-1)}(\mathscr{B}) \subset \mathfrak{A}(f^{(-1)}(\mathscr{S}))$. První z těchto vztahů dá $\mathfrak{A}(\mathscr{S}) \subset \mathscr{B}$, takže též $f^{(-1)}(\mathfrak{A}(\mathscr{S})) \subset f^{(-1)}(\mathscr{B})$, a pomocí druhého vztahu pak získáme požadovanou inkluzi.

Je-li zobrazení $f\colon X \to Y$ injektivní, existuje ke každému $y \in \operatorname{Ran} f$ právě jedno $x_y \in D_f$ takové, že $y = f(x)$; předpisem $y \mapsto g(y) := x_y$ je definováno zobrazení $g\colon Y \to X$, které nazýváme **inverzním zobrazením** k f a značíme f^{-1}. Je tedy

$$D_{f^{-1}} = \operatorname{Ran} f, \qquad \operatorname{Ran} f^{-1} = D_f \tag{10a}$$

a pro všechna $x \in D_f$, resp. $y \in \operatorname{Ran} f$ platí

$$f^{-1}(f(x)) = x\,, \quad \text{resp.} \quad f(f^{-1}(y)) = y\,. \tag{10b}$$

Pomocí těchto vztahů pro každé $N \subset \operatorname{Ran} f$ dostáváme

$$f^{(-1)}(N) = f^{-1}(N)\,. \tag{10c}$$

Často je třeba zjistit, zda pro daná zobrazení $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to X$ platí $g = f^{-1}$. K tomu se hodí následující věta.

A.1.6 Tvrzení: Pro existenci zobrazení f^{-1} a platnost rovnosti $g = f^{-1}$ stačí, aby byla splněna jedna z následujících podmínek:
(a) $D_g = \operatorname{Ran} f$ a $g(f(x)) = x$ pro všechna $x \in D_f$;
(b) $\operatorname{Ran} f \subset D_g$, $g(f(x)) = x$ pro všechna $x \in D_f$ a $\operatorname{Ran} g \subset D_f$, $f(g(y)) = y$ pro všechna $y \in D_g$.

A.1.7 Příklad: Pro injektivní zobrazení $f\colon X \to Y$ ze vztahů (10a, b) a tvrzení 6a plyne injektivita zobrazení f^{-1} a rovnost

$$(f^{-1})^{-1} = f\,. \tag{11a}$$

Je-li $g\colon Y \to Z$ rovněž injektivní, pak pro zobrazení $h := f^{-1} \circ g^{-1}$ dostaneme $h((g \circ f)(x)) = x$ pro všechna $x \in D_{g \circ f}$ a $(g \circ f)(h(y)) = y$ pro všechna $y \in D_h$, takže podle tvrzení 6b existuje $(g \circ f)^{-1}$ a

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}\,. \tag{11b}$$

Kartézský součin $M \times N$ je množina uspořádaných dvojic $[x, y]$ takových, že $x \in M$ a $y \in N$; analogicky se definuje $M_1 \times \ldots \times M_n$. Kartézským součinem množinových systémů $\mathscr{S}$ a $\mathscr{S}'$ rozumíme systém

$$\mathscr{S} \times \mathscr{S}' := \{M \times M'\colon M \in \mathscr{S}, M' \in \mathscr{S}'\}\,; \tag{12a}$$

např. pro systém $\mathscr{J}^{m+n}$ omezených intervalů v $\mathbb{R}^{m+n}$ máme

$$\mathscr{J}^{m+n} = \mathscr{J}^m \times \mathscr{J}^n\,. \tag{12b}$$

Připomeňme několik užitečných vztahů:

$$M \times N = \emptyset \Leftrightarrow M = \emptyset \quad \text{nebo} \quad N = \emptyset\,, \tag{13a}$$

$$\emptyset \neq M \times N \subset P \times R \Leftrightarrow M \subset P \quad \text{a} \quad N \subset R\,, \tag{13b}$$

$$(M \times N) \cap (P \times R) = (M \cap P) \times (N \cap R)\,, \tag{13c}$$

$$(M \cup P) \times N = (M \times N) \cup (P \times N) = [(M \setminus P) \times N] \cup (P \times N)\,, \tag{13d}$$

$$\begin{aligned}(M \times N) \setminus (P \times R) &= [M \times (N \setminus R)] \cup [(M \setminus P) \times N] = \\ &= [M \times (N \setminus R)] \cup [(M \setminus P) \times (N \cap R)]\,. \end{aligned}\tag{13e}$$

A.1.8 Poznámky: (a) Jestliže obě množiny $M \times N$ a $P \times R$ jsou neprázdné, pak obecně neexistují S a T taková, že $(M \times N) \cup (P \times R) = S \times T$. Tato rovnost platí právě tehdy, když buď $M = P$ nebo $N = R$; důkaz viz např. ⟦Hal 1⟧, § 33 nebo ⟦Jar 2⟧, § I.4.

(b) Kartézský součin $M_1 \times \ldots \times M_n$ lze interpretovat jako množinu tvořenou všemi zobrazeními $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \bigcup_{j=1}^{n} M_j$ takovými, že $f(j) \in M_j$ pro $1 \leqq j \leqq n$. Tato interpretace umožňuje pro systém $\{M_\alpha\colon \alpha \in I\}$ libovolné mohutnosti definovat symbol $\bigtimes_{\alpha \in I} M_\alpha$ jako množinu všech zobrazení $f\colon I \to \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha$ splňujících $f(\alpha) \in M_\alpha$ pro všechna $\alpha \in I$. Existence takových zobrazení souvisí s axiomem výběru (viz dále příklad 10b).

(c) Pomocí funkcí $f\colon X \to \mathbb{C}$ a $g\colon Y \to \mathbb{C}$ je na množině $X \times Y$ definována funkce $[x, y] \mapsto f(x)\,g(y)$; budeme ji značit $f \times g$, tj.

$$(f \times g)(x, y) := f(x)\,g(y)\,, \qquad x \in X,\ y \in Y.$$

(d) Nechť $M \subset X \times Y$ a $x \in X$; množinu

$$M_x := \{y \in Y\colon [x, y] \in M\}$$

nazýváme ***x*-řezem** množiny M; podobně $M^y := \{x \in X\colon [x, y] \in M\}$ je ***y*-řez** množiny M.

Pro dané σ-algebry $\mathscr{A} \subset 2^X$, $\mathscr{B} \subset 2^Y$ se σ-algebra $\mathfrak{A}(\mathscr{A} \times \mathscr{B}) \subset 2^{X \times Y}$ nazývá **direktním součinem** σ-algeber $\mathscr{A}$ a $\mathscr{B}$ a značí $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, tj.

$$\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} := \mathfrak{A}(\mathscr{A} \times \mathscr{B})\,. \tag{14a}$$

A.1.9 Příklady: (a) Z borelovských množin prostorů $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$ můžeme pomocí (14a) vytvořit σ-algebru $\mathscr{B}^m \otimes \mathscr{B}^n \subset 2^{\mathbb{R}^{m+n}}$. Ukážeme, že obsahuje právě všechny borelovské množiny prostoru $\mathbb{R}^{m+n}$, tj. že platí

$$\mathscr{B}^m \otimes \mathscr{B}^n = \mathscr{B}^{m+n}\,. \tag{14b}$$

Současně, podle (12b) je $\mathscr{J}^{m+n} \subset \mathscr{B}^m \times \mathscr{B}^n$ a odtud $\mathscr{B}^{m+n} \subset \mathscr{B}^m \otimes \mathscr{B}^n$. Pro platnost opačné inkluze stačí, aby pro každé $M \in \mathscr{B}^m$ a $N \in \mathscr{B}^n$ patřilo $M \times N$ do $\mathscr{B}^{m+n}$, což je ekvivalentní podmínkám $M \times \mathbb{R}^n \in \mathscr{B}^{m+n}$ a $\mathbb{R}^m \times N \in \mathscr{B}^{m+n}$; ověříme např. první z nich. Uvažujme zobrazení $[x, y] \mapsto f(x, y) := x$, kde $x \in \mathbb{R}^m$ a $y \in \mathbb{R}^n$. Pro libovolnou množinu $M \subset \mathbb{R}^m$ platí $f^{(-1)}(M) = M \times \mathbb{R}^n$; speciálně máme

$f^{(-1)}(\mathscr{J}^m) = \mathscr{J}^m \times \{\mathbb{R}^n\}$ (užili jsme (12a) a označení z příkladu 5). Nyní pro každé $J \in \mathscr{J}^m$ je $J \times \mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} J \times K_j$, kde $K_j := \mathop{\times}_{\alpha=1}^{n} (-j, j)$, a protože $J \times K_j \in \mathscr{J}^{m+n}$, patří $J \times \mathbb{R}^n$ do $\mathscr{B}^{m+n}$. Je tedy $f^{(-1)}(\mathscr{J}^m) \subset \mathscr{B}^{m+n}$; rovnost (9) pak dá $f^{(-1)}(\mathscr{B}^m) \subset \mathscr{B}^{m+n}$, tj. $M \times \mathbb{R}^n \in \mathscr{B}^{m+n}$ pro každé $M \in \mathscr{B}^m$.

(b) Jsou dány σ-algebry $\mathscr{A} \subset 2^X$, $\mathscr{B} \subset 2^Y$; označme $\mathscr{S}$ systém všech množin $M \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ takových, že $M_x \in \mathscr{B}$ pro všechna $x \in X$ a $M^y \in \mathscr{A}$ pro všechna $y \in Y$. Je zřejmé, že

$$\mathscr{A} \times \mathscr{B} \subset \mathscr{S}. \tag{15}$$

Z definice řezu ihned plyne $Y \setminus M_x = [(X \times Y) \setminus M]_x$ a $(\bigcup_j M_j)_x = \bigcup_j (M_j)_x$ pro libovolný systém $\{M_j\}_{j=1}^n$, $n \leqq \infty$. Totéž platí pro y-řezy, a protože $X \times Y \in \mathscr{S}$, je systém $\mathscr{S}$ σ-algebra. Ze vztahů (14a) a (15) pak plyne $\mathscr{S} = \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$. *Pro každé $M \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ a všechna $x \in X$ a $y \in Y$ tedy platí $M_x \in \mathscr{B}$ a $M^y \in \mathscr{A}$.*

Každá podmnožina $R_\varphi \subset X \times X$ definuje **relaci** φ na množině X; pokud $[x, y] \in R_\varphi$, říkáme, že prvek x je v relaci s y a píšeme $x \,\varphi\, y$. Ve speciálním případě, kdy každý x-řez množiny R_φ obsahuje nejvýše jeden prvek, je φ zobrazení z X do X s definičním oborem $D_\varphi = \bigcup_{y \in X} (R_\varphi)^y$.

A.1.10 Příklady: (a) **Ekvivalence prvků** množiny X je relace $\sim$ na X, která splňuje podmínky *reflexivity* ($x \sim x$ pro každé $x \in X$), *symetrie* ($x \sim y \Rightarrow y \sim x$) a *tranzitivity* ($x \sim y$ a $y \sim z \Rightarrow x \sim z$). Pro každé $x \in X$ nazýváme **třídou ekvivalence** prvku x množinu $T_x := \{y \in X : y \sim x\}$. Z tranzitivity plyne, že $T_x = T_y$ právě tehdy, když $x \sim y$, a $T_x \cap T_y = \emptyset$ pro $[x, y] \notin R_\sim$. Množina X je proto rovna disjunktnímu sjednocení tříd ekvivalence.

(b) **Částečné uspořádání** v množině X je relace $\prec$, která je reflexivní, tranzitivní a *antisymetrická* (z podmínek $x \prec y$ a $y \prec x$ plyne $x = y$). Například v systému 2^S je částečným uspořádáním inkluze podmnožin množiny S. Nechť X je částečně uspořádaná množina; podmnožina $M \subset X$ je *uspořádaná*, jestliže pro každou dvojici $x, y \in M$ platí $x \prec y$ nebo $y \prec x$. Prvek $x \in X$ je *horní hranicí dané* podmnožiny $N \subset X$, pokud $y \prec x$ pro všechna $y \in N$. *Maximálním prvkem* množiny X nazveme každé $m \in X$ takové, že pro libovolné $x \in X$ z podmínky $m \prec x$ plyne $x = m$. Platí následující tvrzení, tzv. **Zornovo lemma:** *jestliže v částečně uspořádané množině X má každá uspořádaná podmnožina $M \subset X$ horní hranici, existuje v X maximální prvek.*

Zornovo lemma je ekvivalentní tzv. **axiomu výběru**, který postuluje pro indexovou množinu I libovolné mohutnosti a každý systém $\{M_\alpha : \alpha \in I\}$ existenci zobrazení $\alpha \mapsto x_\alpha$ takového, že $x_\alpha \in M_\alpha$ pro všechna $\alpha \in I$ (viz např. [[DS 1]], § I.2, [[Ku]], § I.6).

A.2 MĚŘITELNÉ FUNKCE

Množinu X spolu se σ-algebrou $\mathscr{A} \subset 2^X$ nazýváme **měřitelným prostorem** $(X,\mathscr{A})$; prvkům σ-algebry $\mathscr{A}$ se pak říká měřitelné množiny. O funkci $f\colon X \to \mathbb{R}$ říkáme, že je **měřitelná** (vzhledem k $\mathscr{A}$), jestliže $f^{(-1)}(J) \in \mathscr{A}$ pro každý omezený interval $J \subset \mathbb{R}$, tj. $f^{(-1)}(\mathscr{J}) \subset \mathscr{A}$.

A.2.1 Poznámka: Pomocí formulí (A.1.7a, b), (A.1.9) a toho, že každá otevřená množina $G \subset \mathbb{R}$ je rovna nejvýše spočetnému sjednocení omezených intervalů, se ověří ekvivalence následujících podmínek: (i) f je měřitelná, (ii) $f^{(-1)}(c, +\infty) \in \mathscr{A}$ pro všechna $c \in \mathbb{R}$, (iii) $f^{(-1)}(G) \in \mathscr{A}$ pro každou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}$, (iv) $f^{(-1)}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{A}$.

Funkce $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je **borelovská**, je-li měřitelná vzhledem k σ-algebře $\mathscr{B}^d$ borelovských množin prostoru $\mathbb{R}^d$.

A.2.2 Příklad: Nechť $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce; pro každou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}$ je pak $f^{(-1)}(G)$ otevřená v $\mathbb{R}^d$, tj. $f^{(-1)}(G) \in \mathscr{B}^d$; *každá spojitá funkce je tudíž borelovská.* Uvažujme dále obecný měřitelný prostor $(X,\mathscr{A})$ a měřitelnou funkci $f\colon X \to \mathbb{R}$. Je-li funkce $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borelovská, dostáváme podle (A.1.8c) $(g \circ f)^{(-1)}(J) = f^{(-1)}(g^{(-1)}(J))$ pro každé $J \in \mathscr{J}$, a protože $g^{(-1)}(J) \in \mathscr{B}$, patří $(g \circ f)^{(-1)}(J)$ do $\mathscr{A}$. *Pro každou měřitelnou funkci $f\colon X \to \mathbb{R}$ a borelovskou funkci $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je složená funkce $g \circ f$ měřitelná.*

A.2.3 Věta: (a) Jestliže funkce $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné, je měřitelná libovolná reálná lineární kombinace $af + bg$, součin fg a rovněž funkce $x \mapsto 1/f(x)$, pokud $f(x) \neq 0$ pro všechna $x \in X$.

(b) Je-li posloupnost $\{f_n(x)\}$ měřitelných funkcí konvergentní pro každé $x \in X$, je funkce $x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ měřitelná.

Důkaz viz např. [[KF]], § V.4.

A.2.4 Poznámka: Pojem měřitelnosti je účelné zavést i pro komplexní funkce (vše se opět vztahuje k danému měřitelnému prostoru $(X,\mathscr{A})$). Funkce $\varphi\colon X \to \mathbb{C}$ je měřitelná, jsou-li měřitelné funkce $f = \operatorname{Re}\varphi$ a $g = \operatorname{Im}\varphi$. Ukážeme, že *funkce $\varphi\colon X \to \mathbb{C}$ je měřitelná právě tehdy, když pro každou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{C}$ platí $\varphi^{(-1)}(G) \in \mathscr{A}$.* Postačující podmínka plyne z toho, že pro každé $c \in \mathbb{R}$ jsou množiny $R_c := \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > c\}$ a $I_c := \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z > c\}$ otevřené, přičemž $\varphi^{(-1)}(R_c) = f^{(-1)}(c, +\infty)$ a $\varphi^{(-1)}(I_c) = g^{(-1)}(c, +\infty)$. K ověření nutné podmínky užijeme zobrazení $z \mapsto j(z) := [\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z]$, které je zjevně izometrií prostorů $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$. Jelikož pro každou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{C}$ je $\tilde{G} := j(g) \subset \mathbb{R}^2$ otevřená a $\varphi^{(-1)}(G) = \psi^{(-1)}(\tilde{G})$, kde $\psi := j \circ \varphi$, stačí ukázat, že $\psi^{(-1)}(\mathscr{B}^2) \subset \mathscr{A}$. To však plyne z (A.1.9), uvážíme-li, že pro libovolná $J, K \subset \mathscr{J}$ je $\psi^{(-1)}(J \times K) = f^{(-1)}(J) \cap g^{(-1)}(K) \in \mathscr{A}$. Snadno rovněž nahlédneme, že obě tvrzení věty 3 zůstávají v platnosti pro komplexní funkce s tím, že čísla a, b jsou obecně komplexní.

A.2.5 Příklady: (a) Nechť funkce $f\colon X \to \mathbb{R}$ je měřitelná; potom množiny $X_{\pm}(f) := \{x \in X\colon \pm f(x) \geqq 0\}$ jsou měřitelné a $f^{\pm} := \pm f\chi_{X_{\pm}(f)}$ jsou měřitelné funkce. Je zřejmé, že pro každé $x \in X$ platí

$$f^{\pm}(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| \pm f(x)), \tag{1a}$$

takže

$$f = f^{+} - f^{-}, \qquad |f| = f^{+} + f^{-}. \tag{1b}$$

(b) Pro měřitelnou komplexní funkci φ je funkce $x \mapsto |\varphi(x)|$ rovněž měřitelná. To plyne ze vztahu $|\varphi| = [(\mathrm{Re}\,\varphi)^2 + (\mathrm{Im}\,\varphi)^2]^{1/2}$, věty 3a a příkladu 2.

(c) Užitečným rozšířením věty 3a je následující tvrzení: je-li $f\colon X \to \mathbb{R}$ měřitelná funkce, je funkce

$$x \mapsto h(x) := \begin{cases} 1/f(x), & f(x) \neq 0, \\ 0, & f(x) = 0, \end{cases}$$

rovněž měřitelná. Skutečně, pro $c > 0$ je $h^{(-1)}(c, +\infty) = f^{(-1)}(0, 1/c)$, dále $h^{(-1)}(0, +\infty) = f^{(-1)}(0, +\infty)$ a konečně $h^{(-1)}(c, +\infty) = f^{(-1)}[0, +\infty) \cup \cup f^{(-1)}(-\infty, 1/c)$ pro $c < 0$.

Funkce $\varphi\colon X \to \mathbb{C}$ je **jednoduchá** (**σ-jednoduchá**), jestliže

$$\varphi = \sum_n y_n \chi_{M_n}, \tag{2}$$

kde $y_n \in \mathbb{C}$ a množiny $M_n \in \mathscr{A}$ tvoří disjunktní konečný (spočetně nekonečný) systém takový, že $\bigcup_n M_n = X$. Každá jednoduchá (σ-jednoduchá) funkce je tedy definitoricky měřitelná. Zápis (2) není jednoznačný, pokud nepožadujeme, aby čísla y_n byla navzájem různá. Pomocí evidentních vztahů

$$\chi_{M \cup N} = \chi_{M \setminus N} + \chi_N = \chi_{M \setminus N} + \chi_{M \cap N} + \chi_N - \chi_{M \cap N} = \chi_M + \chi_N - \chi_{M \cap N} \tag{3a}$$

$$\chi_{M \cap N} = \chi_M \chi_N \tag{3b}$$

zjistíme, že množina jednoduchých funkcí je uzavřená vůči bodovým operacím $(\alpha\varphi + \psi)(x) := \alpha\,\varphi(x) + \psi(x)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, a násobení $(\varphi\psi)(x) := \varphi(x)\,\psi(x)$. Totéž platí pro množinu σ-jednoduchých funkcí.

K dané měřitelné funkci $f\colon X \to \mathbb{R}$ sestrojíme posloupnost $\{f_n\}$ σ-jednoduchých funkcí

$$f_n \equiv \sum_m \frac{m}{n} \chi_{M_{nm}}, \qquad M_{nm} := f^{(-1)}\left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right), \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

takže pro každé $x \in X$ platí $|f(x) - f_n(x)| < 1/n$. Jestliže f je omezená, $\sup_{x \in X} |f(x)| = c$, je $M_{nm} = \emptyset$, jakmile $|m + 1| > nc$; funkce f_n jsou v tomto případě jednoduché. Vezmeme-li ještě v úvahu větu 3b, dostáváme následující kritérium měřitelnosti.

A.2.6 Tvrzení: Funkce f: $X \to \mathbb{R}$ je měřitelná právě tehdy, když existuje posloupnost $\{f_n\}$ σ-jednoduchých funkcí, která konverguje k f stejnoměrně na X. Je-li f omezená, jsou funkce f_n jednoduché.

A.2.7 Poznámka: Funkce $g_n \equiv \sum_n m\, 2^{-n} \chi_{B_{nm}}$, kde $B_{nm} := f^{(-1)}\left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right)$ tvoří *neklesající* posloupnost, která stejnoměrně konverguje k f. Kromě toho posloupnost jednoduchých funkcí $s_n := \sum_{m=-n2^n}^{n2^n} m\, 2^{-n} \chi_{B_{nm}}$ konverguje k f bodově pro všechna $x \in X$.

Direktním součinem měřitelných prostorů $(X, \mathscr{A})$ a $(Y, \mathscr{B})$ nazýváme měřitelný prostor $(X \times Y, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$ – viz (A.1.14a). Mějme funkci φ: $M \to \mathbb{C}$, kde $M \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$; jejím **$x$-řezem** nazýváme funkci φ_x definovanou na M_x vztahem $\varphi_x(y) := \varphi(x, y)$. Podobně pro **$y$-řez** platí $\varphi^y(x) := \varphi(x, y)$, $x \in M^y$. Nechť φ je měřitelná, takže pro každou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{C}$ je $\varphi^{(-1)}(G) \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$. Nyní pro všechna $x \in X$ platí

$$(\varphi^{(-1)}(G))_x = \{y\colon [x, y] \in \varphi^{(-1)}(G)\} = \{y\colon \varphi_x(y) \in G\} = \varphi_x^{(-1)}(G)$$

a podle příkladu A.1.9b je $\varphi_x^{(-1)}(G) = (\varphi^{(-1)}(G))_x \in \mathscr{B}$. Podobně zjistíme, že $(\varphi^y)^{(-1)}(G) \in \mathscr{A}$, což vede k následujícímu závěru.

A.2.8 Tvrzení: Je-li dán měřitelný prostor $(X \times Y, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$, množina $M \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ a měřitelná funkce φ: $M \to \mathbb{C}$, pak pro každé $x \in X$ je funkce φ_x měřitelná vzhledem k $\mathscr{B}$ pro každé $y \in Y$ je φ^y měřitelná vzhledem k $\mathscr{A}$.

A.3 FUNKCE MNOŽINY. MÍRA

Zobrazení λ, které je definováno na nějakém množinovém systému $\mathscr{S}$, přičemž pro každé $M \in \mathscr{S}$ je $\lambda(M)$ buď nezáporné číslo nebo $\lambda(M) = +\infty$, nazýváme (nezápornou) **funkcí množiny**. V následujících definicích znamenají M, N libovolné prvky $\mathscr{S}$. Funkce množiny λ je

(i) **monotónní**, platí-li implikace $M \subset N \Rightarrow \lambda(M) \leqq \lambda(N)$,

(ii) **aditivní**, jestliže z podmínek $M \cup N \in \mathscr{S}$ a $M \cap N = \emptyset$ plyne

$$\lambda(M \cup N) = \lambda(M) + \lambda(N),$$

(iii) **σ-aditivní**, pokud pro každý disjunktní nejvýše spočetný podsystém $\{M_n\} \subset \mathscr{S}$ takový, že $\bigcup_n M_n \in \mathscr{S}$, platí

$$\lambda(\bigcup_n M_n) = \sum_n \lambda(M_n) .$$

Funkci množiny μ, která je definována na jisté σ-algebře $\mathscr{A} \subset 2^X$, je σ-aditivní a splňuje $\mu(\emptyset) = 0$[1]) nazýváme (nezápornou) **mírou** na X.

Měřitelnému prostoru $(X, \mathscr{A})$, na němž je definována míra μ, se říká **prostor s mírou** – značení $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Pro měřitelné funkce a množiny $M \in \mathscr{A}$ se v tomto případě často užívá přívlastku *μ-měřitelný*; budeme dále říkat, že množina $M \in \mathscr{A}$, pro niž $\mu(M) = 0$, je *μ-nulová*. Výroková funkce $V(.)$ definovaná na $M \in \mathscr{A}$ platí *μ-skoro všude* v M, pokud množina $N \subset M$, na níž V neplatí, je μ-nulová. Platí-li pro libovolnou μ-nulovou množinu M implikace $N \subset M \Rightarrow N \in \mathscr{A}$, mluvíme o *úplné míře*. Každou míru lze standardním způsobem rozšířit na úplnou míru ([[Ru 1]], § 1.36).

Z aditivity vyplývá *monotonie míry*; dále pro libovolné množiny $M, N \in \mathscr{A}$ splňující $\mu(M \cap N) < \infty$ je (srv. s (A.2.3a))

$$\mu(M \cup N) = \mu(M) + \mu(N) - \mu(M \cap N) \leqq \mu(M) + \mu(N) . \qquad (1)$$

Vezměme libovolný systém $\{M_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{A}$ a utvořme disjunktní systém $\{N_n\}_{n=1}^{\infty}$ podle (A.1.4), takže $N_n \subset M_n$ a $N_n \in \mathscr{A}$ pro $n = 1, 2, \ldots$. Pomocí σ-aditivity a monotonie dostáváme

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(N_n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(M_n) . \qquad (2)$$

Jestliže navíc $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$, pak pro každé k platí $\mu(M_k) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} M_n\right) = \sum_{n=1}^{k} \mu(N_n)$, a protože $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(N_n) = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(N_n) = \lim_{k \to \infty} \mu(M_k)$, vidíme, že *pro každou neklesající posloupnost $\{M_n\} \subset \mathscr{A}$ platí*

$$\lim_{k \to \infty} \mu(M_k) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) . \qquad (3a)$$

Odtud *pro libovolnou nerostoucí posloupnost $\{N_n\} \subset \mathscr{A}$* takovou, že $\mu(N_n) < \infty$ alespoň pro jedno n, vyplývá

$$\lim_{k \to \infty} \mu(N_k) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} N_n\right) . \qquad (3b)$$

[1]) Pokud $\mu(M) < \infty$ alespoň pro jedno $M \in \mathscr{A}$, plyne tento vztah ze σ-aditivity.

Říkáme, že míra μ je **konečná**, resp. **σ-konečná**, pokud $\mu(X) < \infty$, resp. $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, kde $M_n \in \mathscr{A}$ a $\mu(M_n) < \infty$ pro $n = 1, 2, \ldots$.

A.3.1 Poznámky: (a) Uvažujme funkci $\varrho_\mu : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \to [0, \infty)$ definovanou předpisem $\varrho_\mu(M \times N) := \mu(M \triangle N)$. Z monotonie a vztahu (A.1.5d) je vidět, že podmínkou $\mu(M \triangle N) = 0$ je zadána relace ekvivalence $M \sim N$ na $\mathscr{A}$ a že ϱ_μ je metrika na příslušné množině tříd ekvivalence; v tomto smyslu lze číslo $\mu(M \triangle N)$ považovat za „vzdálenost množin M a N vzhledem k míře μ". Přitom $\mu(M \triangle N) = 0$ implikuje $\mu(M \setminus N) = \mu(N \setminus M) = 0$ a odtud $\mu(M) = \mu(N) = \mu(M \cap N)$. Je-li míra μ konečná, platí i obrácená implikace.

(b) Nechť (X, τ) je topologický prostor, v němž každá otevřená množina je rovna spočetnému sjednocení kompaktních množin (příkladem je $\mathbb{R}^d$, kde každá otevřená množina je spočetným sjednocením otevřených koulí, a libovolnou otevřenou kouli lze zapsat jako spočetné sjednocení uzavřených koulí). Každá míra μ na X s definičním oborem $\mathscr{A} \supset \tau$ má následující vlastnost: jestliže ke každému $x \in G$, kde $G \in \tau$, existuje μ-nulové okolí $U_0(x)$, pak $\mu(G) = 0$. Skutečně, ze vztahů $G = \bigcup_n K_n$, K_n kompaktní, a $G = \bigcup_{x \in G} U_0(x)$ plyne existence spočetné množiny $\{x_j\} \subset G$ takové, že $G = \bigcup_j U_0(x_j)$; potom podle nerovnosti (2) je $\mu(G) \leqq \sum_j \mu(U_0(x_j)) = 0$.

Každý bod $x \in X$ takový, že $\{x\} \in \mathscr{A}$ a $\mu(\{x\}) \neq 0$, nazveme **diskrétním bodem** míry μ; množinu všech diskrétních bodů označme P_μ. Míra μ je **diskrétní**, jestliže $P_\mu \in \mathscr{A}$ a

$$\mu(M) = \mu(M \cap P_\mu) \tag{4}$$

pro každé $M \in \mathscr{A}$. Je-li μ konečná míra, je P_μ nejvýše spočetná množina, neboť množiny $\{x \in P_\mu : \mu(\{x\}) \geqq 1/n\}$ musí být konečné pro $n = 1, 2, \ldots$. Tentýž závěr zjevně platí i pro σ-konečné míry. *Pro každou σ-konečnou míru μ na $\mathscr{A}$ tedy platí $P_\mu \in \mathscr{A}$.*

A.3.2 Příklad: Pomocí množiny $\{x_j \in X : j = 1, 2, \ldots\}$ a posloupnosti $\{c_j\}$ kladných čísel takové, že $\sum_{j=1}^{\infty} c_j < \infty$, je vztahem

$$\mu_d(M) := \sum_j c_j \chi_M(x_j)$$

určena diskrétní míra na σ-algebře 2^X. Jelikož $\mu_d(X) = \sum_j c_j < \infty$, je třeba ověřit pouze σ-aditivitu. Nechť $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ je disjunktní systém, $S_n := \bigcup_{k=1}^{n} M_k$ a $S := \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$. Pro každé x_j platí $\lim_{n \to \infty} \chi_{S_n}(x_j) = \chi_S(x_j)$ a dále z nerovností $c_j \chi_{S_n}(x_j) \leqq c_j$ a podmínky $\sum_j c_j < \infty$ plyne stejnoměrná konvergence řady $\sum_j c_j \chi_{S_n}(x_j)$ vůči n, takže

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_{\mathrm{d}}(M_k) = \lim_{n \to \infty} \sum_j c_j \chi_{S_n}(x_j) = \sum_j c_j \chi_S(x_j) = \mu_{\mathrm{d}}(S) = \mu_{\mathrm{d}}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k\right).$$

Říkáme, že míra μ definovaná na σ-algebře $\mathscr{A} \subset 2^X$ je **soustředěna** na množině $S \in \mathscr{A}$, jestliže pro všechna $M \in \mathscr{A}$ je

$$\mu(M) = \mu(M \cap S). \tag{5a}$$

Např. každá diskrétní míra je soustředěna na množině svých diskrétních bodů. Podmínka (5a) je ekvivalentní implikaci

$$N \cap S = \emptyset \Rightarrow \mu(N) = 0, \tag{5b}$$

resp. rovnosti $\mu(X \setminus S) = 0$.

A.3.3 Poznámky: (a) Ze vztahu (5a) je vidět, že míra μ, která je soustředěna na množině S i na množině S', je soustředěna také na množině $S \cap S'$.
(b) Nechť μ je míra na topologickém prostoru (X, τ) taková, že $\tau \subset \mathscr{A}$; jejím **nosičem** nazýváme minimální uzavřenou množinu F, na níž je μ soustředěna. Pro nosič míry μ se užívá označení supp μ. Například nosičem diskrétní míry μ_{d} je uzávěr množiny P_{d} jejích diskrétních bodů; míra μ_{d} je totiž podle (4) soustředěna na P_{d}, a tím spíš na $\overline{P_{\mathrm{d}}}$, a pro libovolnou uzavřenou množinu F z podmínky $\mu_{\mathrm{d}}(X \setminus F) = 0$ plyne $P_{\mathrm{d}} \subset F$, tj. také $\overline{P_{\mathrm{d}}} \subset F$.

A.4 KONSTRUKCE MĚR. BORELOVSKÉ MÍRY

Nejprve probereme konstrukci míry, která spočívá v tzv. Lebesgueově rozšíření dané nezáporné σ-aditivní funkce množiny $\dot{\mu}$ definované na jistém okruhu $\mathscr{R} \subset 2^X$, přičemž se předpokládá, že existuje nejvýše spočetný disjunktní systém $\{B_n\} \subset \mathscr{R}$ splňující

$$\bigcup_n B_n = X, \qquad \text{kde} \quad \dot{\mu}(B_x) < \infty \quad \text{pro} \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Nechť $\mathscr{S}$ je systém všech nejvýše spočetných sjednocení množin okruhu $\mathscr{R}$; z (A.1.4) plyne, že každé $M \in \mathscr{S}$ lze zapsat pomocí nejvýše spočetného disjunktního systému $\{R_j\} \subset \mathscr{R}$ ve tvaru

$$M = \bigcup_j R_j. \tag{2a}$$

Z této definice a podmínky (1) vyplývají následující vlastnosti systému $\mathscr{S}$.

A.4.1 Lemma: (a) $\mathscr{R} \subset \mathscr{S}$ a $X \in \mathscr{S}$;
(b) $\mathscr{S}$ je uzavřený vůči spočetným sjednocením a konečným průnikům;

(c) $M \setminus R = M \cap (X \setminus R) \in \mathscr{S}$ pro každé $M \in \mathscr{S}$ a $R \in \mathscr{R}$.

Pomocí (2a) definujeme funkci množiny $\bar{\mu}$ na $\mathscr{S}$ předpisem

$$\bar{\mu}(M) := \sum_j \dot{\mu}(R_j), \qquad M \in \mathscr{S}. \tag{2b}$$

Ze σ-aditivity $\dot{\mu}$ plyne jednak $\bar{\mu} \restriction \mathscr{R} = \dot{\mu}$, jednak korektnost definice (2b); jestliže totiž $M = \bigcup_k \tilde{R}_k$, kde $\{\tilde{R}_k\} \subset \mathscr{R}$ je disjunktní systém, potom pomocí množin $R_{jk} := R_j \cap \tilde{R}_k \in \mathscr{R}$ dostáváme $\dot{\mu}(R_j) = \sum_k \dot{\mu}(R_{jk})$, resp. $\dot{\mu}(\tilde{R}_k) = \sum_j \dot{\mu}(R_{jk})$, a odtud plyne, že řada $\sum_j \dot{\mu}(R_j)$ konverguje právě tehdy, když $\sum_k \dot{\mu}(\tilde{R}_k) < \infty$, přičemž obě řady mají týž součet (viz ⟦Fi⟧, § XI.5). Analogickou úvahou zjistíme, že $\bar{\mu}$ je *σ-aditivní.*

Dále je $\bar{\mu}$ *monotónní.* Skutečně, nechť množiny M a $N \in \mathscr{S}$ splňují $M \subset N$; užijeme (2a) a pro $m = 1, 2, \ldots$ položíme $S_m := \bigcup_{j=1}^{m} R_j$, takže $S_m \in \mathscr{R}$, $S_m \subset \subset M \subset N$ a $N \setminus S_m \in \mathscr{S}$ (viz lemma 1c). Potom $\bar{\mu}(S_m) \leqq \bar{\mu}(S_m) + \bar{\mu}(N \setminus S_m) = = \bar{\mu}(N)$ a z (2b) plyne $\bar{\mu}(M) = \lim_{m \to \infty} \dot{\mu}(S_m) \leqq \bar{\mu}(N)$.

Mějme konečně nejvýše spočetný systém $\{M_n\} \subset \mathscr{S}$ a označme $S := \bigcup_n M_n$. Pomocí disjunktních rozkladů $M_n = \bigcup_n R_{nj}$, $R_{nj} \in \mathscr{R}$, dostaneme $S = \bigcup_{nj} R_{nj}$. Podle (A.1.4) přejdeme k disjunktnímu systému $\{\tilde{R}_{nj}\}$ takovému, že $\tilde{R}_{nj} \subset R_{nj}$ pro všechna n a j a $\bigcup_{nj} \tilde{R}_{nj} = S$; díky tomu, že $\mathscr{R}$ je okruh, patří $\tilde{R}_{nj}$ do $\mathscr{R}$. Ze vztahu (2b) a monotonie nyní pro $\sum_n \bar{\mu}(M_n) < \infty$ plyne $\bar{\mu}(S) = \sum_{nj} \dot{\mu}(\tilde{R}_{nj}) \leqq \sum_{nj} \dot{\mu}(R_{nj}) = = \sum_n \sum_j \dot{\mu}(R_{nj}) = \sum_n \bar{\mu}(M_n)$. Pro $\sum_n \bar{\mu}(M_n) = \infty$ je tato nerovnost triviální, takže pro každý nejvýše spočetný systém $\{M_n\} \subset \mathscr{S}$ je

$$\bar{\mu}\Big(\bigcup_n M_n\Big) \leqq \sum_n \bar{\mu}(M_n). \tag{3}$$

Této vlastnosti se říká spočetná semiaditivita. Snadno nahlédneme, že monotonie spolu se spočetnou semiaditivitou jsou ekvivalentní následující vlastnosti funkce $\bar{\mu}$ na $\mathscr{S}$.

A.4.2 Lemma: Nechť $M \in \mathscr{S}$ a $\{M_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathscr{S}$, kde $n \leqq \infty$; potom platí implikace

$$M \subset \bigcup_{k=1}^{n} M_k \Rightarrow \bar{\mu}(M) \leqq \sum_{k=1}^{n} \bar{\mu}(M_k).$$

V dalším kroku Lebesgueovy konstrukce se definuje **vnější míra** μ^*, což je následující rozšíření funkce $\bar{\mu}$ na celý systém 2^X:

$$\mu^*(A) := \inf\{\bar{\mu}(M) : M \in \mathscr{S}, M \supset A\}. \tag{4}$$

630 Ukážeme, že pro vnější míru zůstává zachována platnost lemmatu 2, tj., že pro každé $A \subset X$ a každý nejvýše spočetný systém $\{A_k\} \subset 2^X$ platí implikace

$$A \subset \bigcup_k A_k \Rightarrow \mu^*(A) \leqq \sum_k \mu^*(A_k)\,, \tag{5}$$

jež je opět ekvivalentní *monotonii* a *spočetné semiaditivitě vnější míry*. Ověření se provede takto: k libovolnému $\varepsilon > 0$ najdeme podle (4) množiny $M_k \in \mathscr{S}$, $M_k \supset A_k$, splňující $\ddot{\mu}(M_k) < \mu^*(A_k) + \varepsilon 2^{-k}$; odtud na základě nerovnosti (3) plyne $\ddot{\mu}(\bigcup_k M_k) < \sum_k \mu^*(A_k) + \varepsilon$, a protože množina $\bigcup_k M_k$ patří do $\mathscr{S}$ a obsahuje každou množinu $A \subset \bigcup_k A_k$, platí nerovnost $\mu^*(A) \leqq \ddot{\mu}(\bigcup_k M_k) < \sum_k \mu^*(A_k) + \varepsilon$.

Vnější míra však není σ-aditivní (dokonce ani aditivní) – viz např. [[Jar 2]]. § I.10; *vnější míra tedy není míra.* Její význam je dán tím, že systém

$$\mathscr{A}_\mu := \{A \subset X\colon \inf_{M \in \mathscr{S}} \mu^*(A \triangle M) = 0\}^1) \tag{6}$$

je σ-algebra. K důkazu budeme potřebovat několik pomocných tvrzení.

A.4.3 Lemma: (a) Každé $M \in \mathscr{S}$ patří do $\mathscr{A}_\mu$, speciálně $x \in \mathscr{A}_\mu$.
(b) Pro libovolné $A \subset X$ platí implikace

$$\mu^*(A) = 0 \Rightarrow A \in \mathscr{A}_\mu\,. \tag{7}$$

(c) Jestliže $A \in \mathscr{A}_\mu$ a $\mu^*(A) < \infty$, pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $R_\varepsilon \in \mathscr{R}$ takové, že $\ddot{\mu}(R_\varepsilon) < \infty$ a $\mu^*(A \triangle R_\varepsilon) < \varepsilon$.
Důkaz: Tvrzení (a) je zřejmé; (b) plyne z toho, že $\emptyset \in \mathscr{S}$ a pro $\mu^*(A) = 0$ je $\mu^*(A \triangle \emptyset) = 0$. K ověření (c) vezmeme libovolné $\varepsilon > 0$ a najdeme $M_\varepsilon \in \mathscr{S}$ takové, že $\mu^*(M_\varepsilon \triangle A) < \varepsilon$; přitom z inkluze (A.1.5c), implikace (5) a podmínky $\mu^*(A) < \infty$ plyne $\mu^*(M_\varepsilon) < \infty$. Dále disjunktní rozklad $M_\varepsilon = \bigcup_j R_j$, $R_j \in \mathscr{R}$ a formule (2b) zaručují existenci j_ε takového, že pro $R_\varepsilon := \bigcup_{j=1}^{j_\varepsilon} R_j \in \mathscr{R}$ platí $\ddot{\mu}(M_\varepsilon \setminus R_\varepsilon) = \ddot{\mu}(M_\varepsilon \triangle R_\varepsilon) < \varepsilon$, a důkaz se dokončí pomocí (A.1.5d) a implikace (5). ■

Přejdeme nyní k ověření toho, že $\mathscr{A}_\mu$ je σ-algebra. Mějme nejvýše spočetný systém $\{A_n\} \subset \mathscr{A}_\mu$ a $\varepsilon > 0$; podle (6) najdeme pro každé n množinu $M_n \in \mathscr{S}$ splňující $\mu^*(A_n \triangle M_n) < 2^{-n}\varepsilon$. Z inkluze

$$(\bigcup_n A_n) \triangle (\bigcup_n M_n) \subset \bigcup_n (A_n \triangle M_n)\,, \tag{8}$$

---

1) Díky implikaci (5) lze pro $\mu^*(X) < \infty$ číslo $\inf_{M \in \mathscr{S}} \mu^*(A \triangle M)$ interpretovat jako vzdálenost množiny A od systému $\mathscr{S}$ (viz poznámku A.3.1a); pak $\mathscr{A}_\mu$ má význam uzávěru systému $\mathscr{S}$.

(jež je důsledkem vztahů $(\bigcup_n A_n) \setminus (\bigcup_n M_n) = \bigcup_n (A_n \setminus \bigcup_j M_j) = \bigcup_n \bigcap_j (A_n \setminus M_j) \subset \subset \bigcup_n (A_n \setminus M_n))$, implikace (5) a lemmatu 1b pak plyne $\bigcup_n A_n \in \mathscr{A}_\mu$. Systém $\mathscr{A}_\mu$ je tedy uzavřený vůči nejvýše spočetným sjednocením, a protože $X \in \mathscr{A}_\mu$, zbývá ověřit implikaci

$$A \in \mathscr{A}_\mu \Rightarrow X \setminus A \in \mathscr{A}_\mu \tag{9}$$

(viz § A.1). K libovolnému $\varepsilon > 0$ najdeme opět $M_\varepsilon \in \mathscr{S}$ takové, že $\mu^*(A \triangle M_\varepsilon) < \varepsilon$; dále pomocí (1) získáme disjunktní rozklad $A = \bigcup_n A_n$, kde $A_n := A \cap B_n \subset B_n$. Pro množiny $M_\varepsilon^n := M_\varepsilon \cap B_n \in \mathscr{S}$ vztah (A.1.5e) dá $\mu^*(A_n \triangle M_\varepsilon^n) = \mu^*[(A \triangle M_\varepsilon) \cap B_n]$, takže $A_n \in \mathscr{A}_\mu$, přičemž z monotonie plyne $\mu^*(A_n) \leqq \mu^*(B_n) = \dot{\mu}(B_n) < \infty$. Na množiny A_n můžeme proto aplikovat lemma 3, a získat tak systém $\{R_n\} \subset \mathscr{R}$ splňující $\mu^*(A_n \triangle R_n) < 2^{-n}\varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$; díky (A.1.5e) a inkluzi $A_n \subset B_n$ lze vždy docílit toho, aby $R_n \subset B_n$. Označme $N := \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \in \mathscr{S}$; pomocí (A.1.5b) a (8) dostaneme

$$\mu^*[(X \setminus A) \triangle (X \setminus N)] = \mu^*(A \triangle N) \leqq \sum_n \mu^*(A_n \triangle R_n) < \varepsilon\,;$$

implikace (9) bude tedy platit, pokud $X \setminus N \in \mathscr{S}$. To však plyne z rozkladu $X \setminus N = \bigcup_j (B_j \setminus N) = \bigcup_j (B_j \setminus (B_j \cap N))$, inkluze $R_j \subset B_j$ a toho, že systém $\{B_j\}$ je disjunktní; pak totiž pro všechna j máme $B_j \cap N = B_j \cap R_j = R_j \in \mathscr{R}$, a tedy $B_j \setminus N = B_j \setminus (B_j \cap N) \in \mathscr{R}$.

Poslední krok Lebesgueovy konstrukce představuje důkaz následujícího tvrzení.

A.4.4 Věta: Pro danou nezápornou σ-aditivní funkci množiny $\dot{\mu}$ na okruhu $\mathscr{R}$ vyhovující podmínce (1) určují vztahy (2a, b), (4), (6) a

$$\mu := \mu^* \upharpoonright \mathscr{A}_\mu$$

úplnou σ-konečnou míru μ na σ-algebře $\mathscr{A}_\mu \supset \mathfrak{A}(\mathscr{R})$. Tato míra je jednoznačně určena funkcí $\dot{\mu}$ v tom smysu, že pro každou míru ν na $\mathfrak{A}(\mathscr{R})$, která je rozšířením funkce $\dot{\mu}$, platí $\nu = \mu \upharpoonright \mathfrak{A}(\mathscr{R})$.

Míru μ nazýváme **Lebesgueovým rozšířením** funkce množiny $\dot{\mu}$.

Důkaz: Nejprve ověříme aditivitu. Vezměme disjunktní množiny $A_1, A_2 \in \mathscr{A}_\mu$; jestliže $\mu(A_1) = \infty$ nebo $\mu(A_2) = \infty$, plyne z monotonie $\mu(A_1 \cup A_2) = \infty$, takže zbývá případ $\mu(A_r) < \infty$ pro $r = 1, 2$. Nechť R_r jsou množiny splňující tvrzení (c) lemmatu 3 pro $A = A_r$; pomocí inkluze (A.1.5c) a implikace (5) dostáváme $\mu(A_1) + \mu(A_2) < \mu(R_1) + \mu(R_2) + 2\varepsilon$. Dále díky aditivitě funkce $\dot{\mu}$ je $\mu(R_1) + \mu(R_2) = \mu(R_1 \cup R_2) + \mu(R_1 \cap R_2)$ (viz (A.3.1)) a opětovné užití (A.1.5) a (8) dá

$$\begin{aligned}\mu(A_1) + \mu(A_2) &< \mu(R_1 \cup R_2) + \mu(R_1 \cap R_2) + 2\varepsilon \\ &\leqq \mu(A_1 \cup A_2) + \mu((A_1 \cup A_2) \triangle (R_1 \cup R_2)) + \mu(R_1 \cap R_2) + 2\varepsilon \\ &< \mu(A_1 \cup A_2) + \mu(R_1 \cap R_2) + 4\varepsilon .\end{aligned}$$

Nyní z podmínky $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ a vztahů (A.1.5c–e) plyne

$$\begin{aligned}R_1 \cap R_2 = (R_1 \cap R_2) \triangle (A_1 \cap A_2) \subset [(R_1 \cap R_2) \triangle (R_1 \cap A_2)] \cup \\ \cup [(R_1 \cap A_2) \triangle (A_1 \cap A_2)] \subset (R_2 \triangle A_2) \cup (R_1 \triangle A_1) ,\end{aligned}$$

takže $\mu(R_1 \cap R_2) < 2\varepsilon$. Celkem tedy pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí $\mu(A_1) + \mu(A_2) < < \mu(A_1 \cap A_2) + 6\varepsilon$, což spolu s implikací (5) dává aditivitu funkce μ.

Pro disjunktní systém $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathscr{A}_\mu$ a množinu $A := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ je podle (5) $\mu(A) \leqq \leqq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ a současně pro každé přirozené n z inkluze $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset A$ a aditivity plyne $\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) \leqq \mu(A)$; limitním přechodem pak dostaneme σ-aditivitu funkce μ. Tím je dokázáno, že μ je míra (zjevně je $\mu(\emptyset) = 0$). Konečně z podmínky (1) plyne σ-konečnost a z implikace (7) úplnost.

Zbývá ověřit jednoznačnost. Předpokládejme nejprve, že míra ν je konečná, a nechť $\mathfrak{M} := \{M \in \mathfrak{A}(\mathscr{R}) : \mu(M) = \nu(M)\}$. Z formulí (A.3.3a, b) vyplývá, že $\mathfrak{M}$ je monotonní systém. Přitom $\mathscr{R} \subset \mathfrak{M}$ a $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathfrak{M}$; podle implikace (A.1.6b) dostáváme $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{M}(\mathscr{R}) = \mathfrak{A}(\mathscr{R})$, a tedy $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}(\mathscr{R})$, tj. $\mu \upharpoonright \mathfrak{A}(\mathscr{R}) = \nu$. Je-li míra ν nekonečná, nelze užít (A.3.3b); díky podmínce (1) se však i v tomto případě hodí předchozí úvahy. Postup je následující. Pro $n = 1, 2, \ldots$ je systém $\mathscr{R} \cap B_n \subset 2^{B_n}$ okruh a platí $\nu(B_n) = \mu(B_n) < \infty$. Lebesgueovo rozšíření funkce $\dot{\mu}_n := \dot{\mu} \upharpoonright (\mathscr{R} \cap B_n)$ označme μ_n; jelikož míry $\nu \upharpoonright \mathfrak{A}(\mathscr{R} \cap B_n)$ a $\mu \upharpoonright \mathfrak{A}(\mathscr{R} \cap B_n)$ jsou konečné a $\nu(R_n) = \mu(R_n) = \dot{\mu}_n(R_n)$ pro každé $R_n \in \mathscr{R} \cap B_n$, je podle předchozího $\nu(M_n) = \mu(M_n) = \mu_n(M_n)$ pro všechna $M_n \in \mathfrak{A}(\mathscr{R} \cap B_n)$. Nyní $\mathfrak{A}(\mathscr{R} \cap B_n) = \mathfrak{A}(\mathscr{R}) \cap B_n$ (viz [[Hal 1]], § 5, věta 5); pro každé $M \in \mathfrak{A}(\mathscr{R})$ a všechna $n = 1, 2, \ldots$ tedy platí $\nu(M \cap B_n) = \mu(M \cap B_n)$. Pomocí (1) pak dostáváme $\nu(M) = \mu(M)$. ■

Míra μ na $\mathbb{R}^d$ je **borelovská**, je-li jejím definičním oborem σ-algebra $\mathscr{B}^d$ borelovských množin a

$$\mu(K) < \infty \tag{10a}$$

pro všechny kompaktní intervaly $K \subset \mathbb{R}^d$. Jelikož každý prvek okruhu $\mathscr{R}^d$ (viz příklad A.1.1) a také každá kompaktní množina $C \subset \mathbb{R}^d$ je částí nějakého kompaktního intervalu, je (10a) ekvivalentní požadavku konečnosti funkce

$\dot{\mu} := \mu \restriction \mathscr{R}^d$, resp. podmínce

$$\mu(C) < \infty \tag{10b}$$

pro každou kompaktní množinu.[1])

Každá borelovská míra μ na $\mathbb{R}^d$ je σ-konečná a funkce $\mu \restriction \mathscr{R}^d$ splňuje podmínky (1), neboť $\mathbb{R}^d$ lze zapsat jako spočetné sjednocení kompaktních intervalů; podle věty 4 jsou tedy borelovské míry vzájemně jednoznačně přiřazeny σ-aditivním konečným funkcím $\dot{\mu}$ na $\mathscr{R}^d$. Pro tyto míry je však možno postoupit o krok dále. Speciální vlastnosti prostoru $\mathbb{R}^d$, konkrétně to, že ke každému omezenému intervalu $J \in \mathscr{J}^d$ existuje nerostoucí posloupnost otevřených intervalů $I_n \supset J$ a neklesající posloupnost kompaktních intervalů $K_n \subset J$, přičemž

$$\bigcap_n I_n = \bigcup_n K_n = J, \tag{11a}$$

umožňují nahradit požadavek σ-aditivity ekvivalentní podmínkou

$$\dot{\mu}(J) = \inf\{\dot{\mu}(I) \colon I \in \mathscr{G}_J^d\} = \sup\{\dot{\mu}(K) \in \mathscr{F}_J^d\}, \qquad J \in \mathscr{J}^d, \tag{11b}$$

kde $\mathscr{G}_J^d \subset \mathscr{J}^d$ je systém všech otevřených intervalů obsahujících J a $\mathscr{F}_J^d$ systém všech kompaktních intervalů obsažených v J. Funkci $\tilde{\mu}$ na $\mathscr{J}^d$, která je konečná, aditivní a splňuje (11b) nazveme **regulární funkcí intervalu** v $\mathbb{R}^d$.

A.4.5 Tvrzení: Pro každou konečnou σ-aditivní funkci $\dot{\mu}$ na $\mathscr{R}^d$ je $\dot{\mu} \restriction \mathscr{J}^d$ regulární a naopak, každou regulární funkci intervalu v $\mathbb{R}^d$ lze standardně rozšířit na konečnou σ-aditivní funkci na $\mathscr{R}^d$.

Důkaz: Ze σ-aditivity funkce $\dot{\mu}$, vztahu (11a) a formulí (A.3.3) plyne (11b). Nechť naopak $\tilde{\mu}$ je regulární funkce intervalu v $\mathbb{R}^d$. Pro libovolné $R \in \mathscr{R}^d$, $R = \bigcup_j J_j$, kde $\{J_j\} \subset \mathscr{J}^d$ je konečný disjunktní systém, položíme

$$\dot{\mu}(R) := \sum_j \tilde{\mu}(J_j)\,; \tag{12}$$

díky aditivitě funkce $\tilde{\mu}$ je tato definice korektní (srov. s formulí (2b)) a funkce $\dot{\mu}$ je aditivní a monotónní. Konečně pomocí (11b) zjistíme, že ke každému $\varepsilon > 0$ existují množiny $K, G \in \mathscr{R}^d$ takové, že K je kompaktní, G je otevřená a platí $K \subset R \subset G$, $\dot{\mu}(K) > \dot{\mu}(R) - \varepsilon$ a $\dot{\mu}(G) < \dot{\mu}(R) + \varepsilon$. Z těchto vlastností funkce $\dot{\mu}$ plyne její spočetná semiaditivita, jejímž snadným důsledkem je σ-aditivita (podrobnosti lze najít např. v [[KF]], § V.1, věta 2). ■

Pro okruh $\mathscr{R} = \mathscr{R}^d$ lze tedy větu 4 přeformulovat následovně.

A.4.6 Věta: Formulemi (12), (2) a (4) je každé regulární funkci $\tilde{\mu}$ intervalu v $\mathbb{R}^d$ přiřazena právě jedna borelovská míra $\mu := \mu^* \restriction \mathscr{B}^d$ na $\mathbb{R}^d$, $\tilde{\mu} \to \mu$. Naopak, pro

[1]) Obecně rozumíme borelovskou mírou na topologickém prostoru (X, τ) míru μ definovanou na σ-algebře $\mathscr{B}_X = \mathfrak{A}(\tau)$ a splňující (10b).

 každou borelovskou míru μ na $\mathbb{R}^d$ je $\tilde{\mu} := \mu \upharpoonright \mathscr{I}^d$ regulární funkce intervalu, přičemž $\tilde{\mu} \to \mu$.

Zobrazení $\tilde{\mu} \to \mu$ je tedy bijekce množiny regulárních funkcí intervalu v $\mathbb{R}^d$ a množiny borelovských měr na $\mathbb{R}^d$.

A.4.7 Důsledek: Jestliže borelovské míry μ a ν na $\mathbb{R}^d$ splňují $\mu(J) = \nu(J)$ pro každé $J \in \mathscr{I}^d$, potom $\mu = \nu$.

A.4.8 Příklad: Popíšeme jednoduchou metodu konstrukce regulární funkce intervalu v $\mathbb{R}$. Pro danou neklesající funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je spojitá zprava, a libovolná $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, položíme

$$\tilde{\mu}_f(a, b) := f(b - 0) - f(a)\,, \qquad \tilde{\mu}_f\{a\} := f(a) - f(a - 0)\,. \tag{13}$$

Pomocí $\tilde{\mu}_f(a, b] := \tilde{\mu}_f(a, b) + \tilde{\mu}_f\{b\} = f(b) - f(a)$ a analogických definic pro intervaly $[a, b)$ a $[a, b]$ získáme konečnou aditivní funkci $\tilde{\mu}_f$ na $\mathscr{I}^1 \equiv \mathscr{I}$. Z předpokladů o funkci f plyne, že μ_f splňuje (11b), tj. je regulární. Skutečně, vezměme třeba interval $J = (a, b]$; jelikož funkce f je monotónní, má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti a dále v důsledku spojitosti zprava je $f(b) = \inf_{t>b} f(t)$; lze tedy ke každému $\varepsilon > 0$ najít $t_\varepsilon > b$ takové, že funkce f je spojitá v t_ε a $f(t_\varepsilon) < f(b) + \varepsilon$. Potom $(a, t_\varepsilon) \supset (a, b]$ a $\tilde{\mu}_f(a, t_\varepsilon) = f(t_\varepsilon) - f(a) < < f(b) - f(a) + \varepsilon = \mu_f(a, b] + \varepsilon$. Podobně se najde t'_ε, které je bodem spojitosti funkce f, přičemž $a < t'_\varepsilon < b$ a $\tilde{\mu}_f[t'_\varepsilon, b] > \tilde{\mu}_f(a, b] - \varepsilon$. Analogicky se postupuje pro ostatní typy intervalů. Snadno rovněž nahlédneme, že pro každou regulární funkci $\tilde{\mu}$ intervalu v $\mathbb{R}$ existuje funkce f neklesající a spojitá zprava tak, že $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_f$: stačí položit $f(t) := \tilde{\mu}(0, t]$ pro $t > 0$, $f(0) := 0$, $f(t) := -\tilde{\mu}(t, 0]$ pro $t < 0$ a užít formulí (A.3.3), což je oprávněné vzhledem k σ-aditivitě funkce $\tilde{\mu}$ (viz tvrzení 5).

Borelovskou míru μ_f na $\mathbb{R}$, která je přiřazena prostřednictvím formule (13) a věty 6 funkci f, nazýváme **Lebesgueovou-Stieltjesovou mírou** (LS-mírou) generovanou funkcí f.[1]) Speciálně pro $f = \mathrm{id}$, kde $\mathrm{id}(t) := t$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$, mluvíme o **Lebesgueově míře** na $\mathbb{R}$; obvykle ji značíme m. Číslo $m(J) = \tilde{\mu}_{\mathrm{id}}(J)$ je přitom rovno délce intervalu J pro každé $J \in \mathscr{I}$.

A.4.9 Příklad: Nechť $\tilde{\mu}$ a $\tilde{\nu}$ jsou regulární funkce intervalu v $\mathbb{R}^m$, resp. $\mathbb{R}^n$; na systému $\mathscr{I}^{m+n} = \mathscr{I}^m \times \mathscr{I}^n$ definujme

$$\tilde{\varrho}(J \times L) := \tilde{\mu}(J)\, \tilde{\nu}(L)\,; \tag{14}$$

to je konečná aditivní funkce (viz poznámku A.1.8a). Vzhledem k tomu, že kartézský součin otevřených (uzavřených) intervalů je otevřený (uzavřený) inter-

[1]) Často se LS-mírou rozumí Lebesgueovo rozšíření σ-aditivní funkce μ_f, jíž dostaneme z $\tilde{\mu}_f$ pomocí (12). Takto určená míra je rozšířením míry μ_f; její definiční obor je dán formulí (6) a obecně závisí na funkci f – vždy však obsahuje $\mathscr{B}$.

val, plyne z regularity funkcí $\tilde{\mu}$ a $\tilde{\nu}$, že $\tilde{\varrho}$ je regulární funkcí intervalu v $\mathbb{R}^{m+n}$. Nechť μ a ν jsou borelovské míry na $\mathbb{R}^m$, resp. $\mathbb{R}^n$, které jsou přiřazeny funkcím $\tilde{\mu}$ a $\tilde{\nu}$; borelovskou míru přiřazenou funkci $\tilde{\varrho}$ nazýváme (direktním) **součinem měr** μ a ν a značíme $\mu \otimes \nu$ (viz též § A.8).

Regulární funkci intervalu v $\mathbb{R}^d$ lze opakováním uvedeného postupu zkonstruovat z regulárních funkcí $\tilde{\mu}_1, \ldots, \tilde{\mu}_d$ intervalu v $\mathbb{R}$. Jsou-li speciálně všechna $\tilde{\mu}_j$, $1 \leqq j \leqq d$, rovna funkci $\tilde{\mu}_{\mathrm{id}}$ z předchozího příkladu, přiřazuje odpovídající regulární funkce $\tilde{\varrho}_{\mathrm{id}}$ na $\mathscr{I}^d$ každému $J \in \mathscr{I}^d$, tj. d-dimenzionálnímu kvádru, jeho objem. Příslušnou borelovskou míru $m_d \equiv m \otimes \ldots \otimes m$ nazýváme **Lebesgueovou mírou na** $\mathbb{R}^d$.

Konstrukce borelovské míry μ odpovídající dané regulární funkci $\tilde{\mu}$ na $\mathscr{I}^d$ spočívá v tom, že na borelovské množiny aplikujeme formuli (4) pro systém $\mathscr{S} = \mathscr{S}^d$ tvořený všemi spočetnými disjunktními sjednoceními omezených intervalů (viz (2a) a příklad A.1.1), přičemž pro dané $M \in \mathscr{S}^d$, $M = \bigcup_j J_j$, je $\ddot{\mu}(M) = \sum_j \tilde{\mu}(J_j)$. Ukážeme, že hledaná míra μ je plně určena, známe-li veličiny $\mu(G)$ pro každou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^d$, resp. $\mu(C)$ pro každé kompaktní $C \subset \mathbb{R}^d$.

K danému $B \in \mathscr{B}^d$ a libovolnému $\varepsilon > 0$ najdeme podle (4) množinu $M_\varepsilon \in \mathscr{S}^d$ takovou, že $M_\varepsilon \supset B$ a $\mu(M_\varepsilon) \leqq \mu(B) + \varepsilon$ (rovnost platí jen pro $\mu(B) = \infty$). Nechť $M = \bigcup_j J_j$; podle (11b) existují omezené otevřené intervaly $I_j \supset J_j$ takové, že $\mu(I_j) < \mu(J_j) + 2^{-j}\varepsilon$, $j = 1, 2, \ldots$. Potom pro otevřenou množinu $G_\varepsilon := \bigcup_j I_j$ platí $G_\varepsilon \supset M_\varepsilon \supset B$ a pomocí (3) dostaneme $\mu(G_\varepsilon) \leqq \sum_j \mu(I_j) < \mu(M_\varepsilon) + \varepsilon \leqq$ $\leqq \mu(B) + 2\varepsilon$, takže

$$\mu(B) = \inf\{\mu(G)\colon\ G \supset B,\ G \ \text{otevřená}\}\,. \tag{15a}$$

Odtud pro $\mu(B) < \infty$ ihned plyne $\inf\{\mu(G \setminus B)\colon G \supset B,\ G$ otevřená$\} = 0$ (srov. s definicí 6); díky σ-konečnosti lze platnost této rovnosti snadno rozšířit na všechna $B \in \mathscr{B}^d$, užijeme-li inkluze $(\bigcup_n G_n \setminus \bigcup_n B_n) \subset \bigcup_n (G_n \setminus B_n)$ – viz (8).

Pomocí $B \setminus F = (\mathbb{R}^d \setminus F) \setminus (\mathbb{R}^d \setminus B)$ získáme duální vztah $\inf\{\mu(B \setminus F)\colon$ $F \subset B$, F uzavřená$\} = 0$, takže ke každému $\varepsilon > 0$ a $B \in \mathscr{B}^d$ existuje uzavřená množina $F_\varepsilon \subset B$ splňující $\mu(B) \leqq \mu(F_\varepsilon) + \varepsilon$, přičemž rovnost platí opět jen pro $\mu(B) = \infty$. Vzhledem k tomu, že $\mathbb{R}^d$ lze zapsat jako spočetné sjednocení kompaktních množin, je $F_\varepsilon = \bigcup_n F^n$, kde všechny množiny F^n jsou kompaktní. Potom pro neklesající posloupnost $C_r := \bigcup_{n=1}^{r} F^n \subset F_\varepsilon \subset B$ z formule (A.3.3a) plyne $\lim_{r\to\infty} \mu(C_r) = \mu(F_\varepsilon)$, což spolu s nerovností $\mu(B) \leqq \mu(F_\varepsilon) + \varepsilon$ dá

$$\mu(B) = \sup\{\mu(C)\colon\ C \subset B,\ C \,\text{kompaktní}\}\,. \tag{15b}$$

 A.4.10 Tvrzení: Každá borelovská míra μ na $\mathbb{R}^d$ je **regulární**, což znamená, že pro všechna $B \in \mathscr{B}^d$ platí formule (15a, b).

A.4.11 Důsledek: Ke každému $B \in \mathscr{B}^d$ existuje nerostoucí posloupnost otevřených množin $G_n \supset B$ a neklesající posloupnost kompaktních množin $C_n \subset B$ splňující

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(G_n) = \mu(\bigcap_n G_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = (\bigcup_n C_n)\,. \qquad (15c)$$

A.4.12 Poznámky: (a) Posloupnosti $\{G_n\}$ a $\{C_n\}$ jsou obecně závislé na míře μ.
(b) Tvrzení 10 platí za obecnějších předpokladů: regulární jsou všechny borelovské míry na lokálně kompaktním Hausdorffově prostoru, v němž každá otevřená množina je spočetným sjednocením kompaktních množin (viz ⟦Ru 1⟧, § 2.18).
(c) Jak bylo řečeno ve větě 6, lze každou borelovskou míru na $\mathbb{R}^d$ zkonstruovat pomocí Lebesgueova rozšíření jisté regulární funkce intervalu v $\mathbb{R}^d$. To samozřejmě neznamená, že neexistují jiné konstrukce. Lze např. užít tzv. *Rieszovu větu o reprezentaci* (viz ⟦Ru 1⟧, § 2.14, ⟦RS 1⟧, § IV.4), která říká, že borelovské míry jsou vzájemně jednoznačně přiřazeny pozitivním lineárním funkcionálům na vektorovém prostoru spojitých funkcí s kompaktním nosičem. Jiný způsob, který užijeme v § A.7, vychází z daného (abstraktního) prostoru a mírou $(X, \mathscr{A}, \mu)$ a měřitelného zobrazení $w\colon X \to \mathbb{R}^d$, tj. d-tice měřitelných funkcí $w_j\colon X \to \mathbb{R}$. Podobně jako v poznámce A.2.4 zjistíme, že $w^{(-1)}(\mathscr{B}^d) \subset \mathscr{A}$; z formulí (1.1.7) pak vyplývá, že zobrazení $B \mapsto \mu^{(w)}(B) := \mu(w^{(-1)}(B))$ je míra na $\mathbb{R}^d$ s definičním oborem $\mathscr{B}^d$. Je-li výchozí míra μ konečná, nebo alespoň pro každé $J \subset \mathscr{J}^d$ platí $\mu(w^{(-1)}(J)) < \infty$, je $\mu^{(w)}$ borelovská míra na $\mathbb{R}^d$. S mírami tohoto typu se pracuje v teorii pravděpodobnosti; funkci w se říká náhodná proměnná a míra $\mu^{(w)}$ udává rozdělení pravděpodobnosti pro w.

A.5 KOMPLEXNÍ MÍRY

Nechť $(X, \mathscr{A})$ je měřitelný prostor; σ-aditivní zobrazení $\nu\colon \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ nazýváme **komplexní mírou**; jestliže $\nu(M) \in \mathbb{R}$ pro všechna $M \in \mathscr{A}$, mluvíme o **reálné míře.**

A.5.1 Poznámky: (a) Pro reálnou míru se užívá též názvu *zobecněná míra* nebo *náboj*. Zavádí se i nekonečné reálné míry, do jejichž oboru hodnot patří buď $+\infty$, nebo $-\infty$. V této knize však budeme pracovat výhradně s konečnými reálnými mírami.
(b) Uvažujme disjunktní systém $\{M_n\} \subset \mathscr{A}$; v σ-aditivitě komplexní míry ν je obsažen požadavek konvergence řady $\sum_j \nu(M_j)$. Vzhledem k tomu, že množina $\bigcup_n M_n$ nezávisí na způsobu očíslování prvků uvažovaného systému, musí dále pro libovolnou bijekci $n \mapsto j_n$ množiny přirozených čísel platit $\sum_n \nu(M_n) = \sum_n \nu(M_{j_n})$. To

je však automaticky splněno, neboť *uvažovaná řada je absolutně konvergentní.* Toto tvrzení stačí ověřit pro reálné míry, neboť pro každé $M \in \mathscr{A}$ je

$$\max\{|\mathrm{Re}\, \nu(M)|, |\mathrm{Im}\, \nu(M)|\} \leqq |\nu(M)| \leqq |\mathrm{Re}\, \nu(M)| + |\mathrm{Im}\, \nu(M)| . \qquad (1)$$

Položme $M_n^+ := M_n$, $M_n^- := \emptyset$ pro $\nu(M_n) \geqq 0$, $M_n^+ := \emptyset$, $M_n^- := M_n$ pro $\nu(M_n) < 0$, takže $|\nu(M_n)| = \nu(M_n^+) - \nu(M_n^-)$. Jelikož oba systémy $\{M_n^+\}$ i $\{M_n^-\}$ jsou opět disjunktní, je $|\sum_n \nu(M_n^\pm)| = \pm\sum_n \nu(M_n^\pm) = |\nu(\bigcup_n M_n^\pm)| < \infty$; potom $\sum_n |\nu(M_n)| = \sum_n \nu(M_n^+) - \sum_n \nu(M_n^-) < \infty$.

(c) Každá dvojice konečných nezáporných měr μ_1, μ_2 se společným definičním oborem $\mathscr{A}$ určuje reálnou míru

$$\varrho = \mu_1 - \mu_2 . \qquad (2a)$$

Podobně dvojice reálných měr ϱ_1, ϱ_2 určuje komplexní míru

$$\nu = \varrho_1 + \mathrm{i}\varrho_2 . \qquad (2b)$$

Tento vztah zjevně představuje vzájemně jednoznačné přiřazení komplexních měr dvojicím reálných měr. Naproti tomu zobrazení (2a) není injektivní, neboť pro libovolnou konečnou míru μ na $\mathscr{A}$ máme $\mu_1 - \mu_2 = (\mu_1 + \mu) - (\mu_2 + \mu)$; za okamžik však uvidíme, že pro každou reálnou míru existuje jednoznačný minimální rozklad (2a).

Pro danou komplexní míru ν hledejme nejmenší nezápornou míru μ_ν takovou, že $\mu_\nu(M) \geqq |\nu(M)|$ pro všechna $M \in \mathscr{A}$. Nazveme-li každý disjunktní nejvýše spočetný systém $\{M_j\}$ splňující $M = \bigcup_j M_j$ **rozkladem množiny** M, plyne ze σ-aditivity $\mu_\nu(M) \geqq \sum_j |\nu(M_j)|$ pro každý rozklad množiny M, a tedy také $\mu_\nu(M) \geqq$ $\geqq \sup\{\sum_j |\nu(M_j)| : \{M_j\} \in \mathfrak{S}_M\}$, kde $\mathfrak{S}_M$ je systém všech rozkladů množiny M. Pravou stranu této nerovnosti označíme $|\nu|(M)$ a nazveme (totální) **variací míry**, tj. pro každé $M \in \mathscr{A}$ máme

$$|\nu|(M) := \sup\{\sum_j |\nu(M_j)| : \{M_j\} \in \mathfrak{S}_m\} . \qquad (3a)$$

Je zřejmé, že $|\nu|(\emptyset) = 0$ a $|\nu| = \nu$, je-li ν nezáporná míra. Položíme-li $M_1 = M$ a $M_j = \emptyset$ pro $j = 2, 3, \ldots$, dostáváme nerovnost

$$|\nu|(M) \geqq |\nu(M)| , \qquad M \in \mathscr{A} . \qquad (3b)$$

Jak ukazuje následující tvrzení, je hledaná míra μ_ν rovna $|\nu|$.

A.5.2 Tvrzení: Variace komplexní míry je nezáporná míra.

Důkaz: Vzhledem k tomu, že $|\nu|(\emptyset) = 0$, je třeba ověřit pouze σ-aditivitu. Nechť systém $\{M_n\} \subset \mathscr{A}$ je disjunktní a $M := \bigcup_n M_n$; pro každé n položíme

$t_{nr} := |\nu|(M_n) - 1/r$, $r = 1, 2, \ldots$. Podle (3a) existují rozklady $\{M_{nj}^{(r)}: j = 1, 2, \ldots\} \in \mathfrak{S}_{M_n}$ takové, že $t_{nr} < \sum_j |\nu(M_{nj}^{(r)})|$ a odtud pro $m = 1, 2, \ldots$ dostáváme $\sum_{n=1}^{m} t_{nr} < \sum_{n,j} |\nu(M_{nj}^{(r)})| < |\nu|(M)$, neboť $\{M_{nj}^{(r)}: j, n = 1, 2, \ldots\}$ je rozklad množiny M pro každé r. Limitní přechod nejprve vzhledem k r a potom k m dává $\sum_n |\nu|(M_n) \leqq |\nu|(M)$. Naopak, pro libovolné $\{N_k\} \in \mathfrak{S}_M$ a všechna $n = 1, 2, \ldots$ patří $\{M_n \cap N_k: k = 1, 2, \ldots\}$ do $\mathfrak{S}_{M_n}$ a podobně $\{M_n \cap N_k: n = 1, 2, \ldots\} \in \mathscr{S}_{N_k}$ pro $k = 1, 2, \ldots$; ze σ-aditivity míry ν a známých vlastností absolutně konvergentních dvojnásobných řad (viz [[Fi]], § XI.5) plyne

$$\sum_n |\nu(N_k)| = \sum_k \Big|\sum_n \nu(M_n \cap N_k)\Big| \leqq \sum_n \sum_k |\nu(M_n \cap N_k)| \leqq \sum_n |\nu|(M_n)$$

a přechodem k supremu dostanem $|\nu|(M) \leqq \sum_n |\nu|(M_n)$. ■

Pomocí variace snadno najdeme pro každou reálnou míru ϱ na $\mathscr{A}$ rozklad (2a). Vzhledem ke (3b) jsou totiž předpisem

$$M \mapsto \mu^{\pm}(M) := \frac{1}{2}\,[|\varrho|(M) \pm \varrho(M)]\,, \qquad M \in \mathscr{A}\,, \tag{4a}$$

určeny nezáporné míry, přičemž

$$\varrho = \mu^{+} - \mu^{-}\,. \tag{4b}$$

Jelikož však pro libovolnou nezápornou míru μ na $\mathscr{A}$ je $\varrho = (\mu^{+} + \mu) - (\mu^{-} + \mu)$, vzniká úloha najít rozklad $\varrho = \mu_\varrho^{+} - \mu_\varrho^{-}$, který je minimální v tom smyslu, že pro libovolnou dvojici nezáporných měr μ_1, μ_2 na $\mathscr{A}$ splňujících $\varrho = \varrho_1 - \mu_2$ platí $\mu_1(M) \geqq \mu_\varrho^{+}(M)$ a $\mu_2(M) \geqq \mu_\varrho^{-}(M)$ pro všechna $M \in \mathscr{A}$; existence takového minimálního rozkladu má zásadní význam např. pro definici integrálu vzhledem k reálné míře (viz § A.10). Ukážeme, že postačující podmínkou pro to, aby rozklad $\varrho = \mu_\varrho^{+} - \mu_\varrho^{-}$ byl minimální, je existence množin $Q^{\pm} \in \mathscr{A}$ s následujícími vlastnostmi: (i) Q^{+}, Q^{-} je rozklad množiny X (jednotkového prvku σ-algebry $\mathscr{A}$), tj.

$$Q^{+} \cap Q^{-} = \emptyset\,, \qquad Q^{+} \cup Q^{-} = X\,; \tag{5a}$$

(ii) pro každé $M \in \mathscr{A}$ je

$$\mu_\varrho^{\pm}(M) = \pm\varrho(M \cap Q^{\pm}) \geqq 0\,. \tag{5b}$$

Skutečně, z těchto podmínek po dosazení do (2a) pro každé $M \in \mathscr{A}$ plyne $\mu_\varrho^{+}(M) = \varrho(M \cap Q^{+}) = \mu_1(M \cap Q^{+}) - \mu_2(M \cap Q^{+}) \leqq \mu_1(M \cap Q^{+}) \leqq \mu_1(M)$ a podobně dostaneme $\mu_\varrho^{-}(M) \leqq \mu_2(M)$.

Dvojici množin $Q^{\pm} \in \mathscr{A}$ splňujících (5a, b) se říká **Hahnův rozklad** prostoru X vzhledem k reálné míře ϱ. Ukazuje se, že *Hahnův rozklad vždy existuje* (viz např.

[[Hal 1]], § 29), avšak *není jednoznačný*. Je-li však $\tilde{Q}^{\pm}$ jiný Hahnův rozklad, potom pro všechna $M \in \mathscr{A}$ vztah (5b) dává $\varrho(M \cap Q^{+} \cap \tilde{Q}^{-}) = \varrho(M \cap Q^{-} \cap \tilde{Q}^{+}) = 0$ a pak z (5a) a aditivity plyne $\varrho(M \cap Q^{\pm}) = \varrho(M \cap \tilde{Q}^{\pm})$. *Míry* (5b) *tedy závisí jen na* ϱ; nazýváme je **kladnou**, resp. **zápornou variací** reálné míry ϱ. Formuli

$$\varrho = \mu_{\varrho}^{+} - \mu_{\varrho}^{-}, \tag{6a}$$

která představuje minimální rozklad této míry, se říká **Jordanův rozklad**. Jak souvisí kladná a záporná variace $\mu_{\varrho}^{\pm}$ s totální variací $|\varrho|$?

A.5.3 Věta: Kladná a záporná variace reálné míry ϱ splňuje pro každé $M \in \mathscr{A}$ rovnosti

$$\mu_{\varrho}^{+}(M) + \mu_{\varrho}^{-}(M) = |\varrho|(M), \tag{6b}$$

$$\mu_{\varrho}^{\pm}(M) = \sup\{\pm\varrho(A) : A \subset M, A \in \mathscr{A}\}. \tag{6c}$$

Důkaz: Ze vztahu (4a) a minimality Jordanova rozkladu plyne $|\varrho|(M) = \mu^{+}(M) + \mu^{-}(M) \geqq \mu_{\varrho}^{+}(M) + \mu_{\varrho}^{-}(M)$. Naopak pro libovolný rozklad $\{M_j\} \in \mathfrak{S}_M$ dostaneme $\sum_j |\varrho(M_j)| \leqq \sum_j (\mu_{\varrho}^{+}(M_j) + \mu_{\varrho}^{-}(M_j)) = \mu_{\varrho}^{+}(M) + \mu_{\varrho}^{-}(M)$ a přechod k supremu dá $|\varrho|(M) \leqq \mu_{\varrho}^{+}(M) + \mu_{\varrho}^{-}(M)$. Dále z (6a) plyne $\sup\{\pm\varrho(A) : A \subset M, A \in \mathscr{A}\} \leqq \mu_{\varrho}^{\pm}(M)$ a pomocí (5b) získáme opačnou nerovnost. ■

A.5.4 Důsledek: Variace libovolné komplexní míry je konečná a totéž platí pro kladnou a zápornou variaci každé reálné míry.
Důkaz: Nechť $\nu = \varrho_1 + i\varrho_2$; podle (3a) a (1) je $|\nu| \leqq |\varrho_1| + |\varrho_2|$, takže stačí uvažovat reálnou míru ϱ. Pro ni formule (5b) dají $\mu_{\varrho}^{\pm}(X) \leqq \mu_{\varrho}^{+}(X) + \mu_{\varrho}^{-}(X) = |\varrho(Q^{+})| + |\varrho(Q^{-})| < \infty$. ■

Ze vztahů (6a) a (2b) plyne, že komplexní míry mají řadu vlastností konečných nezáporných měr; neplatí pro ně ovšem vztahy vyjádřené nerovnostmi, jako je monotonie nebo semiaditivita.

A.5.5 Tvrzení: Pro každou komplexní míru ν na σ-algebře $\mathscr{A}$ platí formule (A.3.3a, b) a rovnost

$$\nu(M \cup N) = \nu(M) + \nu(N) - \nu(M \cap N), \qquad M, N \in \mathscr{A}.$$

Komplexní borelovské míry na $\mathbb{R}^d$ jsou vymezeny podmínkou $\mathscr{A} = \mathscr{B}^d$. Z důsledku 4 plyne, že variace komplexní borelovské míry ν na $\mathbb{R}^d$ je nezáporná borelovská míra; proto pro ni platí formule (A.4.15a, b), a tedy také důsledek A.4.11. Ukážeme, že tento důsledek platí i pro výchozí komplexní míru ν.

Uvažujme nejprve reálnou borelovskou míru ϱ na $\mathbb{R}^d$. Pro její variaci zmíněný důsledek dává

$$|\varrho|(B) = \lim_{n\to\infty} |\varrho|(G_n) = |\varrho|(B_G) = \lim_{n\to\infty} |\varrho|(C_n) = |\varrho|(B_C), \tag{7}$$

kde $B_G := \bigcap_n G_n \supset B$ a $B_C := \bigcup_n C_n \subset B$. Podle (A.3.3a, b) je $\lim_{n\to\infty} \mu_\varrho^\pm(G_n) = \mu^\pm(B_G)$ a $\lim_{n\to\infty} \mu_\varrho^\pm(C_n) = \mu_\varrho^\pm(B_C)$. Nyní z rovností (7) díky konečnosti míry $|\varrho|$ plyne $|\varrho|(B_G \setminus B) = |\varrho|(B \setminus B_C) = 0$, a protože $\mu_\varrho^\pm \leqq |\varrho|$, je $\mu_\varrho^\pm(B_G \setminus B) = \mu_\varrho^\pm(B \setminus B_C) = 0$, takže $\mu_\varrho^\pm(B_G) = \mu_\varrho^\pm(B_C) = \mu_\varrho^\pm(B)$. Celkem rovnosti (7) implikují $\lim_{n\to\infty} \mu_\varrho^\pm(G_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_\varrho^\pm(C_n) = \mu_\varrho^\pm(B)$, a tedy také $\lim_{n\to\infty} \varrho(G_n) = \lim_{n\to\infty} \varrho(C_n) = \varrho(B)$. Tento závěr snadno rozšíříme na všechny komplexní borelovské míry na $\mathbb{R}^d$: jestliže $\nu = \varrho_1 + i\varrho_2$, užijeme vztahů (7) pro $|\nu|$ a nerovnosti $|\nu| \geqq \max\{|\varrho_1|, |\varrho_2|\}$.

A.5.6 Tvrzení: Důsledek A.4.11 platí pro každou komplexní borelovskou míru na $\mathbb{R}^d$.

A.5.7 Důsledek: Jestliže komplexní borelovské míry ν a $\tilde{\nu}$ na $\mathbb{R}^d$ splňují $\nu(J) = \tilde{\nu}(J)$ pro všechna $J \in \mathscr{J}^d$, potom $\nu = \tilde{\nu}$.

Důkaz: Z uvedeného předpokladu a σ-aditivity plyne $\nu(G) = \tilde{\nu}(G)$ pro všechny otevřené množiny; táž rovnost platí pro reálné části ϱ a $\tilde{\varrho}$ uvažovaných komplexních měr. Aplikujme důsledek A.4.11 na jejich kladnou a zápornou variaci a označme příslušné posloupnosti otevřených množin $\{G_n^\pm\}$ a $\{\tilde{G}_n^\pm\}$, takže

$$\mu_\varrho^\pm(G_n^\pm) \to \mu_\varrho^\pm(B) \quad \text{a} \quad \mu_{\tilde{\varrho}}^\pm(\tilde{G}_n^\pm) \to \mu_{\tilde{\varrho}}^\pm(B)\,. \tag{8}$$

Otevřené množiny $G_n := G_n^+ \cap G_n^- \cap \tilde{G}_n^+ \cap \tilde{G}_n^- \supset B$ tvoří opět nerostoucí posloupnost a díky monotonii měr $\mu_\varrho^\pm$ a $\mu_{\tilde{\varrho}}^\pm$ z podmínek (8) plyne $\mu_\varrho^\pm(G_n) \to \mu_\varrho^\pm(B)$ a $\mu_{\tilde{\varrho}}^\pm(G_n) \to \mu_{\tilde{\varrho}}^\pm(B)$. Odtud dostaneme $\varrho(G_n) \to \varrho(B)$ a $\tilde{\varrho}(G_n) \to \tilde{\varrho}(B)$, a protože $\varrho(G_n) = \tilde{\varrho}(G_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, je $\varrho(B) = \tilde{\varrho}(B)$. Stejně se dokáže rovnost imaginárních částí měr ν a $\tilde{\nu}$. ■

A.6 ZÁKLADY TEORIE INTEGRÁLU

Seznámíme se nyní s elementy teorie Lebesgueova integrálu. Východiskem je abstraktní měřitelný prostor $(X, \mathscr{A})$, komplexní měřitelná funkce na X a nezáporná míra μ na $\mathscr{A}$. Užití abstraktních objektů $X, \mathscr{A}$ a μ výklad nikterak nekomplikuje; naopak, umožňuje lepší pochopení logické stavby teorie.

Existuje řada v podstatě ekvivalentních způsobů výkladu. Všechny začínají tím, že definují integrál jednoduchým předpisem pro nějakou úzkou třídu funkcí. Druhý krok spočívá v rozšíření původní definice vhodným limitním přechodem. Přidržíme se zde postupu z první kapitoly knihy [[Ru 1]]. V souvislosti s tím vynecháváme u většiny vět tohoto paragrafu důkazy; čtenář je najde v citované knize – jsou vesměs podány velmi přístupně – a vystačí při jejich studiu s pojmy a poznatky předchozích paragrafů tohoto dodatku.

A.6.1 Poznámka: Budeme pracovat s mírami, které jsou obecně nekonečné; kromě toho je účelné uvažovat funkce, které kromě nezáporných hodnot nabývají hodnoty $+\infty \equiv \infty$ (objevují se např. jako limity posloupností nezáporných funkcí). Vzhledem k tomu je třeba rozšířit aritmetické operace sčítání a násobení nezáporných čísel na množinu $[0, \infty]$. Pro každé $a \in [0, \infty]$ definujeme

$$a + \infty := \infty\,, \qquad a\,.\,\infty = \begin{cases} \infty, & a > 0, \\ 0, & a = 0; \end{cases} \tag{1}$$

zbývající vztahy plynou z požadavku komutativity. Obě takto definované operace jsou asociativní a splňují distributivní zákon.

Dále pro funkce $f\colon X \to [0, \infty]$ musíme zobecnit pojem měřitelnosti: kromě $f^{(-1)}(\mathscr{J}) \subset \mathscr{A}$ bude zahrnovat i podmínku $f^{(-1)}(\infty) \in \mathscr{A}$. Existují opět různá ekvivalentní vyjádření zobecněné měřitelnosti, např. $f^{(-1)}(c, \infty] \in \mathscr{A}$ pro všechna $c \in \mathbb{R}$ (srov. s poznámkou A.2.1). Jsou-li funkce $f, g\colon X \to [0, \infty]$ měřitelné, je měřitelná i funkce $f + kg$ pro každé $k > 0$. Pro posloupnost měřitelných funkcí $f_n\colon X \to [0, \infty]$ jsou měřitelné funkce $x \mapsto \sup_n f_n(x)$ a $x \mapsto \inf_n f_n(x)$. Odtud dále plyne měřitelnost funkcí $x \mapsto \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$ a $x \mapsto \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$; pokud pro všechna $x \in X$ existuje $f(x) \equiv \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, je funkce f měřitelná.

Pro nezápornou jednoduchou funkci $s\colon X \to [0, \infty)$, $s \equiv \sum_n y_n \chi_{M_n}$, definujeme

$$\int_X s \,\mathrm{d}\mu := \sum_n y_n \mu(M_n)\,. \tag{2}$$

Korektnost této definice, tj. nezávislost integrálu na způsobu zápisu funkce s (viz § A.2), je důsledkem aditivity míry μ. Ze vztahu $\sum_n y_n \chi_{M_n} = \sum_j z_j \chi_{N_j}$ totiž plyne $\bigcup_n M_n = \bigcup_j N_j = X$ a odtud $s = \sum_{n,j} w_{nj} \chi_{M_n \cap N_j}$, kde $w_{nj} = 0$ pro $M_n \cap N_j = \emptyset$ a $w_{nj} = y_n = z_j$ pro $M_n \cap N_j \neq \emptyset$. Potom je $\sum_n y_n \mu(M_n) = \sum_{n,j} y_n \mu(M_n \cap N_j) = \sum_{n,j} w_{nj} \mu(M_n \cap N_j)$ a podobně $\sum_j z_j \mu(N_j) = \sum_{n,j} w_{nj} \mu(M_n \cap N_j)$. Tímto postupem se rovněž zjistí, že pro nezáporné jednoduché funkce s, t a $k \in (0, \infty)$ platí

$$\int_X (ks + t)\,\mathrm{d}\mu = k \int_X s\,\mathrm{d}\mu + \int_X t\,\mathrm{d}\mu\,. \tag{3}$$

Integrál (2) je zřejmě roven ∞, jestliže $\mu(M_n) = \infty$ a $y_n > 0$ alespoň pro jedno n; pro $\mu(M_n) = \infty$ a $y_n = 0$ ovšem máme $y_n \mu(M_n) = 0$, takže pro $s = 0$ je $\int_X s\,\mathrm{d}\mu = 0$, i když $\mu(X) = \infty$.

Definice integrálu se rozšíří na všechny měřitelné funkce $f\colon X \to [0, \infty]$ takto:

$$\int_X f \, d\mu \equiv \int_X f(x) \, d\mu(x) := \sup \left\{ \int_X s \, d\mu \colon s \in S_f \right\}, \tag{4a}$$

kde S_f je množina jednoduchých funkcí $s\colon X \to [0, \infty)$ takových, že $s \leqq f$. Dále pro libovolné $M \in \mathscr{A}$ položíme

$$\int_M f \, d\mu := \int_X f \chi_M \, d\mu . \tag{4b}$$

Každé měřitelné funkci $f\colon X \to [0, \infty]$ a každému $M \in \mathscr{A}$ je tak přiřazeno číslo z intervalu $[0, \infty]$; nazýváme je (Lebesgueovým) **integrálem funkce** f přes množinu M vzhledem k míře μ.

A.6.2 Tvrzení: Pro měřitelné funkce $f, g\colon X \to [0, \infty]$ platí

(a) $\int_X (kf) \, d\mu = k \int_X f \, d\mu, \quad k \in [0, \infty)$,

(b) $f \leqq g \Rightarrow \int_X f \, d\mu \leqq \int_X g \, d\mu$, (5a)

(c) $f = 0 \Rightarrow \int_X f \, d\mu = 0$ (i v případě, že $\mu(X) = \infty$).

Poznámka: Ze vztahu (4b) je vidět, že všechna uvedená tvrzení platí i pro integrál přes libovolnou množinu M. Dále pro každou dvojici množin $M, N \in \mathscr{A}$ z (5a) plyne

$$M \subset N \Rightarrow \int_M f \, d\mu \leqq \int_N f \, d\mu . \tag{5b}$$

Kombinace implikací (5a, b) vede pro všechna kladná c k nerovnosti

$$\mu(f^{(-1)}(c, \infty)) \leqq \mu(f^{(-1)}[c, \infty)) \leqq \frac{1}{c} \int_X f \, d\mu . \tag{6}$$

A.6.3 Příklad: Pro libovolnou měřitelnou funkci $\varphi\colon X \to \mathbb{C}$ platí implikace

$$\int_X |\varphi| \, d\mu = 0 \Rightarrow \mu(\{x \in X\colon \varphi(x) \neq 0\}) = 0 . \tag{7}$$

Skutečně, podle (6) pro $n = 1, 2, \ldots$ a $M_n := \{x \in X\colon |\varphi(x)| \geqq 1/n\}$ je $\mu(M_n) = 0$. Nyní posloupnost $\{M_n\}$ je neklesající, $\bigcup_n M_n = \{x \in X\colon \varphi(x) \neq 0\}$ a podle (A.3.3a) je tato množina μ-nulová.

V teorii integrálu hraje důležitou roli limitní přechod. Pro výklad teorie vycházející z definic (4) má klíčový význam následující věta.

A.6.4 Věta (*o monotónní konvergenci*): Jestliže $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných funkcí taková, že $0 \leqq f_1 \leqq f_2 \leqq \ldots \leqq \infty$, potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu . \tag{8}$$

Poznámky: (a) Pravá strana rovnosti (8) má smysl, neboť limitní funkce je měřitelná (viz poznámku 1).

(b) Přímým důsledkem této věty a poznámky A.2.7 (která platí i pro funkce nabývající hodnoty ∞ – viz [[Ru 1]], § 1.17), je následující tvrzení, na němž je založen např. důkaz věty 6: Ke každé měřitelné funkci f: $X \to [0, \infty]$ existuje posloupnost jednoduchých funkcí $\{s_n\}$ takových, že $0 \leqq s_1 \leqq s_2 \leqq \ldots \leqq f$, $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ pro všechna $x \in X$ a $\lim_{n\to\infty} \int_X s_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.

(c) Často je třeba znát podmínky zaručující, že limitní funkce a integrál na pravé straně rovnosti (8) jsou konečné. Udává je např. tzv. **Leviho věta**: *Nechť* $\{f_n\}$ *jsou měřitelné funkce splňující* $0 \leqq f_1 \leqq f_2 \leqq \ldots < \infty$ *a nechť existuje* $k > 0$ *takové, že* $\int_X f_n \, d\mu \leqq k$ *pro* $n = 1, 2, \ldots$; *potom funkce* $x \mapsto f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *je* μ-s.v. *konečná*, tj.

$$\mu(f^{(-1)}(\infty)) = 0 \tag{9a}$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu \leqq k . \tag{9b}$$

Důkaz: Vztah (9b) zřejmě plyne z (8). K ověření (9a) vyjdeme z toho, že pro všechna $x \in X$ je $f(x) = \sup_n \{f_n(x)\}$; pomocí (A.3.3a) a nerovnosti (6) pro $m = 1, 2, \ldots$ dostaneme $\mu(f^{(-1)}(m, \infty]) = \lim_{n\to\infty} \mu(f_n^{(-1)}(m, \infty]) \leqq k/m$. Konečně podle (A.3.3b) je $\mu(f^{(-1)}(\infty)) = \lim_{m\to\infty} \mu(f^{(-1)}(m, \infty]) = 0$. ■

A.6.5 Důsledek: (*Fatouovo lemma*): Pro posloupnost měřitelných funkcí f_n: $X \to [0, \infty]$ platí

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \leqq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu . \tag{10}$$

Poznámka: Z nerovnosti (10) vyplývá tvrzení podobného typu jako Leviho věta: *Nechť posloupnost* $\{f_n\}$ *nezáporných měřitelných funkcí má limitu pro všechna* $x \in X$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, *a nechť* $\int_X f_n \, d\mu \leqq k$, $n = 1, 2, \ldots$; *potom* $\int_X f \, d\mu \leqq k$.

 A.6.6 Věta: (a) Jestliže funkce f_n: $X \to [0, \infty]$, $n = 1, 2, \ldots, N \leqq \infty$, jsou měřitelné, potom

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{N} \int_X f_n \, d\mu \,. \tag{11}$$

(b) Pro měřitelnou funkci f: $X \to [0, \infty]$ je zobrazení

$$M \mapsto \nu(M) := \int_M f \, d\mu \,, \qquad M \in \mathscr{A} \,, \tag{12a}$$

míra na $\mathscr{A}$, přičemž pro každou měřitelnou funkci g: $X \to [0, \infty]$ je

$$\int_X g \, d\nu = \int_X gf \, d\mu \,. \tag{12b}$$

Poznámky: (a) Nechť f: $X \to [0, \infty]$ je měřitelná funkce a $\{M_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{A}$ je disjunktní systém; položíme-li v rovnici (11) $f_n = f\chi_{M_n}$, dostaneme

$$\int_M f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{M_n} f \, d\mu \,,$$

kde $M := \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Tento vztah vyjadřuje **σ-aditivitu integrálu**, což je ekvivalentní vyjádření toho, že zobrazení (12a) je míra.

(b) Často se užívá symbolického zápisu vztahu (12a) ve tvaru $d\nu = f \, d\mu$; o míře ν se říká, že je *generována funkcí f a mírou μ*.

Přejdeme k integraci komplexních funkcí. Měřitelná funkce φ: $X \to \mathbb{C}$ je integrabilní (přes množinu X vzhledem k míře μ), jestliže

$$\int_X |\varphi| \, d\mu < \infty \,.^1) \tag{13a}$$

Množinu všech integrabilních funkcí značíme $\mathscr{L}(X, d\mu)$; analogicky se definuje $\mathscr{L}(M, d\mu)$ pro libovolnou množinu $M \in \mathscr{A}$. Nechť $\varphi \in \mathscr{L}(X, d\mu)$, $f := \mathrm{Re}\, \varphi$, $g := \mathrm{Im}\, \varphi$ a $f^{\pm}$, $g^{\pm}$ jsou měřitelné nezáporné funkce určené vztahem (A.2.1a). Z nerovností $f^{\pm} \leqq |f| \leqq |\varphi|$, $g^{\pm} \leqq |g| \leqq |\varphi|$ plyne implikace (viz tvrzení 2b)

$$\varphi \in \mathscr{L}(X, d\mu) \Rightarrow f^{\pm}, g^{\pm} \in \mathscr{L}(X, d\mu) \,.$$

---

[1]) Měřitelnost funkce $|\varphi|$: $X \to [0, \infty)$ plyne z příkladu A.2.5b.

Předpisem

$$\varphi \mapsto \int_X \varphi \, d\mu := \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu + i \int_X g^+ \, d\mu - i \int_X g^- \, d\mu \qquad (13b)$$

je definováno zobrazení množiny $\mathscr{L}(X, d\mu)$ do $\mathbb{C}$, které má tyto základní vlastnosti:

(a) je lineární, tj. $\mathscr{L}(X, d\mu)$ je komplexní vektorový prostor a pro všechna $\varphi, \psi \in \mathscr{L}(X, d\mu)$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ je

$$\int_X (\alpha\varphi + \psi) \, d\mu = \alpha \int_X \varphi \, d\mu + \int_X \psi \, d\mu ; \qquad (14)$$

(b) pro každé $\varphi \in \mathscr{L}(X, d\mu)$ platí nerovnost

$$\left| \int_X \varphi \, d\mu \right| \leqq \int_X |\varphi| \, d\mu . \qquad (15)$$

Pro Lebesgueovu míru se často píše $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ místo $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, dm_n)$ a $\int \varphi(x) \, dx$ (případně $\int \varphi(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x}$) místo $\int \varphi \, dm_n$.

A.6.7 Příklady: (a) Pro jednoduchou komplexní funkci $\sigma \equiv \sum_n \eta_n \chi_{M_n}$ je $|\sigma| = \sum_n |\eta_n| \, \chi_{M_n}$, tj. $|\sigma|$ je nezáporná jednoduchá funkce, pro niž pomocí (2) dostáváme ekvivalenci

$$\sigma \in \mathscr{L}(X, d\mu) \Leftrightarrow \sum_n |\eta_n| \, \mu(M_n) < \infty . \qquad (16a)$$

Je-li $\sigma \in \mathscr{L}(X, d\mu)$, pak z rovnosti $(\mathrm{Re}\, \sigma)^{\pm} = \sum_n \frac{1}{2}(|\mathrm{Re}\, \eta_n| \pm \mathrm{Re}\, \eta_n) \, \chi_{M_n}$ analogického vztahu pro $(\mathrm{Im}\, \sigma)^{\pm}$ a formulí (13b) a (2) plyne

$$\int_X \sigma \, d\mu = \sum_n \eta_n \mu(M_n) . \qquad (16b)$$

(b) Jsou-li funkce $f \colon X \to [0, \infty]$ a $\varphi \colon X \to \mathbb{C}$ měřitelné a $d\nu = f \, d\mu$, plyne z (12b) ekvivalence

$$\varphi \in \mathscr{L}(X, d\nu) \Leftrightarrow \varphi f \in \mathscr{L}(X, d\mu) . \qquad (17a)$$

Dále je zřejmé, že $(f . \mathrm{Re}\, \varphi)^{\pm} = f . (\mathrm{Re}\, \varphi)^{\pm}$ a $(f . \mathrm{Im}\, \varphi)^{\pm} = f . (\mathrm{Im}\, \varphi)^{\pm}$; z formulí (12b) a (13b) pak pro $\varphi \in \mathscr{L}(X, d\mu)$ dostáváme

$$\int_X \varphi \, d\nu = \int_X \varphi f \, d\mu . \qquad (17b)$$

 Z Fatouova lemmatu plyne velmi často užívaná věta o limitním přechodu za znakem integrálu.

A.6.8 Věta (*Lebesgueova*): Nechť posloupnost $\{\varphi_n\}$ komplexních měřitelných funkcí splňuje pro všechna $x \in X$ tyto podmínky:

(a) existuje limita $\varphi(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$,

(b) existuje funkce $\psi \in \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu)$ taková, že $|\varphi_n(x)| \leqq \psi(x)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Potom funkce φ_n a φ patří do $\mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu)$ a platí rovnosti

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |\varphi - \varphi_n| \,\mathrm{d}\mu = 0\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu\,. \tag{18}$$

V předpokladech i tvrzení této věty můžeme nahradit X libovolnou množinou $M \in \mathscr{A}$.

A.6.9 Poznámka: Podle (4b) a (13b) je integrál libovolné měřitelné funkce přes μ-nulovou množinu roven nule. Jestliže tedy pro funkce $\varphi, \psi \in \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu)$ platí $\varphi(x) = \psi(x)$ pro μ-s.v. $x \in X$, je $\int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu = \int_X \psi \,\mathrm{d}\mu$. Připomeňme v této souvislosti, že z podmínky $\int_X |\varphi - \psi| \,\mathrm{d}\mu = 0$ plyne $\varphi(x) = \psi(x)$ pro μ-s.v. $x \in X$ (viz příklad 3).

Řada vět teorie integrálu, v nichž se vyskytují předpoklady typu „výrok $V(x)$ platí pro všechna $x \in X$" (může jich být spočetně nekonečně mnoho), proto platí i za slabších předpokladů „výrok $V(x)$ platí pro μ-s.v. $x \in X$". Jako příklad uveďme Lebesgueovu větu, jejíž předpoklady lze zeslabit takto: Nechť posloupnost měřitelných funkcí $\varphi_n : X \to \mathbb{C}$ a funkce $\psi \in \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu)$ splňují následující podmínky (a) pro μ-s.v. $x \in X$ existuje $\varphi(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$, (b) pro $n = 1, 2, \ldots$ a všechna $x \in M_n$, kde $\mu(X \setminus M_n) = 0$, je $|\varphi_n(x)| \leqq \psi(x)$; potom $\varphi \in \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu)$ a platí rovnosti (18).

A.6.10 Příklad: Nechť $\tau \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} \eta_n \chi_{M_n}$ je komplexní σ-jednoduchá funkce; pro $N = 1, 2, \ldots$ označme $\tau_N := \sum\limits_{n=1}^{N} \eta_n \chi_{M_N}$. Jelikož funkce $|\tau_N|$ tvoří neklesající posloupnost takovou, že $\lim\limits_{N\to\infty} |\tau_N(x)| = |\tau(x)|$ pro všechna $x \in X$, plyne z věty 4

$$\int_X |\tau| \,\mathrm{d}\mu = \lim_{N\to\infty} \int_X |\tau_N| \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|\, \mu(M_n)\,,$$

takže *ekvivalence* (16a) *platí i pro σ-jednoduché funkce.* Předpokládejme nyní, že $\tau \in \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu)$; pro všechna $x \in X$ je $\tau_N(x) \to \tau(x)$ a $|\tau_N(x)| \leqq |\tau(x)|$,

$N = 1, 2, \ldots$; lze tedy užít Lebesgueovu větu, která spolu s formulí (16b) dává

$$\int_X \tau \, d\mu = \lim_{N \to \infty} \int_X \tau_N \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \mu(M_n) . \tag{19a}$$

V případě diskrétní σ-konečné míry μ_d lze pomocí této formule spočítat integrál libovolné komplexní funkce $\varphi \colon X \to \mathbb{C}$. Každá taková funkce je totiž μ_d-s. v. rovna σ-jednoduché funkci $\tau_\varphi := \sum_j \varphi(x_j) \, \chi_{\{x_j\}}$, kde $\{x_j \colon j = 1, 2, \ldots\}$ je množina diskrétních bodů míry μ_d (tato množina je vždy nejvýše spočetná – viz § A.3); platí tudíž ekvivalence

$$\varphi \in \mathscr{L}(X, d\mu_d) \Leftrightarrow \sum_j |\varphi(x_j)| \, \mu_d(\{x_j\}) < \infty , \tag{19b}$$

a jsou-li tyto podmínky splněny, je

$$\int_X \varphi \, d\mu_d = \sum_j \varphi(x_j) \, \mu_d(\{x_j\}) . \tag{19c}$$

A.6.11 Příklad: Nechť $\varphi \equiv f + ig \in \mathscr{L}(X, d\mu)$; ukážeme, že platí implikace

$$\int_M \varphi \, d\mu = 0 \qquad \text{pro všechna} \quad M \in \mathscr{A} \Rightarrow \varphi(x) = 0 \;\; \mu\text{-s. v. v } X . \tag{20a}$$

Pro množinu $M_+ := f^{(-1)}[0, \infty) \in \mathscr{A}$ podle předpokladu platí $0 = \int_{M_+} f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu$ a z výsledku příkladu 3 plyne $f^+(x) = 0$ μ-s. v. v X. Stejně se ověří, že funkce f^- a $g^\pm$ jsou μ-s. v. nulové. Implikace (20a) lze značně zobecnit (viz [[Ru 1]], § 1.40); uvedeme zde pouze následující jednoduchý případ:

$$\int_M \varphi \, d\mu \geqq 0 \qquad \text{pro všechna} \quad M \in \mathscr{A} \Rightarrow \varphi(x) \geqq 0 \;\; \mu\text{-s. v.} \tag{20b}$$

Skutečně, podle (20a) je $g(x) = 0$ pro μ-s. v. $x \in X$; dále pro $M_- := f^{(-1)}(-\infty, 0)$ je $\int_{M_-} f \, d\mu = -\int_X f^- \, d\mu \geqq 0$, tj. $\int_X f^- \, d\mu = 0$, a pak podle příkladu 3 máme $f^-(x) = 0$ μ-s. v., takže $\varphi(x) = f^+(x) \geqq 0$ pro μ-s. v. $x \in X$.

Vztahy (14) a (18) udávají závislost integrálu komplexní funkce na integrandu. Pomocí nich snadno odvodíme základní rysy závislosti integrálu na definičním oboru. Pro $\varphi \in \mathscr{L}(X, d\mu)$ a disjunktní množiny $M, N \in \mathscr{A}$ plyne z rovnosti (14) aditivita integrálu

$$\int_{M \cup N} \varphi \, d\mu = \int_X \varphi \chi_{M \cup N} \, d\mu = \int_X \varphi \chi_M \, d\mu + \int_X \varphi \chi_N \, d\mu = \int_M \varphi \, d\mu + \int_N \varphi \, d\mu . \tag{21a}$$

Uvažujme dále disjunktní systém $\{M_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathscr{A}$ a označme $S := \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$ a $S_n := = \bigcup_{j=1}^{n} M_j$; aplikací Lebesgueovy věty dostaneme pomocí (21a) σ-aditivitu integrálu

$$\int_S \varphi \, d\mu = \int_X \varphi \chi_S \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X \varphi \chi_{S_n} \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{M_j} \varphi \, d\mu . \tag{21b}$$

Vidíme tedy, že pro každou komplexní funkci $\varphi \in \mathscr{L}(X, d\mu)$ je zobrazení

$$M \mapsto \nu(M) := \int_M \varphi \, d\mu \tag{21c}$$

komplexní míra na $\mathscr{A}$; říkáme opět, že je generována funkcí φ a mírou μ a píšeme $d\nu = \varphi \, d\mu$ (viz poznámku (b) k větě 6). Speciálně reálná funkce $f \in \mathscr{L}(X, d\mu)$ generuje reálnou míru; příslušný Hahnův rozklad tvoří množiny $f^{(-1)}[0, \infty)$ a $f^{(-1)}(-\infty, 0)$ a kladná, záporná, resp. totální variace je generována funkcemi $f^{\pm}$, resp. $|f|$, a mírou μ. Tyto závěry zobecníme v § A.10.

Vyšetříme ještě závislost integrálu na míře. Nechť μ a ν jsou nezáporné míry na σ-algebrách $\mathscr{A}_\mu$ resp. $\mathscr{A}_\nu$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat $\mathscr{A}_\mu = \mathscr{A}_\nu = = \mathscr{A}$ (jinak položíme $\mathscr{A} := \mathscr{A}_\mu \cap \mathscr{A}_\nu$ a uvažujeme zúžení $\mu \restriction \mathscr{A}$ a $\nu \restriction \mathscr{A}$). Potom

$$\lambda := \mu + \nu \quad \text{a} \quad \varrho := k\mu, \ k > 0 ,$$

jsou rovněž nezáporné míry na $\mathscr{A}$ a pro jednoduchou nezápornou funkci s formule (2) dá

$$\int_X s \, d\lambda = \int_X s \, d\mu + \int_X s \, d\nu , \qquad \int_X s \, d\varrho = k \int_X s \, d\mu . \tag{22}$$

Tyto vztahy snadno zobecníme pro libovolnou měřitelnou funkci $f \colon X \to [0, \infty]$. Užijeme toho, že existuje neklesající posloupnost nezáporných jednoduchých funkcí s_n takových, že $\lim_{n \to \infty} s_n(x) = f(x)$ pro všechna $x \in X$ (viz poznámku (b) k větě 4). Z rovností (8) a (22) pak plyne

$$\int_X f \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int_X s_n \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int_X s_n \, d\mu + \lim_{n \to \infty} \int_X s_n \, d\nu = \int_X f \, d\mu + \int_X f \, d\nu$$

a podobně

$$\int_X f \,\mathrm{d}\varrho = k \int_X f \,\mathrm{d}\mu .$$

Tyto rovnosti spolu s podmínkou (13a) dají

$$\mathscr{L}(X, \mathrm{d}\lambda) = \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu) \cap \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\nu), \qquad \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\varrho) = \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu) \tag{23a}$$

a pomocí (13b) z nich pro $\psi \in \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu) \cap \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\nu)$, resp. $\varphi \in \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu)$, dostaneme

$$\begin{aligned} \int_X \psi \,\mathrm{d}\lambda &\equiv \int_X \psi \,\mathrm{d}(\mu + \nu) = \int_X \psi \,\mathrm{d}\mu + \int_X \psi \,\mathrm{d}\nu , \\ \int_X \varphi \,\mathrm{d}\varrho &\equiv \int \varphi \,\mathrm{d}(k\mu) = k \int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu . \end{aligned} \tag{23b}$$

A.6.12 Poznámka: Snadným důsledkem vztahů (23) je následující tvrzení: Jestliže nezáporné míry μ a λ definované na téže σ-algebře $\mathscr{A}$ splňují $\mu(M) \leqq \lambda(M)$ pro všechna $M \in \mathscr{A}$, potom $\mathscr{L}(X, \mathrm{d}\lambda) \subset \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu)$ a pro každou nezápornou funkci $f \in \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\lambda)$ platí

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \leqq \int_X f \,\mathrm{d}\lambda .$$

Na závěr tohoto přehledu základů teorie integrálu uvedeme ekvivalentní definici integrálu vzhledem ke *konečné* míře.

A.6.13 Věta: Jestliže $\mu(X) < \infty$, potom měřitelná funkce $\varphi\colon X \to \mathbb{C}$ patří do $\mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu)$ právě tehdy, když existuje posloupnost $\{\tau_n\}$ σ-jednoduchých integrabilních funkcí takových, že

$$\lim_{n \to \infty} \left[\sup_{x \in X} |\varphi(x) - \tau_n(x)| \right] = 0 . \tag{24}$$

Jsou-li tyto podmínky splněny, pak

$$\int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int \tau_n \,\mathrm{d}\mu . \tag{25}$$

Důkaz: Podle tvrzení A.2.6 existuje ke každé měřitelné funkci posloupnost $\{\tau_n\}$ s uvedenými vlastnostmi (kromě integrability funkcí τ_n), přičemž z (24) a podmínky $\mu(X) < \infty$ plyne

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |\varphi - \tau_n| \, d\mu = 0 . \tag{26}$$

Nechť $\varphi \in \mathscr{L}(X, d\mu)$; nerovnost $|\tau_n| \leqq |\tau_n - \varphi| + |\varphi|$ spolu se vztahem (26) dává $\tau_n \in \mathscr{L}(X, d\mu)$ a rovnost (25) pak plyne z (15) a (26). Naopak, jsou-li funkce τ_n integrabilní, máme pro všechna dosti velká n a všechna $x \in X$

$$|\varphi(x)| \leqq \sup_{x \in X} |\varphi(x) - \tau_n(x)| + |\tau_n(x)| < 1 + |\tau_n(x)|$$

a z implikace (5a) plyne $\varphi \in \mathscr{L}(X, d\mu)$. ■

Poznámka: Je-li funkce φ omezená, platí věta pro jednoduché funkce τ_n.

A.7 INTEGRACE SLOŽENÝCH FUNKCÍ. VĚTA O SUBSTITUCI

Je dán prostor s mírou $(X, \mathscr{A}, \mu)$ a zobrazení $w: X \to \mathbb{R}^d$ takové, že

$$w^{(-1)}(\mathscr{B}^d) \subset \mathscr{A} ; \tag{1a}$$

jak bylo řečeno v poznámce A.2.4, je tato podmínka ekvivalentní měřitelnosti každé z funkcí $w_j: X \to \mathbb{R}$, $1 \leqq j \leqq d$. Budeme dále předpokládat, že pro každé $J \in \mathscr{J}^d$ je

$$\mu(w^{(-1)}(J)) < \infty . \tag{1b}$$

Předpisem

$$B \mapsto \mu^{(w)}(B) := \mu(w^{(-1)}(B)) \tag{2}$$

je pak určena borelovská míra $\mu^{(w)}$ na $\mathbb{R}^d$ (viz poznámku A.4.12c). Z evidentní rovnosti $\chi_M \circ w = \chi_{w^{(-1)}(M)}$, formulí (1a) a (A.6.2) plyne, že $s \circ w$ je nezáporná jednoduchá (μ-měřitelná) funkce na X, jakmile $s: \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ je jednoduchá borelovská funkce, přičemž pro všechna $B \in \mathscr{B}^d$ platí

$$\int_B s \, d\mu^{(w)} = \int_{w^{(-1)}(B)} (s \circ w) \, d\mu .$$

Na základě poznámky (b) k větě A.6.4 a věty A.2.3b dále zjistíme, že pro každou borelovskou funkci $f: \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ je složená funkce $f \circ w: X \to [0, \infty]$ μ-měřitelná a

$$\int_B f \, d\mu^{(w)} = \int_{w^{(-1)}(B)} (f \circ w) \, d\mu .$$

Následující tvrzení pak dostaneme pomocí formulí (A.6.13a, b).

A.7.1 Věta: Nechť $(X, \mathscr{A}, \mu)$ je prostor s mírou, zobrazení $w\colon X \to \mathbb{R}^d$ splňuje podmínky (1a, b), $\mu^{(w)}$ je borelovská míra na $\mathbb{R}^d$ určená vztahem (2) a borelovská funkce $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ patří do $\mathscr{L}(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}\mu^{(w)})$; pak $\varphi \circ w \in \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu)$ a pro všechna $B \in \mathscr{B}^d$ platí

$$\int_B \varphi \, \mathrm{d}\mu^{(w)} = \int_{w^{(-1)}(B)} (\varphi \circ w) \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Pro $X = \mathbb{R}^d, \mathscr{A} = \mathscr{B}^d$ a Lebesgueovu míru m_d na $\mathbb{R}^d$ (viz příklad A.4.9), lze tuto větu upravit do tvaru vhodného pro konkrétní výpočty za následujících předpokladů o zobrazení $w\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$:

(r1) w je injektivní a jeho definiční obor je otevřená množina $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^d$,

(r2) každá z funkcí $w_j\colon \mathscr{D} \to \mathbb{R}$, $1 \leqq j \leqq d$, má spojité parciální derivace $x \mapsto (\partial_k w_j)(x)$ pro $k = 1, 2, \ldots, d$,

(r3) determinant D_w, jehož prvky jsou funkce $\partial_k w_j$, je všude v $\mathscr{D}$ nenulový.

Takové zobrazení se nazývá **regulární**. Ukazuje se, že pro regulární zobrazení w množina $\mathscr{R} \equiv \mathrm{Ran}\, w$ je otevřená v $\mathbb{R}^d$, inverzní zobrazení w^{-1} je opět regulární a pro každé $I \in \mathscr{J}^d$, $I \subset \mathscr{R}$ platí

$$m_d(I) = \int_{w^{(-1)}(I)} |D_w| \, \mathrm{d}m_d \tag{3a}$$

(viz [[Jar 1]], § VIII.2 a [[Jar 2]], § VI.2).

A.7.2 Poznámka: Pro $d = 1$ a kompaktní interval I je ověření této rovnosti snadné, neboť z podmínky (r2) plyne, že funkce w je absolutně spojitá na I (viz poznámku A.9.6).

Množinu $\mathscr{R}$ lze zapsat ve tvaru disjunktního sjednocení $\mathscr{R} = \bigcup_n I_n$, $I_n \in \mathscr{J}^d$. Pak pro libovolné $J \in \mathscr{J}^d$ je $J \cap \mathscr{R} = \bigcup_n (J \cap I_n)$; aplikujeme-li rovnost (3a) na $J \cap I_n$ a užijeme-li σ-aditivity a vztahu $\bigcup_n w^{(-1)}(J \cap I_n) = w^{(-1)}(J \cap \mathscr{R}) = w^{(-1)}(J)$, dostaneme

$$m_d(J \cap \mathscr{R}) = \int_{w^{(-1)}(J)} |D_w| \, \mathrm{d}m_d \, , \qquad J \in \mathscr{J}^d \, . \tag{3b}$$

Podle (A.6.12a) zavedeme borelovské míry ϱ a ν takto:

$$\mathrm{d}\varrho := \chi_{\mathscr{R}} \, \mathrm{d}m_d \, , \qquad \mathrm{d}\nu := \chi_{\mathscr{D}} |D_w| \, \mathrm{d}m_d \, . \tag{4}$$

Jelikož $\varrho(J) = m_d(J \cap \mathscr{R})$, lze rovnost (3b) zapsat ve tvaru

$$\varrho(J) = \nu^{(w)}(J) \, , \qquad J \in \mathscr{J}^{(d)} \, ,$$

kde jsme užili označení (2). Obě míry jsou borelovské; z důsledku A.4.7 pak plyne $\varrho = \nu^{(w)}$, tj. pro všechna $B \in \mathscr{B}^d$ platí

$$m_d(B \cap \mathscr{R}) = \varrho(B) = \int_{w^{(-1)}(B)} \chi_{\mathscr{D}} |D_w| \,\mathrm{d}m_d = \int_{w^{(-1)}(B)} |D_w| \,\mathrm{d}m_d \,.$$

Pro každou borelovskou funkci $\varphi: \mathscr{R} \to \mathbb{C}$, která patří do $\mathscr{L}(\mathscr{R}, \mathrm{d}m_d)$, a tedy také do $\mathscr{L}(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}\varrho)$, z věty 1 a formulí (4), (A.6.17a, b) plyne podmínka $(\varphi \circ w)\, D_w \in \mathscr{L}(\mathscr{D}, \mathrm{d}m_d)$ a pro každé $B \in \mathscr{B}^d$, $B \subset \mathscr{R}$, rovnost

$$\int_B \varphi \,\mathrm{d}m_d = \int_B \varphi \,\mathrm{d}\varrho = \int_{w^{(-1)}(B)} (\varphi \circ w) \,\mathrm{d}\nu = \int_{w^{(-1)}(B)} (\varphi \circ w)\, |D_w| \,\mathrm{d}m_d \,. \tag{5}$$

Stejná úvaha pro regulární zobrazení $v = w^{-1}: \mathscr{R} \to \mathscr{D}$ a funkci $\psi := (\varphi \circ w)\, D_w$ vede k implikaci $\psi \in \mathscr{L}(\mathscr{D}, \mathrm{d}m_d) \Rightarrow (\psi \circ v)\, D_v \in \mathscr{L}(\mathscr{R}, \mathrm{d}m_d)$. Nyní $\psi \circ v = (\varphi \circ w \circ v)\,(D_w \circ v) = \varphi(D_w \circ v)$ a

$$(D_w \circ v)\, D_v = D_{w \circ v} = 1 \,, \tag{6}$$

takže $(\psi \circ v)\, D_v = \varphi$; z podmínky $(\varphi \circ w)\, D_w \in \mathscr{L}(\mathscr{D}, \mathrm{d}m_d)$ tudíž plyne $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{R}, \mathrm{d}m_d)$. Odvodili jsme následující tvrzení.

A.7.3 Věta (*o substituci*): Jestliže w je regulární zobrazení na $\mathbb{R}^d$ s definičním oborem $\mathscr{D}$ a oborem hodnot $\mathscr{R}$, pak borelovská funkce $\varphi: \mathscr{R} \to \mathbb{C}$ patří do $\mathscr{L}(\mathscr{R}, \mathrm{d}m_d)$ právě tehdy, když $(\varphi \circ w)\, D_w \in \mathscr{L}(\mathscr{D}, \mathrm{d}m_d)$; jsou-li tyto podmínky splněny, platí pro každé $B \in \mathscr{B}^d$, $B \subset \mathscr{R}$, rovnost (5).

A.7.4 Poznámka: Rovnost (5) je možno přepsat pomocí determinantu D_v inverzního zobrazení $v \equiv w^{-1}$. Vezměme libovolné $\tilde{B} \in \mathscr{B}^d$, $\tilde{B} \subset \mathscr{D}$ a borelovskou funkci $\psi: \mathscr{R} \to \mathbb{C}$; podle (A.1.7c) máme $\tilde{B} = w^{(-1)}(w(\tilde{B}))$, přičemž množina $w(\tilde{B}) = v^{(-1)}(\tilde{B}) \subset \mathscr{R}$ je díky spojitosti opět borelovská. Dále pomocí (6) dostaneme $\psi \circ w = (\psi \circ w)\, |D_v \circ w|\, |D_w| = [(\psi |D_v|) \circ w]\, |D_w|$. Pak rovnost (5) pro $\varphi = \psi |D_v|$ a $B = w(\tilde{B})$ dá

$$\int_{w(\tilde{B})} \psi |D_v| \,\mathrm{d}m_d = \int_{\tilde{B}} (\psi \circ w) \,\mathrm{d}m_d \,, \tag{7}$$

jakmile jedna z funkcí $\psi \circ w$, $\psi |D_v|$ je integrabilní.

A.8 SOUČINOVÉ MÍRY. FUBINIOVA VĚTA

Nechť $(X, \mathscr{A}, \mu)$ a $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ jsou prostory se σ-konečnými mírami; na měřitelném prostoru $(X \times Y, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$ chceme sestrojit míru λ takovou, aby pro všechna $A \in \mathscr{A}$ a $B \in \mathscr{B}$ platilo

$$\lambda(A \times B) = \mu(A)\, \nu(B)\,. \tag{1}$$

Vyjdeme z toho, že každý x-řez libovolné množiny $M \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ patří do $\mathscr{B}$ a každý y-řez do $\mathscr{A}$ (viz příklad A.1.9b), a budeme uvažovat systém $\mathscr{S} \subset \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, pro jehož každý prvek M platí, že funkce $x \mapsto f_M(x) := \nu(M_x)$ a $y \mapsto g_M(y) := \mu(M^y)$ jsou měřitelné a

$$\int_X f_M \,\mathrm{d}\mu = \int_Y g_M \,\mathrm{d}\nu\,. \tag{2a}$$

Snadno nahlédneme, že pro libovolná $A \in \mathscr{A}$ a $B \in \mathscr{B}$ je $f_{A\times B} = \nu(B)\,\chi_A$, $g_{A\times B} = \mu(A)\,\chi_B$ a

$$\int_X f_{A\times B} \,\mathrm{d}\mu = \int_Y g_{A\times B} \,\mathrm{d}\nu = \mu(A)\, \nu(B)\,, \tag{2b}$$

takže

$$\mathscr{A} \times \mathscr{B} \subset \mathscr{S}\,. \tag{3}$$

Nechť $\{M_j\}_{j=1}^n \subset \mathscr{S}$, $n \leqq \infty$, je disjunktní systém a $M := \bigcup_j M_j$; podle příkladu A.1.9b pro každé $x \in X$ máme $M_x = \bigcup_j (M_j)_x$ a pomocí σ-aditivity míry ν dostáváme $f_M(x) = \sum_j f_{M_j}(x)$. Z věty A.2.3a pak plyne měřitelnost funkce f_M a dále věta A.6.6a dává

$$\int_X f_M \,\mathrm{d}\mu = \sum_j \int_X f_{M_j} \,\mathrm{d}\mu\,. \tag{4}$$

Analogicky ověříme měřitelnost funkce g_M a získáme vztah $\int_Y g_M \,\mathrm{d}\nu = \sum_j \int_Y g_{M_j} \,\mathrm{d}\nu$, a protože pro všechny množiny M_j platí rovnost (2a), je tato rovnost splněna i pro M, tj. $M \in \mathscr{S}$. Systém $\mathscr{S}$ je tedy uzavřený vůči disjunktním nejvýše spočetným sjednocením (σ-*vlastnost*).

Tvrdíme, že $\mathscr{S} = \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$. K ověření užijeme σ-konečnosti měr μ a ν, z níž plyne existence rozkladu

$$X \times Y = \bigcup_{j,k=1}^{\infty} (X_j \times Y_k) \tag{5a}$$

takového, že $X_j \in \mathscr{A}$, $Y_k \in \mathscr{B}$, $\mu(X_j) < \infty$ a $\nu(Y_k) < \infty$ pro všechna j a k. Pro dané $M \subset X \times Y$ označíme $M(j,k) := M \cap (X_j \times Y_k)$ a nechť $\mathfrak{M}$ je systém všech

$M \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ takových, že $M(j, k) \in \mathscr{S}$ pro všechna přirozená j a k. Je zřejmé, že σ-vlastnost systému $\mathscr{S}$ se přenáší na $\mathfrak{M}$. Dále ze (3) plyne $\mathscr{A} \times \mathscr{B} \subset \mathfrak{M}$, což spolu se σ-vlastností implikuje, že systém $\mathfrak{M}$ obsahuje okruh $\mathscr{R}$ tvořený konečnými disjunktními sjednoceními množin $A \times B$, kde $A \in \mathscr{A}$ a $B \in \mathscr{B}$ (srov. s příkladem A.1.1). Ukážeme-li, že $\mathfrak{M}$ je monotónní, pak pomocí (A.1.14a) a (A.1.6b) dostaneme $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \subset \mathfrak{A}(\mathscr{R}) = \mathfrak{M}(\mathscr{R}) \subset \mathfrak{M} \subset \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, tj. $\mathfrak{M} = \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$. Nechť posloupnost $\{N_n\} \subset \mathfrak{M}$ je nerostoucí a $N := \bigcap_n N_n$; je třeba dokázat, že $N(j, k) \in \mathscr{S}$ pro $j, k = 1, 2, \ldots$. Jelikož pro všechna $x \in X$ platí $N(j, k)_x = \bigcap_n (N_n(j, k))_x$ a

$$\nu((N_n(j, k))_x) \leqq \nu(Y_k) < \infty\,, \tag{5b}$$

je podle (A.3.3b) $f_{N(j,k)}(x) = \nu(N(j, k)_x) = \lim_{n\to\infty} \nu((N_n(j, k))_x) = \lim_{n\to\infty} f_{N_n(j,k)}(x)$, takže $f_{N(j,k)}$ je měřitelná funkce. Dále z inkluze $N(j, k) \subset X_j \times Y_k$ vyplývá $f_{N(j,k)}(x) = 0$ pro $x \notin X_j$; proto je $\int_X f_{N(j,k)}\, d\mu = \int_{X_j} f_{N(j,k)}\, d\mu$. Konečně z nerovností (5b) a $\mu(X_j) < \infty$ vidíme, že posloupnost $\{f_{N_n}(j, k)\}_{n=1}^{\infty}$ má majorantu $\nu(Y_k) \in \mathscr{L}(X, d\mu)$ a pomocí Lebesgueovy věty dostaneme

$$\int_X f_{N(j,k)}\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_{N_n(j,k)}\, d\mu\,.$$

Analogické úvahy lze provést pro funkce $g_{N(j,k)}$ a $g_{N_n(j,k)}$, a protože podle předpokladu pro $n = 1, 2, \ldots$ $\int_X f_{N_n(j,k)}\, d\mu = \int_Y g_{N_n(j,k)}\, d\nu$, je $\int_X f_{N(j,k)}\, d\mu = \int_Y g_{N(j,k)}\, d\nu$, tj. $N(j, k) \in \mathscr{S}$. Podobně se pomocí (A.3.3a) a věty o monotónní konvergenci ukáže, že $\mathfrak{M}$ obsahuje spolu s každou neklesající posloupností $\{M_n\}$ i množinu $\bigcup_n M_n$. Dokázali jsme tak monotonii systému $\mathfrak{M}$, a tedy také rovnost $\mathfrak{M} = \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$. Z ní díky σ-vlastnosti systému $\mathscr{S}$ a rozkladu (5a) plyne požadovaný vztah $\mathscr{S} = \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$.

Ukazuje se, že tento vztah fakticky řeší naši úlohu.

A.8.1 Věta: Jestliže $(X, \mathscr{A}, \mu)$ a $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ jsou prostory se σ-konečnými mírami, pak existuje právě jedna míra λ na $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ splňující podmínku (1). Tato míra je σ-konečná a platí pro ni

$$\lambda(M) = \int_X \nu(M_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(M^y)\, d\nu(y)\,, \qquad M \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}\,. \tag{6}$$

Zkonstruovaná míra se značí $\mu \otimes \nu$ a nazývá (direktním) **součinem měr** μ a ν nebo stručně **součinovou mírou**.

Důkaz: Rovnost (4) znamená, že zobrazení $M \mapsto \lambda(M)$ je σ-aditivní, a vztah (2b) je totožný s podmínkou (1); dále rozklad (5a) implikuje σ-konečnost. Konečně každá míra λ' na $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ splňující (1) je totožná s λ na systému $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$, a tedy také na minimálním okruhu $\mathscr{R}$ obsahujícím $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$; nyní $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} = \mathfrak{A}(\mathscr{A} \times \mathscr{B}) = \mathfrak{A}(\mathscr{R})$ a podle věty A.4.4 je $\lambda = \lambda'$. ■

A.8.2 Poznámka: V příkladu A.4.9 jsme pro borelovské míry μ na $\mathbb{R}^m$ a ν na $\mathbb{R}^n$ definovali součinovou míru jako borelovskou míru ϱ přiřazenou podle věty A.4.6 regulární funkci $\tilde{\varrho}$ intervalu v $\mathbb{R}^{m+n}$, kde $\tilde{\varrho}(J \times L) = \mu(J)\, \nu(L)$ pro každé $J \in \mathscr{J}^m$ a $L \in \mathscr{J}^n$. Snadno nahlédneme, že $\varrho = \mu \otimes \nu$. Především je $\mathscr{B}^m \otimes \mathscr{B}^n = \mathscr{B}^{m+n}$ (viz (A.1.14b) a jestliže do (1) dosadíme $A \in \mathscr{J}^m$ a $B \in \mathscr{J}^n$, vidíme, že $\varrho \restriction \mathscr{J}^{m+n} = (\mu \otimes \nu) \restriction \mathscr{J}^{m+n}$; míra $\mu \otimes \nu$ je proto borelovská a z důsledku A.4.7 plyne $\mu \otimes \nu = \varrho$.

Integrálu vzhledem k součinové míře se říká **dvojný integrál**. Vyšetříme jeho vztah k tzv. **dvojnásobným integrálům** $\int_X [\int_Y \varphi_x \,\mathrm{d}\nu] \,\mathrm{d}\mu(x)$, resp. $\int_Y [\int_X \varphi^y \,\mathrm{d}\mu] \,\mathrm{d}\nu(y)$, kde $\varphi \colon X \times Y \to \mathbb{C}$ je $(\mu \otimes \nu)$-měřitelná funkce. Nejprve budeme uvažovat integrály nezáporné funkce f. V tomto případě jsou „vnitřní" integrály

$$I_f(x) := \int_Y f_x \,\mathrm{d}\nu\,, \qquad J_f(y) := \int_X f^y \,\mathrm{d}\mu \tag{7a}$$

definovány pro všechna $x \in X$, resp. $y \in Y$, neboť všechny řezy jsou měřitelné nezáporné funkce (viz tvrzení A.2.8). Speciálně pro nezápornou jednoduchou funkci $s \equiv \sum_n y_n \chi_{M_n}$, $M_n \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, z evidentní rovnosti

$$(\chi_M)_x = \chi_{M_x}\,, \qquad x \in X\,, \tag{8}$$

dostáváme $I_s(x) = \sum_n y_n \nu((M_n)_x)$, $J_s(y) = \sum_n y_n \mu((M_n)^y)$ a věta 1 dá

$$\int_X I_s \,\mathrm{d}\mu = \int_Y J_s \,\mathrm{d}\nu = \int_{X \times Y} s \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu)\,. \tag{7b}$$

Je-li nyní f nezáporná měřitelná funkce, existuje neklesající posloupnost nezáporných jednoduchých funkcí s_n taková, že pro všechna $[x, y] \in X \times Y$ platí $s_n(x, y) \to f(x, y)$ a

$$\int_{X \times Y} s_n \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) \to \int_{X \times Y} f \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) \tag{9}$$

(viz poznámku b k větě A.6.4). Pro x-řezy ze vztahu (8) plyne, že $\{(s_n)_x\}$ je neklesající posloupnost ν-měřitelných jednoduchých funkcí, přičemž pro každé $y \in Y$ je

$$(s_n)_x(y) = s_n(x, y) \to f(x, y) = f_x(y)\,. \tag{10}$$

Funkce $x \mapsto I_{s_n}(x) = \int\limits_Y (s_n)_x \, d\nu$, o nichž již víme, že jsou μ-měřitelné, tvoří opět neklesající posloupnost (viz (A.6.5a)); pomocí (10) a věty o monotónní konvergenci zjistíme, že $I_{s_n}(x) \to I_f(x)$, takže I_f je μ-měřitelná. Opětovné užití citované věty dává $\int\limits_X I_f \, d\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_X I_{s_n} \, d\mu$. Stejným způsobem zjistíme, že $\int\limits_Y J_f \, d\nu = \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_Y J_{s_n} \, d\nu$. Na základě těchto rovností a vztahů (7b) a (9) dospíváme k následujícímu závěru.

A.8.3 Tvrzení: Za předpokladů věty 1 je pro každou $(\mu \otimes \nu)$-měřitelnou nezápornou funkci f formulemi (7a) určena μ-měřitelná funkce $I_f\colon X \to [0, \infty]$ a ν-měřitelná funkce $J_f\colon Y \to [0, \infty]$, přičemž

$$\int\limits_X I_f \, d\mu = \int\limits_Y J_f \, d\nu = \int\limits_{X \times Y} f \, d(\mu \otimes \nu) .$$

Toto tvrzení umožňuje vyšetřit vztah mezi dvojným integrálem a odpovídajícími dvojnásobnými integrály v plné obecnosti.

A.8.4 Věta (*Fubini*): Nechť jsou splněny předpoklady věty 1 a funkce $\varphi\colon X \times Y \to \mathbb{C}$ je integrabilní, tj. $\varphi \in \mathscr{L}(X \times Y, d(\mu \otimes \nu)) \equiv \mathscr{L}_\otimes$; pak

(a) existuje μ-nulová množina M taková, že pro všechna $x \in X \setminus M$ je $\varphi_x \in \mathscr{L}(Y, d\nu)$ a funkce Φ_φ určená na $X \setminus M$ předpisem $\Phi_\varphi(x) := \int\limits_Y \varphi_x \, d\nu$ patří do $\mathscr{L}(X, d\mu)$,

(b) existuje ν-nulová množina N taková, že pro všechna $y \in Y \setminus N$ je $\varphi^y \in \mathscr{L}(X, d\mu)$ a funkce Ψ_φ určená na $Y \setminus N$ předpisem $\Psi_\varphi(y) := \int\limits_X \varphi^y \, d\mu$ patří do $\mathscr{L}(Y, d\nu)$,

(c) oba dvojnásobné integrály funkce φ jsou si rovny a rovnají se dvojnému integrálu, tj.

$$\int\limits_X \Phi_\varphi \, d\mu = \int\limits_Y \Psi_\varphi \, d\nu = \int\limits_{X \times Y} \varphi \, d(\mu \otimes \nu) . \tag{11}$$

Důkaz: Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že φ je reálná funkce. Uvažujme nezáporné funkce $I_\pm := I_{\varphi^\pm}$ (viz (7a)); ty jsou podle tvrzení 3 μ-měřitelné a splňují

$$\int\limits_X I_\pm \, d\mu = \int\limits_{X \times Y} \varphi^\pm \, d(\mu \otimes \nu) . \tag{12}$$

Z předpokladu $\varphi \in \mathscr{L}_\otimes$ plyne $\varphi^\pm \in \mathscr{L}_\otimes$ a předchozí rovnost dává $I_\pm \in \mathscr{L}(X, d\mu)$, což dále implikuje $I_\pm(x) < \infty$ pro $x \in X \setminus M$, kde $\mu(M) = 0$. Nyní $I_\pm(x) < \infty \Leftrightarrow (\varphi^\pm)_x \in \mathscr{L}(Y, d\nu)$, takže $\varphi_x = (\varphi^+)_x - (\varphi^-)_x$ patří do $\mathscr{L}(Y, d\nu)$

pro všechna $x \in X \setminus M$; pro tato x je $\Phi_\varphi(x) = \int_Y [(\varphi^+)_x - (\varphi^-)_x] \, d\nu = I_+(x) - I_-(x)$. Funkce Φ_φ a $I_+ - I_-$ se tedy liší na μ-nulové množině M. Odtud plyne jednak $\Phi_\varphi \in \mathscr{L}(X, d\mu)$, neboť $I_\pm \in \mathscr{L}(X, d\mu)$, jednak rovnost $\int_X \Phi_\varphi \, d\mu = \int_X (I_+ - I_-) \, d\mu = \int_{X\times Y} (\varphi^+ - \varphi^-) \, d(\mu \otimes \nu) = \int_{X\times Y} \varphi \, d(\mu \otimes \nu)$ (viz (12)). Stejně se ověří tvrzení o funkcích φ^y a Ψ_φ. ∎

A.8.5 Poznámka: Rovnost (11) obecně neplatí, nejsou-li obě míry μ a ν σ-konečné; pro její platnost rovněž nestačí existence jednoho nebo obou dvojnásobných integrálů – protipříklady lze najít např. v ⟦Ru 1⟧, § 7.9, ⟦KF⟧, § V.6.4. Jestliže však $\int_X I_{|\varphi|} \, d\mu \equiv \int_X [\int_Y |\varphi_x| \, d\nu] \, d\mu(x) < \infty$, pak z tvrzení 3 plyne $\varphi \in \mathscr{L}_\otimes$. *Je-li tedy alespoň jeden z dvojnásobných integrálů funkce $|\varphi|$ konečný, platí pro φ všechna tvrzení Fubiniovy věty.*

A.8.6 Příklad: Nechť funkce $\varphi\colon X \to \mathbb{C}$ patří do $\mathscr{L}(X, d\mu)$, $\psi\colon Y \to \mathbb{C}$ patří do $\mathscr{L}(Y, d\nu)$ a $\omega := \varphi \times \psi$. Snadno ověříme, že ω je $(\mu \otimes \nu)$-měřitelná (viz příklad 9.3.7). Jelikož

$$\int_X \left[\int_Y |\omega_x| \, d\nu \right] d\mu(x) = \int_X \left[|\varphi(x)| \int_Y |\psi| \, d\nu \right] d\mu(x) = \int_X |\varphi| \, d\mu \int_Y |\psi| \, d\nu < \infty \,,$$

vidíme, že pro každé $\varphi \in \mathscr{L}(X, d\mu)$ a $\psi \in \mathscr{L}(Y, d\nu)$ patří funkce $\varphi \times \psi$ do $\mathscr{L}_\otimes$ a platí

$$\int_{X\times Y} (\varphi \times \psi) \, d(\mu \otimes \nu) = \int_X \varphi \, d\mu \int_Y \psi \, d\nu \,.$$

A.9 ABSOLUTNÍ SPOJITOST

O všech mírách, s nimiž budeme v tomto paragrafu pracovat, předpokládáme, že jsou definovány na společné σ-algebře $\mathscr{A} \subset 2^X$. Nezáporné míry značíme μ, λ, $\varkappa$, zatímco ν znamená míru, která může být jak nezáporná (tedy i nekonečná), tak komplexní. Říkáme, že míra ν je **absolutně spojitá** vůči μ a píšeme

$$\nu \ll \mu$$

jestliže pro každé $M \in \mathscr{A}$ platí implikace $\mu(M) = 0 \Rightarrow \nu(M) = 0$. Často se užívá následující ekvivalentní definice.

A.9.1 Tvrzení: Pro komplexní míru ν platí $\nu \ll \mu$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|\nu(M)| < \varepsilon$, jakmile $\mu(M) < \delta$. (Důkaz viz ⟦Ru 1⟧, § 6.11).

A.9.2 Příklad: Nechť $\varphi \in \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu)$; předpisem $M \mapsto \nu(M) := \int_M \varphi \, \mathrm{d}\mu$ je určena komplexní míra na $\mathscr{A}$ (viz (A.6.21c)). Je zřejmé, že $\nu \ll \mu$; ke každému $\varepsilon > 0$ tudíž existuje $\delta > 0$ takové, že platí implikace

$$\mu(M) < \delta \Rightarrow \left| \int_M \varphi \, \mathrm{d}\mu \right| < \varepsilon \, .$$

Této vlastnosti integrálu funkce $\varphi \in \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu)$ se říká **absolutní spojitost integrálu.**

Jestliže pro dvojici měr ν_1, ν_2 existují disjunktní množiny $S_1, S_2 \in \mathscr{A}$ takové, že ν_r je soustředěna na S_r, $r = 1, 2$ (viz vztahy (A.3.5a, b), které mají smysl i pro komplexní míry), říkáme, že míry ν_1 a ν_2 jsou **vzájemně singulární** (nebo že ν_1 je singulární vůči ν_2 a naopak) a píšeme

$$\nu_1 \perp \nu_2 \, .$$

A.9.3 Věta: Pro každou dvojici nezáporných měr λ a μ na $\mathscr{A}$, z nichž první je konečná a druhá σ-konečná, existuje

(a) jednoznačný rozklad

$$\lambda = \lambda_{\mathrm{ac}} + \lambda_{\mathrm{s}} \, , \qquad \lambda_{\mathrm{ac}} \ll \mu \, , \qquad \lambda_{\mathrm{s}} \perp \mu \, , \tag{1}$$

kde λ_{ac} a λ_{s} jsou nezáporné vzájemně singulární míry,

(b) nezáporná funkce $f \in \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu)$, která je určena jednoznačně pro μ-s. v. $x \in X$, a pro niž platí $\mathrm{d}\lambda_{\mathrm{ac}} = f \, \mathrm{d}\mu$, tj.

$$\lambda_{\mathrm{ac}}(M) = \int_M f \, \mathrm{d}\mu \tag{2}$$

pro všechna $M \in \mathscr{A}$.

Důkaz: Jednoznačnost rozkladu (1) je důsledkem následujících implikací: (i) jestliže $\lambda_r \ll \mu$, resp. $\lambda_r \perp \mu$ pro $r = 1, 2$, pak $(\lambda_1 - \lambda_2) \ll \mu$, resp. $(\lambda_1 - \lambda_2) \perp \mu$; (ii) je-li $\lambda \ll \mu$ a současně $\lambda \perp \mu$, pak $\lambda = 0$. Tvrzení (i) týkající se absolutní spojitosti je zřejmé, druhou část dostaneme, uvážíme-li, že pro míry λ_r soustředěné na množinách S_r je $\lambda_1 - \lambda_2$ soustředěna na $S_1 \cup S_2$ – viz vztah (A.3.5b); pomocí tohoto vztahu se ověří rovněž implikace (ii). Tvrzení o jednoznačnosti funkce f je důsledkem implikace (A.6.20a). Zbývá tedy dokázat existenci rozkladu (1) a funkce f splňující (2).

Pro konečnou míru μ odkazujeme čtenáře k [Ru 1], § 6.9. V obecném případě σ-konečné míry zavedeme pomocí disjunktního systému $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňujícího $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ a $\mu(X_n) < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, a vztahů $\mathrm{d}\lambda_n := \chi_{X_n} \mathrm{d}\lambda$, $\mathrm{d}\mu_n := \chi_{X_n} \mathrm{d}\mu$

konečné míry λ_n a μ_n, které jsou zjevně soustředěny na X_n; dále platí

$$\lambda(M) = \sum_n \lambda(M \cap X_n) = \sum_n \lambda_n(M), \qquad M \in \mathscr{A} \tag{3}$$

a analogický vztah pro μ. Jelikož pro každou dvojici μ_n, λ_n věta platí, existují vzájemně singulární nezáporné míry λ^n_{ac} a λ^n_{s} takové, že

$$\lambda_n = \lambda^n_{\mathrm{ac}} + \lambda^n_{\mathrm{s}}, \qquad \lambda^n_{\mathrm{ac}} \ll \mu_n, \qquad \lambda^n_{\mathrm{s}} \perp \mu_n \tag{4}$$

a nezáporná funkce $f_n \in \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu_n) = \mathscr{L}(X_n, \mathrm{d}\mu)$ splňující pro všechna $M \in \mathscr{A}$

$$\lambda^n_{\mathrm{ac}}(M) = \int_M f_n \,\mathrm{d}\mu_n = \int_M f_n \chi_{X_n} \,\mathrm{d}\mu . \tag{5}$$

Tvrdíme, že předpis $M \mapsto \lambda_{\mathrm{ac}}(M) := \sum_n \lambda^n_{\mathrm{ac}}(M)$ určuje konečnou míru λ_{ac} na $\mathscr{A}$. Skutečně, podle (4) je $\lambda^n_{\mathrm{ac}} \leqq \lambda_n$ a z (3) plyne

$$\lambda_{\mathrm{ac}}(M) \leqq \lambda(M) \leqq \lambda(X) \leqq \infty . \tag{6}$$

Dále pro disjunktní systém $\{M_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathscr{A}$ máme

$$\lambda_{\mathrm{ac}}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j\right) = \sum_n \lambda^n_{\mathrm{ac}}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j\right) = \sum_n \sum_j \lambda^n_{\mathrm{ac}}(M_j),$$

a zaměníme-li v této řadě s nezápornými členy pořadí sčítání, zjistíme, že λ_{ac} je σ-aditivní. Stejně se přesvědčíme o tom, že $\lambda_{\mathrm{s}} := \sum_n \lambda^n_{\mathrm{s}}$ je konečná míra na $\mathscr{A}$; z (3) a (4) nyní dostáváme $\lambda = \lambda_{\mathrm{ac}} + \lambda_{\mathrm{s}}$.

Dále ověříme vztah $\lambda_{\mathrm{s}} \perp \mu$. Jelikož λ_n je soustředěna na X_n, platí totéž pro $\lambda^n_{\mathrm{s}} \leqq \lambda_n$; z podmínky $\lambda^n_{\mathrm{s}} \perp \mu_n$ pak plyne existence disjunktních množin $S_n \subset X_n$ a $T_n \subset X_n$ takových, že μ_n je soustředěna na S_n a λ^n_{s} na T_n (viz poznámku A.3.3a). Označme $S := \bigcup_n S_n$ a nechť $M \cap S = \emptyset$; pak $M \cap S_n = \emptyset$ pro všechna n a podle (A.3.5b) je $\mu_n(M) = 0$, takže také $\mu(M) = \sum_n \mu_n(M) = 0$. Míra μ je tedy soustředěna na S a stejně zjistíme, že λ_{s} je soustředěna na $T := \bigcup_n T_n$. Nyní z uvedených vlastností množin S_n, T_n (a podmínek $X_n \cap X_m = \emptyset$ pro $n \neq m$) plyne $S \cap T = \emptyset$, takže $\lambda_{\mathrm{s}} \perp \mu$. Týmž postupem se ukáže, že z podmínek $\lambda^n_{\mathrm{s}} \perp \lambda^n_{\mathrm{ac}}$ plyne $\lambda_{\mathrm{s}} \perp \lambda_{\mathrm{ac}}$.

Konečně pro funkci $f := \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} f_n \chi_{X_n}$ věta o monotónní konvergenci a rovnosti (5) dají

$$\lambda_{ac}(M) = \int_M f \, d\mu , \qquad M \in \mathscr{A} ,$$

takže $\lambda_{ac} \ll \mu$; přitom (6) implikuje $f \in \mathscr{L}(X, d\mu)$. ■

A.9.4 Poznámky: (a) Formuli (1) se říká **Lebesgueův rozklad míry** λ. Je-li speciálně λ absolutně spojitá vůči μ, pak také $\lambda_s \ll \mu$, a protože současně $\lambda_s \perp \mu$, je $\lambda_s = 0$, tj. $\lambda = \lambda_{ac}$. Z tvrzení (b) pak dostáváme tzv. **Radonovu-Nikodýmovu větu:** *Nechť míra* μ *je* σ*-konečná a* λ *je konečná; potom* $\lambda \ll \mu$ *právě tehdy, když existuje funkce* $f \in \mathscr{L}(X, d\mu)$ *taková, že* $d\lambda = f d\mu$.
(b) Větu lze bezprostředně zobecnit pro případ komplexní míry ν – stačí užít formulí (1) a (2) pro míru λ rovnou kladné, resp. záporné variaci reálných měr Re ν a Im ν. Dá se ukázat (viz [[Hal 1]], § 31), že věta platí i pro σ-konečné míry λ s tím, že funkce f již nepatří do $\mathscr{L}(X, d\mu)$; je pouze měřitelná a integrabilní přes každou množinu $M \in \mathscr{A}$ takovou, že $\lambda(M) < \infty$.

Jedním z důsledků Radonovy-Nikodýmovy věty je existence tzv. **polárního rozkladu komplexní míry**; budeme jej potřebovat v § A.10.

A.9.5 Tvrzení: Ke každé komplexní míře ν existuje měřitelná funkce h taková, že $|h(x)| = 1$ pro všechna $x \in X$ a

$$d\nu = h \, d|\nu| . \tag{7}$$

Důkaz: Rovnost (7) plyne ze vztahu $\nu \ll |\nu|$ (viz (A.5.3b)), a protože její platnost nezávisí na chování funkce h na $|\nu|$-nulové množině, stačí dokázat, že pro $|\nu|$-s.v. $x \in X$ je $|h(x)| = 1$. Pro $r > 0$ označme $A_r := \{x \in X\colon |h(x)| < r\}$; je-li $\{M_j\}$ libovolný rozklad množiny A_r, dostaneme pomocí (7)

$$\sum_j |\nu(M_j)| = \sum_j \left| \int_{M_j} h \, d|\nu| \right| \leqq r \sum_j |\nu|(M_j) = r|\nu|(A_r) ,$$

takže platí $|\nu|(A_r) \leqq r|\nu|(A_r)$. Pro každé $r < 1$ tudíž je $|\nu|(A_r) = 0$; odtud pro $|\nu|$-s.v. $x \in X$ plyne $|h(x)| \geqq 1$. Zbývá tedy ukázat, že $|\nu|$-s.v. platí také $|h(x)| \leqq 1$, tj. že množina $h^{(-1)}(G)$, kde $G := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| > 1\}$, je $|\nu|$-nulová. Jelikož $\mathbb{C}$ je separabilní, lze otevřenou množinu G zapsat jako sjednocení spočetného systému otevřených kruhů $U_\varepsilon(w) := \{z \in \mathbb{C}\colon |z - w| < \varepsilon\}$. Dále $U_\varepsilon(w) = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{\varepsilon_n}(w)$, kde $\varepsilon_n := \varepsilon(1 - (1/n))$ a $S_\varepsilon(w) := \overline{U_\varepsilon(w)}$. Stačí proto ověřit, že množina $M_{\varepsilon w} := h^{(-1)}(S_\varepsilon(w))$ je $|\nu|$-nulová pro každý uzavřený kruh $S_\varepsilon(w) \subset G$. Předpoklad $|\nu|(M_{\varepsilon w}) > 0$ spolu s (7) dá pro

$$z_{\varepsilon w} := \frac{1}{|\nu|(M_{\varepsilon w})} \int_{M_{\varepsilon w}} h \, d|\nu|$$

jednak $|z_{\varepsilon w}| \leqq 1$ (viz (A.5.3b)), jednak

$$|z_{\varepsilon w} - w| \leqq \frac{1}{|\nu|(M_{\varepsilon w})} \int_{M_{\varepsilon w}} |h - w| \, \mathrm{d}|\nu| \leqq \varepsilon ,$$

tj. $z_{\varepsilon w} \in S_\varepsilon(w) \subset G$, což je ve sporu s $z_{\varepsilon w} \leqq 1$. Je tedy $|\nu|(M_{\varepsilon w}) = 0$. ■

A.9.6 Poznámka: S tématikou tohoto paragrafu úzce souvisí teorie derivování, neurčitý Lebesgueův integrál a vlastnosti absolutně spojitých funkcí. Nebudeme se však těmito partiemi, o nichž pojednává např. ⟦Ru 1⟧, kap. 8, ⟦KF⟧, §§ VI.1–4 a ⟦Jar 2⟧, kap. V, zabývat, protože v naší knize z nich užíváme fakticky jen následující dva poznatky.

(i) **Absolutní spojitostí funkce** $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *na kompaktním intervalu* $[a, b]$ se rozumí tato vlastnost: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolný konečný disjunktní systém intervalů $(\alpha_j, \beta_j) \subset [a, b]$ je $\sum_j |\varphi(\beta_j) - \varphi(\sigma_j)| < \varepsilon$, jakmile $\sum_j (\beta_j - \alpha_j) < \delta$. Funkce φ je *absolutně spojitá v nekompaktním intervalu J*, je-li absolutně spojitá na každém $[a, b] \subset J$.

(ii) Funkce $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je absolutně spojitá v $\mathbb{R}$ právě tehdy, když derivace φ' existuje s.v. vzhledem k Lebesgueově míře, přičemž pro každý omezený interval $J \subset \mathbb{R}$ s koncovými body $a < b$ platí $\varphi' \in \mathscr{L}(J, \mathrm{d}m)$ a

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_{(a,b)} \varphi' \, \mathrm{d}m \equiv \int_a^b \varphi'(t) \, \mathrm{d}t .$$

A.10 INTEGRACE PODLE KOMPLEXNÍ MÍRY

O všech mírách, s nimiž budeme pracovat, opět předpokládáme, že jsou definovány na společné (abstraktní) σ-algebře $\mathscr{A} \subset 2^X$. Nejprve se budeme zabývat integrací podle reálné míry $\varrho = \mu_\varrho^+ - \mu_\varrho^-$ (viz (A.5.6a)). Říkáme, že komplexní funkce $\varphi\colon X \to \mathbb{C}$ je integrabilní vzhledem k ϱ a píšeme $\varphi \in \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\varrho)$, jestliže $\varphi \in \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu_\varrho^+) \cap \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu_\varrho^-)$. Definitoricky tedy platí

$$\mathscr{L}(X, \mathrm{d}\varrho) := \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu_\varrho^+) \cap \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu_\varrho^-) , \tag{1a}$$

což lze pomocí (A.6.23a) a (A.5.6b) zapsat ve tvaru

$$\mathscr{L}(X, \mathrm{d}\varrho) = \mathscr{L}(X, \mathrm{d}|\varrho|) . \tag{1b}$$

Pro $\varphi \in \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\varrho)$ definujeme

$$\int_X \varphi \, \mathrm{d}\varrho := \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu_\varrho^+ - \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu_\varrho^- ; \tag{1c}$$

to je korektní díky jednoznačnosti Jordanova rozkladu.

Z uvedených definičních vztahů vyplývá, že množina $\mathscr{L}(X, \mathrm{d}\varrho)$ a zobrazení $\varphi \mapsto \int_X \varphi \, \mathrm{d}\varrho$ mají analogické vlastnosti jako v případě nezáporné míry: $\mathscr{L}(X, \mathrm{d}\varrho)$ *je komplexní vektorový prostor, závislost integrálu na integrandu je lineární* (viz (A.6.14)) a analogii nerovnosti (A.6.15) představuje následující vztah, který z ní bezprostředně vyplývá:

$$\left| \int_X \varphi \, \mathrm{d}\varrho \right| \leqq \left| \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu_\varrho^+ \right| + \left| \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu_\varrho^- \right| \leqq \int_X |\varphi| \, \mathrm{d}\mu_\varrho^+ + \int_X |\varphi| \, \mathrm{d}\mu_\varrho^- = \int_X |\varphi| \, \mathrm{d}|\varrho| \,. \tag{2}$$

Podobně pomocí (A.6.21a, b) ověříme, že pro každé $\varphi \in \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\varrho)$ je zobrazení

$$M \mapsto \gamma(M) := \int_M \varphi \, \mathrm{d}\varrho \tag{3}$$

komplexní míra na $\mathscr{A}$; užívá se opět symbolického zápisu $\mathrm{d}\gamma = \varphi \, \mathrm{d}\varrho$.

A.10.1 Příklad: Pro σ-jednoduchou funkci $\tau \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \chi_{M_n} : X \to \mathbb{C}$ vyplývá z rovnosti (1b) a příkladu A.6.10 ekvivalence $\tau \in \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\varrho) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n| \, |\varrho|(M_n) < \infty$. Jsou-li tyto podmínky splněny, patří τ též do $\mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu_\varrho^\pm)$ a z (A.6.19a) a (1c) dostaneme

$$\int_X \tau \, \mathrm{d}\varrho = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \varrho(M_n) \,. \tag{4}$$

A.10.2 Poznámka: Pro každou dvojici nezáporných měr μ_1 a μ_2 takových, že $\varrho = \mu_1 - \mu_2$, je $\mathscr{L}(X, \mathrm{d}\varrho) \supset \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu_1) \cap \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu_2)$ – to plyne z minimálnosti Jordanova rozkladu a poznámky A.6.12. Pro $\varphi \in \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu_1) \cap \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu_2)$ z rovností $\mu_1 + \mu_\varrho^- = \mu_\varrho^+ + \mu_2$ a (A.6.23b) dostaneme

$$\int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu_1 + \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu_\varrho^- = \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu_\varrho^+ + \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu_2 \,,$$

takže

$$\int_X \varphi \, \mathrm{d}\varrho \equiv \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu_\varrho^+ - \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu_\varrho^- = \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu_1 - \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu_2 \,,$$

$$\varphi \in \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu_1) \cap \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu_2) \,. \tag{5}$$

Pomocí tohoto vztahu lze např. zobecnit pro reálné míry formule (A.6.23a, b). Nechť ϱ, ϱ_1 a ϱ_2 jsou reálné míry takové, že $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2$. Zavedeme nezáporné míry $\mu_{\pm} := \mu^{\pm}_{\varrho_1} + \mu^{\pm}_{\varrho_2}$ a zapíšeme ϱ ve tvaru $\varrho = \mu_+ - \mu_-$, takže $\mathscr{L}(X, \mathrm{d}\varrho) \supset \supset \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu_+) \cap \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu_-)$. Dále podle (A.6.23a) a (1a) je $\mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu_+) \cap \cap \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\mu_-) = \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\varrho_1) \cap \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\varrho_2)$; místo rovnosti (A.6.23a) platí tedy inkluze

$$\mathscr{L}(X, \mathrm{d}(\varrho_1 + \varrho_2)) \supset \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\varrho_1) \cap \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\varrho_2) \tag{6a}$$

a pro každé $\varphi \in \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\varrho_1) \cap \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\varrho_2)$ ze vztahů $\varrho = \mu_+ - \mu_-$, (5), (A.6.23a) a (1c) plyne

$$\int_X \varphi \,\mathrm{d}(\varrho_1 + \varrho_2) = \int_X \varphi \,\mathrm{d}\varrho_1 + \int_X \varphi \,\mathrm{d}\varrho_2 . \tag{6b}$$

Pojem integrálu vzhledem ke komplexní míře ν je přirozeným zobecněním definic (1a, c). Položíme $\varrho_1 := \operatorname{Re} \nu$, $\varrho_2 := \operatorname{Im} \nu$ a pro každou funkci $\varphi \colon X \to \mathbb{C}$ patřící do

$$\mathscr{L}(X, \mathrm{d}\nu) := \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\varrho_1) \cap \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\varrho_2) \tag{7a}$$

definujeme

$$\int_X \varphi \,\mathrm{d}\nu := \int_X \varphi \,\mathrm{d}\varrho_1 + \mathrm{i} \int_X \varphi \,\mathrm{d}\varrho_2 . \tag{7b}$$

Z nerovností $\max\{|\varrho_1(M)|, |\varrho_2(M)|\} \leqq |\nu(M)| \leqq |\varrho_1(M)| + |\varrho_2(M)|$, $M \in \mathscr{A}$, získáme pro variace měr ν, ϱ_1 a ϱ_2 vztah

$$\max\{|\varrho_1|, |\varrho_2|\} \leqq |\nu| \leqq |\varrho_1| + |\varrho_2| . \tag{8}$$

Odtud na základě poznámky (A.6.12) a rovnosti (A.6.23a) plyne $\mathscr{L}(X, \mathrm{d}|\nu|) = = \mathscr{L}(X, \mathrm{d}|\varrho_1|) \cap \mathscr{L}(X, \mathrm{d}|\varrho_2|)$, což lze dále s využitím (1b) a (7a) přepsat na

$$\mathscr{L}(X, \mathrm{d}|\nu|) = \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\nu) . \tag{7c}$$

Ukážeme dále, že nerovnost (2) platí i pro komplexní míry. Užijeme k tomu následujících vlastností integrálu σ-jednoduchých funkcí.

A.10.3 Příklad: Pro σ-jednoduchou funkci $\tau \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \chi_{M_n} \colon X \to \mathbb{C}$ plyne ze (7c) opět ekvivalence $\tau \in \mathscr{L}(X, \mathrm{d}\nu) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n| \, |\nu|(M_n) < \infty$. Díky nerovnostem (8) a (A.5.3b) jsou pro $j = 1, 2$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \varrho_j(M_n)$ (absolutně) konvergentní. Formule (4) pak dává

$$\int_X \tau \,\mathrm{d}\nu = \sum_n \eta_n \nu(M_n) , \tag{9a}$$

 a užijeme-li znovu (A.5.3b), získáme pro každou komplexní σ-jednoduchou funkci $\tau \in \mathscr{L}(X, d\nu)$ nerovnost

$$\left|\int_X \tau \, d\nu\right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n| \, |\nu|(M_n) = \int_X |\tau| \, d|\nu| . \tag{9b}$$

Uvažujme nyní libovolné $\varphi \in \mathscr{L}(X, d\nu)$ a nechť $\{\tau_n\}$ je posloupnost σ-jednoduchých funkcí, která konverguje k φ stejnoměrně na X (viz tvrzení A.2.6). Míra $|\nu|$ je podle důsledku A.5.4 konečná; proto funkce $|\varphi| + 1$ patří do $\mathscr{L}(X, d|\nu|)$ a díky stejnoměrné konvergenci posloupnosti $\{|\tau_n|\}$ k $|\varphi|$ patří do $\mathscr{L}(X, d|\nu|) = \mathscr{L}(X, d\nu)$ také funkce τ_n pro všechna dosti velká n. Pomocí nerovností $|\varrho_j|(X) < \infty$, $j = 1, 2$, a (2) dostaneme $\lim_{n\to\infty} \int_X \tau_n \, d\varrho_j = \int_X \varphi \, d\varrho_j$ a odtud $\lim_{n\to\infty} \int_X \tau_n \, d\nu = \int_X \varphi \, d\nu$. Protože současně je $\lim_{n\to\infty} \int_X |\tau_n| \, d|\nu| = \int_X |\varphi| \, d|\nu|$, plyne z (9b) požadovaná nerovnost

$$\left|\int_X \varphi \, d\nu\right| \leqq \int_X |\varphi| \, d|\nu| , \qquad \varphi \in \mathscr{L}(X, d\nu) . \tag{10}$$

Čtenář snadno ověří, že i ostatní základní vlastnosti integrálu (7b) jsou stejné jako v případě nezáporné, resp. reálné míry, tj. *$\mathscr{L}(X, d\nu)$ je komplexní vektorový prostor, zobrazení $\varphi \mapsto \int_X \varphi \, d\nu$ je lineární* a předpisem

$$M \mapsto \gamma(M) := \int_X \varphi \, d\nu \tag{11}$$

je pro každé $\varphi \in \mathscr{L}(X, d\nu)$ definována komplexní míra γ na $\mathscr{A}$.

Na závěr zobecníme formule (A.6.17a, b) pro míru (11). Nejprve užijeme polárního rozkladu

$$d\nu = h_\nu \, d|\nu| \tag{12}$$

(viz (A.9.7)) k odvození dvou pomocných tvrzení.

A.10.4 Lemma: Pro komplexní míru ν s polárním rozkladem (12), jsou podmínky $\psi \in \mathscr{L}(X, d\nu)$ a $\psi h_\nu \in \mathscr{L}(X, d|\nu|)$ ekvivalentní. Jsou-li splněny, je

$$\int_X \psi \, d\nu = \int_X \psi h_\nu \, d|\nu| . \tag{13}$$

Důkaz: Ekvivalence uvedených podmínek je přímým důsledkem vztahu (7c) a toho, že $|h_\nu(x)| = 1$ pro všechna $x \in X$. Z rozkladu (12) je zřejmé, že (13) platí pro jednoduché funkce; odtud pomocí (9a) a Lebesgueovy věty zjistíme, že pro každou σ-jednoduchou funkci $\tau\colon X \to \mathbb{C}$ je

$$\int_X \tau \, d\nu = \int_X \tau h_\nu \, d|\nu| \,. \tag{14}$$

Pro obecné $\psi \in \mathscr{L}(X, d\nu)$ užijeme opět posloupnosti $\{\tau_n\}$ σ-jednoduchých funkcí, která konverguje k ψ stejnoměrně na X. Díky nerovnosti (10) a konečnosti míry $|\nu|$ platí $\int_X \tau_n \, d\nu \to \int_X \psi \, d\nu$ a $\int_X \tau_n h_\nu \, d|\nu| \to \int_X \psi h_\nu \, d|\nu|$; k dokončení důkazu pak stačí užít (14). ■

Poznámka: Nechť pro komplexní míru ν, komplexní funkci $\varphi \in \mathscr{L}(X, d\nu)$ a každé $M \in \mathscr{A}$ platí $\int_M \varphi \, d\nu = 0$. Dosadíme-li do (13) $\psi = \varphi\chi_M$, dostaneme $\int_M \varphi h_\nu \, d|\nu| = 0$, $M \in \mathscr{A}$, což podle (A.6.20a) implikuje $\varphi(x)\, h_\nu(x) = 0$ pro $|\nu|$-s. v. $x \in X$. Nyní $|h_\nu| = 1$, takže *pro každou komplexní míru ν a komplexní funkci $\varphi \in \mathscr{L}(X, d\nu)$ platí implikace*

$$\int_M \varphi \, d\nu = 0 \quad \text{pro všechna} \quad M \in \mathscr{A} \Rightarrow \varphi(x) = 0 \quad |\nu|\text{-s. v. v } X \,. \tag{15}$$

A.10.5. Lemma: Pro nezápornou míru μ a komplexní funkci $\varphi \in \mathscr{L}(X, d\mu)$ ze vztahu $d\nu = \varphi \, d\mu$ plyne $d|\nu| = |\varphi| \, d\mu$.

Důkaz: Nejprve ukážeme, že pro každou omezenou měřitelnou funkci $\omega\colon X \to \mathbb{C}$ platí

$$\int_X \omega \, d\nu = \int_X \omega \, d\mu \,. \tag{16}$$

Vzhledem k tomu, že kladná a záporná část funkcí $f_1 := \operatorname{Re} \varphi$ a $f_2 := \operatorname{Im} \varphi$ patří do $\mathscr{L}(X, d\mu)$, jsou nezáporné míry $\varrho_1^\pm$ a $\varrho_2^\pm$ definované vztahy $d\varrho_r^\pm := f_r^\pm \, d\mu$, $r = 1, 2$, vesměs konečné. Díky omezenosti patří ω do $\mathscr{L}(X, \varrho_r^\pm)$ a rovnost (A.6.17b) dá

$$\int_X \omega\varphi \, d\mu = \int_X \omega f_1^+ \, d\mu - \int_X \omega f_1^- \, d\mu + i \left[\int_X \omega f_2^+ \, d\mu - \int_X \omega f_2^- \, d\mu \right] =$$

$$= \int_X \omega \, d\varrho_1^+ - \int_X \omega \, d\varrho_1^- + i \left[\int_X \omega \, d\varrho_2^+ - \int_X \omega \, d\varrho_2^- \right].$$

Dále je $\operatorname{Re} \nu = \varrho_1^+ - \varrho_1^-$, $\operatorname{Im} \nu = \varrho_2^+ - \varrho_2^-$; z předchozí rovnosti pak plyne (16) na základě vztahu (5). Položíme-li nyní $\mu = |\nu|$, $\varphi = h_\nu$ a $\omega = \overline{h_\nu}\chi_M$, $M \in \mathscr{A}$, dostaneme $\int_M \overline{h_\nu} \, d\nu = \int_M |h_\nu|^2 \, d\nu = |\nu|(M)$. Současně je integrál vlevo roven

 $\int_M \overline{h_\nu}\varphi \, d\mu$, takže pro každé $M \in \mathscr{A}$ je

$$0 \leqq |\nu|(M) = \int_M \overline{h_\nu}\varphi \, d\mu \, .$$

Podle (A.6.20b) je funkce $\overline{h_\nu}\varphi$ μ-s.v. nezáporná; pro μ-s.v. $x \in X$ proto platí $\overline{h_\nu}(x)\,\varphi(x) = |\overline{h_\nu}(x)\,\varphi(x)| = |\varphi(x)|$.

Vrátíme se nyní ke komplexní míře (11). Z rovnosti (13) pro $\psi = \varphi\chi_M$, $M \in \mathscr{A}$, plyne $d\gamma = \varphi h_\nu \, d|\nu|$ a odtud pomocí lemmatu 5 dostáváme *pro každou kompexní míru ν a komplexní funkci $\varphi \in \mathscr{L}(X, d\nu)$ implikaci*

$$d\gamma = \varphi \, d\nu \Rightarrow d|\gamma| = |\varphi| \, d|\nu| \, . \tag{17}$$

Z ní fakticky vyplývá následující věta, která představuje hledané zobecnění vztahů (A.6.17a, b).

A.10.6 Věta: Nechť ν je komplexní míra, funkce $\varphi\colon X \to \mathbb{C}$ patří do $\mathscr{L}(X, d\nu)$ a $d\gamma = \varphi \, d\nu$. Pro každou měřitelnou funkci $\psi\colon X \to \mathbb{C}$ jsou podmínky $\psi \in \mathscr{L}(X, d\gamma)$ a $\psi\varphi \in \mathscr{L}(X, d\nu)$ ekvivalentní; jsou-li splněny, je

$$\int_X \psi \, d\gamma = \int_X \psi\varphi \, d\nu \, .$$

Důkaz: Ekvivalence uvedených podmínek plyne ze vztahů (7c), (17) a (A.6.12b). Nechť $\psi \in \mathscr{L}(X, d\gamma)$; pomocí (13), (17) a (A.6.17b) dostaneme

$$\int_X \psi \, d\gamma = \int_X \psi h_\gamma \, d|\gamma| = \int_X \psi h_\gamma |\varphi| \, d|\nu| \, . \tag{18}$$

Integrand na první straně zapíšeme ve tvaru $\psi h_\gamma |\varphi| \, \overline{h_\nu} h_\nu$; opětovné užití rovnosti (13) pak dá $\int_X \psi \, d\gamma = \int_X \psi h_\gamma \overline{h_\nu} |\varphi| \, d\nu$. Speciálně pro $\psi = \chi_M$, $M \in \mathscr{A}$, je levá strana rovna $\gamma(M) = \int_M \varphi \, d\nu$, takže pro všechna $M \in \mathscr{A}$ platí $\int_M (\varphi - h_\gamma \overline{h_\nu}|\varphi|) \, d\nu = 0$. Z implikace (15) nyní plyne, že funkce φ a $h_\gamma \overline{h_\nu}|\varphi|$ se liší nejvýše na $|\nu|$-nulové množině N. Podle (10) je $|\int_N \psi(\varphi - h_\gamma \overline{h_\nu}|\varphi|) \, d\nu| \leqq \int_N |\psi\varphi| \, |1 - h_\gamma \overline{h_\nu}| \, d|\nu| = 0$, a tedy

$$\int_X \psi \, d\gamma = \int_X \psi\varphi \, d\nu + \int_N \psi(h_\gamma \overline{h_\nu}|\varphi| - \varphi) \, d\nu = \int_X \psi\varphi \, d\nu. \quad \blacksquare$$

a) monografie, učebnice, sborníky

⟦AG⟧ N. I. ACHIEZER, I. M. GLAZMAN: Tëorija linějnych operatov v gilbertovom prostranstve, 2. vydání, Nauka, Moskva 1966 3. vydání, nakl. „Viša škola", Charkov 1978.

⟦AGHH⟧ S. ALBEVERIO, F. GESZTESY, R. HØEGH-KROHN, H. HOLDEN: Solvable Models in Quantum Mechanics, Springer Verlag, Berlin 1988.

⟦Al⟧ P. S. ALEXANDROV: Vveděnije v tëoriju množestv i obščuju topologiju, Nauka, Moskva 1977.

⟦Am⟧ W. O. AMREIN: Non-relativistic quantum dynamics, D. Reidel, Dordrecht 1981.

⟦AJS⟧ W. O. AMREIN, J. M. JAUCH, K. B. SINHA: Scattering Theory in Quantum Mechanics. Physical Principles and Mathematical Methods, W. A. Benjamin, Reading, Mass., 1977.

⟦BaR⟧ A. O. BARUT, R. RACZKA: Theory of Group Representations and Applications, PWN, Warszawa 1977 (ruský překlad: Mir, Moskva 1980).

⟦BW⟧ H. BAUMGÄRTEL, M. WOLLENBERG: Mathematical scattering theory, Akademie-Verlag, Berlin 1983.

⟦Ber⟧ F. A. BEREZIN: Metod vtoričnovo kvantovanija, 2. vydání, Nauka, Moskva 1986.

⟦BL⟧ L. C. BIEDENHARN, J. D. LOUCK: Angular Momentum in Quantum Physics. Theory and Applications, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1981 (ruský překlad: Mir, Moskva 1984).

⟦BS⟧ M. Š. BIRMAN, M. Z. SOLOMJAK: Spektralnaja teorija samosoprjažennych operatorov v gilbertovom prostranstve, nakl. Leningradské stát. univerzity, Leningrad 1980.

⟦BLT⟧ N. N. BOGOLJUBOV, A. A. LOGUNOV, I. T. TODOROV: Osnovy aksiomatičeskovo podchoda v kvantovoj tëorii polja, Nauka, Moskva 1969.

⟦BŠ⟧ N. N. BOGOLJUBOV, D. V. ŠIRKOV: Vveděnije v tëoriju kvantovannych polej, 4. vydání, Nauka, Moskva 1984.

⟦BR 1, 2⟧ O. BRATTELI, D. W. ROBINSON: Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I, II, Springer Verlag, New York 1979, 1981 (ruský překlad prvního dílu: Mir, Moskva 1982).

⟦Da 1⟧ E. B. DAVIES: Quantum Theory of Open Systems, Academic Press, London 1976.

⟦Dav⟧ A. S. DAVYDOV: Kvantovaja mechanika, 2. vydání, Nauka, Moskva 1973 (český překlad: Academia, Praha 1978).

⟦Die⟧ J. DIEUDONNÉ: Foundations of Modern Analysis, Academic Press, New York 1960 (ruský překlad: Mir, Moskva 1964).

⟦Dir⟧ P. A. M. DIRAC: The Principles of Quantum Mechanics, 4. vydání, Clarendon Press, Oxford 1959 (ruský překlad: Nauka, Moskva 1979).

⟦Di 1⟧ J. DIXMIER: Les algebres des opérateurs dans l'espace Hilbertien (algebres de von Neumann), 2. vydání, Gauthier-Villars, Paris 1969.

⟦Di 2⟧ J. DIXMIER: Les C^*-algebres et leurs representations, 2. vydání, Gauthier-Villars, Paris 1969 (ruský překlad: Nauka, Moskva 1974).

⟦DS 1–2⟧ N. DUNFORD, J. T. SCHWARTZ: Linear Operators, I. General Theory, II. Spectral Theory, Interscience Publ., New York 1958, 1963 (ruský překlad: GIIL, Moskva 1962, 1966).

⟦Em⟧ G. G. EMCH: Algebraical Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory, Wiley--Interscience, New York 1972 (ruský překlad: Mir, Moskva 1976).

[[Ex]] P. EXNER: Open Quantum Systems and Feynman Integrals, D. Reidel, Dordrecht 1985.
[[FH]] R. P. FEYNMAN, A. R. HIBBS: Quantum Mechanics and Path Integrals, McGraw-Hill, New York 1965 (ruský překlad: Mir, Moskva 1968).
[[Fi]] G. M. FICHTĚNGOLC: Kurs diferencialnovo i intěgralnovo isčislenija, 5. vydání, Fizmatgiz, Moskva 1962.
[[For]] J. FORMÁNEK: Úvod do kvantové teorie, Academia, Praha 1983.
[[GŠ]] I. M. GELFAND, G. M. ŠILOV: Obobščenyje funkcii i dějstvija nad nimi I, 2. vydání, Fizmatgiz, Moskva 1959.
[[GR]] I. S. GRADŠTEJN, I. M. RYŽIK: Tablicy intěgralov, sum, rjadov i proizvedenij, 5. vydání, Nauka, Moskva 1971.
[[Hal 1]] P. HALMOS: Measure Theory, van Nostrand, New York 1950 (ruský překlad: GIIL, Moskva 1953).
[[Hal 2]] P. HALMOS: A Hilbert Space Problem Book, van Nostrand, Princeton 1967 (ruský překlad: Mir, Moskva 1970).
[[Ham]] M. HAMERMESH: Group Theory and Its Applications to Physical Problems, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1964 (ruský překlad: Mir, Moskva 1966).
[[Jar 1]] V. JARNÍK: Diferenciální počet II, 3. vydání, Academia, Praha 1976.
[[Jar 2]] V. JARNÍK: Integrální počet II, 2. vydání, Academia, Praha 1976.
[[Ja]] J. M. JAUCH: Foundations of Quantum Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968.
[[Kam]] E. KAMKE: Differentialgleichungen realer Funktionen, Akademische Verlagsgesselschaft, Leipzig 1956.
[[Kas]] D. KASTLER, red.: C^*-algebras and Their Applications to Statistical Mechanics and Quantum Field Theory, North-Holland, Amsterdam 1976.
[[Ka]] T. KATO: Perturbation Theory for Linear Operators, Springer Verlag, Berlin 1966 (ruský překlad: Mir, Moskva 1972).
[[Kel]] J. L. KELLEY: General Topology, van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1957 (ruský překlad: Nauka, Moskva 1981).
[[Kir]] A. A. KIRILLOV: Elementy těorii predstavlenij, 2. vydání, Nauka, Moskva 1978.
[[KGv]] A. A. KIRILLOV, A. D. GVIŠIANI: Těoremy i zadači funkcionalnovo analiza, Nauka, Moskva 1979.
[[KS]] J. R. KLAUDER, B.-S. SKAGERSTAM: Coherent States. Applications in Physics and Mathematical Physics, World Scientific, Singapore 1985.
[[KF]] A. N. KOLMOGOROV, S. V. FOMIN: Elementy těorii funkcij i funkcionalnovo analiza, 4. vydání, Nauka, Moskva 1976 (český překlad ze 3. vydání: SNTL, Praha 1975).
[[Ku]] A. G. KUROŠ: Lekcii po obščej algebre, 2. vydání, Nauka, Moskva 1973.
[[LP]] P. D. LAX, R. S. PHILLIPS: Scattering theory, Academic Press, New York 1967 (ruský překlad: Mir, Moskva 1971).
[[Loe 1–3]] E. M. LOEBL, red.: Group Theory and Its Applications I–III, Academic Press, New York 1968, 1971, 1975.
[[MB]] S. MACLANE, G. BIRKHOFF: Algebra, 2. vydání, Macmillan, New York 1968 (slovenský překlad: Alfa, Bratislava 1973).
[[Mar]] A. I. MARKUŠEVIČ: Kratkij kurs těorii analitičeskich funkcij, 2. vydání, Fizmatgiz, Moskva 1961.
[[Mau]] K. MAURIN: Metody przestrzeni Hilberta, PWN, Warszawa 1959 (ruský překlad: Mir, Moskva 1965).
[[Mes]] A. MESSIAH: Mécanique quantique I, II, Dunod, Paris 1959 (ruský překlad: Nauka 1979).
[[Mül]] C. MÜLLER: Spherical Harmonics, Lecture Notes in Mathematics, vol. 17, Springer Verlag, Berlin 1966.
[[Nai 1]] M. A. NAJMARK: Normirovanyje kolca, 2. vydání, Nauka, Moskva 1968.
[[Nai 2]] M. A. NAJMARK: Linějnyje diferencialnyje operatory, Nauka, Moskva 1969.
[[Nai 3]] M. A. NAJMARK: Těorija predstavlenij grup, Nauka, Moskva 1976.

⟦vN⟧ J. von Neumann: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer Verlag, Berlin 1932 (ruský překlad: Mir, Moskva 1964).

⟦New⟧ R. G. Newton: Scattering theory of waves and particles, 2. vydání, Springer Verlag New York 1982 (ruský překlad 1. vyd.: Mir, Moskva 1969).

⟦OK⟧ Y. Ohnuki, S. Kamefuchi: Quantum Field Theory and Parastatistics, Springer Verlag, Heidelberg 1982.

⟦Pe⟧ P. A. Perry: Scattering theory by the Enss method, Harwood Academic Publishers, London 1983.

⟦Pir⟧ C. Piron: Foundations of Quantum Physics, W. A. Benjamin, Reading, Mass., 1976.

⟦Pon⟧ L. S. Pontrjagin: Něpreryvnyje grupy, 3. vydání, Nauka, Moskva 1973.

⟦Pru⟧ E. Prugovečki: Quantum Mechanics in Hilbert Space, 2. vydání, Academic Press, New York 1981.

⟦RS 1–4⟧ M. Reed, B. Simon: Methods of Modern Mathematical Physics, I. Functional Analysis, II. Fourier Analysis. Self-adjointness, III. Scattering Theory, IV. Analysis of Operators, Academic Press, New York 1972, 1975, 1979, 1978 (ruský překlad: Mir, Moskva 1977–1982).

⟦Ri 1⟧ D. R. Richtmyer: Principles of Advanced Mathematical Physics I, Springer Verlag, New York 1978 (ruský překlad: Mir, Moskva 1982).

⟦RN⟧ F. Riesz, B. Sz.-Nagy: Lecons d'analyse fonctionelle, 6. vydání, Akadémiai Kiadó, Budapest 1972 (ruský překlad: Mir, Moskva 1979).

⟦Ru 1⟧ W. Rudin: Real and Complex Analysis, 2. vydání, McGraw-Hill, New York 1964 (český překlad: Academia, Praha 1977).

⟦Ru 2⟧ W. Rudin: Functional Analysis, McGraw-Hill, New York 1973 (ruský překlad: Mir, Moskva 1975).

⟦Sa⟧ S. Sakai: C*-algebras and W*-algebras, Springer Verlag, Berlin 1971.

⟦Seg⟧ I. E. Segal: Mathematical Problems of Relativistic Physics, Memoirs of Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1963 (ruský překlad: Mir, Moskva 1968).

⟦Sch⟧ R. Schatten: A Theory of Cross Spaces, Princeton University Press 1950.

⟦Sche⟧ M. Schechter: Operator Methods in Quantum Mechanics, North-Holland, New York 1981.

⟦Schu⟧ L. S. Schulman: Techniques and Applications of Path Integration, Wiley Interscience, New York 1981.

⟦Schw 1⟧ L. Schwartz: Théorie des distributions I, II, Hermann, Paris 1957, 1959.

⟦Schwe⟧ S. S. Schweber: An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, Row, Peterson & Co, Evanston, Ill. 1961 (ruský překlad: GIIL, Moskva 1963).

⟦Si 1⟧ B. Simon: Quantum Mechanics for Hamiltonians Defined as Quadratic Forms, Princeton University Press 1971.

⟦Si 3⟧ B. Simon: Trace Ideals and Their Applications, Cambridge University Press 1979.

⟦Sto⟧ M. H. Stone: Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis, Amer. Math. Colloq. Publ., vol. 15, New York 1932.

⟦SW⟧ R. F. Streater, A. S. Wightman: PCT, Spin, Statistics and All That, W. A. Benjamin, New York 1964 (ruský překlad: Nauka, Moskva 1966).

⟦Šab⟧ B. V. Šabat: Vveděnije v kompleksnyj analiz, Nauka, Moskva 1969.

⟦Tay⟧ A. E. Taylor: Introduction to Functional Analysis, 6. vydání, J. Wiley, New York 1967 (český překlad: Academia, Praha 1973).

⟦Ta⟧ J. R. Taylor: Scattering theory. The quantum theory of nonrelativistic collisions, J. Wiley, New York 1972 (ruský překlad: Mir, Moskva 1975).

⟦Thi⟧ W. Thirring: A Course in Mathematical Physics, 3. Quantum Mechanics of Atoms and Molecules, Springer Verlag, New York 1981.

⟦Tich⟧ V. M. Tichomirov: Banachovy algebry, dodatek k monografii ⟦KF⟧, str. 513–528.

⟦Var 1, 2⟧ V. S. Varadarajan: Geometry of Quantum Theory I, II, van Nostrand Reinhold, New York 1968, 1970.

[[We]] J. WEIDMANN: Linear Operators in Hilbert Space, Springer Verlag, New York 1980.

[[Wig]] E. P. WIGNER: Symmetries and reflections, Indiana University Press, Bloomington 1970 (ruský překlad: Mir, Moskva 1971).

[[Yo]] K. YOSIDA: Functional Analysis, 2. vydání, Springer Verlag, Berlin 1966 (ruský překlad: Mir, Moskva 1967).

b) původní a přehledné práce

[AD 1] D. AERTS, I. DAUBECHIES: Physical justification for using the tensor product to describe two quantum systems as one joint system, Helv. Phys. Acta **51** (1979), 661–675.

[AD 2] D. AERTS, I. DAUBECHIES: A characterization of subsystems in physics, Lett. Math. Phys. **3** (1979), 11–17.

[AD 3] D. AERTS, I. DAUBECHIES: A mathematical condition for a sublattice of a propositional system to represent a physical subsystem, with a physical interpretation, Lett. Math. Phys. **3** (1979), 19–27.

[AG 1] W. AMREIN, V. GEORGESCU: Bound states and scattering states in quantum mechanics, Helv. Phys. Acta **46** (1973), 635–658.

[Ba 1] V. BARGMANN: On a Hilbert space of analytical functions and an associate integral transform I, II, Commun. Pure. Appl. Math. **14** (1961), 187–214; **20** (1967), 1–101.

[Ba 2] V. BARGMANN: Remarks on a Hilbert space of analytical functions, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **48** (1962), 199–204, 2204.

[Ba 3] V. BARGMANN: On unitary ray representations of continuous groups, Ann. Math. **59** (1954), 1–46.

[Ba 4] V. BARGMANN: Note on some integral inequalities, Helv. Phys. Acta **45** (1972), 249–257.

[CM 1] D. CASTRIGIANO, U. MUTZE: On the commutant of an irreducible set of operators in a real Hilbert space, J. Math. Phys. **26** (1985), 1107–1110.

[Cher 1] P. R. CHERNOFF: A note on product formulas for operators, J. Func. Anal. **2** (1968), 238–242.

[CRRS 1] PH. COMBE, G. RIDEAU, R. RODRIGUEZ, M. SIRUGUE-COLLIN: On the cylindrical approximation of Feynman path integrals, Rep. Math. Phys. **13** (1978), 279–294.

[En 1, 2] V. ENSS: Asymptotic completeness for quantum mechanical potential scattering, I. Short--range potentials, II. Singular and long-range potentials, Commun. Math. Phys. **61** (1978), 285–291; Ann. Phys. **119** (1979) 117–132.

[Ex 1] P. EXNER: Bounded-energy approximation to an unstable quantum system, Rep. Math. Phys. **17** (1980), 275–285.

[Ex 2] P. EXNER: Generalized Bargmann inequalities, Rep. Math. Phys. **19** (1984), 249–255.

[Far 1] W. G. FARIS: Inequalities and uncertainty principles J. Math. Phys. **19** (1978), 461–466.

[Fo 1] V. A. FOCK: Konfigurationsraum und zweite Quantelung, Z. Phys. **75** (1932), 622–647.

[GN 1] I. M. GELFAND, M. A. NAJMARK: O vključeniji normirovanovo kolca v kolco operatorov v gilbertovom prostranstve, Mat. sbornik **12** (1943), 197–213.

[Gla 1] R. J. GLAUBER: Photon correlations, Phys. Rev. Lett. **10** (1963), 84–86.

[Gla 2] R. J. GLAUBER: Coherent and incoherent states of the radiation field, Phys. Rev. **131** (1963), 2766–2788.

[HE 1] M. HAVLÍČEK, P. EXNER: Note on the description of an unstable system, Czech. J. Phys. **B23** (1973), 594–600.

[Kad 1] R. V. KADISON: Normal states and unitary equivalence of von Neumann algebras, ve sborníku [[Kas]], str. 1–18.

[Kla 1] J. R. KLAUDER: Continuous-representation theory I, II, J. Math. Phys. **4** (1963), 1055–1058, 1058–1073.

[Lan 1] C. LANCE: Tensor products of C^*-algebras, ve sborníku [[Kas]], str. 154–166.

[LcL 1] J.-M. LÉVY-LEBLOND: Galilei group and Galilean invariance, ve sborníku [[Loe 2]], str. 221–299.

[LN 1] N. LIMIC, J. NIEDERLE: Reduction of the most degenerate unitary representations of $SO_0(m, n)$ when restricted to a non-compact rotation subgroup, Ann. Inst. H. Poincaré **9** (1968), 327–355.

[Mau 1] K. MAURIN: Elementare Bemerkungen über komutative C^*-Algebren. Beweis einer Vermutung von Dirac, Stud. Math. **16** (1957), 74–79.

[Nel 1] E. NELSON: Analytic vectors, Ann. Math. **70** (1959), 572–614.

[vN 1] J. VON NEUMANN: Mathematische Begründung der Quantenmechanik, Nachr. Gessel. Wiss. Göttingen, Math. Phys. (1927), 1–57.

[vN 2] J. VON NEUMANN: Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, Math. Ann. **102** (1930), 49–131.

[vN 3] J. VON NEUMANN: On infinite direct products, Compositio Math. **6** (1938), 1–77.

[vN 4] J. VON NEUMANN: Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren, Math. Ann. **104** (1931), 570–578.

[Pea 1] D. B. PEARSON: An example in potential scattering illustrating the breakdown of asymptotic completeness, Commun. Math. Phys. **40** (1975), 125–146.

[RLN 1] R. RACZKA, N. LIMIC, J. NIEDERLE: Discrete degenerate representations of non-compact rotation groups I, J. Math Phys. **7** (1966), 1861–1876.

[Seg 1] I. E. SEGAL: Irreducible representations of operator algebras, Bull. Am. Math. Soc. **53** (1947), 73–88.

[Sto 1] M. H. STONE: Linear transformations in Hilbert space III. Operational methods and group theory, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **16** (1930), 172–175.

[WWW 1] G. C. WICK, A. S. WIGHTMAN, E. P. WIGNER: The intrinsic parity of elementary particles, Phys. Rev. **88** (1952), 101–105.

[WWW 2] G. C. WICK, A. S. WIGHTMAN, E. P. WIGNER: Superselection rule for charge, Phys. Rev. **D1** (1970), 3267–3269.

REJSTŘÍK

LINEÁRNÍ OPERÁTORY V KVANTOVÉ FYZICE

Ing. Jiří Blank, CSc.

Doc. RNDr. Pavel Exner, DrSc.

Prof. Ing. Miloslav Havlíček, DrSc.

Vydala Univerzita Karlova, vydavatelství Karolinum, Praha 1993
Prorektor-editor: prof. JUDr. Karel Malý, DrSc.
Obálku a grafickou úpravu navrhla Kateřina Řczáčová
1. vydání — 680 stran
Tem. sk.: 03/2
Vytiskla Polygrafia a. s., závod 3
41,0 AA, 44,5 VA
Náklad 1 500 výtisků
ISBN 80-7066-586-6