# RFA2

Pomocný text k jednosemestrální přednášce „Relativistická fyzika a astrofyzika II“, kterou přednáší na Slezské univerzitě v Opavě Prof. RNDr. Zdeněk Stuchlík, CSc.
Za všechny překlepy a případné chyby mohou otročtí přepisovči, v žádnem přípdě ne pan Profesor! :-)

Toto je rozpracovaná a neopravená verze.

# Obsah

# Kapitola 1

# OTR pro pokročilé

## 1.1 Tetrádový formalismus

### 1.1.1 Základní 1-formy:

Vektor (kontravariantní) $\vec{e}_{(a)}$; $e^{\alpha}_{(a)}$ ($\alpha$ jsou složky - kontravariantní, $(a)$ - čísluje vektor)

Definujeme „frame komponenty" ($w$-ádové složky; tetrádové ve 4-dimenzích) libovolného tenzoru

$$T_{ab\ldots} = T_{\alpha\beta\ldots} e^{\alpha}_{(a)} e^{\beta}_{(b)} \ldots$$

Matice skalárních součinů vektorů base: $g_{ab} = \vec{e}_{(a)} \cdot \vec{e}_{(b)}$; tetrádové složky metrického tezoru:

$$g_{ab} = g_{\alpha\beta} e^{\alpha}_{(a)} e^{\beta}_{(b)}.$$

Jelikož jsou $\vec{e}_{(a)}$ nezávislé existuje inverzní matice $g^{ab}$ taková, že platí $g^{ab} g_{ac} = \delta^b_c$. Pak definujeme duální bázi $\vec{e}^{(a)}$:

$$\vec{e}^{(a)} = g^{ab} \vec{e}_{(b)}.$$

Platí $\vec{e}^{(a)} \cdot \vec{e}_{(b)} = \delta^a_b$. Je zřejmé, že $e^{(a)}_{\alpha}, e^{\beta}_{(b)}$ jsou inverzní matice:

$$\vec{e}_{(c)} \cdot \vec{e}^{(a)} = g^{ab} \vec{e}_{(c)} \cdot \vec{e}_{(b)} = g^{ab} g_{bc} = \delta^a_c,$$

dále je i $e^{(a)}_{\alpha} e^{\beta}_{(a)} = \delta^{\beta}_{\alpha}$. Zavedme 1-formy asociované s vektory duální base

$$\Theta^a = \vec{e}^{(a)}_{\alpha} \mathrm{d}x^{\alpha}. \tag{1.1}$$

(Přesně psáno $\Theta^a(\mathrm{d}\vec{x}) = \vec{e}^{(a)}_{\alpha} \mathrm{d}x^{\alpha} = \vec{e}^{(a)} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$.) Také lze potom psát

$$\mathrm{d}x^{\alpha} = \vec{e}^{\alpha}_{(a)} \Theta^a. \tag{1.2}$$

Vztahy (1.1) a (1.2) lz interpretovat 2 způsoby :

**1)** Numerické vztahy, přičemž $\mathrm{d}\vec{x} (\equiv \mathrm{d}x^{\alpha})$ je vektorový argument dosazovaný do formy $\Theta^a$ - tj. $\Theta^a(\mathrm{d}\vec{x}) = e^{(a)}_{\alpha} \mathrm{d}x^{\alpha}$.

**2)** Lze chápat jalo lineární vztah mezi formami $\Theta^a$ a $\mathrm{d}x^{\alpha}$; viz: $\mathrm{d}x^{\alpha}(\mathrm{d}\vec{x}) = \mathrm{d}x^{\alpha} \ldots$ což je složka $\mathrm{d}\vec{x}$. Je totiž jasné, že $\Theta^{\alpha} = \mathrm{d}x^{\alpha}$, když $e^{(a)}_{\alpha} = \delta^a_{\alpha}$, tj. mám přiřazenou souřadnicovou basi ( $\mathrm{grad} x^{\alpha}$).

$\Theta^{(a)}$ **tvoří basi všech 1-forem** - jelikož $\vec{e}^{(a)}$ tvoří úplnou vektorovou basi. Mějme již dříve zavedenou formu $\alpha = A_{\alpha} \mathrm{d}x^{\alpha}$; pokud použijeme (1.2) dostávame $\alpha = A_{\alpha} e^{\alpha}_{(a)} \Theta^a = A_a \Theta^a$ - libovolná forma $\alpha$ je lineární kombinací $\Theta^a$. Podobně $\Theta^a \wedge \Theta^b$ tvoří bázi 2-forem

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathrm{d}\vec{x}, \vec{y}) &= 2! F_{\alpha\beta} \mathrm{d}x^{[\alpha} \mathrm{d}y^{\beta]} = F_{\alpha\beta} \mathrm{d}x^{\alpha} \wedge \mathrm{d}y^{\beta} \\
&= F_{\alpha\beta} (e^{\alpha}_{(a)} \Theta^a) \wedge (e^{\beta}_{(b)} \Theta^b) \\
&= F_{\alpha\beta} e^{\alpha}_{(a)} e^{\beta}_{(b)} \Theta^a \wedge \Theta^b = F_{ab} \Theta^a \wedge \Theta^b.
\end{aligned}$$

Pro přirozené vektorové base $e^{\alpha}_{(a)} = \delta^{\alpha}_a; e^{(a)}_{\alpha} = \delta^a_{\alpha}$ platí, že $\mathrm{d}x^{\alpha}, \mathrm{d}x^{\alpha} \wedge \mathrm{d}x^{\beta} \ldots$ jsou přirozené base 1-forem.

Interval můžeme vyjádři pomocí forem jako (numerický vztah)

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\beta} \mathrm{d}x^{\alpha} \mathrm{d}x^{\beta} = g_{ab} \Theta^a \Theta^b.$$

Platí $\Theta^a = e^{(a)}_{\gamma} \mathrm{d}x^{\gamma}$ a $g_{ab} = g_{\alpha\beta} e^{\alpha}_{(a)} e^{\beta}_{(b)}$ tedy

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= g_{\alpha\beta} e^{\alpha}_{(a)} e^{\beta}_{(b)} \cdot e^{(a)}_{\gamma} \mathrm{d}x^{\gamma} e^{(b)}_{\delta} \mathrm{d}x^{\delta} \\
&= g_{\alpha\beta} e^{\alpha}_{(a)} e^{(a)}_{\gamma} \cdot e^{\beta}_{(b)} e^{(b)}_{\delta} \mathrm{d}x^{\gamma} \mathrm{d}x^{\delta} \\
&= g_{\alpha\beta} \delta^{\alpha}_{\gamma} \delta^{\beta}_{\delta} = g_{\gamma\delta} \mathrm{d}x^{\gamma} \mathrm{d}x^{\delta}.
\end{aligned}$$

**Příklad:** Gaussovy polární souřadnice $\rho, \varphi$ v 2-prostoru; metrika:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + [f(\rho, \varphi)]^2 \mathrm{d}\varphi^2$$

$$\begin{array}{rll}
\text{rovina:} & f = \rho; & \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2 \mathrm{d}\varphi^2 \\
\text{povrch koule:} & f = \sin\rho; & \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \sin^2\rho \, \mathrm{d}\varphi^2
\end{array}$$

Zvolme jednotkové vektory podél souřadnic $\rho, \varphi$ (není přirozená base)

$$\begin{aligned}
\vec{e}_{(1)} &= \left( \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}, 0 \right) = (1, 0); \\
\vec{e}_{(2)} &= \left( 0, \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \right) = \left( 0, \frac{1}{f} \right)
\end{aligned}$$

$$g_{(2)(2)} = \vec{e}_{(2)} \cdot \vec{e}_{(2)} = g_{\alpha\beta} \vec{e}^{\alpha}_{(2)} \vec{e}^{\beta}_{(2)} = g_{22} (e^2_2)^2 = f^2 \frac{1}{f^2} = 1$$

$$g_{ab} = \vec{e}_a \cdot \vec{e}_b = \delta_{ab} \Rightarrow g^{ab} = \delta^{ab}; \qquad \vec{e}^{(a)} = g^{ab} \vec{e}_{(b)} = \vec{e}_{(a)}$$

Je-li $\mathrm{d}x^\alpha = (\mathrm{d}\rho, \mathrm{d}\varphi)$ libovolné posunutí, pak

$$\begin{aligned} \Theta^1(\mathrm{d}\vec{x}) &= \vec{e}^{(1)}\mathrm{d}\vec{x} = e^{(1)}_\alpha \mathrm{d}x^\alpha = \mathrm{d}\rho; \\ \Theta^2(\mathrm{d}\vec{x}) &= \vec{e}^{(2)}\mathrm{d}\vec{x} = e^{(2)}_\alpha \mathrm{d}x^\alpha = f\mathrm{d}\varphi, \qquad e^{(2)}_\alpha = \sqrt{g_{22}}. \end{aligned}$$

Metrika je pak

$$\mathrm{d}s^2 = (\Theta^1)^2 + (\Theta^2)^2.$$

Složky $\vec{e}^{(a)}$ určíme z podmínky $e^{(a)}_\alpha e^\beta_{(a)} = \delta^\beta_\alpha$ a $\delta^\beta_\alpha = e^{(2)}_\alpha \cdot e^\beta_{(2)}$ tedy

$$1 = e^{(2}_1 e^1_{(2)} + e^{(2)}_2 e^2_{(2)} = 0 + e^{(2)}_2 \frac{1}{f} \Rightarrow e^{(2)}_2 = f$$

Platí tedy sice, že $\vec{e}^{(a)} = \vec{e}_{(a)}$. Složkově máme $\vec{e}^{(a)\alpha} = \vec{e}^\alpha_{(a)}$.

$$\begin{aligned} g_{ab} &= g_{\alpha\beta} e^\alpha_{(a)} e^\beta_{(b)} \qquad \Big| \cdot e^{(a)}_\gamma \\ g_{ab} e^{(a)}_\gamma &= g_{\alpha\beta} e^\alpha_{(a)} e^\beta_{(b)} e^{(a)}_\gamma \end{aligned}$$

$$e_{(b)\gamma} = e_{(b)\alpha} e^\alpha_{(a)} e^{(a)}_\gamma; \quad \text{musí být} \quad e_{(b)\gamma} = e_{(b)\alpha}\delta^\alpha_\gamma$$

Složky jsou pochopitelně dané vztahy $\delta^\alpha_\beta = e^{(a)}_\beta e^\alpha_{(a)}$.

**1-formy konexe** Udělejme kovarinatní diferenciál bázového vektoru $\vec{e}_{(a)}$; (Víme, že obyčejně $\mathrm{D}U^\mu = U^\mu{}_{;\gamma}\mathrm{d}x^\gamma$)

$$\mathrm{D}\vec{e}_{(a)} = \vec{e}_{(a)}(x + \mathrm{d}x) - \vec{e}_{||(a)}(x)$$

Ve složkách je tedy ($(a)$ je pouze pořadové číslo)

$$[\mathrm{D}\vec{e}_{(a)}]^\alpha = e^\alpha_{(a);\gamma}\,\mathrm{d}x^\gamma;$$

předpokládáme tedy, že affiní konexe $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ je dána (ne nutně Christofelovy symboly)

$$U^\mu{}_{;\gamma} = U^\mu{}_{,\gamma} + \Gamma^\mu{}_{\nu\gamma}U^\nu.$$

$\mathrm{D}\vec{e}_{(a)}$ je vektor, můžeme jej tedy vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů base $\vec{e}_{(c)}$ - tedy

$$\mathrm{D}\vec{e}_{(b)} = \omega^c{}_b \vec{e}_{(c)}; \tag{1.3}$$

napravo nemusí být ukryto $\mathrm{d}\vec{x}$, neboť je v definici (1.3); jsou tedy $\omega^c{}_b(\mathrm{d}\vec{x})$ 1-formy konexe; indexy ${}^c_b$ jen „číslují“ formu - bude jich $n^2$! Vyjádříme si expilicitně 1-formu konexe:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\vec{e}_{(b)} &= \omega^c{}_b \vec{e}_{(c)} \quad \Big| \cdot \vec{e}^{(a)} \\ \vec{e}^{(a)}\mathrm{D}\vec{e}_{(b)} &= \omega^c{}_b \vec{e}_{(c)}\vec{e}^{(a)} = \omega^c{}_b \delta^a_c \\ \omega^a{}_b &= \vec{e}^{(a)}\mathrm{D}\vec{e}_{(b)} \end{aligned}$$

Nyní použijeme poznatku, že derivace čísla je nulová

$$\mathrm{D}\left(\vec{e}^{(a)}\vec{e}_{(b)}\right) = 0 = \vec{e}^{(a)}\mathrm{D}\vec{e}_{(b)} + \vec{e}_{(b)}\mathrm{D}\vec{e}^{(a)}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} \omega^a{}_b &= -\vec{e}_{(b)}\mathrm{D}\vec{e}^{(a)} = -e^\beta_{(b)}[\mathrm{D}\vec{e}^{(a)}]_\beta = -e^\beta_{(b)} e^{(a)}_{\beta;\gamma}\mathrm{d}x^\gamma \\ \omega^a{}_b(\mathrm{d}\vec{x}) &= -e^{(a)}_{\beta;\gamma} e^\beta_{(b)}\mathrm{d}x^\gamma. \end{aligned}$$

Nyní si 1-formu $\omega^a{}_b$ vyjádříme v bázi $\Theta^c$; koeficienty rozkladu budou Ricciho rotační koeficienty $\omega^a{}_b = \gamma^a{}_{bc}\Theta^c$;

$$\begin{aligned} \omega^a{}_b &= -e^{(a)}_{\beta;\gamma} e^\beta_{(b)}\delta^\sigma_\gamma \mathrm{d}x^\sigma = -e^{(a)}_{\beta;\gamma} e^\beta_{(b)} e^\gamma_{(c)} e^{(c)}_\lambda \mathrm{d}x^\lambda \\ &= -e^{(a)}_{\beta;\gamma} e^\beta_{(b)} e^\gamma_{(c)}\Theta^c. \end{aligned}$$

Riciho rotační koeficienty $\gamma^a{}_{bc} = -e^{(a)}_{\beta;\gamma} e^\beta_{(b)} e^\gamma_{(c)}$ - jsou to pouze skaláry!

$$\omega^a{}_b = \gamma^a{}_{bc}\Theta^c$$

Shrnuji, se souřadnicovou transformací se nemění 1-formy fonexe $\omega^a{}_b$ určují $\mathrm{D}\vec{e}^{(a)}, \mathrm{D}\vec{e}_{(b)}$; jsou lineární koeficienty base $\Theta^c = e^{(c)}_\alpha \mathrm{d}x^\alpha$ s koeficienty - Ricciho rotačními. Vyjděme z rovnice $g_{ab} = \vec{e}_{(a)} \cdot \vec{e}_{(b)}$; vezmeme diferenciál (Jedno zda obyčejný, či kovariantní, neboť pro daná $a, b$ je $g_{ab}$ skalár!)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}g_{ab} &= \mathrm{D}g_{ab} = \vec{e}_{(a)}\mathrm{D}\vec{e}_{(b)} + \vec{e}_{(b)}\mathrm{D}\vec{e}_{(a)} \\ &= \vec{e}_{(a)}\vec{e}_{(c)}\omega^c{}_b + \vec{e}_{(b)}\vec{e}_{(c)}\omega^c{}_a \\ &= g_{ac}\omega^c{}_b + g_{bc}\omega^c{}_a = \omega_{ab} + \omega_{ba} \end{aligned}$$

Tedy

$$\mathrm{d}g_{ab} = \omega_{ab} + \omega_{ba} = 2\omega_{(ab)}$$

d lze tedy brát jako „vnější diferenciál“, neboť $g_{ab}$ je skalár - výsledkem je 1-forma $\omega_{ab} + \omega_{ba}$. Symetrizované 1-formy $2\omega_{(ab)}$ jsou vnější diferenciál 0-forem $g_{ab}$.

**Souřadnicové (přirozené base).** Ukážeme, že ve formalismu forem je obsažen tradiční přístup k Riemanově geometrii. Specialisujme se na souřadnicové base. Mějme souřadnicový systém $x^\alpha$; volíme souřadnicovou basi:

$$\vec{e}^{(a)} \equiv \operatorname{grad} x^\alpha; \qquad \vec{e}^{(a)}_\alpha = \delta^a_\alpha,$$

vektory $\vec{e}_{(a)}$ jsou tečné k souřadnicovým křivkám. $\mathrm{d}x^\alpha \equiv \Theta^\alpha$ jsou základní 1-formy. Tetrádové složky libovolného tenzoru jsou numericky rovny obyčejným složkám. Pro rotační Ricciho koeficienty je

$$\begin{aligned} \gamma^a{}_{bc} &= -e^{(a)}_{\beta;\gamma} e^\beta_{(b)} e^\gamma_{(c)}; \\ e^{(a)}_{\beta;\gamma} &= e^{(a)}_{\beta,\gamma} - \Gamma^\delta{}_{\beta\gamma} e^{(a)}_\delta; \\ e^{(a)}_\beta &= \delta^a_\beta; \quad \frac{\partial e^{(a)}_\beta}{\partial x^\gamma} = 0 \\ \gamma^a{}_{bc} &= -\left[e^{(a)}_{\beta,\gamma} - \Gamma^\delta{}_{\beta\gamma} e^{(a)}_\delta\right] e^\beta_{(b)} e^\gamma_{(c)} \\ &= \Gamma^\delta{}_{\beta\gamma}\delta^a_\delta \delta^\beta_b \delta^\gamma_c = \Gamma^a{}_{bc} \end{aligned}$$

Jelikož $e^\alpha_{(a)} = \delta^\alpha_a$, budou si všude numericky rovny (vše v daném systému souřadnic) i $g_{\alpha\beta}$ a $g_{ab}$, tedy i jejich obyčejné (kovariantní ne!) diferenciály. U $g_{ab}$ je $\mathrm{d}g_{ab} = \mathrm{D}g_{ab}$ - neboť $g_{ab}$ je skalár (ale $g_{\alpha\beta}$ ne!). Máme $\mathrm{d}g_{ab} = \omega_{ab} + \omega_{be}$ z čehož plyne $\mathrm{d}g_{ab} = (\gamma_{abc} + \gamma_{bac})\Theta^c$; v souřadnicové basi ovšem bude

$$\begin{aligned} \mathrm{d}g_{\alpha\beta} &= (\gamma_{\alpha\beta\gamma} + \gamma_{\beta\alpha\gamma})\Theta^\gamma \\ \partial_\gamma g_{\alpha\beta} &= \gamma_{\alpha\beta\gamma} + \gamma_{\beta\alpha\gamma} = g_{\alpha\mu}\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma} + g_{\mu\beta}\Gamma^\mu{}_{\alpha\gamma} \\ \partial_\gamma g_{\alpha\beta} &- g_{\alpha\mu}\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma} - g_{\mu\beta}\Gamma^\mu{}_{\alpha\gamma} = 0 \\ g_{\alpha\beta;\gamma} &= 0 \qquad \text{klasický výsledek!} \end{aligned}$$

### 1.1.2 Rovnice struktury

Zpět v obecném formalismu. Spočítame si vnější diferenciály 1-forem $\Theta^a = e^{(a)}_\alpha \mathrm{d}x^\alpha$. Podle definice:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Theta^a &= 2! e^{(a)}_{\beta;\gamma} \mathrm{d}x^{[\gamma} \mathrm{d}x^{\beta]}; \\
\gamma^a{}_{bc} &= -e^{(a)}_{\beta;\gamma} e^\beta_{(b)} e^\gamma_{(c)}; \quad e^{(a)}_{\beta;\gamma} = \gamma^a{}_{bc} e^{(b)}_\beta e^{(c)}_\gamma; \\
\mathrm{d}\Theta^a &= -2! \gamma^a{}_{bc} e^{(b)}_\beta e^{(c)}_\gamma \mathrm{d}x^{[\gamma} \mathrm{d}x^{\beta]} \\
&= -\gamma^a{}_{bc} \left[ e^{(b)}_\beta e^{(c)}_\gamma \left( \mathrm{d}x^\gamma \mathrm{d}x^\beta - \mathrm{d}x^\beta \mathrm{d}x^\gamma \right) \right] \\
&= -\gamma^a{}_{bc} e^{(b)}_\beta e^{(c)}_\gamma \mathrm{d}x^\gamma \wedge \mathrm{d}x^\beta \\
&= -\gamma^a{}_{bc} \left( e^{(c)}_\gamma \mathrm{d}x^\gamma \right) \wedge \left( e^{(b)}_\beta \mathrm{d}x^\beta \right) \\
\mathrm{d}\Theta^a &= -\gamma^a{}_{bc} \Theta^c \wedge \Theta^b; \qquad \gamma^a{}_{bc} \Theta^c = \omega^a{}_b. \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

Tedy

$$\mathrm{d}\Theta^a = -\omega^a{}_b \wedge \Theta^b \qquad \text{- 1.Cartanova rovnice struktury}$$

Tyto rovnice říkají, že Ricciho rotační koeficienty v antisymetrizované části $\gamma^a{}_{[bc]}$, snadno získám, když udělám rotaci (vnější diferenciál) duální base $\vec{e}^{(a)}$. Jelikož je $\Theta^c \wedge \Theta^b$ antisymetrické v $b, c$, tedy i v $\mathrm{d}\Theta^a$ efektivně zůstane je antisymetrická část viz. (1.4).

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Theta^a &= \gamma^a{}_{bc} e^{(b)}_\beta e^{(c)}_\gamma \mathrm{d}x^\gamma \mathrm{d}x^\beta + \gamma^a_{bc} e^{(b)}_\beta e^{(c)}_\gamma \mathrm{d}x^\beta \mathrm{d}x^\gamma \\
&= -\gamma^a_{cb} e^{(c)}_\gamma e^{(b)}_\beta \mathrm{d}x^\beta \mathrm{d}x^\gamma + \gamma^a{}_{bc} e^{(b)}_\beta e^{(c)}_\gamma \mathrm{d}x^\beta \mathrm{d}x^\gamma \\
&= \left( \gamma^a{}_{bc} - \gamma^a{}_{cb} \right) e^{(b)}_\beta e^{(c)}_\gamma \mathrm{d}x^\beta \mathrm{d}x^\gamma \\
&= \gamma^a{}_{[bc]} e^{(b)}_\beta e^{(c)}_\gamma \mathrm{d}x^\beta \mathrm{d}x^\gamma.
\end{aligned}$$

Ve speciálním případě souřadnicové base, kdy $\vec{e}^{(a)} = \mathrm{grad} x^\alpha$ přejdou 1.rovnice struktury na triviální tvrzení

$$\mathrm{d}\Theta^\alpha = \mathrm{d}^2 x^\alpha; \text{ je } \gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \text{ a } \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \Theta^\beta \wedge \Theta^\gamma \equiv 0.$$

Pro formy platí že antisymetrická $\wedge$ symetrická $= 0$. Předpokládejme, že známe 1-formy $\Theta^a$ a matici $g_{ab}$ jako funkce souřadnic. Pak 1-formy $\omega^a{}_b$ jsou zcela určeny vztahy

$$\mathrm{d}g_{ab} = \omega_{ab} + \omega_{ba}; \qquad \mathrm{d}\Theta^a = -\omega^a{}_b \wedge \Theta^b.$$

Důležité je to proto, že Riemanův tenzor spočtu diferencováním $\omega^a_b$. $\omega^a_b$ mnohdy vychází složitě, ale v zajímavých případech (například pro ortonormální basi, či Sachsovu nulovou tetrádu) vychází $g_{ab}$ konstntní! (nezávisí na $x^\alpha$) Pak je vše jednoduché. $\mathrm{d}g_{ab} = \omega_{ab} + \omega_{ba}$ tedy

$$\omega_{ab} = -\omega_{ba} \qquad \text{- antisymetri}$$

Zbývá pak řešit $\mathrm{d}\Theta^a = -\omega^a{}_b \wedge \Theta^b$ - toto řešení lze obvykle uhádnout! Přitom si ukážeme, že řešení je jednoznačné.

**Věta:** Známe-li 1-formu $\Theta^a$ a matici $g_{ab}$ jako funkci $x^\mu$, pak 1-formy konexe $\omega^a{}_b$ jsou zcela určeny relacemi

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}g_{ab} &= \omega_{ab} + \omega_{ba}; \qquad (1.5) \\
\mathrm{d}\Theta^a &= -\omega^a{}_b \wedge \Theta^b. \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

**1)** Z (1.5) jsou jednoznačně určeny numerické koeficienty $\gamma_{(ab)c}$, neboť:

$$\mathrm{d}g_{ab} = \gamma_{abc}\Theta^c + \gamma_{bac}\Theta^c = 2\gamma_{(ab)c}\Theta^c$$

Známe-li $g_{ab}$, známe $\mathrm{d}g_{ab}$ (obyčejný dif. = vnější dif.) a známe dle předpokladu $\Theta^c$. Pak $\gamma_{(ab)c}$ určíme jako koeficienty lineární kombinace

$$\mathrm{d}g_{ab} = 2\gamma_{(ab)c}\Theta^c.$$

**2)** Z (1.6) určíme $\gamma_{a[bc]}$; udělejme v (1.6) nejdřív $a \to c$, vynásobme pak $g_{ab}$:

$$\begin{aligned}
g_{ab}\mathrm{d}\Theta^b &= -g_{ab}\omega^b{}_c \wedge \Theta^c = -g_{ab}\gamma^b{}_{cd}\Theta^d \wedge \Theta^c \\
&= -\gamma_{acd}\Theta^d \wedge \Theta^c = -2\gamma_{a[cd]}\Theta^d \wedge \Theta^c \\
&= -2\gamma_{a[bc]}\Theta^c \wedge \Theta^b.
\end{aligned}$$

$\Theta^c \wedge \Theta^b$ tvoří basi 2-forem, tedy $\gamma_{a[bc]}$ jsou určeny jednoznačně. Pak

$$\begin{aligned}
&\omega_{ab} = \gamma_{abc}\Theta^c = \\
&= \left( \gamma_{(ab)c} + \gamma_{(ac)b} - \gamma_{(bc)a} + \gamma_{a[bc]} + \gamma_{b[ca]} - \gamma_{c[ab]} \right) \Theta^c.
\end{aligned}$$

Pro naše Gaussovské polární souřadnice je

$$g_{ab} = \delta_{ab}, \qquad \Theta^1 = \mathrm{d}\rho, \quad \Theta^2 = f(\rho, \varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

Víme, že $\mathrm{d}^2\Omega = 0$; $\mathrm{d}(f\Omega) = f\mathrm{d}\Omega + \mathrm{d}f \wedge \Omega$; tedy

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Theta^1 &= \mathrm{d}^2\rho = 0; \\
\mathrm{d}\Theta^2 &= f\mathrm{d}^2\varphi + \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\varphi = f_{,\rho}\,\mathrm{d}\rho \wedge \mathrm{d}\varphi + f_{,\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}\varphi \\
&= f_{,\rho}\,\mathrm{d}\rho \wedge \mathrm{d}\varphi + 0 = (f_{,\rho}/f)\ \Theta^1 \wedge \Theta^2.
\end{aligned}$$

Z $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$ plyne, že

$$\omega^1{}_1 = \omega^2{}_2 = 0.$$

Z $\mathrm{d}\Theta^a = -\omega^a{}_b \wedge \Theta^b$ víme

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Theta^1 &= -\omega^1{}_2 \wedge \Theta^2 = 0 \\
\mathrm{d}\Theta^2 &= -\omega^2{}_1 \wedge \Theta^1 = (f_{,\rho}/f)\ \Theta^1 \wedge \Theta^2.
\end{aligned}$$

Je jasné, že když hádáme $\omega^2{}_1 = (f_{,\rho}/f)\ \Theta^2 = -\omega^1{}_2$ jsme použili Ricciho koeficienty $\omega^a{}_b = \gamma^a{}_{bc}\Theta^c$, máme tedy

$$\gamma^2{}_{12} = (f_{,\rho}/f) = -\gamma^1{}_{22} \quad \text{ostatní} \quad \gamma^a{}_{bc} = 0.$$

**2-formy křivosti** Máme $\omega^a{}_b = \gamma^a{}_{bc}\Theta^v = \gamma^a_{bc} e^{(c)}_\gamma \mathrm{d}x^\gamma$, navíc $\Theta(\mathrm{d}\vec{x}) = e^{(a)}_\alpha \mathrm{d}x^\alpha$

$$\mathrm{d}\omega^a{}_b \equiv 2! \left[ \gamma^a_{bc} e^{(c)}_\gamma \right]_{;\delta} \mathrm{d}x^{[\delta} \mathrm{d}x^{\gamma]}.$$

Riemanův tenzor - definice:

$$e^{(a)}_\alpha R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = 2e^{(a)}_{\beta;[\gamma\delta]}.$$

Víme, že je $\gamma^a{}_{bc} = e^{(a)}_{\beta;\gamma} e^\beta_{(b)} e^\gamma_{(c)}$ tedy

$$e^{(a)}_{\beta;\gamma} = -\gamma^a{}_{bc} e^{(c)}_\gamma e^{(b)}_\beta;$$

tudíž lze psát

$$\begin{aligned} e^{(a)}_{\beta;\gamma\delta} &= -\left(\gamma^a_{bc}e^{(c)}_\gamma\right)_{;\delta} e^{(b)}_\beta - \gamma^a{}_{bc}e^{(c)}_\gamma e^{(b)}_{\beta;\delta}; \\ \gamma^a{}_{bc}e^{(c)}_\gamma e^{(b)}_{\beta;\delta} &= \gamma^a{}_{hc}e^{(c)}_\gamma \left(-\gamma^h{}_{bd}e^{(d)}_\delta e^{(b)}_\beta\right) \\ &= -\left(\gamma^a{}_{hc}e^{(c)}_\gamma\right)\left(\gamma^h{}_{bd}e^{(b)}_\delta\right) e^{(b)}_\beta \\ e^{(a)}_{\beta;\gamma\delta} &= -\left(\gamma^a_{bc}e^{(c)}_\gamma\right)_{;\delta} e^{(b)}_\beta \\ &\quad + \left(\gamma^a{}_{hc}e^{(c)}_\gamma\right)\left(\gamma^h{}_{bd}e^{(b)}_\delta\right) e^{(b)}_\beta \cdot 2\mathrm{d}x^{[\gamma}\mathrm{d}y^{\delta]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2e^{(a)}_{\beta;\gamma\delta}\mathrm{d}x^{[\gamma}\mathrm{d}x^{\delta]} &= 2e^{(a)}_{\beta;[\gamma\delta]}\mathrm{d}x^{[\gamma}\mathrm{d}x^{\delta]} = e^{(a)}_\alpha R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\mathrm{d}x^{[\gamma}\mathrm{d}x^{\delta]} \\ &= -2\left(\gamma^a{}_{bc}e^{(c)}_\gamma\right)_{;\delta} e^{(b)}_\beta \mathrm{d}x^{[\gamma}\mathrm{d}y^{\delta]} \\ &\quad +2\left(\gamma^a{}_{hc}e^{(c)}_\gamma\right)\left(\gamma^h{}_{bd}e^{(b)}_\delta\right) e^{(b)}_\beta \mathrm{d}x^{[\gamma}\mathrm{d}y^{\delta]} \\ &= \mathrm{d}\omega^a{}_b e^{(b)}_\beta + \omega^a{}_h \wedge \omega^h{}_b e^{(b)}_\beta \\ \Theta^c \wedge \Theta^d &= 2! e^{(c)}_\gamma e^{(d)}_\delta \mathrm{d}x^{[\gamma}\mathrm{d}y^{\delta]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{(a)}_\alpha R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\mathrm{d}x^{[\gamma}\mathrm{d}y^{\delta]} &= \left[\mathrm{d}\omega^a{}_b + \omega^a{}_h \wedge \omega^h{}_b\right] e^{(b)}_\beta \\ &= e^{(a)}_\lambda R^\lambda_{\beta\gamma\delta}\delta^\gamma_\lambda\delta^\delta_\nu \mathrm{d}x^{[\lambda}\mathrm{d}y^{\nu]} \\ &= e^{(a)}_\lambda R^\lambda_{\beta\gamma\delta} e^\gamma_{(c)} e^{(c)}_\lambda e^\delta_{(d)} e^{(d)}_\tau \mathrm{d}x^{[\lambda}\mathrm{d}x^{\tau]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}e^{(a)}_\alpha R^\alpha_{\beta\gamma\delta} e^\gamma_{(c)} e^\delta_{(d)} \Theta^c \wedge \Theta^d &= \left(\mathrm{d}\omega^a{}_b + \omega^a{}_h \wedge \omega^h{}_b\right) e^{(g)}_\beta \\ &\qquad \Big| \cdot e^\beta_{(b)} \\ R^\alpha_{\beta\gamma\delta} e^{(a)}_\alpha e^\beta_{(b)} e^\gamma_{(c)} e^\delta_{(d)} &= R^a_{bcd}; \\ \frac{1}{2}R^a{}_{bcd}\Theta^a \wedge \Theta^d &= \mathrm{d}\omega^a{}_b + \omega^a{}_h \wedge \omega^h{}_b \end{aligned}$$

Označme 2-formy křivosti $\Omega^a{}_b = \frac{1}{2}R^a{}_{bcd}\Theta^c \wedge \Theta^d$; pak

$$\Omega^a{}_b = \mathrm{d}\omega^a{}_b + \omega^a{}_h \wedge \omega^h{}_b \qquad \text{2.Cartanovy rovnice strktury}$$

**Opět případ Gaussových souřadnic.** Už jsme zjistili, že je:

$$\begin{gathered} g_{ab} = \delta_{ab}, \quad \Theta^1 = \mathrm{d}\rho, \quad \Theta^2 = f(\rho,\varphi)\mathrm{d}\varphi; \\ \omega^1{}_1 = \omega^2{}_2 = 0; \quad \omega^2{}_1 = -\omega^1{}_2 = (f_{,\rho}/f)\ \Theta^2. \end{gathered}$$

2-formy křivosti jež nevymizí jsou ($\mathrm{d}\Theta^a = -\omega^a{}_b\Theta^b$)

$$\begin{aligned} \Omega^1{}_2 &= -\Omega^1{}_2 = \mathrm{d}\omega^2{}_1 + \omega^2{}_p \wedge \omega^p{}_1 \\ &= \mathrm{d}\left[(f_{,\rho}/f)\,\Theta^2\right] + \omega^2{}_1 \wedge \omega^1{}_1 + \omega^2{}_2 \wedge \omega^2{}_1 \\ &= (f_{,\rho}/f)\,\mathrm{d}\Theta^2 + \mathrm{d}\,(f_{,\rho}/f) \wedge \Theta^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Theta^2 &= -\omega^2{}_1 \wedge \Theta^1 = (f_{,\rho}/f)\,\Theta^1 \wedge \Theta^2 \\ \mathrm{d}\,(f_{,\rho}/f) \wedge \Theta^2 &= (f_{,\rho}/f)_{,\rho}\,\mathrm{d}\rho \wedge \Theta^2 \\ &= \left(f_{,\rho\rho}/f - f^2_{,\rho}/f^2\right)\Theta^1 \wedge \Theta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega^2{}_1 &= (f_{,\rho}/f)^2\,\Theta^1 \wedge \Theta^2 + \left(f_{,\rho\rho}/f - f^2_{,\rho}/f^2\right)\Theta^1 \wedge \Theta^2 \\ \Omega^2{}_1 &= -\Omega^1{}_2 = (f_{,\rho\rho}/f)\,\Theta^1 \wedge \Theta^2 \end{aligned}$$

Srovnáním s koeficenty v rovnici $\Omega^a{}_b = \frac{1}{2}R^a{}_{bcd}\Theta^c \wedge \Theta^d$ dostáváme

$$\Omega^2{}_1 = -\Omega^1{}_2 = \frac{1}{2}R^2_{112}\Theta^1 \wedge \Theta^2 = (f_{,\rho\rho}/f)\,\Theta^1 \wedge \Theta^2$$

Jediná netriviální složka Riemanova tenzoru je

$$R^2_{112} = f_{,\rho\rho}/f.$$

### 1.1.3 Diferenciální formy v Riemannově geometrii

**Idnetity pro křivost** V Cartanově formalismu dostáváme Bianchiho identity jednoduše jako podmínky integrability 2. rovnic struktury:

$$\Omega^a{}_b = \mathrm{d}\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b.$$

Uděláme vnější diferenciál $\Omega^a{}_b$. Budeme potřebovat:

$$\mathrm{d}^2\omega^a{}_b = 0; \qquad \mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^{ab}\alpha \wedge \mathrm{d}\beta;$$

pro 1-formy $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$; $\omega^a{}_c$ - jsou 1-formy.Tedy

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Omega^a{}_b &= \mathrm{d}^2\omega^a{}_b + \mathrm{d}\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b - \omega^a{}_c \wedge \mathrm{d}\omega^c{}_b \\ &= \left(\Omega^a{}_c - \omega^a{}_d \wedge \omega^d{}_c\right) \wedge \omega^c{}_b - \omega^a{}_c \wedge \left(\Omega^c{}_b - \omega^c{}_d \wedge \omega^d{}_b\right). \end{aligned}$$

Některé členy se vyruší, takže máme

$$\mathrm{d}\Omega^a{}_b = \Omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b - \omega^a{}_c \wedge \Omega^c{}_b,$$

což není nic jiného, než Bianchiho identity. Ukážeme to tak, že se specializujeme na souřadnou basi a vezmeme Piemanovy souřadnice - takže $\omega^\alpha{}_\beta = \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\mathrm{d}x^\gamma = 0$ v nějakém pevném vybraném bodě. Pak po rozepsání (1.1.3) dostáváme

$$\partial_\epsilon R^\alpha_{\beta\gamma\delta}\mathrm{d}x^{[\epsilon}\mathrm{d}y^\gamma\mathrm{d}z^{\delta]} = 0,$$

tj.

$$R^\alpha_{\beta[\gamma\delta;\epsilon]} = 0$$

- známý standardní tvar Bianchiho identit. Další identitu dostaneme z 1. rovnic struktury; uděláme jejich vnější diferenciál

$$\begin{gathered} \mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge \mathrm{d}\beta; \\ \mathrm{d}\Theta^a = -\omega^a{}_b \wedge \Theta^b; \qquad \mathrm{d}^2\Theta^a = -\mathrm{d}\omega^a{}_b \wedge \Theta^b + \omega^a{}_b \wedge \mathrm{d}\Theta^b. \end{gathered}$$

2.r. struktury:

$$-\mathrm{d}\omega^a{}_b = -\Omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b.$$

$$\begin{aligned} 0 &= \left(-\Omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b\right) \wedge \Theta^b + \omega^a{}_b \wedge \left(-\omega^a{}_c \wedge \Theta^c\right) \\ &= -\Omega^a{}_b \wedge \Theta^b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \wedge \Theta^b - \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \wedge \Theta^b \end{aligned}$$

$$\Omega^a{}_b \wedge \Theta^b = 0$$

Jelikož $\Omega^a{}_b = \frac{1}{2} R^a{}_{bcd} \Theta^c \wedge \Theta^d$ máme

$$R^a{}_{bcd}\, \Theta^c \wedge \Theta^d \wedge \Theta^b = 0,$$

ale to není nic jiného, než $R^a{}_{[bcd]} = 0$, nebo-li i $R_{a[bcd]} = 0$. Dále lze ukázat, že tato cyklická identita spolu s antisymetrií Riemannova tenzoru v obou párech implikuje

$$R_{abcd} = R_{cdab}.$$

Všechny symetrie Riemannova tenzoru jsou tudíž shrnuty ve dvou identitách, jež splňují 2-formy křivosti:

$$\Omega_{ab} = -\Omega_{ba}$$
$$\Omega^a{}_b \wedge \Theta^b = 0$$

Nakonec si ještě ukážeme, že platí identita $\Omega_{ab} = -\Omega_{ba}$. Vyjdeme z

$$\begin{aligned} \Omega^a{}_b &= \mathrm{d}\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b, \\ \mathrm{d}g_{ab} &= \omega_{ab} + \omega_{ba}. \end{aligned}$$

Pracujeme jen s indexy $a, b \ldots$ - tj. zvyšujeme a snižujeme pomocí $g_{ab}, g^{ab}$. Dále použijeme už jen

$$\mathrm{d}\,(f\Omega) = \mathrm{d}f \wedge \Omega + f\mathrm{d}\Omega.$$

$$\Omega_{ab} = g_{as}\Omega^s{}_b = g_{as}\mathrm{d}\omega^s{}_b + \omega_{ac} \wedge \omega^c{}_b$$

$$\begin{aligned} \Omega_{ab} + \Omega_{ba} &= g_{as}\mathrm{d}\omega^s{}_b + \omega_{ac} \wedge \omega^c{}_b + g_{bs}\omega^s{}_a + \omega_{bc} \wedge \omega^c{}_a \\ &= \mathrm{d}\,(g_{as}\omega^s{}_b) - \mathrm{d}g_{as} \wedge \omega^s{}_b + \mathrm{d}\,(g_{bs}\omega^s{}_a) \\ &\quad -\mathrm{d}g_{bs} \wedge \omega^s{}_a + \omega_{ac} \wedge \omega^c{}_b + \omega_{bc} \wedge \omega^c{}_a \\ &= \mathrm{d}\omega_{ab} - (\omega_{as} + \omega_{sa}) \wedge \omega^s{}_b + \mathrm{d}\omega_{ba} \\ &\quad -(\omega_{bs} + \omega_{sb}) \wedge \omega^s{}_a \\ &\quad +\omega_{as} \wedge \omega^s{}_b + \omega_{bs} \wedge \omega^s{}_a \\ &= \mathrm{d}\omega_{ab} + \mathrm{d}\omega_{ba} - \omega_{sa} \wedge \omega^s{}_b - \omega_{sb} \wedge \omega^s{}_a \\ &= 0 - \omega_{sa} \wedge \omega^s{}_b + \omega^s{}_a \wedge \omega_{sb} \\ &= -\omega_{sa} \wedge \omega^s{}_b + \omega_{sa} \wedge \omega^s{}_b = 0 \end{aligned}$$

$$\mathrm{d}g_{ab} = \omega_{ab} + \omega_{ba}; \qquad \mathrm{d}^2 g_{ab} = 0 = \mathrm{d}\omega_{ab} + \mathrm{d}\omega_{ba}$$

## 1.2 Integrace v prostoročasech

### 1.2.1 Duální tenzory

Definice **dualních tenzorů**:

$$\begin{aligned} J^*_{\alpha\beta\gamma} &= J^\mu \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} && \text{- tenzor 3. řádu duální k vektoru} \\ F^*_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2!} F^{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} && \text{- tenzor 2. ř. duální k tenzoru 2. ř.} \\ B^*_\alpha &= \frac{1}{3!} B^{\lambda\mu\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} && \text{- vektor duální k tenzoru 3. řádu} \\ \Omega^* &= \frac{1}{4!} \Omega^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} && \text{- skalár duální k tenzoru 4. řádu} \end{aligned}$$

V OTR zavádíme tenzor dvojnásobně duální k Riemanovu tenzoru

$$\mathbf{G}^{\iota\kappa}{}_{\lambda\mu} = \frac{1}{4} \quad \mathbf{e}^{\iota\kappa\varrho\sigma} R_{\varrho\sigma}{}^{\tau\xi} e_{\tau\xi\lambda\mu};$$

pro tento tenzor lze Bianchiho identity napsat v jednoduchém tvaru

$$\mathbf{G}_{\iota\kappa\lambda}{}^{\mu}{}_{;\mu} = 0$$

Einsteinův tenzor

$$G_{\mu\nu} = G^\iota{}_{\mu\iota\nu}$$

a Bianchiho indentity implikují ”zákon zachování”

$$\mathbf{G}_\mu{}^\nu{}_{;\nu} = \mathbf{0}$$

$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ je *Levi-Civitův permutační symbol* definovaný v Lorentzových souřadných systémech tak, že

$$\varepsilon_{0123} = 1; \tag{1.7}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & (\alpha\beta\gamma\delta) \text{ je sudou permutací (0123)} \\ -1 & (\alpha\beta\gamma\delta) \text{ je lichou permutací (0123)} \\ 0 & \text{když jsou libovolné 2 indexy stejné} \end{cases}$$

$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ je antisymetrické ve všech indexech a ve 4-dimenzionálním prostoručasu mu musí být každý antisymetricý tenzor 4. řádu úměrný, jelikož má také pouze jednu nezávislu složku. Pro kontravariantní složky platí:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \eta^{\alpha\iota}\eta^{\beta\kappa}\eta^{\gamma\lambda}\eta^{\delta\mu}\varepsilon_{\iota\kappa\lambda\mu}, \quad \text{tj.} \quad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

Jelikož $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ je (až na znaménko) permutační symbol, platí (viz definici determinantu):

$$\Lambda^0_\alpha \Lambda^1_\beta \Lambda^2_\gamma \Lambda^3_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\det|\Lambda^\sigma_\varrho|$$

$\Lambda^\mu_\nu$ jsou složky matice Lorentzovy transformace. Proto je

$$\Lambda^\kappa_\alpha \Lambda^\lambda_\beta \Lambda^\mu_\gamma \Lambda^\nu_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\det|\Lambda^\varrho_\sigma| \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} \tag{1.8}$$

Vidíme, že $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ se transformuje jako tenzor při Lorentzových transformacích, pro něž je $\det|\Lambda^\varrho{}_\sigma| = 1$. (Vzhledem ke vztahu $\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta\, \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}$ je obecně $\det|\Lambda^\varrho{}_\sigma| = \pm 1$. Je-li $\det|\Lambda^\varrho{}_\sigma| = -1$ (Lorentzova transformace obsahuje lichý počet inverzí), pak kdyby byl $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ tenzor, museli by mít po transformaci všechny složky opačné znaménko (viz levá strana (1.8)), kde by byly skožky $\varepsilon$ po transformaci). Totéž platí pro kovariantní složky $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$, jež se transformují dle inverzní matice $\Lambda_\varrho{}^\sigma$, takže znaménka obou determinantů jsou stejná. My jsme ovšem defifnovali $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ vztahem (1.7) „v každém“ Lorentzově souřadném systému, tj. jako veličinu neměnící složky.Proto se $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ a $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ nechovají při transformacích s $\det|\Lambda^\varrho{}_\sigma| = -1$. Levi-Civitův tenzor symbol nazýváme „pseudotenzorem“. Transformace s $\det|\Lambda^\varrho{}_\sigma| = \pm 1$ odpovídající prostorovým inverzím, jež jsou patřičné především v částivové fyzice. Pro naše účely nebudeme prostorové inverze potřebovat, můžeme proto objekty typu $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ a $F^*_{\alpha\beta}$ považovat za tenzory. (Je-li navíc $\Lambda^0{}_0 > 0$ , resp. $\Lambda^0{}_0 \geq 0$, jde o „vlastní“ Lorentzovou transforamci, k níž lze spojitě přejít infinetizemálními transformacemi od identické transforamce $\Lambda^\varrho{}_\sigma = \delta^\varrho{}_\sigma$).

Lze zavést skutečný Levi-Civitův tenzor, když jeho složky definujeme relacemi (1.7) v systémech, kde $e^\mu_{(0)}$ směřuje do budoucnosti a $e^\mu_{(1)}, e^\mu_{(2)}, e^\mu_{(3)}$ tvoří pravotočivý systém v systémech zrcadlově symetrických pak bude mít $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ s opačnými znaménky - po zrcadlení je totiž $\det|\Lambda^\varrho{}_\sigma| = -1$.

Součiny Levi-Civitových symbolů jsou ovšem ve všech případech tenzory. Mají ve všechsouřadných systémech stejné složky a vyjádříme je pomocí Kroneckerových symbolů:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\iota\kappa\lambda\mu} &= -\begin{vmatrix} \delta^\alpha_\iota & \delta^\alpha_\kappa & \delta^\alpha_\lambda & \delta^\alpha_\mu \\ \delta^\beta_\iota & \delta^\beta_\kappa & \delta^\beta_\lambda & \delta^\beta_\mu \\ \delta^\gamma_\iota & \delta^\gamma_\kappa & \delta^\gamma_\lambda & \delta^\gamma_\mu \\ \delta^\delta_\iota & \delta^\delta_\kappa & \delta^\delta_\lambda & \delta^\delta_\mu \end{vmatrix} \\
\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\iota\kappa\lambda\delta} &= -\begin{vmatrix} \delta^\alpha_\iota & \delta^\alpha_\kappa & \delta^\alpha_\lambda \\ \delta^\beta_\iota & \delta^\beta_\kappa & \delta^\beta_\lambda \\ \delta^\gamma_\iota & \delta^\gamma_\kappa & \delta^\gamma_\lambda \end{vmatrix} \\
\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\iota\kappa\gamma\delta} &= -2\begin{vmatrix} \delta^\alpha_\iota & \delta^\alpha_\kappa \\ \delta^\beta_\iota & \delta^\beta_\kappa \end{vmatrix} \\
\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\iota\beta\gamma\delta} &= -6\delta^\alpha_\iota \\
\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -24
\end{aligned} \tag{1.9}
$$

Pomocí uvedených vztahů lze převádět duální tenzory. Pro tenzor elektromagnetického pole platí:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{\delta\sigma\alpha\beta}F^*_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2!}\varepsilon^{\delta\sigma\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\gamma\delta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\delta\sigma\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta\alpha\beta}F^{\gamma\delta} \\
&= -\frac{1}{2}2(\delta^\varrho_\gamma\delta^\sigma_\delta - \delta^\varrho_\delta\delta^\sigma_\gamma)F^{\gamma\delta} = -F^{\varrho\sigma} + F^{\sigma\varrho} \\
&= -2F^{\varrho\sigma}
\end{aligned}
$$

Proto $F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2!}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F^*_{\gamma\delta}$. Druhou sérii Maxwellových rovnic $F_{[\alpha\beta,\gamma]cycl.} = F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0$ můžeme vyjádřit pomocí dualního tenzoru: $F^{*\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$

Nyní přejdeme k neinercialním souřadných systémů a zakřiveném prostoročasu, tj. k OTR. Zavedeme pojem *tenzorové hustoty* Vyjdeme z transformačního vztahu

$$
\widetilde{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\varrho}{\partial \widetilde{x}^\alpha}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \widetilde{x}^\beta}g_{\varrho\sigma}
$$

Pravou stranu považujeme za součin tří matic, takže

$$
\widetilde{g} = \widetilde{\triangle}^2 g = \triangle^{-2}g \; ; \quad g = \det(g_{\alpha\beta}) \; , \quad \widetilde{\triangle}\cdot\triangle = 1 \quad ;
$$

kde $\widetilde{\triangle} = \det\left(\frac{\partial x^\varrho}{\partial \widetilde{x}^\alpha}\right)$ je jakobián inverzní transformace, $\triangle = \det\left(\frac{\partial \widetilde{x}^\varrho}{\partial x^\alpha}\right)$ je jakobián původní transformace. Platí-li transformační relace

$$
\widetilde{\mathcal{T}}_{\alpha\beta\ldots}{}^{\mu\nu\cdots} = |\widetilde{\triangle}|^W \frac{\partial x^\gamma}{\partial \widetilde{x}^\alpha}\frac{\partial x^\delta}{\partial \widetilde{x}^\beta}\cdots\frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial \widetilde{x}^\nu}{\partial x^\sigma}\,\mathcal{T}_{\gamma\delta\ldots}{}^{\varrho\sigma\cdots},
$$

kde W je celé číslo, pak $\mathcal{T}$ je tenzorová hustota váhy $W$.

Je tedy $g$ tenzorová hustota váhy 2, $(-g)^{\frac{1}{2}}$ je tenzorová hustota váhy 1, jelikož

$$
(-\widetilde{g})^{\frac{1}{2}} = |\widetilde{\triangle}|(-g)^{\frac{1}{2}}.
$$

Z tenzoru tedy tenzorovou hustotu vytvoříme vynásobením faktorem $(|-g|)^{\frac{1}{2}}$ :

$$
\mathcal{T}_{\gamma\delta\ldots}{}^{\varrho\sigma\cdots} = (-g)^{\frac{1}{2}}T_{\gamma\delta\ldots}{}^{\varrho\sigma\cdots}
$$

Podobně $\mathcal{T}_{\gamma\delta\ldots}{}^{\varrho\sigma\cdots} = (-g)^{\frac{W}{2}}T_{\gamma\delta\ldots}{}^{\varrho\sigma\cdots}$ je tenzorová hustota váhy W.

Permutační Levi - Civitův symbol se chová jako tenzorová hustota. Předpokladejme, že složky permutačního symbolu jsou dány relacemi (1.7) ve všech souřadnicích. Pak

$$
\widetilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \widetilde{\triangle}^{-1}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x^{,\alpha}}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{,\beta}}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{,\gamma}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{,\delta}}\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} \; ,
$$

odtud je skutečně $\widetilde{\varepsilon}_{0123} = \widetilde{\triangle}^{-1}\widetilde{\triangle} = 1$ ; ostatní složky jsou dány tím, že $\varepsilon'_{\alpha\beta\gamma\delta}$ je výhradně antisymetrické. Je tedy $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ tenzorovou hustotou váhy -1. Abychom dostali tenzor, musíme dělit faktorem $(-g)^{-\frac{1}{2}}$. Veličina

$$
e_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv (-g)^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}
$$

se transformuje jako tenzor, až na faktor $sign \quad \widetilde{\triangle}$ - je to tedy *pseudotenzor*. Při transforamcích, k nimž lze spojitě přejít od identity, je $\widetilde{\triangle} > 0$ a $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ bude Levi-Civitův tezor. (V LIS je $e_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$.) Kontravariantní složky Levi-Civitova tenzoru získáme zvednutím indexů:

$$
e^{\alpha\beta\gamma\delta} = (-g)^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}g^{\kappa\alpha}g^{\lambda\beta}g^{\mu\gamma}g^{\nu\delta} = (-g)^{\frac{1}{2}}(-g)^{-1}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \, ,
$$

takže

$$
e^{\alpha\beta\gamma\delta} = (-g)^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \; ;
$$

využili jsme relací $\det\,(g^{\alpha\beta}) = g^{-1}$, $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$.(Poznamenejme, že pro definici tenzorové hustoty lze požívat i výrazy $|\triangle|^W$, $\triangle^W$, $\widetilde{\triangle}^W$; je-li $\triangle = \pm 1$ pak tenzorová hustota liché váhy je pseudotenzorem.)

### 1.2.2 Integrace v prostoročasu

Nyní se budeme zabývat integrací v inerciálních souřadných systémech (plochém prostoročasu). Napřed je potřeba stanovit element oblasti prostoročasu, přes níž integrujeme.

1. Dvojrozměrná plocha Element plochy je dán infinitezimálními nezávislými vektory $\mathrm{d}x^\alpha$, $\mathrm{d}y^\alpha$, tvořícimi $\alpha$-dimenziální rovnoběžník. Obsahy průmětů rovnoběžníku do souřadných rovin dáva veličina

$$\mathrm{d}\sigma^{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \mathrm{d}x^\alpha & \mathrm{d}y^\alpha \\ \mathrm{d}x^\beta & \mathrm{d}y^\beta \end{vmatrix}$$

Dualní veličina

$$\mathrm{d}\sigma^*_{\alpha\beta} = \frac{1}{2!}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\mathrm{d}\sigma^{\gamma\delta}$$

je kolmá k $\mathrm{d}x^\alpha$, $\mathrm{d}y^\alpha$, $\mathrm{d}\sigma^{\gamma\delta}$, tj.

$$\mathrm{d}\sigma^*_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\beta = \mathrm{d}\sigma^*_{\alpha\beta}\mathrm{d}y^\beta = \mathrm{d}\sigma^*_{\alpha\beta}\mathrm{d}\sigma^{\alpha\beta} = 0$$

Veličina $\mathrm{d}\sigma^*_{\alpha\beta}$ proto má povahu vektorového součinu vektorů tvořících rovnoběžníka je definována jako

$$\mathrm{d}^{(2)}S = \left(\left|\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ab}\mathrm{d}\sigma^{ab}\right|\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left|\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma^*_{\alpha\beta}\mathrm{d}\sigma^{*\alpha\beta}\right|\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.10}$$

Pro názornost uvažujme 2-plochu vnořenou do 3-dimenzionální nadplochy $t$ =konst, takže $\mathrm{d}x^\alpha = (0, \mathrm{d}\vec{x})$, $\mathrm{d}y^\alpha = (0, \mathrm{d}\vec{y})$. Pak

$$\mathrm{d}^{(2)}S = \left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ab}\mathrm{d}\sigma^{ab}\right)^{1/2} = \left(\mathrm{d}^{(2)}S_i\,\mathrm{d}^{(2)}S^i\right)^{1/2},$$

kde

$$\mathrm{d}^{(2)}S_i = \epsilon_{ijk}\mathrm{d}x^j\mathrm{d}y^k = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\sigma^{jk}$$

je vektorový součin vektorů $\mathrm{d}\vec{x}$, $\mathrm{d}\vec{y}$.

2. Třírozměrná nadplocha Rovnoběžnostěn ze tří nezávislých vektorů $\mathrm{d}x^\alpha$, $\mathrm{d}y^\alpha$, $\mathrm{d}z^\alpha$ je charakterizován úplně antisymetrickou veličinou

$$\mathrm{d}\Sigma^{\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} \mathrm{d}x^\alpha & \mathrm{d}y^\alpha & \mathrm{d}z^\alpha \\ \mathrm{d}x^\beta & \mathrm{d}y^\beta & \mathrm{d}z^\beta \\ \mathrm{d}x^\gamma & \mathrm{d}y^\gamma & \mathrm{d}z^\gamma \end{vmatrix}.$$

Veličina duální

$$\mathrm{d}^{(3)}\Sigma_\alpha = \frac{1}{3!}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\mathrm{d}\Sigma^{\beta\gamma\delta}$$

je vektor kolmý ke všem vektorům ležícím v daném elementu nadplochy ($\mathrm{d}^{(3)}\Sigma_\alpha$ je kolmé k $\mathrm{d}x^\alpha, \mathrm{d}y^\alpha$ i $\mathrm{d}z^\alpha$). Absolutní hodnota jeho velikosti je rovna velikosti 3-objemu elementu:

$$\mathrm{d}V = (|\mathrm{d}^{(3)}\Sigma_\alpha\mathrm{d}^{(3)}\Sigma^\alpha|)^{\frac{1}{2}}.$$

Pro nadplochu $t = konst.$, $\mathrm{d}x^\alpha = (0, \mathrm{d}\vec{x})$, $\mathrm{d}y^\alpha = (0, \mathrm{d}\vec{y})$, $\mathrm{d}z^\alpha = (0, \mathrm{d}\vec{z})$, má $\mathrm{d}^{(3)}\Sigma_\alpha$ nenulovou pouze složku

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^{(3)}\Sigma_0 &= \frac{1}{3!}\epsilon_{0ijk}\mathrm{d}\Sigma^{ijk} = \epsilon_{ijk}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}y^j\mathrm{d}z^k \\ &= \mathrm{d}\vec{x}\cdot(\mathrm{d}\vec{y}\times\mathrm{d}\vec{z}) = \pm\mathrm{d}V\end{aligned}$$

V triviálním případě $\mathrm{d}x^\alpha = (0, \mathrm{d}x, 0, 0)$, $\mathrm{d}y^\alpha = (0, 0, \mathrm{d}y, 0)$, $\mathrm{d}z^\alpha = (0, 0, 0, \mathrm{d}z)$ bude $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. (Objem $\mathrm{d}V > 0$, avšak znaménko $\mathrm{d}^{(3)}\Sigma_0$ závisí na orientaci vektorů $\mathrm{d}\vec{x}$, $\mathrm{d}\vec{y}$, $\mathrm{d}\vec{z}$. Odpovídá pravotočivém systému a časovému vektoru orientovaném do budoucnosti).

3. Čtyřrozměrná oblast Element vytvořený čtyřmi nezávislými vektory $\mathrm{d}t^\alpha$, $\mathrm{d}x^\alpha$, $\mathrm{d}y^\alpha$, $\mathrm{d}z^\alpha$ je dán úplně antisymetrickou veličinou

$$\mathrm{d}\Omega^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{vmatrix} \mathrm{d}t^\alpha & \mathrm{d}x^\alpha & \mathrm{d}y^\alpha & \mathrm{d}z^\alpha \\ \mathrm{d}t^\beta & \mathrm{d}x^\beta & \mathrm{d}y^\beta & \mathrm{d}z^\beta \\ \mathrm{d}t^\gamma & \mathrm{d}x^\gamma & \mathrm{d}y^\gamma & \mathrm{d}z^\gamma \\ \mathrm{d}t^\delta & \mathrm{d}x^\delta & \mathrm{d}y^\delta & \mathrm{d}z^\delta \end{vmatrix}.$$

Duální veličina

$$\mathrm{d}^{(4)}\Omega = \frac{1}{4!}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\mathrm{d}\Omega^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

reprezentuje objem 4-dimenzionálního „["rovnoběžnostěnu]; při standartní orientaci $\mathrm{d}t^\alpha$, $\mathrm{d}x^\alpha$, $\mathrm{d}y^\alpha$, $\mathrm{d}z^\alpha$ je $\mathrm{d}^{(4)}\Omega$ kladné. Ve standartně orientovaném Lorentzově systému je v triviálním případě, kdy vektory tvořící element jsou ve směru os bude

$$\mathrm{d}^{(4)}\Omega = \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

### 1.2.3 Stokesovy věty

Předpokládejme, že v prostoročase jsou dána patřičně diferencovatelná tenzorová pole $T_\alpha, T_{\alpha\beta}, T_{\alpha\beta\gamma}$. Uvažujme dále element křivky $\mathrm{d}l^\alpha$ a ostatní elementy zavedené výše. *Stokesovy věty* pak v případě výše uvedených oblastí zapíšeme v invariantním tvaru:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial\sigma} T_\alpha\,\mathrm{d}l^\alpha &= \int_\sigma \partial_\alpha T_\beta\,\mathrm{d}\sigma^{\alpha\beta} \\ \oint_{\partial\Sigma} T_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}\sigma^{\alpha\beta} &= \int_\Sigma \partial_\alpha T_{\beta\gamma}\,\mathrm{d}\Sigma^{\alpha\beta\gamma} \\ \oint_{\partial\Omega} T_{\alpha\beta\gamma}\,\mathrm{d}\Sigma^{\alpha\beta\gamma} &= \int_\Omega \partial_\alpha T_{\beta\gamma\delta}\,\mathrm{d}\Omega^{\alpha\beta\gamma\delta}\end{aligned}$$

Integrály vlevo provádíme přes hranici obepínající integrační oblast stojící vpravo. Vektory vytvářející elementy integrálů vlevo je nutno orientovat v souladu s vektory elementů integrálů vpravo (nechť $V^\alpha$ je vektor mířící ven z oblasti ohraničené $\partial\sigma(\partial\Sigma, \partial\Omega)$. Pak orientace vektoru $V^\alpha$ jako prvního v pořadí spolu s vektory elementu integrace v daném pořadí na hranicích integrálu vlevo musí být stejná jako orientace vektorů v daném pořadí v integrálech vpravo). Vzhledem k antisymetrii objemových elementů je evidentní, že roli budou hrát jen antisymetrické části tenzorů $T_{\alpha\beta}, T_{\alpha\beta\gamma}$. Při důkazu Stokesových vět (viz např. Synge) se postupuje analogicky případu $E_3$: oblast rozdělíme na infinitezimální elementy, větu dokážeme pro každý element a pak sečteme přes všechny elementy.

Zdůrazněme, že Stokesovy věty můžeme v elegantní podobě vyjádřit v obecném tvaru pomocí diferenciálních forem:

$$\int\limits_{V_n} \mathrm{d}\omega = \oint\limits_{\partial V_n} \omega$$

$\omega$ je diferenciální forma stupně $n$.

Ilustrujme nyní Stokesovy věty na názorných příkladech.

1. Mějme 2-plochu $\sigma$ ležící v nadrovině $t$ =konst, její elementy $\mathrm{d}x^\alpha = (0, \mathrm{d}\mathbf{x})$, $\mathrm{d}y^\alpha = (0, \mathrm{d}\mathbf{y})$. $\mathrm{d}\sigma^{\alpha\beta}$ pak má jen prostorové složky, jež určují obsah elementu dle vztahu (1.10)[1] Elementy křivky obepínající oblast $\sigma$ jsou $\mathrm{d}l^\alpha = (0, \mathrm{d}\mathbf{l})$. Jelikož $\mathrm{d}\sigma^{mn} = \varepsilon^{imn}\,\mathrm{d}^{(2)}S_i$ , lze Stokesovu větu upravit následujícím způsobem:

$$\oint\limits_{\partial\sigma} \mathbf{T}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = \oint\limits_{\partial\sigma} T_i\,\mathrm{d}l^i = \oint\limits_{\sigma} \partial_m T_n\,\mathrm{d}\sigma^{mn}$$

$$= \oint\limits_{\sigma} \partial_m T_n \varepsilon^{imn}\,\mathrm{d}^{(2)}S_i = \oint\limits_{\sigma} (\mathrm{rot}\mathbf{T})\,\mathrm{d}^{(2)}\mathbf{S},$$

což je standardní tvar Stokesovy věty v Eukleidovském prostoru.

2. Uvažujme nadrovinu $t$ = konst. s 3-dimenzionální oblastí $\Sigma$ s elementy tvořenými vektory $\mathrm{d}x^\alpha = (0, \mathrm{d}\mathbf{x})$, $\mathrm{d}y^\alpha = (0, \mathrm{d}\mathbf{y})$, $\mathrm{d}z^\alpha = (0, \mathrm{d}\mathbf{z})$. $\Sigma$ je obklopeno 2-plochou $\partial\Sigma$ s elementy z vektorů $\mathrm{d}u^\alpha = (0, \mathrm{d}\mathbf{u})$, $\mathrm{d}v^\alpha = (0, \mathrm{d}\mathbf{v})$. Ve Stokesově větě budou vystupovat jen prostorové složky $T_{\alpha\beta}$. Položíme

$$T_{bc} = \varepsilon_{bcs} T^s,$$

Zavedeme $\mathrm{d}\Sigma^{abc} = \varepsilon^{abc}\,\mathrm{d}V$ ( $\mathrm{d}\Sigma^{abc}$ je úplně antisymetrické a musí být úměrné $\varepsilon^{abc}$; koeficient úměrnosti určíme při standardní orientaci $\mathrm{d}\Sigma^{123} = \mathrm{d}V$) a dále je $\mathrm{d}\sigma^{bc} = \varepsilon^{ibc}\,\mathrm{d}S^{(2)}S_i$. Při úpravách Stokesovy věty budeme využívat vztahu $\varepsilon_{akl}\varepsilon^{bkl} = 2\delta_a^b$. Pak

$$\oint\limits_{\partial\Sigma} \mathbf{T}\cdot\,\mathrm{d}^{(\mathbf{2})}\mathbf{S} = \oint\limits_{\partial\Sigma} T^i\,\mathrm{d}^{(2)}S_i$$

$$= \oint\limits_{\partial\Sigma} \frac{1}{2}\varepsilon_{sbc} T^s \varepsilon^{ibc}\,\mathrm{d}^{(2)}S_i$$

$$= \oint\limits_{\partial\Sigma} \frac{1}{2}\varepsilon_{sbc} T^s\,\mathrm{d}\sigma^{bc}$$

$$= \int\limits_{\Sigma} \frac{1}{2}\partial_a(\varepsilon_{sbc}T^s)\,\mathrm{d}\Sigma^{abc}$$

$$= \int\limits_{\Sigma} \frac{1}{2}\varepsilon_{sbc}\partial_a T^s \varepsilon^{abc}\,\mathrm{d}V$$

$$= \int\limits_{\Sigma} \partial_s T^s\,\mathrm{d}V = \int\limits_{\Sigma} \mathrm{div}\mathbf{T}\,\mathrm{d}V.$$

Dostáváme tedy obvyklou Gaussovu větu pro $E_3$.

3. Aplikujme Gaussovu větu v prostoročase. Zavedeme

$$T_{\beta\gamma\delta} = \varepsilon_{\sigma\beta\gamma\delta} T^\sigma.$$

Dále musí být $\mathrm{d}\Omega^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\mathrm{d}^{(4)}\Omega$ ( $\mathrm{d}\Omega^{\alpha\beta\gamma\delta}$ je úplně antisymerické, tedy úměrné $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$). Využijeme-li ještě $\mathrm{d}^{(3)}\Sigma_\alpha = \frac{1}{3!}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\mathrm{d}\Sigma^{\beta\gamma\delta}$, můžeme Stokesovu větu upravovat následujícím způsobem:

$$\oint\limits_{\partial\Omega} T^\sigma 3!\,\mathrm{d}^{(3)}\Sigma_\sigma = \oint\limits_{\partial\Omega} T^\sigma \varepsilon_{\sigma\alpha\beta\gamma}\,\mathrm{d}\Sigma^{\alpha\beta\gamma}$$

$$= \int\limits_{\Omega} \partial_\alpha(\varepsilon_{\sigma\beta\gamma\delta}T^\sigma)[-\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\mathrm{d}^{(4)}\Omega]$$

$$= \int\limits_{\Omega} 6\,\delta^\alpha_\sigma \partial_\alpha T^\sigma\,\mathrm{d}^{(4)}\Omega$$

$$= 6\int\limits_{\Omega} \partial_\sigma T^\sigma\,\mathrm{d}^{(4)}\Omega$$

Gaussova věta má tedy ve 4-dimenzionálním případě tvar analogický 3-dimenzionálnímu případu:

$$\oint\limits_{\partial\Omega} T^\sigma\,\mathrm{d}^{(3)}\Sigma_\sigma = \int\limits_{\Omega} \partial_\sigma T^\sigma\,\mathrm{d}^{(4)}\Omega$$

Zobecnění Stokesových vět na obecně relativistické situace, tj. zakřivené prostoročasy, lze provést poměrně přímočaře, neboť Stokesovy věty jsou nezávislé na tom, zda na varietě existuje metrika.

### 1.2.4 Integrální tvar zákonů zachování energie a hybnosti

V plochém prostoročase platí lokální zákon zachování pro tenzor energie–hybnosti

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

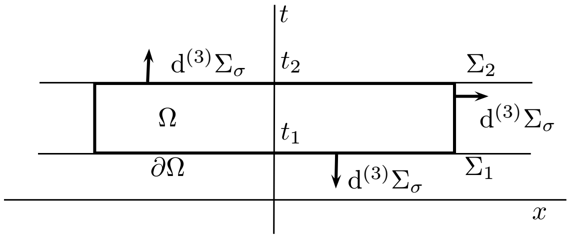
Integrací tohoto zákona přes vhodně zvolenou oblast prostoročasu dostaneme integrální tvar zákona zachování celkové 4-hybnosti izolovaného systému.

Ze 4-dimenzionální Gaussovy věty a diferenciálního zákona zachování vidíme, že

$$\int\limits_{\Omega} T^{\mu\nu}{}_{,\nu}\,\mathrm{d}^{(4)}\Omega = \int\limits_{\partial\Omega} T^{\mu\sigma}\,\mathrm{d}^{(3)}\Sigma_\sigma = 0, \qquad (1.11)$$

kde $\mathrm{d}^{(4)}\Omega$ a $\mathrm{d}^{(3)}\Sigma_\sigma$ jsou elementy 4-dimenzionální oblasti $\Omega$ a její 3-dimenzionální hranice $\partial\Omega$. Uvažujme oblast $\Omega$ omezenou oběma prostorovými nadplochami $\Sigma_1, \Sigma_2$ (jejich normály mají v každém bodě časovou povahu).

[1] $\mathrm{d}^{(2)}S = [1/2(\mathrm{d}\sigma_{ab}\mathrm{d}\sigma^{ab})]^{1/2} = (\mathrm{d}^{(2)}S_i\mathrm{d}^{(2)}S^i)^{1/2}$.




Ve zvoleném inerciálním systému jsou to nadplochy $t = t_1$, $t = t_2$; v nekonečnu jsou spojeny nadplochou časové povahy – "pláštěm válce" s normálou prostorové povahy. Integrace přes nadplochu v nekonečnu nepřispívá k celkovému integrálu v (1.11), pokud $T^{\mu\nu}$ vymizí v nekonečnu dostatečně rychle. Vezmeme-li pak v úvahu změnu znaménka normály k $\Sigma_1$ a $\Sigma_2$, bude

$$P^\mu \Big|_{\Sigma_1} \equiv \int\limits_{\Sigma_1} T^{\mu\sigma}\, \mathrm{d}^{(3)}\Sigma_\sigma = \int\limits_{\Sigma_2} T^{\mu\sigma}\, \mathrm{d}^{(3)}\Sigma_\sigma \equiv P^\mu \Big|_{\Sigma_2},$$

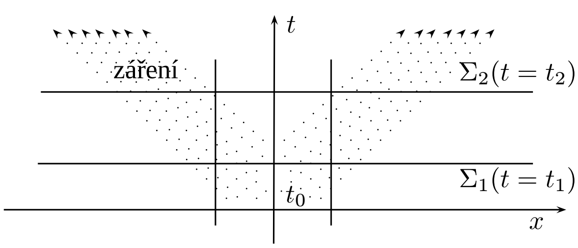
takže celková hybnost v celém prostoru je v čase $t_2$ stejná jako v čase $t_1$. V Lorentzovském systému $L$, v němž $\mathrm{d}\Sigma_\sigma = \mathrm{d}^{(3)}x = \mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3$ je celková 4-hybnost izolovaného systému

$$P^\mu = \int_{t=\text{konst.}} T^{\mu\nu}\, \mathrm{d}^{(3)}x$$

Takto furmulovaný zákon jistě platí pro prostorově omezené systémy, kdy $T^{\mu\nu} \neq 0$ pouze uvnitř světové trubice konečných prostorových řezů, tj. např. pro kapalinu uzavřenou v nádobě (se zahrnutím $T_{\mu\nu}$ materiálu stěn), nebo elektromagnetického pole, jež je od jisté vzdálenosti nulové.

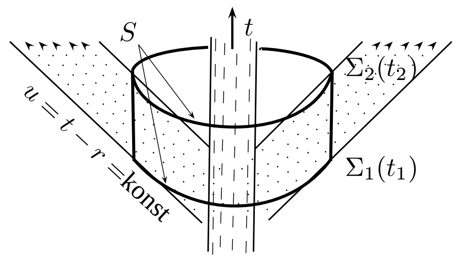
V nestacionárních případech (záření) nebude $T_{\mu\nu}$ klesat k nekonečnu dostatečně rychle, aby integrál přes plášť vymizel. Pro

$$T^{\mu\nu}_{(\mathrm{EM})} \sim \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \qquad E, B \sim 1/r \qquad T^{\mu\nu}_{(\mathrm{EM})} \sim 1/r^2$$




Element nadplochy $\mathrm{d}^{(3)}\Sigma_\sigma \sim r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}t$ a tok $T^{\mu\nu}$ pláštěm nevymizí. Pokud systém začal zářit v čase $t_0 > -\infty$, což je realistický předpoklad, neboť ostrovní izolované systémy zářící nekonečně dlouho by potřebovaly nekonečnou energii, lze vzít plášť vždy tak daleko, aby jím žádné záření neprocházelo (záření se šíří podél světočar $t - r =$ konst.). Chceme-li tedy, aby se 4-hybnost zachovávala i v případě, že systém září, musíme integrovat přes celou nadplochu $t =$ konst., až do $r \to \infty$ – pak zahrneme i všechno záření emitované v čase $t_0$ (vylučujeme dopadající záření z vnějšku). Pak se 4-hybnost zachovává, ale nedostaneme informaci o množství vyzářené energie mezi $t_1$ a $t_2$.

Integrujeme-li přes konečnou oblast nadplochy $t =$ konst., plášť spojující nadplochy $\Sigma_1$ a $\Sigma_2$ je v konečné vzdálenosti od systému a protéká jím hybnost a energie; 4-hybnost v $\Sigma_2$ je zmenšená oproti 4-hybnosti na $\Sigma_1$ a 4-hybností prošlou pláštěm do nekonečna.




Obklopíme ostrovní systém 2-plochou $S$ (kulovou), její historie bude plášť válce v prostoročasu. Pak

$$P^\mu \Big|_{\Sigma_2} - P^\mu \Big|_{\Sigma_1} = -\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \oint\limits_S T^{\mu j}\, \mathrm{d}^{(2)}S_j,$$

kde $\mathrm{d}t\, \mathrm{d}^2 S_j$ jsou prostorové složky elementu pláště (normála je prostorové povahy, časová složka ve zvoleném systému je nulová). Veličina

$$-\frac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}t} = \oint\limits_S T^{\mu j}\, \mathrm{d}^{(2)}S_j$$

bude rychlostí poklesu 4-hybnosti systému. Týž výsledek implikuje i 3-dimenzionální Gaussova věta:

$$\begin{aligned} -\frac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int T^{\mu 0}\, \mathrm{d}^{(3)}x = -\int T^{\mu 0}{}_{,0}\, \mathrm{d}^{(3)}x \\ &= \int T^{\mu j}{}_{,j}\, \mathrm{d}^{(3)}x = \oint_S T^{\mu j}\, \mathrm{d}^{(2)}S_j \end{aligned}$$

V objemových integrálech integrujeme přes vnitřek plochy $S$.

Je-li vzdálenost ostrovního systému nabité nekoherentní hmoty patřičně velká, aby plochou $S$ neprocházela nekoherentní hmota, pak $T^{\mu j} = T^{\mu j}_{(\mathrm{EM})}$. Pak bude tok 4-hybnosti plochou $S$ obsahovat induktivní, nezářivé (reverzibilní) příspěvky těch částí pole, jež do nekonečna klesaní rychleji než $1/r$. Ireverzibilní část 4-hybnosti vyzářenou do nekonečna dostaneme, když „poloměr“ plochy $S$ je $r \to \infty$. Do nekonečna ovšem musíme "putovat se zářením", takže $r \to \infty$ při $u =$ konst., nikoliv $t =$ konst.; $u = t - r$ je retardovaný čas počátku, jemuž jsou v 1.aproximaci rovny retardované časy nábojů tvořících izolovaný systém rozkládající se kolem počátku. Pro kulovou plochu o poloměru $r$ je element plochy s normálou $n^i = x^i/r$ dán vztahem $\mathrm{d}^2 S_{(j)} = n^j r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi = n^j r^2\, \mathrm{d}\Omega$ a celkový výkon elektromagnetického záření procházející touto kulovou plochou bude

$$L_{\mathrm{EM}}(t, r) \equiv -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}P^0}{\mathrm{d}t} = \oint T^{oj}_{\mathrm{EM}} n^j r^2\, \mathrm{d}\Omega.$$

$T^{oj}_{\rm EM} n^j$ je projekce Poyntingova vektoru do jednotkového vektoru v radiálním směru $n^j$, tj. je to radiální složka Poyntingova vektoru $(\mathbf{E} \times \mathbf{B})^r$. Hybnost elektromagnetického pole je vyzařována rychlostí

$$-\frac{\mathrm{d}P^i}{\mathrm{d}t} = \oint T^{ij}_{\rm EM} n^j r^2 \,\mathrm{d}\Omega.$$

V obou integrálech integrujeme přes úhlové souřadnice $\theta, \varphi$ v obvyklých mezích, přičemž $r \to \infty$ při pevném $u$. Limita $r \to \infty$ odpovídá tomu, že nezářivé členy $(\sim 1/r^2)$ lze zanedbat vůči zářivým $(\sim 1/r)$. Kulová plocha tedy leží ve "vlnové zóně".

Důležitá je skutečnost, že celková 4-hybnost izolovaného systému je transformována při Lorentzově transformaci jako 4-vektor. Při výpočtu $P^\mu$ lze integrovat přes libovolnou prostorovou nadplochu (nemusí být ani nadrovinou) aniž se hodnoty $P^\mu$ změní, pokud $T^{\mu\nu}$ dostatečně rychle vymizí v nekonečnu. Zvolme kromě nadplochy $\Sigma$ ($t =$ konst. v inerciálním systému $L$) nadplochu $\Sigma'$ ($t' =$ konst. v inerciálním systému $L'$). Pak je $P^\mu \Big|_{\Sigma'} = P^\mu \Big|_{\Sigma}$. Ovšem $P^\mu \Big|_{\Sigma'}$ nejsou složky celkové 4-hybnosti v $L'$. Z kovariantního tvaru pro celkovou 4-hybnost plyne $P'^\mu \Big|_{\Sigma'} = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu \Big|_{\Sigma'}$, kde se na obou stranách integruje přes tutéž nadplochu $\Sigma'$. Důsledkem nezávislosti $P_\nu$ na $\Sigma$ máme

$$P'^\mu \Big|_{\Sigma'} = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu \Big|_{\Sigma}$$

Celková 4-hybnost tedy má charakter 4-vektoru, je-li definována v každém inerciálním systému jako integrál přes příslušnou nadplochu současnosti v příslušném inerciálním systému. Inerciální pozorovatelé měří stejný vektor celkové 4-hybnosti, kterému odpovídají různé složky v různých systémech.

### 1.2.5 Integrace v křivém prostoročase

Formalismus použitý pro integrace v inerciálních systémech lze bezprostředně modifikovat na integraci v křivých prostoročasech. V LIS jsou objemové elementy dány speciálně-relativistickým způsobem. Chceme-li integrovat přes konečnou oblast, kde LIS není použitelný s dostatečnou přesností, musíme přejít k obecným souřadnicím. Pak místo $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ používáme pseudotenzory (jež považujeme za tenzory, neboť prostorové inverze nebudeme uvažovat):

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta\gamma\delta} &= (-g)^{\frac{1}{2}} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} e^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= (-g)^{-\frac{1}{2}} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = 3 - (-g)^{-\frac{1}{2}} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}. \end{aligned}$$

Elementy 2-rozměrné plochy, 3-rozměrné nadplochy a 4-rozměrné oblasti, tj. antisymetrické veličiny $\mathrm{d}\sigma^{\alpha\beta}$, $\mathrm{d}\Sigma^{\alpha\beta\gamma}$, $\mathrm{d}\Omega^{\alpha\beta\gamma\delta}$ zavedeme opět pomocí determinantů jako ve speciálně relativistických situacích. Složky vetorů tvořících tyto elementy, nemají zde „metrický" výraz. (Např. pro $\mathrm{d}x^\alpha = (0, \mathrm{d}x, 0, 0)$ není $\mathrm{d}x$ rovno délce elementu $\mathrm{d}x^\alpha$.) Duální veličiny $\mathrm{d}\sigma^*_{\alpha\beta}$, $\mathrm{d}^{(3)}\Sigma_\alpha$, $\mathrm{d}^{(4)}\Omega$ definujeme pomocí Levi-Civitova tenzoru $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ (nikoli permutačního $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$). U duálních veličin se objeví faktor $(-g)^{\frac{1}{2}}$. Invariantí obsahy těchto elementů definujeme speciálně-relativistickým způsobem. Přepokládame-li, že vektory tvořící elemnt 4-oblasti jsou vybrány podél sousouřadných čar,tj. $\mathrm{d}t^\alpha = (\mathrm{d}t, 0, 0, 0)$, $\mathrm{d}x^\alpha = (0, \mathrm{d}x, 0, 0)$, $\mathrm{d}y^\alpha = (0, 0, \mathrm{d}y, 0)$, $\mathrm{d}z^\alpha = (0, 0, 0, \mathrm{d}z)$, pak bude při standartní orientaci

$$\mathrm{d}^{(4)}\Omega = \frac{1}{4!} e_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathrm{d}\Omega^{\alpha\beta\gamma\delta} = (-g)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Uvažujeme-li v prostorové nadploše $t = konst.$ 3-rozměrný elemnt tvořen vektory $\mathrm{d}x^\alpha = (0, \mathrm{d}x^i)$, $\mathrm{d}y^\alpha = (0, \mathrm{d}y^i)$, $\mathrm{d}z^\alpha = (0, \mathrm{d}z^i)$, pak invariantní velikost 3-objemu elementu je

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V &= (|\mathrm{d}^{(3)}\Sigma_\alpha \mathrm{d}^{(3)}\Sigma^\alpha|)^{\frac{1}{2}} \\ &= (|\frac{1}{3!} e_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathrm{d}\Sigma^{\beta\gamma\delta} \frac{1}{3!} e^\alpha_{\kappa\lambda\mu} \mathrm{d}\Sigma^{\kappa\lambda\mu}|)^{\frac{1}{2}} \\ &= (|e_{0ijk} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}y^j \mathrm{d}z^k e^0_{klm} \mathrm{d}x^k \mathrm{d}y^l \mathrm{d}z^m|)^{\frac{1}{2}} \\ &= (|(-g)^{\frac{1}{2}} \epsilon_{ijk} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}y^j \mathrm{d}z^k g^{00} (-g)^{\frac{1}{2}} \epsilon_{klm} \mathrm{d}x^k \mathrm{d}y^l \mathrm{d}z^m|)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\gamma^{\frac{1}{2}} \epsilon_{ijk} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}y^j \mathrm{d}z^k| = |e_{ijk} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}y^j \mathrm{d}z^k|, \end{aligned}$$

k $\gamma \equiv g \cdot g^{00}$; zavedli jsme tzv. prostorovou metriku $\gamma_{ik} = g_{ik} + \gamma_i \gamma_k$, kde $\gamma_i = g_{0i}/(-g_{00})$. Prostorová metrika určuje prostorovou geometrii na nadplochách $t = \mathrm{konst.}$ Lze ukázat, že je $\gamma = \det|\gamma_{\rm ik}| = gg^{00}$. Vztah $e_{ijk} = \gamma^{1/2} \epsilon_{ijk}$ odpovídá vztahu $e_{\alpha\beta\gamma\delta} = (-g)^{1/2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$, měříme vzdálenost na ploše konstantního času.

Stokesovy věty v Minkovského prostoročasu mají tvar nezávislý explicitně na metrice, takže v identickém tvaru platí v libovolných souřadnicích v křivém prostoročase. Zapíšeme je v obecném tvaru pro s-rozměrnou oblast $\omega_s$ s hranicí $\partial\omega_s$:

$$\oint_{\partial\omega_s} T_{\alpha_1 \ldots \alpha_{s-1}} \omega^{\alpha_1 \ldots \alpha_{s-1}} = \int_{\omega_s} \partial_{\alpha_s} T_{\alpha_1 \ldots \alpha_{s-1}} \mathrm{d}\omega^{\alpha_1 \ldots \alpha_s}.$$

Takto zapsaná Stokesoav věta má tentýž tvar v libovolných souřadnicích, ač vpravo nevystupují kovariantní, nýbrž parciální derivace. Je totiž $\mathrm{d}\omega^{\alpha_1 \cdots \alpha_s}$ úplně antisymetrická ve všech indexech, takže i v $T_{\alpha_1} \ldots \alpha_{s-1}$, dolní index $\alpha_s$ stačí uvažovat úplně antisymetrickou část. Pro ni však platí

$$T_{[\alpha_1 \ldots \alpha_{s-1}, \alpha_s]} = T_{[\alpha_1 \ldots \alpha_{s-1}; \alpha_s]},$$

v čemž se lze přesvědčit přímým výpočtem. Gaussovou větu pro 4-rozměrnou oblast dostaneme pro $s = 4$, položíme-li

$$T_{\beta\gamma\delta} = e_{\sigma\beta\gamma\delta} T^\sigma.$$

V analogii se speciálně přímým výpočtem můžeme psát

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} T^\sigma 3! \mathrm{d}^{(3)}\Sigma_\sigma &= \int_\Omega \partial_\alpha (e_{\sigma\beta\gamma\delta} T^\sigma)[-e^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathrm{d}^{(4)}\Omega] \\ &= \int_\Omega 6\, \partial_\sigma (\sqrt{-g}\, T^\sigma) \frac{1}{\sqrt{-g}} \,\mathrm{d}^{(4)}\Omega, \end{aligned}$$

kde $\mathrm{d}^{(4)}\Omega = \frac{1}{4!} e_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathrm{d}\Omega^{\alpha\beta\gamma\delta}, \mathrm{d}^{(3)}\Sigma_\sigma = \frac{1}{3!} e_{\sigma\beta\gamma\delta} \mathrm{d}\Sigma^{\beta\gamma\delta}$ jsou kovariantní elementy, jež jsou prostřednictvím

$e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ obsahují metriku. Použijeme-li vztah $A^{\mu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}A^{\mu}\right)_{,\mu}$, můžeme napsat Gaussovu ve zjevně invariantním tvaru

$$\oint_{\partial\Omega} T^{\sigma}\mathrm{d}^{(3)}\Sigma_{\sigma} = \int_{\Omega} T^{\sigma}{}_{;\sigma}\mathrm{d}^{(4)}\Omega.$$

vektorovou hustotu (váhy 1, což již dále nebudeme uvádět)

$$\mathcal{T}^{\sigma} = (-g)^{-1/2}T^{\sigma}$$

a zaveďme označení

$$\mathrm{d}^{(3)}S_{\sigma} = (-g)^{-1/2}\mathrm{d}^{(3)}\Sigma_{\sigma} = \frac{1}{3!}\epsilon_{\sigma\beta\gamma\delta}\mathrm{d}\Sigma^{\beta\gamma\delta},$$
$$\mathrm{d}^{(4)}x = (-g)^{-1/2}\mathrm{d}^{(4)}\Omega = \frac{1}{4!}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\mathrm{d}\Omega^{\alpha\beta\gamma\delta},$$

takže $\mathrm{d}^{(3)}S_{\sigma}$ a $\mathrm{d}^{(4)}x$ jsou hustotami váhy $-1$, neobsahují metriku a tvarem jsou shodné se speciálně relativistickými výrazy. Většinou bude $\mathrm{d}^{(3)}S_{\sigma}$ element nadplochy $t =$konst., přičemž vektory tvořící element lze směřovat podél souřadných čar, spolu s vektory tvořícími $\mathrm{d}^{(4)}\Omega$. Pak bude

$$\mathrm{d}^{(3)}S_i = 0, \qquad \mathrm{d}^{(3)}S_0 = \mathrm{d}^{(3)}x = \mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$$
$$\mathrm{d}^{(4)}x = \mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$$

a Gaussova věta pro vektorovou hustotu má rovněž invariantní tvar

$$\oint_{\partial\Omega} \mathcal{T}^{\sigma}\mathrm{d}^{(3)}S_{\sigma} = \int_{\Omega} \mathcal{T}^{\sigma}{}_{,\sigma}\mathrm{d}^{(4)}x,$$

přičemž v ní nikde nevystupuje metrika.

V rámci STR (např. při odvození integrálních zákonů zachování) lze Gaussovu větu použít pro tenzorové pole 2.řádu, přestože byla odvozena z invariantní Stokesovy věty jen pro vektorová pole. To je možné proto, že Lorentzovy souřadnice vztahu

$$\int_{\partial\Omega} T^{\alpha\sigma}\mathrm{d}^{(3)}\Sigma_{\sigma} = \int_{\Omega} T^{\alpha\sigma}{}_{,\sigma}\mathrm{d}^{(4)}\Omega$$

lze $\alpha$ chápat jako volný index, tj. brát Gaussovu větu pro každé $\alpha$ zvlášť. Při transformaci od jednoho Lorentzova systému k druhému se oba integrály v Gaussově větě transformují jako vektory, protože integranty jsou vektory a konstantní koeficienty $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}$ Lorentzovy transformace lze vysunot před integrační symbol.

V křivém prosotročase by pro tenzorová pole měla mít Gaussova věta tvar

$$\int_{\partial\Omega} T^{\alpha\sigma}\mathrm{d}^{(3)}\Sigma_{\sigma} = \int_{\Omega} T^{\alpha\sigma}{}_{;\sigma}\mathrm{d}^{(4)}\Omega;$$

$\alpha$ již ovšem není volný index, neboť $T^{\alpha\sigma}_{;\sigma}$ obsahuje obecně všechny složky $T^{\alpha\sigma}$, dále integrály vystupující v Gaussově větě se při nelineárních obecných transformacích netransformují jako vektory, protože $\partial x'/\partial x$ nelze vysunout před integrál. Chceme-li dostat kovariantní výsledek, můžeme v křivém prostoročase sčítat v různých bodech (tj. integrovat) pouze skaláry - nelze sčítat vektory a tenzory umístěné v různých bodech.

Hledejme motivaci ve formálnějším důkazu Gaussovy věty pro tenzorové pole v rámci speciální relativity. Uvažujme vektorové pole $n_{\alpha}$, libovolné, ale konstantní v celé oblasti $\Omega$, tj. $n_{\alpha,\beta} = 0$. Pak Gaussova věta pro vektorové pole $T^{\sigma} = n_{\alpha}T^{\alpha\sigma}$ může být zapsána ve tvaru

$$n_{\alpha}\oint_{\partial\Omega} T^{\alpha\sigma}\mathrm{d}^{(3)}\Sigma_{\sigma} = n_{\alpha}\int_{\Omega} T^{\alpha\sigma}{}_{,\sigma}\mathrm{d}^{(4)}\Omega.$$

V plochém prostoročase lze zvolit čtyři libovolná nezávislá konstantní vektorová pole - např. vektory baze, implikuje předchozí vztah Gaussovu větu pro tenzorová pole. Analogicky lze Gaussovu větu zobecnit na tenzorová pole libovoného stupně.

V křivém prostoročasu bychom při analogickém postupu dostali na pravé straně $\int_{\Omega}\left(n_{\alpha}T^{\alpha\sigma}\right)_{;\sigma}\mathrm{d}^{(4)}\Omega$, takže při libovoném $T^{\alpha\sigma}$ by muselo být $n_{\alpha;\sigma} = 0$ v celém $\Omega$, tj. $n_{\alpha,\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\sigma}n_{\rho} = 0$. Jelikož $n_{\alpha} =$konst., v celém $\Omega$ musí být $\Gamma^{\rho}_{\alpha\sigma} = 0$ a prostoročas musí být plochý. Pro symetrické $T^{\alpha\sigma}$ stačí, aby $n_{\alpha}$ splňovalo Killingovu rovnici $n_{\alpha;\sigma} + n_{\sigma;\alpha} = 0$, protože v tomto případě

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\left(n_{\alpha}T^{\alpha\sigma}\right)_{;\sigma}\mathrm{d}^{(4)}\Omega &= \int_{\Omega}\frac{1}{2}\left(n_{\alpha;\sigma} + n_{\sigma;\alpha}\right)T^{\alpha\sigma}\mathrm{d}^{(4)}\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} n_{\alpha}T^{\alpha\sigma}{}_{;\sigma}\mathrm{d}^{(4)}\Omega \\ &= \int_{\Omega} n_{\alpha}T^{\alpha\sigma}{}_{;\sigma}\mathrm{d}^{(4)}\Omega.\end{aligned}$$

Má-li Killingova rovnice platit pro $n_{\alpha} =$konst., musí být $\Gamma^{\rho}_{\alpha\sigma} = 0$ v celém $\Omega$. Pouze pro antisymetrické $F^{\alpha\sigma}$ platí

$$F^{\alpha\sigma}{}_{;\sigma} = (-g)^{1/2}\left[(-g)^{1/2}F^{\alpha\sigma}\right]_{,\sigma},$$

takže výše uvedenou rovnici lze po zavedení tenzorové hustoty $\mathcal{T}^{\alpha\sigma} = (-g)^{1/2}F^{\alpha\sigma}$ přepsat jako

$$\oint_{\partial\Omega} \mathcal{T}^{\alpha\sigma}\mathrm{d}^{(3)}S_{\sigma} = \int_{\Omega} \mathcal{T}^{\alpha\sigma}{}_{,\sigma}\mathrm{d}^{(4)}x. \qquad (1.12)$$

Dostáváme tak Gaussovu větu v klasickém provedení, v níž vystupují parciální (ne kovariantní) derivace. Při jejím důkazu nehrají roli transformační vlastnosti funkcí, jež se v ní vyskytují (integrace perpartes a úpravy při nichž není důležité, zda se veličiny chovají jako tenzory). Výše uvedené integrály nejsou vektory, při obecných sořadnicových transformacích. V křivém prostoročase má invariantní tvar jen Gaussova věta pro vektorové pole, kdy jsou oba integrály skaláry.

Rovnice (1.12) platí ve všech souřadných systémech, jsou-li $\mathcal{T}^{\alpha\sigma}$ známé funkce souřadnic ve všech systémech. Může ovšem být $\mathcal{T}^{\alpha\sigma}$ dáno jen v jednom souřadném systému, takže (1.12) v jiných systémech neplatí.

Pro antisymetrické $F_{\alpha\beta}$ lze invariantním způsobem formulovat Gaussovu větu převádějící integrál přes 2-dimensionální hranici $\partial\Sigma$ na integrál z kovariantní derivace přes 3-dimenzionální oblast $\Sigma$. Ve Stokesově větě (s=3) vezmeme místo $F_{\alpha\beta}$ duální tenzor

$$F^*_{\alpha\beta} = \frac{1}{2!} e_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\gamma\delta} = \frac{1}{2!} (-g)^{1/2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\gamma\delta},$$

takže dostáváme

$$\oint_{\partial\Sigma} F^*_{\alpha\beta} \mathrm{d}\sigma^{\alpha\beta} = \int_\Sigma \partial_\alpha F^*_{\beta\gamma} \mathrm{d}\Sigma^{\alpha\beta\gamma}.$$

Použijeme úpravy:

$$F^*_{\alpha\beta} \mathrm{d}\sigma^{\alpha\beta} = F^*_{\mu\nu} \left( -\frac{1}{2} e^{\mu\nu\alpha\beta} \right) \mathrm{d}\sigma^*_{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta} \mathrm{d}\sigma^*_{\alpha\beta},$$

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha F^*_{\beta\gamma} \mathrm{d}\Sigma^{\alpha\beta\gamma} &= \partial_\alpha \left( \frac{1}{2!} e_{\beta\gamma\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) \mathrm{d}\Sigma^{\alpha\beta\gamma} \\
&= \frac{1}{2!} \partial_\alpha \left[ (-g)^{1/2} \epsilon_{\beta\gamma\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right] \mathrm{d}\Sigma^{\alpha\beta\gamma} \\
&= \frac{1}{2!} (-g)^{-1/2} \partial_\alpha \left[ (-g)^{1/2} F^{\rho\sigma} \right] e_{\beta\gamma\rho\sigma} \mathrm{d}\Sigma^{\alpha\beta\gamma} \\
&= \frac{1}{2!} (-g)^{-1/2} \partial_\alpha \left[ (-g)^{1/2} F^{\rho\sigma} \right] \\
&\quad \times 2 \left( \delta^\tau_\rho \delta^\alpha_\sigma - \delta^\tau_\rho \delta^\alpha_\rho \right) \mathrm{d}^{(3)}\Sigma_\tau \\
&= 2 (-g)^{-1/2} \partial_\alpha \left[ (-g)^{-1/2} F^{\tau\alpha} \right] \mathrm{d}^{(3)}\Sigma_\tau \\
&= 2 F^{\tau\alpha}{}_{;\alpha} \mathrm{d}^{(3)}\Sigma_\tau.
\end{aligned}$$

Stokesova věta tedy dává Gaussovu větu v jasně invariantním tvaru

$$\oint_{\partial\Sigma} F^{\alpha\beta} \mathrm{d}\sigma^*_{\alpha\beta} = \int_\Sigma 2 F^{\tau\alpha}{}_{;\alpha} \mathrm{d}^{(3)}\Sigma_\tau.$$

Tato „matematická“ Gaussova věta formuluje „fyzikální “ Gaussouvu větu Maxwellovy teorie způsobem nezávislým na souřadnicích: je-li $F^{\alpha\beta}$ tenzor elektromagnetického pole, $F^{\tau\alpha}{}_{;\alpha} \sim J^\tau$ (čtyřproud) a $\Sigma$ prostorovou nadplochou. Levá strana této rovnice umožňuje invariantním způsobem definovat toky elektrického a magnetického pole plochami v křivých prostoročasech (např. horizonty černých děr). Gaussovu větu (fyzikální) lze přepsat do standardního tvaru, dle nejž je tok elektrického pole uzavřen plochou rovnou celkovému náboji.

„Elektromagnetickou“ Gaussovu větu lze přepsat pomcí příslušné tenzorové hustoty

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathcal{F}^{\alpha\beta} \mathrm{d}^{(2)} S^*_{\alpha\beta} = 2 \int_\Sigma \mathcal{F}^{\tau\alpha}{}_{,\alpha} \mathrm{d}^{(3)} S_\tau,$$

kde

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\alpha\beta} &= (-g)^{1/2} F^{\alpha\beta}, \\
\mathrm{d}^{(2)} S^*_\alpha &= (-g)^{-1/2} \mathrm{d}\sigma^*_{\alpha\beta} = \frac{1}{2!} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathrm{d}\sigma^{\gamma\delta},
\end{aligned}$$

jež neobsahují metriku a jsou formálně shodné s veličinami z STR.

Důkaz Gaussovy věty nevyžaduje, aby v integrandech vystupovaly tenzorové veličiny, takže pro libovolnou skupinu funkcí $W^{\mu\nu}(x^\alpha)$ platí

$$\int_\Omega W^{\mu\nu}{}_{,\nu} \mathrm{d}^{(4)} x = \int_{\partial\Omega} W^{\mu\sigma} \mathrm{d}^{(3)} S_\sigma,$$

kde $\mathrm{d}^{(4)}x$ a $\mathrm{d}^{(3)}S_\sigma$ nezávisí na metrice. Podobně lze použít Gaussovu větu pro funkce s větším počtem indexů, např. 3. Platí-li $U^{\mu\nu\lambda} = -U^{\mu\lambda\nu}$, pak

$$\int_\Sigma U^{\mu\nu\lambda}{}_{,\lambda} \mathrm{d}^{(3)} S_\nu = \frac{1}{2} \oint_{\partial\Sigma} U^{\mu\nu\lambda} \mathrm{d}^{(2)} S^*_{\nu\lambda}.$$

V těchto výrazech vystupují jen parciální derivace, v elementech $\mathrm{d}^{(4)}x, \mathrm{d}^3 S, \mathrm{d}^{(2)} S^*_{\nu\lambda}$ není metrika a důkazy neobsahují transformace integrandů. Žádný z integrálů ovšem není obecně vektorem - i kdyby $W^{\mu\nu}$ a $U^{\mu\nu\lambda}$ byly vektorovými hustotami, takže integrandy by byly vektory. Pouze v plochém prostoročasu jsou integrály vektory vůči Lorentzovým transformacím, nikoliv však vůči obecným transformacím souřadnic.

Při výpočtech integrálů je opět nutno hlídat orientaci vektorů tvořících objemové elementy, orientace v integrálech vlevo je třeba mít v souladu s orientací v integrálech vpravo. Gaussovy věty je možno přepsat pomocí vektoru normály $N_\rho$ k hranici $\partial\Omega$, definovan0ho vztahem

$$\mathrm{d}^{(3)}\Sigma_\rho = \epsilon(N) N_\rho \mathrm{d}V;$$

$\mathrm{d}V$ je invariantní, pozitivně definitní objem definovaný vztahem $\mathrm{d}V = |\mathrm{d}\Sigma_\alpha \mathrm{d}\Sigma^\alpha|$. ($\mathrm{d}^{(3)}\Sigma^\rho = y^{\rho\lambda} \mathrm{d}^{(3)}\Sigma_\lambda$)

$$\text{Indikátor} \quad \epsilon(N) = \begin{cases} -1 & \text{pro } N_\rho \text{ časové povahy} \\ +1 & \text{pro } N_\rho \text{ prostorové povahy} \end{cases}$$

Pro nadplochu $t =$konst. existuje v každém světobodu LIS, v němž $\mathrm{d}^{(3)}\Sigma_\rho = \left( \mathrm{d}^{(3)}\Sigma_0, 0, 0, 0 \right), \mathrm{d}^{(3)}\Sigma_0 = -N_0 \mathrm{d}V = \mathrm{d}V$, když $N^0 = +1, N_0 = -1$ a normála míří do budoucnosti a $\mathrm{d}^{(3)}\Sigma_0 = -N_0 \mathrm{d}V = -\mathrm{d}V$, když $N^0 = -1, N_0 = +1$ a normála míří do minulosti. Gaussovy věty pak platí ve výše uvedeném tvaru, když $N^\rho$ míří stále ven z oblasti $\Omega$.

Diskutujme zákon zachování v integrálním případě, plynoucí z Gaussovy věty pro vektorové pole $T^\sigma(x^\iota)$ splňující podmínku

$$T^\sigma{}_{;\sigma} = 0.$$

Pak z Gaussovy věty plyne

$$\oint_{\partial\Omega} T^\sigma \mathrm{d}^{(3)}\Sigma_\sigma = 0.$$

!!! Tady bude obrazek !!!

Podobně speciálně relativistické situaci vybereme oblast $\Omega$ vymezenou prostorovými nadplochami $\Sigma_1, \Sigma_2$ a „pláštěm válce“. Předpokládejme, že pole $T^\sigma(x^\iota)$ na plášti válce vymizí, tj. buď je nenulové v konečné oblasti, nebo ubývá tak rychle, že pro plášť limtně posunutý do nekonečna integrál vymizí. Pak platí

$$\int_{\Sigma_1} T^\sigma \mathrm{d}\Sigma_\sigma + \int_{\Sigma_2} T^\sigma \mathrm{d}\Sigma_\sigma = 0$$

a vzhledem k opačné orientaci normál na $\Sigma_1$ a $\Sigma_2$, dostáváme

$$\int_\Sigma T^\mu \mathrm{d}\Sigma_\mu = \text{konst}$$

a v souřadném systému, v němž $\Sigma$ jsou nadplochy $t =$konst zjistíme, že

$$\int_{t=\text{konst}} T^0 (-g)^{1/2} \mathrm{d}^{(3)}x = \text{konst}$$

takže takový integrál nezávisí na čase $t$, je to zachovávající se skalár. Analogické zákony zachování dostaneme, pokud platí

$$W^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0.$$

Pak

$$\int_\Sigma W^{\mu\sigma} \mathrm{d}^{(3)} S_\sigma = \text{konst}$$

a v souřadném systému, v němž je $\Sigma$ dáno relací $t =$konst. bude

$$\int_{t=\text{konst}} W^{\mu 0} \mathrm{d}^{(3)}x = \text{konst.}$$

V tomto případě ovšem zachovávající se integrály nejsou 4-vektory při obecných transformacích souřadnic.

## 1.3 Tenzor momentu hybnosti a spin

Uvažujme Lorentzův souřadný systém. **Volná částice** má konstantní 4-hybnost $P^\mu$. Přirozeným speciálně relativistickým zobecněním klasického momentu hybnosti je tenzor

$$L^{\mu\nu} = (x^\mu - a^\mu)P^\nu - (x^\nu - a^\nu)P^\mu$$

vztažený k bodu prostoročasu $a^\mu$. Tento tenzor se při pohybu zachovává, jak zjistíme derivováním podle vlastního času.

**Soustava částic**. Suma tenzorů přes jednotkové částice se nezachovává, jestliže částice interagují (předpoklady důkazu II. věty impulzové neplatí, neboť síly obecně nejsou centrální, ani nejsou určeny polohami částic v konkrétním čase v důsledku retardace). Do momentu hybnosti je nutno zahrnout i příspěvky polí zprostředkujících interakce. Vyjdeme proto z tenzoru energie-hybnosti. Zavádíme tenzor momentu hybnosti

$$M^{\lambda\mu\nu} = (x^\lambda - a^\lambda)T^{\mu\nu} - (x^\mu - a^\mu)T^{\lambda\nu}$$

$T^{\mu\nu}$ je tenzor energie-hybnosti izolovaného systému splňující zákon zachování $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$. Je-li $T^{\mu\nu}$ symetrický tenzor, platí

$$M^{\lambda\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$$

Pro izolované systémy látky a polí lze vždy zkonstruovat symetrický tenzor energie-hybnosti (např. pro elektromagnetické pole či dokonalou kapalinu). Symetrický tenzor energie-hybnosti lze získat přímo z Lagranigiánu, když jej přepíšeme do obecně kovariantního tvaru a provedeme variaci metrického tenzoru indukovanou obecnou infinitezimální transformací souřadnic.

Z diferenciálního zákona zachování lze odvodit integrální zákony zachování jako v případě hybnosti. Z Gaussovy věty

$$\int_\Omega M^{\lambda\mu\nu}{}_{,\nu}\, \mathrm{d}^{(4)}\Omega = \int_{\partial\Omega} M^{\lambda\mu\sigma}\, \mathrm{d}^{(3)}\Sigma_\sigma = 0$$

Integrály $J^{\mu\nu} = M^{\lambda\mu\sigma}\, \mathrm{d}^{(3)}\Sigma_\sigma$ přes prostorovou nadplochu $\Sigma$ se zachovávají. Je-li $\Sigma$ nadplochou současnosti $t =$kon.,

$$\begin{aligned} J^{\mu\nu} &= \int_{t=\text{kon.}} M^{\mu\nu 0}\, \mathrm{d}^{(3)}x \\ &= \int_{t=\text{kon.}} [(x^\mu - a^\mu)T^{\nu 0} - (x^\nu - a^\nu)T^{\mu 0}]\, \mathrm{d}^{(3)}x \end{aligned}$$

a jelikož $T^{m0}$ je m-tá složka hustoty hybnosti, připomíná integrál s $\mu, \nu \neq 0$ klasický moment hybnosti.

Jelikož $M^{\lambda\mu\nu} = -M^{\mu\lambda\nu}$, je také $J^{\lambda\mu} = -J^{\mu\lambda}$, takže $J^{mn}$ má právě tři nezávislé prostorové složky, jež popisují celkový moment hybnosti izolovaného systému v čase $t =$kon., vztažený k bodu $a^\mu$. Další tři složky $J^{0m} = -J^{m0}$ dané vztahy

$$\begin{aligned} J^{0m} &= (t - a^0) \int_{t=\text{kon.}} T^{m0}\, \mathrm{d}^{(3)}x - \int (x^m - a^m) T^{00}\, \mathrm{d}^{(3)}x \\ &= (t - a^0)P^m - \int_{t=\text{kon.}} x^m T^{00}\, \mathrm{d}^{(3)}x + a^m P^0, \end{aligned}$$

nemají bezprostřední fyzikální význam. Souvisejí ovšem s pohybem hmotného středu systému. Definujemi-li prostorové souřadnice hmotného středu

$$x_s^m = \frac{\int x^m T^{00}\,\mathrm{d}^{(3)}x}{P^0},$$

dostáváme

$$x_s^m = \frac{P^m}{P^0}(t - a^0) + a^m - \frac{J^{0m}}{P^0},$$

tj. rovnici rovnoměrného přímočarého pohybu hmotného středu s 3-rychlostí

$$\frac{\mathrm{d}x_s^m}{\mathrm{d}t} = \frac{P^m}{P^0},$$

která odpovídá 4-rychlosti (M je celková klidová hmotnost systému)

$$U^\mu = \frac{P^\mu}{(-P_\sigma P^\sigma)^{1/2}} = \frac{P^\mu}{M}.$$

Všechny uváděné vztahy platí v libovolném inerciálním systému. Jeden z nich je ovšem privilegovaný: jde o klidový systém $L^0$, jenž se pohybuje 4-rychlostí $U^\mu$, takže v něm platí

$$P^0_{(0)} = M, \qquad P^i_{(0)} = 0$$

Zavedeme nyní vlastní hmotný střed vztahem

$$x^m_{(0)\mathrm{vs}} = \frac{1}{M} \int\limits_{t_{(0)}=\mathrm{kon.}} x^m_{(0)} T^{00}_{(0)}\,\mathrm{d}^{(3)}x_{(0)}$$

Uvidíme, že poloha hmotného středu závisí na inerciálním systému, vůči němuž je hmotný střed definován. Všechny hmotné středy se pohybují 4-rychlostí $U^\mu$, takže jsou v klidu vůči $L^0$ i vůči vlastnímu hmotnému středu.

### 1.3.1 Spinový (vnitřní) moment hybnosti $S^{\mu\nu}$

.

Je to moment hybnosti vůči (jakékoliv) události ležící na světočáře vlastního hmotného středu. V $L^0$ bude mít taková událost souřadnice $(a^0_{(0)}, x^i_{(0)\mathrm{vs}})$. Spinový moment $J^{\mu\nu}$ značíme $S^{\mu\nu}$. V $L^0$ bude platit $S^{0m}_{(0)} = 0$. Třem nezávislým prostorovým složkám $S^{mn}_{(0)}$ přiřazujeme 4-vektor spinu o složkách

$$S_{(0)0} = 0, \quad S_{(0)1} = S^{23}_{(0)}, \quad S_{(0)2} = S^{31}_{(0)}, \quad S_{(0)3} = S^{12}_{(0)}$$

V obecném inercilním systému $L$ má 4-vektor spinu složky

$$S_\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} S^{\nu\kappa} U^\lambda$$

Protože jde o tenzorovou rovnici, stačí ji dokázat v jednom souřadnicovém systému, např $L^0$, kde je $U^\lambda_{(0)} = (1,0,0,0)$ a $S^{\mu\nu}_{...}$ jsou dány výše.

Přejdeme-li od referenčího bodu $a^\mu$ k novému bodu $\tilde{a}^\mu$ a zavedeme-li označení $b^\mu \equiv \tilde{a}^\mu - a^\mu$, pak změna celkového momentu hybnosti bude

$$J^{\lambda\mu}|_{\tilde{a}} - J^{\lambda\mu}|_a = -b^\lambda P^\mu + b^\mu P^\lambda$$

Leží-li $a^\mu$ na světočáře vlastního hmotného středu, pak $J^{\lambda\mu}|_a \equiv S^{\lambda\mu}$. Nyní je evidentní, že ve vztahu pro 4-vektor spinu lze psát místo $S^{\lambda\mu}$ tenzor $J^{\lambda\mu}$ - moment hybnosti vzhledem k libovolnému bodu, neboť členy vpravo po vynásobení $U^\lambda = P^\lambda/M$ jsou kvadratické v $P$ a vypadnou při úžení s antisymetrickým $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Obecně proto platí

$$S_\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} J^{\nu\kappa} U^\lambda;$$

spin na volbě referenčního bodu nezávisí. Ihned nahlédneme, že 4-vektor spinu je kolmý na 4-rychlost soustavy:

$$S_\mu U^\mu = 0$$

Leží-li $a^\mu$ na světočáře vlastního hmotného středu, $\tilde{a}^\mu$ je libovolné, dostáváme rozklad

$$J^{\lambda\mu} = S^{\lambda\mu} + L^{\lambda\mu}$$

Celkový moment hybnosti vůči obecnému $\tilde{a}^\mu$ je složen z vniřního momentu $S^{\lambda\mu}$ a orbitálního momentu

$$L^{\lambda\mu} = -b^\lambda P^\mu + b^\mu P^\lambda = (a^\lambda - \tilde{a}^\lambda)P^\mu - (a^\mu - \tilde{a}^\mu)P^\lambda.$$

$L^{\lambda\mu}$ je moment hmotného bodu s 4-hybností $P^\mu$, umístěného ve vlastním hmotném středu vůči $\tilde{a}^\mu$. Dále platí:

$$\frac{1}{M^2} J^{\lambda\mu} P_\mu = b^\lambda + U^\lambda (U_\mu b^\mu) = b^\lambda_\perp;$$

projekci $b^\mu$ do směru kolmého k $U^\mu$ určíme ze součinu $J^{\lambda\mu}$ a $P^\mu$.

Pro izolovaný systém se 4-vekor spinu zachovává, spolu se 4-vektorem $P^\mu$ a celkovým momentem hybnosti $J^{\lambda\mu}$:

$$\frac{\mathrm{d}S_\mu}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}\frac{\mathrm{d}J^{\nu\kappa}}{\mathrm{d}t}U^\lambda - \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}J^{\nu\kappa}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{P^\lambda}{M}\right) = 0.$$

Je-li systém nestacionární, určíme rychlost ztráty momentu hybnosti vzhledem k počátku souřadnic plochou $S$ ve tvaru

$$-\frac{\mathrm{d}J^{\mu\nu}}{\mathrm{d}t} = \oint\limits_S M^{\mu\nu j}\,\mathrm{d}^{(2)}S_j = \oint\limits_S (x^\mu T^{\nu j} - x^\nu T^{\mu j})\,\mathrm{d}^{(2)}S_j;$$

postup odvození je analogický odvození rychlosti ztráty hybnosti.

Pro ztrátu vnitřního momentu hybnosti (v systému, v němž $P^m = 0$ a počátek leží ve vlastním hmotném středu) budou netriviální složky $(1,2), (2,3), (1,3)$.

Určujeme-li ztrátu momentu hybnosti v důsledku vyzařování, musíme plochu $S$ mít ve vlnové zóně (příklad: binární systém gravitačně září a ztrácí moment hybnosti).

Hmotné středy definované v obecných inerciálních systémech $L$ se liší od vlastního hmotného středu definovaného v $L^0$. Hmotný střed v $L$ je ovšem v klidu vůči $L^0$, protože v $L$ má rovněž 4-rychlost $U^\mu$. Poloha hmotných středů tedy závisí na $L$, vůči nimž jsou definovány, všechny hmotné středy jsou v klidu vůči $L^0$. Určeme vztah mezi polohou vlastního hmotného středu vůči hmotnému středu vzhledem k $L$. Vyjděme ze vztahu pro $J^{om}$. Za událost $a^\mu$ zvolíme libovolnou událost na světočáře vlastního hmotného středu, takže $J^{om}$ je převedeno na $S^{om}$, $a^m$ nahradíme $x^m_{\rm vs}$, což jsou prostorové souřadníce vlastního hmotného středu v systému $L$. Pak v souřadnicích systému $L$ lze psát vztah pro $J^{om}$ ve tvaru

$$(t-a^0)P^m - (x^m_s - x^m_{\rm vs})P^0 - S^{om} = 0.$$

Zavedeme 4-vektor $\Delta x^\mu_s$, jenž má v $L$ složky $(t-a^0, x^m_s - x^m_{\rm vs})$, – spojuje tedy událost na světočáře vlastního hmotného středu s událostí na světočáře hmotného středu vzhledem k $L$. Dále zavedeme 4-vektor $V^\mu$, jenž má v $L$ složky $V^\mu = (1,0,0,0)$, takže v jiném inerciálním systému $\widetilde{L}$ je to 4-rychlost $L$ (počátku) vůči $\widetilde{L}$. Pak můžeme výše uvedený vztah přepsat do kovariantního tvaru

$$(\Delta x^\mu_s P^\nu - \Delta x^\nu_s P^\mu - S^{\mu\nu})V_\mu = 0.$$

Tento vztah platí v libovolném inerciální systému a v $L^0$ se redukuje na jednoduchý 3-dimenzionální vztah

$$\Delta \mathbf{x}_{(0)s} = -\frac{1}{M}(\mathbf{V}_{(0)} \times \mathbf{S}_{(0)}),$$

kde $\mathbf{V}_{(0)} = (V^i_{(0)}/V^0_{(0)})$ je obyčejná rychlost systému $L$ v systému $L_0$. Oba hmotné středy jsou v klidu v $L_0$ a separuje je vektor $\Delta\mathbf{x}_{(0)s}$. Hmotné středy splynou, když fyzikální systém nemá vnitřní moment hybnosti, takže $\mathbf{S} = 0$. Pro $\nu = 0$ dostáváme $\Delta\mathbf{x}_{(0)s} \cdot \mathbf{v} = 0$, což ovšem již plyne z (2.16). V běžných jednotkách je $\Delta\mathbf{x}_{(0)s} \sim 1/c^2$, takže v nerelativistické limitě bude $\Delta\mathbf{x}_{(0)s} \sim 0$.

Z hlediska $L^0$ vytvoří hmotné středy vůči různým $L$ kruhový disk kolmý k $\mathbf{S}$ o poloměru (v běžných jednotkách) $R = |\mathbf{S}|/cM$ se středem ve vlastním hmotném středu. Pro Zemi vychází $R \sim 10\,\mathrm{m}$, pro atomy ovšem může být R srovnatelné s rozměry atomu.

Při daných hodnotách $M$ a $|\mathbf{S}|$ je poloměr fyzikálního sysytému konečných rozměrů $r$ omezen v klidovém systému $L^0$ zdola limitou $r \geq R = |\mathbf{S}|/cM$, pokud je v každém $L$ hustota energie $T^{00} \geq 0$. Pokud by byl rozměr menší, existoval by systém $L$, v němž by se hmotný střed nacházel vně fyzikálního systému a hustota energie by nemohla být pozitivně definitní. Jsou-li dány rozměr $R$ a hmotnost $M$ fyzikálního systému, na velikost spinu dostáváme omezení $|\mathbf{S}| < cRM$.

### 1.3.2 Fermiho a Fermiho–Walkerův přenos

Předpokládejme, že v $L^0$, v němž je v daném okamžiku vlastní hmotný střed fyzikálního systému v klidu, působí na systém síla pouze v tomto středu – nevznikají tedy momenty sil. To je realizovatelné bodovou částicí se spinem, nebo bezsilovým setrvačníkem upevněným ve středu. Pak v $L^0$, kde v daném okamžiku je $U^\lambda_{(0)} = (1,0,0,0)$, platí

$$\frac{\mathrm{d}S^i_{(0)}}{\mathrm{d}t_{(0)}} = 0.$$

Tento vztah lze přepsat pro libovolné $L$ v lorentzovsky invariantním tvaru

$$\frac{\mathrm{d}S^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \mathcal{A}U^\mu;$$

$\tau$ je vlastní čas vlastního hmotného středu. Multiplikativní faktor $\mathcal{A}$ musíme určit. Derivováním podmínky ortogonality $S_\mu U^\mu = 0$ dostaneme

$$S_\kappa \frac{\mathrm{d}U^\kappa}{\mathrm{d}\tau} + \mathcal{A}U_\kappa U^\kappa = 0,$$

takže vzhledem k relacím $U_\alpha U^\alpha = -1$, $m\frac{\mathrm{d}U^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = f^\alpha$ ($f^\alpha$ je 4-síla) lze psát

$$\mathcal{A} = S_\kappa \frac{\mathrm{d}U^\kappa}{\mathrm{d}\tau} = S_\kappa \frac{f^\kappa}{M}$$

a 4-vektor spinu v takovém případě splňuje rovnici

$$\frac{\mathrm{d}S^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = \left(S_\kappa \frac{\mathrm{d}U^\kappa}{\mathrm{d}\tau} U^\alpha\right)$$

Vektor $S^\alpha$ splňující tuto diferenciální rovnici podél světočáry $x^\mu(\tau)$ s tečnými vektory $U^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau$ se podél této světočáry přenáší **Fermiho přenosem.**

Při Fermiho přenosu vektor $S^\alpha$ nekoná žádnou rotaci vůči osám inerciálního systému, v němž je v daném okamžiku v klidu $U^\mu = (1,0,0,0)$. Vektor $S^\alpha$ koná rotaci v (časové) rovině vektorů $U^\mu$ a $\mathrm{d}U^\mu/\mathrm{d}\tau$ , přičemž zůstává ortogonální k $U^\mu$. Např. v rovině $(t,x)$ bude 4-vektor $S^\alpha$ konat rotaci, bude-li

$$\frac{\mathrm{d}S^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = -\Omega^{\alpha\kappa}S_\kappa,$$

kde $\Omega^{\alpha\kappa} = -\Omega^{\kappa\alpha}$ má nenulové složky $\Omega^{tx} = -\Omega^{xt}$; pak $\mathrm{d}S^\alpha$ má nenulové složky $\mathrm{d}S^t, \mathrm{d}S^x$, přičemž složky $S^y, S^z$ se nemění. Samotný $S^\alpha$ v rovině $(t,x)$ ležet nemusí.

Vektor $S^\alpha$ bude konat rotaci v rovině vektorů $U^\iota, A^\iota = \mathrm{d}U^\iota/\mathrm{d}\tau$, pokud $\Omega^{\iota\kappa} = A^\iota U^\kappa - U^\iota A^\kappa$. Pak dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}S^\iota}{\mathrm{d}\tau} = -\Omega^{\iota\kappa}S_\kappa = -A^\iota(U^\kappa S_\kappa) + (S_\kappa A^\kappa)U^\iota$$

a při $S_\kappa U^\kappa = 0$ dostáváme podmínku Fermiho přenosu. Tato podmínka zajišťuje zachování podmínky ortogonality $S_\kappa U^\kappa = 0$ během přenosu:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(S_\kappa U^\kappa) &= \frac{\mathrm{d}S_\kappa}{\mathrm{d}\tau}U^\kappa + S_\kappa \frac{\mathrm{d}U^\kappa}{\mathrm{d}\tau} \\ &= \left(S_\mu \frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right)\underbrace{U_\kappa U^\kappa}_{=-1} + S_\kappa \frac{\mathrm{d}U^\kappa}{\mathrm{d}\tau} = 0\end{aligned}$$

V případě zrychleného pohybu spin zachovává svůj směr a velikost v každém okamžitém klidovém inerciálním systému, avšak vůči pevnému inerciálnímu systému se mění – jde o tzv. *Thomasovu precesi*! Pokud fyzikální systém (částice, setrvačník) není urychlen ($U^\mu =$ konst.), spin se přenáší paralelně!

Fermiho přenos pro libovolný vektor kolmý k $U^\iota$ zachovává jejich ortogonalitu a velikost. Pomocí Fermiho přenosu můžeme zavést lokální referenční systém urychleného pozorovatele. Fyzikálně realizujeme osy tohoto referenčního systému třemi navzájem kolmými setrvačníky, upevněnými ve společném vlastním hmotném středu. Síla triádu setrvačníků urychluje, působí však ve společném vlastním hmotném středu, takže spin každého setrvačníku je fermiovsky přenášen. Vektory spinu označíme jako vektory báze $e^{\alpha}_{(i)},\ i = 1, 2, 3$ čísluje vektory. V daném $\tau = \tau_0$ je normujeme a uvědomíme si, že jsou kolmé k $U^\mu$.

$$\eta_{\lambda\mu} e^{\lambda}_{(i)} e^{\mu}_{(j)} = S_{ij}; \qquad \eta_{\lambda\mu} e^{\lambda}_{(i)} U^\mu = 0$$

Zavedeme-li v $\tau > \tau_0$ podél světočáry $x^\mu(\tau)$ vektory $e^{\nu}_{(i)}(\tau)$ vyhovující rovnici Fermiho přenosu

$$\frac{\mathrm{d}e^{\iota}_{(i)}}{\mathrm{d}\tau} = \left( e_{(i)\kappa} \frac{\mathrm{d}U^\kappa}{\mathrm{d}\tau} \right) U^\iota,$$

máme zajištěno, že $e^{\iota}_{(i)}$ budou s $U^\mu$ v libovolném $\tau$ tvořit ortonormální tetrádu, která splňuje (2.42), přičemž triáda $e^{\iota}_{(i)}$ bude ve výše popsaném smyslu nerotující!

**Fermiho–Walkerův přenos** je zobecněním Fermiho přenosu – na rozdíl od vektorů přenášených kolmo k $U^\mu$ se zavádí pro libovolné vektory. Vektor $W^\mu$ je přenášen Fermiho–Walkerovým způsobem podél světočáry $x^\mu(\tau)$, je-li splněna rovnice

$$\frac{\mathrm{d}W^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \left( W_\kappa \frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau} \right) U^\mu - \left( W_\kappa U^\kappa \right) \frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau}.$$

Pro $W^\mu \perp U^\mu$ dostáváme již automaticky rovnici Fermiho přenosu.

Rovnici Fermiho–Walkerova přenosu opět můžeme přepsat ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}W^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = -\Omega^{\alpha\kappa} W_\kappa,$$

kde

$$\Omega^{\alpha\kappa} = -\Omega^{\kappa\alpha} = A^\alpha U^\kappa - A^\kappa U^\alpha, \quad A^\alpha = \frac{\mathrm{d}U^\alpha}{\mathrm{d}\tau};$$

opět jde o rotaci v rovině $A^\alpha$, $U_\alpha$, ve stejném smyslu jako u rotace při Fermiho přenosu, $W^\mu$ ovšem nemusí být kolmé k $U^\mu$. Je evidentní, že samotný 4-vektor rychlosti $U^\mu$ je přenášen Fermi–Walkerovým přenosem podél $x^\mu(\tau)$. Přirozenou, nerotující tetrádou urychleného pozorovatele je čtveřice ortonormálních vektorů $\{e^{\mu}_{(\iota)}\}$, $e^{\mu}_{(0)} = U^\mu$, Fermi–Walkerovsky přenášená podél světočáry.

### 1.3.3 Fermiho–Walkerův přenos v křivém prostoročase

V křivých prostoročasech se volná testovací částice pohybuje po geodetice, tj. s nulovým 4-zrychlením:

$$A^\mu = \frac{\mathrm{D}U^\mu}{\mathrm{d}\tau} = U^\mu{}_{;\nu} U^\nu = 0,$$

kde 4-rychlost splňuje normovací podmínku

$$g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -1.$$

Má-li částice spin, 4-vektor $S^\mu$ se podél geodetiky rovněž přenáší paralelně:

$$\frac{\mathrm{D}S_\mu}{\mathrm{d}\tau} = 0,$$

jelikož na částici nepůsobí vnější (negravitační) síly. Pro spin přitom stále musí platit

$$S_\mu U^\mu = 0$$

Působí-li na částici vnější síla, pohybová rovnice má pro 4-zrychlení kovariantní tvar

$$A^\mu = \frac{\mathrm{D}U^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{f^\mu}{m};$$

4-sílu $f^\mu$ určíme v libovolném referenčním systému tak, že vyjdeme z výrazu pro 4-sílu v LIS (např. v okamžitém klidovém systému) a přetransformujeme jej na 4-vektor v obecném souřadném systému. Působí-li síla na částici ve vlastním hmotném středu, zákon přenosu spinu získáme převedením rovnice Fermiho přenosu do kovariantní podoby (tj. rovnici Fermiho přenosu v gravitačním poli)

$$\frac{\mathrm{D}S^\nu}{\mathrm{d}\tau} = \left( S_\kappa \frac{\mathrm{D}U^\kappa}{\mathrm{d}\tau} U^\iota \right).$$

Současně ovšem platí $S_\mu U^\mu = 0$ a vektor spinu zůstává stále kolmý na 4-rychlost (tj. tečnu ke světočáře). Přitom vůči osám LIS, který se v daném bodě prostoročasu pohybuje stejnou rychlostí nekoná žádnou rotaci.

Zobecnění na přenos vektorů, jež nemusejí být kolmé k $U^\mu$ je Fermiho–Walkerův přenos, jenž bude v obecném gravitačním poli dán kovariantní rovnicí

$$\frac{\mathrm{D}W^\iota}{\mathrm{d}\tau} = \left( W_\kappa \frac{\mathrm{D}U^\kappa}{\mathrm{d}\tau} \right) U^\iota - \left( W_\kappa U^\kappa \right) \frac{\mathrm{D}U^\iota}{\mathrm{d}\tau}$$

Víme, že každý systém se spinem má zdola omezený poloměr musí být ”minimálně rozlehlý”. Dá se proto očekávat, že se částice se spinem nebude pohybovat přesně po geodetice, jak plyne z principu ekvivalence a předpokladu minimální vazby, nýbrž že se v pohybové rovnici objeví člen úměrný Riemannovu tenzoru křivosti. Víme totiž, že Riemannův tenzor popisuje nehomogenity gravitačního pole, tj. slapové síly, jež se při působení na ”rozlehlou” částici mohou projevit. Plně uspokojivé řešení tohoto problému neexistuje, vzhledem k potížím s rigorózní definicí těžiště rotujícího tělesa v křivých prostoročasech.

Odchylky od geodetiky budou jistě malé a povedou ke 4-zrychlení, jež se od nulového budou lišit o členy

$$m\delta A^\mu \sim \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} R^{\mu\kappa}{}_{\alpha\beta} U_\kappa S_\rho U_\sigma.$$

Pro rotující těleso s úhlovou rychlostí $\omega$, poloměrem $R$, hmotností $m$ pohybující se rychlostí $v \ll 1$ v newtonovském potenciálu $\Phi \sim M/r$ jsou velikosti složek vlastního momentu hybnosti (spinu) $|S_i| \sim (mR^2)\omega$ a prostorové složky 4-rychlosti $|U_i \sim v \sim (M/r)^{1/2}$ (ze zákona zachování energie při pohybu v gravitačním poli). Pro složky Riemannova tenzou je typicky $|R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}| \sim \nabla(\nabla\Phi) \sim M/r^3$. Časová složka $|S_0| \sim v|S_i| \ll |S_i|$, ($|U_0| \sim 1$).

Pro slabé gravitační pole je $g_{00} \approx -(1+2\Phi)$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = (1-2\Phi)$ a lze ukázat, že složky $R^{m0}{}_{ab} = 0$. Největší příspěvek v $\delta A^i$ bude mít tvar

$$|\delta A^i| \sim m^{-1}|R^{i0}{}_{j0}||U_0||S_r|U_s| \\ \sim m^{-1}(M/r^3)(1)(mR^2\omega)(M/r)^{\frac{1}{2}}$$

tj.

$$\delta A^i \approx \left(\frac{\omega R^2}{r}\right)\left(\frac{M}{r}\right)^{1/2} a_{\rm Newton}; \qquad a_{\rm Newton} = \frac{M}{r^2}.$$

Pokud by planeta rotovala mezní rychlostí (na rovníku se odstředivá síla rovná gravitační), $\omega^2 = m/R^3$, bylo by

$$|\delta A^i| \leq \left(\frac{m}{R}\right)^{1/2}\left(\frac{R}{r}\right)\left(\frac{M}{r}\right)^{1/2} a_{\rm Newton}$$

a v naší planetární soustavě bude $|\delta A^i| \leq 10^{-12} a_{\rm Newton}$

### 1.3.4 Lokální referenční systém

Mějme libovolně se pohybujícího pozorovatele se světočárou (v obecném souřadném systému) $Z^\mu(\tau)$; $\tau$ je vlastní čas pozorovatele. Pozorovatel je vybaven ortonormální triádou vektorů $e^\mu_{(i)}$ (měřících tyčí), jež budou používány ke konstrukci nového souřadného systému v bezprostředním okolí pozorovatele. V novém souřadném systému, označeném $\{X^\mu\}$, bude světočára pozorovatele počátkem, tj. $x^i = 0$. Časová souřadnice $x^0 \equiv \tau$. Jako "nultý" vektor báze bude tedy vystupovat 4-rychlost pozorovatele; ta má v $\{X^\mu\}$ složky $e^\mu_{(0)} \equiv U^\mu = (1,0,0,0)$. Jelikož je v takovém souřadném systému $e^\mu_{(i)} = \delta^\mu_i$ a tetráda je ortonormální, musí být podél světočáry pozorovatele (historie počátku, $x^i = 0$, $\tau$ libovolné) $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu,0} = 0$. Proto má metrika v bezprostředním okolí světočáry (užitím Taylorova rozvoje) tvar

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu + g_{\mu\nu,i}x^i\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu.$$

Pozorovatel vyšle ve směru tří prostorových vekrorů $e^\mu_{(i)}$ tři prostorové geodetiky (viz obr.), jež budou parametrizovány vlastní délkou (obloukem) $s$ vystupující v roli prostorové souřadnice měřené podél příslušných souřadných čar (geodetik).

!!! Tady bude obrazek !!!

Uvažujme blízký bod $P$, k němuž vede prostorová geodetika. $P$ i geodetika leží v nadploše $x^0 \equiv \tau =$ konst. Souřadnice bodu jsou $x^\mu = t^\mu.s$; $t^\mu$ je jednotkový vektor s počátkem ve směru geodetiky, $s$ je délka oblouku. Proto je $\mathrm{d}^2x^\mu/\mathrm{d}s^2 = 0$ a rovnice geodetiky má v počátku tvar:

$$\Gamma^\mu_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} = \Gamma^\mu_{ij}t^it^j = 0$$

pro libovolná $t^i$. Musí tedy být $\Gamma^\mu_{ij} = 0$ . Z rovnice $g_{\alpha\beta,\gamma} = g_{\mu\alpha}\Gamma^\mu_{\beta\gamma} + g_{\mu\beta}\Gamma^\mu_{\alpha\gamma}$ a z metriky výše zavedené pak plyne, opět pouze v počátku $x^i = 0$ a při libovolném $\tau$, že je

$$g_{ij,k} = 0; \qquad g_{0i,j} = -g_{0j,i}.$$

Jelikož je $g_{0i,j}$ antisymetrická v $i,j$, má jen tři nezávislé "složky", jimž lze přiřadit 3-vektor $\omega^k$, takový, že

$$g_{0i,j} = -\varepsilon_{ijk}\omega^k,$$

kde $\varepsilon_{ijk}$ je 3-dimenzionální Levi-Civitův symbol; prostorová metrika je v $x^i = 0$ eukleidovská.

Prostorové složky 4-zrychlení uvažovaného pozorovatele jsou v zavedených souřadnicích dány relacemi

$$a^i = U^i{}_{;\mu}U^\mu = U^i{}_{;0} = \Gamma^i_{0\rho}U^\rho = \Gamma^i_{00} \\ = \frac{1}{2}\eta^{i\mu}(g_{\mu 0,0} + g_{0\mu,0} - g_{00,\mu}),$$

takže

$$a^i = -\frac{1}{2}g_{00,i}$$

a derivace $g_{00}$ lze vyjádřit pomocí zrychlení. Metriku v okolí světočáry uvažovaného pozorovatele, vyjádřenou v jeho přirozených souřadnicích pak dostáváme v prosté formě:

$$\mathrm{d}s^2 = -(1+2a_ix^i)(\mathrm{d}x^0)^2 - 2\varepsilon_{ijk}x^j\omega^k\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^i \\ +\delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j + \mathcal{O}(|x^i|^2)\mathrm{d}x^\lambda\mathrm{d}x^\kappa$$

Nenulové složky afinní konexe příslušných této metrice jsou

$$\Gamma^i_{00} = a^i, \quad \Gamma^0_{0i} = a_i, \quad \Gamma^i_{0j} = -\varepsilon^i_{jk}\omega^k.$$

Zkonstruovaný systém nazýváme lokálně referenční systém (LRS) urychleného pozorovatele. Metrika platí v okolí počátku s přesností členů lineárních v $x^i$ (u kvardratických členů by se objevily složky Riemannova tenzoru). Pokud je LRS nerotující a pozorovatel volně padá, pak všechny složky afinní konexe budou nulové, stejně jako derivace metriky. Pak LRS je LIS – na rozdíl od dříve diskutovaných LIS, omezených na okolí jediného světobodu, nyní jde o LIS v okolí světočáry (geodetiky).

Jde-li o LRS podél urychlené světočáry, lze v každé události na světočáře nalézt LIS pohybující se stejnou rychlostí jako LRS (tj. $U^\mu$, jehož osy v daném okamžiku splývají s osami LRS, i když osy LRS vůči osám LIS obecně rotují. Lze předpokládat, že událost, v níž LIS konstruujeme, leží v prostorovém i časovém počátku LRS, takže......

Uvažujme, že LRS pozorovatele v jistém okamžiku míjí volně padající částice. Pohybová rovnice částice je rovnice geodetiky, parametrizovaná vlastním časem $\lambda$. Rovnice geodetiky zapsaná v LRS dává v časové složce

$$\frac{\mathrm{d}^2x^0}{\mathrm{d}\lambda^2} + 2a_i\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda} = 0$$

a prostorové složky lze psát s využitím časové složky v názorném tvaru

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{a} - 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} + 2(\mathbf{a}\cdot\dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}},$$

kde tečka značí derivaci podle vlastního času pozorovatele, $\mathbf{a} = (a^i)$ jsou prostorové složky jeho zrychlení a $\mathbf{r} = (x^i)$ jsou souřadnice částice volně padající v LRS. První člen odpovídá zrychlení pozorovatele, třetí člen je relativitsická korekce (v konvenčních jednotkách $\sim 1/c^2$), druhý člen je Coriolisovo zrychlení.

I když pozorovatel volně padá, zrychlení částice vůči němu nemusí být nulové, neboť osy mohou při pádu rotovat a v souřadném systému vázaném na tyto osy se objeví Coriolisovo zrchlení. Pouze je-li $\Gamma^i_{0j} = 0$, tj. $\vec{\omega} = 0$, Coriolisovo zrychlení se neobjeví. To by ovšem mělo platit tehdy, když se triáda $e^\mu_{(i)}$ přenáší Fermiho–Walkerovým přenosem, vlastně Fermiho přenosem, neboť $e^\mu_{(i)}$ jsou stále ortogonální k $U^\mu$. Skutečně pro Fermiho–Walkerův přenos vektorů $e^\mu_{(i)}$ dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}e^\mu_{(i)}}{\mathrm{d}\tau} &\equiv e^\mu_{(i);\rho}U^\rho = e^\mu_{(i);0} = e^\mu_{(i),0} + \Gamma^\mu_{\kappa 0}e^\kappa_{(i)} = \Gamma^\mu_{i0} \\ &= (e^\kappa_{(i)}a_\kappa)U^\mu = a_i U^\mu = a_i\delta^\mu_0.\end{aligned}$$

Pro $\mu = j$ vidíme, že Fermiho–Walkerův přenos je ekvivalentní $\Gamma^j_{i0} = 0$, tj. $\vec{\omega} = 0$. Názorně to ukazuje i v rámci obecné relativity, že vektory přenášené Fermiho–Walkerovým způsobem nerotují.

...souřadnice v LRS jsou $x^i = x^0 = 0$. Transformace od LRS $(x^\mu)$ k LIS $(\xi^\mu)$ je dána relacemi:

$$\begin{aligned}\xi^i &= x^i + \frac{1}{2}a^i(x^0)^2 + \varepsilon^{ijk}\omega^j x^k x^0 + \mathcal{O}(|x^i|^3), \\ \xi^0 &= x^0 + (a_s x^s)x^0 + \mathcal{O}(|x^i|^3).\end{aligned}$$

Inverzní transformace je dána relacemi

$$\begin{aligned}x^i &= \xi^i - \frac{1}{2}a^i(\xi^0)^2 + \varepsilon^{ijk}\omega^j \xi^k \xi^0 + \mathcal{O}(|\xi^i|^3), \\ x^0 &= \xi^0 - (a_s \xi^s)\xi^0 + \mathcal{O}(|\xi^i|^3).\end{aligned}$$

Z transformačních vztahů pro metriku a afinní konexi zjistíme, že v počátku LIS ($\xi^i = \xi^0 = 0$) je metrika Minkovského a složky afinní konexe vymizí.

Při $\omega^i = 0$ jsou výše uvedené transformace limitou přesné transformace mezi rovnoměrně zrychleným a inerciálním systémem ve STR. Pokud se rovnoměrně zrychlený systém (v STR je jeho zrychlení konstantní v každém okamžitém klidovém IS) se souřadnicemi $x, y, z, t$ pohybuje se zrychlením $a$ podél první osy inerciálního systému se souřadnicemi $X, Y, Z, T$, přesná transformace je ve standardních jednotkách:

$$\begin{aligned}X &= \frac{c^2}{a}\left(\cosh\frac{at}{c} - 1\right) + x\cosh\frac{at}{c}, \quad Y = y, \\ Z &= z, \quad T = \frac{c}{a}\sinh\frac{at}{c} + \frac{x}{c}\sinh\frac{at}{c}.\end{aligned}$$

Rozvojem hyperbolických funkcí v $(at/c)$ a ponecháním prvních členů dostaneme transformační vztahy uvedené výše.

## 1.4 Energie, hybnost a moment hybnosti gravitačního pole

Podle Einsteinových gravitačních rovnic budí fyzikální systémy gravitační pole prostřednictvím symetrického tenzoru energie–hybnosti. V rámci STR tenzor energie–hybnosti izolovaného systému splňuje zákon zachování

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$$

a zákon zachování momentu hybnosti je

$$(x^\lambda T^{\mu\nu} - x^\mu T^{\lambda\nu})_{,\nu} = 0.$$

Z těchto lokálních, diferenciálních zákonů lze odvodit globální, integrální zákony zachování.

V přítomnosti gravitace pro tenzor energie–hybnosti hmoty platí kovariantní zákon zachování

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

Z něj však již integrální zákony zachování neplynou. Ukázali jsme ovšem, že pro vektorové pole s nulovou kovariantní divergencí lze nalézt integrální veličiny, jež se zachovávají. Pro tenzorová pole by však musela vymizet obyčejná divergence, aby byla aplikovatelná Gaussova věta.

Intuitivně je jasné, že při interakci hmotného systému s gravitací se nebudou celková energie a hybnost hmoty zachovávat. V nestacionárních případech zjevně budou vyzařovány gravitační vlny, jež budou odnášet energii a hybnost. V oblastech, kde se gravitace můžeme zbavit a kde s dostatečnou přesností můžeme použít IS, zákony zachování hmoty platit budou; kovariatntní zákony tam přecházejí ve speciálně relativistické.

Obecně by se měla zachovávat celková 4-hybnost hmoty a gravitačního pole. Diferenciální zákon zachování musí obsahovat parciální derivace (Gaussova věta pak bude použitelná), takže jej vyjádříme ve tvaru

$$[(-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})]_{,\nu} = 0; \tag{1.13}$$

$t^{\mu\nu}$ charakterizuje energii a hybnost gravitačního pole; aby $t^{\mu\nu}$ bylo symetrické a mohl být formulován zákon zachování momentu hybnosti, musíme zavést člen $(-g)$.

Aby zákon zachování platil v každém systému souřadnic, musí divergenční rovnice (1.13) platit v každém systému a $t^{\mu\nu}$ nemohou být složky tenzoru (obyčejná divergence tenzoru by transformací z LIS do obecného systému přešla na divergenci kovariantní). Veličinu $t^{\mu\nu}$ nazýváme komplex energie–hybnosti graviatčního pole.

Při konstrukci komplexu $t^{\mu\nu}$ vycházíme z Einsteinových rovnic, z nichž vyjádříme $T^{\mu\nu}$; pak po vynásobení $(1.13)16\pi$ dostáváme

$$[(-g)(2G^{\mu\nu} + 16\pi t^{\mu\nu})]_{,\nu} = 0 \tag{1.14}$$

Tato rovnice by měla být splněna identicky.

Vyjdeme z analogie s negraviatčními poli. Budeme proto předpokládat, že $t^{\mu\nu}$ závisí jen na metrickém tenzoru a jeho prvních derivacích, vystupujících v roli intenzit graviatčního pole. Závislost na prvních derivacích budiž kvadratická. V (1.14) vystupují díky $G^{\mu\nu}$ lineárně i druhé derivace metriky.

Jako identicky splníme rovnici $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$ položíme-li $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$, tj.

$$B_i = \varepsilon_{ijk} A_{k,j} = U_{ij,j}, \quad U_{ij} = -U_{ji} = \varepsilon_{ijk} A_k.$$

Rovnici (1.14) identicky splníme, bude-li

$$(-g)(2G^{\mu\nu} + 16\pi t^{\mu\nu}) = h^{\mu\nu\lambda}{}_{,\lambda}, \tag{1.15}$$

kde jsme zavedli *suprepotenciál* $h^{\mu\nu\lambda}$ splňující podmínky symetrie

$$h^{\mu\nu\lambda} = -h^{\mu\lambda\nu}, \quad h^{\mu\nu\lambda}{}_{,\lambda} = h^{\nu\mu\lambda}{}_{,\lambda};$$

první podmínka spolu s (1.15) zaručuje identické splnění (1.14), druhá zaručuje symetrii $t^{\mu\nu}$. Suprepotenciál nesmí obsahovat vyšší než první derivace metriky. To bude splněno, bude-li superpotenciál divergencí výrazu závislého pouze na metrice:

$$h^{\mu\nu\lambda} = H^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\kappa}.$$

Požadavky symetrií superpotenciálu určují $H^{\mu\nu\lambda\kappa}$ až na multiplikativní konstantu. Zapíšeme přímo výsledek

$$H^{\mu\nu\lambda\kappa} = (-g)(g^{\mu\nu} g^{\lambda\kappa} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\kappa})$$

Můžeme se přesvědčit, že platí symetrie:

$$\begin{aligned} H^{\mu\nu\lambda\kappa} &= -H^{\mu\lambda\nu\kappa}, \\ H^{\mu\nu\lambda\kappa} &= -H^{\kappa\nu\lambda\mu}, \quad H^{\mu\nu\lambda\kappa} = H^{\nu\mu\kappa\lambda}, \\ H^{[\mu|\nu|\lambda\kappa]\mathrm{cycl}} &= H^{\mu\nu\lambda\kappa} + H^{\kappa\nu\mu\lambda} + H^{\lambda\nu\kappa\mu} = 0 \end{aligned}$$

Z $H^{\mu\nu\lambda\kappa}$ učíme superpotenciál a z $G^{\mu\nu}$ a (1.14) dostaneme po dlouhém výpočtu komplex energie a hybnosti gravitačního pole. Je výhodné užít veličiny $\bar{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}$; pak

$$\begin{aligned} 16\pi(-g)t^{\mu\nu} = {} & \bar{g}^{\mu\nu}{}_{,\alpha}\, \bar{g}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} - \bar{g}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}\, \bar{g}^{\nu\beta}{}_{,\beta} \\ & + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \bar{g}^{\alpha\gamma}{}_{,\delta}\, \bar{g}^{\delta\beta}{}_{,\gamma} \\ & - g_{\alpha\beta} \bar{g}^{\alpha\gamma}{}_{,\delta}\, (g^{\mu\delta} \bar{g}^{\nu\beta}{}_{,\gamma} + g^{\nu\delta} \bar{g}^{\mu\beta}{}_{,\gamma}) \\ & + g_{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \bar{g}^{\mu\alpha}{}_{,\gamma}\, \bar{g}^{\nu\beta}{}_{,\delta} \\ & + \frac{1}{8}(2g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}) \\ & \quad \times (2g_{\gamma\delta} g_{\iota\kappa} - g_{\delta\iota} g_{\gamma\kappa}) \bar{g}^{\gamma\kappa}{}_{,\alpha}\, \bar{g}^{\delta\iota}{}_{,\beta} \end{aligned}$$

Takto definovaná veličina je nazývána *Landaův–Lifšicův komplex energie–hybnosti*. Má tyto vlastnosti:

- Spolu s tenzorem energie–hybnosti hmoty splňuje v důsledku gravitačního zákona diferenciální zákon zachování $[(-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})]_{,\nu} = 0$, z něhož lze odvodit integrální zákony zachování celkové energie a hybnosti.
- Je symetrický, takže umožňuje formulovat zákon zachování celkového momentu hybnosti.
- Obsahuje kvadraticky první derivace metrického tenzoru, vyšší derivace neobsahuje.

Vzhledem k posledně jmenované vlastnosti není $t^{\mu\nu}$ tenzorem. Zvolíme-li v dané události LIS, $g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} = 0$ a $t^{\mu\nu}$ vymizí. Kdyby bylo $t^{\mu\nu}$ tenzorem, muselo by vymizet ve všech souřadných systémech. Jenže obecně je $t^{\mu\nu} \neq 0$.

Z toho, že volbou souřadného systému lze $t^{\mu\nu}$ vynulovat, plyne důležitý závěr: gravitační energie není lokalizovatelná!

Nemá smysl hovořit o množství gravitační energie v určité lokální oblasti. Ovšem globální gravitační energie izolovaných systémů má dobrý smysl.

Tento výsledek je ovšem vcelku přirozený vzhledem k principu ekvivalence, dle nějž můžeme gravitační sílu nechat vymizet; přežívají jen slapové síly, tj. nelokální efekty (energie souvisí s prací a ta je dána silou). Další verze tohoto argumentu říká, že globálně nelze gravitační síly odtransformovat, neboť neexistuje záporná gravitační hmota (v roli náboje budícího pole).

Komplex $t^{\mu\nu}$ není obecně tenzorem, transformuje se však jako tenzor při lineárních ortogonálních transformacích se strukturou odpovídající Lorentzovým transformacím. Platí-li

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + b^{\mu}, \quad \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} \eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma},$$

pak snadno ověříme, že

$$t'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} t^{\rho\sigma}.$$

V oblastech prostoročasu s velkou křivostí to je pouze formální vlastnost. Daleko od ostrovních systémů hmot bude prostoročas přecházet na Minkovského prostoročas STR, pak výše uvedené transformace odpovídají Lorentzovým transformacím svazující souřadné systémy, jež jsou asymptoticky Lorentzovské. Ty pak mají metrický význam (určují prostorové a časové vzdálenosti) a jsou fyzikálně privilegované.

### 1.4.1 Integrální zákony zachování

V analogii s výrazy pro zachovávající se veličiny charakterizující rozložení hmoty – veličiny $(-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})$ splňují diferenciální zákony zachování s parciálními derivacemi a mají roli $W^{\mu\nu}$. Dostáváme zachovávající se veličiny

$$P^{\mu} = \int_{\Sigma} (-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) \mathrm{d}^{(3)} S_{\nu},$$

kde $\mathrm{d}^{(3)} S_{\nu}$ je prostorová nadplocha. Předpokládáme, že $(-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})$ ubývá v prostorovém nekonečnu dostatečně rychle. Je-li souřadný systém vybrán tak, že $\Sigma$ je dána $x^0 = t = \mathrm{konst.}$, pak

$$P^{\mu} = \int_{t=\mathrm{konst.}} (-g)(T^{\mu 0} + t^{\mu 0}) \mathrm{d}^{(3)} x.$$

Hodnoty $P^\mu$ nezávisejí na volbě $\Sigma$; za nepřítomnosti gravitačního pole přejdou v Lorentzových souřadnicích na celkovou 4-hybnost hmotného systému v STR. $P^\mu$ dané výše uvedenými výrazy je tedy celková 4-hybnost izolovaného systému hmoty a gravitačního pole.

Budeme uvažovat pouze izolované ostrovní systémy, kdy je prostoročas asymptoticky plochý. $P^\mu$ se bude zachovávat pouze tehdy, když $(-g)(T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu})$ ubývá patřičně rychle v prostorovém nekonečnu. V OTR je ostrovní systém takový, že prostoročas je asymptoticky plochý. Uvidíme, že globální veličiny (ceková 4-hybnost, moment hybnosti, vnitřní moment hybnosti a rychlosti jejich poklesu) mají fyzikální smysl pouze v asymptoticky plochém prostoročasu.

Při integraci přes 2-rozměrnou plochu $S$ předpokládáme, že celá tato plocha obklopující izolovaný systém hmot leží v asymptoticky ploché oblasti, kde jsou zavedeny Lorentzovy souřadnice. V asymptoticky ploché oblasti existuje systém souřadnic $x^\mu$, v nichž při označení $r=\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}$ platí

$$g_{\mu\nu}\to\eta_{\mu\nu}\quad \text{pro}\quad r\to\infty$$

Souřadnice nazveme asymptoticky Lorentzovými.

Rigorózní definice izolovaného systému a asymptotické plochosti je velice obtížná. Prostoročas totiž není neměnnou arénou fyzikálních procesů jako v STR (a Minkovského metrice), nýbrž je sám dynamickou entitou. Nicméně v OTR rigorózně získané výsledky odpovídají fyzikálně názorným představám formulovaným v STR. Např. izolovaný systém může vysílat záření jen konečnou dobu (má jen konečnou energii), pak díky integraci přes celou nadplochu $t=$ konst. bude i vyzářená energie a hybnost zahrnuta do integrálu a $P^\mu$ se zachovává.

Abychom zjistili, kolik energie a hybnosti ostrovní systém vyzařuje, musíme jej obklopit pevnou 2-plochou a počítat toky touto plochou (jako ve speciálně relativistickém případě). V OTR volíme často plochu $S$ v asymptoticky ploché oblasti, daleko od ostrovního zdroje. Pak rychlost poklesu celkové 4-hybnosti hmoty gravitačního pole dostáváme

$$-\frac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}t}=\oint(-g)(T^{\mu j}+t^{\mu j})\,\mathrm{d}^{(2)}S_j,$$

$\mathrm{d}^{(2)}S_j$ je 3-vektor ležící na nadploše $t=$ konst., kolmý k $S$. $\mathrm{d}^{(2)}S_j$ neobsahuje metriku – je shodné se složkami $\mathrm{d}^{(2)}S^*_{0j}$, neboť $\mathrm{d}\sigma^{\gamma\delta}$ má nenulové složky pro $\gamma=c$, $\delta=d$. Vektory tvořící element dvojplochy ležící v $t=$ konst. a $\mathrm{d}^{(2)}S^*_{\alpha\beta}$ má nenulové složky $\mathrm{d}^{(2)}S^*_{0j}=\frac{1}{2}\varepsilon_{0jcd}\,\mathrm{d}\sigma^{cd}=\frac{1}{2}\varepsilon_{jcd}\,\mathrm{d}\sigma^{cd}$. Plochou $S$ nejčastěji hmota nebude protékat (pro systém Slunce - Země by tomu tak nebylo, k Zemi přichází sluneční vítr a elektromagnetické záření) a pak lze psát

$$-\frac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}t}=\oint_S(-g)t^{\mu\nu}\mathrm{d}^{(2)}S_j;$$

tento výraz vyjadřuje ztráty 4-hybnosti prostřednictvím gravitačního pole, gravitačních vln.

Výše uvedené výrazy lze dokázat užitím diferenciálního zákona zachování a 3-dimenzionální Gaussovy věty:

$$\begin{aligned}-\frac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}t}&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{t=\text{konst}}\left[(-g)\left(T^{\mu0}+t^{\mu0}\right)\right]\mathrm{d}^{(3)}x\\&=-\int_{t=\text{konst}}\left[(-g)\left(T^{\mu0}+t^{\mu0}\right)\right]_{,0}\mathrm{d}^{(3)}x\\&=+\int_{t=\text{konst}}\left[(-g)\left(T^{\mu j}+t^{\mu j}\right)\right]_{,j}\mathrm{d}^{(3)}x\\&=\oint_S\left[(-g)\left(T^{\mu j}+t^{\mu j}\right)\right]\mathrm{d}^{(2)}S\end{aligned}$$

Vyjádřeme $t^{\mu\nu}$ pomocí superpotenciálu:

$$(-g)\left(T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu}\right)=\frac{1}{16\pi}h^{\mu\nu\lambda}{}_{,\lambda}=\frac{1}{16\pi}H^{\mu\nu\lambda\kappa}_{,\kappa\lambda}$$

Skutečnost, že $h^{\mu00}=0$ a $h^{\mu\nu\lambda}=-h^{\mu\lambda\nu}$, umožňuje vyjádřit $P^\mu$ jako integrál přes 2-plochu obklopující systém:

$$\begin{aligned}P^\mu&=\int_{t=\text{konst}}\frac{1}{16\pi}h^{\mu0\lambda}{}_{,\lambda}\mathrm{d}^{(3)}x=\frac{1}{16\pi}\oint_S h^{\mu0j}\mathrm{d}^{(2)}S_j\\&=\frac{1}{16\pi}\oint_S H^{\mu0j\kappa}{}_{,\kappa}\mathrm{d}^{(2)}S_j\end{aligned}$$

Tedy celkovou enrgii a hybnost ostrovního (izolovaného) systému v OTR lze vyjádřit pomocí veličin charakterizujících gravitační pole v asymptotické oblasi, daleko od systému hmot jako výše uvedený integrál. (Analogie z elektrodynamiky: celkový náboj určíme Gaussovou větou přes plochu obklopující systém v nekonečnu.)

Pro rychlost poklesu celkové 4-hybnosti dostáváme pomocí superpotenciálu

$$-\frac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{16\pi}\oint_S h^{\mu j\lambda}{}_{,\lambda}\mathrm{d}^{(2)}S_j=\frac{1}{16\pi}\oint_S H^{\mu j\lambda\kappa}{}_{,\kappa\lambda}\mathrm{d}^{(2)}S_j.$$

Integraci provádíme, přes 2-rozměrnou, čistě prostorovou (nejčastěji kulovou) plochu $S$ ležící v nadploše $t=$konst.

V asymptoticky plochých prostoročasech lze zavést radiální souřadnici $r$, jež má daleko od ostrovního systému význam radiální souřadnice v Minkovského geometrii. Jako plochu $S$ pak volíme kouli $r=$konst (pro $r\to\infty$). Pak

$$\mathrm{d}^{(2)}S_j\sim\frac{x^j}{r}r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\equiv n_j\cdot r^2\mathrm{d}\Omega$$

a

$$\begin{aligned}P^\mu&=\frac{1}{16\pi}\oint_{r=\text{konst}}H^{\mu0j\kappa}{}_{,\kappa}n_jr^2\mathrm{d}\Omega,\\\frac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{16\pi}\oint_{r=\text{konst}}H^{\mu j\lambda\kappa}{}_{,\kappa\lambda}n_kr^2\mathrm{d}\Omega.\end{aligned}$$

Pokud plochou $S$ proteče jen gravitační pole dostaneme pro **výkon gravitačního záření** (množství energie projdivší plochou $S$ za jednotku času) formuli

$$\begin{aligned}L_{GR}\equiv-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}P^0}{\mathrm{d}t}&=\oint_{r=\text{konst}}t^{0j}n_jr^2\mathrm{d}\Omega\\&=\frac{1}{16\pi}\oint_{r=\text{konst}}H^{0j\lambda\kappa}{}_{,\kappa\lambda}n_jr^2\mathrm{d}\Omega.\end{aligned}$$

Celková energie je

$$E = P^0 = \oint_{r=\text{konst}} H^{00j\kappa}{}_{,\kappa} n_j r^2 \mathrm{d}\Omega.$$

Vzhledem k symetrii $t_{\mu\nu}$ lze v analogii se situací v STR formulovat zákon zachování momentu hybnosti. Diferenciální zákon

$$\left[x^\lambda(-g)\Big(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}\Big) - x^\mu(-g)\Big(T^{\lambda\nu} + t^{\lambda\nu}\Big)\right]_{,\nu} = 0$$

vede k zachování veličiny $J^{\lambda\mu} = -J^{\mu\lambda}$ dané výrazem

$$J^{\lambda\mu} = \int_{t=\text{konst}} \Big[x^\lambda(-g)\big(T^{\mu 0} + t^{\mu 0}\big) \\ -x^\mu(-g)\big(T^{\lambda 0} + t^{\lambda 0}\big)\Big] \mathrm{d}^{(2)}x,$$

jež určuje **celkový moment hybnosti systému** (budeme jej v dalším vztahovat vůči počátku). Celkový moment hybnosti lze při využití vztahů pro superpotenciál a standardní Gaussovy věty napsat jako 2-dimenziální integrály přes plochu $S$:

$$\begin{aligned} J^{\lambda\mu} &= \frac{1}{16\pi}\int_{t=\text{konst}} \Big[x^\lambda h^{\mu 0\kappa}{}_{,\kappa} - x^\nu h^{\lambda 0\kappa}{}_{,\kappa}\Big] \mathrm{d}^{(3)}x \\ &= \frac{1}{16\pi}\int_{t=\text{konst}} \Big[\big(x^\lambda h^{\mu 0\kappa}\big)_{,\kappa} - \big(x^\mu h^{\lambda 0\kappa}\big)_{,\kappa} \\ &\quad -\delta^\lambda_\kappa h^{\mu 0\kappa} + \delta^\mu_\kappa h^{\lambda 0\kappa}\Big] \mathrm{d}^{(3)}x \\ &= \frac{1}{16\pi}\int_{t=\text{konst}} \Big[\big(x^\lambda h^{\mu 0 j} - x^\mu h^{\lambda 0 j}\big)_{,j} \\ &\quad +\big(H^{\lambda 0\mu\iota} - H^{\mu 0\lambda\iota}\big)_{,\iota}\Big] \mathrm{d}^{(3)}x \end{aligned}$$

Použijeme-li relace

$$\begin{aligned} \big(H^{\lambda 0\mu\iota} - H^{\mu 0\lambda\iota}\big)_{,\iota} &= \big(H^{\lambda 0\mu\iota} - H^{\iota 0\lambda\mu}\big)_{,\iota} \\ &= -H^{\mu 0\iota\lambda}{}_{,\iota} = H^{\lambda 0\iota\mu}{}_{,\iota} = H^{\lambda 0 j\mu}{}_{,j} \end{aligned}$$

dostáváme

$$J^{\lambda\mu} = \oint_S \left(x^\lambda h^{\mu 0 j} - x^\mu h^{\lambda 0 j} + H^{\lambda 0 j\mu}\right) \mathrm{d}^{(2)}S_j.$$

Rychlost poklesu celkového momentu hybnosti uvnitř plochy $S$, tj. jeho tok plochou $S$ dostaneme z diferenciálního zákona zachování a Gaussovy věty standardním způsobem (jako u 4-hybnosti):

$$-\frac{\mathrm{d}J^{\mu\nu}}{\mathrm{d}t} = \oint_S \Big[x^\mu(-g)\big(T^{\nu j} + t^{\nu j}\big) \\ -x^\nu(-g)\big(T^{\mu j} + t^{\mu j}\big)\Big] \mathrm{d}^{(2)}S_j;$$

položíme-li $T^{\mu j} = 0$ (vzdálenou plochou hmota ostrovního systému neprochází) a dosadíme-li za $(-g)\left(T^{\nu j} + t^{\nu j}\right)$ divergenci superpotenciálu, pak

$$\begin{aligned} -\mathrm{d}J^{\mu\nu} &= \frac{1}{16\pi}\oint_S \left(x^\mu h^{\nu j\lambda}{}_{,\lambda} - x^\nu h^{\mu j\lambda}{}_{,\lambda}\right) \mathrm{d}^{(2)}S_j \\ &= \frac{1}{16\pi}\oint_S \left(x^\mu H^{\nu j\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa} - x^\nu H^{\mu j\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa}\right) \mathrm{d}^{(2)}S_j. \end{aligned}$$

Určeme ztrátu vntřního momentu hybnosti tak, že odvozený vztah aplikujeme v souřadnicovém systému, v němž $P^m$ vymizí.

Definujem souřadnice hmotného středu jako

$$x^m_S = \frac{\int x^m(-g)(T^{00} + t^{00})\mathrm{d}^{(3)}x}{P^0}$$

a celkovou setrvačnou hmotnost (energii) a 4-hybnost systému

$$M = (-P_\sigma P^\sigma)^{1/2}, \qquad U^\mu = p^\mu/M.$$

Složky $J^{0m}$ (podobně jako v STR) nepopisují celkový moment hybnosti hmotné soustavy a gravitačního pole, ale jejich zachovávání souvisí s pohybem hmotného středu:

$$tP^m - P^0 x^m_S = J^{0m} = \text{konst}.$$

Ve speciálním souřadném systému, kde je $P^m = 0$, definice $\theta$ určuje souřadnice vlastního hmotného středu. Vzdálenost vlastního hmotného středu od počátku $x^\lambda = 0$, vůči němuž je vyjádřeno $J^{\mu\nu}$, charakterizuje veličina

$$b^\lambda_\perp = \frac{1}{M^2} J^{\lambda\mu} P_\mu.$$

Vnitřní moment hybnosti (spin) je dán kovariantním přepisem speciálně relativistické definice

$$S_\mu = -\frac{1}{2} e_{\mu\nu\kappa\lambda} J^{\nu\kappa} U^\lambda,$$

kde $U^\mu = P^\mu/M$.

V souřadném systému, kde je hmotný střed v počátku, tj. $P^m = 0$, $b^\lambda_\perp = 0$ a plocha $S$ je kulová, takže $\mathrm{d}^{(2)}S_j \simeq \frac{x^j}{r} r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \equiv n_j r^2 \mathrm{d}\Omega$, je celkový moment hybnosti dán antisymetrickými složkami $J^{im} = -J^{mi}$, resp. k nim duálních složek vektoru $S_m$, přičemž

$$J^{lm} = \frac{1}{16\pi}\oint_S \left(x^l h^{m 0 j} - x^m h^{l 0 j} + H^{l 0 j m}\right) n_j r^2 \mathrm{d}\Omega.$$

Pro rychlost ztráty momentu hybnosti platí

$$\begin{aligned} -\frac{\mathrm{d}J^{lm}}{\mathrm{d}t} &= \oint_S \left[x^l(-g)t^{mj} - x^m(-g)t^{lj}\right] n_j r^2 \mathrm{d}\Omega \\ &= \frac{1}{16\pi}\oint_S \left(x^l H^{mj\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa} - x^m H^{lj\lambda\kappa}{}_{\lambda\kappa}\right) n_j r^2 \mathrm{d}\Omega. \end{aligned}$$

### 1.4.2 Transformační vlastnosti globálních veličin

Veličiny $P^\mu$ a $J^{\lambda\mu}$ nezávisejí na volbě prostorové nadplochy $\Sigma$ (resp. $t$ =konst), takže platí pro libovolné dvě prostorové nadplochy $\Sigma$ a $\Sigma'$

$$P^\mu|_{\Sigma'} = P^\mu|_\Sigma; \qquad J^{\lambda\mu}|_{\Sigma'} = J^{\lambda\mu}|_\Sigma.$$

Uvažujme ostovní systém, asymtoticky plochý prostoročas s asymptoicky plochými souřadnicemi. Předpokládejme, že

$\Sigma$ asymtoticky přejde v $t$ =konst jednoho Lorentzova systému, $\Sigma'$ přejde v $t'$ =konst druhého Lorentzova systému. Oba systémy jsou svázány lineární transformací jež má význam asymptoticky Lorentzovy transformace. Při této transformaci se $t^{\mu\nu}$ transformuje jako tenzor, $P^\mu$ jako vektor a $J^{\lambda\mu}$ jako tenzor:

$$\begin{aligned} P'^{\mu}|_{\Sigma'} &= \Lambda^{\mu}{}_{\nu} P^{\nu}|_{\Sigma'} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} P^{\nu}|_{\Sigma}; \\ J'^{\lambda\mu}|_{\Sigma'} &= \Lambda^{\lambda}{}_{\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\kappa} J^{\nu\kappa}|_{\Sigma}. \end{aligned}$$

Celková 4-hybnost, celkový moment hybnosti ostrovního systému se transformuje jako skalár, resp. tenzor při asymtoticky Lorentzových transformacích asymptotických Lorentzových souřadnic. Při obecných transformacích souřadnic ti neplatí (ale to i v STR). Jestliže asymptoticky plochý systém fixujeme, pak i při libovolných změnách v křivé oblasi uvnitř se $P^\mu, J^{\lambda\mu}$ nemění - jsou invariantí při libovolné transformaci souřadnic, jež nemění asymptoticky Lorentzovy souřadnice. $x^\mu \to x'^\mu = f^\mu(x^\nu) : f^\mu(x^\nu) \to x^\mu$, $g'_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}$, $g'_{\mu\nu,\lambda} = g_{\mu\nu,\lambda}$ pro $r \to \infty$. $\Sigma(t = \text{konst} = c)$, $\Sigma'(t' = \text{konst} = c)$ splývají pro $r \to \infty$. Třetí systém $x''^\mu$ takový, že na $\Sigma(\to x^\mu)$, $\Sigma'(\to x'^\mu)$ Pak $P''^\mu|_\Sigma = P''^\mu|_{\Sigma'}$, ale $P''^\mu|_\Sigma = P^\mu|_{\Sigma'}$, $P''^\mu|_{\Sigma'} = P'^\mu|_{\Sigma'}$, takže $P^\mu|_\Sigma = P'^\mu|_{\Sigma'}$.

Schwarzchildova metrika ve standardních souřadnicích:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = &-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 \\ &+ r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2\right). \end{aligned}$$

Přejdeme k izotropním souřadnicím:

$$r = R\left(1 + \frac{M}{2R}\right)^2; \; R = \frac{1}{2}\left[\left(r^2 - 2Mr\right)^{1/2} + r - M\right].$$

Metrika pak přejde na tvar

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = &-\frac{(1 - M/2R)^2}{(1 + M/2R)^2}\mathrm{d}t^2 + \left(1 + \frac{M}{2R}\right)^4 \\ &\times\left[\mathrm{d}R^2 + R^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2\right)\right]. \end{aligned}$$

## 1.5 Lieova derivace a Killingovy vektory

Pojem Lieovy derivace zavedeme intuitivním, názorným způsobem, jenž si neklade nárok na striktní rigróznost. Lieova derivace umožnuje srovnávat tenzory stejného typu (i geometrické objekty obecnějšího rázu) v různých bodech prostoročasu (variety) způsobem nezávislým na souřadnicích. Přitom nemusí být zadána metrika a afinní konexe.

!!! Tady bude obrazek !!!

Mezi těmito oblastmi ovšm musí být zadána korenspondence. Budeme předpokládat, že jde o hladké jedno-jednoznačné (1:1) zobrazení, difeomorfismus $f$ oblasti $D$ na $\bar{D}$. Sousední body $P$,$Q$ přijdou do $\bar{P}$,$\bar{Q}$. Infinitezimální vektory $PQ$ do $\bar{PQ}$. Obecně ve varietě vektory „neleží“, nýbrž vytvářejí tečný prostor. Tyto tečné prostory se bod od bodu liší. Rozdíly $x^\mu_{(1)} - x^\mu_{(2)}$ se netransformují jako vektory, pouze pro $x^\mu, x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$ se infinitezimální $\mathrm{d}x^\mu$ transformuje jako vektor. Takový infinitezimální vektor posunutí leží ve varietě a spojuje dva sousední body.

**Lieův přenos** - řekneme, že difeomorfismus $f$ přenáší vektor $PQ$ lieovsky na vektor $\bar{PQ}$. V bodě $\bar{P}$ ovšem obecně předtím mohl být vektor $\bar{PS}$. Předpokládejme, že v oblasti obsahující $D$ i $\bar{D}$ je zadáno vektorové pole - v bodě $P$ - vektor $PQ$, v bodě $\bar{P}$ - vektor $\bar{PS}$.

**Lieova diference** je rozdíl vektorů $\bar{PS}$ a $\bar{PQ}$. Lieova derivace je limitou podílu Liovy diference a infinitezimálního parametru charakterizujícího zobrazení $f$.

Fyzikálně názorné zobrazení , difeomorfismus $f$ lze zkonstruovat pomocí kongruence křivek. Předpokládejme, že souřadný systém $x^\mu$ pokrývá $D$ i $\bar{D}$. Pak kongruenci křivek (tj. množinu křivek, z nichž každým bodem prochází právě jedna) lze charakterizovat funkcemi $x^\mu = f^\mu(a^i, v)$. Pevná volba parametrů $a^i (i = 1, 2, 3)$ specifikuje určitou křivku kongruence, $v$ je parametr měnící se podél křivky. Zobrazení $f$ (mezi $D$ a $\bar{D}$) specifikujeme v daných souřadnicích jako bodovou transformaci $x^\mu \to \bar{x}^\mu(x^0); x^\mu = f(a^i, v), \bar{x}^\mu = f(a^i, \bar{v})$. Korespondující body leží na téže křivce kongruence a odpovídají jim různé hodnoty parametru $v$. Pro $v = \bar{v}$ je $f = 1$, tj. identické zobrazení. Je-li $\bar{v} = v + \delta v$ ($\delta$ je pevně dané malé číslo), máme infinitezimální transfomaci. Pak lze psát

$$x^\mu \to \bar{x}^\mu = x^\mu + \epsilon \xi^\mu(x^\iota), \tag{1.16}$$

kde $\epsilon \equiv \delta v$ a $\xi^\mu = \partial x^\mu / \partial v$ jsou vektory tečné ke křivkám kongruence v bodech $x^\iota$. Zadáme-li naopak pole tečných vektorů $\xi^\mu(x^\iota)$, vždy lze najít „integrální křivky“ řešním obyčejných diferenciálních rovnic $\mathrm{d}x^\mu / \mathrm{d}v = \xi^\nu(x^\iota)$. (Předpokládáme spojitost $\xi^\nu(x^\iota)$ a existenci spojité parciální derivace - pak je existence jednoznačného řešení zajištěna alespoň v nějaké oblasti.)

Jak pomocí vybrané kongruence přenášt geometrické objekty z $D$ do $\bar{D}$? Každý geometrický objekt (tenzor, deferenciální forma..) se dá znázornit geometrickými obrazci. Při Lieově přenosu pak přenášíme jednotlivé body těchto obrazců pomocí daného zobrazení (kongurence křivek). U vektoru $PQ$ z obr. 1.5 se body přenesou pode křivek kongruence o tutéž hodnotu $v$. Stačí ukázat, že graficky lze znázornit vektor. Známe-li Lieovu derivaci vektoru, Lieovu derivaci tenzoru zjistíme z požadavku, aby pro ni platilo Leibnizovo pravidlo pro derivaci součinu a ze znalosti Lieovay derivace skaláru.

Předpokládejme infinitezimální zobrazení (1.16) - bodovou transformaci, jenž $P$ (se souřadnicemi $x^\mu$) přiřazuje $\bar{P}$ (se souřadnicemi $\bar{x}^\mu$), v témže systému souřadnic. Mějme skalární pole $\varphi$; v bodě $P$ je $\varphi(x^\mu)$. Jelikož jde o skalár, požadujeme, aby zobrazení do $\bar{P}$ zachovávalo hodnotu pole. Lieův přenos skaláru z $P$ do $\bar{P}$ tedy znamená

$$\varphi_{|P \to \bar{P}} \equiv \bar{\varphi}(\bar{x}^\mu) = \varphi(x^\mu).$$

V bodě $\bar{P}$ však již je skalár $\varphi_{|\bar{P}} = \varphi(\bar{x}^\mu)$ a až na veličiny vyššího řádu v $\epsilon$ je $\varphi(\bar{x}^\mu) = \varphi(x^\mu) + \epsilon\, \varphi_{,\rho}\, \xi^\rho$.

**Lieova derivace skaláru $\varphi$ vůči poli $\xi^\mu$.**

$$\pounds_\xi \varphi = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}[\varphi_{|\bar{P}} - \varphi_{|P \to \bar{P}}] = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}[\varphi(\bar{x}^\mu) - \bar{\varphi}(\bar{x}^\mu)].$$

Pak dostáváme

$$\pounds_\xi \varphi = \varphi_{,\rho}\, \xi^\rho.$$

Uvažujme pole kontravariantních vektorů $A^\mu$. V každém bodě lze takový vektor chápat jako tečný vektor ke křivce parametrizované skalárním parametrem $\lambda$:

$$A^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda},$$

přičemž $\mathrm{d}x^\mu$ jsou složkami infinitezimálního vektoru $PQ$, při zobrazení $P \to \bar{P}$, $Q \to \bar{Q}$.

!!! Tady bude obrazek !!!

Můžeme tedy definovat $A^\mu(x)\mathrm{d}\lambda \to \bar{A}^\mu(\bar{x})\mathrm{d}\lambda$ takto:

$$\bar{A}^\mu(\bar{x})\mathrm{d}\lambda + \epsilon\xi^\mu(x + \mathrm{d}x) - \epsilon\xi^\mu(x) = A^\mu(x)\mathrm{d}\lambda + \epsilon\xi^\mu{}_{,\nu} A^\nu.$$

Pro vektor vytvořený Lieovým přenosem bude

$$\pounds_\xi A^\mu = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}[A^\mu(\bar{x}) - \bar{A}^\mu(\bar{x})].$$

Provedeme-li rozvoj

$$A^\mu(\bar{x}) = A^\mu(x) + \epsilon A^\mu_{,\nu}\xi^\nu,$$

dostáváme pro Lieovu derivaci

$$\pounds_\xi A^\mu = A^\mu_{,\nu}\xi^\nu - \xi^\mu_{,\nu}A^\nu. \tag{1.17}$$

při definici Lieovy derivace libovolného tenzoru vyjdeme z Lieových derivací skaláru a kontravariantního vektoru a požadavku platnosti běžného pravidla derivace součinu. Například pro kovariantní vektorové pole $B_\mu$ požadujeme, aby pro libovolné pole $A^\mu$ platilo

$$\pounds_\xi (A^\mu B_\mu) = (\pounds_\xi A^\mu) B_\mu + A^\mu (\pounds_\xi B_\mu).$$

Musí tedy platit:

$$[\pounds_\xi B_\mu - B_{\mu,\nu}\xi^\nu - B_\nu \xi^\nu_{,\mu}]A^\mu = 0,$$

takže

$$\pounds_\xi B_\mu = B_{\mu,\nu}\xi^\nu + B_\nu \xi^\nu_{,\mu}$$

Zavedeme-li $T_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu$ a požadujeme-li

$$\pounds_\xi (A_\mu B_\nu) = (\pounds_\xi A_\mu)B_\nu + B_\mu(\pounds_\xi B_\nu),$$

pak dostáváme (použitím výše uvedného vztahu pro $\pounds_\xi B_\mu$)

$$\pounds_\xi T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu,\rho}\xi^\rho + T_{\rho\nu}\xi^\rho_{,\nu}.$$

Tímto způsobem je definována Lieova derivace pro libovolný kovariantní tenzor druhého řádu (nejen pro tenzorový součin dvou vektorů). Pro tenzorovou hustotu váhy $w$ dostáváme

$$\pounds_\xi \mathcal{T} = \mathcal{T}^\mu_{\nu,\rho}\xi^\rho - \mathcal{T}^\rho_\nu \xi^\mu_{,\nu} + w\mathcal{T}^\mu_\nu \xi^\rho_{,\rho};$$

použili jsme skutečnost, že $w$-tá mocnina jakobiánu je do prvního řádu v $\epsilon$ $\mid \partial\bar{x}/\partial x \mid^w = 1 + \epsilon w \xi^\rho_{,\nu}$. Z definice Lieovy derivace je jasné, že vytváří z tenzorů tenzory téhož typu. Názorněji to vidíme, je-li zadána afinní konexe a můžeme povádět kovariantní derivace. Pro kontravariantní vektor lze psát

$$\begin{aligned}\pounds_\xi A^\mu &= (A^\mu_{;\nu} - \Gamma^\mu_{\rho\nu}A^\rho)\xi^\nu - (\xi^\mu_{;\nu} - \Gamma^\mu_{\rho\nu}\xi^\rho)A^\nu \\ &= A^\mu_{;\nu}\xi^\nu - \xi^\mu_{;\nu}A^\nu.\end{aligned}$$

Podobně pro tenzor 2. řádu máme

$$\pounds_\xi T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu;\rho}\xi^\rho + T_{\rho\nu}\xi^\rho_{;\mu} + T_{\mu\rho}\xi^\rho_{;\nu}.$$

Ve vyjádření Lieovy derivace libovolného tenzoru (hustoty) lze parciální derivace nahradit kovariantními, takže tenzorový charakter Lieovy derivace je explicitně vidět.

Uveďme nyní alternativní způsoby zavedení Lieovy derivace. Místo přenosu vektoru z bodu $P$ do $\bar{P}$ můžeme přenést souřadný systém kolem $P$ do $\bar{P}$, nalézt složky vektoru $A^\mu$, který již byl v $\bar{P}$ v novém souřadném systému a srovnat je s původními složkami $A^\mu$ v $P$. V přeneseném („dragged alone“) souřadném systému musí být souřadnice bodu $\bar{P}$ stejné jako souřadnice $P$ v původním systému. Přenesení souřadného systému proto odpovídá transformaci

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - \epsilon\xi^\mu(x) \tag{1.18}$$

Měl-li bod $P$ souřadnice $x^\mu$ a bod $\bar{P}$ souřadnice $\bar{x}^\mu = x^\mu + \epsilon\xi^\mu(x)$ pak v přeneseném souřadném systému (až na členy $\sim \epsilon^2$ a vyžšího řádu)

$$\bar{x'}^\mu = \bar{x}^\mu - \epsilon\xi^\mu(\bar{x}) = x^\mu + \epsilon\xi^\mu - \epsilon^\mu = x^\mu.$$

Složky $A^\mu$ v $\bar{P}$ v přeneseném souřadném systému jsou dány běžným vztahem pro transformaci vektoru

$$\begin{aligned}A'^\mu(\bar{x}'^\mu = x^\mu) &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}A^\nu(\bar{x}^\iota) \\ &= (\delta^\mu_\nu - \epsilon\xi^\mu{}_{,\nu})[A^\mu(x^\iota) + \epsilon A^\nu{}_{,\rho}(x^\iota)\xi^\rho] \\ &= A^\mu(x) + \epsilon A^\mu{}_{,\rho}(x)\xi^\rho - \epsilon A^\nu(x)\xi^\mu{}_{,\nu}.\end{aligned}$$

Lieova derivace je definována vztahem

$$\pounds_\xi A^\mu = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}[A'^\mu(\bar{P}) - A^\mu(P)]$$

a opět se dostáváme k původnímu výrazu (1.17). Souvislost s prvním způsobem zavedení Lieovy derivace se vyjasní, když spočteme $\bar{A}^\mu(\bar{x})$ (vzniklý Lieovým přenosem z $P$ do $\bar{P}$) v přeneseném souřadném systému. Vzhledem k (1.18) dostáváme

$$\begin{aligned}\bar{A}'^\mu(\bar{x}') &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\bar{A}^\nu(\bar{x}) = (\delta^\mu_\nu - \epsilon\xi^\mu_{,\nu})[A^\mu(x) + \epsilon\xi^\nu_{,\rho}A^\rho] \\ &= A^\mu(x).\end{aligned}$$

Přenášeli jsme vektor i souřadný systém z $P$ do $\bar{P}$ - složky se nezměnily. Definice Lieovy derivace jsou shodné: v obou případech se srovnává vektor „sedící“ původně v $\bar{P}$ s vektorem přeneseným. Ve druhém případě se srovnání provádí v přeneseném systému, ale až na členy vyžšího řádu je Lieova derivace v obou systémech stejná: $A^\mu(\bar{x}) - \bar{A}^\mu(\bar{x}) = A'^\mu(\bar{x}') - \bar{A}'^\mu + \mathcal{O}(\epsilon')$. Další, třetí způsob zavedení Lieovy derivace je použitelný v případě libovolného geometrického objektu - nemusí to být pouze tenzory. Geometrický objekt $\Phi$ se při transformaci souřadnic $x \to x'$ transformuje podle obecného lineárního vztahu

$$\Phi'(x') = f(x', x)\Phi(x),$$

přičemž transformace $f$ tvoří grupu, takže

$$f(x'', x')f(x', x) = f(x'', x); \qquad f(x', x)f(x, x') = 1.$$

Nechť $x^\mu \to \bar{x}^\mu(x^\iota)$ je zobrazení oblasti $D$ na $\bar{D}$ v daných souřadnicích - jde o bodovou transformaci. Pak objektu $\Phi(x)$ v $D$ můžeme přiřadit $\bar{\Phi}$ v $\bar{D}$ tak, že

$$\bar{\Phi} = f(\bar{x}, x)\Phi(x).$$

Vzhledem k výše uvedeným definicím lze ukázat, že $\bar{\Phi}(\bar{x})$ se při souřadnicové transformaci taransformuje jako původní objekt. Jde o objekty téhož typu a v daném $\bar{x}$ lze vytvořit jejich rozdíl - Lieovu diferenci

$$\Delta\Phi(\bar{(x)}) = \Phi(\bar{x}) - \Phi\bar{(x)}.$$

Takto lze konstruovat přenos libovolných geometrických objektů z $D$ do $D$ - ten jsme napřed prováděli „graficky“ v případě vektoru. Lieovu derivaci pak zavedeme tím, že za bodovou transformaci uvažujeme $x^\mu \to \bar{x}^\mu = x^\mu + \epsilon\xi^\mu(x^\iota)$, tj. transformaci generovanou vektorovým polem $\xi^\mu$ a definujeme

$$\pounds_\xi \phi = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\Delta\Phi(\bar{x}).$$

Je-li zadán metrický tenzor (jak je v OTR dobrým zvykem) jeho Lieova derivace je dána obecným vztahem pro kovariantní tenzor 2. řádu. Pak dostáváme

$$\pounds_\xi g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu;\rho}\xi^\rho + g_{\rho\nu}\xi^\rho_{;\nu} + g_{\mu\rho}\xi^\rho_{;\nu}.$$

Jelikož $g_{\mu\nu;\rho} = 0$; $g_{\rho\nu}\xi^\rho_{;\mu} = (g_{\rho\nu}\xi^\rho)_{;\mu} = \xi_{\nu;\mu}$, bude

$$\pounds_\xi g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}.$$

Při definici Lieova přenosu (viz obr. 1.5) infinitezimální zobrazení $\xi^\mu$ převádělo $PQ$ na $\bar{P}\bar{Q}$, $\mathrm{d}x^\mu$ na $\mathrm{d}\bar{x}^\mu$. Určeme, kdy bude (při použití metriky) $\mathrm{d}s^2_{|PQ} = g_{\mu\nu}(x)\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$ rovno $\mathrm{d}s^2_{|PQ} = g_{\mu\nu}(\bar{x})\mathrm{d}\bar{x}^\mu \mathrm{d}\bar{x}^\nu$, tj. kdy bude zobrazení generované $\xi^\mu$ izometrií? Podmínku izometrie lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x)\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu &= g_{\mu\nu}(\bar{x})[\mathrm{d}x^\mu + \epsilon\xi^\mu_{,\rho}\mathrm{d}x^\rho][\mathrm{d}x^\nu + \epsilon\xi^\nu_{,\sigma}\mathrm{d}x^\sigma] \\ &= [g_{\mu\nu}(x) + \epsilon g_{\mu\nu,\tau}\xi^\tau][\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \\ &\quad + \epsilon(\xi^\nu_{,\sigma}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\sigma + \xi^\mu_{,\rho}\mathrm{d}x^\nu \mathrm{d}x^\rho)] \\ &= g_{\mu\nu}(x)\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \\ &\quad + \epsilon[g_{\alpha\beta,\tau}\xi^\tau + 2g_{\alpha\nu}\xi^\nu_{,\beta}]\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta. \end{aligned}$$

Pro libovolné $\mathrm{d}x^\alpha$ musí člen $\sim \epsilon$ vymizet, tj. výraz v hranaté závorce, symetrizovaný v $\alpha, \beta$. To ovšem je podmínka

$$\pounds_\xi g_{\mu\nu} = 0.$$

K témuž výsledku dojdem, uvážíme-li, že $\mathrm{d}s^2$ je skalár, takže po Lieoě přenosu z $P$ do $\bar{P}$ bude $\mathrm{d}s^2_{|PQ} = \mathrm{d}\bar{s}^2{}_{|PQ}$, takže $\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) = g_{\mu\nu}(\bar{x})$, tj. $\pounds_\xi g_{\mu\nu} = 0$. Shrňme: aby v prostoročasu existovalo izometrické zobrazení, musí existovat vektorové pole tzv. Killingových vektorů $\xi^\mu$ splňujících Killingovu rovnici

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0.$$

Při posunu podél kongruence křivek, k nimž je tečné Killingovo vektorové pole, se vzdálenosti zachovávají. Existence Killingova vektoru souvisí s vnitřní symetrijí prostoročasu. Existuje-li více Killingových vektorů, jejich lineární kombinace s konstantními koeficienty jsou také Killingovy vektory. Víme, že existence symetrie v prostoročase implikuje zákon zachování (teorém Noetherové). Pro částici s konstantní klidovou hmotností $m$, která se pohybuje po geodetice je

$$\frac{\mathrm{D}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = p^\mu_{;\nu}U^\nu = mU^\mu_{;\nu}U^\nu = 0.$$

Existuje-li Killingův vektor $\xi^\mu$, pak skalární veličina

$$p_{(\xi)} \equiv p_\mu \xi^\mu = p^\mu \xi_\mu$$

se podél geodetiky zachovává (je to pohybová konstanta):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}p_{(\xi)}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau}(p^\mu \xi_\mu) &= p^\mu \xi_{\mu;\nu}U^\nu = mU^\mu U^\nu \xi_{\mu;\nu} \\ &= -mU^\mu U^\nu \xi_{\nu;\mu} = 0. \end{aligned}$$

Je-li $\xi^\mu$ časový vektor, pak $-p_{(\xi)}$ je zachovávající se energie částice v asymptoticky plochém prostoročase (např. v Schwarzschildově geometrii je to energie měřená pozorovatelem v nekonečnu). I zde tedy zákon zachování souvisí s invariancí vůči posuvům v čase. Existuje SS, v němž křivky, k nimž je $\xi^\mu$ tečné, budou souřadnicovými čarami, podél nichž se mění pouze časová souřadnice $x^0 \equiv t$. Tu lze volit tak, aby $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$ a Killingova rovnice dává

$$g_{\mu\nu,t} = 0,$$

což odpovídá stacionární geometrii. Existuje SS, v němž $g_{\mu\nu}$ nezávisí na čase. I když $\xi^\mu$ není Killingovým vektorem, v SS s $\xi^\mu = (0, 1, 0, 0)$, pak pro Lieovu derivaci geometrických objektů je

$$\pounds_\xi \Phi = \Phi_{,x}.$$

**Příklady Killingových vektorů:**

**1) Povrch 2-koule** $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi$; $[(\theta, \varphi) = (x^1, x^2)]$, Killingovy vektory jsou lineární kombinace $\xi^{(1)} = (0, 1), \xi^{(2)} = (-\cos\varphi, \mathrm{cotg}\theta \sin\varphi)$. Jsou to složky generátorů grupy rotací, operátorů momentu hybnosti $L_z, L_y, L_x$ ve sférických souřadnicích.

**2) Minkovského prostoročas:** Existuje 10 nezávislých Killingových vektorů. Ve standartním Lorentzově systému to jsou:

- **a)** 4 tlanslační vektory $\xi^{(A)\mu} = a^{(A)\mu}, A = 1, 2, 3, 4; a^{(A)\mu}$ - konstantní vektory
- **b)** 3 vektory generující prostorové rotace $\xi^{(r)\mu} = (0, \xi^{(r)m}), \xi^{(r)m} = \epsilon^{mrs}x_s, r = 1, 2, 3.$
- **c)** 3 vektory generující prostoročasové rotace, spec. Lorentzovy transformace podé tří os $\xi^{(r)}_\mu = \frac{1}{2}(\delta^0_\mu x^r - \delta^r_\mu x^0)$

**3) Schwarzschildova geometrie**
$\mathrm{d}s^2 = -(1 - \frac{2M}{r})\mathrm{d}t^2 + (1 - \frac{2M}{r})^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2)$

- **a)** 3 „rotační“ Killingovy vektory - neboť 2-plochy $r$ =konst. a $t$ =konst. mají geometrii euklidovských 2-koulí.
- **b)** Killingův časový vektor $\xi^\mu_{(t)} = (1, 0, 0, 0)$ - stacionarita Schwarzschildovy geometrie,

$$g_{\mu\nu}\xi^\mu_{(t)}\xi^\nu_{(t)} = g_{00} = (1 - \frac{2M}{r});$$

$\xi^\mu_{(t)}$ nemá časový charakter na $r \leq 2M$ - uvnitř černé díry.

# Kapitola 2

# Černé díry

## 2.1 Reissner–Nordströmova geometrie

Tlak záření působí jinak na protony a jinak na elektrony a ve hvězdách tedy může vzniknout elektrický náboj. U neutronové hvězdy může při výbuchu odletět slupka nesoucí náboj. Nenulový náboj ovšem podstatně změní charakter černé díry a její singularity. Částice se pak mohou dostat do jiného vesmíru.

Nejdříve je třeba najít sféricky symetrické řešení Einstein–Maxwellových rovnic

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu},$$
$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}(-F_\mu{}^\sigma F_{\nu\sigma} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}).$$

Elektromagnetické pole budí nulovou křivost - $T_\mu{}^\mu = 0 \Rightarrow R = 0$. Je buzen křivý prostor s nulovou skalární křivostí. Zajímáme se o vakuové řešení použijeme tedy bezzdrojové rovnice. Maxwellovy rovnice:

1. série: $(\sqrt{-g}\,F^{\mu\nu})_{,\nu} = 0 \quad (\Leftarrow F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0)$
2. série: $F_{[\mu\nu,\lambda]\mathrm{cycl}} = 0$

druhá série se splní identicky zavedením 4-potenciálu $A^\mu$, na který naložíme Lorentzovu podmínku $A^\sigma{}_{;\sigma} = 0$; pak máme d'Allambertovu rovnici pro potenciál

$$-A^\mu{}_{;\sigma}{}^{;\sigma} + R^\mu{}_\sigma A^\sigma = 0.$$

Vždy lze zavést takový souřadný systém, v němž je sféricky symetrická metrika dána vztahem

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^\nu \mathrm{d}t^2 - \mathrm{e}^\lambda \mathrm{d}r^2 - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2).$$

Dosazením do Einsteinových rovnic zjistíme, že $\nu, \lambda$ závisí jen na $r$ a ne na $t$. Tj. $\nu = \nu(r), \lambda = \lambda(r)$ – Birkhoffův teorém. Einsteinovy rovnice si vynucují statickou metriku. Chceme **E** ve směru $r$ tj. radiální elektrické pole. Platí $E = E(r)$ neboť jde o sférický případ. Pak je $F_{01} \neq 0$; $F_{01} = F_{10}$ a tedy

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je výhodné řešit ve smíšených složkách, neboť se tam vyskytují $\delta^0_\mu$. Platí, že $F^{01} = g^{00}g^{11}F_{01} = \mathrm{e}^{-(\nu+\lambda)}E(r)$. Nakonec dostáváme

$$T^0_0 = \frac{1}{4\pi}E^2 e^{-(\nu+\lambda)}; \quad T^1_1 = -T^2_2 = -T^3_3 = \frac{1}{8\pi}E^2 e^{-(\nu+\lambda)}$$

Lze tedy ukázat, že $E = Q/r^2$.

Výsledná metriku ve tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{c^4 r^2}\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{c^4 r^2}}$$
$$-r^2\mathrm{d}\Omega^2$$

se nazývá Reissner–Nordströmova geometrie.

Vezmeme-li geometrické jednotky, v nichž je $c = G = 1$; $\frac{GM}{c^2} \to M$; $\frac{\sqrt{G}Q}{c^2} \to Q$; $[Q] = \mathrm{cm}^{3/2}\mathrm{g}^{-1/2}\mathrm{s}^{-1}$ v CGS $[Q] = \mathrm{cm}$ v geometrických jednotkách. Pak Reissner–Nordströmova metrika je

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}}$$
$$-r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)$$

Toto řešení je odlišné od Schwarzschildova v tom, že zde existují dva horizonty: $r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$. Metrika na nich je singulární ($g_{00} = 0;\ g_{rr} \to \infty$). Horizonty existují pouze pro $|Q| \leq M$. Pro $|Q| = M$ máme jen jeden horizont $r = M$ vzniklý splynutím obou horizontů. Pro $|Q| > M$ horizonty zmizí, singularita je jen v počátku a nemáme tedy žádnou černou díru. $|Q| = M$ fyzikálně znamená, že máme hmotu nabitou tak, že elektrostatická repulze kompenzuje gravitaci.

V tomto případě určíme vzdálenost (vlastní) z nějakého bodu nad horizontem k němu.

$$\int \mathrm{d}l = \int_{r_\mathrm{i}}^{r=M} \frac{\mathrm{d}r}{1 - \frac{M}{r}} \to \infty$$

!!! Tady bude obrazek !!!

Vlastní čas, za který přejde částice z $r_\mathrm{i}$ do $r = M$ je konečný (nekonečný je tento čas z hlediska vnějšího pozorovatele). Je vidět, že nalezené souřadnice jsou na horizontu moc patologické. Pokusíme se nyní toto řešení zkruskalizovat – tj. pokrýt souřadnicemi celou varietu. Uvidíme, že je třeba nekonečně mnoho map k pokrtí celé variety. Budeme uvažovat případ se dvěma horizonty a budeme brát metriku

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1-\frac{r_+}{r}\right)\left(1-\frac{r_-}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{(1-\frac{r_+}{r})(1-\frac{r_-}{r})} \tag{2.1}$$

Úhlovou část, která je zcela regulérní, nebudeme v metrice dále psát.

a) V rovině $(r,t)$ převedeme (2.1) do konformně plochých souřadnic $t, r^*$ tak, že platí

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1-\frac{r_+}{r}\right)\left(1-\frac{r_-}{r}\right)(\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}r^{*2})$$

Je třeba zavést funkci $r = r(r^*)$. Naše metrika je násobkem metriky ploché $(\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}r^{*2})$. Musí být

$$\frac{\mathrm{d}r^*}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{(1-\frac{r_+}{r})(1-\frac{r_-}{r})}$$

$t - r^*$ – retardovaný čas $\qquad t + r^*$ – advanceovaný čas

Plyne z požadavku, aby $t - r^* =$ konst. a $t + r^* =$ konst. byly vcházející, resp. vycházející světelné geodetiky. Integrací se dostane:

$$r^* = r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-}\ln\left|\frac{r-r_+}{r_+}\right| - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-}\ln\left|\frac{r-r_-}{r_+}\right|$$

Z tohoto lze určit $r = r(r^*)$.

b) Pro $r \to \infty$ je $r^* \to \infty$; pro $r \to r_+$ je $r^* \to -\infty$. Horizont je odsunut do nekonečna, ale tím je tam odsunut i celý vnitřek pod horizontem. $r \to r_- \Rightarrow r^* \to +\infty$. Budeme tedy potřebovat nejméně jednu další mapu k pokrytí celé variety.

!!! Tady bude obrazek !!!

U Schwarzschildova řešení byla uvnitř dynamická oblast, v níž pozorovatel nemohl stát na pevném místě, neboť růstu jeho vlastního času odpovídalo zmenšováni se souřadnice $r$. V Reissnerově–Nordströmově případě je uvnitř pod vnitřním horizontem $r_-$ statická oblast, kde pozorovatel může zůstat na pevném $r$. Tj. hvězda zkolabovaná pod $r_-$ nemusí dále kolabovat do singularity v $r = 0$.

c) Zavedeme nyní nulové souřadnice (analogicky k postupu ve Schwarzschildovském případě)

$$t^+ = t + r^*; \quad t^- = t - r^*$$

U Kruskala jsme vše dělali vně a přišli jsme na řešení, které lze protáhnout pod horizont. Máme analogické rovnice a ty nám dávají analogické řešení.

Metrika poblíž $r = r_+$ má tvar

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1-\frac{r_-}{r_+}\right)\exp\left[\frac{r_+ - r_-}{2r_+^2}(t^+ - t^-)\right]\mathrm{d}t^+\,\mathrm{d}t^-. \tag{2.2}$$

Budeme chtít zavést nulové souřadnice $U, V$, v nichž by metrika byla regulární na horizontu.

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1-\frac{r_+}{r}\right)\left(1-\frac{r_-}{r}\right)\mathrm{d}t^+\,\mathrm{d}t^-$$

Z této metriky lze přejít k metrice (2.2) a pak k nulovým souřadnicím.(?) Budeme odhadovat, co budou dělat členy $(1 - r_+/r)$ a $(1 - r_-/r)$, když se $r$ bude blížit k vnějšímu horizontu. $r \to r_+ \to (1 - r_-/r) \to (1 - r_-/r_+)$. Odhad druhého členu bude nesnadnější: $r = r(r^*)$; $r^*$ závisí na $t^+, t^-$ a přejdu k metrice v $t^+, t^-$:

$$r \approx r_+ : \quad r^* \approx \frac{r_+^2}{r_+ - r_-}\ln\left(\frac{r - r_+}{r_+}\right) \Rightarrow$$

$$\exp\left(\frac{r_+ - r_-}{r_+^2}r^*\right) = \frac{r - r_+}{r_+} = \left(\frac{r}{r_+} - 1\right)$$

Pro $r \approx r_+$ ovšem platí, že

$$\left(1-\frac{r_+}{r}\right) \approx \frac{r}{r_+}\left(1-\frac{r_+}{r}\right) = \left(\frac{r}{r_+} - 1\right)$$

tedy

$$\left(1-\frac{r_+}{r}\right) \approx \exp\left[\frac{r_+ - r_-}{2r_+^2}(t^+ - t^-)\right],$$

což bylo třeba ukázat. Tím je určeno asymptotické chování metriky poblíž $r = r_+$. Zavedeme nyní nulové kruskalovské souřadnice transformací

$$\mathrm{d}t^+ = c\exp\left(-\frac{r_+ - r_-}{2r_+^2}t^+\right)\mathrm{d}\tilde{V}_1,$$

$$\mathrm{d}t^- = c\exp\left(\frac{r_+ - r_-}{2r_+^2}t^-\right)\mathrm{d}\tilde{U}_1,$$

$$c = \frac{2r_+^2}{r_+ - r_-}$$

– 1.Kruskalovské souřadnice $r > r_+$.

Chceme, aby v těchto nových souřadnicích exponenciála vypadla. Volba konstanty je provedena tak, aby to při integraci vypadlo. Bude

$$\tilde{U}_1 = \exp\left(-\frac{r_+ - r_-}{r_+^2}t^-\right); \quad \tilde{V}_1 = \exp\left(\frac{r_+ - r_-}{2r_+^2}t^+\right)$$

(Horizonty se z nekonečna vracejí touto transformací zpět.) Vyjádříme teď přesnou metriku v souřadnicích $\tilde{U}_1, \tilde{V}_1$.

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1-\frac{r_+}{r}\right)\left(1-\frac{r_-}{r}\right)\left(\frac{2r_+^2}{r_+ - r_-}\right)^2 \times\exp\left[\frac{r_+ - r_-}{2r_+^2}(t^- - t^+)\right]\mathrm{d}\tilde{V}_1\,\mathrm{d}\tilde{U}_1$$

Rozepíšeme si exponenciálu

$$\begin{aligned}\exp\left[\frac{r_+ - r_-}{2r_+^2}(t^- - t^+)\right] &= \exp\left(-\frac{r_+ - r_-}{r_+^2}r^*\right)\\ = \exp\Bigg\{ -\frac{r_+ - r_-}{r_+^2}\Bigg[r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-}\ln\left(\frac{r - r_+}{r_+}\right)\\ -\frac{r_-^2}{r_+ - r_-}\ln\left(\frac{r - r_-}{r_+}\right)\Bigg]\Bigg\}\\ = \exp\left(-\frac{r_+ - r_-}{r_+^2}r\right)\frac{r_+}{r - r_+}\left(\frac{r - r_-}{r_+}\right)^{\left(\frac{r_-}{r_+}\right)^2}.\end{aligned}$$

Pak metrika má tvar

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = {}& \frac{r - r_+}{r}\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)\exp\left(-\frac{r_+ - r_-}{r_+^2}r\right)\\ &\times\frac{r_+}{r - r_+}\left(\frac{r - r_-}{r_+}\right)^{\left(\frac{r_-}{r_+}\right)^2}\left(\frac{2r_+^2}{r_+ - r_-}\right)^2\mathrm{d}\tilde{V}_1\,\mathrm{d}\tilde{U}_1.\end{aligned}$$

Definujme nyní $\tilde{U}_1 = V_1 - U_1$, $\tilde{V}_1 = V_1 + U_1$, tj. $\mathrm{d}\tilde{U}_1\,\mathrm{d}\tilde{V}_1 = \mathrm{d}V_1^2 - \mathrm{d}U_1^2$. Výsledná metrika pak má tvar

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = {}& \frac{r_+}{r}\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)\left(\frac{r - r_-}{r_+}\right)^{\left(\frac{r_-}{r_+}\right)^2}\\ &\times\left(\frac{2r_+^2}{r_+ - r_-}\right)^2\exp\left(-\frac{r_+ - r_-}{r_+^2}r\right)[\mathrm{d}V_1^2 - \mathrm{d}U_1^2].\end{aligned}$$

Což lze ještě upravit na tvar

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = {}& \left(\frac{r_+}{r}\right)^2\left(\frac{r - r_-}{r_+}\right)^{\left(\frac{r_-}{r_+}\right)^2 + 1}\\ &\times\left(\frac{2r_+^2}{r_+ - r_-}\right)\exp\left(-\frac{r_+ - r_-}{r_+^2}r\right)[\mathrm{d}V_1^2 - \mathrm{d}U_1^2].\end{aligned}$$

Uděláme si nyní Kruskalův diagram. K tomu budeme potřebovat výraz

$$\begin{aligned}V_1^2 - U_1^2 = \tilde{V}_1\tilde{U}_1 = -\exp\left(\frac{r_+ - r_-}{r_+^2}r^*\right) =\\ -\left(\frac{r - r_+}{r_+}\right)\left(\frac{r_+}{r - r_-}\right)^{\left(\frac{r_-}{r_+}\right)^2}\exp\left(\frac{r_+ - r_-}{r_+^2}r\right);\\ \left(\frac{r_-}{r_+}\right)^2 < 1; \quad \text{tedy} \quad r \to \infty \Rightarrow \pm U_1 \to \infty;\\ r = \text{konst.} \Rightarrow V_1^2 - U_1^2 = \text{konst.} \text{ – hyperboly}\end{aligned}$$

Ukazuje se, že horizont $r_-$ dostaneme odsunutý až do nekonečna; přitom lze spočítat, že je v konečné vzdálenosti. Budeme tedy muset napojovat ještě jednou.

!!! Tady bude obrazek !!!

$t$ = konst. vychází jako u Schwarzschildovy černé díry. $t = \text{konst.} \Rightarrow t^+ + t^- = \text{konst.}$ $\tilde{U}_1/\tilde{V}_1 = \text{konst.} \Rightarrow$ $t$ = konst. jsou čáry přímé úměrnosti. V tomto diagramu jsme se nedostali k singularitě, protože vnitřní horizont byl odsunut do nekonečna. Naše souřadnice kolem $r_-$ jsou tedy špatné $\Rightarrow$ že je lze použít jen pro nějaké $r$ takové, že $r_- < r < r_+$. Musíme pak zkruskalizovat vnitřek – tj.najít souřadnice, které by popisovaly oblast od zvoleného $r$ až přes vnitřní horizont $r_-$.

!!! Tady bude obrazek !!!

Definujme

$$t_2^+ = t + r^*; \qquad t_2^- = t - r^*;$$

metrika je:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)\mathrm{d}t_2^+\,\mathrm{d}t_2^-.$$

Abychom uhádli, jak máme přijít k $\tilde{U}_2, \tilde{V}_2$, budeme muset rozepsat metriku poblíž

$$\begin{aligned}r \approx r_- \Rightarrow \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) &= \left(1 - \frac{r_+}{r_-}\right),\\ r^* &= -\frac{r_-^2}{r_+ - r_-}\ln\left(\frac{r - r_-}{r_+}\right)\end{aligned}$$

Úpravami analogickými předchozímu postupu dostaneme:

$$\mathrm{d}s^2 \approx \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)\frac{r_+}{r_-}\exp\left(\frac{r_+ - r_-}{-r_-^2}\right)\left(\frac{t_2^+ - t_2^-}{2}\right)\mathrm{d}t_2^+\mathrm{d}t_2^-$$

Z toho je vidět, že

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tilde{U}_2 &\sim -\exp\left(\frac{r_+ - r_-}{2r_-^2}t_2^-\right)\mathrm{d}t_2^-,\\ \mathrm{d}\tilde{V}_2 &\sim +\exp\left(-\frac{r_+ - r_-}{2r_-^2}t_2^+\right)\mathrm{d}t_2^+\end{aligned}$$

Zde se prohazují znaménka oproti $\tilde{U}_1, \tilde{V}_1$, neboť se prohodí prostorový a časový charakter souřadnic $\longrightarrow$ proto změny ve znaménkách exponentů. Konstantu zvolíme tak, aby metrika vyšla podobně jako v ...

$$\begin{aligned}\tilde{U}_2 &= \sqrt{\frac{r_+}{r_-}}\exp\left(\frac{r_+ - r_-}{2r_-^2}t_2^-\right),\\ \tilde{V}_2 &= \sqrt{\frac{r_+}{r_-}}\exp\left(-\frac{r_+ - r_-}{2r_-^2}t_2^+\right)\end{aligned}$$

Metrika má pak tvar:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = {}& -\frac{r_-r_+}{r^2}\left(\frac{r_+ - r}{r_+}\right)^{\left(\frac{r_+}{r_-}\right)^2 + 1}\\ &\times\left(\frac{2r_-^2}{r_+ - r_-}\right)^2\exp\left(\frac{r_+ - r_-}{r_-^2}r\right)\mathrm{d}\tilde{V}_2\,\mathrm{d}\tilde{U}_2\end{aligned}$$

Nyní již opět můžeme zadefinovat normální Kruskalovské souřadnice:

$$\tilde{U}_2 = -U_2 - V_2; \quad \tilde{V}_2 = -U_2 + V_2$$

Jsou voleny tak, aby pro částici, která půjde dovnitř, běžel čas $V_2$ stále do budoucnosti.

!!! Tady bude obrazek !!!

Metrika má pak tvar

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 \;=\; & \frac{r_- r_+}{r^2}\left(\frac{r_+ - r}{r_+}\right)^{\left(\frac{r_+}{r_-}\right)^2+1} \\
& \times\left(\frac{2r_-^2}{r_+ - r_-}\right)\exp\!\left(\frac{r_+ - r_-}{r_-^2}r\right)[\mathrm{d}V_2^2 - \mathrm{d}U_2^2]
\end{aligned}
$$

Pro $r = r_+$ jsou zde potíže, ale nás zajímá oblast kolem $r = r_-$. Sestrojíme opět Kruskalovský diagram:

!!! Tady bude obrazek !!!

$$
V_2^2 - U_2^2 = \frac{r - r_-}{r_-}\left(\frac{r_+}{r_+ - r}\right)^{\left(\frac{r_+}{r_-}\right)^2}\exp\!\left(-\frac{r_+ - r_-}{r_-^2}r\right)
$$
$$
r \to r_+ \Rightarrow V_2 \to \pm\infty
$$

Platí tedy $r = r_- \Rightarrow V_2^2 - U_2^2 = 0$ - asymptoty jsou vnitřní horizonty

$$
r \to 0: \; V_2^2 - U_2^2 = -1
$$

Singularita má v Reissner–Nordströmov černé díře časový charakter. $V_2$ je časová souřadnice, světelné kužely jsou pod $45°$, protože máme konformně plochou metriku. Částice v oblasti V se musí pohybovat uvnitř světelného kužele. Může padnout do singularity vpravo nebo vlevo, ale na rozdíl od Schwarzschildovy černé díry tam padnout nemusí. Může pokračovat do oblasti VII, v níž se nachází se stále se zvětšujícím $r$ a projitím dalším $r_+$ – vnějším horizontem (zde ovšem ve $V_2 = +\infty$ se vynoří v jiném vesmíru. Máme tedy vlastně bílou díru, z níž se hmota vynořuje.

Původně jsme očekávali dvě mapy, abychom pokryli celou varietu – první už zkonstruovanou $U_1V_1$, druhou $U_2V_2$. Nyní je vidět, že potřebujeme nekonečně mnoho map, abychom mohli sledovat cestu částice, která se stále vyhýbá singularitám a cestuje stále do dalších vesmírů (v některém vesmíru ovšem částice může vylézt ven).

Nyní se pokusíme obě mapy spojit.

!!! Tady bude obrazek !!!

Je zřejmé, že přímo sešít tyto dvě mapy nejde, protože bychom dostali uzavřenou kauzální křivku. Napojení nejlépe vynikne v konformní metrice, jak nakonec ukážeme. Mapu (I–IV) použijeme jen pro určitou hyperbolu $r =$ konst.$(r_- < r < r_+)$ a ztotožníme ji s hyperbolou odpovídající stejnému $r$ v (V–VIII) v kvadrantu V. Je vidět, že ke sledování dráhy částice je třeba napojovat stále další diagramy.

!!! Tady bude obrazek !!!

Provedeme nyní konformní transformaci, která nekonečné oblasti v diagramech stlačí na čtverce konečné velikosti (viz. Carter, Phys. Rev. Letters 21,423 /(1968)). Zavedou se nové souřadnice $\Psi, \xi$ následujícími transformačními vztahy:

$$
U - V = \mathrm{tg}\frac{1}{2}(\xi - \Psi); \quad U + V = \mathrm{tg}\frac{1}{2}(\xi + \Psi)
$$

Jedná se skutečně o konformní transformaci, neboť máme

$$
\begin{aligned}
-(\mathrm{d}U + \mathrm{d}V)(\mathrm{d}U - \mathrm{d}V) &= \mathrm{d}V^2 - \mathrm{d}U^2 \\
&= -\frac{(\mathrm{d}\xi^2 - \mathrm{d}\Psi^2)}{4\cos^2\frac{1}{2}(\xi - \Psi)\cos^2\frac{1}{2}(\xi + \psi)}
\end{aligned}
$$

$\mathrm{d}U = \mathrm{d}V \iff \mathrm{d}\xi = \mathrm{d}\Psi \Rightarrow$ struktura světelných kuželů se zachovává (to platí při všech konformních transformacích). Výsledný graf pak bude vypadat takto:

!!! Tady bude obrazek !!!

Popis zelená čára je trajektorie částice padající do Reissner–Nordströmovy černé díry. Jsou tam vyznačeny možnosti, které si může částice vybrat - buď pád do singularity, nebo vynoření se v jiném vesmíru, nebo pokračování do stále dalších vesmírů.

## 2.2 Kerr–Newmanova geometrie

Řešení Einsteinových rovnic (v prázdném prostoru) odpovídající vnějšímu gravitačnímu poli rotujicího nabitého tělesa hmoty *m*, s momentem hybnosti na jednotku hmoty rovným *a* a nábojem *e* (v geomterických jednotkách) je dáno metrikou (vyjádřenou zde v Boyer–Lindquistových souřadnicích)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 \;&=\; g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu \\
&= \rho^2\triangle^{-1}\mathrm{d}r^2 + \frac{\sin^2\Theta}{\rho^2}[a\,\mathrm{d}t - (r^2 + a^2)\,\mathrm{d}\phi]^2 \\
&\quad +\rho^2\,\mathrm{d}\Theta^2 - \frac{\triangle}{\rho^2}[\,\mathrm{d}t - a\sin^2\Theta\,\mathrm{d}\phi]^2. \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

2-forma magnetického pole je

$$
\begin{aligned}
f \;&=\; \frac{1}{2}f_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha \wedge \mathrm{d}x^\beta \\
&= \frac{e}{\rho^4}(r^2 - a^2\cos^2\Theta)\,\mathrm{d}x \wedge [\,\mathrm{d}t - a\sin^2\Theta\,\mathrm{d}\phi] \\
&\quad -2\frac{e}{\rho^4}ar\cos\Theta\sin\Theta\,\mathrm{d}\Theta \wedge [a\,\mathrm{d}t - (r^2 + a^2)\,\mathrm{d}\phi] \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

kde

$$
\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\Theta \qquad a \qquad \triangle = r^2 - 2mr + a^2 + e^2.
$$

Toto řešení objevil Newman a další aplikací komplexní souřadnicové transformace na Reissner–Nordströmovo řešení.

Tato transformace byla známa dříve, protože dávala Kerrovo řešení ze Schwarzschildova. Řešení (2.3) je nazýváno Kerrovým–Newmanovým řešením a má tytéž symetrie a tytéž Killingovy vektory

$$l_t^\alpha = (1,0,0,0)\,; \quad l_\phi^\alpha = (0,0,0,1)$$

jako Kerrovo řešení. Když je $a^2 + e^2 \leq m^2$, je toto řešení vybaveno vnějším horizontem $r = r_+$, kde je

$$r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2 - e^2}$$

a vnitřním horizontem

$$r = r_- = m - \sqrt{m^2 - a^2 - e^2}.$$

$r_+$ i $r_-$ jsou nulovými plochami a splývají v případě $a^2 + e^2 = m^2$.

Kerrovo–Newmanovo řešení je rovněž vybaveno toutéž singularitou v $r = 0$ na rovníkové rovině jako Kerrovo řešení. Killingův vektor $l_t^\alpha$ se stává nulovým na ploše určené vztahem $g_{00} = 0$, tj. když

$$r = r_0 = m + \sqrt{m^2 - a^2\cos^2\Theta - e^2}$$

a

$$r = r_1 = m - \sqrt{m^2 - a^2\cos^2\Theta - e^2}.$$

Tyto dvě plochy splynou v jednu toroidální plochu v případě $a^2 + e^2 > m^2$.

V gravitačním kolapsu nějakého fyzikálního systému řešení (2.3), (2.4) při $a^2 + e^2 \leq m^2$ asymptoticky v čase *t* pokryjí celou bezsingulární oblast souřadnice *r*, tj. pro $r > r_+$ a horizont se vytvoří na $r = r_+$ v limitě $t \to \infty$. Všechny další detaily nebo kvantová čísla systému budou vyplaveny pryč a pouze tři veličiny po kolapsu zůstanou–hmota, náboj a moment hybnosti.

Toto tvrzení vyjadřuje, ještě úplně nedokázanou, Carterovu - Israckovou domněnku, obrazně vyjádřenou J. A. Wheelerem na tvrzení „černá díra nemá žádné vlasy“.

Je-li tato domněnka pravdivá, pak řešení (2.3), (2.4) reprezentuje nejobecnější černou díru, která je vybavena magnetickým polem, jak dále ukážeme.

Geometrie vnitřního horizontu $r = r_+$ nemá velký fyzikální význam, neboť jak bylo v minulých kapitolách uvedeno, dynamika takových oblastí vstupuje do hry pouze v konečných fázích kolapsu samotného vesmíru.

Chování některých kuželů v geomerii (2.3) je přesně stejné jako v Kerrově geometrii, přičemž $r_+$ a $r_0$ jsou nyní dány vztahy (2.2), (2.2). Je zde $r_0$ plochou nekonečného rudého posuvu ve stejném smyslu jako v kapitole IV.

Úhlová rychlost lokálně Lorentzova systému jak se jeví v nekonečnu je nyní dána vztahem

$$\omega' = -\frac{g_{03}}{g_{33}} = \frac{a(2mr - e^2)}{(r^2 + a^2)^2 - a^2\triangle\sin^2\Theta}$$

Rudý posuv měřený v nekonečnu fotonu emitovaného zdrojem stojícím v klidu v lokálně Lorentzovském systému na kruhu $(r, \Theta)$ bude

$$\frac{\nu_{\text{at finity}}}{\nu_{\text{source}}} = (U^0 - bu^3)^{-1}_{\text{local Lorentz}} = \frac{\triangle^{1/2}\rho[(r^2+a^2)^2 - a^2\triangle\sin^2\Theta]^{1/2}}{[(r^2+a^2)^2 - a^2\triangle\sin^2\Theta - (2mr - e^2)ab]},$$

kde $b = -K_3/K_0$ je impaktní parametr fotonu, $K_3, K_0$ jsou pohybové konstanty.

Foton emitovaný zdrojem stoupajícím v lokálně Lorentzově systému bude posunut do ruda nekonečně pouze bude-li tento systém na vnějším horizontu.

Kerrovo-Newmanovo řešení má nový podivný rys. Obsahuje oblast pro *r* kladná, ale vždy menší než $|e|$, kde

$$g_{33} = \sin^2\Theta\left[(r^2 + a^2) + \frac{a^2}{\rho^2}(2mr - e^2)\sin^2\Theta\right] < 0.$$

V nenabité Kerrově řešení je $g_{33}$ záporné pouze v malé oblasti záporných *r* v bezprostředním okolí singularity $\rho^2 = 0$. V této oblasti je azimutální souřednice $\phi$ časovou souřadnicí a kružnice $t = \text{konst.}, r = \text{konst.}, \Theta = \text{konst.}$ jsou uzavřené časové křivky, čímž je porušen princip kauzality. Je-li $a^2 + e^2 \leq m^2$, pak se nemusíme trápit, jelikož oblast kauzalitních poruch je vždy za vnitřním horizontem $(r = r_-)$ a jakákoliv částice nebo foton překročící vnější horizont $(r = r_+)$ nemůže nikdy unikonout zpět do vnějšího světa. Avšak pro $a^2 + e^2 > m^2$ nemáme žádné horizonty a pozorovatel může startovat v nějakém bodě ve vnějším světě, vniknout do oblasti kauzalitních poruch, pohybem ve směru opačném ke smyslu rotace pole putovat v čase *t* nazpátek o $2\pi|a|$ za jednu otočku kolem osy symetrie, a vrátit se zpět do původního bodu startu v lokálním čase dřívějším než (byl) je čas startu.

V nějaké fyzikálně přístupné situaci s $a^2 + e^2 > m^2$ však vnitřní řešení s hmotou a nábojovou hustotou bude pokrývat v souřadnicích *r* oblast větší než $0 \leq r \leq |e|$, čímž bude princip kauzality zachráněn. Dále bude rovněž ukázano, že černá díra s $a^2 + e^2 \leq m^2$ nemůže být vržena do stavu s $a^2 + e^2 > m^2$ transformacemi testovacích částic.

Elektromagnetická síla působící na testující elektrický náboj $\epsilon$ stojící se čtyřrychlostí $u^\alpha$ je dána vztahem:

$$\epsilon f^\alpha{}_\nu u^\nu = \mu\frac{\mathrm{D}u^\alpha}{\mathrm{D}\tau} = \mu\left(\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}u^\beta u^\gamma\right)$$

(deviace trajektorie částice s klidovou hmotou $\mu$ z geodetiky).

Podobně elektromagnetický moment působící na magnetický dipól stojící v tomtéž systému bude nulový, bude-li dipól orientován ve směru

$$^*f^\alpha_{.\nu}u^\nu$$

kde symbol $*$ odpovídá nasledující operaci:

$$*f_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(-g)^{1/2}[\mu\nu\rho\sigma]f^{\rho\sigma}.$$

Jestliže nějaký pozorovatel stojící v lokálním Lorentzově systému měří síly působící na testující elektrický náboj a směr orientace magnetických dipólů, obojí stojící v tomtéž systému, zjistí, že existuje nějaké elektrické pole $E^\mu = f^\mu_{\cdot\nu} u^\nu_{\text{local Lorentz}}$ působící na elektrické náboje a magnetické pole působícína magntetické dipóly s intenzitou $H^\mu = *f^\mu_{\cdot\nu} u^\nu_{\text{local Lorentz}}$, kde $u^\nu_{\text{local Lorentz}}$ je čtyřrychlost lokálně Lorentzova systému, určená vztahy

$$u^1 = u^2 = 0$$

$$\begin{aligned} u^0_{\text{local Lorentz}} &= \frac{[(r^2+a^2)^2 - a^2\triangle \sin^2\Theta]^{1/2}}{\triangle^{1/2}\rho}, \\ u^3_{\text{local Lorentz}} &= \frac{a(2mr-e^2)}{\triangle^{1/2}\rho} \frac{1}{[(r^2+a^2)^2 - a^2\triangle \sin^2\Theta]^{1/2}}. \end{aligned}$$

Pro elektrické a magnetické pole pak dostáváme následující výrazy

$$\begin{aligned} E^r &= e\frac{\triangle^{1/2}}{\rho^5} \frac{(r^2+a^2)(r^2-a^2\cos^2\Theta)}{[(r^2+a^2)^2 - a^2\triangle \sin^2\Theta]^{1/2}}, \\ E^\Theta &= -2ea^2\frac{\triangle^{1/2}}{\rho^5} \frac{r\cos\Theta\sin\Theta}{[(r^2+a^2)^2 - a^2\triangle \sin^2\Theta]^{1/2}}, \\ H^r &= 2ea\frac{\triangle^{1/2}}{\rho^5} \frac{r(r^2+a^2)\cos\Theta}{[(r^2+a^2)^2 - a^2\triangle \sin^2\Theta]^{1/2}}, \\ H^\Theta &= ea\frac{\triangle^{1/2}}{\rho^5} \frac{(r^2-a^2\cos^2\Theta)\sin\Theta}{[(r^2+a^2)^2 - a^2\triangle \sin^2\Theta]^{1/2}}. \end{aligned}$$

Elektrické siločáry jsou definovány jako množina křivek, z nichž každá má tu vlastnost, že tečna k této křivce v každém bodě je paralelní s vektorem elektrického pole v tomto bodě, nebo jsou-li $x^\iota = x^\iota(\sigma)$ jsou parametrické rovnice křivky,

$$[\iota\kappa\tau]E^\kappa \frac{dx^?}{d\sigma} = 0 \quad (?\kappa\tau \text{ mají hodnoty} 1,2,3)$$

Podobně jsou magnetické silokřivky definovány tak, že

$$[\iota\kappa\tau]H^\kappa \frac{dx^?}{d\sigma} = 0$$

V našem případě se tyto rovnice redukují na

$$\begin{aligned} (r^2 - a^2\cos^2\Theta)(r^2+a^2)d\Theta + 2a^2 r\cos\Theta\sin\Theta dr = 0 \\ 2r\cos\Theta(r^2+a^2)d\Theta - (r^2-a^2\cos^2\Theta)\sin\Theta dr = 0 \end{aligned}$$

nezávislé na $m$ a $e$ a pravdivé pouze v lokálně Lorentzově systému ne konstantním $r$ a $\Theta$.

Elektrické silokřivky se nikde neprotínají, rozbíhají se ven z prostoru mezi dvoukoulema $r = |a\cos\Theta|$ (viz obr. ?). Magnetické silokřivky budou radiální na dvoukolích $r = |a\cos\Theta|$ - viz obr. ?.

Elektrické pole je slabší na pólech a silnější na rovníku, zatímco magnetické pole, velmi podobné poli magnetického dipólu, bude silnější na pólech a slabší v oblasti rovníku. Magnetický dipólový moment bude $ea$. Není možná změna gyromagnetického poměru, který je právě $e/m$, stejně jako Diracovy částice.

Pohybové rovnice testující částice v poli magnetické černé díry mohou být odvozeny, zavedeme-li superhamiltonián

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(p_\alpha + \epsilon A_\alpha)(p_\beta + \epsilon A_\beta)$$

s hybností

$$p_\alpha = g_{\alpha\beta}\frac{dx^\beta}{d\lambda} - \epsilon A_\alpha$$

$\epsilon$ je náboj testovací částice, $\tau = \mu\lambda$ je vlastní čas podél její světočáry a $\mu$ je její klidová hmota. $A_\alpha$ je vektorový potenciál.

Stejně jako v nenabitém Kerrově případu máme dvě konstanty pohybu detrminované symetriemi metriky, a to energií částice $E = -p_0$ a $p_\phi = p_3$, což je komponenta hybnosti podél osy symetrie.

Náboj částice $\epsilon$ a hamiltonián $\mathcal{H}$ jsou automaticky pohybovými konstantami, přičemž $\mathcal{H}$ je určeno normalizačními podmínkou

$$g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = -\mu^2,$$

takže

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\mu^2$$

Čtvrtá pohybová konstanta nutná k určení světočáry částice byla nalezena B. Carterem separací proměnných $r, \Theta$ v rovnici (Hamiltonián-Jacobiho) pro Jacobiho akci $S$:

$$\frac{\partial S}{\partial\lambda} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial S}{\partial x^\alpha} + \epsilon A_\alpha\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x^\beta} + \epsilon A_\beta\right)$$

v Kerr-Newmanových souřadnicích (viz rovnici ?).

Dále musela být vybrána speciální kalibrace potenciálu $A_\alpha$, který měl v Kerr-Newmanových souřadnicích tvar

$$A = \frac{er}{\rho^2}(du - a\sin^2\Theta\, d\psi)$$

Hamiltonián-Jacobiho rovnici nelze separovat v jiných souřadnicích, ani při jiné kalibraci potenciálu

Rovnice pohybu takto určené pak mají v Boyer-Linquistových souřadnicích tvar:

$$\rho^2\frac{d\Theta}{d\lambda} = \sqrt{W} \tag{2.5}$$

$$\rho^2\frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{R} \tag{2.6}$$

$$\rho^2\frac{d\phi}{d\lambda} = -\left(aE - \frac{p_\phi}{\sin^2\Theta}\right) + \frac{ap}{\triangle} \tag{2.7}$$

$$\rho^2\frac{dt}{d\lambda} = -(aE\sin^2\Theta - p_\phi) + \frac{(r^2+a^2)P}{\triangle} \tag{2.8}$$

kde

$$\begin{aligned} W &= Q - \cos^2\Theta\left[a^2(\mu^2 - E^2) + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\Theta}\right] \\ P &= E(r^2+a^2) - p_\phi a - \epsilon e r \\ R &= P^2 - \triangle[\,\mu^2 r^2 + (p_\phi - aE)^2 + Q\,] \end{aligned}$$

Q je čtvrtá pohybová konstanta určující rovnicí (2.5) vztah mezi $\Theta$ a $p_\Theta$.

Energie $E$ měřená z nekonečna, částice s azimutální hybností $p_\phi$, klidovou hmotou $\mu$ a nábojem $\epsilon$ s radiální hybností na radiální vzdálenosti $r$ je dána řešením rovnice

$$\begin{aligned} & E^2\,[\,r^4+a^2(r^2+2mr-e^2)\,] \\ & -2E\,[\,(2mr-e^2)ap_\phi-\epsilon er(r^2+a^2)\,] \\ & -(r^2-2mr+e^2)p_\phi^2+2\epsilon earp_\phi^2+\epsilon^2r^2e^2 \\ & -(r^2-2mr+a^2+e^2)(\mu^2r^2+Q) \\ & =[\,(r^2-2mr+a^2+e^2)\,p_r\,]^2 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Budeme zde stejně jako v rovnici (?) uvažovat poze větší kořeny $E_+$, tj. ty, které jsou kladné jdeme-li s $r\to\infty$. Tyto kořeny odpovídají $dt/d\tau>0$. Kořeny $E_-$ odpovídají $dt/d\tau<0$. Rovnice (3.51) má symetrii $-E_-(-p_{\phi,-\epsilon})=E_+(p_{\phi,\epsilon})$ což umožňuje interpretaci antičástic jako děr ve stavech $E_-$, konsistentní s principem ekvivalnce.

Z rovnice (3.51) plyne, že existují stavy s negativní energií dosažitelné částice obíhajícími proti smyslu rotace černé díry a s nábojem opačným k náboji této černé díry. Tyto stavy se zápornou energií však mohou být dosaženy poze v oblasti mezi jednocestnou membránou (povrchem černé díry) a jisou vnější plochou, kterou lze bezprostředně určit z rovnice (3.51) předpokládáme-li $p_r=p_\Theta=0$ jdeme-li k limitě $\mu\to 0$. Pak dostáváme

$$r^2-2mr+e^2+a^2\cos^2\Theta=\sin^2\Theta(2\eta ar+\eta^2r^2)$$

kde $\eta=\epsilon e/p_\phi$.

Je-li testující částice nenabité pak se tento povrch redukuje na plochu nekonečného rudého posuvu. Tyto stavy se zápornou energií nemohou být dosaženy částicemi volně padajícími z nekonečna, ake lze si představit stabilní stavbu obíhající černou díru nad limitní plochou (2.2), z níž spouštíme náboj na provaze do oblasti negativní energií. Takoto lze získat energií včětší než je energie obsažená v náboji, dosáhl-li náboj stavů se zápornpou energií. Takovýto naboj však bude padat do černé díry, čímž zmenší její hmotu a náboj nebo moment hybnosti nebo obojí. Lze tedy z takovéto obíhající stavby extrahovat buď Coulombickou, nebo rotační, nebo obě energie z magnetické černé díry.

Praktičtější metodou extrakce energie bude vyslání čáastice z nekonečna a její rozpad (např. radioaktivní) v oblasti mezi limitní plochou e jdenocestnou membránou, popř. vyslání částic z nekonečna a jejich srážka v této oblasti. Takové procesy budou zachovávat celkovou 4-hybnost částic v okamžiku rozpadu nebo kolise a celkový náboj.

$$\begin{aligned} E_1+E_2 &= E_3+E_4, \\ p_{\phi_1}+p_{\phi_2} &= p_{\phi_3}+p_{\phi_4}, \\ \epsilon_1+\epsilon_2 &= \epsilon_3+\epsilon_4 \\ (p_{r_1}+p_{r_2})_{at\,event} &= (p_{r_3}+p_{r_4})_{at\,event} \\ (p_{\Theta_1}+p_{\Theta_2})_{at\,event} &= (p_{\Theta_3}+p_{\Theta_4})_{at\,event} \end{aligned}$$

V obou případech lze proces naaranžovat tak, aby jedna z vytvořených částic $(3)$ měla energii $E_3$ kladnou v lokálně Lorentzově systému, ale zápornou vzhledem k nekonečnu. Částice $(3)$ pak spadne do černé díry, zatímco částice $(4)$ unikne do nekonečna s energii $E_4$ než součet energií původních částic.

Oblast mezi limitní plochou (2.2) a jednocestnou membránou bude nazývaná efektviní ergosférou, protože v této oblasti lze vytvářet práci extrakcí energie z černé díry. Termín „efektivní“ říká, že rozměry této oblasti závisí na poměru náboje a hmoty testující částice.

Je možné představit si různé fyzikální modifikace metod extrakce energie zde popsaných, jako je například rozlomení kapky hmoty působením přílivových nebo polarizačních sil. Avšak všechny procesy extrakce energie budou mít za následek asimilaci hmoty, ať již nabité nebo nenabité, černou dírou.

V každém takovém procesu se moment hybnosti a náboj a tedy i rotační a elektromagnetická energie černé díry zmenší a neustále opakování těchto procesů způsobí přeměnu magnetické černé díry ve Schwarzsildovou, čímž bude další extrakce energie nemožná.

Začneme-li pak s novou černou dírou mající původní hmotu, náboj a moment hybnosti, pak extrakce energie čáaticemi s rozděleným poměrem momentu hybnosti,resp. náboje k jejich hmotě, v jiných místech efektivní ergosféry nebo použitím rozdílných metod extrakce energie, než tomu bylo u první magnetické černé díry povede ke vzniku Schwarzsildovy černé díry s hmotou jinou, než je u původní Schwarzsildovy černé díry. Stejně jako v kapitole 5. se zde naskýtá otázka, jaký proces nám dá nejmenší Schwarzsildovou černou díru, nebo jinými slovy, jaké je maximální množství energie, které může být odčerpáno z magnetické černé díry. můžeme rovněž začít se Schwarzsildovou černou dírou a přidáváním hmoty, momentem hybnosti a náboje ji transformovat na magnetickou černou díru se specifickými poměry $a/m, e/m$. Bude pak vždy možné transformovat pak černou díru zpátky na Schwarzsildovou s toutéž hustotou?

Taková reversibilní transformace pak může být použitá k definici čistě rotační nebo Coulombovské energie magnetické černé díry.

Je-li čátice s úhlovou hybnstí $p_\phi$ a nábojem $\epsilon$, oběma kladnými pohlcena černou dírou, dostaneme černou díru s momentem hybnosti $L'=L+p_\phi$, nábojem $e'=e+\epsilon$ a hmotou $m'=m+E(p_{\phi,\epsilon})$, kde $E(p_{\phi,\epsilon})$ je energie částice. Abychom dostali původní $L, e$ musí být pohlcena částice s úhlovou hybnosti $(-p_\phi)$ a nábojem $(-\epsilon)$.

Nová hmota černé díry pak bude $m''=m'+E(-p_\phi,-\epsilon)$.

Podmínka pro reversibilitu má tedy tvar:

$$\triangle E=E(p_\phi,\epsilon)+E(-p_\phi,-\epsilon)$$

Požadujeme, aby radiální hybnost částice byla reálná v okolí černé díry. Z rovnice (3.51)dostaneme, že $\triangle E\geq 0$. Tato podmínka říká, že neexistuje účinnější proces extrakce energie, než je reversibilní limita $\triangle E=0$.

Tento reversibilní případ nastává v limitě, kdy kontravariantní radiální hybnosti $p^r$ obou částic jsou libovolně malé (bod na obrázku) v $r = r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2 - e^2}$, kde oblast oddělující kladné a záporné kořeny je nulová (částice pohlcena při dotyku horizontu).

Avšak bude-li proces extrakce energie uskutečňován stále blíž reversibilní limitě, čas potřebný k extrakci poroste, protože se přibližujeme horizontu.

V limitním případě (reversibilním) případě je vztah mezi $E, p_\phi, \epsilon$ lineární:

$$E = \frac{ap_\phi + r_+ e\epsilon}{r_+^2 + a^2}$$

Půjdeme-li k limitě infinitezimálních částic, použitím zákonů energie, mometnu hybnosti a náboje dosádíme-li do (2.2) $E = dm$, $p_\phi = dL$, $\epsilon = de$, čímž dostaneme parciální diferenciální rovnici

$$dm(L,e) = \frac{\frac{L}{m}\, dL + r_+ e\, de}{r_+^2 + \frac{L^2}{m^2}}\,,$$

jejíž interakce dává rovnici

$$m^2 = \left(m_{ir} + \frac{e^2}{4m_{ir}}\right)^2 + \frac{L^2}{4m_{ir}^2}$$

určující následující podmínku, která má být splněna

$$\frac{L^2}{4m_{ir}^4} + \frac{e^4}{16m_{ir}^4} \leq 1$$

Integrační konstanta $m_{ir}$ je hmota Schwarzsildovy černé díry, která vznikne vyčerpáním celé rotační a Coulombovské energie magnetické černé díry reversibilními transformacemi - limitní třídou transformací vymezených na plochu v obr.?. Všechny další transformace budouz inversibilní a způsobí růst veličiny $m_{ir}$ (posun na vyšší plochu $m$ versus $L, e$ na obr. ?).Neexistuje proces, při němž by tato veličina mohla být zmenšena (nejsou povoleny transformace pod tuto plochu na obr.?). $m_{ir}$ je tedy ireducibilní hmota magnetické černé díry.

Obr. 7.3-hmota-energie $m$ v závislosti na momentu hybnosti $L$ a náboji $e$ pro černou díru s ireducibilní hmotou $m_{ir}$, ilustrující rozdíl mezi reversibilními a ireversibilními transformacemi.

Změna ireducibilní hmoty $m_{ir}$ jako výsledek asimilace částice s energií $E = \delta m$, úhlovou hybností $p_\phi = \delta L$ a nábojem $\epsilon = \delta e$ se dostane řešením rovnice (2.2) pro $m_{ir}$ a variací $m, L, e$. Lze najít vztah

$$4m_{ir}\,\delta m_{ir} = \frac{E(r_+^2 + a^2) - a\,p_\phi - r_+ e\,\epsilon}{\sqrt{m^2 - a^2 - e^2}}.$$

Tato změna je buď kladná nebo nulová.

Hmota–enrgie magnetické černé díry tedy může být vyjádřena jako součet tří faktorů: ireducibolní hmoty, Coulombického náboje a rotačního momentu hybnosti. Ireducibilní hmota zůstává konstantní při reversibilních transformacích a roste při transformacích, přičemž není možné ji změnit. Coulombické a rotační příspěvky celkové energií mohou být zvětšovány i změnšovány reversibilními transformacemi.

$(a^2+e^2)/m^2$ má maximální hodnotu 1, která se vyskytuje na limitní křivce

$$\frac{L^2}{4m_{ir}^4} + \frac{e^4}{16m_{ir}^4} = 1.$$

Neexistuje řešení rovnice (2.2) pro hpdnoty $L, e$ takové, že

$$\frac{L^2}{4m_{ir}^4} + \frac{e^4}{16m_{ir}^4} > 1.$$

Proto transformace z konfigurací na limitní křivce (obr. 7.3) mohou být reversibilní pouze ve směru takovém, že bude výraz

$$\frac{L^2}{4m_{ir}^4} + \frac{e^4}{16m_{ir}^4}$$

klesat.

Jak hodnota je vidět srovnáním rovnic (2.2) a (2.2), úhlová rychlost příslušná černé díře, odvozená z rotační energie metodou klasické mechaniky je

$$\omega = \frac{\partial m}{\partial L} = \frac{\frac{L}{4m_{ir}^4}}{\sqrt{\left(m_{ir} + \frac{e^2}{4m_{ir}}\right)^2 + \frac{L^2}{4m_{ir}^2}}}$$

Tato hodnota je identická s velikostí vlečení inerciálních systému na vnějším horizontu. Navíc teorém uvedený v kapitole 5. o gravitačním kolapsu rotující hvězdy platí i pro hvězdu mající magnetické pole.

## 2.3 Kerrova geometrie a rotující černá díra

V roce 1963 R.P.Kerr zkoumajíce stacionární řešení Einsteinových rovnic ve tvaru $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa_\mu \kappa_\nu$ objevil metriku, která má v původních Kerrových souřadnicích tvar

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 + \frac{2m\bar{\rho}^3}{\rho^4 + a^2 z^2} \left(\kappa_\mu \, \mathrm{d}x^\mu\right)^2 \tag{2.10}$$

kde $\kappa_\mu$ je pole nulových vektorů dané vztahem

$$\begin{aligned}\kappa_\mu \mathrm{d}x^\mu &= \mathrm{d}t + \frac{z}{\bar{\rho}}\mathrm{d}z + \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}^2 + a^2}(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y) \\ &\quad + \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}^2 + a^2}(x\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y),\end{aligned}$$

a

$$\frac{x^2 + y^2}{\bar{\rho}^2 + a^2} + \frac{z^2}{\bar{\rho}^2} = 1$$

Později byl nalezen Boyerem a Lindguistem systém souřadnic, který je daleko vhodnější pro fyzikální interpretaci

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= \rho^2 \Delta^{-1} \mathrm{d}r^2 + \rho^{-2} \sin^2\theta [a\,\mathrm{d}t - (r^2 + a^2)\,\mathrm{d}\varphi]^2 - \\ &\quad + \rho^2\,\mathrm{d}\theta^2 - \rho^{-2}\Delta[\mathrm{d}t - a\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi]^2,\end{aligned}$$

kde

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos\theta, \quad \Delta = r^2 - 2mr + a^2. \tag{2.11}$$

Rozbor vlastonstí této metriky je proveden v přednášce dr. Bičáka. My se zde budeme zabývat pouze rudým posuvem fotonů, lokálně Lorentzovským systémem a pohybovými rovnicemi částic a fotonů v Kerrově geometrii.

Z obecného vztahu pro rudý posuv (...) dostaneme nekonečný rudý posuv fotonu v nekonečnu, byl-li emitován ze zdroje stojícího na ploše $r = r_0$, kde je $g_{00} = 0$, $u^0 = (-g_{00})^{-1/2}$, $u^3 = u^2 = u^1 = 0$. Z vnitřku plochy $r = r_0$ nemohou být fotony emitovány ze stojícího zdroje, protože tam žádný takový zdroj nemůže existovat – tj. stojící vzhledem k pozorovateli v nekonečnu.

Povrch $r = r_0$ se proto nazývá povrchem nekonečného rudého posuvu. Avšak fotony emitované zdrojem pohybujícím se po tomto povrchu nebudou posunuty nekonečně.

K určení chování světelných kuželů v oblasti $r_+ \leq r \leq r_0$ zavedeme referenční systémy, na které nepůsobí centrifugální síly. Takový systém bude lokální inerciální (Lorentzův) systém s $u^1 = u^2 = 0$ – tj. na konstantním $r$ a $\theta$. Komponenty metrického tenzoru v tomto systému musí mít $(g_{0i})_{\text{local Lorentz}} = 0 \ (i = 1, 2, 3)$ a $(g_{00})_{\text{local Lorentz}} = -1$. Element vlastní vzdálenosti omezený na Killingovy směry má tvar

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}\tau^2 + g_{33}\mathrm{d}\chi^2$$

kde $\tau$ a $\chi$ jsou časová a azimutální souřadnice v lokálním Lorentzově systému. Pak na každém kruhu $(r, \theta)$ se dostane transformační zákon z kanonického souřadného systému do lokálního Lorentzova systému srovnáním metriky (2.10) a (2.11):

$$\mathrm{d}\chi = \mathrm{d}\varphi - \omega'\,\mathrm{d}t$$

kde $\omega'$ je úhlová rychlost vlečení lokálního Lorentzova systému černou dírou (jak se jeví v nekonečnu).

$$\omega' = -\frac{g_{03}}{g_{33}} = \frac{2mar}{(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta}$$

Toto vlečení je čistě obecně relativistický efekt. Poprvé byl ukázán Lensem a Thirringem při zkoumání vlečení inerciálního systému rotující materiální slupkou. Časový interval je dán vztahem:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tau &= -\left(g_{00} + \frac{g_{03}^2}{g_{33}}\right)^{1/2} \mathrm{d}t \\ &= \frac{\Delta^{1/2}\rho\,\mathrm{d}t}{[(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta]^{1/2}}\end{aligned}$$

Pozorovatel v lokálně Lorentzovském systému uvidí křivky $\varphi =$ konst. rotující s úhlovou rychlostí $\omega''$ danou vztahem

$$\omega'' = -\omega'\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{2mar}{\Delta^{1/2}\rho}[(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta]^{-1/2}$$

Na samotném povrchu černé díry je $\omega' = a/(r_+^2 + a^2)$ nezávisle na souřadnici $\theta$ a $\omega'' \to -\infty$. Na velkých vzdálenostech pak $\omega' \to \omega'' \to 2L/r^3$.

Z těchto vztahů je tedy vidět, že pozorovatel stojící na ploše $r = r_0$ se pohybuje rychlostí světla v lokálně Lorentzovském systému (Killingův vektor $l_t^\alpha$ je nulový). Rychlost $v$ v lokálně Lorentzovském systému je

$$v = \left(\sqrt{g_{33}}\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\tau}\right)_{r=r_0} = -\left(\frac{2mar\sin\theta}{\Delta^{1/2}\rho^2}\right)_{r=r_0} = -1$$

Rychlosti větší než rychlost světla dostaneme pro pozorovatele stojící vzhledem k nekonečnu někde v ergosféře $(r_+ \leq r \leq r_0)$. To není žádné překvapení, protože jsme dostali nekonečný rudý posuv fotonu emitovaného ze zdroje stojícího na $r = r_0$.

Je-li však foton emitován ze zdroje stojícího v lokálně Lorentzovském systému na kruhu $(r, \theta)$ , pak rudý posuv fotonu v nekonečnu bude dle

$$\begin{aligned}\frac{\nu_{\text{infinity}}}{\nu_{\text{source}}} &= (u^0 - bu^3)^{-1}_{\text{local Lorentz}} \\ &= \Delta^{1/2}\rho\frac{[(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta]^{1/2}}{(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta - 2mabr}\end{aligned}$$

$b$ je impaktní parametr: $b = \frac{\kappa_3}{\kappa_0}$, kde $\kappa_0$, $\kappa_3$ jsou pohybové integrály. Je vidět, že foton emitovaný zdrojem stojícím v LLS bude posunut do ruda pouze v případě, kdy systém bude na vnějším horizontu.

Geodetické rovnice pro pohyb testovacích částic v Kerrově geometrii můžeme odvodit ze superhalmiltoniánu

$$H = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta,$$

kde hybnost $p_\alpha$ je

$$p_\alpha = g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}$$

a $\tau = \mu\lambda$ je vlastní čas podél světočáry částice s klidovou hmotou $\mu$. Komponenty hybnosti v Killigových směrech $p_\alpha l_t^\alpha$, $p_\alpha l_\varphi^\alpha$ jsou konstanty pohybu. $E = -p_0$ je energie částice a $L = p_\varphi = p_3$ je komponenta momentu hybnosti vzhledem k ose symetrie. Navíc hamiltonián nezávisí explicitně na $\lambda$, a je proto automaticky konstantou pohybu. Jeho hodnota je určena normalizační podmínkou

$$g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda} = -\mu^2$$

a podmínkou vyjadřující zachování klidové hmoty

$$H = -\frac{1}{2}\mu^2.$$

Nyní tedy máme 3 konstanty pohybu $E, p_\varphi, H$. Abychom určili pohyb, potřebujeme konstanty čtyři.

Čtvrtá konstanta byla nalezena B. Carterem separací proměnných $r, \theta$ v rovnici pro Hamilton–Jacobiho akci $S$,

$$\frac{\partial S}{\partial\lambda} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial S}{\partial x^\alpha}\frac{\partial S}{\partial x^\beta}$$

Separace je možná pouze v Kerrových–Newmannových souřadnicích $u$ a $\Psi$. Ty jsou Boyerovými–Lingvistovými souřadnicemi $t, \varphi$ spojeny relacemi

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u &= \mathrm{d}t + (r^2+a^2)\Delta^{-1}\,\mathrm{d}r\\ \mathrm{d}\Psi &= \mathrm{d}\varphi + a\Delta^{-1}\,\mathrm{d}r\end{aligned}$$

Pohybové rovnice, které pak dostaneme, mají v Boyerových–Lindguistových souřadnicích tvar

$$\begin{aligned}\rho^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} &= \sqrt{\Theta} \qquad (2.12)\\ \rho^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda} &= \sqrt{R}\\ \rho^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda} &= -(aE - p_\varphi\sin^{-2}\theta) + a\Delta^{-1}P\\ \rho^2\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda} &= -a(a\,E\sin^2\theta - p_\varphi) + (r^2+a^2)\Delta^{-1}P\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}\Theta &= Q\cos^2\theta[a^2(\mu^2-E^2) + p_\varphi^2\sin^{-2}\theta] \qquad (2.13)\\ P &= E(r^2+a^2) - a\,p_\varphi\\ R &= P^2 - \Delta[\mu^2r^2 + (p_\varphi - aE)^2 + Q]\end{aligned}$$

Veličina $Q$ je čtvrtou pohybovou konstantou. Hodnota $p_2$ je na nějakém úhlu $\theta$ určena rovnicemi (2.12) a (2.13).

Zkoumejme testovací částici padající jednocestnou membránou. Z pohybových rovnic plyne, že se tato orbita s časem $t$ asymptoticky přibližuje kruhu s konstantní "zeměpisnou šířkou" na jednocestné membráně; jak plyne z vymizení $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\varphi$ a z rovnice $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t = a/(r_+^2+a^2)$. V $r = r_+$, má tato orbita konečnou periodu, nezávislou na "zeměpisné šířce".

Tento vztah mezi částicí a černou dírou je efektem vlečení LLS černou dírou. Úhlová rychlost $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ je identická s rychlostí Lorentzova systému na vnějším horizontu.

Kvalitativní aspekty kolapsu rotující hvězdy jsou na obrázku podle Ruffiniho a Wheelera. Zploštění hvězdy velmi roste s jejím kolapsem a růstem její úhlové rychlosti. Závisí silně na počátečních hodnotách hmoty momentu hybnosti hvězdy. Ilustrace jedné z mnoha možností je konfigurace zachycená na obrázku.

Když hvězda dosáhne lívanečníkovitého tvaru s tlouštkou řádu 16 km a délkou zhruba 100 km, stává se nestabilní a zlomí se. Rozlomením se vytvoří několik neutronových hvězd, které vytvoří vír, přičemž rotuje jedna hvězda za druhou. Velké pulsy gravitačního záření vznikající během kolapsu do lívanečkovitého tvaru budou vystřídány gravitačním zářením s pomalu se měnící periodou a dodatečné silné pulsy budou vysílány, když budou splývat dva úlomky (neutronové hvězdy). Gravitační záření s sebou bere energii a moment hybnosti, takže se systém stává kompaktnějším. Nakonec, když se takto dostane pryč dostatečně velký moment hybnosti, všechny úlomky splynou a vytvoří se černá díra s $a < m$.

## 2.4 Kerrova černá díra

Existuje řešení, které představuje rotaci v tom smyslu, že jsem-li daleko od zdroje, je metrika daleko od zdroje stejná jako metrika rotující hvězdy. Nebylo však nalezeno vnitřní řešení, které by šlo na toto řešení navázat. Nalezené řešení má však důležitost, neboť se zdá, že je to konečné stádium gravitačního kolapsu hvězdy.

Nyní si ukážeme, jak se na toto řešení přijde:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + Hk_\alpha k_\beta; \qquad (g^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta = 0)$$
$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - Hk^\alpha k^\beta;$$
$$k^\alpha = g^{\alpha\beta}k_\beta = \eta^{\alpha\beta}k_\beta \Rightarrow \eta^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta = 0$$

Platí $k^\beta\nabla_\beta k^\alpha = 0$. Vektory $k^\alpha$ jsou tečné ke kongruenci nulových geodetik.

!!! Tady bude obrazek !!!

$$|\sigma| = \sqrt{\frac{1}{2}[k_{\alpha;\beta}k^{\alpha;\beta} - 2\rho^2]}$$

Divergence $\rho = \frac{1}{2}k^\mu{}_{;\mu}$ charakterizuje expanzi (viz Votruba.) Ortogonální řezy obrazů geodetik jsou bez zkreslení (nedefinuje se tvar, ale například podobnost apod.)

Kerrovo řešení je speciálním případem tohoto řešení, kdy existují dvě takové kongruence:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + Hk_\alpha k_\beta = \eta_{\alpha\beta} + \tilde{H}l_\alpha l_\beta;$$
$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}k^\beta k^\delta = 0; \qquad R_{\alpha\beta\gamma\delta}l^\beta l^\delta = 0$$

(analogie Petrovovské klasifikace) Explicitní zápis této metriky má tvar:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{2mr^3}{r^4 + a^2z^2}\left[\frac{r(x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y) + a(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)}{r^2 + a^2} + \frac{z\mathrm{d}z}{r} + \mathrm{d}t\right]^2 - \mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

kde r je definováno vztahem

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1 \tag{2.14}$$

Takto na toto řešeni přišel Kerr – z požadavků kongruencí. Tento tvar je však nevhodný pro aplikace. Dělá se proto transformace:

$$x = (r^2 + a^2)^{1/2}\sin\theta\cos\left[\varphi - \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)\right]$$
$$y = (r^2 + a^2)^{1/2}\sin\theta\sin\left[\varphi - \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)\right] \tag{2.15}$$
$$z = r\cos\theta$$

Pak

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + 2a\sin^2\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi + (r^2 + a^2)\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2 + (r^2 + a^2\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta^2 - \mathrm{d}t^2 + \frac{2mr}{r^2 + a^2\cos^2\theta}(\mathrm{d}r + a\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi + \mathrm{d}t)^2 \tag{2.16}$$

To je Eddingtonův tvar metriky. Tento tvar má blízko k jednomu tvaru, který jsme měli v při kruskalizaci Schwarzschildova řešení:

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2m}{\bar{r}}\right)\mathrm{d}\bar{t}^2 + \frac{1}{1 - \frac{2m}{\bar{r}}}\mathrm{d}\bar{r}^2 + \bar{r}^2\,\mathrm{d}\bar{\Omega}^2 \tag{2.17}$$
$$t^+ = \bar{t} + \bar{r} + 2m\ln(\bar{r}/2m - 1) \tag{2.18}$$

Zavedu

$$t = \bar{t} + 2m\ln(\bar{r}/2m - 1); \quad t^+ = t + \bar{r}. \tag{2.19}$$

S tímto $t$ má Schwarzschildova metrika tvar

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\Omega + \frac{2m}{r}(\,\mathrm{d}r + \,\mathrm{d}t)^2 - \,\mathrm{d}t^2 \tag{2.20}$$

Eddingtonovy souřadnice pro Schwarzschildovo řešení

(2.16) přejde v tuto metriku pro $a = 0$.
$a$ – charakterizuje moment hybnosti na jednotku gravitační hmoty. Lze jej proměřovat pomocí setrvačníku daleko od hvězdy ($a$ se projeví v metrice, a ta působí na setrvačník) $L = ma$ – $a$ tedy charakterizuje rotaci.

Zajímá nás nyní, jak v těchto souřadnicích vypadá geometrie různých dvojdimenzionálních ploch. Chceme určit embedding diagramy – tj. určit plochu v eukleidovském prostoru takovou, aby její metrika byla stejná jako daná metrika.

$$t = \text{konst.}; \quad r = \text{konst.};$$
$$\text{je dáno vztahem} \quad \frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1$$
$$\text{(konfokální elipsoidy)} \tag{2.21}$$

Z (**??**) plyne, že platí:

$$x^2 + y^2 = (r^2 + a^2)\sin^2\theta; \qquad z^2 = \cos^2\theta \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{a^2\sin^2\theta} = \frac{r^2}{a^2} + 1 \tag{2.22}$$

Pro $\theta =$ konst. dostáváme tedy hyperboloidy.

$$r = 0: \; x^2 + y^2 = a^2\sin^2\theta; \quad z = 0 \tag{2.23}$$

Tedy elipsoid $r =$ konst. v případě $r = 0$ degeneruje na disk – tam je singulární na okrajích. Pro

$$\theta = \pi/2 \text{ je } \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta = 0 \quad (r = 0, \cos\theta = 0) \tag{2.24}$$

a metrika je singulární. Toto pak už není singularita souřadnic, nýbrž singularita skutečná. Teď provedeme takovou transformaci, aby metrika přešla pro $a = 0$ na konvenční souřadnice:

$$\bar{r} = r; \quad \bar{\theta} = \theta; \quad \mathrm{d}\bar{\varphi} = \,\mathrm{d}\varphi + a\frac{\mathrm{d}r}{\Delta(r)}; \quad \mathrm{d}\bar{t} = \,\mathrm{d}t - 2mr\frac{\mathrm{d}r}{\Delta(r)} \tag{2.25}$$

kde $\Delta(r) = r^2 - 2mr + a^2$; pak má metrika tvar:

$$\mathrm{d}s^2 = (r^2 + a^2\cos^2\theta)\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{r^2 - 2mr + a^2} + \,\mathrm{d}\theta^2\right) + (r^2 + a^2)\sin^2\theta\,\mathrm{d}\bar{\varphi}^2 - \,\mathrm{d}\bar{t}^2 + \frac{2mr}{r^2 + a^2\cos^2\theta}(a\sin^2\theta\,\mathrm{d}\bar{\varphi} + \,\mathrm{d}\bar{t})^2 \tag{2.26}$$

Pro $a = 0$ dostáváme Schwarzschildovu metriku.

Nyní zdůvodníme to, že toto řešení charakterizuje rotaci. Podstatné je, že tato metrika má nediagonální člen

$$g_{\bar{\varphi}\bar{t}} \neq 0; \quad \frac{4mr}{r^2 + a^2\cos^2\theta} a \sin^2\theta \, \mathrm{d}\bar{\varphi} \, \mathrm{d}\bar{t} \tag{2.27}$$

Tato metrika není invariantní při transformaci $\bar{\varphi} \to -\bar{\varphi}$ (Schwarzschildovo řešení naproti tomu invariantní je). Kerrova metrika je však invariantní při trasnformaci $\bar{\varphi} \to -\bar{\varphi}$; $\bar{t} \to -\bar{t}$ – to je charakteristické pro rotaci (vlastně to rotuje na druhou stranu). Při transformaci $a \to -a$; $\bar{t} \to -\bar{t}$ a také při $a \to -a$; $\bar{\varphi} \to -\bar{\varphi}$ je metrika rovněž invariantní.

b) $g_{\varphi t} \neq 0$ je typické pro rotaci už z intuitivního důvodu. Mějme rotující disk. Transformace z plochého prostoru na rotující disk:

$$x = \cos(\varphi + \omega t); \qquad y = r\sin(\varphi + \omega t); \qquad t = t; \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - \mathrm{d}t^2 = \\ &= \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2 + 2\omega r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}t - (1 - r^2\omega^2)\,\mathrm{d}t^2 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Člen $2\omega r$ vede k odstředivým silám atd. – má stejné vlastnosti invariance.

c) Lenc–Thirring: v lineární teorii – $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ – lineární aproximace $h_{t\varphi} \sim \int \rho v^{(\varphi)}\,\mathrm{d}S$ (metrika rotující slupky – získaná řešením Einsteinových rovnic) $c\,a = l/m \quad c = 1 \Rightarrow L = ma$

*Killingovy vektory:*

$$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0 \tag{2.30}$$

Existuje-li Killingův vektor, lze najít souřadnice tak, že tento vektor má jedinou nenulovou složku. Metrika v těchto souřadnicích pak nezávisí na příslušné souřadnici v níž má $\xi^\mu$ nenulovou složku.

Časovému Killingovu vektoru lze dát tvar $(0, 0, 0, \xi)$ a metrika pak nezávisí na takto zvoleném čase. Killingovy vektory určují symetrie metriky. Pro Kerrovu metriku existují dva Killingovy vektory:

$$l^\alpha_{(t)} = (1, 0, 0, 0); \qquad l^\alpha_{(\varphi)} = (0, 0, 0, 1). \tag{2.31}$$

Metrika nezávisí na $t$ a $\varphi$ a je tedy stacionární a radiálně symetrická. $l^\alpha_{(t)}$ není gradientem žádné nadplochy – nemá tvar $\partial\Psi/\partial x^\alpha$. To je vyjádřením toho, že neexistuje souřadný systém, kde $g_{t\varphi} = 0$. Kdyby byl Killingův vektor ortogonální k nějaké nadploše, pak by metrika byla statická, $g_{\varphi t} = 0$.

V Kerrově řešení existují dva horizonty, které jsou kořeny výrazu $\Delta(r)$:

$$\begin{aligned} r &= r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2} && \text{– vnější horizont} \\ r &= r_- = m - \sqrt{m^2 - a^2} && \text{– vnitřní horizont} \end{aligned} \tag{2.32}$$

Musí být: $a^2 \leq m^2$; pro $m^2 = a^2$ oba horizonty splynou. Pro $a^2 > m^2$ rotace zabraňuje vzniku horizontu a tedy i černé díry. Mezi horizonty je $r$ časové povahy. Existují zde ještě dvě význačné plochy:

$$\begin{aligned} r &= r_0 = m + \sqrt{m^2 - a^2\cos^2\theta} \\ r &= r_1 = m - \sqrt{m^2 - a^2\cos^2\theta} \end{aligned} \tag{2.33}$$

Na těchto plochách je $g_{00} = 0$. ($g_{\alpha\beta} l^\alpha_{(t)} l^\beta_{(t)} = g_{00} = 0$). $l^\alpha_{(t)}$ začíná být mezi těmito plochami prostorové.

$r_0$ nazýváme plochou nekonečně velkého rudého posuvu. Dále se budeme zabývat plochami $r_+, r_0$ a nebudeme se starat o vnitřek.

$r_+$ je vnější horizont $\longrightarrow$ omezuje oblast, ze které nesmí nic vyjít ven. U Schwarzschildovy černé díry je plocha $r = 2M$ zároveň horizontem a plochou s $g_{00} = 0$. U Kerrovy černé díry splývají tyto plochy pouze na ose symetrie. (obrázek)

$l^\alpha_{(t)}$ charakterizuje pozorovatele pro něhož $r, \theta, \varphi =$ konst. a tedy stojícího vůči pozorovateli v nekonečnu. $l^\alpha_{(t)}$ je jeho čtyřrychlost, metrika je vzhledem k němu statická.

Rotující řešení táhne světlelné kužele ve směru rotace. Proto má na obrázku $l_{(t)}$ stále stejný směr a světelný kužel se posouvá. U Schwarzschilda by žádné tažení ve směru rotace nebylo.

Pro $r > r_0$ je světelný kužel kvalitativně stejný jako v plochém prostoru. Killingův vektor je časové povahy.

Pro $r = r_0$ je $l_{(t)}$ nulový vektor. Část světelného kužele míří ven do $r > r_0$ – proto plocha $r = r_0$ není jednocestnou membránou. Celý kužel je nalevo od $l_{(t)}$, protože je tažen rotací. Reálné částice musí ležet uvnitř tohoto kužele a musí se tedy pohybovat ve směru rotace. Částice může stát na "místě" v $r, \theta, \varphi$ souřadnicích na ploše $r_0$, ale pak se ve skutečnosti pohybuje rychlostí světla vůči lokálně inerciálnímu systému.

Na ploše $r = r_0$ může existovat reálný pozorovatel , který však nemusí korotovat s metrikou – musí se měnit jeho souřadnice $\varphi(\,\mathrm{d}\varphi/\,\mathrm{d}t > 0)$, neboť jedině tak se může jeho geodetika dostat do vnitřku světelného kužele na $r_0$.

V bodě $r_- < r < r_+$ je Killingův vektor prostorový a žádná fyzikální částice tedy nemůže v této oblasti stát na pevném $r, \theta, \varphi$ – tj. nemůže stát vůči pozorovateli v nekonečnu.

Při $r = r_+$ leží celý světelný kužel uvnitř horizontu. Horizont tedy představuje jednocestnou membránu. Je zárveň nulovou plochou, neboť jeden generátor světelného kužele (površka) leží na $r = r_+$. Jestliže z plochy nekonečného rudého posuvu vyšle pozorovatel stojící v místě $r_0, \theta, \varphi$ foton, pak ten u něj zůstane stát. Z plochy $r = r_0$ však může vyletět foton do nekonečna, který přitom není nekonečně rudě posunut.

Foton má nekonečně rudý posuv, je-li emitován zdrojem v klidu na $r_0, \theta, \varphi$. Pohybuje-li se zdroj ve směru rotace na $r = r_0$, nebude v nekonečnu foton posunut do $\lambda = \infty$.

Platí

$$\frac{\nu_{\text{pozorovaná}}}{\nu_{\text{emitovaná}}} = \frac{(U^\alpha k_\alpha)_{\text{pozorovaná}}}{(U^\alpha k_\alpha)_{\text{emitovaná}}} \tag{2.34}$$

(přejde na konvenční vzorec pro stojícího pozorovatele ve Schwarzschildově metrice)

$$U^\alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}, 0, 0, 0\right) \tag{2.35}$$

Je

$$\frac{\nu_\infty}{\nu_{\mathrm{zdroj}}} = \Delta^{1/2}\rho\left[(r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta\right]^{1/2}\left[(r^2+a^2-a^2\Delta\sin^2\theta - 2mar\,k\right]^{-1} \tag{2.36}$$

$k = -k_3/k_0$. Existuje-li $l_\alpha \Rightarrow p_\alpha$ je konstanta pohybu $\Rightarrow$ u Kerrova řešení jsou $k_3, k_0$ konstanty pohybu. $\Delta = 0 \Rightarrow \nu_\infty = 0$ – tj. foton z horizontu má vždy nekonečný rudý posuv. (2.36) je vzorec pro pozorovatele na $r =$ konst., který tam však nestojí, nýbrž korotuje a foton tedy není do nekonečna posunut. Fixujme $r =$ konst., $\theta =$ konst. Kdyby bylo pevné i $\varphi$, bylo by $g_{\varphi t} \neq 0$. My ale chceme zavést pozorovatele na pevném $r, \theta$, který necítí vliv rotace, tedy pro kterého $g_{\varphi t} = 0$. Je: $\mathrm{d}s^2 = g_{00}\,\mathrm{d}t^2 + 2g_{\varphi t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi + g_{\varphi\varphi}\,\mathrm{d}\varphi^2$ a my my chceme metriku takovou, aby $\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}\tau^2 + g_{33}\,\mathrm{d}\chi^2$. To je lokálně inerciální pozorovatel; $\tau$ je jeho vlastní čas; $g_{\varphi\varphi}$ mění geometrii, ale neovlivňuje zdánlivé síly, které jsou určeny složkami $g_{0i}, g_{00}$. Náš lokálně inerciální pozorovatel vlastně padá ve směru $\varphi$. Mezi souřadnicemi budou platit tyto transformační vztahy:

$$\mathrm{d}\chi = \mathrm{d}\varphi - \omega'\,\mathrm{d}t; \quad \omega' = -\frac{g_{\varphi t}}{g_{\varphi\varphi}} = \frac{2mar}{(r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta}$$

$$\mathrm{d}\tau = \left(-g_{00} + \frac{g_{t\varphi}^2}{g_{\varphi\varphi}}\right)^{1/2}\mathrm{d}t = \frac{\Delta^{1/2}\rho}{\left[(r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta\right]^{1/2}}\,\mathrm{d}t \tag{2.37}$$

V takto zavedených souřadnicích má naše metrika skutečně tvar

$$\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}\tau^2 + g_{\varphi\varphi}\,\mathrm{d}\chi^2 \tag{2.38}$$

Vůči původní metrice (pozorovateli v nekonečnu) rotuje tento lokálně inerciální pozorovatel s úhlovou rychlostí $\omega'$. Avšak vzhledem k tomuto pozorovateli rotují čáry $\varphi =$ konst. na opačnou stranu s úhlovou rychlostí

$$\omega'' = \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\tau} = -\omega'\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}, \quad \text{neboť} \quad \mathrm{d}\chi = -\omega'\,\mathrm{d}t \tag{2.39}$$

Ptáme se, jaká je rychlost pozorovatele stojícího na $r, \theta, \varphi =$ konst. vůči korotujícímu lokálně inerciálnímu pozorovateli. $\varphi =$ konst. $\Rightarrow \mathrm{d}\varphi = 0$.

$$v_{(\chi)} = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}\,\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\tau} = \sqrt{g_{\varphi\varphi}}\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \tag{2.40}$$

Ovšem

$$\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\tau} = -\omega' \quad \text{pro } \mathrm{d}\varphi = 0 \Rightarrow v_{(\chi)} = -\sqrt{g_{\varphi\varphi}}\,\omega'\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \tag{2.41}$$

Provedením výpočtu zjistíme, že $v_{(\chi)} = -1 \iff r = r_0$. Stojící pozorovatel je na površce světelného kužele a korotující pozorovatel je uprostřed.

Ukazuje se, že ergosféra, což je oblast mezi plochou nekonečného rudého posuvu a vnějším horizontem, je potenciálním zdrojem energie. Lze uvažovat Penroseho–Christondeulovův proces, při němž může docházet k extrakci energie z černé díry. Lze si představit, že do ergosféry pustíme částici s energií $E_0$. Částice se v ergosféře rozdělí na dvě části. První, s energií $E_1$, zápornou vzhledem k pozorovateli v nekonečnu, spadne do černé díry a druhá část s energií $E_2 > E_0$ se vrátí zpátky – vyletí z ergosféry ven. Extrakce energie se děje na úkor rotační energie černé díry – tím, že do ní vletí částice (s energií $E_1$) proti směru její rotace, se zmenší její rotační energie.

Platí rovnice:

$$E^2[r^3 + a^2(r+2m)] - 4maEp_\varphi + (2m-r)p_\varphi^2 - \\ -\mu^2 r^2(r-2m) - a^2\mu^2 r - K = 0 \tag{2.42}$$

$E$ – konstanta pohybu, měřená z hlediska pozorovatele v nekonečnu. Toto je kvadratická rovnice pro konstantu $E$, která má dva kořeny $E_+, E_-$.

$$K = \frac{[(r^2 - 2mr + a^2)p_r]^2}{r} + \frac{Q}{r}(r^2 - 2mr + a^2) \tag{2.43}$$

Kořen $E_+$ ovšem může být pro $p_\varphi < 0$ záporný, tj. kořen obvykle kladný přechází do záporných hodnot (pro určité $r, p_\varphi < 0$ ). Částice má pak z hlediska pozorovatele v nekonečnu zápornou energii.

Sestrojíme graf pro elementární Kerrovo řešení $a = m$ v $r = 3m/2 > r_+ = m$.

(obrázek)

Z rovnice geodetiky najdou tedy rovnici (2.42) a za určitých podmínek je i fyzikální kořen $E_+$ záporný (pro určité $r$ a $p_\varphi < 0$ – předpokládáme $a > 0$). Toto může nastat pro $r_+ < r < r_0$. Částice ovšem musí být counterrotating. To, že $E < 0$ neznamená, že částice má zápornou energii. Tím je vyjádřeno pouze to, že tam je tak silné pole, že abychom dostali částici do nekonečna, musíme vykonat práci větší než je anihilační energie částice (klidová energie).

Z hlediska nekonečna je energie $E = \mu c^2\sqrt{g_{00}}$; $\mu$ je klidová hmota částice. Můžeme si představit kvazistické spouštění. V lokálně inerciálním systému je energie stále stejná ($\mu c^2$), neboť částice je tam v klidu. Do Kerrovy černé díry ovšem nelze částici spouštět.

(obrázek)

Srážky a rozpady počítáme v LIS, kde platí zákony speciální teorie relativity.

(obrázek)

*Penroseova konstrukce*

(obrázek)

POZOROVÁNÍ ČERNÝCH DĚR

Černých děr by ve vesmíru mělo být mnoho. Čím větší je hmota hvězdy, tím rychleji hvězda umírá. Hvězda se vytvoří z plynu, který se stlačuje, až se zapálí reakce.

1. $\tau = 5 \times 10^7 (M_\odot/M)^2$ let – gravitační kondedzace rozptýlené hmoty

2. Stádium jaderného hoření, kdy vzniká záření a hvězda svítí: $\tau = 10^{10}(L_\odot/L)(M/M_\odot)$ let. Pro většinu hvězd je $L \sim M^3 \Rightarrow \tau = 10^{10}(M_\odot/M)^2$ let

Čím je hvězda hmotnější, tím rychleji spálí palivo a vyhasnou v ní jaderné reakce. Vyvstává pak otázka, zda dojde ke kolapsu $(M \sim 2M_\odot)$ . Může se ovšem stát, že hvězda vybuchne jako supernova a skončí jako neutronová hvězda s podkritickou hmotou. Během trvání galaxie lze předpokládat, že počet hvězd je stejný, ale že hvězdy zanikají jako supernovy $\longrightarrow$ z toho dostáváme, že bychom měli pozorovat 2 supernovy za 10 let, což se liší přeci jen dosti podstatně od toho, co se pozoruje. Existují odhady, že asi 1/3 hmoty galaxie je ve formě černých děr.

Mám nějakrý cluster galaxií, který je v rovnováze. Vezmu viriálový teorém a dostanu nějakou hmotu $M$. Součet hmot pozorovaných $\tilde{M} < M \Rightarrow$ existuje skrytá nesvítící hmota, což mohou být nesvítící černé díry ($\tilde{M}$ je hmota záření apod.) Jiný způsob observace je z hmoty padající na černou díru. To, co by se mělo pozorovat, by mělo být především X-záření. Nejlépe to jde pozorovat u dvojhvězd, kde hmota přetéká z jedné hvězdy na druhou. (obrázek)

Neutronová hvězda by měla silné magnetické pole, které by hodně ovlivňovalo padající plyny. Naproti tomu v černé díře by bylo malé magnetické pole.

## 2.5 Extrakce energie z rotující černé díry

Energie částice $E$ měřená v nekonečnu s momentem hybnosti $p_\varphi$, klidovou hmotou $\mu$ a radiální hybností $p_r$ ve vzdálenosti $r$ je dána řešením rovnice

$$E^2[r^3 + a^2(r+2m)] - 4maEp_\varphi -$$
$$- (r-2m)p_\varphi^2 - (r^2-2mr+a^2)(\mu^2 r + \frac{Q}{r} = \frac{[(r^2-2mr+a^2)p_r]^2}{r} \quad (2.44)$$

což plyne z rovnic (...). Budeme uvažovat pouze větší $E_+$ z kořenů rovnice (2.44), které jsou pozitivní, jdeme-li s $r \to \infty$. Tyto kořeny odpovídají $p^0/\mu = \mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau > 0$ ($p^0 = \mu u^0$, $u^0 = \mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$). Další kořen $E_-$ odpovídá $p^0/\mu = \mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau < 0$ (zobecnění stavů se zápornou energií). Rovnice (2.44) je totiž symetrická při $-E_-(-p_\varphi) = E_+(p_\varphi)$, což dává interpolaci antičástic jako děr se stavy $E_-$, což je konzistentní s principem ekvivalence. V dnešní fyzice je termín pozitivní a negativní energie spojen s řešením Diracovy rovnice. Ve fyzice děr však tyto termíny mohou vést k omylu. Budeme užívat termíny stav s pozitivním kořenem a stav s negativním kořenem. Obrázek však ukazuje, jak stav s pozitivním kořenem může mít negativní energii.

Obrázek: Energie $E$ stavů povolených pro částici s momentem hybnosti $p_\varphi$ a klidovou hmotou $\mu$ v gravitačním poli extrémní $(a = m)$ Kerrovy černé díry na $r = 3m/2$ (nad horizontem) v závislosti na $p_\varphi$.

V mezeře mezi oblastmi pozitivních a negativních kořenů nejsou stavy povoleny.

To, že částice má negativní energii znamená, že jí musíme dodat energii větší též je její klidová energie, abychom ji dostali do nekonečna.

Nový rys rovnice (2.44), který ji podstatně odlišuje od rovnice pro energii ve Schwarzschildově geometrii, je existence stavů s pozitivními kořeny, které mají zápornou energii. Tato situace nastává pouze pro částice se záporným $a\,p_\varphi$ – rotujícím proti smyslu rotace černé díry (majícím daleko poslední stabilní orbity).

Jaká je na dané vzdálenosti $r$ od čené díry nejmenší hodnota negativního momentu hybnosti částice pro níž má částice zápornou energii? Nulovou energii bude mít částice s nulovou radiální a polární hybností $p_r, p_\theta$ na radiální vzdálenosti $r$ a polárním úhlu $\theta$ pro hodnoty azimutálního momentu hybnosti daného vztahem

$$\frac{p_\varphi}{\mu} = -|\sin\theta| \frac{\rho\Delta^{1/2}}{(-r^2+2mr-a^2\cos^2\theta)^{1/2}} \quad (2.45)$$

Stavy se zápornou energií budou dosahovat do největší vzdálenosti od černé díry pro nulovou klidovou hmotu $(\mu \to 0)$. Vnější limita stavů s negativní energií bude na ploše dané vztahem

$$r^2 - 2mr + a^2\cos^2\theta = 0 \quad (2.46)$$

což je plocha nekonečného rudého posuvu. Tedy mezi plochou nekonečného rudého posuvu a horizontem máme stavy s pozitivními kořeny a zápornou energií (měřenou v nekonečnu).

R. Penrose jako první přišel s myšlenkou využití těchto stavů s negativní energií k extrakci energie z rotující černé díry. Představil si civilizaci, která by vybudovala stabilní strukturu obklopující černou díru vně plochy nekonečného rudého posuvu. Obyvatelé z $S$ by do černé díry mohli spouštět hmotu – pomalu a na laně, které by bylo velmi lehké a nerozta̎žitelné – pokud by se nedotkla plochy nekonečného rudého posuvu. Na tomto povrchu hmota dosáhne stavu s nulovou energií. Obyvatelé sféry $S$ tím získají celou energii obsaženou ve hmotě. Takto spuštěná hmota je pro obyvatele ztracena, získali by však její ekvivalent v energii. Takto se přemění hmota v energii daleko efektivněji než jaderným rozpadem nebo sloučením. Efektivnost je stejná jako při anihilaci hmoty a antihmoty. Celý proces však lze naaranžovat ještě lépe. Sestrojíme-li jinou strukturu $S^*$ korotující s černou dírou, pak můžeme spouštění hmoty z $S^*$ provádět pod plochou nekonečného rudého posuvu. Nakonec, když se hmota dostane až k vnějšímu horizontu, její energie měřená z $S^*$ bude záporná. Obyvatelé $S$, $S^*$ tedy mohou spouštěním hmoty do černé díry vhodným způsobem získat více energie, než je celková energie obsažená v této hmotě (více než 100% účinnost přeměny hmoty a antihmoty anihilací) tak, že vlastně extrahují energii z černé díry. Ukazuje se, že moment hybnosti černé díry se při tomto procesu rovněž zmenší, neboť pohlcená hmota musí mít záporný moment hybnosti $p_\varphi$. Z černé díry je tedy extrahována rotační energie.

Metoda zde popsaná pochopitelně nemůže být praktická, ale ukazuje, co je principiálně možné a rovněž osvětluje fyziku černých děr. R. Penrose rovněž ukazuje na vhodnější způsob pro extrakci energie z rotjuící černé díry pomocí balistického procesu. Pošleme z nekonečna částici s energií $E_0$ do oblasti mezi horizontem a plochou nekonečného rudého posuvu. Ta se tam rozpadne na dvě části, z nichž jedna vyletí zpátky do nekonečna s energií (klidovou + kinetickou) $E_2$ větší než $E_0$, a druhá částice pak spadne do černé díry s energií $E_1$, která je kladná při měření v lokálně Lorentzovském systému, ale záporná při měření v nekonečnu. $(E_1 = E_0 - E_2)$. Tím se zmenší energie a hmota černé díry. Na obrázku je znázorněno, jak obyvatelé struktur $S$, $S^*$ mohou extrahovat energii z čené díry. (obrázek)

Balistický proces extrakce energie byl zkoumán Ruffinim a Wheelerem, kteří oblast mezi horizontem a plochou nekonečného rudého posuvu také nazvali ergosférou (tedy oblastí, kde vzniká práce). Byly navrženy modifikace této metody vhodné pro astrofyzikální aplikace, které budou diskutovány na konci kapitoly. Fyzikálním přikladem procesu rozpadu navrženého R. Penrosem může být radioaktivní rozpad.

Lze si rovněž představit dvě částice vniknuvší do ergosféry, mezi nimiž dojde ke srážce (nepružnému rázu), po níž má jedna výsledná částice větší energii než součet počátečních (původních) částic, zatímco zbývající jsou ve stavu s pozitivním kořenem a zápornou energií. Tyto procesy zachovávají celkový 4-impuls částic v události rozpadu nebo kolize těchto částic:

$$
\begin{aligned}
&E_1 + E_2 = E_3 + E_4; \quad E_3 < 0; \quad p_{\varphi 1} + p_{\varphi 2} = p_{\varphi 3} + p_{\varphi 4}; \quad p_{\varphi 3} < 0 \\
&(p_{r1} + p_{r2})_{\text{v události}} = (p_{r3} + p_{r4})_{\text{v události}} \\
&(p_{\theta 1} + p_{\theta 2})_{\text{v události}} = (p_{\theta 3} + p_{\theta 4})_{\text{v události}}
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

Každý proces extrakce energie má za následek asimilaci hmoty s negativní energií rotující černou dírou a tedy i snížení jejího momentu hybnosti a rotační energie. Mnohonásobným opakováním takovýchto procesů se systém přemění na Schwarzschildovu černou díru, z níž energie již odčerpávána být nemůže.

Vezmeme-li si nyní jinou černou díru, ale s původní hmotou a momentem hybnosti a extrahujeme energii částicemi s rozdílnou hmotou a momentem hybnosti a rozdílným místem rozpadu nebo vůbec nějakými procesy odlišnými od těch, které byly použity na první černé díře, pak dostaneme Schwarzschildovu černou díru s odlišnou konečnou hmotou.

Můžeme si nyní položit dvě otázky: Jaký je proces, který dá nejmenší Schwarzschildovu černou díru a jaké je maximální množství energie, které lze extrahovat z černé díry.

Rovněž si můžeme představit, že začneme se Schwarzschildovou černou dírou a transformujeme ji přidáváním hmoty a momentu hybnosti na Kerrovu černou díru, až dosáhneme předem daného poměru $a/m$. Je nyní zcela na místě ptát se, zdali je možné výběrem vhodné transformace transformovat tuto rotující černou díru zpět na Schwarzschildovu černou díru s původní hmotou. Existuje-li takováto reverzibilní transformace, pak může být použita k definování (a pochopitelně extrakci) čistě rotační energie Kerrovy černé díry. Dostáváme se tak k pojmu reverzibilní transformace černé díry: takové, která převádí hodnoty $m, L$ hmoty a momentu hybnosti černé díry na finální hodnoty $m', L'$, z nichž je možno dostat původní hmotu a moment hybnosti nějakou další reverzibilní transformací.

Např.: Nechť je částice s kladným momentem hybnosti $p_\varphi$ pohlcena černou dírou (její moment hybnosti bereme kladný). Dostáváme pak černou díru s momentem hybnosti $L' = L + p_\varphi$ a hmotou $m' = m + E(p_\varphi)$, kde $E(p_\varphi)$ je energie částice. Abychom dostali černou díru s původním momentem hybnosti $L$, musí být pohlcena částice s momentem hybnosti $(-p_\varphi)$. Nová hmota černé díry pak bude $m'' = m' + E(-p_\varphi)$. Odtud tedy dostáváme podmínku pro reverzibilitu:

$$\Delta E = E(p_\varphi) + E(-p_\varphi) = 0 \tag{2.48}$$

Požadujeme, aby radiání hybnost částice byla reálná v okolí černé díry. Pak z rovnice (2.44) nalezneme, že $\Delta E \geq 0$ anebo $-E(-p_\varphi) \leq E(p_\varphi)$. Z tohoto výsledku plyne, že žádný proces extrakce energie nemůže být efektivnější než právě reverzibilní limita, pro níž je $\Delta E = 0$, a která nastává v limitě kdy kontravariantní hybnost $p^r$ (radiální) obou částic je libovolně malá (bod obratu dráhy částice) v $r = r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2}$ (částice se musí téměř dotýkat horizontu) kde oblasti s pozitivními a negativními kořeny už nejsou odděleny (zakázaná oblast se tam smrskne na nulu).

Je-li však proces extrakce energie prováděn stále blíže horizontu, pak doba jeho trvání určovaná pozorovatelem v nekonečnu poroste (neboť poblíž horizontu čas běží pomaleji). V limitním případě reverzibilní transformace je vztah mezi $E$ a $p_\varphi$ lineární

$$E = \frac{a p_\varphi}{r_+^2 + a^2} \tag{2.49}$$

Zavedeme-li nové označení $E = \mathrm{d}m$ a $p_\varphi = \mathrm{d}L$ v rovnici (2.49), pak dostaneme diferenciální rovnici

$$\mathrm{d}m = \frac{\frac{L}{m}\mathrm{d}L}{\left(m + \sqrt{m^2 - \left(\frac{L}{m}\right)^2}\right)^2 + \frac{L^2}{m^2}} \tag{2.50}$$

Integrace této rovnice pak nakonec dává

$$\left(1 - \frac{L^2}{m^4}\right)^{1/2} = \frac{2m_{\mathrm{ir}}^2}{m^2} - 1 \tag{2.51}$$

Z této rovnice pak můžeme úpravou dostat

$$m^2 = m_{\mathrm{ir}}^2 + \frac{L^2}{4m_{\mathrm{ir}}^2} \tag{2.52}$$

Přitom musí být splněny podmínky $L \leq 2m_{\mathrm{ir}}^2$ nebo $m^2 \leq 2m_{\mathrm{ir}}^2$. Tyto podmínky vylučují záporné kořeny levé strany rovnice (2.51) – chceme, aby pravá strana byla větší než nula (viz obrázek).

Konstanta $m_{\mathrm{ir}}$ (integrační) je hmota Schwarzschildovy černé díry, když je celá rotační energie Kerrovy černé díry extrahována reverzibilní transformací. Každá reverzibilní transformace způsobí růst této veličiny (odpovídá vyšší křivce na obrázku ).

Obrázek – Podle Ruffiniho a Wheelera. Odpovídá rozpadu částice s energií $E_0$ na dvě části, z nichž jedna unikne do nekonečna a druhá je pohlcena černou dírou. Křivky znázorňují efektivní potenciál (gravitační+odstředivý) definovaný řešením $E$ rovnice (2.44) pro konstantní hodnoty $p_\varphi$ a $\mu$.

Je třeba zdůraznit, že neexistuje proces, při němž by mohla klesat $m_{\mathrm{ir}}$. Změna $m_{\mathrm{ir}}$ jako důsledek asimilace částice s energií $E = \delta m$ a momentem hybnosti $p_\varphi = \delta L$ se dostane řešením rovnice (2.52) pro $m_{\mathrm{ir}}$ a variací $m$ a $L$. Tato změna je dána vztahem

$$4m_{\mathrm{ir}}\delta m_{\mathrm{ir}} = \frac{[E(r_+^2 + a^2) - a p_\varphi]}{\sqrt{m^2 - a^2}}$$

Výsledek je kladný pro každou částici pohlcenou černou dírou. $m_{\mathrm{ir}}$ je setrvačná ireducibilní hmota černé díry.

Čtverec hmoty–energie rotující černé díry může být rozdělen na dvě části – ireducibilní a rotační část.

Ireducibilní část zůstává konstantní při reverzibilních transformacích a roste při ireverzibilních transformacích. Nemůže být redukována. Rotační část hmoty–energie může být jak zvětšována, tak i zmenšována reverzibilní transformací.

Vztah (2.52) je velmi podobný vztahu pro hmotu–energii při relativistických pohybech – translačních, kde je $E^2 = m^2 + p^2$. V tomto případě však lineární hybnost $p$ není omezena. V rotující černé díře je dosažitelná oblast reverzibilních transformací omezena na $L = 0,\ m^2 = m_{\rm ir}^2$ do $L = m^2,\ m^2 = 2m_{\rm ir}^2$ (v extrémní Kerrově geometrii). Veličina $L/m^2$ má v této limitě maximální hodnotu 1.

Obrázek – hmota–energie v závislosti na momentu hybnosti $L$ pro černou díru s danou ireducibilní hmotou $m_{\rm ir}$ – ukazuje rozdíl mezi reverzibilní a ireverzibilní transformací s růstem ireducibilní hmoty).

Transformace z extrémní Kerrovy geometrie může být reverzibilní pouze pro zmenšující se moment hybnosti. Je-li částice s momentem hybnosti $p_\varphi$ pohlcena $(p^r \approx 0)$ extrémní Kerrovou černou dírou (energie částice $E = p_\varphi/2m$), pak změna irecucibilní hmoty bude $\delta m_{\rm ir} = (p_\varphi + |p_\varphi|)/4m_{\rm ir}$. Tedy pro $p_\varphi < 0$ budeme mít reverzibilní transformace ($\delta m_{\rm ir} = 0$).

Naopak pohlcení částice s $p_\varphi > 0$ způsobí vzrůst momentu hybnosti a hmoty černé díry. Tento vzrůst se odrazí ve zvětšení ireducibilní hmoty. Rotační příspěvek ke čtverci hmoty v rovnici (2.52) zůstane konstantní.

Rotující černé díře můžeme přiřadit úhlovou rychlost způsobem klasické mechaniky. K nalezení této úhlové rychlosti definujeme vztah pro rotační energii a máme

$$\omega = \frac{\partial m}{\partial L} = \frac{\frac{L}{4m_{\rm ir}^2}}{\sqrt{m_{\rm ir}^2 + \frac{L^2}{4m_{\rm ir}^2}}} \tag{2.53}$$

Srovnáme-li rovnici (2.53) (nebo (2.49)) s rovnicí (...), pak vidíme, že zde spočítaná "úhlová rychlost" černé díry je stejná jako vlečení inerciálního systému na vnějším horizontu. Dostáváme tak následující teorém pro kolaps rotující hvězdy: Jak hvězda kolabuje, úhlová rychlost vlečení inerciálních systémů na povrchu hvězdy, která je zpočátku mnohem menší než úhlová rychlost samotné hvězdy, poroste rychleji než tato úhlová rychlost hvězdy, až nakonec obě koincidují asymptotycky v čase při vytvoření černé díry.

Na rovníku je rychlost rotace černé díry dána vztahem

$$v = \sqrt{g_{33}}\omega = \frac{L^2}{4m_{\rm ir}^2} \tag{2.54}$$

Tato rychlost je rovna světelné pro extrémní Kerrovu díru. Je tedy jasné, proč nemohou existovat konfigurace s větším momentem hybnosti než má extrémní Kerrova geometrie.

Černá díra je tedy velkou zásobárnou energie, neboť $(1 - 2^{1/2}) = 29\%$ hmoty extrémní Kerrovy černé díry může být extrahováno, což dává účinnost daleko větší než jaderné reakce. Je zde možnost extrakce této energie v astrofyzikálních aplikacích. Rozštěpení částice v Penroseově mechanismu může být provedeno pouze gravitačními silami přes působení gravitačních přílivových sil. Takovéto rozštěpení bylo zkoušeno v práci Mashoona. Zkoumal normální hvězdu jdoucí do ergosféry gigantické černé díry s hmotou asi $10^8 M_\odot$, která může existovat v jádře galaxie. Hvězda je rozdrcena přílivovými silami a její část padá na horizont. Z dálky měřeno má tato část zápornou energii. Další část uniká s relativistickou energií vysoce ionizovaná a vytváří něco jako vystříknutí gigantické energie ($\sim 10^{60}$ ergs), jaká pozorujeme v jádrech některých galaxií. Pozorovaná vytrýsknutí jsou však v téměř symetrických párech a ne jako jednotlivá pole popsaného mechanismu.

# Kapitola 3

# Ranný vesmír

## 3.1 Termodydamika rovnovážného stavu

Raný vesmír, který byl dominvaný zářením, se během evoluce nacházel v tepelné rovnováze. Pozůstatkem těchto dob jsou reliktní fotony o teplotě 2.75 K a reliktní neutrina o teplotě 1.96 K. V raném vesmíru byly fotony v termodynaické rovnováze nejen s neutriny, nýbrž i s dalšími relativistickými částicemi ($e^-, e^+, q, \ldots$).

Hustota částic *n*, hustota energie $\rho$, tlak *p* plynu slabě interagujících částic o počtu vnitřních stupňů volnosti *q* dány standartními relacemi pomocí distribuční funkce ve fázovém prostoru $f(\vec{p})$:

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(\vec{p})\, d^3p\,, \tag{3.1}$$

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int E(\vec{p})\, f(\vec{p})\, d^3p\,, \tag{3.2}$$

$$p = \frac{1}{3}\frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{|\vec{p}|^2}{E}\, E(\vec{p})\, f(\vec{p})\, d^3p\,; \tag{3.3}$$

$E^2 = |\vec{p}|^2 + m^2$. Budeme používat jednotky $c = h = K_B = 1$?. V kinetické rovnováze je fázová distribuční funkce dána statistikou Fermi-Diracovou pro fermiony (+1) a Bose-Einseinovou (+1) pro bozony

$$f(\vec{p}) = [\exp((E-\mu)/T) \pm 1]^{-1}\,; \tag{3.4}$$

$\mu$ označuje chemický potenciál. Pro chemickou rovnováhu konstituentů musí platit příslušná rovnost součtů chemických potenciálu. Např. pro $i + j \leftrightarrow k + l$ platí $\mu_i + \mu_j \leftrightarrow \mu_k + \mu_l$.

Po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned} n &= \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty \frac{(E^2-m^2)^{1/2}}{\exp[(E-\mu)/T] \pm 1} E\, dE\,, \\ \rho &= \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty \frac{(E^2-m^2)^{1/2}}{\exp[(E-\mu)/T] \pm 1} E^2\, dE\,, \\ p &= \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty \frac{(E^2-m^2)^{3/2}}{\exp[(E-\mu)/T] \pm 1}\, dE\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Nyní je vhodné stanovit několik limitníc případů.

A. *ULTRARELATIVISTICKÁ LIMITA* ($T \gg m$)

a.) $T \gg \mu$

$$\rho = \begin{cases} (\pi^2/30) g T^4 & (Bose) \\ (7/8)(\pi^2/30) g T^4 & (Fermi) \end{cases}$$

$$n = \begin{cases} (\xi(3)/\pi^2) g T^3 & (Bose) \\ (3/4)(\xi(3)/\pi^2) g T^3 & (Fermi) \end{cases}$$

$$p = \rho/3 \tag{3.6}$$

b.) *Degenerované fermiony* $\mu \gg T$

$$\begin{aligned} \rho &= (1/8\pi^2) g \mu^4 \\ n &= (1/6\pi^2) g \mu^3 \\ p &= (1/24\pi^2) g \mu^4\,; \end{aligned} \tag{3.7}$$

$\xi(3) = 1.20206\ldots$ je Riemanova zeta funkce argumentu 3.

Pro bozony $\mu > 0$ znamená existenci Boseho kondenzátoru, který je nutno sledovat zvlášť. Pro relativistické bozony nebo fermiony s $\mu < 0$ a $|\mu| < T$ platí

$$\begin{aligned} n &= \exp(\mu/T)(g/\pi^2) T^3\,, \\ \rho &= \exp(\mu/T)(3g/\pi^2) T^4\,, \\ p &= \exp(\mu/T)(g/\pi^2) T^4\,. \end{aligned} \tag{3.8}$$

B. *NERELATIVISTICKÁ LIMITA* $m \gg T$

Pro bozony i fermiony platí tytéž výrazy

$$\begin{aligned} n &= g\left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} \exp[-(m-\mu)]\,, \\ \rho &= m \cdot n\,, \\ p &= nT \ll \rho\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Pro nerelativisticé nedegenoravné částice je střední energie na částici

$$\begin{aligned} E &\equiv \frac{\rho}{n} = [\pi^4/30\,\xi(3)]T \simeq 2.701T \qquad (Bose) \\ E &\equiv \frac{\rho}{n} = [7\pi^4/180\,\xi(3)]T \simeq 3.151T \qquad (Fermi) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Pro degenerované relativistické fermiony je

$$E \equiv \frac{\rho}{n} = \frac{3}{4}\mu\,. \tag{3.11}$$

Pro nerelativistické částice je

$$E \equiv m + \frac{3}{2}T\,. \tag{3.12}$$

Vyjádříme si nyní přebytek fermonů nad antičásticemi v ultra- a nerelativistické limitě. Budeme předpokládat, že je $\mu_+ = \mu_-$, což platí, probíhají-li rychle reakce $p^+ + p^- \leftrightarrow \gamma + \gamma$. Pak fermionová hustota je

$$\begin{aligned} n_- + n_- &= \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty E\,(E^2-m^2)^{1/2} \times \left[\frac{1}{1+\exp[(E-\mu)/T]} - \frac{}{1+\exp \ldots}\right. \\ &= \frac{gT^3}{6\pi^2}\left[\pi^2\left(\frac{\mu}{T}\right) + \left(\frac{\mu}{T}\right)^3\right] \qquad (T \gg m) \end{aligned}$$

Předpokládame-li, že ve směsi $i$ druhů částic v tepelné rovnováze, ale s odlišnou teplotou $T_i$, než je teplota fotonů $T$, pak pro hustotu a tlak platí

$$\rho_R = T^4 \sum_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 \frac{g_i}{2\pi^2} \int_{x_i}^\infty \frac{(n^2-x_i^2)^{1/2} u^2\, du}{\exp(n-y_i) \pm 1}, \tag{3.14}$$

$$p_R = T^4 \sum_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 \frac{g_i}{6\pi^2} \int_{x_i}^\infty \frac{(n^2-x_i^2)^{3/2} u^2\, du}{\exp(n-y_i) \pm 1}, \tag{3.15}$$

kde $x_i \equiv m_i/T$ a $y_i \equiv \mu_i/T$.

Jelikož hustota energie a tlak nerelativistických částic $(m \gg T)$ je exponenciálně menší než u ultrarelativistických $(m \ll T)$, je možné s dostatečnu přesností zahrnout jen ultrarelativistické částice, takže pak jednoduše platí

$$\rho_R = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4 , \tag{3.16}$$

$$p_R = \frac{1}{3}\rho_R = \frac{\pi^2}{90} g_* T^4 , \tag{3.17}$$

kde $g_*$ označuje celkový očet stpňů volnosti příslušný efektivně nehmotným částicím $(m_i \ll T)$. Je

$$g_* = \sum_{i-boz.} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i-ferm.} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 . \tag{3.18}$$

Faktor $7/8$ vyjadřuje rozdíl $F-D$ a $B-E$ statistik.

Je jasné, že $g_*$ je funkcí teploty, neboť suma zahrnuje je členy s $m_i \ll T$.

Pro $T \ll$Mev -relativistické částice jsou jen 3 druhy neutrin a fotonů; $T_\nu = (4/11)^{1/3} T_\gamma$. Proto $g_*(\ll \mathrm{MeV}) = 3.36$.

Pro 1MeV $\sim T \sim 100\,\mathrm{MeV}$ jsou relativistické i elektrony a pozotrony. Přitom $T_\nu = T_p$. Proto $g_* = 10.75$.

Pro $T > 300$ GeV jsou relativistické a v tepelné rovnováze všecny částice standartního modelu: 8 gluonů, $W^\pm, Z^0$, 3 generace kvarků a leptonů, 1 Higgsův dublet.

Proto $g_*(> 300\mathrm{GeV}) = 106.75$.

Pokud je $g_*$ =konst., platí $p_R = \rho_R/3$ a $R(t) \sim t^{1/2}, \rho_R \sim T^4, \rho_R \sim \frac{1}{R^4}, T \sim \frac{1}{R}$. Pak platí

$$\begin{aligned} H &= 1.66\, g_*^{1/2} \frac{T^2}{m_{pl}} \\ t &= 0.301\, g_*^{-1/2} \frac{m_p l}{T^2} \sim \left(\frac{T}{\mathrm{MeV}}\right) \end{aligned} \tag{3.19}$$

Tyto výrazy určují dynamiku raného vesmíru.

**Entropie**

V raném vesmíru byly tyto rychlosti reakcí částic $\Gamma_{int}$ mnohem větší než rychlost expanze H, takže mohla být ustanovena lokální termodynamická rovnováha. Pak entropie na element souputujícího objemu je konstantní. Entropie vztažená na souputující objem je proto velice užitečná pro popis expandujícího vesmíru.

Použijeme-li v expandujícím vesmíru 2. větu termodynamiky na souputující objemový element o jednotkové souřadnicové velikosti a na fyzikální objem $V = R^3$, pak platí

$$T\,dS = d(\rho V) + pdV = d[(\rho+p)V] - V dp . \tag{3.20}$$

Podmínkyintegrability

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} \tag{3.21}$$

dávají vztah

$$T\frac{dp}{dT} = \rho + p , \tag{3.22}$$

nebo-li

$$dp = \frac{\rho+p}{T} dT . \tag{3.23}$$

Dosadíme-li (3.20) do (3.23), pak

$$dS = \frac{1}{T} d[(\rho+p)V] - (\rho+p)V \frac{dT}{T^2} = d\left[\frac{(\rho+p)V}{T} + konst.\right] \tag{3.24}$$

Entropie na soouputující objem tedy je (až na aditvní konstantu)

$$\rho = R^3 \frac{(\rho+p)}{T} . \tag{3.25}$$

První věta termodynamiky (zákon zachování) je

$$d[(\rho+p)V] = V\,dp .$$

Dosadíme-li sem z (3.23), pak dostáváme

$$d\left[\frac{(\rho+p)V}{T}\right] = 0 . \tag{3.26}$$

Entropie na souputující objem S se tedy v expandujícím vesmíru v termodynamické rovnováze zacovává.

Definujeme hustotu entropie

$$s \equiv \frac{S}{V} = \frac{\rho+p}{T} . \tag{3.27}$$

při dominanci relativistických částic je přibližně

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_{*S} T^3 , \tag{3.28}$$

kde

$$g_{*S} = \sum_{i_b} g_{i_b} \left(\frac{T_{i_b}}{T}\right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{i_f} g_{i_f} \left(\frac{T_{i_f}}{T}\right)^3 . \tag{3.29}$$

Pokud mají **společnou** teplotu, platí $g_* = g_{*S}$. Teprve při oddělení (např. neutrin) se začne objevovat rozdíl mezi $g_*$ a $g_{*S}$. Poznamenejme, že je

$$s = 1.82 g_{*S} n_p .$$

Ze zachování $S$ plyne, že $s \sim R^3$, takže $\mathbf{g_{*S} T^3 R^3}$ je při expanzi vesmíru konstantní. Odtud plyne, že počet čáatic v souputujícím objemu $N \equiv R^3 n$ je dán vztahem

$$N \equiv \frac{n}{s} . \tag{3.30}$$

V termodynamocké rovnováze je pro částice s počtem stupňů volnosti $g$:

$$\begin{aligned} N &= \frac{45\xi(3)g}{2\pi^4 g_{*S}} \qquad T \gg m, \mu \\ &= \frac{45g}{4\sqrt{2}\pi^5 g_{*S}} (m/T)^{3/2} \exp(-m/T + \mu/T) \quad T \ll m \end{aligned} \tag{3.31}$$

Pokud s v danémsouputujícím objemu počet částic nemění, pak $N = n/s$ zůstává konstantí. **Nechybí tu nic?**

Jelikož $\rho = g_{*S}T^3R^3 = konst.$, teplota vesmíru se vyvíjí dle zákona

$$T \propto g_{*S}^{-1/3}R^{-1}\,. \tag{3.32}$$

Pokud $g_{*S}^{-1/3}$ se objevuje proto, že pokud se druh částic stává nerelativistickým, vymizí a jeho entropie se přetransformuje do jiných druhů částic, jež zůstavají relativistické, takže $T$ klesá poněkud pmaleji!

?Dekuplované částice, jež neinteragují s tepelnou lázní ostatních částic se vyvájejí samostatně a jejich teplota bude klesat jako $T \sim R^{-1}$.

Uvažujme částice s $m = 0$, jež se oddělí od tepelné lázně při teplotě $T_D$ v čase $t_D$ při $R_D$. jejich distribuční funkce jevtomto okamžiku

$$f(\vec{p}, t_D) = [\exp(E/T_D) \pm 1]^{-1}\,. \tag{3.33}$$

Po oddělení je energie částic posouvaná do ruda.

$$E(t) = E(t_D)\frac{R(t_D)}{T(T)}\,. \qquad \mathbf{E} \sim \mathbf{p} \tag{3.34}$$

Hustota částic je při expanzi klesá jako $n \sim R^{-3}$.

Proto se distibuční funkce $f(\vec{p}) = d^3n/d^3p$ v čase $t$ změní pouze tak, že dojde ke změně teplty na $T(f) = T_D\frac{R_D}{R(t)}$:

$$f(\vec{p}, t) = f(\vec{p}\frac{R}{R_D}, t_D) = \left[\exp\left(\frac{ER}{R_DT_D}\right) \pm 1\right]^{-1} = \left[\exp\left(\frac{E}{T}\right) \pm 1\right]^{-1}. \tag{3.35}$$

Pro dekuplované částice $(m \gg T_D)$ při dekuplaci z lokální termodynamické rovnováhy bude $t = t_D\,, T = T_D\,, R = R_D$. Hybnost každé částice se bude měnit jako $|p(\vec{t})| = |\vec{p_D}||R_D|R$. Kinetická energie se ovšem mění jako

$$E_k(t) = E_k(t_D)\frac{R_D^2}{R^2}\,. \tag{3.36}$$

Hustota částic $n \sim R^{-3}$. Takové dekuplované částice tedy mají stále rovnovážné rozdělení hybností charakteristické teplotou

$$T = T_D\left(\frac{R_D}{R}\right)^2 \propto R^{-2} \tag{3.37}$$

Chemický potenciál musí být závislý na čase (aby $n \sim R^{-3}$)

$$\mu(t) = m + (\mu_? - m)\frac{T(t)}{?} \tag{3.38}$$

**Vesmírné události v tepelné historii vesmíru**

Vzhledem k tomu, že Friedmanové moddely vesmíru nemají časový Killigův vektor, neměl by jimi popisovaný Vesmír být ze striktně matematického hlediska v termodynamické rovnováze. Ve skutečnosti ovšem Vesmír byl povětšinu své historie v podstatě ve stavu termodynamické rovnováhy. Odchylky od ní ovšem hrály v historií Vesmíru klíčovou roli. Kdyby tomj tak nebylo, byl by jeho současný stav dán systémem o teplotě 2.75 K. (Stav termodynamické rovnováhy se ovšem s expanzí Vesmíru mění - mění se teplota vesmíru.)

Pro teplotní historií Vesmíru má klíčový význam vztah mezi rychlostí interakcí částic a rychlostí expanze Vesmíru. Měnili se teplota jako $T \sim R^{-1}$, pak rychlost změny teploty souvisí s rychlostí expanze jako $\dot{T}/T = -H$. Pokud jsou interakce částic dostatečně rychlé na to, aby distribuční funkci vylaďovaly v souladu s měnící se teplotou, tj. dostatečně rychlejší než rychlost expanze, pak se bude Vesmír vyvíjet tak, že bude postupně procházet přibližně stavy tepelné rovnováhy s teplotou $T \sim R^{-1}$.

Rychlost reakce je dána vztahem $\Gamma \equiv n\sigma|v|$, kde $\Gamma$ je rychlost interakcí na částici, $n$ je hustota interagujících částic, $|v|$ je zprůměrovaná rychlost interagujících částic a $\sigma$ je účinný průřez interakcí. Termodynamické rovnováhybude dosaženo, pokud je

$$\mathbf{\Gamma} \sim \mathbf{H} \tag{3.39}$$

Korektní způsob získání vyvoje distribuční funkce částic je intagrace Boltzmanovy rovnice Zde pro jednoduchost budeme vycházet z kritéria $\Gamma > H(\Gamma < H)$ pro zjištění, zda daný typ částic je vázán (nevázán) na teplené plazma vyplňující Vesmír.

Demonstrujeme oddělení nějakého druhu částic od tepelné plazmy v expandujícím Vesmíru na příkladu dvou interakcí:

1. interakcí zprostředkovaných nehmotnými bozony (jako $p$)

2. interakcí zprostředkovaných hmotnými bozony (jako $W^{\pm}\,, Z^0$ po narušení elektroslabé symetrie na $T \sim 300$ GeV).

V prvním případě je pro $2 \leftrightarrow 2$ rozptyl ultrarelativistických částic s výrazným přenosem hybnosti $\sigma \sim \alpha^2/T^2$, přičmež intenzita kalibrační vyzby $g = \sqrt{4\pi\alpha}$. Ve druhém případě je pro $T \sim m_x\,, \sigma \sim G_x^2T^2$, kde $m_x$ je hmotnost bozonu a $G_x \sim \alpha/m_x^2$. Pro $T \gg m_x$ je $\sigma \sim \alpha^2/T^2$ jako pro nehmotné bozony.

Jsou-li interakce zprostředkovány nehmotnými bozony, je $\Gamma \sim n\sigma|v| \sim \alpha^2T$. Během záření dominované epochy je $H \sim T^2/m_{pl}$, takže $\Gamma/H \sim \alpha^2m_{pl}/T$. Proto pro $T < \alpha^2m_{pl} \sim 10^{16}$ GeV jsou takové reakce dostatečně rychlé, zatímco pro $T \sim \alpha^2m_{pl} \sim 10^{16}$ GeV tyto interakce „zamrznou“.

Jsou-li zprostředkovány masivními bozony, pak je $\Gamma \sim n\sigma|v| \sim G_x^2T^5$ a $\Gamma/H \sim G_x^2m_{pl}T^3$. Pro $m_x \sim T \sim G_x^{-2/3}m_{pl}^{-1/3} \sim (m_x/100\text{GeV})^{4/3}$ MeV jsou interakce efektivně „zamrzlé“.

Zdůrazněme, že pro $T \sim \alpha^2m_{pl} \sim 10^{16}$ GeV jsou všechny perturbafivní interakce neúčinné („zamrzlé“) pro nastavenní nebo udržení termodynamické rovnováhy.

V průběhu historie vesmíru by mělo docházet k několika spontánním narušenním symetrie, tj. fázovým přechodům. Mělo by jít o grandunifikační fázový přechod mezi teplotami $10^{16} \div 10^{14}$ GeV a elektroslabý fázový přechod při teplotě kolem 300 GeV. Při těchto fázových přechodech některé klaibrační bozony nebo i jiné částice získavají hmotnost prostřednictvím tzv. Higgsova mechanismu za rozrušení symetrie. Po fázovém přechodu budou interakce, zprostředkované $X$ bozony se získanou hmotností, charakterizovány intenzitou $G_x$. Částice jež interagují pouze tímto způsobem se oddělí od tepelného plazmatu při teplotě $T \sim G_x^{-2/3} m_{pl}^{-1/3}$.

Mezi teplotami 300 MeV $\div$ 100 MeV dochází k fázovému přechodu s barevným uvězněním; po něm jsou silně interagující hadrony, tj. trojice kvarků tří různých barev (baryony) a dvojice kvarků a antikvarků (mezony).

Speciální pozornost budeme věnovat později období jaderné syntézy, jež proběhlo mezi teplotami 10 MeV $\div$ 0.1 MeV. Prvotní jaderná syntéza je totiž nejranějším testem standartní kosmologie.

Nyní se ještě stručně zdržíme u dalších významných událostí raného vesmíru.

### Oddělění neutrin

Neurtina jsou ve velmi ranném vesmíru udržována v termodynamické rovnováze reakcemi $\bar{\nu}\nu \leftrightarrow e^+e^-\,, \nu e \leftrightarrow \nu e$, apod. Účínný průřez těchto slabých interakcí je $\sigma \simeq G_F^2 T^2$, kde $G_F \simeq 1.1664 \times 10^{-5}$ GeV$^{-2}$ je Fermiho konstanta. Hustota neutrin $n \simeq T^3$, takže pro rychlost interakcí (na neutrina) je

$$\Gamma_\nu = n\sigma|v| \simeq G_F^2 T^5\,. \qquad (3.40)$$

Dále je

$$\frac{\Gamma_\nu}{H} \simeq \frac{G_F^2 T^5}{T^2/m_{pl}} \simeq \left(\frac{T}{1\mathrm{MeV}}\right)^3\,. \qquad (3.41)$$

Při teplotách $T \sim 1$ MeV je $\Gamma_\nu > H$ a neutrina jsou v dostatečném tepelném kontaktu s plazmatem. Pro $T < 1$ MeV jsou interakce neutrin příliš slabé, aby je udržely v rovnováze s plazmatem: lehká neutrina se tedy oddělují od plazmatu. Pak už jejich teplota klesá jako $R^{-1}$. Krátce po oddělení neutrin teplota poklesne pod $T \sim m_e$, takže se entropie párů $e^\pm$ přetransformuje na fotony, ale nikoliv na oddělená neutrina. Při $T \sim m_e$ jsou termodynamické rovnováze fotony ($g = 2$) a $e^\pm$ páry ($g = 4$), takže $g_*(T > m_e) = 11/2$. Pro $T \ll m_e$ jsou v rovnováze jen fotony, takže $g_*(T \ll m_e) = 2$. Jelikož je $S = g_*(RT)^3$ konstantní během expanze bude na $T > m_e$ platit $T_p = T_\nu$, zatímco na $T \ll m_e$ musí být

$$\frac{T_p}{T_\nu} = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3} = 1.40 \qquad (3.42)$$

(Protože platí $11/2(RT)^3 = 2(RT)^3_{T<m_e}$, takže $RT_{(T<m_e)} = (11/4)^{1/3}(RT)_{(T>m_e)}$). Dnešní teplota neutrin je tedy $T_\nu = 1.96$ K. Zdůrazněmě, že pokles $g_*$ nevede k růstu $T$, nýbrž pouze k pomalejšímu poklesu $T$, než dle zákona $R^{-1}$.

Předokládame-li 3 druhy neutrin dostáváme pro dnešní hodnoty efektivních stupňů volnosti

$$g_*(t_0) = 2 + \frac{7}{8} \times 2 \times 3 \times \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} = 3.36\,, \qquad (3.43)$$

$$g_*(t_0) = 2 + \frac{7}{8} \times 2 \times 3 \times \frac{4}{11} = 3.91\,. \qquad (3.44)$$

Jelikož je $T_p \neq T_\nu$, je také $g_* \neq g_{*S}$. Jelikož jsou fotony a neutrina odděleny, jejich entropie se zachovávají. Pro dnešní hodnoty hustoty energie a entropie pak dostáváme při $T_{p0} = 2.75$ K

$$\begin{aligned} \rho_R &= \frac{\pi^2}{30} g_* T^4 = 8.09 \times 10^{-34} \quad \mathrm{g\,cm^{-3}}\,, \\ \Omega_R h^2 &= h\,31 \times 10^{-5}\,, \\ S &= \frac{2\pi^2}{45} g_{*S} T^3 = 2970 \quad \mathrm{cm^{-3}}\,, \\ n_p &= \frac{2\xi(3)}{\pi^2} T^3 = 422 \quad \mathrm{cm^{-3}}\,. \end{aligned} \qquad (3.45)$$

Podobně lze uvažovat oddělění gravitonů. Pro ně je $\Gamma_{gr} = n\sigma|v| \simeq G^2 T^5 \sim T^5/m_p^4$ (položíme-li $G_x = G_N, \alpha_G \sim 1$). Platí, že $\Gamma_{gr} < H \simeq T^2/m_{pl}$ pro $T >_{pl}$. V Planckově čase $t_{pl} \sim 10^{-43}$ s je dle standartního modelu elementárních částic $g_* = 106.75$. Je ovšem pravděpodobné (dle unifikačních teorií), že pro $T \sim m_{pl}$ je stupňů volnosti mnohem více. Přinejmenším lze tedy tvrdit, že na $T < m_{pl}$ se gravitony oddělily a dnes by měly mít teplotu alespoň $(3.91/106.75)^{1/3} T \simeq 0.91$K a hustotu $\sim 15 \quad \mathrm{cm^{-3}}$.

### Rovnost hustoty látky a záření

Vezměmě celkovou hustotu energie a látky (tj. nerelativistických částic: baryonů, apod.) s dnešní hodnotou $\rho_L = 1.88 \times 10^{-29} \Omega_0 h^2 \mathrm{g\,cm^{-3}}$. Poměr hustot energie záření a látky je $\rho_R/\rho_L \propto R_0/R = 1 + Z$.

Vezmeme-li $\rho_R$ z relací (3.45), pak pro okamžik rovnosti hustot energie látky a záření dostáváme

$$\begin{aligned} 1 + Z_{eg} &\equiv R_0/R_{eg} = 2.32 \times 10^4 \Omega_0\, h^2\,, \\ T_{eg} &= T_0(1 + Z_{eg}) 5.5\, \Omega_0\, h^2\, \mathrm{eV}\,, \\ t_{eg} &\simeq \frac{2}{3} H_0^{-1}\, \Omega_0^{-1/2} (1 + Z_{eg})^{-3/2}\,, \\ &= 1.4 \times 10^3 (\Omega_0 h^2)^{-2} \mathrm{let}\,. \end{aligned} \qquad (3.46)$$

Vezmeme-li v úvahu přesný vztah pro evoluci škálového faktoru v období $\rho_L \sim \rho_R$ (při zanedbání křivostního členu $k/R^2$),

$$\frac{t}{t_{eg}} = \frac{\left[\left(\frac{R}{R_{eg}-2}\right)\left(\frac{R}{R_{eg}+1}\right)^{1/2} + 2\right]}{(2 - \sqrt{2})}\,,$$

pak bude

$$t_{eg} = 0.39\, H_0^{-1}\, \Omega_0^{-1/2} (1 + Z_{eg})^{-3/2}\,.$$

### Oddělení fotonů - rekombinace

Látka a záření byly v raném Vesmíru v tepelné rovnováze díky efektivním interakcím mezi fotony a elektron. Nakonec však hustota volných elektronů natolik klesla, že došlo k oddělení fotonů od látky. Pro okamžik tohoto oddělení platí $\Gamma_p \simeq H$, resp. $\lambda_p \simeq \Gamma_p^{-1} = H^{-1}$, střední volná dráha fotonů $\lambda_p$ se stává větší než Hubblova vzdálenost $H^{-1}$.

Rychlost interakcí fotonů

$$\Gamma_p = n_e \sigma_T \,, \tag{3.47}$$

kde $n_e$ je hustota volných elektronů a $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25} \quad \mathrm{cm}^{-2}$ je Thomsonův účinný průřez. Rovnovážný stav volných elektronů je dán *Sahovou rovnicí*, již si nyní odvodíme.

Označme hustoty volných elektronů, protonů a vodíku jako $n_e \,, n_p \,, n_H$. (Zanedbejme jedno jádro 4He na 10 protonů a předpokládejme, že všechny jsou ve formě protonů.) Z nábojové neutrality plyne $n_e = n_p$ a ze zákona zachování baryonového čísla plyne $n_B = n_p + n_H$.

V termodynamické rovnováze je při teplotách menších než $m_i$

$$n_i = g_i \left( \frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left( \frac{\mu_i - m_i}{T} \right) \,, \tag{3.48}$$

kde $i = (e, p, H)$. V chemické rovnováze proces $p + e \to H + p$ zajišťuje, že je $\mu_p + \mu_e = \mu_H$. Faktor $\mu_H$ v $n_H$ vyjádříme pomocí $\mu_e$ a $\mu_p$ a ten lze vyjádřit pomocí $n_p$ a $n_e$:

$$n_H = \frac{g_H}{g_p \, g_e} \, n_p \, n_e \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{-3/2} \exp(\frac{B}{T}) \,, \tag{3.49}$$

kde B je vazbová energie vodíku, tj. $B \equiv m_p + m_e - m_H = 13.6$ eV. V prexponenciálním faktoru jsme položili $m_H = m_p$. Stupeň ionizace lze vyjádřit poměrem

$$X_e \equiv \frac{n_p}{n_B} \,. \tag{3.50}$$

Vezmeme-li $g_p = g_e = 2 \,, g_H = 4$ a $n_B = \eta \cdot n_p$, pak z rovnice (3.49) *Sahova rovnice* pro parametr ionizace v rovnovážném stavu $X_e^{eg}$:

$$\frac{1 - X_e^{eg}}{(X_e^{eg})^2} = \frac{4\sqrt{2}\,\xi(3)}{\sqrt{\pi}} \, \eta \left( \frac{T}{m_e} \right)^{3/2} \exp \left( \frac{B}{T} \right) \,. \tag{3.51}$$

Poměr počtu baryonů a fotonů $\eta = (\Omega_B \, h^2) 2.68 \times 10^{-8}$; pro teplotu platí $T = (1+z) 2.75$ K. Sahovou rovnici pak lze řešit pro různé hodnoty $\Omega_B \, h^2$. Lze tak nalézt závislosti $X_e^{eg}(1+z)$. Definujeme rekombinaci jako okamžik, kdy $X_e^{eg} = 0.1$, tj.90$\%$ elektronů je uvězněno v atomech H. Pak lze říci, že k rekombinaci došlo pro $(1+z)$ v intervalu 1200 $(\Omega_B \, h^2 = 0.01)$ až 1400 $(\Omega_B \, h^2 = 0.1)$. Ve všech případech hodnot $\Omega_B \, h^2$ je $X_e^{eg} \to 0$ pro $1 + z \to 1000$. Vezmeme-li $1 + z = 1300$, pak

$$T_{rek} = T_0 (1 + z_{rek}) = 3575\mathrm{K} = 0.308\mathrm{eV} \tag{3.52}$$

Předpokládáme-li, že v době rekombinace byl Vesmír dominován látkou, věk Vesmíru byl tehdy

$$\begin{aligned} t_{rek} &= \frac{2}{3} H_0^{-1} (1 + z_{rek})^{-3/2} \\ &= 4.39 \times 10^{12} (\Omega_0) \, h^2)^{1/2} \quad \mathrm{s} \,. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Všimneme si, že k rekombinaci dojde při teplotě $\sim 0.3$ eV, nikoliv $T \sim B \sim 13.6$ eV. To je způsobeno malou hodnotou faktoru před $\exp(B/T)$ v (3.51), tj. velká entropie $(\eta \ll 1)$ a $(T/m_e)^{3/2}$ způsobí, že $T_{rek}$ je mnohem menší než vazbová energie vodíku.

Rovnovážná ionozace je použitelná tehdy, když je nastavená rovnováha, tj. rychlost reakcí $e + p \leftrightarrow H + p$ je větší než rychlost expanze. Podrobné výpočty vycházejí z Boltzmanovy rovnice ukazují, že rovnovážná ionizace je nastavena na $(1 + z) > 1100$, a že reziduální ionizace při $(1 + z) \sim 1100$ je

$$X_\infty \approx 3 \times 10^{-5} \frac{\Omega_0}{\Omega_B \, h} \,. \tag{3.54}$$

Za předpokladu rovnovážné ionizace a skutečnosti, že hustota volných elektronů $n_e = X_e n_B = X_e \eta n_p$, takže $n_e \simeq X_e (\Omega_B \, h^2)(1+z)^3 \, 1.13 \times 10^{-5} \mathrm{cm}^{-3}$, můžeme určit střední volnou dráhu fotonů z (3.47) a srovnat ji s věkem Vesmíru $t = (2/3)(1 + z)^{-3/2} H_0^{-1} \Omega_0^{-1/2}$. Věk Vesmíru závisí na $\Omega_0$, zatímco $\lambda_p$ závisí na $\Omega_B$. K oddělení fotonů dojde, když je $\lambda_p \sim \Gamma_p^{-1} \simeq t \sim H^{-1}$.

Deshift $(1 + z_{ret})$ při oddělení závisí na $\Omega_0$ a $\Omega_B$ a je někde mezi 1100 a 1200. Je-li $(1 + z - ret) \sim 1100$, pak

$$T_{od} = T_0 (1 + z_{od}) = 3030 \quad \mathrm{K} = 0.26 \quad \mathrm{eV} \,. \tag{3.55}$$

Byl-li tehdy Vesmír dominován látkou, pak věk Vesmíru v okamžiku oddělení fotonů byl

$$\begin{aligned} t_{od} &= \frac{2}{3} H_0^{-1} \Omega_0^{-1/2} (1 + z_{od})^{-3/2} \,, \\ &= 5.64 \times 10^{12} (\Omega_0 h^2)^{-1/2} \quad \mathrm{s} \,. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Shrňme tedy události, jež se odehrály při oddělení fotonů. Z rozboru rekombinace a oddělení plyne, že pro závislost příslušných redshiftů lze psát

$$\begin{aligned} 1 + z_{od} &\simeq 1100 \left( \frac{\Omega_0}{\Omega_B} \right)^{0.018} \simeq 1100 \div 1200 \\ 1 + z_{rek} &\simeq 1380 (\Omega_B h^2)^{0.023} \simeq 1240 \div 1380 \end{aligned} \tag{3.57}$$

Z přesné „Boltzmanovy“ teorie plyne „zamrznutí“ residuální ionizace

$$1 + z_{zam} \simeq \frac{1180}{1 + 0.021 \ln(\Omega_0/\Omega_B)} \simeq 1080 \div 1180 \,. \tag{3.58}$$

Předpokládali jsme, že $\Omega_B \, h^2 = 0.01 \div 1$ a $\Omega_0/\Omega_B = 1 \div 100$.

Většinou je možno pro přibližné kosmologické aplikace předpokládat, že veškerý proces reprezentujeme oddělením fotonů při $1 + z_{od} \equiv 1100$ a $T_{od} = 0.26$ eV.

**Baryonové číslo Vesmíru**

Hustota baryonů je $n_B \equiv n_b - n_{\bar{b}}$; $n_b(n_{\bar{b}})$ určuje hustotu baryonů (antibaryonů). Pozorování ukazují, že ve Vesmíru je zanedbatelné množství antibaryonů, a že baryonů jsou obsaženy v nukleonech, tj.

$$n_B = n_N = 1.13 \times 10^{-5} (\Omega_B \, h^2) \mathrm{cm}^{-3} \, . \qquad (3.59)$$

Z předhozích diskusí víme, že $n_B/S$ odpovídá čistému baryonovému číslu v souputujícím objemu, a že toto číslo se zachovává, pokud neprobíhají reakce měnící počet baryonů. Definujeme tedy *baryonové číslo Vesmíru*:

$$B \equiv \frac{n_B}{S} = 3.81 \times 10^{-9} (\Omega_B \, h^2) \, . \qquad (3.60)$$

Jelikož od epochy anihilace páru $e^{\pm}$ platí reakce $S \simeq 7.04 \, n_p$, můžeme psát

$$\eta \simeq 7B \simeq 2.68 \times 10^{-8} (\Omega_B \, h^2) \, . \qquad (3.61)$$

Poznamenejme, že primordiální jaderná syntéza dává omezení $\eta = (4-7) \times 10^{-10}$, takže $B \simeq (6-10) \times 10^{-11}$. Veličina $1/B = S/n_B \simeq (1-2) \times 10^{10}$ odpovídá entropií na baryon. Žijeme tedy ve Vesmíru s vysokou entropií.

**Výplň kauzálního horizontu**

Určeme entropii a počet baryonů obsažených uvnitř kauzálního horizontu.

*Éra dominance záření*: $d_H(t) = 2t \, , s = 2\pi^2 g_* T^3/45$; proto

$$\begin{aligned} S_{Hor} &= \frac{4\pi}{3} t^3 \, s = 0.050 \, g_*^{-1/2} \left( \frac{m_{pl}}{T} \right)^3 \, , \\ (N_B)_{Hor} &= B S_{Hor} = 1.9 \times 10^{-10} (\Omega_B \, h^2) \, g_*^{-1/2} \left( \frac{m_{pl}}{T} \right)^3 \, , \\ (H_{Hor}) &= 0.29 \, M_{\bigodot} (\Omega_B \, h^2) \, g_*^{-1/2} \left( \frac{\mathrm{MeV}}{T} \right)^3 \, . \end{aligned} \qquad (3.62)$$

*Éra dominance látky*: $d_H(t) = 3t \, , s = s_0 (1+z)^3 = 2970 (1+z)^3 \mathrm{cm}^{-3}$; proto

$$\begin{aligned} S_{Hor} &= \frac{4\pi}{3} t^3 \, s = 2.9 \times 10^{87} \, (\Omega_0 \, h^2)^{-3/2} (1+z)^{-3/2} \, , \\ (N_B)_{Hor} &= B S_{Hor} = 1.1 \times 10^{79} (\Omega_B / \Omega_0^{3/2} \, h)(1+z)^{-3/2} \, , \\ (H_{Hor}) &= 9.94 \times 10^{21} \, M_{\bigodot} (\Omega_B / \Omega_0^{3/2} (1+z)^{-3/2} \, . \end{aligned} \qquad (3.63)$$

Vidíme, že dnes je uvnitř horizontu entropie $\sim 10^{88}$ a bayronové číslo $\sim 10^{79}$, zatímco ve velmi ranném Vesmíru obsahoval horizont pouze entropií $\sim (m_{pl}/T)^3$ a baryonové číslo $\sim 10^{-10} (m_{pl}/T)^3$.

**Velikost vesmíru**

Jak velký je náš Vesmír? Rozumná odpověď na takovou otázku závisí na tom, co míníme pojmem „náš Vesmír“. V případě uzavřeného vesmíru ()$k = +1$ lze prostě říci, že v daném čase *t* je velikost vesmíru daná velikostí expanzního faktoru

$$R(t) = |\Omega(t) - 1|^{-1/2} H^{-1}(t) \, . \qquad (3.64)$$

Pro otevřené vesmíry $(k = 0, -1)$ však tato odpověď nemá smysl„ jelikož tyto vesmíry jsou nekonečné v prostoru. Vatkovém případě má ovšem smysl jiný přístup: určit, jak velký byl v minulosti *dnes pozorovatelný vesmír*! Veikost pozorovatelného vesmíru je dána dnešní velikostí kauzálního horizontu. Uvažujme pro jednoduchost limitní Friedmanův model s $k = 0$. Pak $d_H = 3t_0 = 2H_0^{-1}$ a rozměr dnes pozorovatelného Vesmíru je

$$D_0(t_0) = 4H_0^{-1} \, . \qquad (3.65)$$

V dřívějších dobách byla velikost tohoto pozorovatelného Vesmíru dána vztahem

$$D_0(t) = \frac{R(t)}{T_0} D_0(t_0) = \frac{R(t)}{R_0} 4H_0^{-1} \, . \qquad (3.66)$$

Z $D_0(t)$ „vyrostl“ dnes pozorovaný Vesmír;$D_0(t)$ *není* pozorovatelných Vesmírem v čase $t$.

Pokud nedošlo k výrazné produkci entropie mezi $t$ a $t_0$, pak ze zachování entropie plyne: $g_{*S}(t_0) R_0^3 T_0(t)^3 = g_{*S}(t) R^3 T^3$. Jelikož je dnes $g_{*S}(t_0) = 3.91$, můžeme psát

$$D_0(t) = 4 \left[ \frac{3.91}{g_{*S}} \right]^{1/3} \frac{t_0}{T(t)} H_0^{-1} \, . \qquad (3.67)$$

Nyní můžeme určit velikost našeho Vesmíru na „počátku“, v Planckově čase $t_{pl} = m_{pl}^{-1}$. Předpokládáme-li zářením dominovaný vesmír v $t = t_{pl}$, pak platí

$$\begin{aligned} t_{pl} &= 0.301 g_*^{1/2} \frac{m_{pl}}{T_{pl}^2} \, , \\ T_{pl} &= 0.55 g_*^{1/4} m_{pl} \, . \end{aligned} \qquad (3.68)$$

(V takovém případě díky zahrnutí vlivu vnitřních stupňů volnosti čáatic *není* $T_{pl} = m_{pl} = E_{pl}$.)

Dosadíme-li nyní do (3.67), dostáváme

$$D_0(t_{pl}) = \frac{11.5}{g_{*S}^{1/12}} \frac{T_0}{m_{pl}} = H_0^{-1} = 1.4 \, \times 10^{-3} \quad \mathrm{cm} \, . \qquad (3.69)$$

Předpokládáli jsme $g_{*S}(t_{pl}) = 106.75$, jak plyne z počtu stupňů volnosti ve standartním modelu elementárních částic:$SU(3)_{<}? \bigotimes SU(2)_{?} \bigotimes U(1)_{?}$. Pro $h = 0.7$ tedy dostáváme $D_0(t_{pl}) = 2 \times 10^{-2}$ mm.

## 3.2 PRVOTNÍ JADERNÁ SYNTÉZA

Po vzniku baryonů uvězněním kvarků při teplotách 100 - 300 MeV došlo k velice významné události, prvotní syntéze lehkých jader mezi $t \simeq 10^{-2} \div 10^{2}$ s, kdy teplota klesla z $T \sim 10$ MeV na o,1 MeV. Tato událost je vyznámna tím, že proměřování výsledků této události, tj. zjišťování zastopení lehkých jader, je nejranějším testem pravdivosti standartního kosmologického modelu.

**Jaderná statistická rovnováha**

Primordiální? jadernou syntézou budeme poa?ovat za d?sledek jaderné statistické rovnováhy (JSR) mez lehkými jádry. Budeme p?edpokládat, ?e v?echna jádra jsou *nerelativistivká*. Pak v *kinetické* rovnováze je pro jádro A(Z) s hmotným ?íslem A a nábojem Z daná hustota výskytu vztahem

$$\eta_A = g_A \left(\frac{m_A T}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{\mu_A - m_A}{T}\right), \qquad (3.70)$$

kde $\mu_{\mathbf{A}}$ je je chemický potenciál a $m_A$ je klidová hmotnost (energie). Je-li rychlost reakcí tvo?ících jádro A ze Z proton? a A-Z neutron? v?t?í ne? rychlost expanze vesmíru, budeme mít chemickou rovnováhu. Pak pro p?íslu?né chemické poteniály $\mu_A, \mu_p, \mu_n$ platí

$$\mu_A = Z\mu_p + (A-Z)\mu_n \qquad (3.71)$$

Rovnice (3.70) platí i pro protony a neutrony, tak?e za chemické rovnováhy m??eme $\exp(\mu_A/T)$ vyjád?it pomocí hustoty proton? a neutron?: ODSAZENÍ DO LEVA!!!!!!!!!!!

$$\exp(\mu_A/T) = \exp\{[Z\mu_p + (A-Z)\mu_n]/T\}$$
$$= n_p^Z\, n_n^{A-Z} \left(\frac{2\pi}{m_n T}\right)^{3A/2} 2^{-A} \exp\{[Zm_p + (A-Z)m_n]/T\} \qquad (3.72)$$

kde jsme zanedbali rozdíly mezi $m_n, m_p, m_A/A$ ve v?ech p?edexponenciálních faktorech a pou?ili hmotnost nukleonu $m_N$.

Zavedeme-li vazbovou energii jádra $A(Z)$

$$B_A \equiv Zm_p + (A-Z)m_n - m_A, \qquad (3.73)$$

po dosazení (3.72) do (3.70) dostáváme

$$n_A = g_A A^{3/2} 2^{-2} \left(\frac{2\pi}{m_N T}\right)^{\frac{3}{2}(A-1)} \qquad (3.74)$$

Uve?me nyní p?ehled vazbových energií n?kterých lehkých jader:

| $A(Z)$ | $B_A$ | $g_A$ |
|---|---|---|
| 2H | 2.22 MeV | 3 |
| 3H | 6.92 MeV | 2 |
| 3He | 7.72 MeV | 2 |
| 4He | 28.3 MeV | 1 |
| 12C | 92.2 MeV | 1 |

Hustoty po?tu jader v expadnujícím Vesmíru klesají jako $R^{-3}$ (p?i konstantním po?tu v souputujícím objemu), je u?ite?né pou?ít celkovou hustotu po?tu nukleon? $n_N = n_p + n_n + \sum_i (An_A)_i$ jako základní veli?inu a uva?ovat hmotnostní p?ísp?vek jader A(Z) v podob?

$$X_A \equiv \frac{n_A A}{n_N}\, ; \sum_i X_i = 1 \qquad (3.75)$$

Potom na jaderné statistické rovnováze platí:

$$X_A = g_A[\xi(3)^{A-1}\pi^{\frac{1}{2}(3A-5)}]A^{5/2}\left(\frac{T}{m_n}\right)^{\frac{3}{2}(A-1)} \times \eta^{A-1} X_p^Z X_n^{A-Z} \exp(B_A/ \qquad (3.76)$$

kde zavádíme parametr

$$\eta \equiv \frac{n_N}{n_p} = 2.68 \times 10^{-8} \qquad (\Omega_B h^2)\,, \qquad (3.77)$$

jako současný poměr počtu baryonů k počtu fotonů. Skutečnost, že vesmír je „horký“; tj. $\eta \ll 1$ a je velk8 entropie připadající na jeden baryon, je klíčová pro primordiální jeadernou syntézu.

**Počáteční podmínky ($T \gg MeV, t \ll 1s$)**

Pro výsledek primordiální jaderné syntézy je klíčový počáteční poměr $n_n/n_p$, neboť v podstatě všechny neutrony zůstanou uvězněny v 4He. Rovnováha mezi neutrony a protony je zajišťovaná slabými interakcemi ($\nu \equiv \nu_e$):

$$n \leftrightarrow p + e^- + \nu\,,$$
$$\nu + n \leftrightarrow p + e^-\,,$$
$$e^+ + n \leftrightarrow p + \bar{\nu} \qquad (3.78)$$

Jsou-li rychlosti techto interakcí větší než rychlost expanze vesmíru, nastává chemická rovnováha, kdy

$$\mu_n + \mu_\nu = \mu_p + \mu_e\,, \qquad (3.79)$$

takže v chemické rovnováze platí

$$\frac{n}{p} \equiv \frac{n_n}{n_p} = \frac{X_n}{X_p} = \exp[-\frac{Q}{T} + \frac{(\mu_e - \mu_\nu)}{T}]\,, \qquad (3.80)$$

kde $Q \equiv m_n - m_p = 1.293 MeV$. Z nábojové neutrality Vesmíru pak plyne viz(...)

$$\frac{\mu_e}{T} \sim \frac{n_e}{n_p} = \frac{n_p}{n_\gamma} \sim \eta \sim 10^{-10}.$$

Pro poměr $\mu_\nu/T$ nelze zcela jasně provést obdobné odhady, neboť reliktní neutrinové pozadí dosud nebylo detekováno, takže neumíme nalézt odhad počtu žádného typu $(e, \mu, \bar{\nu})$ neutrin.

Budeme předpokládat, že podobně jako pro baryony bude leptonové číslo malé, tj. $|\mu_\nu|/T \ll 1$. Za tohoto předpokladu je rovnovážný poměr neutronů a protonů dán vztahem

$$\left(\frac{n}{p}\right)_{eg} = \exp(-Q/T)\,. \qquad (3.81)$$

Tento poměr je na obr. znázorněn jak pro skutečnou, tak i pro rovnovážnou situaci;

SEM PATŘÍ OBRÁZEK!!!!!!!!!!!!!

Uvažujme nyní rychlosti interakcí přeměňujících neutrony na protony.

Vztahujeme-li tyto počty interakcí na 1 nukleon a jednotku času, musíme interagovat 2 mocninu maticového elementu daného procesu vázaného hustotami částic ve fázovém prostoru (částit jiných než iniciální nukleon). Připojit musíme zachování 4-hybnosti. pak např. rychlost procesů $pe \to \nu n$ je dán vztahem

$$\Gamma_{pe\to\nu n} = \int f_e(E_e)[1-f_\nu(E_\nu)]|M|^2_{pe\to n\nu}(2\pi)^{-5}\delta^4(p+e-\nu-n)\frac{d^3p_e}{2E_e}\frac{d^3p_\nu}{2E_\nu}\frac{d^3p_n}{2E_n} \tag{3.82}$$

Všechny procesy tohoto typu mají společný faktor v maticovém elementu pro jaderný $\beta$-rozpad neutronu

$$|M|^2 \propto G_F^2(1+3g_A^2)\,, \tag{3.83}$$

kde vazbový parametr $g_A \simeq 1.26$ reprezentuje axiálně-vektorovou vazbu nukleonu. Z teorie elementárních částic plyne, že tento faktor lze vyjádřit pomocí střední doby života neutronu $\tau_n$, resp. $\tau_{1/2}(n) = (\ln 2)\tau_n$ tj. poločasu rozpadu, ve tvaru

$$\tau_n^{-1} = \Gamma_{n\to pe\nu} = \frac{G_F^2}{2\pi^3}(1+3g_A^2)m_e^5\lambda_0\,, \tag{3.84}$$

přičemž

$$\lambda_0 \equiv \int_1^q d\epsilon\ \epsilon(\epsilon-q)^2(\epsilon^2-1)^{1/2} \simeq 1.636 \tag{3.85}$$

představuje numerický faktor z integrálu ve fázovém prostoru pro rozpad neutronu.

Integrační meze v integrálech pro rychlosti reakcí jsou dány rozdílem hmotností neutronu a protonu a hmotnosti elektronu. Použujeme-li bezrozměrné veličiny $\lambda = Q/m_e$, $\epsilon = E_e/m_e$, $z = m_e/T$, $z_\nu = m_e/T_\nu$, pak je

$$\Gamma_{pe\to\nu n} = (\tau_n\lambda_0)^{-1}\int_q^\infty d\epsilon\frac{\epsilon\,(\epsilon-q)^2(\epsilon^2-1)^{1/2}}{[1+\exp(\epsilon z)][1+\exp((q-\epsilon)z_\nu)]} \tag{3.86}$$

V limitě vysokých a nízkých teplot platí

$$\Gamma_{pe\to\nu n} = \begin{cases} \tau_n^{-1}(t/m_e)^3\exp(-Q/T)\ldots & \ldots T \gg Q\,, m_e, \\ \frac{7}{60}\pi(1+3g_A^2)G_F^2T^5 \simeq G_F^2T^5\ldots & \ldots T \ll Q\,, m_e \end{cases} \tag{3.87}$$

Pro rychlost expanze Vesmíru platí

$$H \simeq 1.66 g_*^{1/2}\frac{T^2}{m_pl} \simeq 5.5\frac{T^2}{m_pl}\,,$$

takže dostáváme

$$\Gamma/H \sim \left(\frac{T}{0.8\mathrm{MeV}}\right)^3 \tag{3.88}$$

při $T \geq m_e$. Při tepúlotách větších 0.8 MeV lze tedy očekávat, že $m_n/m_p$ odpovídá rovnovážné hodotě, takže pro $T \gg MeV$ je $X_n \simeq X_p$. Při $T > 1$ MeV jsou ovšem i rychlosti jaderných reakcí tvořících lehká jádra vyšší než rychlost expanze Vesmíru, takže se ustaví JSR.

Pro ilustraci uvažujme systém lehkých jader a částic: n, p, $^2$H, 3He, 4He, $^1$2C. V JSR jsou hmotnostní podíly dány vztahy

$$X_n/X_p = \exp(-Q/T)\,, \tag{3.89}$$

$$X_2 = 16.3(T/m_n)^{3/2}\eta\exp(B_2/T)X_nX_p\,, \tag{3.90}$$

$$X_3 = 57.4(T/m_n)^3\eta^2\exp(B_3/T)X_nX_p^2\,, \tag{3.91}$$

$$X_4 = 113(T/m_n)^{9/2}\eta^3\exp(B_4/T)X_n^2X_p^2\,, \tag{3.92}$$

$$X_12 = 3.22\times10^5(T/m_n)^{33/2}\eta^{11}\exp(B_{12}/T)X_n^6X_p^6 \tag{3.93}$$

Přitom platí

$$1 = X_n + X_p + X_2 + X_3 + X_4 + X_12 \tag{3.94}$$

přestože čìní vazbové energie na nukleonu 1 - 8 MeV, rovnovážné množství různých jader jsou řádu jednotky až při teplotách $\sim 0.3$ MeV. To je způsobeno velkou entropií Vesmíru, tj. malou hustotou parametru $\eta$. Ačkoliv při teplotách $T \sim$ MeV jsou jádra favorizovaná z energetických důvodů, entropické důvody favorizují volné nukleony a entropie Vesmíru je velice vysoká. Hrubý odhad toho, kdy bude existence jádra A termodynamický výhodná, dostaneme nalezením teploty $T_A$ při $X_A \sim 1$ (za předpkladu $X_n \sim X_p \sim 1$):

$$T_A \simeq \frac{B_A/(A-1)}{\ln(\eta-1)+1.5\ln(m_n/T)} \tag{3.95}$$

Platí, že $T_{^2H} \sim 0.07$ MeV, $T_{^3He} \sim 0.11$ MeV, $T_{^4He} \sim 0.28$ MeV a $T_{^{12}H} \sim 0.25$ MeV. Ze skutečnosti, že se lehké prvky netvoří, pokud není $T \ll$ MeV, je často Viněno? deuterium se svou nízkou vazebnou energí - „mýtické hrdlo deutriové láhve“.

Ve skutečnosti JSR množství 4He a $^{12}$ C (tj. jader s velkou vazbovou energií) jsou malá, pokud není $T < 0.3$MeV - to ovšem plyne z vysoké entropie Vesmíru, nikoliv malé vazbové energie deuteria. Na poněkud nižší teplotě $T \sim 0.1$ MeV nnézké množství D a $^3$ He krátce zpozdí jadernou syntézu - to je jediná podstata mýtu „deuterinového jádra“.