

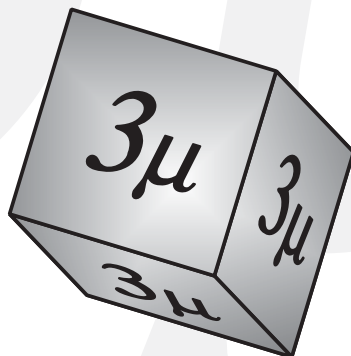
VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ - TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA



JEDNOTA ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYZIKŮ, pobočka Ostrava
KATEDRA MATEMATIKY A DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE VŠB -TU Ostrava

Sborník z 22. semináře

Moderní matematické metody v inženýrství česko-polský seminář (3mi)



3.6. - 5.6. 2013

Horní Lomná

Organizační a programový výbor

Předseda: Radek Kučera, Česká republika

Členové: Zdeněk Boháč, Česká republika
Jarmila Doležalová, Česká republika
Milan Doležal, Česká republika
Ivan Kolomazník, Česká republika
Zygmunt Korban, Polsko
Pavel Kreml, Česká republika
Zuzana Morávková, Česká republika
Božena Skotnicka, Polsko
Viera Záhonová, Slovensko

© Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3233-3

Vážené kolegyně, vážení kolegové,

mezinárodní seminář Moderní matematické metody v inženýrství pokračoval letos dvaadvacátým ročníkem. Organizaci semináře v souladu s tradicí zajistila ostravská pobočka Jednoty českých matematiků a fyziků a Katedra matematiky a deskriptivní geometrie VŠB-TU Ostrava. Do hotelu Excelsior v Horní Lomné u Jablunkova přijelo 67 účastníků, z toho 25 zahraničních (24 z Polska a 1 ze Slovenska). Výraznou převahu mezi účastníky mělo mládí, což je určitě potěšující.

Cyklus tří plenárních přednášek z historie matematiky zaměřil v tomto roce pan doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc. z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze na matematiku ve starověkém Řecku. Jeho přednášky nazvané Aristarchovo měření vesmíru a Eratosthenovo měření Země, Archimédův pískový počet a Boj s nekonečnem všechny účastníky velmi zaujaly.

Bylo předneseno celkem 29 referátů a komentováno 24 posterů. Příspěvky byly zaměřeny odborně na matematické modelování, simulace, kódování, statistiku, aplikace matematiky v geologii, geodézii a ekonomii, ale i metodicky na analýzu náročnosti studia matematiky na technických vysokých školách, přijímací testy nebo na úroveň znalostí studentů. Pro velký zájem projevený v minulém ročníku byl i na letošní seminář zařazen workshop GeoGebra. Jeho pokračování se předpokládá i v dalších ročnících. Novinkou byl kulatý stůl na téma Výuka matematiky na technický vysokých školách, během kterého došlo k výměně názorů na obsah vysokoškolské matematiky a na zkušenosti s metodikou její výuky. Diskuse se také zabývala neustále klesající úrovní znalostí studentů, kteří na vysoké školy nastupují.

Spolufinancování semináře z prostředků EU z Fondu mikroprojektů v Euroregionu Silesia (CZ.3.22/3.3.04/13.03561) umožnilo účast širokému okruhu zájemců, včetně doktorandů a zejména výrazně vyšší účast polských kolegů z příhraničních vysokých škol.

Změna nastala také ve výstupech ze semináře. Sborník všech příspěvků je vydáván na CD, zatímco příspěvky v anglickém jazyce jsou publikovány v tradiční tištěné podobě. Příspěvky byly dodány ve formě camera ready, takže neprošly ani odbornou ani jazykovou úpravou. Připravujeme také vydání mimořádného čísla časopisu AEEE (Advances in Electrical and Electronic Engineering), v němž budou otištěny odborné články navazující na vybrané příspěvky. Výběr provádí ediční rada časopisu s ohledem na jeho zaměření. Články pak projdou standardním recenzním řízením.

Závěrem si Vás dovoluujeme pozvat na příští, již 23. ročník semináře, který proběhne v termínu 2.–4. června 2014 opět v hotelu Excelsior.

Listopad 2013

Organizační a programový výbor

OBSAH

◆ <i>Andrášik, Richard, UP Olomouc</i> Primal-dual Nonlinear Rescaling Method with Dynamic Scaling Parameter Update for Convex Optimization Problems	6
◆ <i>Badura, Henryk, Centrum Kształcenia Inżynierów, Rybnik</i> Application of Models with Autoregressive Variables for Methane Hazard Forecasting in Hard Coal Mines	11
◆ <i>Cichy, Tomasz, PS Gliwice</i> Oznaczenie gęstości hydromieszanin bez odsiarczania z dodatkiem spoiwa w postaci cementu	17
◆ <i>Dlouhá, Dagmar - Paláček, Radomír, VŠB – TU</i> Vytvoření e-learningových kurzů s multimediálními studijními materiály pro matematické předměty na vybraných fakultách VŠB-TU Ostrava	22
◆ <i>Dvořáková, Stanislava, VŠP Jihlava</i> Analýza průběhu investiční křivky vycházející z cost-benefit metody hodnocení projektů	27
◆ <i>Hamříková, Radka, VŠB – TU Ostrava</i> Interaktivní tabule při tvorbě e-learningových kurzů	32
◆ <i>Kabelíková, Pavla, VŠB – TU Ostrava</i> Fixing Nodes Method for Stabilization of Generalized Inverse	36
◆ <i>Kalousek, Zdeněk, TU Liberec</i> Appeal of Inexact Calculations	41
◆ <i>Kołodziej, Sabina, Kozminski University Warsaw – Biały, Witold, PS Gliwice</i> Use of the IBM SPSS Statistics for Analysis of the Data - Example	49
◆ <i>Korban, Zygmunt, PS Gliwice</i> Safety Hazard Evaluation for People Employed as Miners in the Area of Reconstruction of Heading 4a, Bed No. 620 at the “Jan” Coalmine	54
◆ <i>Kowalik, Stanisław, WSB Dąbrowa Górnicza</i> Application Simulated Anneling to Solve the Traveling Salesman Problem	60
◆ <i>Krček, Břetislav – Bobková, Michaela, VŠB – TU Ostrava</i> Příspěvek k výuce diferenciálních rovnic	65
◆ <i>Kučera, Radek – Kozubek, Tomáš – Markopoulos, Alexandros – Haslinger, Jaroslav – Mocek, Lukáš, VŠB – TU Ostrava</i> Projected Krylov Methods between Two Subspaces	71
◆ <i>Manowska, Anna, PS Gliwice</i> Warning Prognosis of Coal Sales in the Polish Market	76
◆ <i>Manowska, Anna, PS Gliwice</i> Model of Forecasting of Quantity of Coal Sale Based on History of Phenomenon	82
◆ <i>Maroš, Bohumil, VUT Brno – Budíková, Marie, MU Brno</i> Způsoby odhadu směrodatné odchylky odhadu parametrů v exponenciálním regresním modelu	87

◆	<i>Midor, Katarzyna, School of Finances and Law, Bielsko-Biala</i> MSA for Attributive Characteristics – Applications of the Cross Tab Method for Product Quality Control	92
◆	<i>Morávková, Zuzana, VŠB – TU Ostrava</i> Interaktivní pomůcky a aplikované úlohy ve výuce diferenciálního počtu	97
◆	<i>Napórkowska, Joanna, Opole University</i> Mathematical Modeling of Physical Problems	100
◆	<i>Navrátil, Vladislav – Novotná, Jiřina, MU Brno</i> Some Remarques to Plastic Deformation of Cd – Zn Alloys Single Crystals	105
◆	<i>Pączko, Dariusz, PS Gliwice</i> The Regularity of the Matrix–Differential Systems	111
◆	<i>Polcerová, Marie, VUT Brno</i> Slovní úlohy na extrémny funkce	113
◆	<i>Profaska, Marek, PS Gliwice</i> The Estimation of the Expanded Uncertainty in the Study of Acoustic	118
◆	<i>Příbylová, Lenka, VŠB – TU Ostrava – Večerek, Michal – Homza, Miroslav, Fakultní nemocnice Ostrava</i> PCA and ABPM Monitoring of Blood Pressure	124
◆	<i>Ścierski, Jerzy, PS Gliwice</i> Use of Analysis of Data Collected within Quality Management System for Business Processes Improvement – Case Study	129
◆	<i>Senczyna, Stefan, School of Finances and Law, Bielsko-Biala</i> Aspects of Implementing a Model of the Traveling Salesman by an Information System for Management Support	138
◆	<i>Schreiberová, Petra – Volný, Petr, VŠB – TU Ostrava</i> Worksheets for Mathematics	144
◆	<i>Sikora-Drabik, Paulina, PS Gliwice</i> Wykorzystanie metody szeregów dynamicznych w analizie retrospektywnej stanu bezpieczeństwa pracy w górnictwie węgla kamiennego w Polsce w latach 2008 - 2012	148
◆	<i>Sitko, Jacek, PS Gliwice</i> Chosen Factors Effect of Elements Among Others the Fire and Wind to Building Structures	154
◆	<i>Skalný, Pavel, VŠB – TU Ostrava</i> An Application of Graph Theory in Markov Chains Reliability Analysis	159
◆	<i>Smetanová, Dana, VŠTE České Budějovice</i> On Regularization Procedure of Lagrangians Linear in First Derivatives in First-Order Field Theory	164
◆	<i>Stryja, Jakub, VŠB – TU Ostrava</i> Existence, Uniqueness and Asymptotic Behavior of Solutions of Singular Second Order ODE	168
◆	<i>Szczeńniak, Bartosz – Molenda, Michał, PS Gliwice</i> Spreadsheet Application Supporting the X-R Control Chart	173

◆ Štěpánová, Martina, UK Praha Weyr Canonical Form	180
◆ Tarasiński, Leszek, School of Finances and Law, Bielsko-Biala The Subjective-Marginalistic Nature of the Free Market Versus the Role of Mathematics in Neoclassic Economics	188
◆ Tomášek, Pavel, FTB Zlín Open Source Software for Engineers	194
◆ Tutak, Magdalena, PS Gliwice Modeling Tests of an Impact of Geometry of Cross-Section of the Mining Heading on the Physical Parameters of the Airflow	198
◆ Wójcik, Juliusz, PS Gliwice The Effectiveness of Selected Methods of Solving Nonlinear Equations	203
◆ Wolniak, Radosław – Skotnicka-Zasadzień, Bożena, PS Gliwice Application of Factor Analysis for Examining the Structure of Variables in Survey Studies	215
◆ Záhonová, Viera, STU Bratislava Ako zapojiť študentov do systematickej práce počas semestra	221
◆ Zajaczek, Stanislav – Svoboda, Pavel – Sobota, Pavel – Rusnok, Stanislav – Unger, Jan, VŠB – TU Ostrava Instruktační videa v předmětu Teorie obvodů II	227
◆ Zasadzień, Michał, PS Gliwice Application of Accessibility and Reliability Indices for Analysis of the Failure Frequency of Machines in a Production Enterprise	233
◆ Seznam účastníků	238

Příloha: [Workshop GEOGEBRA](#)

Využití GeoGebry ve výuce matematiky a geometrie	I-III
◆..... <i>Dlouhá, Dagmar, VŠB – TU Ostrava</i> Kuželosečky v GeoGebře	IV-XII
◆..... <i>Hamříková, Radka, VŠB – TU</i> GeoGebra ve výuce Matematiky I a II	XIII-XIX
◆..... <i>Schreiberová, Petra, VŠB – TU</i> Ukázka využití GeoGebry při řešení základních statistických problémů	XX-XXVI
◆..... <i>Paláček, Radomír, VŠB – TU</i> „Art“ GeoGebra - Geometrické vzory	XXVII-XXXIII
◆..... <i>Bělohávková, Jana, VŠB – TU</i> Pythagorův strom a Bézierova křivka	XXXIV-XXXVIII
◆..... <i>Morávková, Zuzana, VŠB – TU Ostrava</i> Dynamické propojení dat mezi Nákresnou a Tabulkou	XXXIX-XLII
◆..... <i>Volný, Petr, VŠB – TU Ostrava</i> GeoGebra a CAS	XLIII-XLVII
Obsah	XLVIII

PRIMAL-DUAL NONLINEAR RESCALING METHOD WITH DYNAMIC SCALING PARAMETER UPDATE FOR CONVEX OPTIMIZATION PROBLEMS

Richard Andrášik

Department of Mathematical Analysis and Applications of Mathematics,
Faculty of Science, Palacký University Olomouc
tř. 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc, Czech Republic
E-mail : andrasik.richard@gmail.com

Abstract: Nonlinear rescaling is a tool for solving large-scale nonlinear programming problems. However, the explanation and the appropriate setting of parameters were not discussed in previous research. Primal-dual nonlinear rescaling method with dynamic scaling parameter update (PDNRD) was tested on quadratic programming problems with quadratic constraints arising from 3D contact problems. Based on the numerical experiments, the conclusions about the setting of PDNRD method parameters were made.

1 Introduction

Nonlinear rescaling (NR) methods can solve large-scale nonlinear programming problems with thousands of variables and constraints. They were successfully used to the radiotherapy treatment planning and are applied at some hospitals in USA and Europe (see [1]). The basic idea of NR methods is a nonlinear transformation of constraint functions to improve the properties of Lagrangian.

We consider the convex optimization problem

$$\begin{cases} \text{minimize} & f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \text{subject to} & c_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, r. \end{cases} \quad (1)$$

Function f is convex and functions c_i are concave, $\forall i = 1, \dots, r$. For problem (1) we define Lagrangian

$$L(x; \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^r \lambda_i c_i(x). \quad (2)$$

We assume that:

(A) The Slater condition holds.

- (B) Functions $f, c_i, \forall i = 1, \dots, r$, are twice continuously differentiable on the set \mathbb{R}^n .
- (C) The optimal set $X^* := \text{Argmin} \{f(x); c_i(x) \geq 0, \forall i = 1, \dots, r\}$, is bounded and not empty.

2 Basic concept of NR methods

First, special nonlinear functions are defined.

Definition 2.1. Twice continuously differentiable function $\psi : (t_0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, where $-\infty < t_0 < 0$, satisfying conditions

- (i) $\psi(0) = 0, \psi'(0) = 1,$
- (ii) $\psi'(t) > 0, \forall t \in (t_0; +\infty),$
- (iii) $\psi''(t) < 0, \forall t \in (t_0; +\infty),$
- (iv) $\exists a > 0 : \psi(t) \leq -at^2, \forall t \in (t_0; 0),$
- (v) $\exists b > 0 : \psi'(t) \leq bt^{-1}, \forall t > 0,$
- (vi) $\exists c > 0 : \psi''(t) \geq -ct^{-2}, \forall t > 0$

is called **NR function**.

Remark 2.1. Functions $\psi_1(t) = 1 - e^{-t}$, $\psi_2(t) = \ln(t+1)$ and $\psi_3(t) = \frac{t}{t+1}$ are NR functions. These functions are commonly used in NR theory (see [6]).

Remark 2.2. We consider function

$$\psi_q(t) = \begin{cases} \ln(t+1), & x \geq -0.5, \\ at^2 + bt + c, & x < -0.5, \end{cases}$$

where

$$a = -\frac{1}{2(\tau+1)^2}, \quad b = \frac{2\tau+1}{(\tau+1)^2}, \quad c = \ln(\tau+1) - \frac{3\tau^2+2\tau}{2(\tau+1)^2}, \quad \tau = -\frac{1}{2}.$$

Function $\psi_q \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ is NR function (see [6]). This function was used in numerical experiments (see section 4).

The key idea of NR methods is to transform problem (1) using a NR function ψ to the equivalent problem

$$\begin{cases} \text{minimize} & f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \text{subject to} & k^{-1}\psi(kc_i(x)) \geq 0, \quad i = 1, \dots, r, \end{cases} \quad (3)$$

where $k > 0$ is **scaling parameter**.

It is obvious (from definition 2.1) that problems (1) and (3) have the same admissible sets and also the same optimal sets. The Lagrangian for the equivalent problem (3) is given by the following formula

$$\mathcal{L}(x; \lambda, k) = f(x) - k^{-1} \sum_{i=1}^r \lambda_i \psi_i(kc_i(x)). \quad (4)$$

Algorithm 2.1. Initial approximations $x^0 \in \mathbb{R}^n$ and $\lambda^0 \in \mathbb{R}_{++}^r$ are given. Let $k > 0$ is a scaling parameter. We suppose that approximation $(x^s, \lambda^s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++}^r$, $s \in \mathbb{N}_0$, is known already. We find next primal-dual pair (x^{s+1}, λ^{s+1}) using the following formulas

$$\begin{aligned} x^{s+1} & : \quad \nabla_x \mathcal{L}(x^{s+1}; \lambda^s, k) = 0, \\ \lambda_i^{s+1} & = \quad \psi'(kc_i(x^{s+1})) \lambda_i^s, \quad i = 1, \dots, r. \end{aligned} \tag{5}$$

Theorem 2.1. For any given $(\lambda, k) \in \mathbb{R}_{++}^r \times \mathbb{R}_{++}$ there exists $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ such that

$$\mathcal{L}(\hat{x}; \lambda, k) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x; \lambda, k).$$

Proof: see [5] page 206.

The main aim of NR is to improve properties of Lagrangian. The existence of the unconstrained Lagrange minimizer is unknown in general case (dealing with classical Lagrangian L). However, according to theorem 2.1, the unconstrained minimizer of the Lagrangian \mathcal{L} always exists.

3 Primal-dual NR method with dynamic scaling parameter update

To obtain higher convergence rate of the method, we dynamically change the scaling parameter (see [7]). We define a function which measures the distance between approximation (x, λ) and solution (x^*, λ^*) .

Definition 3.1. Function $\nu : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}_+$, defined as follows

$$\nu(x, \lambda) = \max \left\{ \|\nabla_x L(x; \lambda)\|, -\min_{1 \leq i \leq r} c_i(x), \sum_{i=1}^r |\lambda_i c_i(x)| \right\}, \tag{6}$$

is called **the merit function**.

From first order optimality conditions it is obvious that

$$\nu(\hat{x}, \hat{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow (\hat{x}, \hat{\lambda}) \in X^*.$$

We set the scaling parameter according to the formula $k = \nu(x, \lambda)^{-1/2}$. If a primal-dual sequence $\{(x^s, \lambda^s)\}_0^{+\infty}$ tends to (x^*, λ^*) , then $\nu(x^s, \lambda^s) \rightarrow 0^+$. Hence also $k_s \rightarrow +\infty$ when $s \rightarrow +\infty$.

Newton's method with step length (e.g. backtracking line search algorithm) is used to solve nonlinear equations (5). Consequently, one step of PDNRD method consists of solving one or several primal-dual systems of linear equations and the update of the scaling parameter.

4 Chord problem

We consider a problem

$$\min_{u \in \mathcal{K}} \mathcal{J}(u), \tag{7}$$

where

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \|u'(t)\|^2 dt - \int_0^1 u(t)^T f(t) dt,$$

$$\mathcal{K} = \left\{ u \in (H_0^1(0; 1))^2 : u_2(t) \geq 0, \forall t \in (0; 0.5), \|u(t)\| \leq 1.4, \forall t \in (0.5; 1) \right\},$$

$$f(t) = (36\pi^2 \sin 6\pi t, -4\pi^2 \sin 2\pi t)^T.$$

Minimization problem (7) describes loaded chord fixed at the endpoints that is partially above the plain and partially inside the cylindrical tube (see figure 1). Function $u(t)$ is the chord deflection. This problem is described and solved by means of an interior-point algorithm in [3].

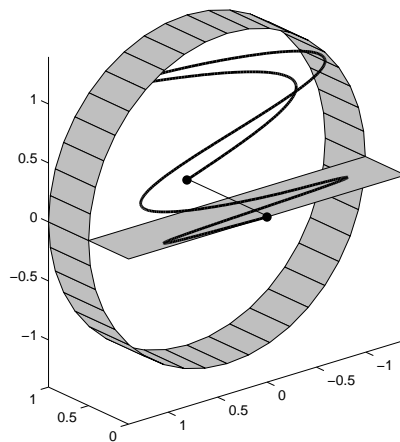


Figure 1: The chord deformation.

Solution: First, the finite element approximation is used to transform the original problem (7) to the following problem

$$\begin{cases} \text{minimize} & \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ \text{subject to} & g_i^2 - x_{i+m}^2 - x_{i+2m}^2 \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & x_i - l_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (8)$$

where $n = 3m$ is the number of variables, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is symmetric and positive definite, $b \in \mathbb{R}^n$, $g \in \mathbb{R}_+^m$, $l \in \mathbb{R}^m$. This is a convex programming problem so we can use NR approach to solve it. Function ψ_q was used to rescale the conditions and subsequently we obtain the equivalent problem.

The chord problem was solved using PDNRD method. Computations were performed in MATLAB on PC Intel Pentium (1.7 GHz) with 1GB RAM. The number of iterations (*iter*), the number of solutions of the primal-dual system (*PD*) and the solution time in seconds (*time*) are reported in table 1. The main result from table 1 is non-increasing number of iterations and number of solutions of primal-dual system while increasing the number of variables.

n	r	$iter/PD/time$
64	32	6/14/0.203
128	64	6/12/0.219
256	128	4/10/0.532
512	256	4/12/3.094
1024	512	3/6/9.578
2048	1024	4/7/62.375
4096	2048	4/9/553.481

Table 1: Solution of the chord problem for different choices of n using PDNRD method with parameters $k_{init} = 2 \cdot 10^5$, $\omega = 10$, $\sigma = 10^5$, $\theta = 0.4$, $q = 0.5$, $\eta = 0.01$, $\varepsilon = 10^{-6}$.

5 Conclusion

PDNRD method was described and numerical experiments with this method were made. It was made out that increasing the number of variables in a problem has not a consequence in increasing the number of solutions of primal-dual system. This fact supports the applicability of PDNRD method on problems of arbitrary size. The performance of PDNRD method can be compared with an interior-point algorithm, which was also used to solve quadratic programming problems with quadratic constraints (see [3]).

References

- [1] Alber M., Reemtsen R.: Intensity modulated radiotherapy treatment planning by use of a barrier-penalty multiplier method, *Optimization Methods and Software* **22**(3), 391–411, 2007.
- [2] Boyd S., Vandenberghe L.: *Convex Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [3] Kučera R., Machalová J., Netuka H., Ženčák P.: An interior-point algorithm for the minimization arising from 3D contact problems with friction, *Optimization methods and Software*, In press, 2013.
- [4] Nocedal J., Wright S.J.: *Numerical optimization*, Second edition, Springer, 2006.
- [5] Polyak R.: Nonlinear rescaling vs. Smoothing Technique in Convex Optimization, *Mathematical Programming* **92A**, 197–235, 2002.
- [6] Polyak R., Griva I.: Primal-Dual Nonlinear Rescaling Method for Convex Optimization, *JOTA*, **122**(1), 111–156, 2004.
- [7] Polyak R., Griva I.: Primal-Dual Nonlinear Rescaling Method with dynamic scaling parameter update, *Mathematical Programming* **106A**, 237–259, 2006.
- [8] Polyak R., Griva I.: Proximal Point Nonlinear Rescaling Method for Convex Optimization, *Numerical Algebra, Control and Optimization* **1**(2), 283–299, 2011.
- [9] Polyak R., Teboulle M.: Nonlinear Rescaling and Proximal-Like Methods in Convex Optimization, *Mathematical programming* **76**, 265–284, 1997.

APPLICATION OF MODELS WITH AUTOREGRESSIVE VARIABLES FOR METHANE HAZARD FORECASTING IN HARD COAL MINES

Henryk Badura

ul. Raciborska 142B, 44-210 Rybnik, POLAND

E-mail : henryk_badura@o2.pl

Abstrakt: In the article a manner of forecasting the methane-bearing capacity of a longwall in a coal mine has been presented, which allows taking appropriate methane hazard preventive measures. Forecasting models contain autoregressive variables. The parameters of these models are estimated by the classic and general methods of least squares or by the instrumental variables method. A manner of selecting an appropriate method to estimate the forecasting model parameters has been presented.

Introduction

Methane hazard in Polish hard coal mines is one of the most common natural threats. With an increasing depth of mining, the hazard increases its range, appearing also in mines which until recently were non-methane ones. Almost all workings where coal is mined are so-called longwalls.

The worked-out parts of a coal seam are most frequently removed by the so-called roof fall, which means that outside the wall support the rock lying over the seam breaks, thus filling the space left by the mined coal and formed a result of rock collapse. Rock layers lying over the roof fall bend and crack in big slabs or only bend. In the seam and its vicinity, that is, in rock layers lying over and under the worked-out seam a relaxed zone is formed, in which pressure is lower than it might be expected on the basis of the depth of the bedding of the considered rock mass point.

Apart from coal seams to be mined, a rock mass contains coal seams or layers which are not suitable for mining. They are most often described as off-balance seams.

Methane is mainly contained in coal seams and layers in which it is bound by a coal skeleton by means of intermolecular forces, which is referred to as adsorption.

A change in methane physical parameters, for example a change in pressure, causes a change in the amount of the sorbed methane. Methane transition from the sorbed state to the free one is called desorption.

The mining of a seam results in methane release from the mined coal and the occurrence of the desorption phenomenon in the whole relaxed zone. Due to a difference between methane pressure in the deposit and atmospheric pressure in the workings and in the exploited part of the seam, methane flows to the workings, thus creating a risk of methane ignition, explosion

or the formation of an atmosphere which is unsuitable for breathing because the content of oxygen is too low. Mining in the conditions of methane hazard requires methane preventive measures. In order to appropriately adjust methane prophylactics to the degree of hazard, it is advisable to use a short-term methane hazard forecast, based on continuous automatic measurements of methane concentration. The further part presents the principles of creating a statistical model for forecasting the amount of methane released into the longwall area.

Forecasting model creation

The manner of creating a forecasting model has been presented on the basis of continuous measurements taken by means of a telemetric system in the vicinity of longwall 160 in coal seam 315, which is located in the Mining Enterprise „Silesia”. The measurements were used to calculate the mean daily concentration of methane as well as the mean daily methane-bearing capacity of the longwall area (the mean amount of methane released in a minute). Methane-bearing capacity values are a time series. Measurement data also included the volume of air flowing through the longwall area as well as the daily output and longwall progression. The measurements were taken for 319 days, from 19th April 2012 to 3rd March 2013. Daily fluctuations of the amount of methane released into the workings are influenced by many factors, among which only some are measurable. One of such factors, important for the mine’s activity, is daily output per face. Due to the formation of a relaxed zone, which is a time-dependent phenomenon, the computing model of the average methane-bearing capacity of the longwall area on a particular day has been presented in a form of linear equation of two variables, the output on the considered day and the preceding day

$$M(t)=a_1+a_2W(t)+a_3W(t-1)+u(t) \quad (1)$$

where a_0, a_1, a_2 – equation parameters, u – random component, t – subsequent day of measurements ($t=1, 2, \dots, 319$), $W(t)$ – output in subsequent days, $W(t-1)$ – output on the day preceding the analysed one.

The programme for statistical calculations GRETL [5] was used to calculate the parameters of model (1), which are presented in Table 1. The significance of the parameter was defined on the basis of Student’s Test („t-Student” column), and the probability of the parameter value zeroing has been presented in the column „Probability p ”. It was assumed that significant parameters were the ones whose level of significance reached $p \leq 0,05$.

Table 1. Model (1) parameters

Parameter	Parameter value	Standard parameter error	t-Student	Probability p
\hat{a}_1	13.0321	0.51609	25.2516	<0.00001
\hat{a}_2	0.00125898	0.000180532	6.9737	<0.00001
\hat{a}_3	0.00153	0.000180532	8.4750	<0.00001
Residual standard error	4.91	Corrected R^2		0.365
Correlation coefficient r	0.61	Residual autocorrelation coefficient γ		0.88

The conducted test revealed no co-linearity of variables. The probability value p indicates that both independent variables are significant. However, the results of calculations are unsatisfactory due to a big residual standard error, low determination coefficient and residual autocorrelation. Residual autocorrelation frequently increases errors related to the determination of model parameters’ estimators, as it increases their variances and co-variances. The use of so determined parameter estimators for the forecasting model leads to increased forecast errors.

Another consequence of residual autocorrelation is the occurrence of wide residual ranges having the same sign (Fig. 1).

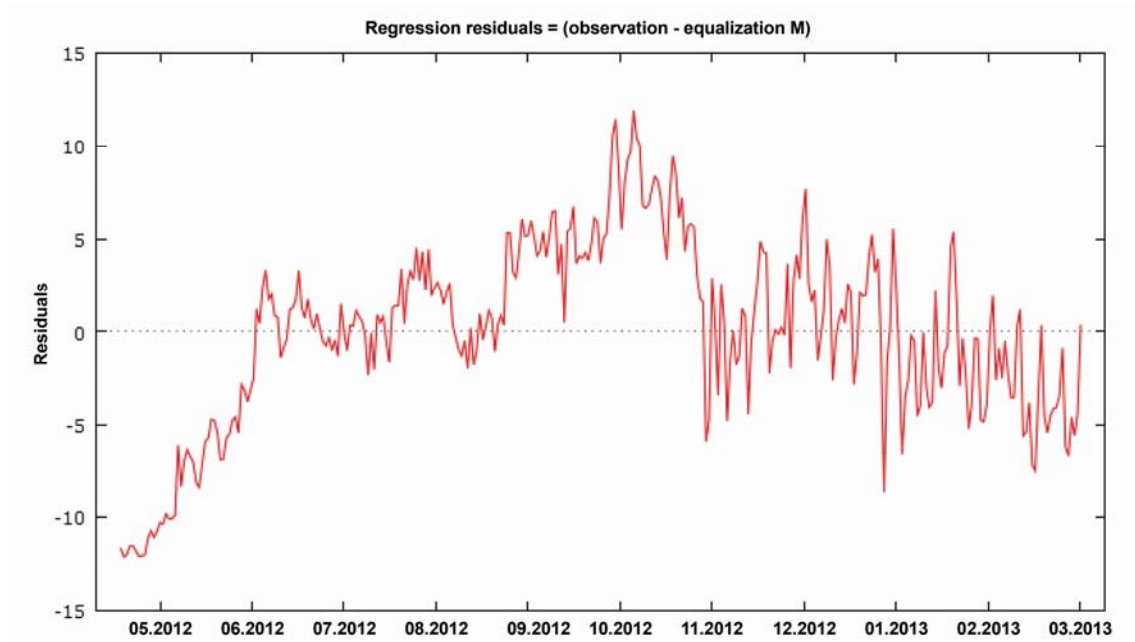


Fig. 1 A graph of model (1) residuals

Fig. 2 presents graphs of the measured and computed mean daily methane-bearing capacity.

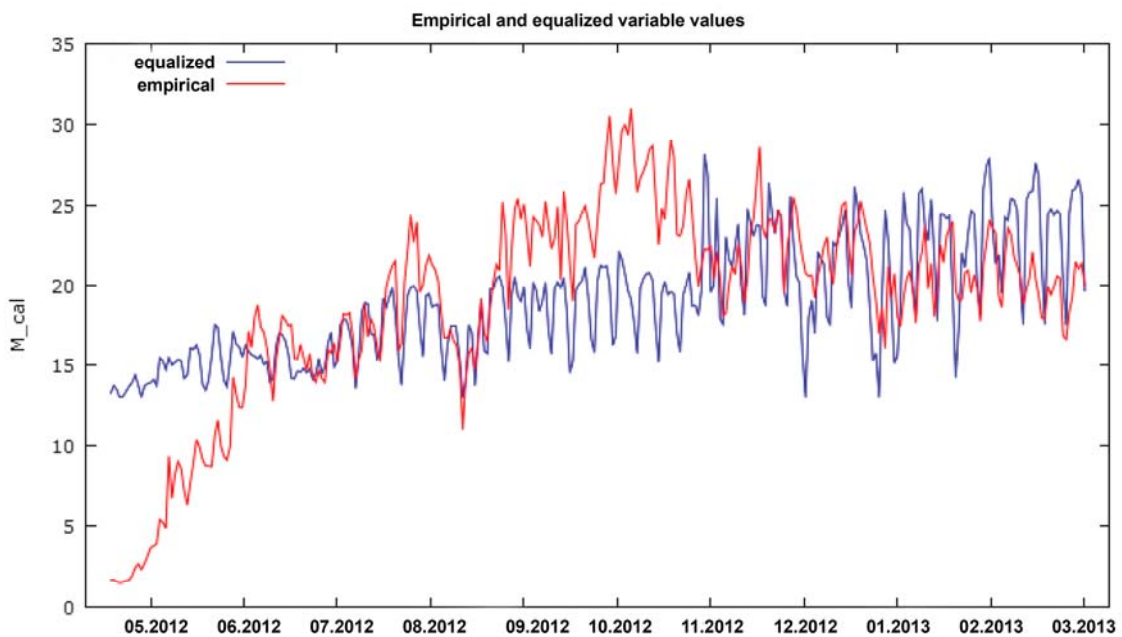


Fig. 2. Measured (empirical) and computed (equalized) values of the mean daily methane-bearing capacity of a longwall.

Residual autocorrelation can frequently be removed by introducing into the independent variables the so-called dependent variable delayed value, i.e. the value of independent variable having a lower index. In the considered model it would adopt the following form:

$$M(t)=a_1+a_2W(t)+a_3W(t-1)+ a_4M(t-1) +u(t) \quad (2)$$

where a_i – model coefficients ($i=1...4$), $M(t-1)$ – the value of methane-bearing capacity on day $t-1$. The remaining determinations as in formula (1).

The parameters of formula (2) can be estimated by the least square method. Their values have been presented in Table 2.

The results of parameter estimations indicate that the only significant variable is the delayed value of methane-bearing capacity. Output parameters are burdened with very big errors and are insignificant. Practice shows that it is not true. Big errors result from the autocorrelation of model residuals. The autocorrelation coefficient equals 0.83, therefore, the removal of autocorrelation by introducing a delayed variable ended in failure. However, it is noticeable that the correlation coefficient is very high while the residual standard error – very low.

Table 2. Model (2) parameters

Parameter	Parameter value	Parameter standard error	t-Student	Probability p
\hat{a}_1	2.71	0.191705	14.1363	<0.00001
\hat{a}_2	-4.42253e-06	4.72614e-05	-0.0936	0.92551
\hat{a}_3	6.41935e-05	4.84037e-05	1.3262	0.18573
\hat{a}_4	0.536786	0.0075499	71.0984	<0.00001
Residual standard error	1.19	Corrected R^2		0.96
Correlation coefficient r	0.98	Residual autocorrelation coefficient γ		0.83

If the classic least square method is applied when using a delayed variable, the estimation residuals are very often correlated with the delayed variable. In such a case the obtained values of the model parameter estimators are burdened and inconsistent. It is therefore necessary to check if such a situation occurs in the considered case.

The test conducted by means of GRETL programme revealed that in the analysed case the autocorrelation between $M(t-1)$ and $u(t)$ does not occur. Neither does the co-linearity of independent variables. For this reason, the general Cochrane-Orcutt method of least squares [3, 6] can be used to estimate the parameters of model (2). The real model adopts the following form:

$$M(t)=a_1+a_2W(t)+a_3W(t-1)+ a_4M(t-1) +\gamma u(t-1)+\varepsilon(t) \quad (3)$$

Where γ – residual autocorrelation coefficient u , $\varepsilon(t)$ - pure random component.

The parameter values of model (3) computed by means of GRETL programme, using the Cochrane-Orcutt method have been presented in Table 3.

Table 3. Model (3) parameters

Parameter	Parameter value	Parameter standard error	t-Student	Probability p
\hat{a}_1	1.61771	0.464439	3.4831	0.00057
\hat{a}_2	9.0598e-05	2.53796e-05	3.5697	0.00041
\hat{a}_3	0.000139381	2.53599e-05	5.4961	<0.00001
\hat{a}_4	0.561089	0.0132415	42.3735	<0.00001
γ	0.8707			
Residual standard error	0,63	Corrected R^2		0.99
Correlation coefficient r	0,99	Residual autocorrelation coefficient ε		-0.013

A graph of model residuals ε has been presented in Fig. 3, and a graph of measured and computed values (according to model 3) of the mean daily methane-bearing capacity is shown in Fig. 4.

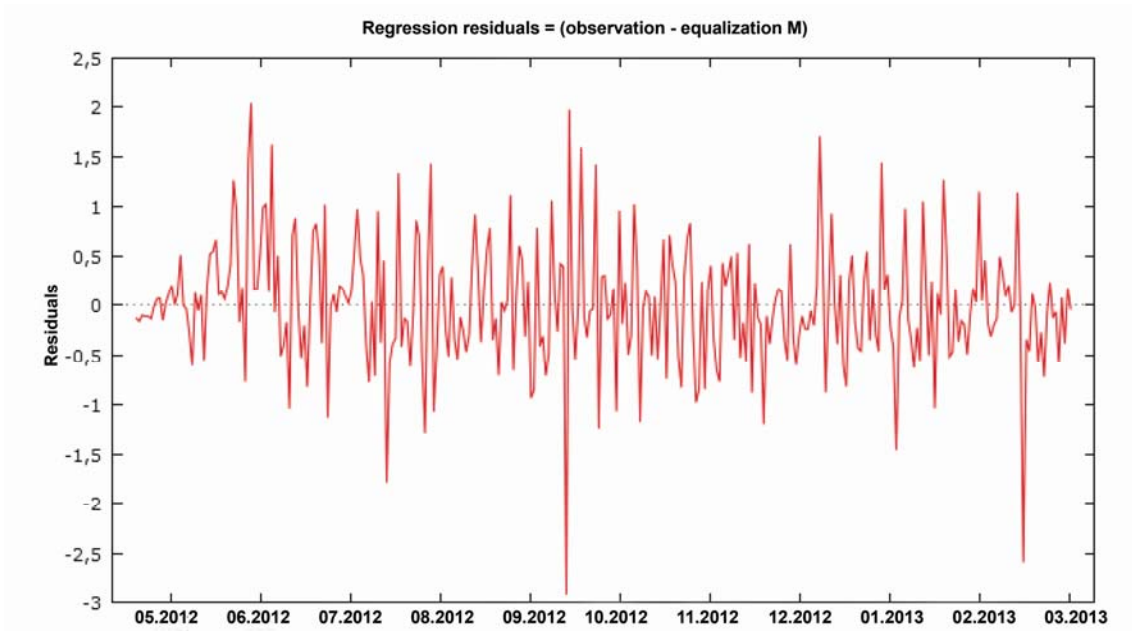


Fig. 3. A graph of model (3) residuals.

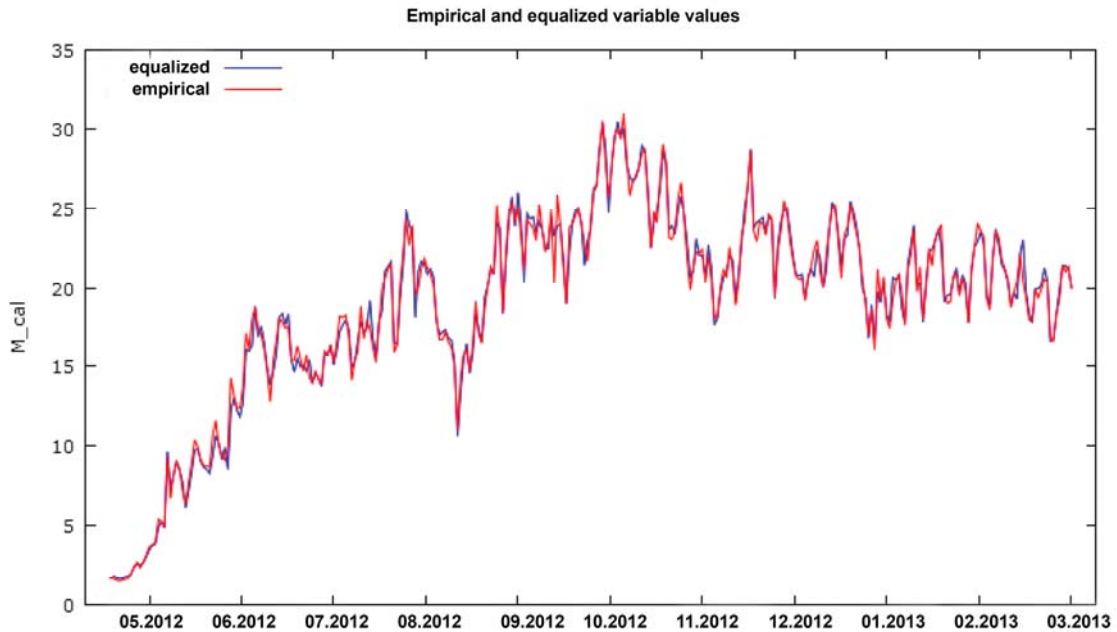


Fig. 4. Measured (empirical) and computed (equalized) values of the mean daily methane-bearing capacity of a longwall.

Model residuals do not show any correlations with $M(t-1)$ component (delayed methane-bearing capacity).

The so-developed model allows forecasting any time horizon T . A forecast for the first day of the period is an ordinary one. Assuming that the model has been developed on the basis of a sample having a numerical strength n , the prediction equation for an ordinary forecast is reflected in formula (4):

$$M(n+1)=a_1+a_2W(n+1)+a_3W(n)+ a_4M(n) +\gamma u(n) \quad (4)$$

The dynamic forecast will contain a delayed independent variable the value of which was a dependent variable in the previous step of the forecast. It is easy to check that the forecast equation will have the following form:

$$M(n+s)=a_1+a_2W(n+s)+a_3W(n+s-1)+ a_4M(n+s-1) +\gamma^s u(n) \quad (5)$$

If the Cochrane-Orcutt method does not bring the expected results, the parameters of equation (2) should be estimated by the maximum likelihood method or the instrumental variables method [4, 5, 6, 7].

The maximum likelihood method should be rejected due to a strong changeability of the process of methane release into the workings, which is the reason why methane-bearing capacity does not have a specific probability distribution.

The instrumental variables method requires additional variables, which should not be correlated with model residuals and, at the same time, should be correlated with a delayed variable in the best possible way. Simultaneous fulfilment of these conditions may be difficult to achieve. It should be remembered during the process of designing and observing. In the considered case such variables could be the longwall progression and methane concentration on the longwall area outlet.

The author of this article has rich, positive experiences in the forecasting of methane-bearing capacity (e.g. [1]) and methane concentration (e.g. [2]) by means of the above described methods.

Findings and conclusions

On the basis of the analyses conducted in this article, the following findings and conclusions can be formulated:

1. In order to increase work safety in methane mines it is advisable to take methane hazard preventive measures by introducing forecasts of longwalls' methane-bearing capacity, based on continuous measurements of methane concentration.
2. Application of the classic method of least squares may result in an estimation of the parameters of methane-bearing capacity forecasting model that is burdened with big errors, which results from the autocorrelation of model residuals.
3. One of the ways of eliminating the autocorrelation of residuals is introducing an autoregressive component in the model. Model parameters can be estimated by the classic method of least squares or one of the general methods of least squares, e.g. the Cochrane-Orcutt method.
4. In the event model residual autocorrelation occurs with an autoregressive variable, the estimated parameters are burdened and inconsistent. In such a case the instrumental variables method should be used to estimate the parameters.

References

- [1] Badura H.: Wykorzystanie uogólnionej metody najmniejszych kwadratów Aitkena do estymacji parametrów modelu metanowości rejonu ściany. *Asocjacje Technicznych Diagnostiku Ceske Republiky o.s. Technicka Diagnostika*, z1, rocznik XX, 2011.
- [2] Badura H.: *Metody prognoz krótkoterminowych stężenia metanu na wylotach z rejonów ścian zawałowych w kopalniach węgla kamiennego*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej. Gliwice, 2013.
- [3] Cochrane D., Orcutt G.H.: Application of Least Squares Regression to Relationshis Containing Auto-correlated Errors Terms. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 44, 1949.
- [4] Johnston J.: *Econometric Methods*. 2-nd Editon, McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.
- [5] Klein L.R.: The Estimation of Distributed Lags. *Econometrica*, vol. 26, 1958.
- [6] Kufel T.: *Ekonometria. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem programu GRETL*. Wyd. Naukowe PWN, 2011.
- [7] Zeliaś A.: *Teoria prognozy*. Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne S.A. Warszawa, 1997.

Oznaczenie gęstości hydromieszanin bez odsiarczania z dodatkiem spoiwa w postaci cementu

mgr inż. Tomasz Cichy

Zakład Eksploatacji Złóż i Geofizyki Górniczej, Wydział Górnictwa

i Geologii, Politechnika Śląska ul. Akademicka 2, 42 – 100 Gliwice, Polska
E-mail:tcichy@posl.pl

Streszczenie: Artykuł prezentuje sposób wyznaczenia gęstości hydromieszanin bez odsiarczania z dodatkiem cementu w celu ustalenia możliwości ich wykorzystania do różnych gałęzi przemysłu według dokładnie określonych norm. Ze szczególnym uwzględnieniem możliwości wykorzystania w podziemnych technologiach górniczych .

Abstract: This paper presents the method of determining the density of hydromixtures without desulphurisation with the addition of cement in order to determine their eligibility for the various industries according to well-defined norm. With particular reference to the use in underground mining technologies.

1. Wprowadzenie.

W elektrowniach, w których do wytwarzania energii elektrycznej i ciepłej wykorzystuje się spalanie węgla, powstają stałe produkty spalania, czyli odpady paleniskowe (popioły i żużle) oraz odpady z odpylania gazów odlotowych. Ilość popiołów czy żużli jest zależna od jakości węgla i zawartości popiołów. Aby uzyskać 1 kWh energii elektrycznej zostaje wytworzone od 60 do 200 g odpadów. Dla rozwiązania tego problemu tworzone są różne technologie , które umożliwiają funkcjonowanie przemysłowi energetycznemu wykorzystując ten odpad jako surowiec, w procesie odzysku. Do dziedzin przemysłu w których wykorzystywanie odpadów ma największy udział należy zaliczyć: geotechnikę, budownictwo, a w niektórych przypadkach nawet rolnictwo, czy przemysł tworzyw sztucznych [1].

Istotnym odbiorcą odpadów paleniskowych jest górnictwo, które wchodzi w skład wspomnianej wyżej geotechniki.

Na wzrost wykorzystywania odpadów pochodzących z elektrowni istotny wpływ ma opanowywanie coraz to prostszych i tańszych technologii odzysku odpadów paleniskowych w górniczych wyrobiskach jak również użytkowe właściwości wytwarzanych mieszanek tych

odpadów. W górnictwie, dzięki specjalnym technologiom, wykorzystujemy odpady energetyczne najczęściej do profilaktyki pożarowej, wzmocnienie górotworu, podsadzanie zbędnych wyrobisk, czy uszczelniania górotworu. Odpady oraz ich mieszaniny przeznaczone do wykorzystania w górnictwie powinny być zgodne z zalecanymi wymaganiami normowymi oraz przepisami bezpieczeństwa pracy [2].

Sposób oznaczenia gęstości wykonuje się za pomocą metody pikometrycznej, dokonuje się ważenia masy próbki mieszaniny popiołowo - wodnej o danej objętości. Próbkę mieszaniny popiołowo - wodnej waży się w specjalnym naczyniu zwanym pikometrem, wykonanym z materiału nieporowatego. Znana jest masa naczynia[4,5].

Ważenia dokonuje się na wadze laboratoryjnej. Do wyznaczenia gęstości stosuje się wzór:

$$\rho = \frac{m - m_1}{V} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

gdzie:

m - masa próbki wraz z naczyniem miarowym wyrażaną w [kg],

m₁ - masa suchego naczynia miarowego wyrażaną w [kg],

V - objętość zajmowana przez próbkę w naczyniu miarowym wyrażaną w [kg]

2. Oznaczenie gęstości mieszaniny.

Dla zadanych rozlewności 160, 200 i 240 mm wyniki badań oznaczenia gęstości mieszanin wodno-popiołowych sporządzonych na bazie popiołu bez procesu odsiarczania, i dodatku cementu w ilości 2,5; 5; 10 oraz 15% przedstawione są w tabeli 2.1 .

Tabela 2.1					
Wyniki badań oznaczenia gęstości mieszanin popiołowo-wodnych sporządzonych na bazie popiołu bez procesu odsiarczania oraz cementu w ilości 2,5; 5; 10 oraz 15%					
Oznaczenie mieszaniny	Popiół	Cement	Rozlewność		Gęstość
			(+/- 5mm)		
	%	%	mm		[Mg/m ³]
1	97,5	2,5	160	159	1,55
2			200	197	1,53
3			240	240	1,499
4	95	5	160	162	1,56
5			200	197	1,536
6			240	237	1,5
7	90	10	160	165	1,575
8			200	196	1,54
9			240	244	1,51
10	85	15	160	165	1,58
11			200	196	1,55
12			240	240	1,53

Na podstawie uzyskanych wyników badań w zakresie stosowanych rozlewności można zauważyć, iż:

- wzrost udziału cementu w badanych mieszaninach o danej rozlewności nie wpływa znacząco na zmianę ich gęstości,
- wzrost rozlewności badanych mieszanin o danym udziale cementu powoduje obniżenie ich gęstości.

3. Wnioski.

Uwzględniając wymagania zalecanej w omawianej tematyce normy PN-G-11011:1998 [3] oraz biorąc pod uwagę otrzymane wyniki badań laboratoryjnych można określić minimalny udział cementu oraz zakres rozlewności hydromieszanin do zastosowania w podziemnych technologiach górniczych. Wielkości te przedstawione są w tabeli 3.1.

Tabela 3.1		
Wymagany udział cementu oraz rozlewność hydromieszanin przeznaczonych do zastosowania w podziemnych technologiach górniczych.		
Technologia górnicza	Udział cementu	Rozlewność
Doszczelnianie zrobów zawałowych	min. 2,5%	160-240mm
Podsadzka zestalana w górnictwie węglowym	-	-
Wypełnianie pustek i wyrobisk	min. 10%	160-200mm
Wykonywanie korków oraz pasów podsadzkowych	-	-
Izolacja pól pożarowych	min. 2,5%	160mm
	min. 10%	200mm
Iniekcja skał porowatych i luźnych	min. 2,5%	160mm
	min. 10%	200mm

Jak wynika z przedstawionych w tabeli 3.1 wielkości, przebadane w pracy hydromieszaniny w zakresie rozlewności 160-240mm przy udziale cementu do 15% nie spełniają określonych kryteriów i nie mogą być zastosowane do podsadzki zestalającej oraz korków i pasów podsadzkowych.

Aby hydromieszanina sporządzona na bazie popiołów mogła być wykorzystana w technologii doszczelniania zrobów powinna w swoim składzie posiadać minimalny udział cementu 2,5% oraz charakteryzować się rozlewnością w zakresie 210-240mm.

By możliwe było wykorzystanie hydromieszanki do wypełniania pustek i wyrobisk minimalny udział cementu powinno wynosić co najmniej 10% przy rozległości 160-200mm.

W technologii izolacji pól pożarowych przy rozległości 160mm minimalny udział cementu wynosi co najmniej co najmniej 2,5% natomiast przy rozległości 200mm wartość cementu musi osiągnąć poziom minimum 10%.

Ostatnia rozpatrywana technologia iniekcji skał porowatych i luźnych charakteryzuje się odpowiednio minimalnym udziałem cementu 2,5% przy rozległości 160mm oraz 10% przy rozległości 200mm.

[1]Laudyn D., Pawlik M., Strzelczyk F.: Elektrownie. WNT, Warszawa 1997.

[2] Rosik-Dulewska Cz.: Podstawy gospodarki odpadami. PWN 2007.

[3] PN-G-11011:1998: Materiały do podsadzki zestawianej i doszczelniania zrobów.

[4] PN-85/G-02320: Wiertnictwo - Cementy i zaczyny cementowe do cementowania w otworach wiertniczych.

[5] PN-88/B-04300: Cementy - Metody badań - oznaczenie cech fizycznych.

VYTVOŘENÍ E-LEARNINGOVÝCH KURZŮ S MULTIMEDIÁLNÍMI STUDIJNÍMI MATERIÁLY PRO MATEMATICKÉ PŘEDMĚTY NA VYBRANÝCH FAKULTÁCH VŠB-TU OSTRAVA

Radomír Paláček, Dagmar Dlouhá

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TU Ostrava
17.listopadu 15,708 33, Ostrava-Poruba
E-mail: radomir.palacek@vsb.cz, dagmar.dlouha@vsb.cz

Abstrakt: Projekt si klade za cíl vytvořit e-learningové kurzy s multimediálními studijními materiály pro matematické předměty. Projekt je zaměřen na studenty kombinovaného studia předmětů Matematika I (Bakalářská matematika I) a Matematika II (Bakalářská matematika II) na Fakultě stavební, Fakultě metalurgie a materiálového inženýrství a Hornicko-geologické fakultě VŠB-TU Ostrava.

Abstract: The main aim of this project is to create e-learning courses with multimedia materials for education in mathematical subjects. Project is focuses on combined studies students at the Faculty of Civil Engineering, the Faculty of Mining and Geology and the Faculty of Metallurgy and Materials Engineering and subjects Mathematics I and Mathematics II.

1 Způsob řešení projektu

Při tvorbě studijních materiálů budou využity zkušenosti z výuky matematických předmětů na VŠB-TU Ostrava a dále zkušenosti z předchozího projektu, jehož součástí byla tvorba multimediálních studijních materiálů.

Každá výuková jednotka e-learningového kurzu bude obsahovat výklad učiva ve formě videa vytvořeného snímáním z interaktivní tabule s hlasovým komentářem a bude doplněna materiálem v tištěné podobě. Studentům bude takto k dispozici

nejen teoretická část, ale také sada řešených příkladů. Výukový celek bude zahrnovat i další studijní prostředky vhodné pro samostudium, jako jsou interaktivní pomůcky, aplikované úlohy, autotesty a neřešené úlohy k procvičení.

Všechny studijní materiály vytvořené v rámci tohoto projektu budou dostupné z webových stránek studentům kombinovaného i prezenčního studia. Pracovní listy a interaktivní pomůcky budou aktivně využívány ve výuce. Na základě získaných zkušeností bude možné výhledově kurzy zařadit do studijní nabídky na ostatních fakultách VŠB-TU Ostrava, na nichž zajišťuje výuku Katedra matematiky a deskriptivní geometrie.

2 Konkrétní výstupy

- aktualizované plány kurzů k předmětům Matematika I (Bakalářská matematika I) a Matematika II (Bakalářská matematika II),
- e-learningové kurzy v LMS Moodle umožňující přístup ke studijním materiálům,
- příprava pedagogů na vedení kurzu v novém prostředí LMS Moodle,
- kurz pro každý předmět bude obsahovat:
 - studijní texty a komentovaná videa s výkladem probírané látky,
 - sady řešených příkladů ve formě pracovních listů a komentovaného videa,
 - sady interaktivních pomůcek problematiky,
 - sady aplikovaných úloh souvisejících s odbornými předměty,
 - sady autotestů z databáze otázek,
 - sady neřešených příkladů.

3 Cíle řešení

Cílem projektu je tvorba výukových videí s hlasovým komentářem doplněných materiály v tištěné podobě. K naplnění tohoto cíle je nejvhodnější využít interaktivní tabuli.

4 Jednotlivé výstupy podrobněji

Studijní texty a komentovaná videa s výkladem probírané látky budou zahrnovat 40 stran formátu A4 a budou obsahovat výklad teorie přednášené látky. Pracovní listy (obr. 1) jsou rozvrženy tak, aby studenti na přednášce měli dostatek prostoru k vepsání výkladu teorie, ukázkových úloh i vlastních poznámek.

Pro samostatnou práci budou pro studenty připraveny k jednotlivým stranám textu krátké doprovodné videa vytvořené snímáním z interaktivní tabule. Ty budou doprovázena slovním komentářem, který bude sloužit k osvětlení výkladu probírané látky. Videá budou zpracovány pomocí softwaru Camtasia. Celková plánovaná délka videí bude zhruba 120 minut.

Matematika I - listy k přednáškám	Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB - Technická univerzita Ostrava
77 - Soustavy lineárních rovnic - Gaussova eliminační metoda	
<p>Video teorie Řešené příklady: 102 Příklady: 199, 200, 201</p> <p>3.10.3 Gaussova eliminační metoda</p> <p>Definice 3.10.181: Dvě soustavy o stejném počtu neznámých (počet rovnic nemusí být stejný), nazýváme ekvivalentní soustavy, jestliže každé řešení první soustavy je zároveň řešením druhé soustavy a naopak.</p> <p>Definice 3.10.182: Ekvivalentní úpravy soustav lineárních rovnic:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. záměna pořadí rovnic, 2. vynásobení některé rovnice číslem $c \neq 0$, 3. přičtení k-násobku libovolné rovnice soustavy k jiné rovnici soustavy, 4. vynechání rovnice, která je lineární kombinací ostatních. <p>Poznámka: Ekvivalentní úpravy nemění hodnotu matice soustavy a jsou obdobou úprav při výpočtu hodnoty matice.</p>	

Obrázek 1: Příklad pracovního listu s teorií

Z důvodu lepší názornosti budou k dispozici také sady řešených příkladů (obr. 2) v rozsahu 80 stran formátu A4, které budou osvětlovat teoretické postupy řešení.

Matematika I - řešené příklady	Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB - Technická univerzita Ostrava
102 - Soustava lineárních rovnic	
<p>Zadání Řešte soustavu lineárních rovnic:</p> $\begin{aligned} x + 2y - z &= 9 \\ x + y + z &= 3 \\ 2x - y - z &= 6 \end{aligned}$	<p>Tahák Frobeniova věta: Soustava m lineárních rovnic o n neznámých $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$</p>
<p>Řešení Teorie: 75, 76, 77 Video teorie Příklady: 199, 200, 201 Řešený video příklad Soustavu lineárních rovnic budeme řešit Gaussovou eliminační metodou.</p> <p>Sestavíme rozšířenou matici soustavy a upravíme pomocí ekvivalentních úprav.</p> $\left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & 2 & -1 & 9 & & \\ 1 & 1 & 1 & 3 & & \\ 2 & -1 & -1 & 6 & & \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & 2 & -1 & 9 & & \\ & -1 & 2 & -6 & & \\ & 0 & -5 & 1 & -12 & \end{array} \right) \xrightarrow{(-2)} \left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & 2 & -1 & 9 & & \\ & -1 & 2 & -6 & & \\ & 0 & -5 & 1 & -12 & \end{array} \right) \xrightarrow{(-5)} \left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & 2 & -1 & 9 & & \\ & -1 & 2 & -6 & & \\ & 0 & -9 & 18 & & \end{array} \right)$ <p>Hodnota matice soustavy $h(A) = 3$ a hodnota matice rozšířené je $h(A b) = 3$, tedy soustava má řešení. Počet neznámých je $n = 3$, tedy soustava lineárních rovnic má jedno řešení.</p> <p>Zpětným chodem toto řešení najdeme. Poslední řádek si prepíšeme jako rovnici a z ní spočítáme z:</p> $\begin{aligned} -9z &= 18 \\ z &= -2 \end{aligned}$ <p>Z druhé rovnice spočítáme y:</p> $\begin{aligned} -y + 2z &= -6 \\ -y - 4 &= -6 \\ y &= 2 \end{aligned}$ <p>A z první rovnice spočítáme x:</p> $\begin{aligned} x + 2y - z &= 9 \\ x + 4 + 2 &= 9 \\ x &= 3 \end{aligned}$ <p>Řešení soustavy lineárních rovnic je: $(3, 2, -2)$</p>	<p>má alespoň jedno řešení právě když $h(A) = h(A/\vec{b})$, tj. když hodnota matice soustavy se rovná hodnotě matice rozšířené. Pokud $h(A) \neq h(A/\vec{b})$, pak soustava nemá řešení. Má-li soustava řešení, tj. $h(A) = h(A/\vec{b}) = h$, pak pro $h = n$ má soustava právě jedno řešení, jinak, tj. pro $h < n$, má soustava ∞-mnoho řešení závislých na $n - h$ parametrech.</p>

Obrázek 2: Příklad pracovního listu s řešeným příkladem

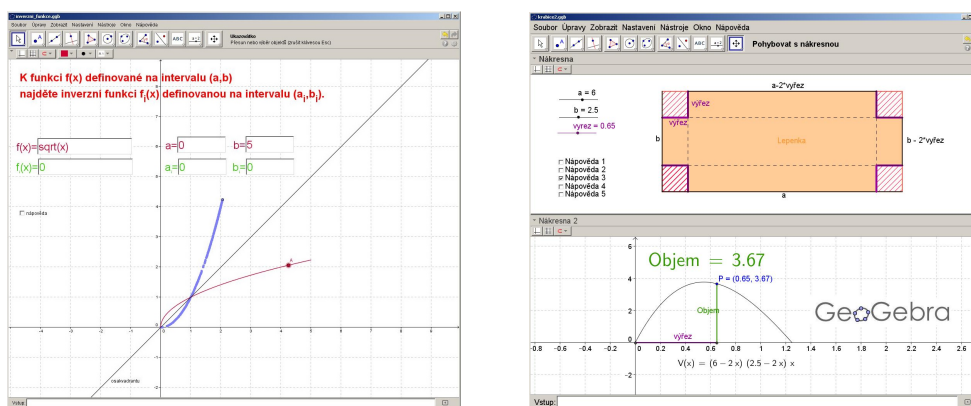
I tyto sady příkladů budou podpořeny doprovodnými videi o celkové délce 240 minut.

K samostatné procvičení látky budou připraveny pracovní listy neřešených příkladů (obr. 3) v celkovém rozsahu 120 stran formátu A4.

Matematika I - pracovní listy		Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB - Technická univerzita Ostrava
199 - Soustavy lineárních rovnic		Tahák Frobeniova věta: Soustava m lineárních rovnic o n neznámých $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$
Zadání	$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2$ $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2$ $2x_1 + 6x_2 - x_3 = 0$	má alespoň jedno řešení právě když
Řešte soustavu lineárních rovnic a proveďte zkoušku:		$h(A) = h(A/\vec{b})$, tj. když hodnota matice soustavy se rovná hodnotě matice rozšířené. Pokud
Řešení	Teorie: 75, 76, 77 Video teorie Řešené příklady: 102	$h(A) \neq h(A/\vec{b})$, pak soustava nemá řešení. Má-li soustava řešení, tj
		$h(A) = h(A/\vec{b}) = h$, pak pro
		$h = n$ má soustava právě jedno řešení, jinak, tj, pro
		$h < n$, má soustava ∞ -mnoho řešení závislých na $n - h$ parametrech.

Obrázek 3: Příklad pracovního listu s neřešeným příkladem

Nakonec pro lepší názornost a pochopení probírané látky bude vytvořeno také 10 aplikovaných úloh souvisejících s odbornými předměty a 20 interaktivních pomůcek (obr. 4) vytvořených v softwaru GeoGebra.

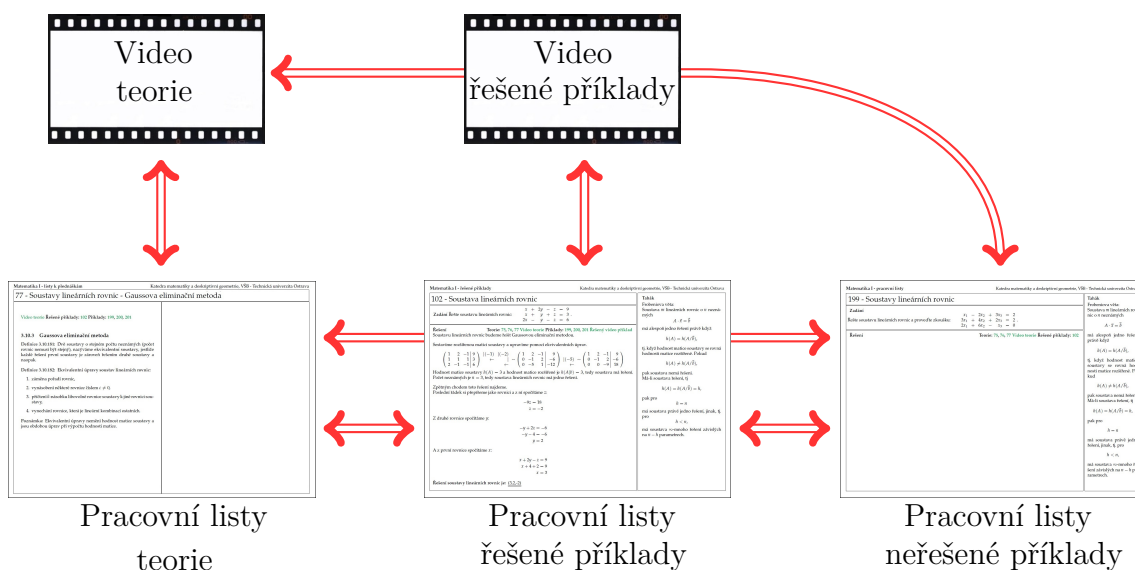


Obrázek 4: Příklad interaktivní pomůcky (vlevo) a aplikované úlohy (vpravo)

Své znalosti si mohou studenti otestovat pomocí 10 připravených autotestů vytvořených z databáze otázek.

5 Provázanost jednotlivých výstupů

Na následujícím schématu (obr. 5) vidíme vzájemnou provázanost jednotlivých výstupů, která bude zajištěna prostřednictvím křížových odkazů.



Obrázek 5: Schéma provázanosti výstupů

6 Závěr

Od projektu si slibujeme snížení studijní neúspěšnosti studentů kombinovaného studia z důvodů nízké časové dotace matematických předmětů. Předpokládáme, že také dojde k rozšíření a zkvalitnění výuky matematiky prostřednictvím vytvořených interaktivních pomůcek. Snížení neúspěšnosti studentů a zejména zvýšení kvality studia je v souladu s dlouhodobým záměrem VŠB-TU Ostrava.

7 Poděkování

Problematika je řešena v projektu FRVŠ 1103/2013 Vytvoření e-learningových kurzů s multimediálními studijními materiály pro matematické předměty na vybraných fakultách VŠB-TU Ostrava.

Reference

- [1] <http://www.studopory.vsb.cz/>
- [2] Vrbenská, H., Němčíková, J.: *Základy matematiky pro bakaláře I, Skriptum VŠB-TUO, Ostrava 1999. ISBN 80-7078-351-6.*
- [3] Vrbenská, H., Bělohávková, J.: *Základy matematiky pro bakaláře II, Skriptum VŠB-TUO, Ostrava 1998. ISBN 80-7078-545-4.*

ANALÝZA PRŮBĚHU INVESTIČNÍ KŘIVKY VYCHÁZEJÍCÍ Z COST-BENEFIT METODY HODNOCENÍ PROJEKTŮ

Stanislava Dvořáková

Katedra matematiky, Vysoká škola polytechnická Jihlava
Tolstého 16, 586 01 Jihlava

E-mail : Stanislava.Dvorakova@vspj.cz

Abstrakt: Příspěvek se bude zabývat investiční křivkou, která zobrazuje polynomičnou funkci vyjadřující vztah mezi společenskou diskontní mírou projektu a čistou současnou hodnotou projektu. Pro zjednodušení problematiky bude uvažován konstantní stupeň polynomu reprezentující dobu návratnosti projektu. Absolutní člen polynomu reflektuje podíl dotace investičních nákladů na rozpočtu projektu. Koeficienty polynomu odpovídají výši hotovostních toků plynoucí z realizace projektu. Nezáporný kořen investiční křivky reprezentuje vnitřní výnosovou míru projektu, kterou využívá právě cost-benefit analýza při hodnocení ekonomické efektivnosti projektů.

Abstract: The investment curve is the content of this article. The curve maps a polynomial function, which shows the relationship between the social discount level of the project and the actual value of the project. To simplify the issue will be considered constant degree of the polynomial representing the payback period of the project. Absolute term of the polynomial reflects a quotient of endowment of the Investment costs of the project budget. The coefficients of the polynomial equal the cash financial flows from the project. Non-negative root of the investment curve represents the internal level of return of the project. This curve uses cost-benefit analysis in evaluating the economic efficiency of projects.

Úvod

Analýza užitků a nákladů (přínosů a ztrát) je metodickým nástrojem, který slouží k širšímu společensko-ekonomickému hodnocení rozvojových projektů z oblasti veřejné sféry. Veřejnou sféru můžeme definovat jako součást tržní ekonomiky, zabezpečující používání veřejných statků občany a napravuje důsledky tržního selhání (negativní externality) [3].

Veřejné rozvojové projekty jsou dlouhodobé projekty, jež slouží k zvýšení veřejného (celospolečenského) užitku a jsou zaměřeny do veřejné sféry [3]. Na rozdíl od klasických podnikatelských projektů firemní sféry není jejich cílem pouze maximalizace zisku či maximalizace tržní hodnoty vlastního kapitálu firmy, respektive maximalizace podílu na trhu a zvýšení konkurenceschopnosti, nýbrž jejich realizace přináší vedle efektů přínosů a užitků i efekty nákladů, újem a ztrát. Používá se zde společenské pojetí projektů, kdy uvažujeme i

dopady na obyvatelstvo a přírodu. Tyto dopady je však oproti čistě komerčním podnikatelským projektům složitější kvantifikovat, některé efekty z těchto projektů plynoucí přitom kvantifikovatelné nejsou. Smyslem projektu je převážení pozitivních dopadů (užitků) nad negativními. Je zde samozřejmě zásadní problém, a to jak změřit užitek, zda jej lze nějakými metodami kvantifikovat a tedy převést na finanční toky.

Pro měření efektivnosti ve veřejném sektoru jsou používány různé metody (Balážová, Papcunová, 121), mezi něž patří Cost-minimum analýza (CMA), Cost-effectiveness analýza (CEA), Cost-utility analýza (CUA). Tyto metody jsou svým výstupem zaměřeny pouze na minimalizaci nákladů, újem a škod v peněžním či naturálním pojetí. Pro komplexní měření užítku jako rozdílu mezi přínosy a náklady (újmami-losses) projektu ve výsledném kvantitativním vyjádření je obecně uznávanou metodou, používanou i pro hodnocení projektů z evropských fondů Cost-benefit analýza.

Materiál a metody

Cost-benefit analýza využívá moderního aparátu investiční analýzy používané v komerčním sektoru a fungujícího na bázi diskontování hotovostních toků z investice.

Metoda čisté současné hodnoty v případě veřejných projektů rozvojového charakteru nám říká, jaký hotovostní tok vyvolaný investicí zůstane po odečtení investičních nákladů v předem projektované době životnosti investice. Pro její výpočet používáme v souladu s významným vlivem změny časové hodnoty peněz v době životnosti investice princip diskontování – za použití diskontní míry odrážející investorem požadovanou výnosnost projektu.

Pod pojmem **současná hodnota** (ozn. *PV*) zde budeme rozumět současnou hodnotu diskontovaných hotovostních toků (tj. rozdílů mezi užitky a náklady) plynoucích z veřejného rozvojového projektu. **Společenskou diskontní mírou** ozn. (*k*) zde budeme rozumět širší pojatou výnosovou míru z realizovaného veřejného rozvojového projektu, požadovanou investorem [1]. **Čistou současnou hodnotou** projektu (ozn. *ENPV*) míníme rozdíl mezi současnou hodnotou hotovostních toků plynoucích z realizace projektu a investičními náklady, tj. počátečním kapitálovým výdajem na danou investici. **Investiční křivkou** budeme nazývat funkční zobrazení závislosti $ENPV=f(k)$ v reálné rovině:

$$ENPV = \sum_{t=0}^n \frac{B_t - C_t}{(1+k)^t}, \quad (1)$$

kde B_t jsou přínosy (benefits) z veřejného rozvojového projektu,
 C_t jsou náklady (costs) z veřejného rozvojového projektu,
 n je doba ekonomické životnosti projektu.

Vnitřní výnosovou mírou projektu (*ERR*) budeme nazývat takovou diskontní sazbu, pro kterou platí

$$ENPV = \sum_{t=0}^n \frac{B_t - C_t}{(1+ERR)^t} = 0. \quad (2)$$

Toto výnosové procento (*ERR*) lze pak porovnávat z tzv. opportunity costs, tj. výnosnostmi alternativních investic. Pokud se podíváme na průběh investiční křivky konvenčního projektu v kladné reálné polorovině, platí, že diskontní míra navrhovaného projektu by měla být co nejbližší zleva vnitřní výnosové míře projektu, jež je predikována parametry daného projektu (investičními náklady, přínosy, náklady a dobou životnosti).

Kritérium efektivity veřejného projektu je tedy ve tvaru $ERR > k$.

Rozbor investiční křivky

Podívejme se blíže na vztah (1), tj. závislost čisté současné hodnoty na diskontní míře. Při substituci $x = \frac{1}{1+k}$ se lze na tuto funkci dívat jako na polynom n-tého stupně

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad (3)$$

kde jsme pro zjednodušení položili $a_i = B_i - C_i$, což odpovídá hotovostnímu toku (cash flow). V popisu grafů používáme pro zkoumané hotovostní toky popis $CF = [a_0, a_1, a_2, a_3, a_4]$. Pro posouzení efektivity projektu hledáme kořen tohoto polynomu, podle kritéria (2). Jak je dobře známo, existují vzorce pro nalezení kořenu pouze pro polynomy druhého a třetího stupně; u kubického polynomu se nazývají Cardanovy [2]. U polynomů vyšších stupňů se kořeny hledají převážně numericky. Obecně nelze ani říci, kolik reálných kořenů tento polynom má, nebo zda má pouze kořeny imaginární.

Dále nás zajímá průběh křivky *ENPV*, zejména to, kde má hodnotu kladnou a kde zápornou.

V literatuře se většinou řeší, jak už jsme uvedli, polynom třetího stupně. Jedná se tedy o projekty na tři roky, u kterých se analyzují na základě matematických řešení zásadní ekonomické dopady. V ekonomické praxi se ale většinou realizují projekty na více let; z hlediska obecného posuzování ve finančním a bankovním sektoru je brána dlouhodobost projektu jako doba životnosti projektu trvající alespoň 4 roky (viz hypoteční úvěry, investiční municipální úvěry a investiční podnikatelské úvěry). Řešení polynomu čtvrtého stupně a následné zobrazení průběhu investiční křivky je rozhodně tedy bližší ekonomické realitě.

Uvažujme tedy polynom čtvrtého stupně ve tvaru

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4, \quad (4)$$

který odpovídá investiční křivce

$$ENPV = (B_0 - C_0) + \frac{B_1 - C_1}{1+k} + \frac{B_2 - C_2}{(1+k)^2} + \frac{B_3 - C_3}{(1+k)^3} + \frac{B_4 - C_4}{(1+k)^4}, \quad (5)$$

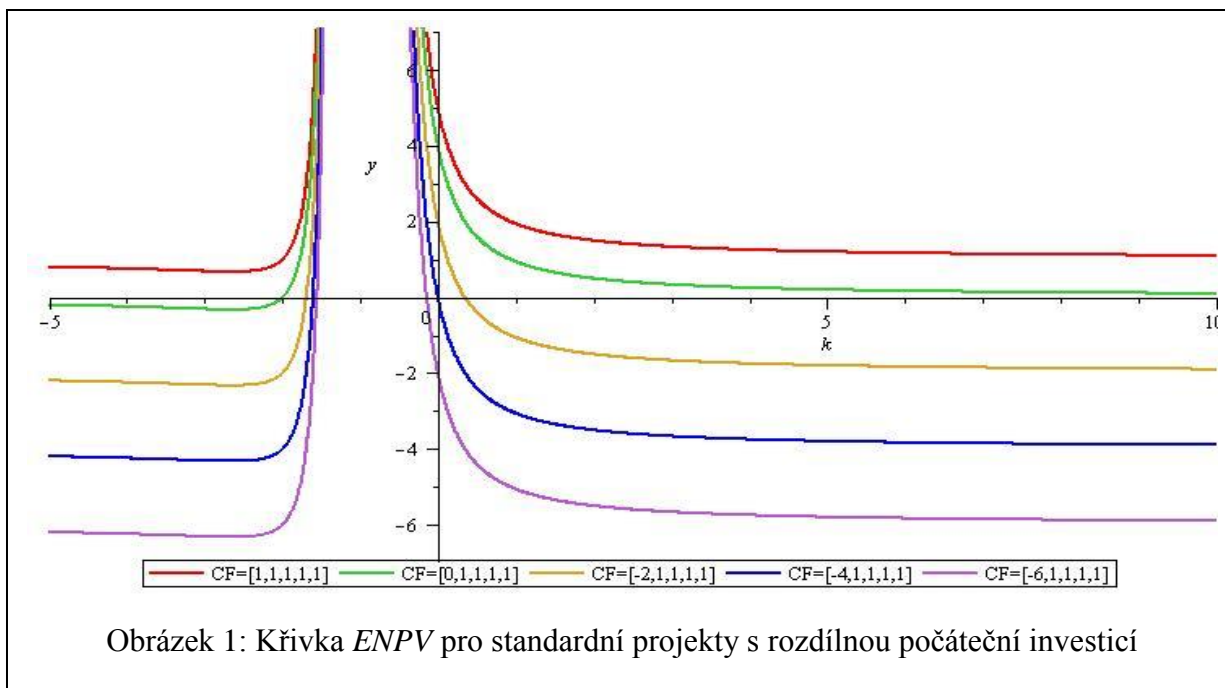
a rozeberme základní poznatky o tomto polynomu. V hodnotě a_0 , která znamená počáteční investiční náklady, protne polynom osu y, tj. pro $x = 0$. Použitím zpětné substituce $k = \frac{1}{x} - 1$

zjistíme, že hodnota absolutního členu a_0 určuje vodorovnou asymptotu funkce *ENPV*. Podotkněme, že graf funkce *ENPV* má i svislou asymptotu, a to v $k = -1$. Na obrázku 1 jsou znázorněny funkce, které se liší pouze hodnotou absolutního členu. Je vidět, že průběhy těchto funkcí jsou stejné, pouze jsou posunuty ve směru osy y. V ekonomické praxi se uvažuje pouze $a_0 \leq 0$, přičemž $a_0 = 0$ znamená, že na projekt se dostane stoprocentní dotace.

Dále je jasné, že polynom (4) může mít čtyři, dva nebo žádný reálný kořen [2]. Z toho plyne stejný počet reálných *ERR* - odpovídá hodnotě požadované výnosnosti investora, případně donátora, pro kterou je funkce (5), odrážející čistou současnou hodnotu projektu, rovna nule.

Jedinou výjimkou je stoprocentní dotace projektu, jak je vidět na obrázku 1. Jedním kořenem polynomu (4) je $x = 0$, zpětnou substitucí obdržíme $k = \infty$.

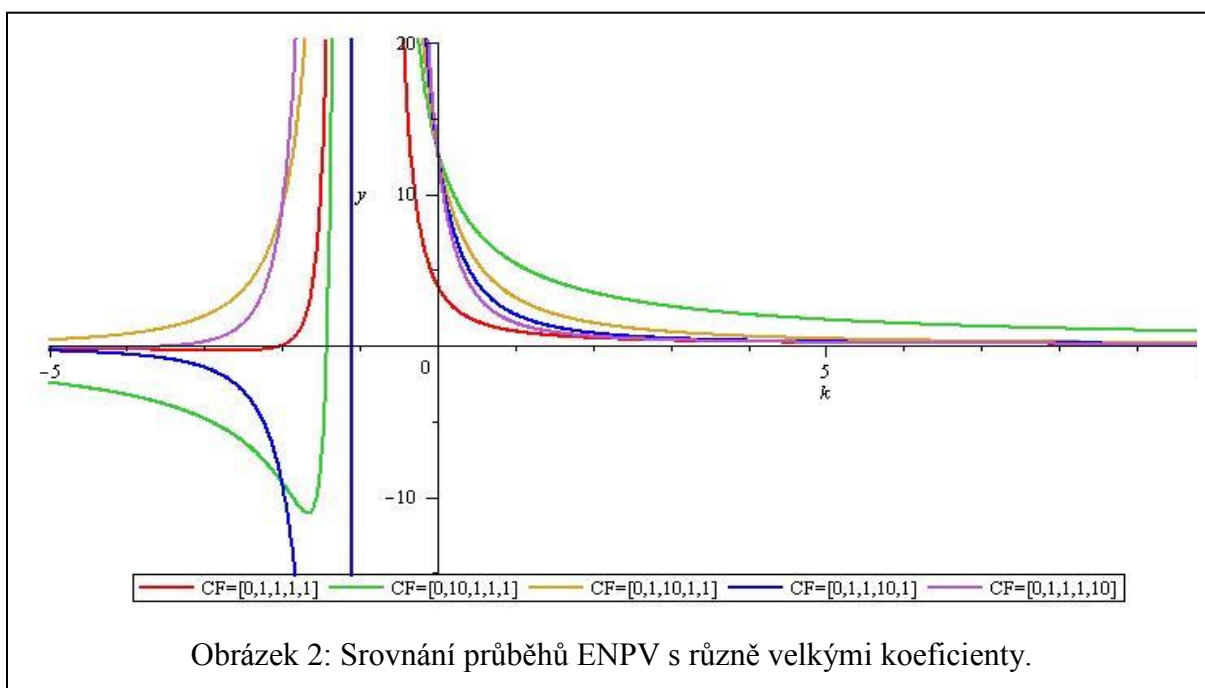
Kompletně dotovaný projekt má dle definice kritéria nekonečně mnoho výnosností, které jsou z hlediska parametrů projektu pro investora efektivní. To je ostatně z ekonomického pohledu, kdy nám dotace uhradí veškeré investiční náklady (záporný hotovostní tok) a za předpokladu, že provozní fáze obsahuje již samé kladné hotovostní toky, zcela pochopitelné.



Na obrázku 1 jsou rovněž znázorněny tzv. konvenční projekty, ve kterých po vstupních výdajích následují čisté příjmy (tj. v posloupnosti koeficientů a_t zaznamenáme pouze jednu změnu znaménka, a to ze záporných čísel na kladná).

Z matematického hlediska je zajímavá otázka, pro jaké a_0 ještě nalezneme kladný kořen k , tj. jak by měla být velká počáteční investice, aby výnosová míra byla kladná. Po jednoduché úvaze je jasné, že by tedy mělo platit $|a_0| < \sum_{t=1}^n a_t$. To odpovídá ekonomické interpretaci

hodnocení veřejných rozvojových projektů pomocí klasických, tzv. statických metod, jako je doba návratnosti, metoda ROI či metoda maximalizace čistého zisku. Jde o případy, kdy neuvažujeme při výpočtu ekonomické efektivity investičního projektu diskontování



hotovostních toků z investice a tedy pouhý součet cash-flow či zisku musí převážít nad investičními náklady. Tyto metody jsou však nepřesné, neboť platí, že hotovostní tok v budoucnu má menší hodnotu pro investora či donátora jako stejný hotovostní tok v současnosti, neboť budoucí inflace znehodnocuje výnos.

Na obrázku 2 je ukázáno srovnání různých křivek ENPV, ve kterých je vždy jeden koeficient desetinásobný oproti ostatním, s křivkou $ENPV = \sum_{t=1}^4 \frac{1}{(1+k)^t}$. Je vidět, že takováto

změna jednoho koeficientu výrazně průběh funkce nezmění. V tomto případě byl úmyslně vynechán koeficient a_0 , neboť na průběh funkce nemá vliv a graf posunuje pouze „nahoru“ a „dolů“ (jak bylo ukázáno výše). Jedná se tedy o 100% dotované projekty, které se liší pouze výší hotovostních toků v jednotlivých letech provozu investice. Zde opět nalezneme nekonečně mnoho vnitřních výnosových měr, změna vstupních parametrů má pouze vliv na strmost klesání investiční křivky.

Závěr

Při hodnocení socio-ekonomické efektivity veřejných projektů se řeší výsledná hodnota funkce ENPV a sleduje se, kde nabývá kladných hodnot a jaký vliv má změna polarity hotovostních toků. V našem případě jsme z důvodu rozsáhlosti této problematiky zvolili tzv. konečné projekty, kdy dochází maximálně pouze k jedné změně polarity hotovostních toků – ze záporných investičních nákladů na kladnou řadu užitků z projektu. Dále jsme rovněž z důvodu zjednodušení použili i situaci, kdy dochází ke stoprocentní dotaci, kryjící plně investiční náklady; to je v souladu s často se vyskytující ekonomickou realitou. Dobu životnosti investice jsme zvolili 4 roky, což je minimálně v souladu s požadavkem na dlouhodobost rozvojových projektů.

Investiční funkce, zobrazující vztah mezi čistou současnou hodnotou veřejného projektu a společenskou diskontní mírou, se má vyskytovat v I. kvadrantu, což značí, že čistá současná hodnota projektu je kladná (užitky z projektu převáží investiční náklady) při kladné společenské diskontní míře.

Samozřejmě, z hlediska matematické úplnosti lze konstatovat, že kořen polynomu je i záporný, ale zde nenacházíme smysluplný ekonomický význam. Dále lze v kladné polovině nalézt oblast kořenů funkce, kdy ekonomické řešení sice odráží reálnou situaci, ale více jak stoprocentní výnosnost ($ERR > 1$) bývá spíše pravidlem v oblasti šedé či černé ekonomiky.

Literatura

- [1] FUGUITT, Diana; WILCOX Shanton. *Cost-Benefit Analysis for Public Sector Decision Makers.*, 1th. edition, London: Quorum Books, 1999. ISBN 1-56720-222-5
- [2] REKTORYS, Karel. *Přehled užití matematiky I.*, Praha: Prometheus, 2000. 720 s. ISBN 80-7196-180-9
- [3] STIGLITZ, Joseph. *Ekonomie veřejného sektoru.* 1. vydání. Praha: GRADA, 1999. 661 s., ISBN 80-7169-454-1

INTERAKTIVNÍ TABULE PŘI TVORBĚ E-LEARNINGOVÝCH KURZŮ

Radka Hamříková

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TU Ostrava

17. listopadu, 708 33 Ostrava-Poruba

E-mail : radka.hamrikova@vsb.cz

Abstrakt: Ukázky přípravy e-learningových materiálů pomocí interaktivní tabule, nahrávání a střih video materiálů. Videá jsou nahrávána a střihána v programu Camtasia Studio 8 na interaktivní tabuli Interwrite.

Po sestřihání a ozvučení budou sloužit pro studenty matematiky I a II na FMME a HGF VŠB-TU Ostrava.

Abstract: Samples preparation of e-learning materials using an interactive whiteboard, recording and editing video materials. Videos are recorded and sheared program Camtasia Studio 8 on the interactive whiteboard Interwrite.

Once edited and sound system will be used for students of mathematics I and II to FMME and HGF VSB-TU Ostrava.

Proč videa vznikají

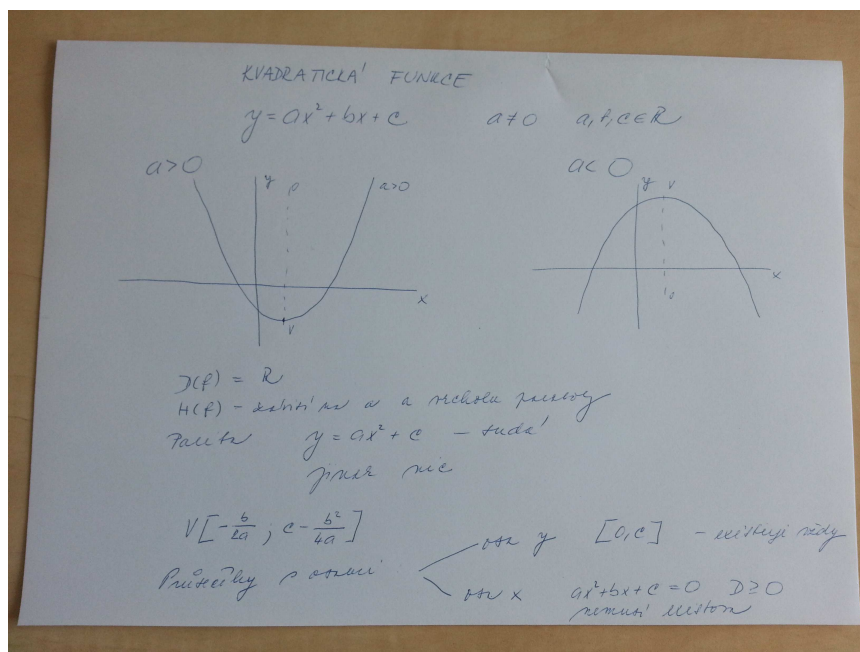
Natočení videí iniciovali studenti, kteří měli již v minulosti možnost používat Řešené úlohy ke svému studiu. Tyto materiály vznikaly v letech 2006- 2008 za podpory projektu Studijní opory s převažujícími distančními prvky pro předměty teoretického základu studia CZ.04.1.03/3.2.15.1/0016. Během let se na nás obrátila rada studentů, zda bychom nevyrobili další videa. Podařilo se nám získat grant z Fondu rozvoje vysokých škol. Videá tedy vznikají za podpory projektu FRVŠ 1103/2013 Vytvoření e-learningových kurzu s multimediálními studijními materiály pro matematické předměty na vybraných fakultách VŠB-TU Ostrava. V rámci projektu budou pro studenty vytvořeny pracovní listy s teoretickou částí výuky, řešenými a neřešenými úlohami. Významnou podporou budou natočená videa jak teorie, tak řešenými příklady. Při tvorbě videí se využívá interaktivní tabule Interwrite, tu máme prozatím k dispozici díky AVC VŠB - TU Ostrava. Materiály jsou nahrávány a střihány pomocí programu Camtasia Studio 8. Dále se materiály ozvučí. Studenti Fakulty materiálového inženýrství a Hornicko – geologické fakulty je budou používat jako součást výuky předmětů Matematika I a II.

Jak videa vznikají

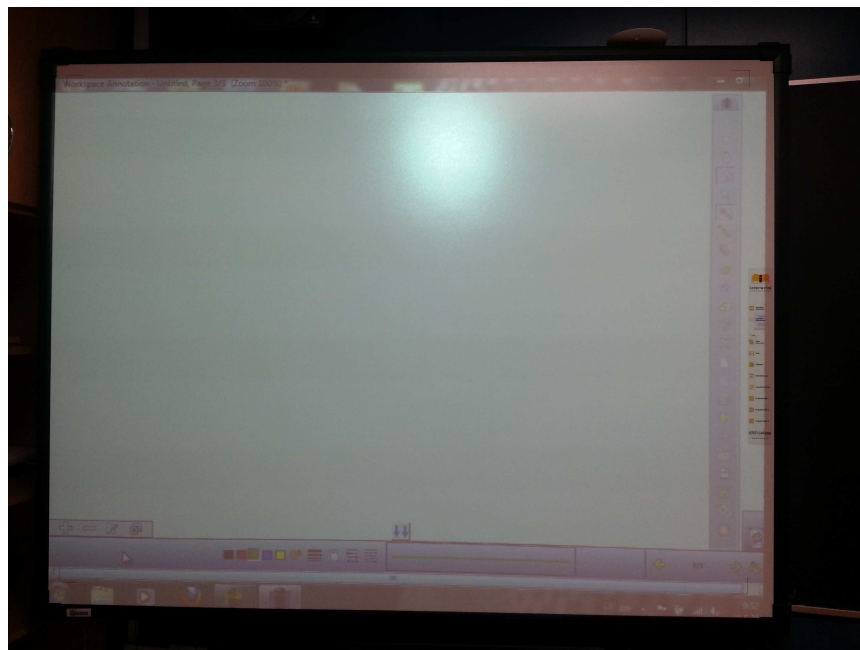
1. Scénář - rozvrhneme si, co chceme natočit, jak bude na sebe látka navazovat, jaké pomůcky budeme potřebovat.

2. Nastavení - kalibrace tabule, připravení pomůcek – interaktivní tabule, notebook.
3. Natočení příkladu nebo teorie – obvykle natáčíme video v jednom kuse, překlepy, mazání a vrácení se vystřiháme později – Interwrite, Camtasia Studio 8.
4. Střih - video si několikrát pustíme, uděláme si poznámky, co budeme stříhat, které části například zrychlovat, apod.
5. Ozvučení - napíšeme si komentář a nahrajeme k hotovému filmu.

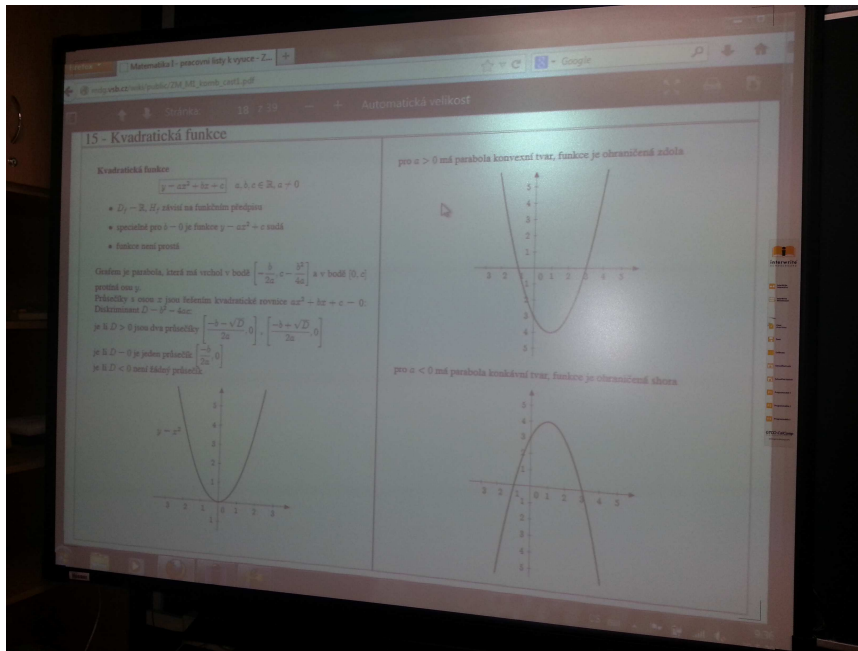
Ukázky z výroby videí



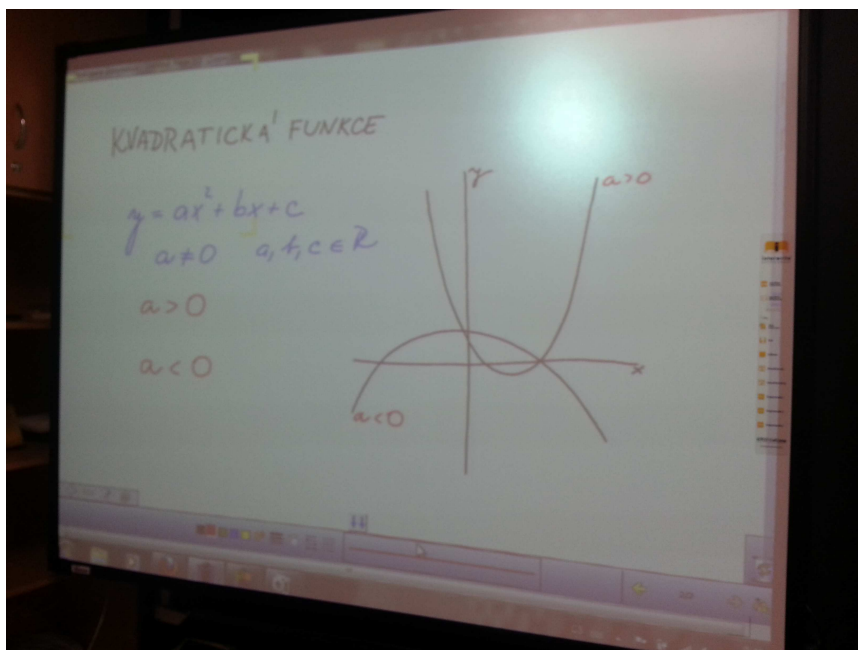
Obr. 1 – příprava materiálu



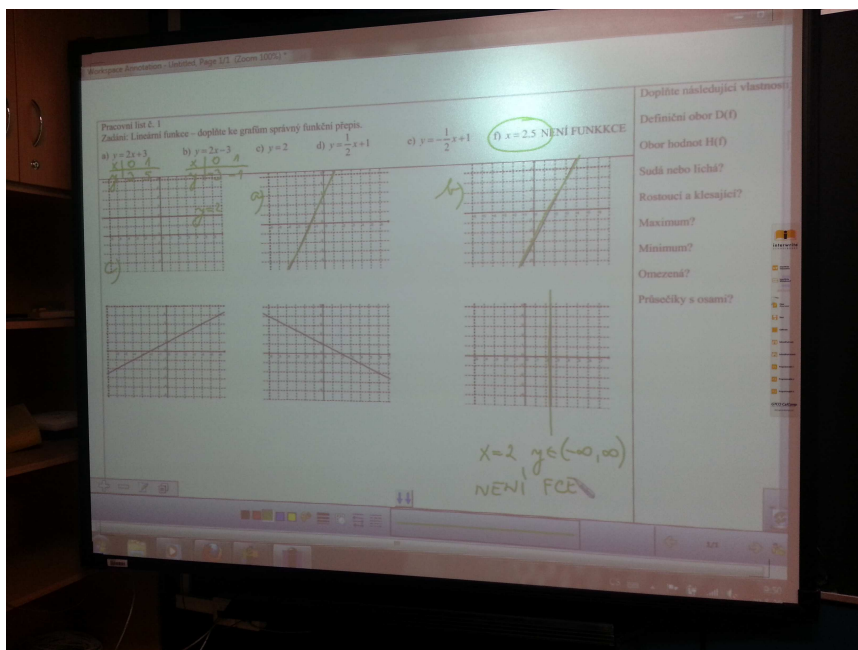
Obr. 2 – tabule Interwrite



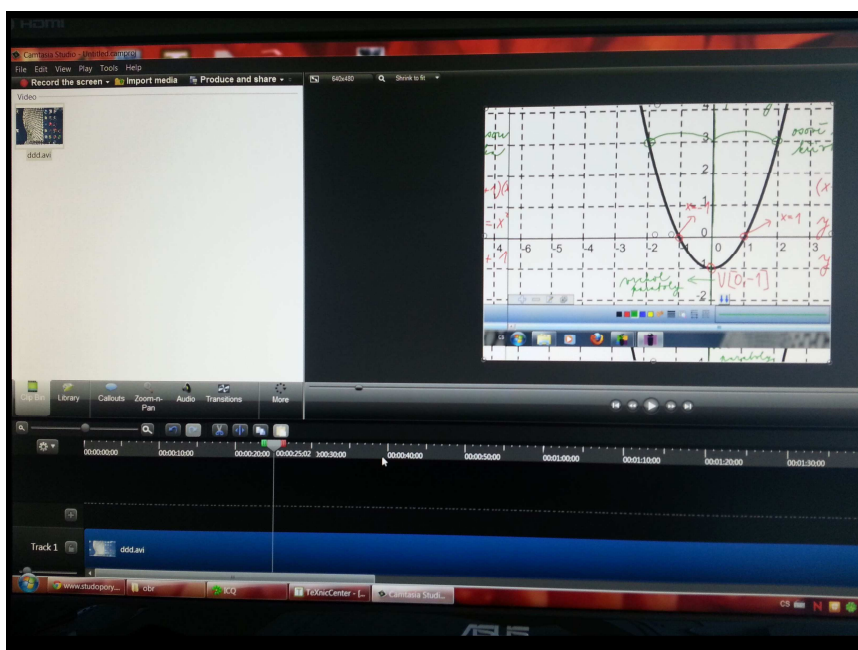
Obr. 3 – teoretický pracovní list



Obr. 4 – nahrávání teorie



Obr. 5 – řešená úloha pro nahrávání



Obr. 6 – stříh videa v programu Camtasia Studio 8

Poděkování

Problematika je řešena v projektu FRVŠ 1103/2013 Vytvoření e-learningových kurzu s multimediálními studijními materiály pro matematické předměty na vybraných fakultách VŠB-TU Ostrava.

Fixing nodes method for stabilization of generalized inverse

Pavla Kabelikova

Department of applied mathematics, VSB-Technical University Ostrava,
17. listopadu, 708 33 Ostrava-Poruba
E-mail: pavla.kabelikova@vsb.cz

Abstract: While solving a system of consistent linear equations with symmetric positive semidefinite (SPS) matrix, here arises a need of computation of a generalized inverse matrix. Systems with SPS matrix can be solved by standard direct methods, such as the Cholesky decomposition, adapted to the solution of systems with SPS matrix.

In paper [1], authors choose the fixing nodes using Perron vector of a matrix which is only a sub-optimal choice. Such nodes reduce numerical instability in Cholesky method, especially when applied to solving a discretized version of Neumann problem (stabilizing action of general inverse of semidefinite stiffness matrix). The main objective of this contribution is to find the best choice of fixing node using spectral graph techniques, which has been proved also algebraically.

1 Introduction

The motivation for this paper is the computation of the generalized inverse of a symmetric positive semidefinite (SPS) matrix which arises for example in solution of contact problems. One of the possibilities is a modification of Cholesky decomposition, which use the “so called” fixing nodes.

Algorithm presented in this paper is overwritten from [1]. The authors use the Perron vector of a matrix for the computation of the fixing nodes which is only a sub-optimal choice. Here, the better choice of fixing node using eigenvectors of Laplacian matrix is presented.

2 Generalized Inverse Algorithm

Generalized inverse algorithm ([1]) consists in a decomposition of the SPS matrix $A \in R^{n \times n}$:

$$PAP^T = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{JJ} & \tilde{A}_{JI} \\ \tilde{A}_{IJ} & \tilde{A}_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{JJ} & O \\ L_{IJ} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{JJ}^T & L_{IJ}^T \\ O & S \end{bmatrix}, \quad (1)$$

where $\tilde{A}_{JJ} \in R^{r \times r}$ is well-conditioned regular part of $A \in R^{n \times n}$, $L_{JJ} \in R^{r \times r}$ is a lower factor of the Cholesky factorization of \tilde{A}_{JJ} , $L_{IJ} \in R^{s \times r}$, $L_{IJ} = \tilde{A}_{IJ}L_{JJ}^{-T}$, $S \in R^{s \times s}$ is a singular matrix, $s = n - r$ is the number of displacements corresponding to the fixing nodes, and P is a permutation matrix.

Then the generalised inverse A^+ is computed as

$$A^+ = P^T \begin{bmatrix} L_{JJ}^{-T} & -L_{JJ}^{-T}L_{IJ}^T S^\dagger \\ O & S^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{JJ}^{-1} & O \\ -L_{IJ}L_{JJ}^{-1} & I \end{bmatrix} P, \quad (2)$$

where S^\dagger denotes the Moore–Penrose generalized inverse.

Permutation matrix P , $P = P_2 P_1$ is computed in two steps. First, matrix P_1 is find as

$$P_1 A P_1^T = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{JJ} & \tilde{A}_{JI} \\ \tilde{A}_{IJ} & \tilde{A}_{II} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

where \tilde{A}_{JJ} is nonsingular and \tilde{A}_{II} corresponds to the degrees of freedom of the M fixing nodes.

Second, reordering algorithm on $P_1 A P_1^T$ is applied to get a permutation matrix P_2 which leaves the part \tilde{A}_{II} without changes and enables the sparse Cholesky factorization of \tilde{A}_{JJ} .

3 Fixing Nodes and Center-like Points

Finding fixing nodes effectively and accurately is the main ingredience of presented generalized inverse algorithm. Let us define the fixing node properly.

Definition 1. (Fixing node)

Let $Ax = b$ be a system of linear equations arising from a finite element or finite difference discretization of the problem, such that A has one-dimensional kernel (i.e. the singular part \tilde{A}_{II} in (3) is formed by one zero element).

The **one-fixing node** is the node that makes the regular part \tilde{A}_{JJ} of the stiffness matrix A produced by the permutation P nonsingular and well conditioned, i.e. permutation of this node to the last row/column of the matrix A makes the condition number of the regular part \tilde{A}_{JJ} finite and sufficiently small.

The **best choice of one-fixing node** is the node k for which the regular part \tilde{A}_{JJ} of the stiff. matrix A produced by the permutation P has the minimal condition number over all \tilde{A}_{kk} ,

$$\text{cond}(\tilde{A}) = \min_{k=1, \dots, n} \text{cond}(\tilde{A}_{kk}).$$

The above definition is not suitable for numerical computation of the fixing node as it operates on condition numbers of residual matrices. As the fixing node should lie near the “center” of the mesh (see [2]), there are several possibilities how to define the center-like points of mesh, or corresponding graph respectively.

Definition 2. (Capital vertex)

Let the *capital vertex* of a graph G be a vertex v_i that corresponds to the index i of the highest value in the Perron vector of the corresponding adjacency matrix of graph G .

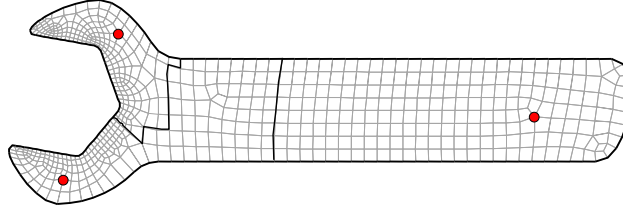


Figure 1: Mesh with wrong position of fixing nodes

In Figure 1 overtaken from [1], we can see that the position of the fixing node in the rightmost side subdomain differs from the position where we naturally expect it should be (i.e. closer to the “center” of given subdomain). In [1], authors have used the approach based on the Perron vector of the adjacency matrix. One can see that the highest value of the Perron vector arises at the vertex with the higher degree rather than in one with the mean value of degree.

Definition 3. (Cross-eigenvector center)

Let $G = (V, E)$ be a graph on n vertices.

- For one-dimensional mesh, the *cross-eigenvector center* is the vertex, edge respectively, that lies on the 2-level cut.
- For two-dimensional mesh, the *cross-eigenvector center* is the vertex, edge or 2D element respectively, that lies on the crossing of the 2-level cut and the 3-level cut.
- For three-dimensional mesh, the *cross-eigenvector center* is the vertex, edge, face or 3D element respectively, that lies on the crossing of the 2-level cut, 3-level cut and 4-level cut.

The k -level cuts are computed using k -th eigenvector of Laplacian matrix corresponding to given mesh. The exact definition can be found in [2].

4 Experiments

The results of positioning of fixing nodes based on listed definitions are presented in this section, see Figure 2. Let us have a look in the rightmost subdomain in Figure 2. As the **cross-eigenvector center** (blue star) almost the same vertex as **the best choice of one-fixing node** (green circle) has been detected, meanwhile the **capital vertex** (red triangle) has been assigned to the vertex with higher degree which is far from the best choice of one-fixing node.

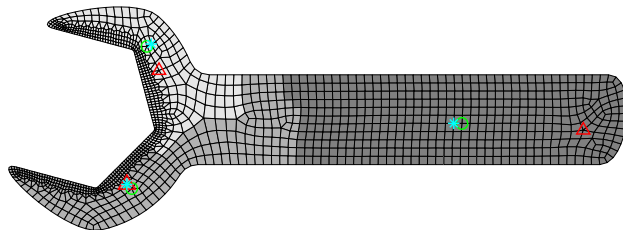


Figure 2: Comparison of two approaches

Let us briefly present the result of this phenomenon. In Figure 3(b), the eigenvector of the adjacency matrix corresponding to the highest eigenvalue is plotted. In Figure 3(c), the eigenvector of the Laplacian matrix corresponding to the second smallest eigenvalue is plotted, and in Figure 3(d), the eigenvector of the Laplacian matrix corresponding to the third smallest eigenvalue is plotted.

As we can see, the behaviour of the eigenvector of the adjacency matrix corresponding to the highest eigenvalue does not correspond to the classical behaviour. Therefore, the capital vertex (based on the adjacency matrix) do not approximate the best choice of one-fixing node well. As we can see in Figures 3(c), 3(d), the eigenvectors of the Laplacian matrix are indifferent to changing of the structure of the mesh. The cross-eigenvector center approximates the best choice of one-fixing node well.

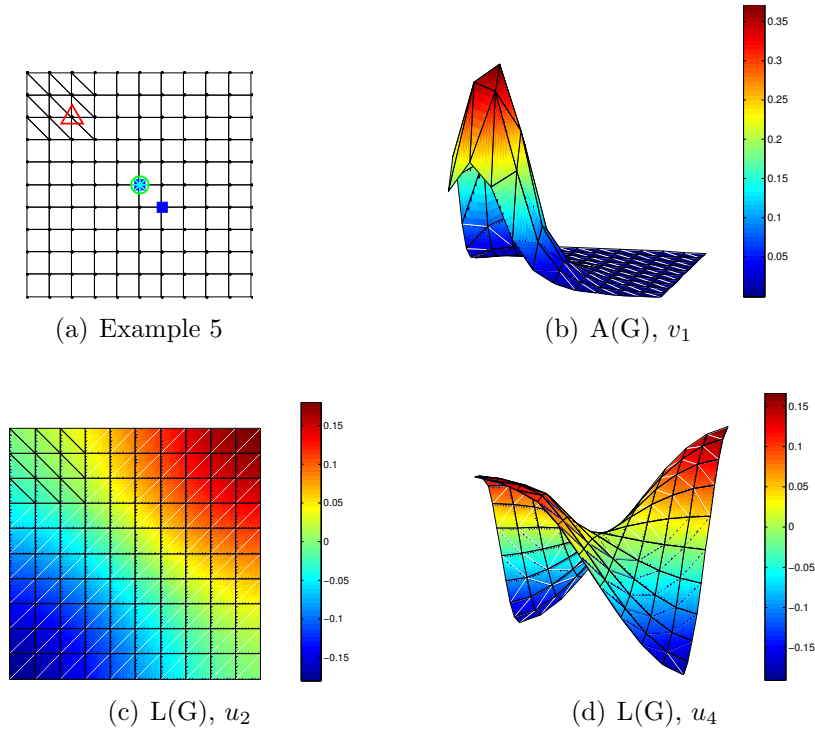


Figure 3: Example of a mesh with plotted eigenvectors

5 The Best Choice of One-Fixing Node

Based on the experiments, it is seemed that the best approximation of the best choice of one-fixing node is the cross-eigenvector center. In this section, the particular theorem is presented.

Theorem 5. (The best choice of one-fixing node)

The cross-eigenvector center is the best choice of one-fixing node. I.e. if we remove the row and column corresponding to the cross-eigenvector center from the original matrix A , the remaining principal submatrix has the the best condition number over all principal submatrices.

The condition number is considered in the form $\text{cond}(\tilde{L}) = \frac{\tilde{\lambda}_{max}(\tilde{L})}{\tilde{\lambda}_{min}(\tilde{L})}$, therefore removing the fixing node does not change the $\tilde{\lambda}_{max}$ so much as the $\tilde{\lambda}_{min}$. Thus, minimization of the condition number corresponds to the maximization of the $\tilde{\lambda}_{min}$.

As the SPS matrix arising in the generalised inverse algorithm has the same structure as the graph Laplacian matrix of corresponding mesh, the Laplacian matrix is used for the proof.

Theorem 6. (Maximization of $\tilde{\lambda}_{min}$)

Removing the vertex k corresponding to the cross-eigenvector center in Laplacian matrix L , the maximal value of $\tilde{\lambda}_{min}^*$ of \tilde{L} is obtained, over all $\tilde{\lambda}_{min}^k$ of all principal submatrices \tilde{L}^k , i.e. the condition number \tilde{L}^k is minimized.

Sketch of the proof.

For given n we solve following system of equation

$$\tilde{\lambda}_{min}^* = \max_{i=1,2,\dots,n} \tilde{\lambda}_{min}^i,$$

$$\tilde{\lambda}_{min}^i = \min_{\substack{\|y\|=1 \\ r_i(Q)y=0}} y^T \Lambda y = \min_{\substack{\|y\|=1 \\ r_i(Q)y=0}} \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

$$\tilde{\lambda}_{min}^i = \min (\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2) \quad (4)$$

$$\text{subject to } y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = 1 \quad (5)$$

$$q_{i1}y_1 + q_{i2}y_2 + \dots + q_{in}y_n = 0. \quad (6)$$

For given $q_{i2} = 0$ we obtain exactly the upper bound:

$$\tilde{\lambda}_{min}^i = \min (\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2) = \lambda_2.$$

□

6 Conclusion

In this paper, we have presented a modification in stabilization of generalised inverse algorithm used in [1], which consists in another choice of fixing node. The optimal choice of one-fixing node is based on eigenvectors of Laplacian matrix (instead of the eigenvector of adjacency matrix used in [1]). Due to range of this paper, the sketch of proof is only presented. The whole proof can be found in [2].

References

- [1] Dostál, Z., Kozubek, T., Kovář, P., Markopoulos, A., Brzobohatý, T.: Cholesky decomposition with fixing nodes to stable computation of a generalized inverse of the stiffness matrix of a floating structure, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 88, 5, 493-509 (2011).
- [2] Kabelíková, P.: Implementation of Non-Overlapping Domain Decomposition Techniques for FETI Methods, Ph.D. thesis, VŠB-Technical University of Ostrava (2012).

APPEAL OF INEXACT CALCULATIONS

Zdeněk Kalousek

Department of Applied Mathematics, Faculty of Education, TUL
Studentská 2, 46117 Liberec
e-mail zdenek.kalousek@tul.cz

Abstract: The paper deals with the solution of the system of linear equations with symmetric positive matrix using the steepest descent method. As known, the process applying the exact step length (which minimizes the energetic functional of the problem locally) converges to the solution, however, the convergence is catastrophically slow. In contrast, there exist many relatively efficient algorithms using diversely diluted information about the exact step length. It is shown that even the total disregard to the exact step length may provide the solution of the problem. If, in addition, the limited use of the data related to the exact step length is applied, then the convergence properties of the created algorithms may be very favourable.

1 Steepest descent method

1.1 Basic algorithm

Let \mathbf{A} be positive symmetric matrix $M \times M$; we solve the equation

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{1}$$

for given $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^M$ by some iterative method. The residual vector can be interpreted as

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}_n = -\nabla \left(\frac{1}{2} \langle \mathbf{x}_n | \mathbf{Ax}_n \rangle - \langle \mathbf{b} | \mathbf{x}_n \rangle \right) = -\nabla W(\mathbf{x}_n) ,$$

the function $W(\mathbf{x})$ called *energetic functional* or simply *energy* of the problem acquires its only one minimum in the point $\underline{\mathbf{x}}$ solving the equation (1). The idea to minimize the energy inspired Cauchy [1] to the proposition of the iterative algorithm

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_{j-1} - \gamma_j \nabla W(\mathbf{x}_{j-1}) = \mathbf{x}_{j-1} + \gamma_j \mathbf{r}_{j-1} , \tag{2}$$

where

$$\gamma_j = \arg \left(\min_{\gamma} W(\mathbf{x}_{j-1} + \gamma \mathbf{r}_{j-1}) \right) = \frac{\|\mathbf{r}_{j-1}\|^2}{\langle \mathbf{r}_{j-1} | \mathbf{Ar}_{j-1} \rangle} . \tag{3}$$

We call this value *exact step length* and denote it $\hat{\gamma}_j$.

1.2 Modifications of the basic algorithm

The use of the exact step length assures the convergence of the process (2), but its convergence is extremely poor, as illustrated in the two-dimensional case on the fig. 1. Perhaps, in the multidimensional case this effect might disappear, but

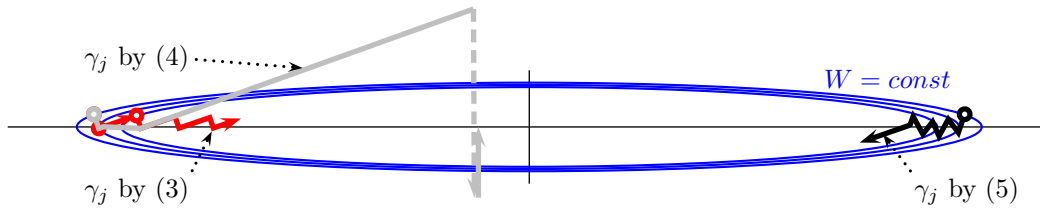


Figure 1: Behavior of the steepest descent method

Akaike [2] proved that after sufficiently large number of iterations the process is reduced on $span(\mathbf{e}_{\lambda_{\min}}, \mathbf{e}_{\lambda_{\max}})$,¹ where its properties become the worst possible.

Many attempts to improve the properties of the method were realized in the course of years, but their efficiency was always limited. Only in 1988 Barzilai and Borwein [3] suggested surprising formula for the step length parameter

$$\gamma_j = \hat{\gamma}_{j-1} \quad (4)$$

providing usually very good convergence properties despite of the casual excesses during the iterative process.²

The good experience concerning the use of the relaxed step length parameter

$$\gamma_j = \alpha_j \hat{\gamma}_j, \quad \alpha_j \in (0, 2). \quad (5)$$

in another iterative methods (e.g. Gauss-Seidel) inspired the proposition to use the instruction (5) for the steepest descent procedure too. However, no efficient guidance for the choice of the parameter α_j was proposed long time. So Raydan and Svaiter suggested in [4] to choose the parameter α_j randomly with uniform distribution on $(0, 2)$. The method converges slower than the Barzilai-Borwein's one, but the excesses typical for the Barzilai-Borwein's algorithm do not occur.

1.3 Nature of the successful computing

Even though the formulas (4), (5) give good practical results, it is not very clear, on which effect their efficiency is based.³ So we try to suggest the method proceeding directly from the properties of the steepest descent algorithm.

We can express the residual \mathbf{r}_j using the preceding iteration as

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{b} - \mathbf{A}(\mathbf{x}_{j-1} + \gamma_j \mathbf{r}_{j-1}) = (\mathbf{I} - \gamma_j \mathbf{A}) \mathbf{r}_{j-1}. \quad (6)$$

We define the *inverse step length parameter* l_j trough $\gamma_j = \frac{1}{l_j}$. The backward induction based on the relation (6) gives

$$\mathbf{r}_n = \prod_{i=0}^{n-1} (\mathbf{I} - \gamma_{n-i} \mathbf{A}) \mathbf{r}_0 = \prod_{j=1}^n \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}}{l_j} \right) \mathbf{b} \quad (7)$$

¹ \mathbf{e}_λ means the eigenvector of the matrix \mathbf{A} associated with the eigenvalue λ here

²For example, the iteration point, indicated by the direction of the dashed line on fig. 1, is located significantly beyond the figure area.

³The interpretation of the Barzilai-Borwein algorithm to be particular form of the secant method is little convincing.

consequently of the comutativity of the matrices in (7). The problem (1) will be solved, when $r_n = 0$. This result is achieved, whenever the set $\{l_j\}_{j=1}^n$ contains all the eigenvalues of the matrix \mathbf{A} . Since the determination of all the eigenvalues of the matrix is just as complicated as the solution of the problem (1) itself, there remains the only one rational possibility to reach the wanted effect – the application of the random choice of the parameters $l_j \in \langle \lambda_{\min}, \lambda_{\max} \rangle$.

2 Processes with random step length

2.1 Totally random process

Algorithm A: Let λ, Λ be the minimal, resp. maximal eigenvalues of the matrix \mathbf{A} , L be the random quantity with the uniform distribution on $\langle \lambda, \Lambda \rangle$. The system of equations (1) is solved as follows:

1. $\mathbf{x}_0 = 0$,
2. l_j is a realization of the random quantity L ,
3. $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_{j-1} + \frac{1}{l_j} \mathbf{r}_{j-1}$ for $j > 0$,
4. if $\|\mathbf{r}_j\| < \text{given } \varepsilon$, then stop
else go to step 2 for the next j .

We can formulate the following statements concerning this algorithm:

Theorem 1: Let the system (1) be solved using algorithm A. Then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$$

with probability equal to one.

PROOF: The mean value $E \left(\ln \left| 1 - \frac{\lambda_i}{L} \right| \right)$ exists for any eigenvalue $\lambda_i \in \langle \lambda, \Lambda \rangle$ and it is negative. The rest follows from the law of large numbers. \square

Theorem 2: Let the system (1) be solved using algorithm A. Then the convergence of the process is R -linear and the limit logarithmic rate of convergence is

$$\varrho = \frac{\ln(\kappa(\mathbf{A}))}{\kappa(\mathbf{A}) - 1} + \ln \left(1 + \frac{1}{\kappa(\mathbf{A}) - 1} \right) \quad (8)$$

with probability equal to one; $\kappa(\mathbf{A}) = \frac{\Lambda}{\lambda}$ means the condition number of the matrix \mathbf{A} .

PROOF: The law of large numbers implies $\varrho = -\max_{\lambda_i} \left[E \left(\ln \left| 1 - \frac{\lambda_i}{L} \right| \right) \right]$ almost surely; this (negative) maximum has the magnitude (8) acquired for $\lambda_i = \lambda$ and $\lambda_i = \Lambda$. \square

The value ϱ in (8) exceeds the value $\varrho_e = \ln \frac{\kappa(\mathbf{A})+1}{\kappa(\mathbf{A})-1}$ characteristic for the exact step length algorithm, but it is still very small.

The values λ, Λ are usually unknown by the practical realization of this algorithm. Nevertheless, their upper, resp. lower estimation is accessible using vectors arising during the preceding calculations: for $j > 1$ we define

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_j &= \min_{i < j} \frac{\langle \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1} | \mathbf{A}[\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}] \rangle}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}\|^2} = \min_{i < j} \frac{\langle \mathbf{r}_{i-1} | \mathbf{r}_{i-1} - \mathbf{r}_i \rangle}{\gamma_i \|\mathbf{r}_{i-1}\|^2}, \\ \underline{\lambda}_j &= \max_{i < j} \frac{\|\mathbf{A}[\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}]\|^2}{\langle \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1} | \mathbf{A}[\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}] \rangle} = \max_{i < j} \frac{\|\mathbf{r}_{i-1} - \mathbf{r}_i\|^2}{\gamma_i \langle \mathbf{r}_{i-1} | \mathbf{r}_{i-1} - \mathbf{r}_i \rangle} \end{aligned}$$

and $l_j \in \langle \bar{\lambda}_j, \underline{\lambda}_j \rangle$; in the first step the needed values are not available, so we calculate the vector \mathbf{Ab} directly and we use the values $\bar{\lambda}_1 = \frac{\langle \mathbf{b} | \mathbf{Ab} \rangle}{\|\mathbf{b}\|^2}$, $\underline{\lambda}_1 = \frac{\|\mathbf{Ab}\|^2}{\langle \mathbf{b} | \mathbf{Ab} \rangle}$.

The procedure defined by the algorithm A was tested in various situations. Some results for the problem with $\kappa(\mathbf{A}) = 512$ are displayed on the fig. 2. The left part of

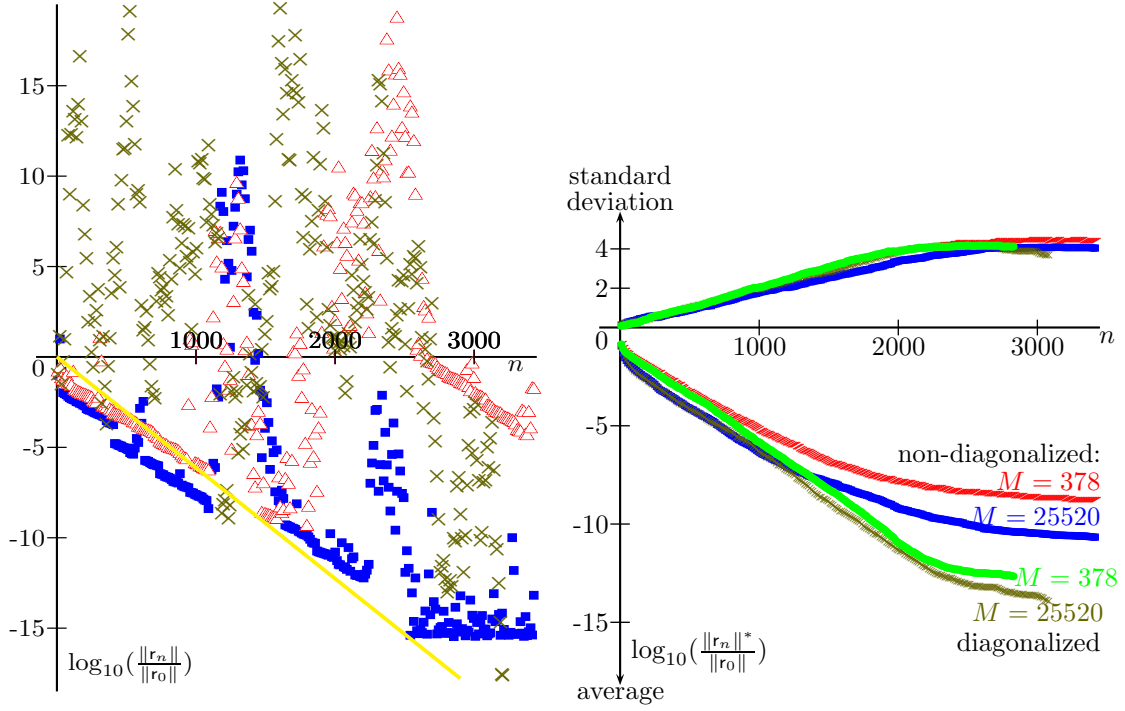


Figure 2: Tests of the Algorithm A

the figure shows three typical courses of the values $\|r_n\|$ (the squares, triangles and small crosses). The half line from the point $[0, 0]$ to the right bottom describes the linearly convergent process with the convergence rate (8). The level $\|r_n\| \approx 10^{-15} \|r_0\|$ is evidently the achievable accuracy of the observed process.

According to the step 4 of the algorithm A, if the value $\|r_j\|$ is sufficiently small, then the computation is terminated and the possible augmentation of the residual in the following steps has no importance. That is why we prefer to observe the values

$$\|r_n\|^* = \min_{i \leq n} (\|r_i\|) .$$

We treated statistically approximately hundred of tests for four different matrices \mathbf{A} having either $M = 378$, or $M = 25520$ rows and either seven-diagonal or diagonalized form by the same spectrum. The results are displayed on the right part of the fig. 2. Surprisingly, the reached accuracy is better for the larger matrices. The standard deviations does not depend on the properties of the matrix \mathbf{A} practically.

2.2 Mixed calculations

The random choice of the step length parameter may often cause the abundance or deficiency of the realized values l_j in some regions of the interval $\langle \lambda, \Lambda \rangle$. This effect may be compensated using the exact step length. The simplest representation of this idea is formulated by the

Algorithm B: The Algorithm A, where the step **2** is replaced by the step

$$2B. l_j = \begin{cases} \hat{l}_j = \frac{\langle r_{j-1} | A r_{j-1} \rangle}{\|r_{j-1}\|^2} & \text{for } j \text{ odd} \\ \text{realization of the random quantity } L & \text{for } j \text{ even} . \end{cases}$$

The random step length and the exact one alternate regularly. This technique, although it is a mixture of two bad procedures, gives surprisingly good results, as shown on the fig. 3 for the non-diagonalized problem with $\kappa(A) = 5792.6$ and $M = 25520$; \underline{x} denotes the solution of the problem (1) here. The results obtained for

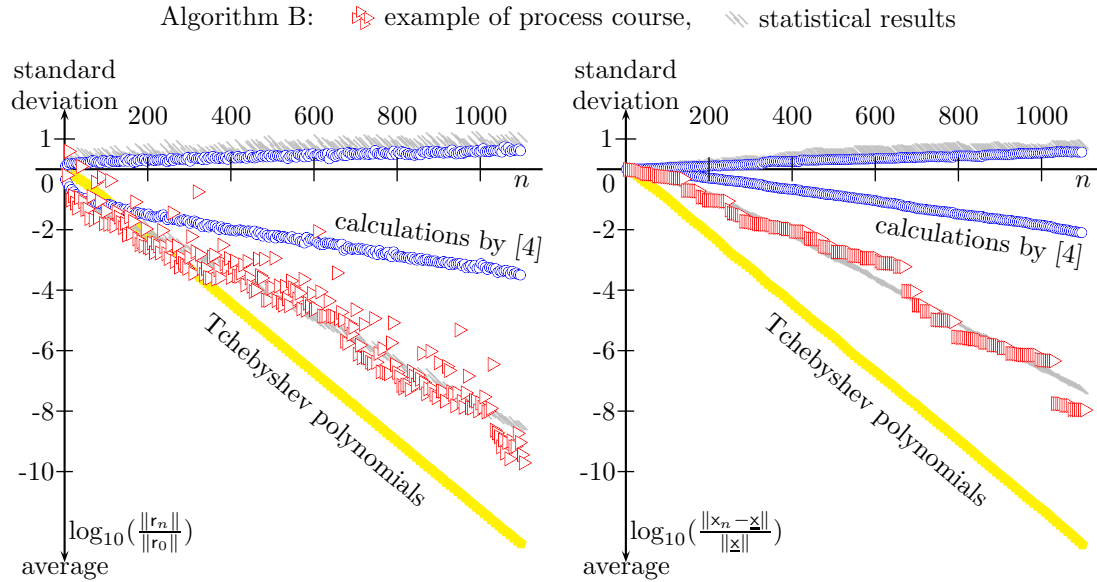


Figure 3: Results gained by the Algorithm B and their comparison with other methods

the Chebyshev polynomials method and for the random relaxations [4] are adjoint. The convergence of the iterations x_j falls behind the convergence of the residuals for both the random algorithms. The calculation is significantly moderate in comparison with the algorithm A, so the difference between the values $\|r_n\|$ and $\|r_n\|^*$ is rather small and we can treat the simple values $\|r_n\|$ therefore.

We pursued the dependence of the efficiency of the random algorithms on the problem condition number $\kappa(A)$. The results were treated at the moment, when the Tchebyshev polynomials method achieved the residual $\|r_n\| \leq 10^{-11}\|r_0\|$. As follows from the fig. 4, the efficiency of the studied random processes decreases with increasing condition number $\kappa(A)$.

The Algorithm B may be generalized as follows: We call the number $T \geq 1$ *period of exact step length* and the calculation is guided by

Algorithm C: The Algorithm A, where the period of exact step length $T > 1$ is implemented and the step 2 is replaced by the step

$$2C. l_j = \begin{cases} \hat{l}_j = \frac{\langle r_{j-1} | A r_{j-1} \rangle}{\|r_{j-1}\|^2} , & \text{if } j = \lfloor nT \rfloor - 1 \text{ for some } n \in \mathcal{N} \\ \text{realization of the random quantity } L & \text{otherwise ;} \end{cases}$$

$\lfloor x \rfloor$ denotes the integer part of x here.

The algorithm with $T = 1$ is the exact step length method, $T = 2$ gives the algorithm B, $T \rightarrow \infty$ creates the totally random proces using the algorithm A.

The algorithm C was tested for various values $T \in \langle 2, 10 \rangle$ by two different condition numbers $\kappa(A)$ of the problem. The step number was adjusted to the accuracy

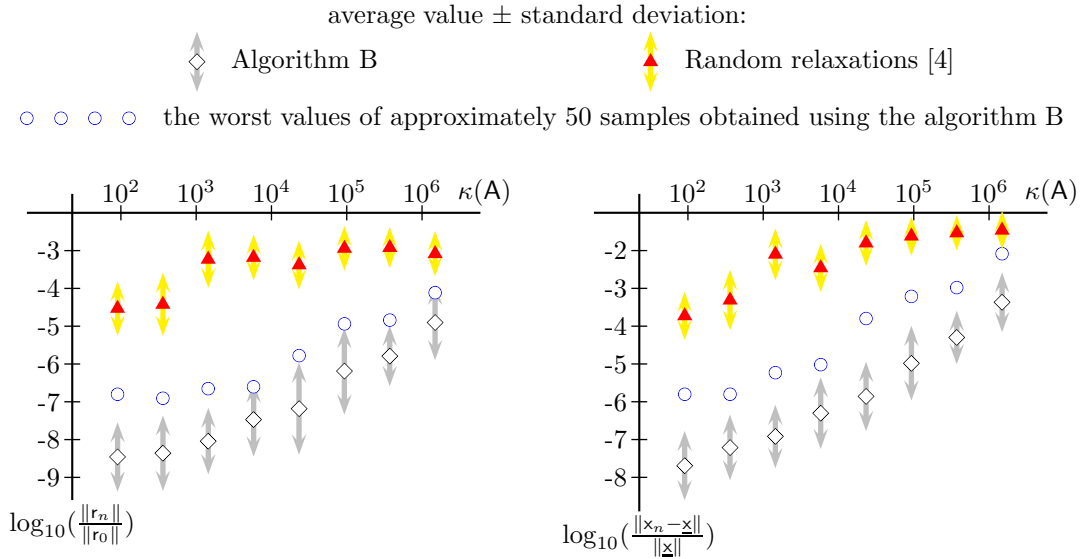


Figure 4: Efficiency of the random algorithms by various condition numbers $\kappa(\mathbf{A})$.

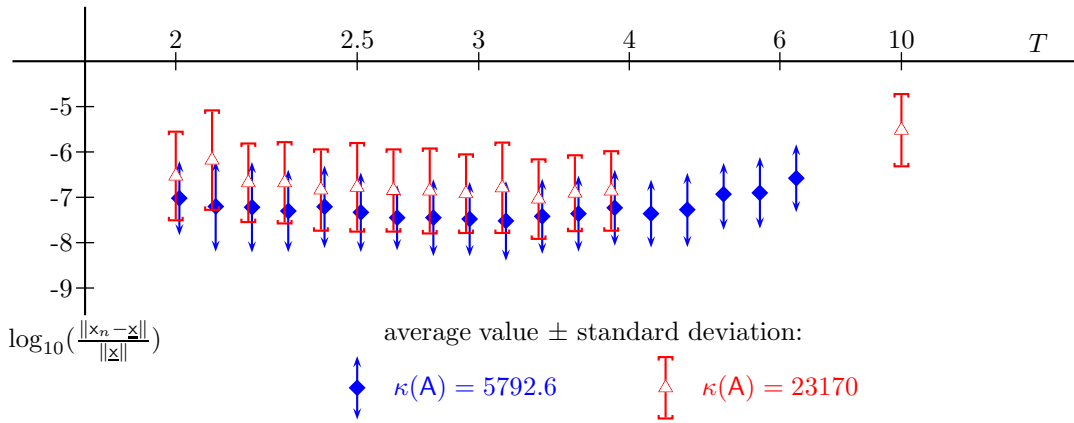


Figure 5: Results obtained using algorithm C with various exact step length periods.

$\|r_n\| \leq 10^{-12}\|r_0\|$ achievable by the Tchebyshev polynomials method. The results are displayed on fig. 5 and the optimal period of exact step length seems to be located somewhere between $T = 3$ and $T = 4$.

2.3 Change of the step lengths order

The proposed method is based on the relations (6) and (7). The multiplied matrices on the right-hand side of the equation (7) comutate, so there is valid

$$r_n = (\mathbf{I} - \gamma_n \mathbf{A})(\mathbf{I} - \gamma_{n-1} \mathbf{A}) r_{n-2} = (\mathbf{I} - \gamma_{n-1} \mathbf{A})(\mathbf{I} - \gamma_n \mathbf{A}) r_{n-2}$$

for any $n > 1$. The alternating algorithm B gets by n even

$$r_{2k} = \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}}{l_{2k}} \right) (\mathbf{I} - \hat{\gamma}_{2k-1} \mathbf{A}) r_{2k-2} = (\mathbf{I} - \hat{\gamma}_{2k-1} \mathbf{A}) \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}}{l_{2k}} \right) r_{2k-2},$$

so this form of the algorithm B gives the rule for the step length expression

$$\gamma_{2k} = \hat{\gamma}_{2k-1}, \quad \gamma_{2k-1} = \frac{1}{l_{2k}}, \quad (9)$$

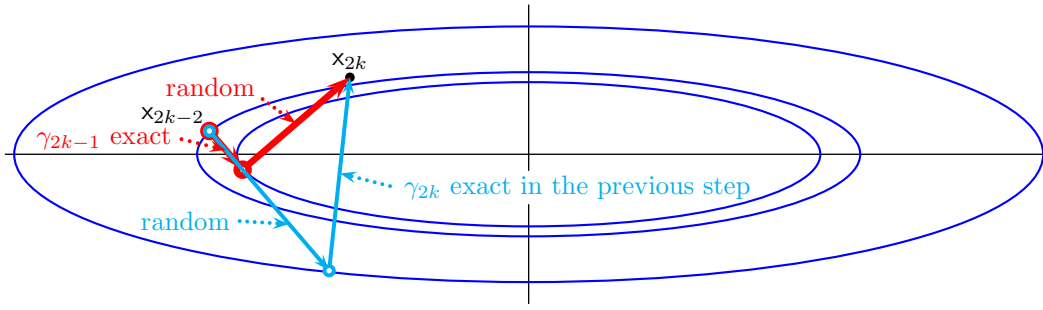


Figure 6: Interchange of step length parameters in algorithm B.

the use of which does not affect the final result, as illustrated on fig. 6.

We can compare the instruction (9) with the general Barzilai-Borwein's rule (4). The even step length parameters are computed identically, the odd step length parameters differently. In this context, we can interpret the Barzilai-Borwein algorithm to be the algorithm B with interchanged values of the even and odd step length parameters, where the pseudorandom parameter l_{2k} is chosen as

$$l_{2k} = \frac{1}{\hat{\gamma}_{2k-2}} = \frac{\langle r_{2k-3} | A r_{2k-3} \rangle}{\|r_{2k-3}\|^2} \in \langle \lambda, \Lambda \rangle .$$

The computation of the value l_{2k} uses the state occurring two steps ago, so its relation to the actual state is weak and the parameter may be considered the random one.

The presented idea may be generalized for the retarded Barzilai-Borwein method suggested in [5]. The retard $M \in \mathcal{N}$ is given and the step length parameter

$$\gamma_j = \hat{\gamma}_{j-m_j} ,$$

where $m_j \leq \max(M, j)$; especially $m_j = M$ for $j \geq M$. This method may be interpreted to be a realization of the algorithm C with the period of exact step length $T = M + 1$, where the cyclic permutation of $M + 1$ consecutive steps is applied regularly.

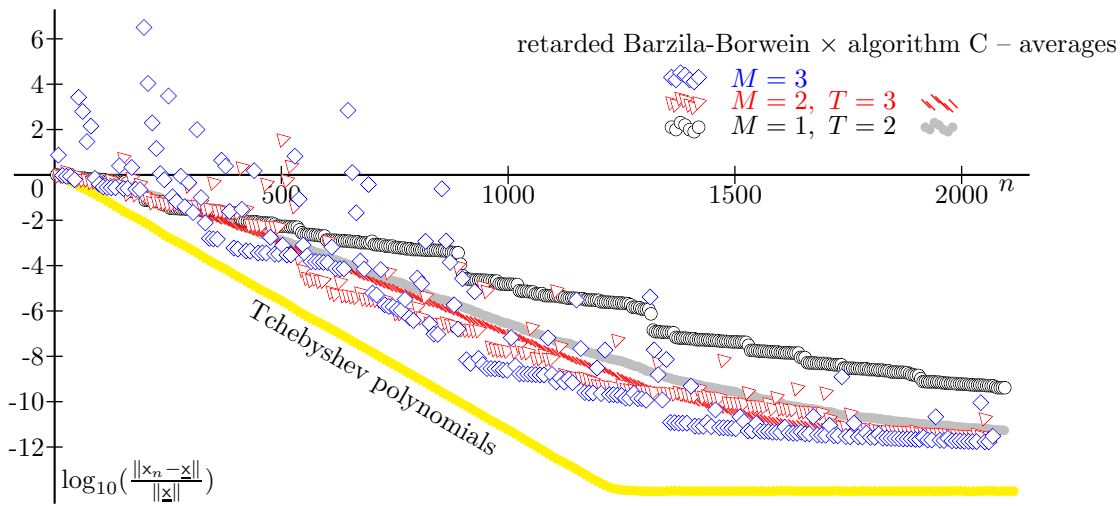


Figure 7: Comparison of the results gained by algorithm C and the generalized Barzilai-Borwein method by $\kappa(A) = 5792.6$

The results produced by the generalized Barzilai-Borwein method were compared with the results gained using the algorithm C; the results are displayed on fig. 7. The results obtained using the algorithm C are better than the retarded Barzilai-Borwein method results by $T = 2$ and in the final phases by $T = 3$. By $T = 4$ the algorithm C behaves similarly to $T = 3$ and the results are inferior relative to the ones of the adjoint retarded Barzilai-Borwein method with $M = 3$. The interpretation of this effect may be such that the appropriately retarded exact step lengths represent a generator of pseudorandom numbers with very favourable distribution.

3 Conclusions

The use of the random step length gives satisfactory results, mainly by the application of the algorithm C. The retarded Barzilai-Borwein method can give still better results, but – probably – the proposed uniform distribution of the random parameters l_j is not the best one. Indeed, the example on fig. 8 shows the capacities of the

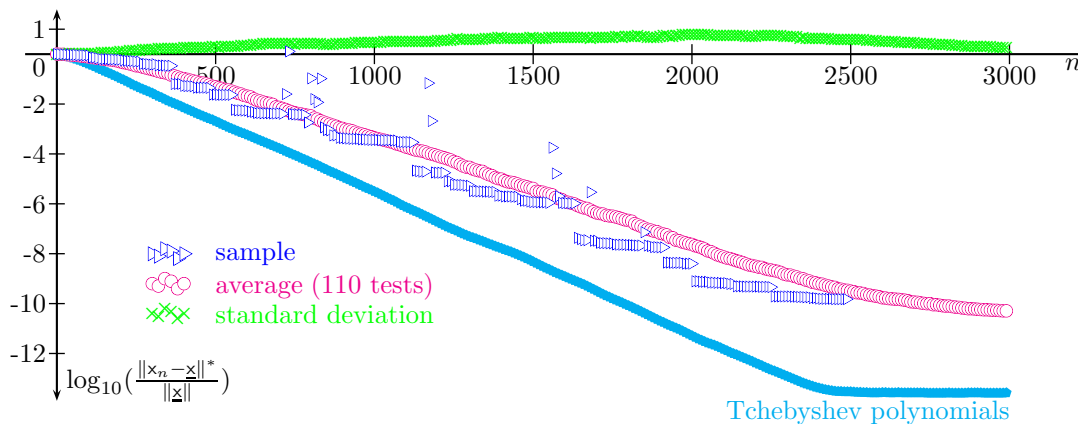


Figure 8: Solution for $\kappa(A) = 23170$ using algorithm C, improved distribution of l_j , $T = 10$

method, if another distribution of the inverse step length parameter l_j is applied. Generally, the suggested idea offers many possibilities for its use in various forms.

References:

- [1] Cauchy, A.: *Méthode générale pour la résolution des systèmes d'équations simultanées*, Comptes Rendus Hebd. Séances Acad. Sci., Paris, vol. 25, pp. 536–538, 1847.
- [2] Akaike, H.: *On a successive transformation of probability distribution and its application to the analysis of the optimum gradient method*, Ann. Inst. Statist. Math. Tokyo, vol. 11, pp. 1 – 16, 1959.
- [3] Barzilai, J., Borwein, J. M.: *Two-point step size gradient methods*, IMA Journal of Numerical Analysis, vol. 8, pp. 141 – 148, 1988.
- [4] Raydan, M., Svaiter, B. F.: *Relaxed steepest descent and Cauchy-Barzilai-Borwein method*, Computational Optimization and Applications, vol. 21, pp. 155 – 167, 2002.
- [5] Friedlander, A., Martínez, J. M., Molina, N., Raydan, M.: *Gradient method with retards and generalizations*, SIAM J. Numer. Anal., vol. 36 (1999), pp. 275 – 289.

USE OF THE IBM SPSS STATISTICS FOR ANALYSIS OF THE DATA - EXAMPLE

Sabina Kołodziej¹⁾, Witold Biały²⁾

¹⁾ Kozminski University
Jagiellonska str. 57/59, 03-301 Warsaw

Email: skolodziej@alk.edu.pl

²⁾ Silesian University of Technology
Roosevelt str. 26-28, 41-800 Zabrze

Email: wbialy@polsl.pl

Abstract: IBM SPSS Statistics is a program used for the analysis of scientific data, as well as business data. It contains a wide range of statistical tests that can be used for both parametric and non-parametric analysis, including the ability to display the results in graphical form. Article shows an exemplary application of this program for the analysis of data obtained during the research.

Introduction

Conducting scientific research is connected with the necessity to analyze obtained data. This analysis should allow to check its compliance with the assumptions associated with the selected statistical test as well as to investigate the in-depth relationship between the variables analyzed in the study (Andrassyova et al., 2012). One of the tools designed to achieve these goals is the IBM SPSS Statistics (Kremelberg, 2011).

Methodology

The analysis is based on data collected in the Polish General Social Survey (PGSS), conducted in 2008. The survey is an ongoing research program of the Robert B. Zajonc Institute for Social Studies University of Warsaw, funded by the National Science Center (formerly the Ministry of Science and Higher Education). PGSS issues involves among others: individual attitudes, cherished values, social orientation and behavior, as well as the measurement of socio – demographic, professional, educational and economic diversity of representative groups and social strata in Poland. The integrated data set of PGSS between the years 1992 and 2008 includes 16 234 respondents and nearly 1 640 variables (Cichomski et al., 2009a and b).

In the presented analysis the examined issues were focused on respondents' satisfaction with their financial situation and their relationship to communism as a political system, as well as subjectively perceived responsibilities of government to the citizens.

Descriptive statistics

The following graph (Fig. 1) is a screen from a Polish version of IBM SPSS Statistics for selection of variables for which descriptive statistics are calculated. The next graph (Fig. 2) shows the screen of the report and an example of the table of descriptive statistics on the size of the place of residence (1), and age (2) of the respondents.

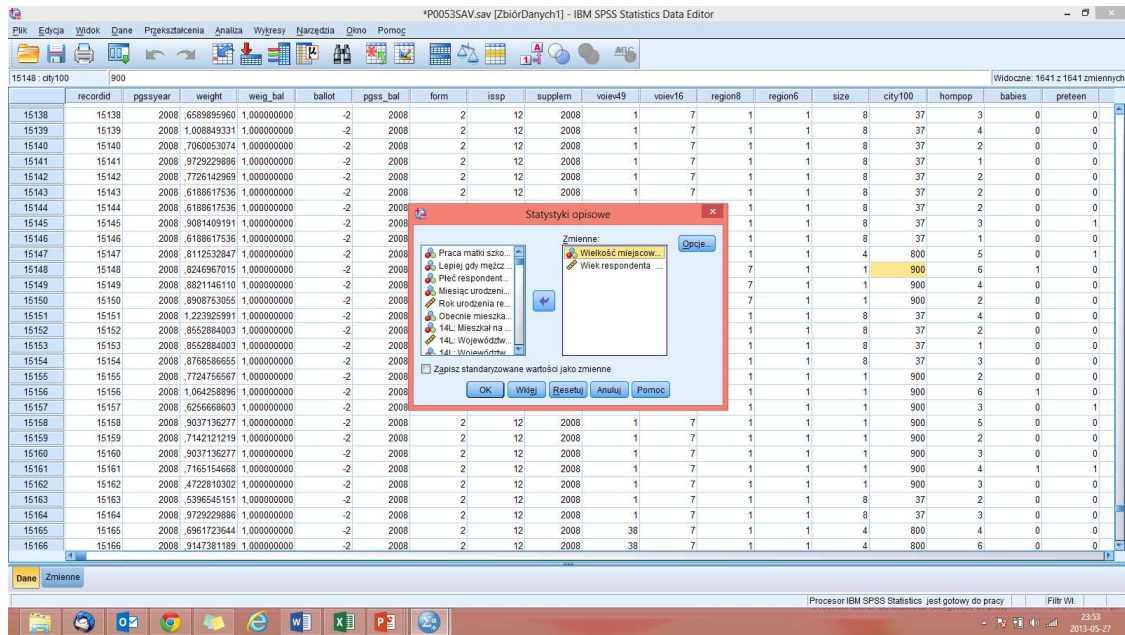


Fig 1. IBM SPSS Statistics – selection of variables

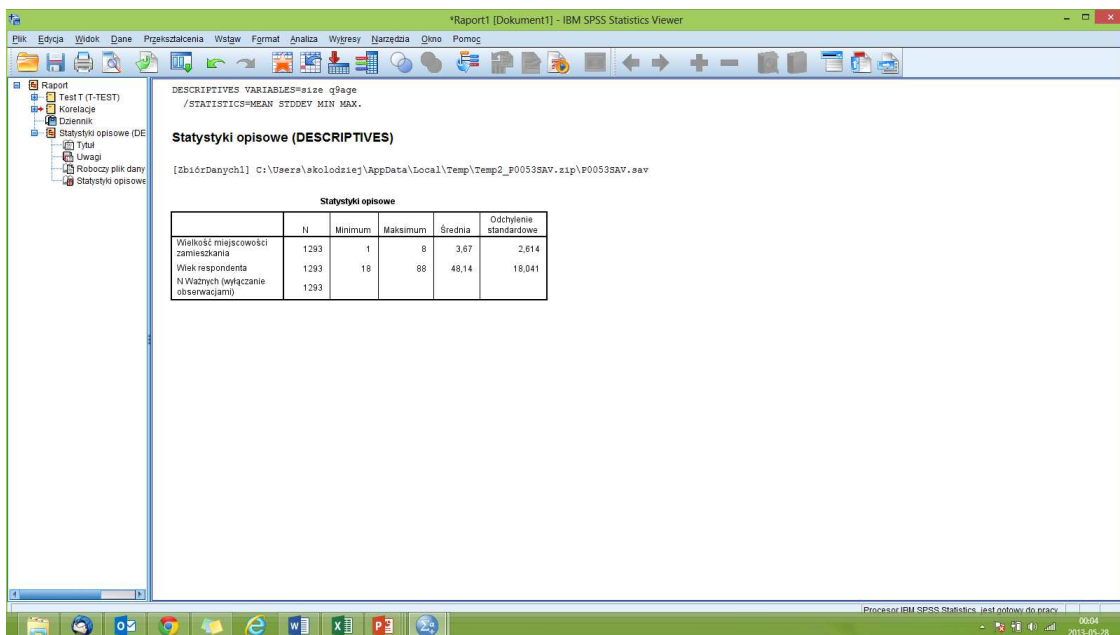


Fig. 2. IBM SPSS Statistics – descriptive statistics report

Table 1. IBM SPSS Statistics – descriptive statistics

Descriptives					
	N	Minimum	Maximum	Mean	Standard deviation
Size of place of residence	1293	1	8	3,67	2,614
Respondent's age	1293	18	88	48,14	18,041
N valid	1293				

As it can be seen on the above table (Table 1), the research was conducted on 1293 respondents whose medium age was 48,14 years.

R- Pearson correlation

R- Pearson correlation coefficient is used to describe the relationship between two random variables. Below are the results of the correlation analysis for the following variables: satisfaction with respondents' financial situation and their opinions about communism as a political system (Table 2).

Table 2. IBM SPSS Statistics – correlation

Correlations			
		Satisfaction with their financial status	Opinion about communism as a political system
Satisfaction with their financial status	Pearson's correlation	1	,141**
	Significance (two-sided)		,000
	N	1291	1291
Opinion about communism as a political system	Pearson's correlation	,141**	1
	Significance (two-sided)	,000	
	N	1291	1293

** . Correlation is significant at the level of 0.01 (two-sided).

Obtained correlation coefficient indicates a statistically significant positive relationship between satisfaction with respondents' financial situation and opinion about communism as a political system. Subjects who assess their financial situation positively expressed also more positive opinions about the previous political system of our country.

Study of differences between groups

One of the most frequently verified hypothesis in social science concerns the significance of differences between two independent (or sometimes dependent, such as

using a repeated measures) groups. SPSS Statistics have a number of tests that can be used for such analysis, including the most popular – Student's t-test. The following table (Table 3) summarizes the results of calculations of the significance of differences between women and men in terms of their views on the responsibilities of government to the citizens.

Table 3. IBM SPSS Statistics – Student's t-test for independent groups

		Test for independent samples				
		T-test equality of means				
		t	df	Significance (two-sided)	Mean difference	Standard error
Ensure job for all citizens	Assumes equality of variance	2,263	1291	,024	,132	,058
	Do not assume equality of variance	2,258	1267,787	,024	,132	,058
Control of prices	Assumes equality of variance	-,468	1291	,640	-,041	,088
	Do not assume equality of variance	-,471	1283,635	,638	-,041	,088
Ensure health care	Assumes equality of variance	,266	1291	,790	,011	,041
	Do not assume equality of variance	,267	1289,378	,790	,011	,041
Improve industry development	Assumes equality of variance	-1,759	1291	,079	-,151	,085
	Do not assume equality of variance	-1,773	1266,807	,076	-,151	,086
Ensure life standard for the unemployment	Assumes equality of variance	-,025	1290	,980	-,002	,097
	Do not assume equality of variance	-,025	1289,790	,980	-,002	,096
Reduce income differences	Assumes equality of variance	,848	1291	,397	,064	,076
	Do not assume equality of variance	,849	1289,519	,396	,064	,076
Provide home for the poor	Assumes equality of variance	,641	1290	,521	,054	,083
	Do not assume equality of variance	,640	1266,490	,522	,054	,084
Introduce strict law to protect the environment	Assumes equality of variance	-2,442	1289	,015	-,199	,081
	Do not assume equality of variance	-2,463	1252,634	,014	-,199	,081

According to our results, these two groups differ in case of the first and the last studied variables: the opinion that government should ensure employment to all citizens is more intense among men in comparison to women. Women on the other hand more than men believe that government should introduce strict law to protect the environment.

Summary

Using the IBM SPSS Statistics allowed the analysis of the structure and relationships between the variables collected in the Polish General Social Survey. According to the analysis of the relationship between variables, satisfaction with respondents' own financial situation is positively correlated with a better opinion about the previous political system in Poland. The test of significance of differences between men and women showed that Poles, regardless of gender, formulate similar expectations according to the government (for men significantly more important than for women was the issue to ensure all work).

References

1. Andrassyova Z. et. al. Improving quality of statistical process control by dealing with non-normal data in automotive industry. *Management Systems in Production Engineering*, 2012, 3(7), 26-30.
2. Cichomski B. (Programme Manager), Jerzyński T., Zieliński M. Polish General Social Survey: Computer cumulative data set 1992-2008. The Robert B. Zajonc Institute for Social Studies University of Warsaw, Warsaw, January 2009a.
3. Cichomski B. (Programme Manager), Jerzyński T., Zieliński M. Polish General Social Survey: Computer cumulative data set 1992-2008. The Robert B. Zajonc Institute for Social Studies University of Warsaw, Warsaw, January 2009b.
4. Kremelberg D. *Practical Statistics: A Quick and Easy Guide to IBM SPSS Statistics, STATA, and Other Statistical Software*. SAGE Publications, 2011.

SAFETY HAZARD EVALUATION FOR PEOPLE EMPLOYED AS MINERS IN THE AREA OF RECONSTRUCTION OF HEADING 4a, BED NO. 620 AT THE “JAN” COALMINE

Zygmunt Korban

**Katedra Zarządzania i Inżynierii Bezpieczeństwa, Wydział Górnictwa
i Geologii, Politechnika Śląska ul. Akademicka 2, 42 – 100 Gliwice, Polska
E-mail: zygmunt.korban@polsl.pl**

Abstract: The market competition and aspiration to obtain as good economic results as possible make the employers treat the OHS issues equally with production tasks. Safe and healthy working conditions and work comfort become more and more often the elements which create the company image and translate into notable financial results. Based on the example of workplace of miner employed at the reconstruction of dog heading, the author analyses the effect of engineering changes (for improvement in productivity) on the values of selected material working environment parameters and the level of physical load of the worker's body. In calculations, the author uses the comparative qualitative method, which allows the hazard evaluation coefficient to be calculated for a facility described by a k -element set of opposite features (the so-called hazard identifiers).

The comparative qualitative method – the crux of the method and the algorithm of proceeding

The comparative qualitative method, which is the example of expert methods, allows concluding about hazard conditions at any facility based on the evaluation of the so-called hazard identifiers, i.e. values of features, effects or processes that describe the possibility of the occurrence of hazard condition at a specific facility and their changes over time [1, 2]. This evaluation is made by the group of people (experts) who know the specificity of the environment the facility exists (operates) in, using the three-level grading scale, technical and organisational indicator Z_{ij} , which defines the relationship between the duration of hazard (exposure) and the time for which the crew stays at the workstation during the work shift, and hazard ranks g_{ij} , which differentiate the

importance assigned to the hazard. The algorithm of proceeding in the comparative qualitative method is following:

- Stage 1:** Selection of facility for analysis, establishment of the list of identifiers subject to evaluation and group of experts to make the evaluation.
- Stage 2:** Qualitative quantification of hazards or their identifiers in accordance with the following rule: $Y_{ij} = 0.0$ if evaluated as "correct", $Y_{ij} = 0.5$ if evaluated as "conditional", $Y_{ij} = 1.0$ if evaluated as "incorrect", where: $i=1, 2, \dots, k$ - hazard feature (identifier) no., $j = 1, 2, \dots, n$ -expert no.
- Stage 3:** Determination of technical and organisational indicator Z_{ij} in accordance with the following rule: $Z_{ij} = 0.5$ if value of the above-mentioned ratio does not exceed 0.5, $Z_{ij} = 0.75$ if value of the above-mentioned ratio $\in (0,5; 0,75>$, $Z_{ij} = 1.0$ if value of the above-mentioned ratio $\in (0,75; 1,0>$.
- Stage 4:** Determination of hazard rank (importance) g_{ij} in accordance with the following rule: $g_{ij} = 1.0$ - low rank, $g_{ij} = 1.5$ - average rank, $g_{ij} = 2.0$ - high rank.
- Stage 5:** Calculation of arithmetic means \bar{Y}_i , \bar{Z}_i and \bar{g}_i for individual hazards or their identifiers.
- Stage 6:** Calculation of products of average grades and technical and organisational indicators $\bar{X}_i = \bar{Y}_i \bar{Z}_i$ as well as sum of average ranks $m = \sum_{i=1}^k \bar{g}_i$
- Stage 7:** Determination of final qualitative assessment indicator for facility $W_z = \left\{ \prod_{i=1}^k (1 - \bar{X}_i)^{\bar{g}_i} \right\}^{\frac{1}{m}}$
- Stage 8:** Interpretation of final results and drawing up conclusions (corrective actions).

Example of application of comparative qualitative method for evaluation of hazard at the underground workplace

The subject of evaluation was the miner's workplace in the area of reconstruction and dinting at head 4a, bed no. 620 of the "Jan" coalmine. In spite of the use of closed timbering ŁPZ14/V29/4/A in this heading, there was floor uplift. Initially, the works were conducted using the explosives (the run-of-mine coal was loaded manually), however due to unsatisfactory work progress (0.8 m/shift), the technology was changed and the mucker ŁBT-1200-EH was used. The evaluation made by the group of 15 experts ($n=15$) included 9 identifiers ($k=9$) before the engineering changes were made and 10 identifiers ($k=10$) after the engineering changes were made. The identifiers are summarised in Tab. 1.

Summary of identifiers subject to evaluation

Table 1.

<i>i</i>	
1	energy expenditure [kJ/shift]
2	total inhalable dust concentration [mg/m ³] at SiO ₂ content = 6.0 %
3	respirable dust concentration [mg/m ³] at SiO ₂ content = 6.0 %
4	illumination
5	luminance uniformity
6	dry air temperature T_s [° C]
7	air cooling intensity K_w [mcal/cm ² s]
8	noise exposure level for 8 h $L_{Ex, 8h}$ [dB]
9	$a_{ws, eq, 8h}$ for local vibrations [m/s ²] for direction components X, Y, Z
10	$a_{ws, eq, 8h}$ for general vibrations [m/s ²] for direction components X, Y, Z (predominating value) – only in case of works conducted with use of mucker ŁBT-1200-EH

The results of control measurements for the workplace of miner employed at the reconstruction and dinting in heading 4a, bed no. 620 of the “Jan” coalmine for manual loading of run-of-mine coal is presented in Tab. 2.

Values of identifiers for the workplace of miner employed at the reconstruction and dinting in heading 4a, bed no. 620 of the “Jan” coalmine (manual loading of run-of-mine coal)

Table 2.

	<i>j=1</i>	<i>j=2</i>	<i>j=3</i>	<i>j=4</i>	<i>j=5</i>	<i>j=6</i>	<i>j=7</i>	<i>j=8</i>	<i>j=9</i>	<i>j=10</i>	<i>j=11</i>	<i>j=12</i>	<i>j=13</i>	<i>j=14</i>	<i>j=15</i>
<i>i=1</i>	7505	7410	6870	7456	7525	6970	7467	6990	7525	6850	6925	7456	7505	7467	7105
<i>i=2</i>	2.4	2.2	2.8	2.2	2.0	2.6	2.4	2.4	2.2	2.5	2.4	2.2	2.2	2.2	2.3
<i>i=3</i>	0.6	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.6	0.5	0.5	0.6	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
<i>i=4</i>	8.0	8.0	8.0	8.0	9.0	8.0	9.0	10.0	9.0	9.0	8.0	9.0	10.0	9.0	9.0
<i>i=5</i>	0.5	0.5	0.5	0.5	0.4	0.4	0.5	0.4	0.5	0.5	0.4	0.4	0.5	0.5	0.6
<i>i=6</i>	24.5	23.9	24.1	24.5	24.4	24.3	24.5	23.9	24.2	24.5	23.7	23.8	24.5	23.7	24.5
<i>i=7</i>	14.1	14.6	14.4	14.1	14.1	14.2	14.1	14.6	14.4	14.1	14.7	14.7	14.1	14.7	14.1
<i>i=8</i>	84.7	84.4	85.7	84.3	84.6	85.4	84.6	85.3	83.9	85.6	85.2	83.8	84.3	84.6	85.0
<i>i=9</i>	0.59	0.51	0.51	0.52	0.48	0.55	0.61	0.51	0.52	0.71	0.51	0.58	0.58	0.51	0.55

The values of Y_{ij} , Z_{ij} and g_{ij} are presented in Tab. 3-5.

Evaluation values of identifiers for the workplace of miner employed at the reconstruction and dinting in heading 4a, bed no. 620 of the “Jan” coalmine (manual loading of run-of-mine coal)

Table 3.

	<i>j=1</i>	<i>j=2</i>	<i>j=3</i>	<i>j=4</i>	<i>j=5</i>	<i>j=6</i>	<i>j=7</i>	<i>j=8</i>	<i>j=9</i>	<i>j=10</i>	<i>j=11</i>	<i>j=12</i>	<i>j=13</i>	<i>j=14</i>	<i>j=15</i>
<i>i=1</i>	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
<i>i=2</i>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
<i>i=3</i>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
<i>i=4</i>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
<i>i=5</i>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
<i>i=6</i>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
<i>i=7</i>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
<i>i=8</i>	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.5
<i>i=9</i>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Values of technical and organisational indicator of identifiers for the workplace of miner employed at the reconstruction and dinting in heading 4a, bed no. 620 of the “Jan” coalmine (manual loading of run-of-mine coal)

Table 4.

	<i>j=1</i>	<i>j=2</i>	<i>j=3</i>	<i>j=4</i>	<i>j=5</i>	<i>j=6</i>	<i>j=7</i>	<i>j=8</i>	<i>j=9</i>	<i>j=10</i>	<i>j=11</i>	<i>j=12</i>	<i>j=13</i>	<i>j=14</i>	<i>j=15</i>
<i>i=1</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
<i>i=2</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
<i>i=3</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
<i>i=4</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
<i>i=5</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
<i>i=6</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
<i>i=7</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
<i>i=8</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
<i>i=9</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Ranks of identifiers for the workplace of miner employed at the reconstruction and dinting in heading 4a, bed no. 620 of the “Jan” coalmine (manual loading of run-of-mine coal)

Table 5.

	<i>j=1</i>	<i>j=2</i>	<i>j=3</i>	<i>j=4</i>	<i>j=5</i>	<i>j=6</i>	<i>j=7</i>	<i>j=8</i>	<i>j=9</i>	<i>j=10</i>	<i>j=11</i>	<i>j=12</i>	<i>j=13</i>	<i>j=14</i>	<i>j=15</i>
<i>i=1</i>	2.0	2.0	1.0	2.0	2.0	1.0	2.0	1.5	2.0	1.5	1.5	2.0	2.0	1.5	1.5
<i>i=2</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
<i>i=3</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
<i>i=4</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
<i>i=5</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
<i>i=6</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
<i>i=7</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
<i>i=8</i>	1.0	1.5	2.0	1.5	1.5	1.5	1.5	2.0	1.0	2.0	2.0	1.0	1.5	2.0	1.5
<i>i=9</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Thus, in case of reconstruction and dinting with use of explosives and manual loading the hazard evaluation indicator for the workplace of miner was

$$W_z = \left\{ \prod_{i=1}^9 \left(1 - \overline{X}_i \right)^{-1} \right\}^{\frac{1}{m}} = \left\{ (1 - 0.5)^{1.7} \cdot (1 - 0.3667)^{1.5667} \right\}^{0.0974} \approx 0.83$$

which corresponds to the acceptable hazard condition ($W_z \in < 0.8; 1.0 \geq$).

Values of identifiers, Y_{ij} and g_{ij} for the said workplace after having changed the work technology are presented in Tab. 6-8.

Values of identifiers for the workplace of miner employed at the reconstruction and dinting in heading 4a, bed no. 620 of the “Jan” coalmine – works conducted using the mucker ŁBT-1200-EH

Table 6.

	<i>j=1</i>	<i>j=2</i>	<i>j=3</i>	<i>j=4</i>	<i>j=5</i>	<i>j=6</i>	<i>j=7</i>	<i>j=8</i>	<i>j=9</i>	<i>j=10</i>	<i>j=11</i>	<i>j=12</i>	<i>j=13</i>	<i>j=14</i>	<i>j=15</i>
<i>i=1</i>	6283	6250	6287	6350	7825	6200	6390	6550	6525	7825	8190	6210	6595	6220	6105
<i>i=2</i>	2.5	3.2	2.9	2.4	2.2	2.9	2.9	3.4	3.2	2.5	2.4	2.9	3.1	2.7	3.0
<i>i=3</i>	0.6	0.7	0.4	0.6	0.5	0.4	0.4	0.8	0.5	0.6	0.5	0.4	0.5	0.4	0.6
<i>i=4</i>	9.0	9.0	10.0	9.0	10.0	9.0	9.0	10.0	9.0	7.0	9.0	9.0	8.0	10.0	8.0
<i>i=5</i>	0.5	0.5	0.5	0.6	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.4	0.6	0.5
<i>i=6</i>	24.9	24.2	24.8	24.7	24.4	24.0	24.8	23.2	24.5	24.6	23.8	23.9	23.9	23.9	23.8
<i>i=7</i>	14.2	14.2	14.3	14.5	14.1	14.1	13.8	13.6	13.5	13.5	13.7	13.8	13.7	14.5	14.3
<i>i=8</i>	85.6	85.4	86.3	86.4	85.6	85.4	84.2	85.0	85.0	85.2	85.3	84.9	85.3	85.8	86.1
<i>i=9</i>	0.55	0.54	0.62	0.58	0.52	0.57	0.51	0.61	0.58	0.67	0.61	0.61	0.63	0.62	0.65
<i>i=10</i>	0.43	0.43	0.63	0.45	0.80	0.52	0.63	0.57	0.54	0.80	0.75	0.47	0.55	0.58	0.49

Evaluation values of identifiers for the workplace of miner employed at the reconstruction and dinting in heading 4a, bed no. 620 of the “Jan” coalmine (works conducted using the mucker ŁBT-1200-EH)

Table 7.

	<i>j=1</i>	<i>j=2</i>	<i>j=3</i>	<i>j=4</i>	<i>j=5</i>	<i>j=6</i>	<i>j=7</i>	<i>j=8</i>	<i>j=9</i>	<i>j=10</i>	<i>j=11</i>	<i>j=12</i>	<i>j=13</i>	<i>j=14</i>	<i>j=15</i>
<i>i=1</i>	0.0	0.0	0.0	0.5	0.5	0.0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.0	0.5	0.0	0.0
<i>i=2</i>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
<i>i=3</i>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
<i>i=4</i>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
<i>i=5</i>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
<i>i=6</i>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
<i>i=7</i>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
<i>i=8</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0	0.5	0.5	1.0	1.0	0.0	1.0	1.0	1.0
<i>i=9</i>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
<i>i=10</i>	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Ranks of identifiers for the workplace of miner employed at the reconstruction and dinting in heading 4a, bed no. 620 of the “Jan” coalmine (works conducted using the mucker ŁBT-1200-EH)

Table 8.

	<i>j=1</i>	<i>j=2</i>	<i>j=3</i>	<i>j=4</i>	<i>j=5</i>	<i>j=6</i>	<i>j=7</i>	<i>j=8</i>	<i>j=9</i>	<i>j=10</i>	<i>j=11</i>	<i>j=12</i>	<i>j=13</i>	<i>j=14</i>	<i>j=15</i>
<i>i=1</i>	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.5	2.0	1.0	1.0	1.0	1.0
<i>i=2</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
<i>i=3</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
<i>i=4</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
<i>i=5</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
<i>i=6</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
<i>i=7</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
<i>i=8</i>	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	1.0	2.0	2.0	2.0
<i>i=9</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	2.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
<i>i=10</i>	1.0	1.0	1.0	1.0	2.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

In case of technical and organisational indicator Z_{ij} values of all elements of the matrix are taking out 1,0.

In this case, the hazard evaluation indicator for the workplace of miner was 0,73.

Conclusion

The comparative qualitative method is one of the expert methods – the appointed group of people knowing the specificity of the analysed problem determines the compliance (or lack of compliance) of measured parameters (the so-called event identifiers) with safety requirements and then differentiates the importance of elements subject to evaluation (assigns weights/ranks to them).

In the example discussed in this article, changes in evaluation indicator Wz are the consequence of making the engineering changes – before making the above-mentioned changes the value of indicator was 0.83, while after they were made it was 0.73, which means that we deal with acceptable and allowable hazard condition, respectively. The

decrease in value of W_z is mainly connected with increase in noise level in the work environment the source of which is the mucker ŁBT-1200-EH – taking the average value of $L_{Ex, 8h}$ into consideration, it increased by 0.67 dB. At the same time, the changes made in the work technology resulted in significant reduction in physical load of the miner's body – while the value of energy expenditure with use of manual drills and manual loading was approx. 7260 kJ/shift (average value), then after the work was mechanised it was 6650 kJ/shift (average value).

The general vibrations occurring after having made changes in the work method are characterised by small vibration accelerations – the values of $a_{ws,eq,8h}$ are within the range allowed by standards (0.8 m/s^2).

Statements of chosen measures of dispersion of identifiers describing work-place of miner employed at the reconstruction and dinting in heading 4a, bed no. 620 of the “Jan” coalmine are presented in Tab. 9.

Chosen measures of dispersion of identifiers describing work-place of miner employed at the reconstruction and dinting in heading 4a, bed no. 620 of the “Jan” coalmine

Table 9

<i>i</i>	Minimum value		Maximal value		Standard deviation		Coefficient of variation	
	<i>manual muck loading</i>	<i>works carried out with mucker ŁBT-1200-EH</i>	<i>manual muck loading</i>	<i>works carried out with mucker ŁBT-1200-EH</i>	<i>manual muck loading</i>	<i>works carried out with mucker ŁBT-1200-EH</i>	<i>manual muck loading</i>	<i>works carried out with mucker ŁBT-1200-EH</i>
1	6850	6105	7525	8190	274.892	687.822	3.782	10.337
2	2	2.2	2.8	3.4	0.199	0.350	8.520	12.449
3	0.5	0.4	0.6	0.8	0.041	0.122	7.962	23.218
4	8	7	10	10	0.704	0.845	8.058	9.391
5	0.4	0.4	0.6	0.6	0.059	0.053	12.541	10.393
6	23.7	23.2	24.5	24.9	0.321	0.491	1.325	2.025
7	14.1	13.5	14.7	14.5	0.261	0.348	1.821	2.489
8	83.8	84.2	85.7	86.4	0.588	0.573	0.693	0.670
9	0.48	0.51	0.71	0.67	0.058	0.047	10.580	7.903
10	-	0.43	-	0.8	-	0.125	-	21.702

Reference

1. Krzemień S. – Teoretyczne podstawy określania miar stanu zagrożenia bezpieczeństwa w wyrobiskach górniczych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej nr 178. Gliwice 1992.
2. Praca zbiorowa pod red. Gierasimiuka J. – Bezpieczeństwo pracy i ergonomia. Zakład Ergonomii CIOP. Warszawa 1984.
3. Praca zbiorowa pod red. Koradeckiej D. – Bezpieczeństwo pracy i ergonomia. Centralny Instytut Ochrony Pracy. Warszawa 1997.

APPLICATION SIMULATED ANNEALING TO SOLVE THE TRAVELING SALESMAN PROBLEM

Stanisław Kowalik

Academy of Business

ul. Ciepłaka 1c, 41-300 Dąbrowa Górnicza, Polska

e-mail: skowalik@wsb.edu.pl

Abstract:

In this work, calculations were made to determine route salesman for 100 fictitious cities. The route was determined by simulated annealing algorithm. A modified version of the algorithm with remembering the best solution was used. Implementation of the calculation was made in the MATLAB.

1. Presentation of the traveling salesman problem

We have n cities that salesman has to visit. Distance (or travel costs or travel time) between each pair of cities are known. The goal is to find the shortest (or cheapest or fastest) road that connects all the cities beginning with and ending at a given point (the city) [2, 4]. Symmetric travelling salesman problem will be considered in this study. In this problem, for any of the cities A and B , the distance from A to B is the same as that from B to A . In asymmetric travelling salesman problem the distance may be different [1, 4].

Traveling Salesman Problem is often defined in the language of graph theory. The travelling salesman problem is the issue of optimization which consists in finding a minimum Hamiltonian cycle in a weighted complete graph. We define a set of cities as a full graph G , which has n vertices. We associate a weight of distance (or the cost of travel or, travel time) between the two cities from each edge of the graph. The problem boils down to determining the minimum Hamiltonian cycle in Graph G . Hamiltonian cycle is a cycle, which includes all the vertices of the graph G . Definition of the problem is simple, but it is difficult to solve. For a small number of cities we apply the algorithm relies on a complete review of all possible Hamiltonian cycles in G and

choosing the shortest. If the number of cities is a large browsing of all possible Hamiltonian cycles in a graph G is unrealistic. This leads to an exponential computational complexity($n!$). The practical application of this algorithm for more than a dozen cities is therefore impossible [3]. We have a $(n-1)!/2$ solutions to the traveling salesman problem with n cities. For the 20 towns is the number so high (more than 60 trillion) that the implementation of such an algorithm takes an incredibly long time (one thousand years). We are able to find a solution that is not the best (optimal), but it is not good enough and in addition it will be found within a reasonably short period of time. We can either use approximate algorithms [5].

2. Simulated annealing

Simulated annealing is a kind of heuristic algorithm that searches the space of alternative solutions to the problem for find the best solutions. Simulated annealing algorithm reminds course of action you annealing effect in metallurgy (including glass industry) [7].

Annealing (annealing) is a method of thermal processing consisting of heating the object of a metal or metal alloy to a predetermined temperature. Annealing (annealing) is a method of thermal processing consisting of heating the object of a metal or metal alloy to a predetermined temperature, keeping it at this temperature for a specified time, and then slow cooling [6, 8].

Annealing is performed to remove stress and heterogeneity, to obtain the desired fine structure of the material, and also to recrystallize. We can use different annealing temperatures and times, and different times and ways of cooling [8].

Description and explanation of such behavior of physical systems is realized using Boltzmann distribution: $P(E) = \exp(-E/kT)$, which determines the probability of the system held at a temperature T in a state with energy E (k is called. Boltzmann constant) [10].

Scheme simulated annealing algorithm for numerical calculations can be represented by the following steps [9]

1. determine initial solution s
2. determine initial temperature T
3. then repeat the calculation until the value of true by stop condition

for $i = 0$ to M

determine a random neighboring solutions $s' \in N(s)$

$\delta = f(s') - f(s)$

if $\delta < 0$ then $s = s'$

else

Random selection $x \in (0, 1)$

if $x < \exp(-\delta/kT)$ then $s = s'$

$T = \alpha(T)$

4. check the condition of detention, whether it is equal true

5. print (display) solution s

In this scheme, we have the following code:

s – current solution

$N(S)$ – set of neighboring solutions for solution s ,

δ – the cost difference of the new and the previous solution (path length difference salesman for the solution of the new and previous),

$f(s)$ – evaluation function for the solution (the cost function, length of the route

salesman for the previous one)
 T – current temperatura,
 $\alpha(T)$ – function of temperature fluctuations,
 M – numer of iterations.

An important difference between the primary iterative methods, a simulated annealing algorithm is the possibility of obtaining a worse solution. That choice is made with some probability. This allows simulated annealing algorithm may therefore found out the local minimum and continue to move towards an optimum solution. The temperature parameter is brought directly from a thermodynamic basis algorithm and has an impact on the probability of choosing a worse solution. Higher temperature means a higher probability of choosing a worse solution. The lower temperature makes the algorithm is more similar in operation to the typical iterative methods. This is reflected in another important aspect of simulated annealing algorithm, which is the slow cooling [9].

At the beginning of the algorithm the temperature is high, so that the algorithm can often change the configurations of solutions, often selecting worse solution. Temperature decreases with successive iterations of the algorithm and selected solutions are often better. the temperature is low enough at the end of the algorithm, the probability of choosing a worse solution is close to zero. The algorithm then behaves like a typical iterative algorithm and attempts to maximally improve the solution [9].

In addition to the algorithm in the scheme, is also often used the modified version with remembering the best solution. In a series of calculations is also used conditional statement if $f(s') < f(s_B)$ then $s_B = s'$ which stores the best solution, found since the beginning of the algorithm. The present study used this modification.

3. Program Description and calculations

The program uses a fictitious coordinates of a hundred cities. Each city is assigned number instead of the city name. This data is placed in an array of a hundred rows and three columns. Number of cities have been placed in the first column, and the coordinates x,y of the cities in the second and third. These data were as follows

1 3878 656	2 993 934	3 1250 1003	4 2622 1491	5 1291 536
6 832 245	7 2721 1441	8 751 820	9 1262 1820	10 2714 1687
11 3601 1324	12 1235 1932	13 128 859	14 1222 1939	15 3350 1520
16 251 1253	17 622 681	18 2581 1665	19 930 1711	20 47 862
21 281 1430	22 2569 938	23 182 25	24 447 355	25 2681 1819
26 1789 958	27 3404 1501	28 3518 1081	29 1262 59	30 1419 1731
31 3908 189	32 3802 173	33 3090 1531	34 2568 1972	35 459 1668
36 3877 601	37 1812 1709	38 302 1509	39 3481 823	40 3957 1741
41 1318 279	42 3450 1832	43 1617 1826	44 3368 1651	45 1389 1372
46 2539 240	47 3873 1321	48 940 963	49 3020 473	50 3853 919
51 380 818	52 2940 340	53 2521 137	54 2946 1618	55 2632 1483
56 2100 403	57 896 1847	58 2142 1811	59 2478 1187	60 2419 1012
61 2288 1807	62 2591 305	63 330 262	64 239 344	65 951 273
66 2988 789	67 2570 602	68 22 677	69 3700 1201	70 1112 1056
71 869 1563	72 2858 561	73 841 619	74 3897 105	75 2180 1622
76 1922 690	77 3817 902	78 380 1051	79 1180 99	80 2653 809
81 3417 141	82 614 1387	83 3115 887	84 930 1680	85 2599 1827
86 2588 1292	87 164 909	88 1431 136	89 745 1023	90 1622 1649
91 1787 1009	92 24 993	93 2957 1401	94 3638 45	95 3757 886
96 782 389	97 1721 1638	98 201 1814	99 3945 1561	100 1550 1202

The goal of the calculations was to find the shortest route connecting all these cities. The following input data have been entered for the computer program

- N = 100 – number of cities,
- M = 70000 – number of iterations,
- T = 1000 – initial temperature,
- Tmin = 0.01 – minimum temperature,
- Emin = 10^{50} – the minimum length of the route starting,
- $\alpha = 0.998$ – temperature correction factor to the successful modification,
- k = 1000 – Boltzmann's constant.

At the beginning of the program creates a random permutation of cities (cities order will be random, it is equivalent to a solution s). The program then determines the length of road that connects all the cities in the random order (this is equivalent to the energy E). Then we determine a random neighboring solution (s') by the previous correction. This correction is based on the fact that we randomly two integers p_1 and p_2 in the range [1, N]. Then we set the city present in positions p_1+1 to p_2 in reverse order. Cities with the rest remain unchanged. In this way, we obtain a new route (a new solution s').

We Check if the length of the new route is less than the minimum. If so, we remember a new route (solution s') and a shorter length we take as a minimum. We calculate ΔE the difference in length between the routes, that mean between new solution s', and the previous. We generate a random number (0, 1) and check if it is less than $\exp(-\Delta E/k*T)$. If so, we assign as a current solution s s'. It is a condition of accepting the new solution (take a new route). Then we reduce the temperature $T = T*\alpha$ and we repeat the calculation of M times.

The following figures show the selected route salesman at certain times of calculation. Figure 1 shows the route after 1000 iterations. The route length was then 148984. Figure 2 shows the route after 10000 iterations. The route length was then 29761.2. Figure 3 shows the route after 20000 iterations. The route length was then 22002.7. Figure 4 shows the route after 70000 iterations. The route length was then 20909.6.

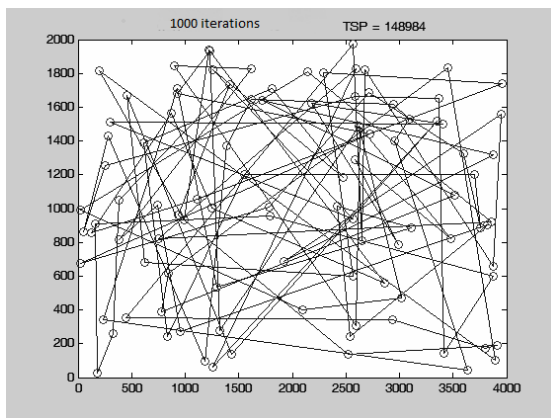


Fig. 1. Route after 1000 iterations

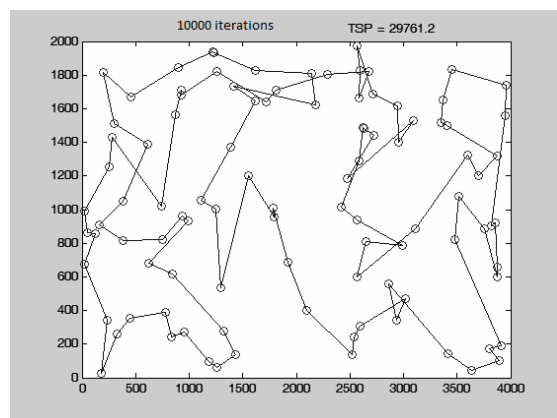


Fig. 2. Route after 10000 iterations

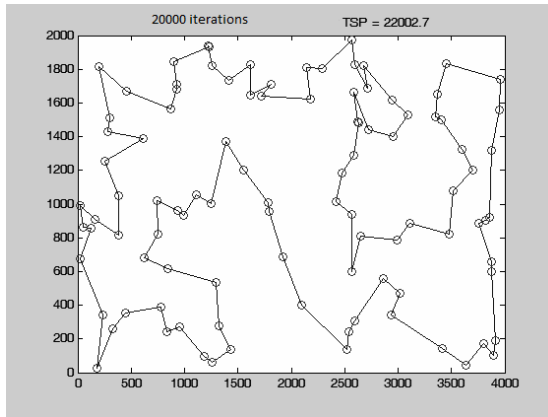


Fig. 3. Route after 20000 iterations

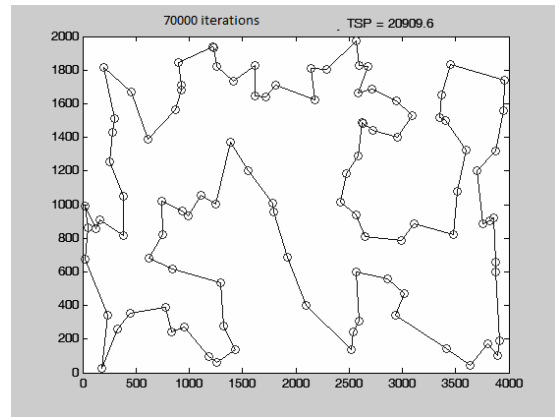


Fig. 4. Route after 70000 iterations

The following numbers of cities that the salesman has to visit a given (line) sequence as a final solution

24	96	6	65	79	29	88	41	5	73	17	8	89	48	2	70	3
45	100	91	26	76	56	53	46	62	67	72	49	52	81	94	32	74
31	36	1	50	77	95	69	47	99	40	42	44	15	27	11	28	39
83	66	80	22	60	59	86	4	55	7	93	33	54	10	18	25	85
34	61	58	75	37	97	90	43	30	9	12	14	57	19	84	71	82
35	98	38	21	16	78	51	87	13	92	20	68	64	23	63		

Length of the route to be traveled by the salesman is 20909.6. It can be assumed that this is the way of approximately optimal, because after 67000 iterations route was unchanged. Is the shortest route possible, that we not know. Computation time on the computer was about 90 seconds.

4. Summary

Traveling Salesman Problem is classified so-called. NP-complete. This means that the existing algorithms for solving this problem have exponential computational complexity (very unfavorable with an increase in the number of cities). Simulated annealing method estimates the optimal route, but we're not sure if it is minimal. We finish the calculations, if the iterations do not improve the solution i.e. the shorter path is no longer finding.

References

1. http://pl.wikipedia.org/wiki/Problem_komiwojazera
2. http://edu.i-lo.tarnow.pl/inf/utills/002_roz/ol027.php
3. <http://www.algorytm.org/algorytmy-grafowe/problem-komiwojazera.html>
4. <http://fcds.cs.put.poznan.pl/MyWeb/Praca/IO/komiwojazer.htm>
5. <http://tdb0.wordpress.com/2010/12/03/symulowane-wyżarzanie/>
6. <http://pl.wikipedia.org/wiki/Wyżarzanie>
7. http://pl.wikipedia.org/wiki/Symulowane_wyżarzanie
8. <http://portalwiedzy.onet.pl/36330,,,wyżarzanie,haslo.html>
9. <http://zsi.ii.us.edu.pl/~mboryczka/pliki/hsw.pps>
10. <http://www.staff.amu.edu.pl/~lipowski/java/komi/komiwojazer.html>

PŘÍSPĚVEK K VÝUCE DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

Břetislav Krček, Michaela Bobková

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TU Ostrava
17. listopadu 15, 708 33 Ostrava-Poruba

E-mail : bretislav.krcek@vsb.cz , michaela.tuzilova@vsb.cz

Abstrakt: Článek je zaměřen na výuku diferenciálních rovnic v základních kurzech matematiky na vysoké škole technického směru. V článku jsou uvedeny nejen některé význačné problémy této výuky, ale i náměty jak mnohé z nich řešit.

Abstract: *The contribution to the teaching of differential equations.* In the article we concentrate to the teaching of the differential equations in basic lessons of mathematics at the technical university. We present not only some typical problems of this topic teaching but we also try to suggest some ways how to solve these problems.

Úvod

Výuka diferenciálních rovnic v základních kurzech matematiky je spojena s mnoha problémy, které značně ovlivňují kvalitu této výuky a samozřejmě i její výsledky. Tento článek se proto zaměřuje na některé z těchto problémů a předkládá i návrhy jak je řešit. Předkládaný článek úzce souvisí s článkem [1], zaměřeným na výuku numerického řešení obyčejných diferenciálních rovnic na vysokých školách technického směru. V článku [1] se mj. rozebírají problémy spojené s touto výukou, z nichž většina se tu právě přenáší z výuky diferenciálních rovnic v základních kurzech matematiky nebo v základních kurzech přímo vzniká. Je tedy zřejmé, že řešení zmíněných problémů v základních kurzech matematiky umožní i zlepšení výuky v navazujících předmětech.

Problémy při výuce diferenciálních rovnic v základních kurzech matematiky

Mnoho studentů základních kurzů matematiky řadí diferenciální rovnice k opomíjeným partiím. Důvodů pro to je sice více, ale k nejvýznamnějším určitě patří bodový systém hodnocení (který se běžně používá). Diferenciální rovnice totiž obvykle tvoří asi jen 1/3 náplně kurzu, v němž jsou zařazeny. Při přípravě na zkoušku mohou tedy studenti diferenciální rovnice buď zcela vypustit, nebo se zaměřit jen na získání

bodů za některé mechanické znalosti při řešení příkladů. Uvedenou bodovou úvahu u mnoha studentů podpoří i následující skutečnosti:

- na rozdíl např. od derivací a integrálů jsou z pohledu studentů diferenciální rovnice zcela novou partií (s derivacemi a integrály se většinou poprvé setkávají už na střední škole),
- k hlubšímu pochopení diferenciálních rovnic je třeba jistá znalost analytické geometrie, značná část studentů si však postačující znalosti ze střední školy nepřináší (a v základních kurzech je nezíská),
- pro mnoho studentů je pak u diferenciálních rovnic stěžejním problémem syntéza znalostí z předchozích partií matematiky.

Bodový systém by se ve vlastní výuce matematiky dal ovlivnit jen částečně problematickým zavedením minimálního počtu bodů v jednotlivých partiích učiva, vhodným vedením výuky je však možno předcházet některým jiným problémům nebo je alespoň minimalizovat.

Náměty pro výuku

Výuka diferenciálních rovnic v základních kurzech matematiky je obvykle po zavedení nejdůležitějších základních pojmů orientována na rovnici 1. řádu $y' = f(x, y)$ a její speciální případy. Obvykle se začíná rovnicí separovanou, pak následují rovnice separovatelná, homogenní, atd., přičemž se buď zcela pomine speciální případ rovnice typu $y' = f(x)$, nebo je mu věnována jen nepatrná zmínka. Přitom právě rovnice tohoto typu by neměla být pro studenty ničím novým, bezprostředně totiž navazuje na integrální počet funkce jedné proměnné a na některé z těchto rovnic lze na vhodných obrázcích lehce přiblížit pojmy jako partikulární řešení, obecné řešení, směrový element a směrové pole, velmi názorné tu může být i řešení Cauchyovy úlohy.

Již při zavádění základních pojmů (řád diferenciální rovnice, řešení diferenciální rovnice, Cauchyova úloha, ...), tj. ještě před tím, než se výuka zaměří na rovnice 1. řádu, by bylo možno využít *volný pád*, známý z fyziky již ze základní školy. Příslušnou diferenciální rovnici a hlavně pak matematický i fyzikální zápis jejího řešení

$$y'' = g, \quad y' = g \cdot t + C_1, \quad y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + C_1 \cdot t + C_2,$$

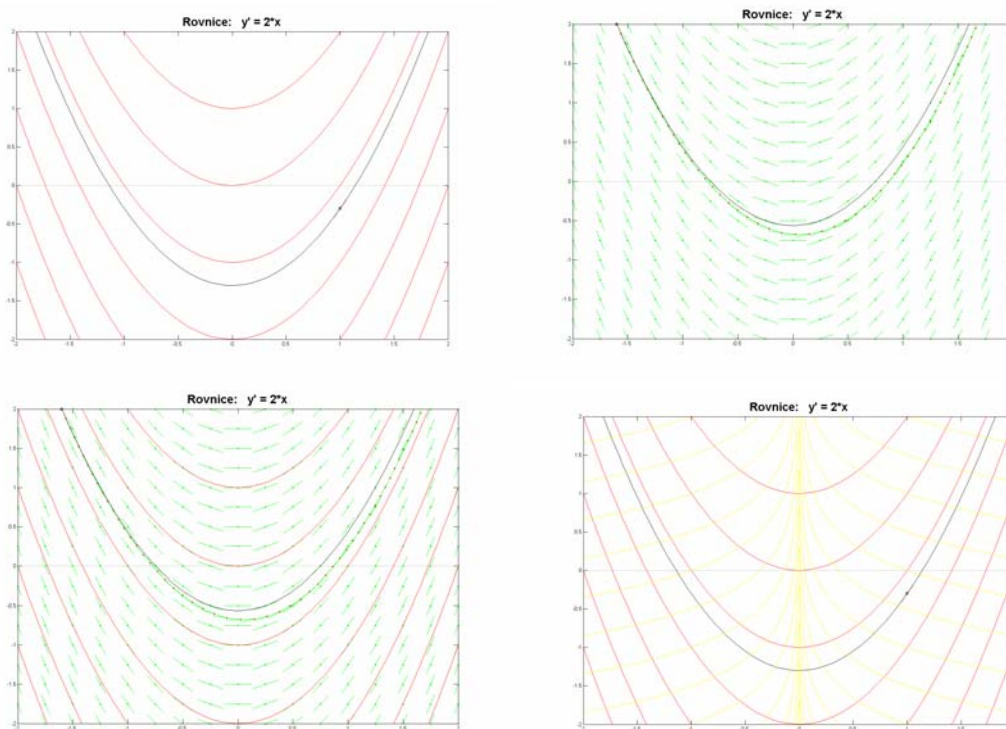
$$y'' = g, \quad y' = g \cdot t + v_0, \quad y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + y_0,$$

lze použít nejen pro objasnění uvedených základních pojmů, ale i pro objasnění významu integračních konstant. Vzhledem k tomu, že rovnice volného pádu je diferenciální rovnicí 2. řádu s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou je možno ji výhodně využít i v dalších částech základního kurzu.

V mnoha partiích matematické analýzy není vhodné studentům ihned ukázat hotové obrázky, pro pochopení a efektivnější studium u značné části studentů je lepší obrázek postupně vytvářet. Na projekce hotových náročnějších obrázků se studenti často jen letmo podívají, při postupném kreslení mají větší šanci pochopit jejich podstatu. Při výuce diferenciálních rovnic a náročnosti mnoha příslušných obrázků je však třeba u dnešních studentů, zvyklých z různých předmětů na záplavu vizualizací, po počátečním naznačení vytváření obrázku ukázat hotové obrázky pro vhodnou diferenciální rovnici. Např. nějakou podmnožinu množiny jejich partikulárních řešení včetně řešení určité Cauchyovy úlohy, dále obrázek směrového pole téže rovnice a

obrázek, který obsahuje jak směrové pole, tak i zmíněná partikulární řešení. Obrázek směrového pole je možno pro lepší objasnění pojmu *směrové pole* a zejména jeho významu doplnit přibližným řešením získaným Eulerovou metodou a toto řešení porovnat s příslušným řešením přesným.

Snímky obr. 1. jsou vytvořeny pro rovnici $y'=f(x)$, konkrétně pro rovnici $y'=2x$, jejíž řešení by pro studenty nemělo být ničím překvapivým. Jednotlivé snímky obr. 2. odpovídají snímkům obr. 1. pro „méně speciální“ případ rovnice $y'=f(x,y)$, konkrétně pro rovnici $y'=y$.



Obr.1. Snímky pro rovnici $y'=2x$

Na prvním snímku obr. 1. i 2. je vybraná množina partikulárních řešení a již i řešení určité Cauchyovy úlohy. Na druhém snímku je směrové pole, ve kterém je již zakresleno přibližné řešení (jiné) Cauchyovy úlohy a příslušné řešení přesné. Třetí snímek vznikl z druhého doplněním množiny vybraných partikulárních řešení. Čtvrtým snímkem (vzniklým doplněním prvního snímku) je možno studentům názorně přiblížit pojem *ortogonální trajektorie*. Stačí využít jen poznatek, který by měli studenti znát z analytické geometrie, že pro směrnice k_1 a k_2 dvou kolmých přímek platí $k_1 \cdot k_2 = -1$.

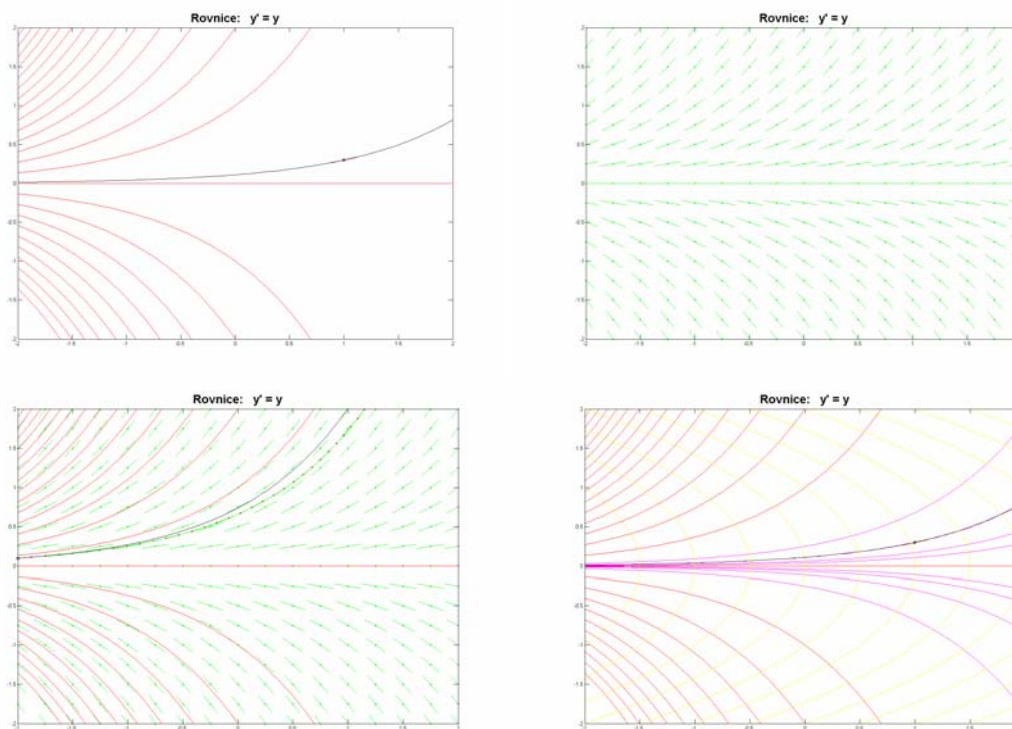
Dvojice diferenciálních rovnic

$$y' = f(x, y), \quad \frac{-1}{y'} = f(x, y),$$

resp.

$$y' = f(x, y), \quad y' = \frac{-1}{f(x, y)},$$

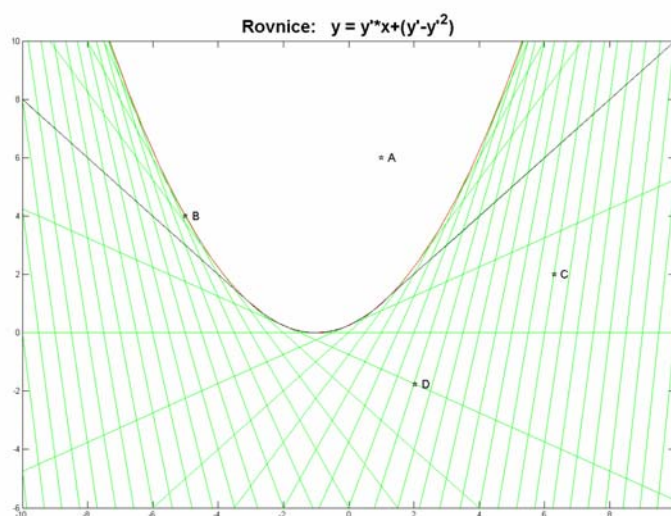
pak v každém bodě průniku svých definičních oborů vyjadřují požadavek na směrnice dvou navzájem kolmých směrů.



Obr.2. Snímky pro rovnici $y' = y$

Vizualizace základních pojmů

Při zavádění základních pojmů je vhodné zařadit obrázek znázorňující řešení takové diferenciální rovnice, na kterém by bylo možno názorně ukázat nejen partikulární a singulární řešení, ale i rozdíly mezi definicí singulárního řešení pro rovnici $y' = f(x,y)$ a pro rovnici $F(x,y,y') = 0$. Pro tento účel se jeví jako vhodná některá Clairautova rovnice (viz obr. 3.), kterou je možno současně využít k úloze „zjistit zda daná funkce je či není řešením rovnice“, i když s postupem řešení zatím studenti nebyli seznámeni.



Obr.3. Vizualizace základních pojmů

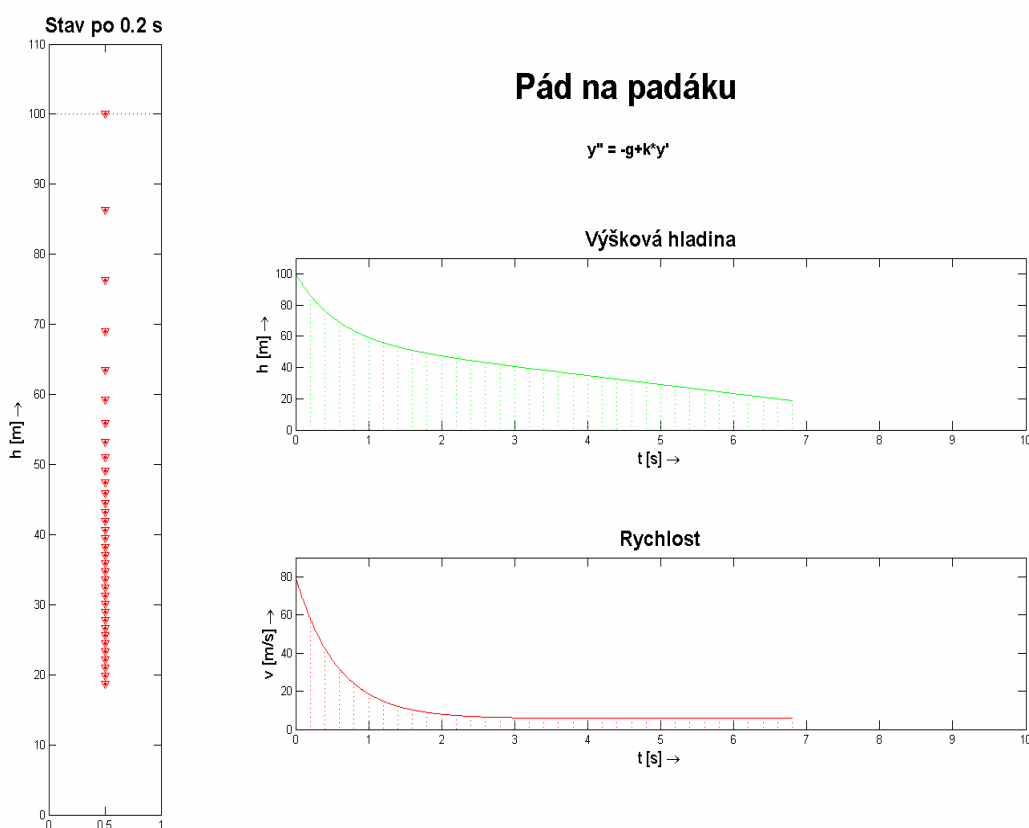
Zajímavé úlohy

Zájem studentů o diferenciální rovnice by mohly podpořit ukázky z úlohy popsané v člancích [2] a [3] a zejména pak i animace některých, pro studenty určitě zajímavých dějů, popsaných jednoduchou obyčejnou diferenciální rovnicí. Na obr. 4. je např. zachycen snímek z animace pohybu parašutisty po otevření padáku a na obr. 5. je snímek z animace příbuzné úlohy. Jedná se o pohyb speciálního zásobovacího vaku, který se shazuje při letu nad vodou, po jeho pádu na vodní hladinu.

Pro studenty bude určitě i zajímavá skutečnost, že v obou uvedených případech se jedná o diferenciální rovnici, která úzce souvisí s již uvedenou rovnicí volného pádu. Z matematického hlediska jde pak ve všech třech případech o lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou, kterou by bylo možno zapsat ve tvaru

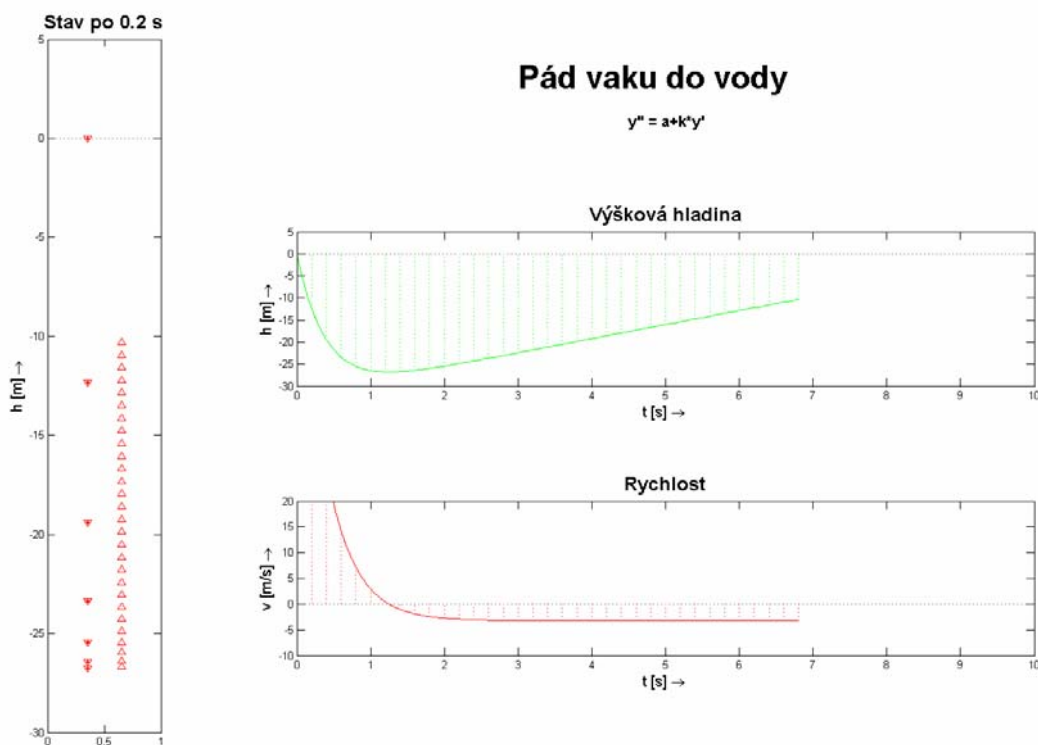
$$y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = a \quad ,$$

přičemž ve všech třech případech je $a_0 = 0$, u volného pádu je i $a_1 = 0$. Konkrétní tvary posledních dvou rovnic jsou na příslušných obrázcích. Rozdílné znaménko gravitační konstanty u volného pádu a u pádu na padáku je dáno tím, zda se počítá hloubka pádu nebo výška nad zemí. U animace pádu na padáku je vhodné zdůraznit, že se jedná o pád nerovnoměrně zpomalený, který z původního značně velkého zpomalení přechází vlivem odporu prostředí postupně do pádu téměř rovnoměrného s bezpečnou rychlostí pro dopad.



Obr. 4. Snímek z animace pádu na padáku (v okně se po každých 0.2s pádu objeví další značka polohy, v pravých oknech současně postupně doplňují grafy výšky a rychlosti)

Animace pádu zásobovacího vaku do vody začíná na obr. 5 až dopadem vaku na hladinu. Vlivem velkého odporu prostředí se pád nejprve výrazně zpomaluje, velikost rychlosti klesá až k nule, pak začíná narůstat velikost rychlosti výstupu, který opět postupně přechází do rovnoměrného pohybu (nastává rovnováha výsledného vztlaku a odporu prostředí). Pro vytvoření obou animací byl použit stejný program, lišily se jen hodnoty koeficientů diferenciální rovnice a hodnoty mezí pro kreslení grafů.



Obr.5. Snímek z animace pádu zásobovacího vaku do vody (význam jednotlivých oken je shodný s obr. 4.)

Závěr

Mnohým problémům při výuce obyčejných diferenciálních rovnic v základních kurzech matematiky na vysokých školách technického směru lze předcházet vhodným vedením výuky. Konkrétně jsou v článku uvedeny tři návrhy - plné využití speciálního typu rovnice $y'=f(x)$, důsledná počítačová vizualizace základních pojmů a podněcení zájmu studentů předvedením animací některých zajímavých dějů popsanych jednoduchou diferenciální rovnicí.

Literatura

- [1] Krček, B., Tužilová, M. *O numerickém řešení obyčejných diferenciálních rovnic*. In.: Moderní matematické metody v inženýrství. Ostrava, VŠB-TUO 2012, s. 78-82, ISBN 978-80-248-2883-1.
- [2] Tužilová, M., Krček, B. *Ohyb nosníku z pohledu základních kurzů matematiky – teoretická část*. In.: Moderní matematické metody v inženýrství. Ostrava, VŠB-TUO 2011, s. 116-120, ISBN 978-80-248-2517-5.
- [3] Krček, B., Tužilová, M. *Ohyb nosníku z pohledu základních kurzů matematiky – numerická realizace*. In.: Moderní matematické metody v inženýrství. Ostrava, VŠB-TUO 2011, s. 121-124, ISBN 978-80-248-2517-5.

PROJECTED KRYLOV METHODS BETWEEN TWO SUBSPACES

Radek Kučera, Tomáš Kozubek, Alexandros Markopoulos
Jaroslav Haslinger, Lukáš Mocek

VŠB-TU Ostrava
17. listopadu 15, 708 33 Ostrava-Poruba
E-mail: radek.kucera@vsb.cz

Abstract: The contribution deals with the solution of large non-symmetric two-by-two block linear systems with singular (1,1)-blocks. The algorithm consists of two levels. The outer level combines the Schur complement reduction with the orthogonal projectors that leads to the linear equation between two different subspaces. This equation is solved by a Krylov-type method. The efficiency is illustrated by examples arising from the combination of the fictitious domain and FETI method.

1 Introduction

We consider two-by-two block linear systems

$$\begin{pmatrix} A & B_1^\top \\ B_2 & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

where $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $f, u \in \mathbb{R}^n$, $g, \lambda \in \mathbb{R}^m$, and $m \ll n$. Systems of this type arise in a variety of scientific and engineering applications [1]. The

This work was supported by the grant GA CR P201/12/0671 (RK,JH), by the project SPOMECH, reg. no. CZ.1.07/2.3.00/20.0070 (TK), and by the project Opportunity for young researchers, reg. no. CZ.1.07/2.3.00/30.0016 (AM) within Operational Programme Education for Competitiveness funded by Structural Funds of the European Union and state budget of the Czech Republic.

algorithm analyzed in this paper extends the algebraic background of the FETI (Finite Element Tearing and Interconnecting) domain decomposition methods [3, 7], in which A is symmetric, positive semidefinite, $B_1 = B_2$, and $C = 0$. Here, we consider the general case with the only one assumption that the block matrix in (1.1) is non-singular while A is singular.

The extension of the FETI algorithm for solving (1.1) with $C = 0$ called the PSCM (Projected Schur Complement Method) was proposed in [5]. The general algorithmical scheme combines the Schur complement reduction with the null-space method performed by orthogonal projectors. It results in the linear equation given by a singular matrix that is an invertible operator between two different subspaces \mathbb{V}_1 and \mathbb{V}_2 in \mathbb{R}^m . Since it is not efficient to assemble the Schur complement for large-scale problems, the only operation allowed with the operator matrix is the matrix-vector multiplication. To this end one can use Krylov-type methods. In [5], the authors proposed the ProjBiCGSTAB with an appropriate combination of orthogonal projectors on \mathbb{V}_1 and \mathbb{V}_2 . Here, we prove the condition for the angle between \mathbb{V}_2 and \mathbb{V}_1^\perp guaranting the convergence. Our analysis open the door for deriving other projected Krylov methods between subspaces. As an example, we use the projected GMRES in numerical experiments. The efficiency is illustrated by examples arising from the combination of the fictitious domain and FETI method.

2 Deriving of projected Krylov methods

The PSCM algorithm requires to compute actions of an arbitrary generalized inverse X to A and of the matrices R_A , R_{A^\top} whose columns span the null-spaces of A and A^\top , respectively [6]. We will assume that $G_1 = -R_A^\top B_2^\top$, $G_2 = -R_{A^\top}^\top B_1^\top$, $d = B_2 X f - g$, and $e = -R_{A^\top}^\top f$ are assembled while $F = B_2 X B_1^\top + C$ is to our disposal by the multiplying procedure. The last ingredients are two orthogonal projectors onto the null-spaces $\mathcal{N}(G_i)$ of G_i denoted by $P_i = I - G_i^\top (G_i G_i^\top)^{-1} G_i$, $i = 1, 2$. The key step of the PSCM algorithm consists in solving of the operator equation

$$P_1 F x = q \tag{2.1}$$

with $q = P_1(d - F G_2^\top (G_2 G_2^\top)^{-1} e)$, where x is the projection of λ onto $\mathcal{N}(G_2)$. Although $P_1 F$ is the singular matrix in \mathbb{R}^m , the solvability of (2.1) is guaranteed, as $P_1 F$ is the invertible operator between $\mathcal{N}(G_2)$ and $\mathcal{N}(G_1)$ [5, 6].

Let $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2 \subset \mathbb{R}^m$ be two different subspaces of the same dimension $m - l$, $1 \leq l < m$. We replace (2.1) by the following abstract problem: find $x \in \mathbb{V}_2$ such that

$$M x = q, \tag{2.2}$$

where $q \in \mathbb{V}_1$ and $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ represents the invertible operator between \mathbb{V}_1 and \mathbb{V}_2 . Let $Z_1, Z_2 \in \mathbb{R}^{m \times (m-l)}$ be matrices whose columns span $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$, respectively. Let $\bar{x}, \bar{q} \in \mathbb{R}^{m-l}$ be such that $q = Z_1 (Z_1^\top Z_1)^{-1} \bar{q}$, $x = Z_2 \bar{x}$. Substituting these vectors into (2.2) and multiplying by Z_1^\top , we find that (2.2) reduces to the system of linear equations:

$$N \bar{x} = \bar{q}, \tag{2.3}$$

where $N = Z_1^\top M Z_2 \in \mathbb{R}^{(m-l) \times (m-l)}$.

Lemma 2.1 *The matrix N in (2.3) is non-singular.*

Proof. Let $Z_1^\top M Z_2 y = 0$ be the homogeneous system. Denoting $y_1 = M Z_2 y$, we obtain $Z_1^\top y_1 = 0$. As $y_1 \in \mathbb{V}_1$ is orthogonal to all basis vectors of \mathbb{V}_1 , we get $y_1 = 0$. In $M Z_2 y = 0$, we set $y_2 = Z_2 y$. Then, $M y_2 = 0$ implies $y_2 = 0$ due to the invertibility of M . Finally, $Z_2 y = 0$ yields $y = 0$, as Z_2 has full column-rank. Hence, the solution to the homogeneous system is trivial. \square

A (standard) Krylov method applied to (2.3) generates approximations to the solution \bar{x} of (2.3) in \mathbb{R}^{m-l} . The projected Krylov method generates approximations directly to the solution x of (2.2) in \mathbb{V}_2 . The crucial point in deriving projected methods consists in showing how to transform the matrix-vector multiplication from \mathbb{R}^{m-l} to \mathbb{V}_2 . The idea is based on the following equivalences:

$$\bar{y} = Z_1^\top M Z_2 \bar{x} \iff Z_2 \bar{y} = Z_2 Z_1^\top M Z_2 \bar{x} \iff y = Z_2 Z_1^\top M x. \quad (2.4)$$

Let $M_P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ be another invertible operator between V_2 and \mathbb{V}_1 . We can consider Z_2 orthogonal and introduce $Z_1 = M_P Z_2$. Taking into account $P_2 = Z_2 Z_2^\top$, we get

$$y = P_2 M_P^\top M x. \quad (2.5)$$

We discuss two variants of M_P : (i) $M_P = M$ and (ii) $M_P = P_1$.

The variant (i) leads to N non-singular for any choice of the input data and enables us to use the CGM. On the other hand, two expensive matrix-vector multiplications by M and M^\top are needed in (2.5). Moreover, the condition number $\kappa(N)$ is usually too high so that the convergence rate of the CGM may be slow.

For the variant (ii), the invertibility of M_P is guaranteed by the following result.

Theorem 2.1 *Let P_1 be the orthogonal projector onto \mathbb{V}_1 . The restriction $P_1 : \mathbb{V}_2 \mapsto \mathbb{V}_1$ is invertible iff*

$$\mathbb{V}_2 \cap \mathbb{V}_1^\perp = \{0\}, \quad (2.6)$$

where \mathbb{V}_1^\perp is the orthogonal complement to \mathbb{V}_1 in \mathbb{R}^m .

Proof. First we prove the implication " \Leftarrow ". Any $x \in \mathbb{V}_2$ can be split into two orthogonal components: $x = x_{\mathbb{V}_1^\perp} + x_{\mathbb{V}_1}$, where $x_{\mathbb{V}_1^\perp} \in \mathbb{V}_1^\perp$ and $x_{\mathbb{V}_1} \in \mathbb{V}_1$. If $x \neq 0$, then (2.6) yields $x_{\mathbb{V}_1} \neq 0$ and $P_1 x = x_{\mathbb{V}_1}$. Therefore, the only solution of the homogeneous equation $P_1 x = 0$ on \mathbb{V}_2 is trivial. The invertibility of P_1 on \mathbb{V}_2 is proved. To prove the opposite implication " \Rightarrow ", we assume that there is $x \in \mathbb{V}_2 \cap \mathbb{V}_1^\perp$, $x \neq 0$. Then, x is the non-zero solution of the homogeneous equation $P_1 x = 0$ on \mathbb{V}_2 . This contradicts to the invertibility of P_1 on \mathbb{V}_2 . \square

The condition (2.6) is equivalent to the fact that the angle θ between \mathbb{V}_2 and \mathbb{V}_1^\perp is non-zero. It is implicitly required by ProjBiCGSTAB proposed in [5]. It is possible to prove that N is close to a singular matrix when θ is small. In such situations, the convergence rate of the projected Krylov methods may be slow. However, if θ is sufficiently large, then the variant (ii) may avoid disadvantages of (i).

3 Numerical experiments

To test our algorithms, we shall solve linear systems (1.1) arising from the combination of the smooth FD and FETI method applied to finite element approximations of linear elasticity problems [5, 4, 8].

We compare the efficiency of the PSCM implemented with different projected Krylov methods used for solving (2.1). By ProjGMRES($P_1 F$) and ProjGMRES(P_1) we denote the projected GMRES variants with $M_P = M$ and $M_P = P_1$, respectively. Note that the former leads to the equation with the symmetric, positive definite operator so that the projected CGM may be also used in this case. We refer to this method as ProjCGM($P_1 F$). The projected BiCGSTAB [5] is denoted here by ProjBiCGSTAB(P_1). Actions of generalized inverses of A to vectors are computed by combining the Cholesky factorization with the singular value decomposition [2]. The choice of the generalized inverse has no influence on convergence of the projected methods [7, 6]. All computations were performed by using 32 cores with 2GB memory per core of the HP Blade system, model BLc7000.

Figure 3.1 and 3.2 show convergence rate of the relative residual norm which is typical for small and large problems, respectively. Table 3.1 reports the number of iterations (**iter**) and the computational time in seconds (CPU_time). One can observe that ProjGMRES(P_1) is the most efficient method, if a high accuracy of the computed solution is required. The progress is more expressive in CPU_time, since the only one action of the generalized inverse of A per iteration is needed.

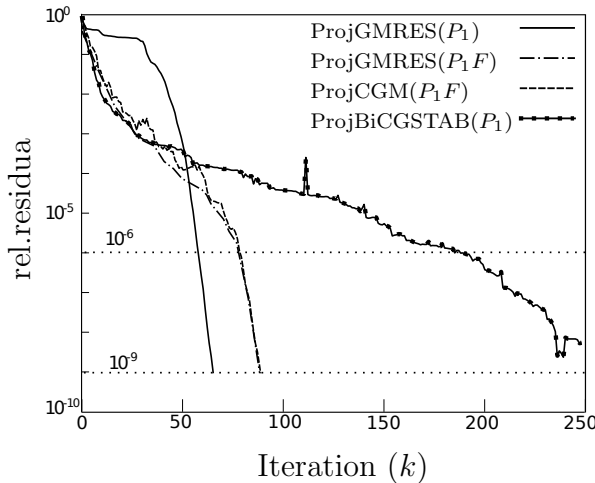


Figure 3.1: $n = 3528, m = 186$.

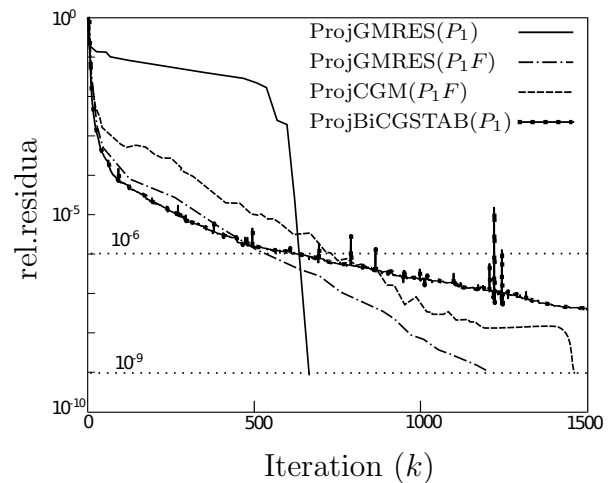


Figure 3.2: $n = 520200, m = 18372$.

References

- [1] M. Benzi, G.H. Golub, J. Liesen, Numerical solution of saddle point systems, Acta Numerica 14 (2005) 1–137.

number of the subboxes (s)	25	100	225
number of the primal unknowns (n)	130050	520200	1170450
number of the dual unknowns (m)	4148	18372	42692
nullity of A (l)	75	300	675
$\varepsilon = 10^{-6}$			
ProjGMRES(P_1)	322 /34.68	633 /289.36	1001 /2474.12
ProjGMRES(P_1F)	289 /48.52	543 /396.74	743 /2164.29
ProjCGM(P_1F)	378 /63.34	732 /588.48	1046 /4339.76
ProjBiCGSTAB(P_1)	538 /163.55	628 /793.28	672 /1849.82
$\varepsilon = 10^{-9}$			
ProjGMRES(P_1)	342 /35.86	665 /327.45	1040 /2817.11
ProjGMRES(P_1F)	592 /122.63	1210 /1100.40	1678 /7462.21
ProjCGM(P_1F)	686 /126.80	1462 /1242.95	2198 /9666.65
ProjBiCGSTAB(P_1)	>1500	>1500	>1500

Table 3.1: Complexity of computations: **iter**/CPU_time for two terminating tolerances ε (if >1500, the default maximum of iterations is achieved).

- [2] T. Brzobohatý, Z. Dostál, T. Kozubek, A. Markopoulos, P. Kovář, Cholesky decomposition with fixing nodes to stable evaluation of a generalized inverse of the stiffness matrix of a floating structure, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 88 (2011) 1384–1405.
- [3] C. Farhat, J. Mandel, F.X. Roux, Optimal convergence properties of the FETI domain decomposition method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 115 (1994) 367–388.
- [4] J. Haslinger, T. Kozubek, R. Kučera, Fictitious domain formulation of unilateral problems: analysis and algorithms, *Computing* 84 (2009) 69–96.
- [5] J. Haslinger, T. Kozubek, R. Kučera, G. Peichl, Projected Schur complement method for solving non-symmetric saddle-point systems arising from fictitious domain approach, *Numerical Linear Algebra with Applications* 14 (2007) 713–739.
- [6] R. Kučera, T. Kozubek, A. Markopoulos, On large-scale generalized inverses in solving two-by-two block linear systems, *Linear Algebra and Its Applications* 438 (2013) 3011–3029.
- [7] R. Kučera, T. Kozubek, A. Markopoulos, J. Machalová, On the Moore-Penrose inverse in solving saddle-point systems with singular diagonal blocks, *Numerical Linear Algebra with Applications* 19 (2012) 677–699.
- [8] L. Mocek, Numerical solution of partial differential equations using a fictitious domain method, PhD Thesis, VSB-TU Ostrava, 2012. At: http://www.fei.vsb.cz/miranda2/export/sites-root/fei/k470/cs/theses/mocek_phd.pdf

WARNING PROGNOSIS OF COAL SALES IN THE POLISH MARKET

Anna Manowska

Katedra Zarządzania i Inżynierii Bezpieczeństwa, Wydział Górnictwa
i Geologii, Politechnika Śląska ul. Akademicka 2, 42 – 100 Gliwice, Polska
E-mail: amanowska@polsl.pl

Abstract: In today's world, coal plays a crucial role in ensuring the energy security of the country. The analysis of the 17 years of coal sales, but also of coal mining (which is not shown in detail in this paper), shows that the sector has undergone a series of effective reforms enabling the Polish mining industry to compete in the free market. The analysis of the time series of coal mining indicates that the trend is of a linear decreasing type. However, the sales of coal increase, and thus, there is a reason to fear that Polish producers will not be able to meet the market demand for this resource, thus affecting the energy security of our country.

Introduction

From the nineties to the present the transformation of the coal market has involved the significant reduction in energy intensity of the production processes and products, while the annual fluctuations in the coal demand have been maintained due to the fact that coal belongs to seasonal goods. Thus it becomes necessary to consider the issue of what the capability of the excavation face should be in order to satisfy ever lower, but still variable demand for coal. The answer to this question has also major significance in the analysis and evaluation of the energy security of a country.

Analysis of the time series of the quantity of coal sales in the Polish market

The following analysis uses the data of monthly coal sales on the Polish market from 1995 to 2012. The statistical analysis implies that the average value of the sales in those years is 8288 tonnes, and the variation coefficient, which is a normalized measure of dispersion of a probability distribution or frequency distribution amounts to 22%.

Therefore, it is reasonable to make predictions using the warning prognosis, as the coefficient of variation shows the presence of stochastic process [1]. It is important to collect information about the evolution of sales in the coming years in order to ensure the proper functioning of a coal mine.

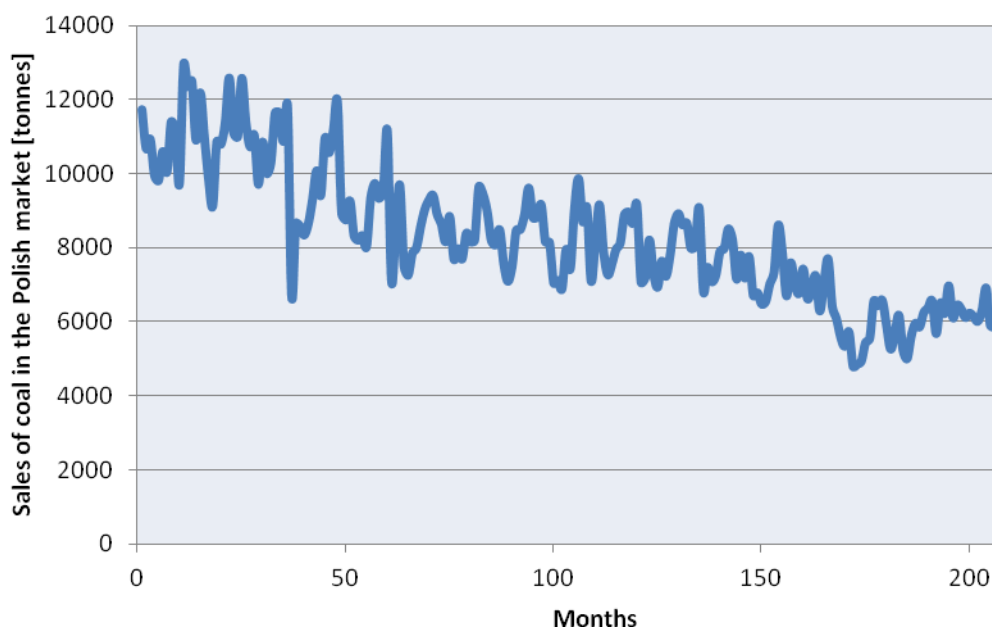


Figure 1 Sales of coal in the Polish market

Forecasting methods play an important part in the process of planning as they inform the "planner" about the probable capacity of the coal market while maintaining the existing economic development strategy [2].

It is indispensable to use mathematical methods of forecasting in order to create a development strategy of the national economy. This justifies undertaking the research related to the elaboration of methods and techniques of forecasting, linked with the development model of coal sales volumes, which enables predicting more reliable data.

The decision about the eligibility of the forecast is always made on the basis of a time series variable and depends on the number and frequency of follow-up. In addition, decisions are always taken according to the best of the received models of the variable [1].

The first step in building the model was to determine whether the series of sales is predictable and if it is a monotonic trend of development. For this purpose, the analysis used the Spearman rank correlation coefficient, which is determined by the relation [3]:

$$R_s = 1 - \frac{6 \sum_{t=1}^n (t - r_t)^2}{n (n^2 - 1)} = 0,89$$

where:

R_s - Spearman's rank correlation coefficient

t - time index

r_t - rank of coal sales

n - sample size

Unlike the Pearson correlation coefficient, which measures only the linear relationship between the variables, the Spearman's rank correlation also shows the monotonic nonlinear correlation.

The model of rank correlation provides a wider class of correlation than the model involving the classical correlation coefficient, however, it does not cover all the possible dependencies. For example, periodic dependence - seasonal - is not detected by either the Pearson correlation or the Spearman's one.

As a rank method, Spearman's correlation is only slightly sensitive to outliers, and depends solely on the arrangement of the observed values. It can therefore be applied to any variables whose values can be ordered in ascending order.

Classical correlation coefficient has no reasonable interpretation of the variables on an ordinal scale, since it depends on the difference between the values of the variables that are not specified for ordinal characteristics

The critical value that verifies the validity of the hypothesis of monotonicity was verified at the level of $\alpha = 0.05$ and 203 degrees of freedom, as it can be read from a Student-t distribution, where the value is 1.97.

Due to the fact that the critical value is greater than the empirical value, the hypothesis about the monotonic development trend should be rejected.

So the next step was to determine whether mining companies are at a disadvantage in the area of economic markets. For this purpose, the trend and control lines were set, but only for the observation in the years 1995-2011, leaving the year 2012 to control the situation

The equation of the trend and the analysis of the significance of the equation coefficients are shown in Table.

$$y_t = -26,22t + 10975,22$$

Table 1
statistical values of the REGLINP function

DESCRIPTION	Value		DESCRIPTION
b	10975,22	-26,22	a
D(b)	133,25	1,13	D(a)
R²	0,73	948,10	s
F	540,83	203	The number of degrees of freedom

Source: Manowska A.

The statistics resulting from the calculations were used to test the significance of model parameters for which the critical value was determined on the basis of the Excel functions TINV (α , 203-1-1). The level of significance $\alpha = 0.05$ $t_{\alpha} = 1.974$, so:

$$t(a) = \frac{|-26.22|}{1.13} = 23.25 - \text{significant parameter}$$

$$t(b) = \frac{|10975.22|}{133.25} = 82.36 - \text{significant parameter}$$

Moreover, the significance of the coefficient of determination R2 was assessed by the means of the Excel statistical functions FINV (), where the critical value F_{α} was read for $m_1 = 1$ and $m_2 = 203-1-1 = 201$ th. This value for the level of significance $\alpha = 0.05$ is $F_{\alpha} = 3.8879$. Because the empirical value $F = 540,83$, and is larger than the critical value F_{α} , so the hypothesis H_0 should be rejected, which means that the model fitting to the empirical data is good. Thus, the interpretation of the graphical situation is shown in figure No. 2

Warning prognosis

So the trend is decreasing and statistically significant as evidenced in the statistics Fischer - Snedecor, while from the point of view of the producer a variable is a stimulant. It can be said that during the last 16 years, there was an unfavourable economic situation in the area of coal sales (this is a statement referring to the past).

Thus it should be checked if the unfavourable situation might continue in the future. The graph presents all the control data of 17 years and the appearance of new points on the graph from 2012 created the sequence of 12 observations located above the centre line. This results in a rejection of the hypothesis of stability and development trends for the hypothesis of change in this trend, and it is a change in the direction of increased sales.

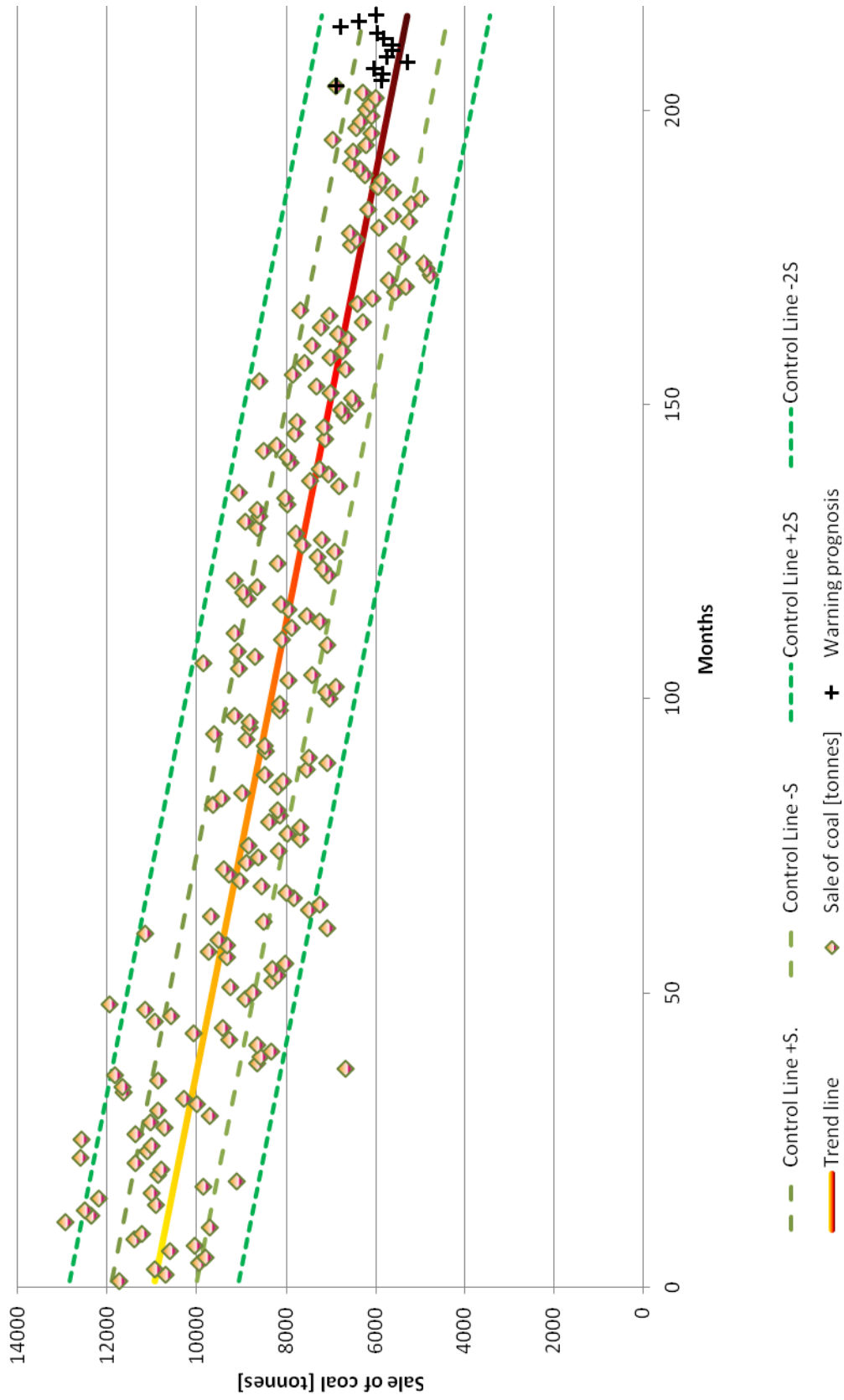


Figure. 2 Trend development of coal sales

Conclusions

In today's world, coal plays a crucial role in ensuring the energy security of the country. The analysis of the 17 years of coal sales, but also of coalmining (which is not shown in detail in this paper), shows that the sector has undergone a series of effective reforms enabling the Polish mining industry to compete in the free market.

Thus, knowing the expected coal sales and extraction volume one can adjust a number of key operating parameters of the mining plant, such as:

- Daily output from one longwall, which affects the technical, technological and organizational efficiency;
- The intensity of stone works which accesses the way of rebuilding of the longwall as a result of the extraction process;
- The number of simultaneously operating walls, which is a measure of the concentration of mining;
- General output which is the evaluation of the work and the assessment of the effectiveness of the system of motivation and staff policy,
- Unit cost which shows the effectiveness of the management of physical and personal factors of production;
- And the average wage which is the equivalent for the work.

The analysis of the time series of coal mining indicates that the trend is of a linear decreasing type. However, the sales of coal increase, and thus, there is a reason to fear that Polish producers will not be able to meet the market demand for this resource, thus affecting the energy security of our country.

Literature:

- [1] Cieślak M: Prognozowanie gospodarcze. Metody i zastosowania. Wydawnictwo PWN, Warszawa 2011
- [2] Przybyła H., Wodarski K., Baron K.: Optymalne wykorzystanie zdolności produkcyjnych i możliwości inwestycyjnych w sektorach paliw stałych i energetyki w Polsce do roku 2015, Wiadomości Górnicze 4/2000
- [3] Żurowska J.: Prognozowanie przewozów. Modele, metody, przykłady, Wydawnictwo Politechnika Krakowska, Kraków 2005
- [4] Przybyła H.: Przedsiębiorstwo górnicze – przedsiębiorstwem przyszłości?

MODEL OF FORECASTING OF QUANTITY OF COAL SALE BASED ON HISTORY OF PHENOMENON

Anna Manowska

Katedra Zarządzania i Inżynierii Bezpieczeństwa, Wydział Górnictwa
i Geologii, Politechnika Śląska ul. Akademicka 2, 42 – 100 Gliwice, Polska
E-mail: amanowska@polsl.pl

Abstract: In the paper the classical and modern methods of forecasting have been presented. They are used to reduce the risk connected with the uncertainty and incomplete knowledge about the future. The process of sale of coal has been simulated by the use of two forecasts: a statistic model and artificial neuron networks. The obtained results have been presented in the following article.

Introduction

Artificial neural networks represent a type of computing that is based on the way that the brain performs computations. Neural networks are good at fitting non-linear functions and recognizing patterns. Consequently, they are used in the aerospace, automotive, banking, defense, electronics, entertainment, financial, insurance, manufacturing, oil and gas, robotics, telecommunications, and transportation industries. This article gives an introduction to basic neural network architectures and learning rules. Emphasis is placed on mathematical analysis of these networks, on methods of training them, and on their application to practical problems in areas such as forecasting the sales of coal. This paper will show how to construct neural networks and train them to perform useful functions in the industry [1].

Development of a forecast based on a statistic method

To forecast the quantity of coal sales on the local market, historical data from 1995 to 2010 was used.

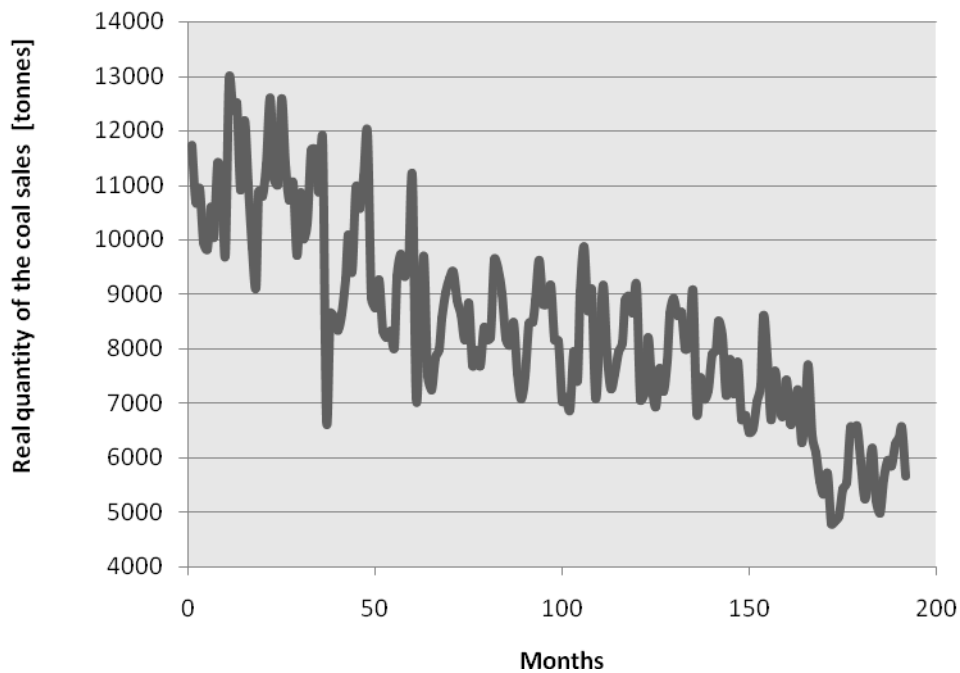


Fig. 1 Quantities of coal sold on the Polish market, source A. Manowska [2]

In the time string which was taken under consideration, it is possible to notice a downward tendency: the sale of coal decreased from the level of 1100 thousand tonnes in 2005 to the level of 6000 thousand tonnes in 2010. While analyzing the trend of energy market, it needs to be noted that 95% of Polish energy security is ensured by this raw material and the restructuring changes in the coal mining confirm that the usage of this resource will not diminish. The noticeable decrease is not only the result of the adaptation of the extraction to the current needs of customers but also of the export reduction and introduction of imported coal into the local market. Moreover, coal leads petroleum and natural gas in low price, availability and clean production process in accordance with the EU requirements in terms of pollution emissions to the atmosphere. The use of a statistic method of forecasting involved focusing attention on seasonal sales, thus adjusting the model to the noticeable cyclical process with decreasing oscillations. The best model of all the built ones was the one-dimensional model of inertia [2]:

$$y_t = 11315 * e^{-0,002t} + 1800 * SIN\left(2 * \frac{PI(\square)}{12} * t + 2,02\right) * e^{-\frac{t}{12}}$$

From the developed model the average relative error was obtained as ex post 15%. The figure below shows the theoretical value in relation to the real value.

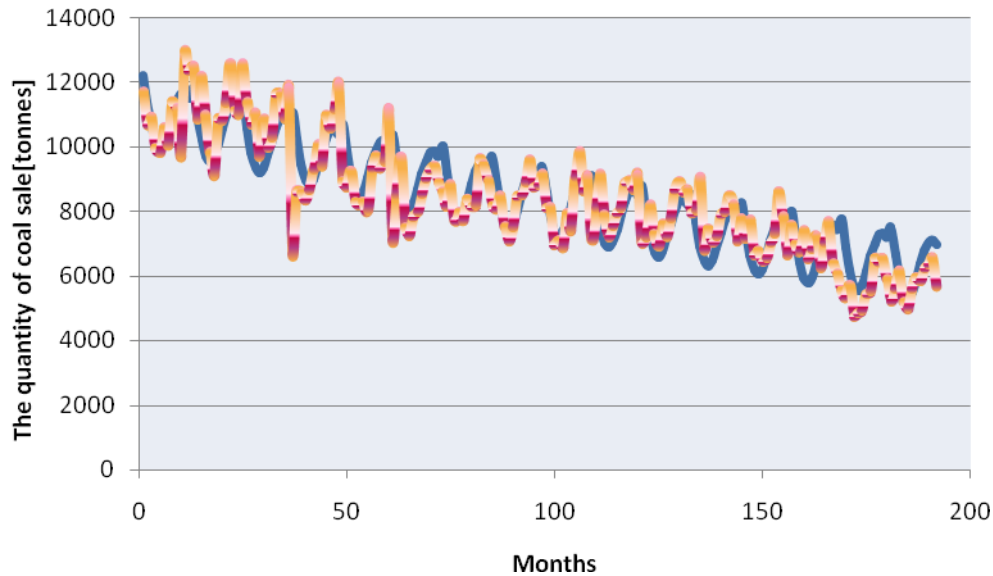


Fig. 2 Coal sales forecasted with the statistical method, source A. Manowska [2]

The use of artificial neural networks in forecasting

Characteristics of neural networks

Neural networks as an object of study are simplified representations of models of a real system. They consist of connected objects conventionally called neurons whose important feature is the possibility of training, i.e. individual neurons can modify their parameters to achieve better efficiency while solving specific types of problems. Neural networks can be very effective as computational tools in solving such tasks which cannot be handled by standard computers or common programs. Their main advantages are: on the one hand, the capability of performing parallel calculations where the speed of the neural networks can significantly exceed the speed of the sequential calculations, and, on the other hand, the possibility of solving a problem without constructing an algorithm.

Networks need not be programmed. There are methods of training them which facilitate obtaining the appropriate and effective functioning even though the author does not know the algorithm according to which the task can be solved. The network always functions as a whole and its individual elements contribute to the implementation of all the activities that the network performs. One of the consequences of such functioning of a network is its ability to work properly, even after a considerable damage to its component parts.

Network topology should result from a type of a task which is assigned. Decisions on the structure of the network do not affect its behavior in the decisive stage. Its functioning depends on the methods of training. Neural networks gain their knowledge only during training and do not need a pre-determined, adjusted to the task or well-defined structure. However, the network has to have a sufficient degree of complexity of the structure in order to be able to obtain the necessary internal connections in the process of training.

Construction of forecasts based on artificial neural networks

To determine the future volume of coal sales, a neural network was constructed on the basis of Simulink MATLAB software version 7.0. In the studies of the neural network construction there is no indication of methods which should be used to build its correct structure. This research work proposes an algorithm that optimizes the mean squared error according to which the number of neurons in the layer is selected. The structure of the neural network was developed experientially. The model of neuron was designed to forecast one month forward. The multi-layer network model was used with one hidden layer. The network was trained with the teacher on the statistical data from the years 1995 to 2008. The remaining two years - 2009, 2010 were left to test the network. The best function of the activation was the linear one where in the individual layers 12 neurons were taught. The values of weights were chosen experimentally and the update was realized by using the method of least squares. The obtained results are shown in the graph.

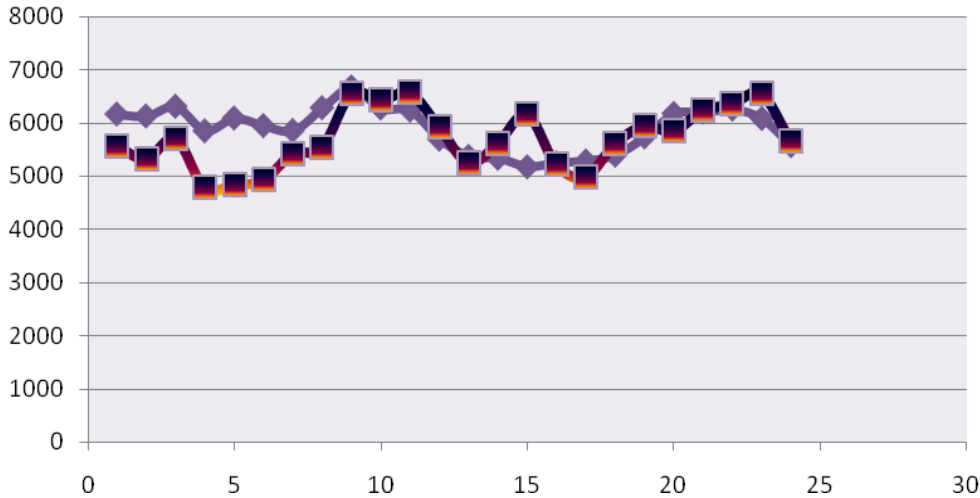


Fig. 3 Quantities of coal sales predicted with the ANN, source A.Manowska

The figure presenting the quantities of coal sales is the same as in the statistical method, but the diagram of prediction varies greatly. After employing the artificial neural

network, the prediction is satisfactorily fitted to the actual course. It is highly probable that the forecast based on neural networks would be less erroneous due to the fact that the methods based on artificial intelligence allow the self-improvement of the network [3]. This fact is important in building long-term forecasts. It should be noted that the real process is the stochastic one with the autocorrelation coefficient of 0.5 - which results in the difficulty in a mathematical description. Figure 2 shows that the maximum error was reduced and does not exceed 20%. The largest error fluctuations were observed in the initial period of the data that was used to verify the model. In the next months, an error is in the range of 5%.

Summary

In forecasting, there are two main problems: the first problem is the lack of information on a given phenomenon or the information is inaccurate, and the second one is an excess of information resulting from the complexity of the incident. Complex mathematical algorithms require an increased involvement of information technology, which results in rapid changes in technology. Both the accessibility of problem solving methods and the lack of time for seeking solutions result in the fact that classical methods of forecasting cannot be applied nowadays. Most of these restrictions are no obstacle to forecasting methods based on artificial intelligence. However, there are areas of limited applicability of the basic techniques of artificial intelligence because they do not fulfill the criteria of universal, comprehensive method of analysis.

The final conclusion of this research work is that in comparison with a statistical model, neural networks enable the construction of highly probable short-term forecasts as they are characterized by a lower average error ex post of about 8%. It can also be assumed that new information about the quantity of coal sales will allow the usage of artificial neural networks for long-term forecasting.

Literature:

1. LAROSE D.T.: Odkrywanie wiedzy z danych. Wprowadzenie do eksploracji danych, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006, s. 71
2. MANOWSKA A.: Prognozowanie wielkości sprzedaży węgla kamiennego dla grupy kopalń, praca doktorska, Gliwice 2010
3. PRZYBYŁA H.: Przedsiębiorstwo i jego otoczenie. Praca zbiorowa pod redakcją Dźwigoł H. pt. „Restrukturyzacja przedsiębiorstwa w warunkach gospodarki rynkowej”. Instytut Promocji Małych i średnich Przedsiębiorstw PROMOTOR. Katowice-Chorzów 2004.

ZPŮSOBY ODHADU SMĚRODATNÉ ODCHYLKY ODHADU PARAMETRŮ V EXPONENCIÁLNÍM REGRESNÍM MODELU

Bohumil Maroš, Marie Budíková

Ústav matematiky FSI VUT v Brně, Ústav matematiky a statistiky PřF MU

Technická 2, 616 69 Brno, Kotlářská 2, 611 37 Brno

E-mail : maros@fme.vutbr.cz, budikova@math.muni.cz

Abstrakt: V příspěvku srovnáváme dva způsoby získání odhadu směrodatné odchyly odhadů regresních parametrů v modelu $y = \exp(\beta_0 + \beta_1 x)$. Jedním z nich je výpočetní postup založený na opakované aplikaci váhové funkce v linearizovaném regresním modelu $\ln y = \beta_0 + \beta_1 x$ a druhý spočívá ve využití mnohonásobně prováděných simulací.

Ukážeme, že v některých případech dostáváme dosti odlišné výsledky. Značný vliv na rozdílnost výsledků obou postupů má např. křivost exponenciály, dále směrodatná odchylna náhodných složek modelu a minimální hodnota exponenciály.

Abstract: In this paper we describe the comparison of the calculation of the standard deviation estimates of regression coefficients in the model $y = \exp(\beta_0 + \beta_1 x)$ by following the Zvára's book according to the procedure allowed and results from simulations performed many times. We show that in some cases the two processes are quite different. Considerable influence on the consistency of the two procedures is as exponential curvature, then the standard deviation of random components of the model and the minimum value of the exponential function.

1. Exponenciální regresní model a jeho linearizace

Zabýváme se exponenciálním regresním modelem $Y = \exp(\beta_0 + \beta_1 x) + \varepsilon$, kde ε je náhodná odchylna řídící se rozložením $N(0, \sigma^2)$. Funkci $y = \exp(\beta_0 + \beta_1 x)$ lze logaritmickou transformací převést na funkci $\ln y = \beta_0 + \beta_1 x$, která je lineární v parametrech. Uvažovaný model je tedy linearizovatelný pomocí transformační funkce $F(y) = \ln y$.

2. Iterovaná vážená metoda nejmenších čtverců

Pro odhad regresních parametrů β_0, β_1 pořídíme n dvojic pozorování (x_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$ a předpokládáme, že pro všechna $i = 1, \dots, n$ platí $Y_i = \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i) + \varepsilon_i$, přičemž

$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ a $C(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ pro $i \neq j$. Při linearizaci modelu pomocí transformační funkce $F(y) = \ln y$ dojde k porušení normality náhodných odchylek $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ a porušení homogenity jejich rozptylů. Tyto problémy lze aspoň částečně eliminovat tím, že při odhadu regresních parametrů β_0, β_1 použijeme nikoliv obyčejnou, ale iterovanou váženou metodu nejmenších čtverců. Váhová funkce pro exponenciální model je dána vzorcem $w(y) = y^2$ - viz [3]. Za počáteční iteraci pro iterovanou váženou metodu nejmenších čtverců volíme regresní odhady $\hat{y}_i^{(0)}$ získané obyčejnou metodou nejmenších čtverců. Tedy první iterace má tvar $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{b}^{(1)} = (\mathbf{b}_0^{(1)} \quad \mathbf{b}_1^{(1)})^T = (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{F}(\mathbf{Y})$, kde \mathbf{X} je matice plánu a diagonální matice \mathbf{W} má prvky $w_{ii}^{(1)} = w(\hat{y}_i^{(0)})$ a vektor $\mathbf{F}(\mathbf{Y}) = (\ln(\hat{y}_1^{(0)}) \quad \ln(\hat{y}_2^{(0)}) \quad \dots \quad \ln(\hat{y}_n^{(0)}))^T$. Regresní odhady hodnot závisle proměnné veličiny Y jsou pak $\hat{y}_i^{(1)} = \exp(\mathbf{b}_0^{(1)} + \mathbf{b}_1^{(1)} x_i)$, $i = 1, \dots, n$. Iteračním způsobem pokračujeme dále, tedy v r -tém kroku pro odhad regresních parametrů použijeme vzorec $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{b}^{(r)} = (\mathbf{b}_0^{(r)} \quad \mathbf{b}_1^{(r)})^T = (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{F}(\mathbf{Y})$, kde diagonální matice \mathbf{W} má prvky $w_{ii}^{(r)} = w(\hat{y}_i^{(r-1)})$ a vektor $\mathbf{F}(\mathbf{Y}) = (\ln(\hat{y}_1^{(r-1)}) \quad \ln(\hat{y}_2^{(r-1)}) \quad \dots \quad \ln(\hat{y}_n^{(r-1)}))^T$. Regresní odhady hodnot závisle proměnné veličiny Y jsou pak $\hat{y}_i^{(r)} = \exp(\mathbf{b}_0^{(r)} + \mathbf{b}_1^{(r)} x_i)$, $i = 1, \dots, n$. Iterační proces je ukončen v s -tém kroku při dosažení minimální hodnoty odhadu směrodatných odchylek regresních parametrů β_0, β_1 , a to pro každý parametr zvlášť.

3. Odhad rozptylu odhadu regresních parametrů

Uvažme model $Y = y + \varepsilon$, kde $y = f(x; \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)$. Funkce $f(x; \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)$ je nelineární v parametrech $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ a ε je náhodná odchylka. Pokud je $f(x; \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)$ linearizovatelná, lze najít transformační funkci $F(y) = \beta_0 z_0(x) + \beta_1 z_1(x) + \dots + \beta_k z_k(x) = \mathbf{z} \boldsymbol{\beta}$. Po transformaci modelu obdržíme $F(Y) = F(y + \varepsilon)$. Pomocí prvních dvou členů Taylorova rozvoje funkce $F(Y)$ dostaneme přibližné vztah $F(Y) = F(y) + \frac{F'(y)}{1!} \varepsilon$. Aby chybový člen modelu nebyl multiplikativní, nýbrž aditivní, vydělíme tento vztah derivací $F'(y)$. Tím získáme vyjádření $\frac{F(Y)}{F'(y)} = \frac{F(y)}{F'(y)} + \varepsilon$.

Nyní pořídíme n dvojic pozorování (x_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$ a předpokládáme, že pro všechna $i = 1, \dots, n$ platí $Y_i = f(x_i; \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) + \varepsilon_i = y_i + \varepsilon_i$, přičemž $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ a $C(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ pro $i \neq j$.

Bude tedy platit též přibližný vztah $\frac{F(Y_i)}{F'(y_i)} = \frac{F(y_i)}{F'(y_i)} + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$. Tento vztah můžeme přepsat do maticového tvaru $\mathbf{D}^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{Y}) = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{Z} \boldsymbol{\beta}$, kde diagonální matice \mathbf{D}^{-1} má prvky $\frac{1}{F'(y_i)}$, $i = 1, \dots, n$ a matice \mathbf{Z} má prvky $z_j(x_i)$, $j = 0, 1, \dots, k$ a $i = 1, \dots, n$.

Pro odhad vektoru parametrů $\boldsymbol{\beta}$ sestavíme systém normálních rovnic $\mathbf{D}^{-1} \mathbf{Z} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{Y})$. Odtud $(\mathbf{D}^{-1} \mathbf{Z})^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{Z} \boldsymbol{\beta} = (\mathbf{D}^{-1} \mathbf{Z})^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{Y})$. Upravíme:

$\mathbf{Z}^T \mathbf{D}^{-2} \mathbf{Z} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{Z}^T \mathbf{D}^{-2} \mathbf{F}(\mathbf{Y})$. Matici \mathbf{D}^{-2} označíme symbolem \mathbf{W} . Pak dostaneme řešení systému normálních rovnic ve tvaru $\mathbf{b} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{W} \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{W} \mathbf{F}(\mathbf{Y})$.

Obecně při transformaci linearizovatelného modelu $y = f(x; \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)$ pomocí transformační funkce $F(y)$ se změni parametry $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ na parametry $\beta_0^*, \beta_1^*, \dots, \beta_k^*$, přičemž $\beta_j^* = g_j(\beta_j)$, $j = 0, 1, \dots, k$, kde g_j jsou prostá a regulární zobrazení. Podle publikací [6] a [8] varianční matice odhadu \mathbf{b}^* je $\text{var } \mathbf{b}^* = \sigma^2 \mathbf{L} (\mathbf{Z}^T \mathbf{W} \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{L}^T$, kde matice \mathbf{W} má diagonální prvky $\frac{1}{[F'(y_i^{(s)})]^2}$, $i = 1, \dots, n$ a s je pořadí poslední iterace – viz odstavec 2.

Matice \mathbf{L} má prvky $\frac{\partial g_i(\beta_j)}{\partial \beta_j}$, $i, j = 0, 1, \dots, k$.

V našem případě exponenciálního regresního modelu $y = \exp(\beta_0 + \beta_1 x)$ platí $\beta_j = \beta_j^*$, $j = 0, 1$, tudíž matice \mathbf{L} je jednotková matice a $\text{var}(\mathbf{b}) = \text{var}(\mathbf{b}^*) = \sigma^2 (\mathbf{Z}^T \mathbf{W} \mathbf{Z})^{-1}$. Vzhledem k tomu, že matice plánu se obvykle značí \mathbf{X} , použijeme toto značení a dostáváme tedy vyjádření pro varianční matici odhadů regresních parametrů v původním i linearizovaném exponenciálním modelu ve tvaru $\text{var}(\mathbf{b}) = \text{var}(\mathbf{b}^*) = \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} = \sigma^2 \begin{pmatrix} c_0^2 \\ c_1^2 \end{pmatrix}$. Odtud je vidět,

že směrodatná odchylka s_{b_j} odhadu β_j je $s_{b_j} = \sigma c_j$, $j = 0, 1$.

Naším záměrem je porovnat tuto hodnotu získanou výpočtem s hodnotou empirickou, získanou mnohonásobně prováděnými simulacemi.

4. Popis simulací

Předpokládejme, že jistý proces se řídí přesně modelem $y = \exp(\beta_0 + \beta_1 x)$, kde $a \leq x \leq b$, přičemž víme, že pro $x = a$ je $y = \min$ a pro $x = b$ je $y = \max$. Z těchto dvou podmínek se dají jednoznačně určit parametry modelu:

$$\beta_0 = \ln(\min) - \frac{a}{b-a} \ln\left(\frac{\max}{\min}\right), \quad \beta_1 = \frac{1}{b-a} \ln\left(\frac{\max}{\min}\right).$$

Budeme nyní pro jednoduchost uvažovat stále hodnoty $a = 1$, $b = 71$ a $\min = 1, 3, 5, 8, 10, 25, 50, 100, \dots, 1000$ a $\max = 2100$, takže máme 17 různých modelů. Podrobněji budeme zkoumat tři modely, kde $\min = 1, 100, 1000$.

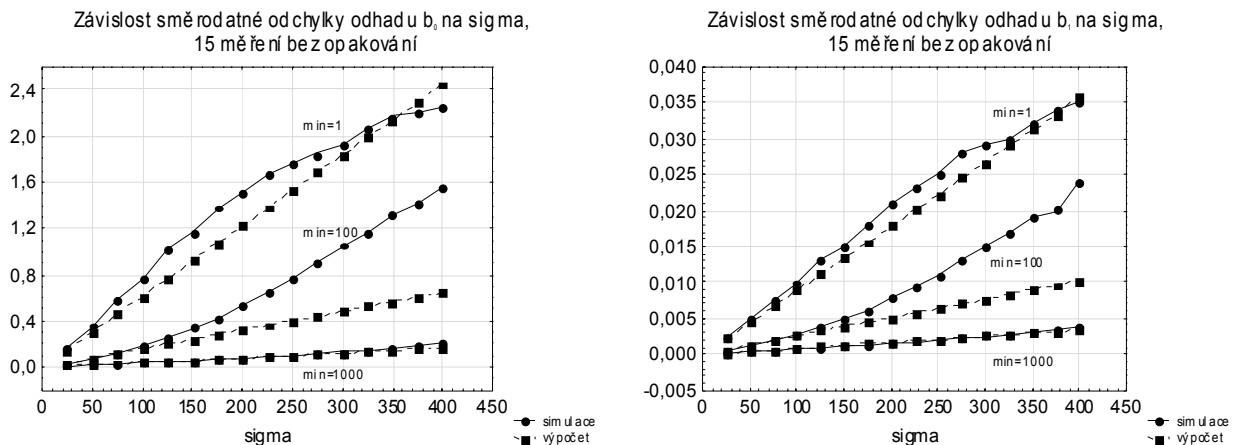
Simulační studie realizovaná pomocí software Mathcad – viz [5] spočívá v tom, že k přesným hodnotám modelu $y_i = \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)$ pro $x_i = 5i - 4$, $i = 1, 2, \dots, 15$, se přičte náhodná složka $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$. Hodnoty směrodatné odchylky σ jsou ve všech případech zvoleny postupně $\sigma = 25, 50, 75, \dots, 400$.

Každá simulace se opakuje 10 000 krát a vždy se vypočte empirický odhad směrodatné odchylky odhadu regresních parametrů β_0, β_1 .

5. Porovnání dvou metod odhadu směrodatné odchylky odhadů regresních parametrů

Pro zvolené tři modely s hodnotami minima 1, 100 a 1000 prozkoumáme, jak se chovají odhady směrodatné odchylky odhadů regresních parametrů β_0, β_1 v závislosti na σ . Porovnááme odhady získané výpočtem dle vzorce $s_{b_j} = \sigma c_j, j = 0, 1$ a odhady získané ze simulací.

Na obr. 1 jsou plnou čarou s kolečky značeny výsledky získané simulací a přerušovanou čarou se čtverečky výsledky získané výpočtem.



Obr. 1: Závislost odhadu směrodatné odchylky odhadu regresního parametru na σ pro odhady získané výpočtem a simulacemi

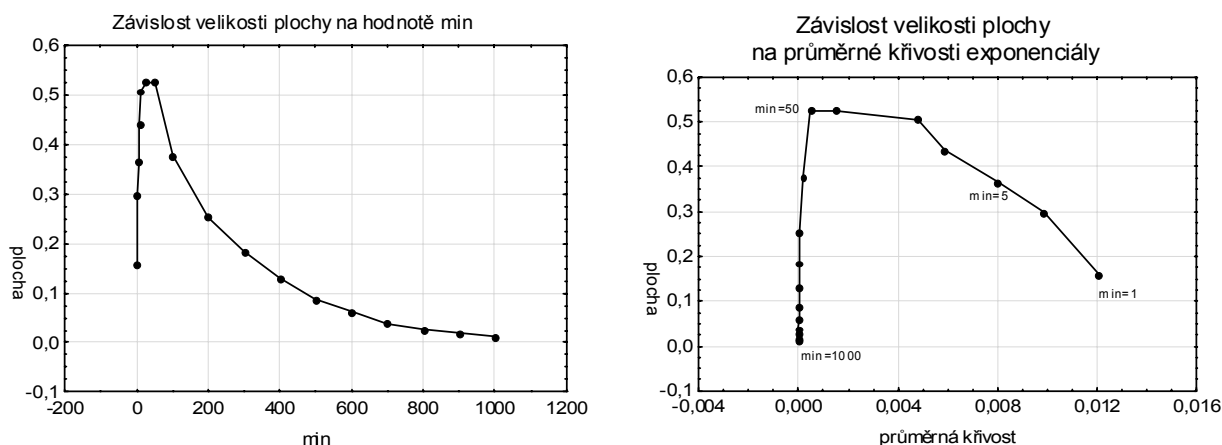
Pro oba regresní parametry pozorujeme, že nejmenší rozdíl mezi oběma metodami odhadu je pro model s minimumem = 1000, naopak největší je v případě, kdy minimum = 100. Rovněž je patrné, že pro modely s minimumem = 100 a 1000 se rozdíl zvětšuje s rostoucím σ , zatímco pro model s minimumem = 1 se rozdíl nejprve zvětšuje, pak zmenšuje a posléze opět zvětšuje.

O rozdílnosti obou metod odhadu zřejmě nejlépe vypovídá plocha sevřená křivkami popisujícími závislost směrodatné odchylky odhadu $s_{b_j}, j = 0, 1$ na σ , a to pro odhad získaný simulacemi a výpočtem.

Na obr. 1 pozorujeme, že pro malé hodnoty σ (od 25 do 100) se výsledky získané simulací a výpočtem liší jen málo. S rostoucí variabilitou náhodných odchylek se však zvětšuje nesoulad mezi těmito dvěma metodami odhadu.

Zajímá nás, které faktory mohou mít vliv na velikost zkoumané plochy. Zaměřili jsme se na minimální hodnotu exponenciály a její průměrnou křivost.

Na obr. 2 je znázorněna závislost velikosti plochy na minimální hodnotě exponenciály a na její průměrné křivosti.



Obr. 2: Závislost velikosti plochy na minimální hodnotě a na průměrné křivosti exponenciály

Z obr. 2 je patrné, že velikost plochy velmi rychle roste, maxima dosahuje pro $\min = 25$ či 50 a poté pozvolna klesá. Pro $\min = 1000$ je již téměř nulová, což svědčí o dobré shodě obou způsobů výpočtu směrodatné odchylky regresních parametrů. Dále vidíme, že s rostoucí průměrnou křivostí velmi rychle narůstá sledovaná plocha. Maxima je dosaženo pro průměrnou křivost $0,00151$ (což odpovídá $\min = 25$) nebo $0,00051$ – to odpovídá $\min = 50$. Pak dochází k pozvolnému poklesu velikosti plochy, tedy se zlepšuje shoda mezi simulací a výpočtem.

6. Závěr

Z provedených simulací je možno vyvodit určité závěry.

- Odhady regresních parametrů získané iterovanou váženou MNČ se od skutečných parametrů odlišují méně než odhady získané obyčejnou MNČ. Rozdíly se prohlubují se zvětšující se variabilitou náhodných odchylek od modelu.
- Odhady směrodatné odchylky regresních parametrů získané výpočtem a simulací se téměř vždy odlišují a na tuto odlišnost má vliv minimální teoretická hodnota exponenciály a její průměrná křivost.
- Soulad mezi oběma metodami odhadu je celkem dobrý pro velmi nízké či naopak velmi vysoké hodnoty průměrné křivosti a pro nízké či vysoké hodnoty minima.

Literatura

- [1] Maroš, B., Budíková, M.: Analýza exponenciálního regresního modelu simulačními metodami. 12th International Conference on Applied Mathematics APLIMAT 2013.
- [2] Maroš, B., Budíková, M.: Factors influencing the use of weighting function. In Jiří Zelinka, Martin Řezáč. Financial Mathematics in Practice II, Book of short papers. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2013.
- [3] Maroš, B., Budíková, M.: Význam váhové funkce v linearizovatelných regresních modelech. Informační Bulletin České statistické společnosti, roč. 23, č. 2, 2012.
- [4] Maroš, B.: Empirické modely I. CERM, Brno 2001
- [5] Mathcad software. Dostupné na <http://www.dtn.mathsoft.cz/>
- [6] Rao, C. R.: Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace, Academia, Praha 1978
- [7] StatSoft, Inc. (2011). STATISTICA (data analysis software system), version 10. www.statsoft.com. software.
- [8] Zvára, K.: Regresní analýza. Academia, Praha 1989.

MSA FOR ATTRIBUTIVE CHARACTERISTICS – APPLICATIONS OF THE CROSS TAB METHOD FOR PRODUCT QUALITY CONTROL

Katarzyna Midor

**Bielsko-Biała School of Finances and Law
ul. Cz. Tańskiego 5, 43-382 Bielsko-Biała
E-mail : katarzyna.midor@polsl.pl**

Abstract: In attributive systems, which include chiefly tests and visual inspection, evaluation of measurement systems requires choosing a proper method. In the case of final product control, where the evaluated characteristics are visual features, it is often difficult or impossible to determine a measurement value. In such a situation one can make use of an expert's opinion instead of a measured reference value, in a form of e.g. calliper or micrometer measurement. The Cross Tab Method is the only method consistent with MSA textbook which can be used in this case.

The article will present the MSA methodology effected by means of the Cross Tab Method, which is used in inspections based on senses, e.g. sight, hearing, touch, smell. This method is a good solution for monitoring the reliability of a measurement system, as by giving a particular numerical evaluation, it allows the effectiveness of the implemented improvement activities to be monitored.

Introduction

Measurement system analysis for continuous attributes is a quite well-identified and well-established topic in quality management systems. In the case of attributive systems, which include mainly tests and visual inspections, the tools are not always properly identified and, in consequence, the evaluation of these measurement systems is not always correct [1].

Despite the development of measurement methods based on increasingly objective instruments, in many enterprises the dominant method of quality control is still a control based solely on human senses. Controllers, deciding about the further fate of a product, are still present in the initial, inter-operational or final control. However, very frequently we do not know what effectiveness of „spotting defects” is ensured by our one-hundred per cent control. For this reason, no matter if this is a visual inspection, an inspection based on a test or even on an inspection device (which provides a diagnosis: OK/NOK), it is worth knowing this effectiveness. A method which allows evaluating the effectiveness of an alternative control system (OK/NOK) is the method commonly referred to as the Cross Tab Method. It belongs to the canon of measurement system analysis methods for alternative control (Attribute Gauge

Study), recommended by the automotive branch ((MSA 3rd Edition. Ford, Chrysler, GM. 2002) [3]. Owing to this method, in the case of a negative evaluation of the effectiveness of an inspection, we can also get to know its causes and, in consequence, determine a possibility of improving the situation without resorting to expensive investments in inspection equipment. It is worth noticing that one of the results of this type of analysis is an assessment of the effectiveness of inspection conducted by particular controllers; it is therefore possible to optimally select people for performing the key controlling operations.

The course of an examination by the Cross Tab Method

An examination by means of the Cross Tab Method requires the following five stages [2,3]:

Stage I Preparation of samples

The following should be prepared for an examination:

- ✓ 30 - 50 samples (product pcs)
- ✓ Approximately 20% of pieces prepared for the examination should be out of specification – by way of example, in the case of a visual attributes inspection this means that ca 20% of pieces should be rejected during a visual inspection.
- ✓ Particular pieces should be numbered; if possible, however, this should be done in a way invisible for the evaluators.
- ✓ Defective parts should be randomly scattered among the good parts.
- ✓ When selecting particular pieces, it is necessary to record the Expert's decision for each of them.

An expert in our examination can be a person having the highest qualifications in the evaluation of particular characteristics. Additionally, expert's decisions can be taken in conditions which are better than ordinary (production) conditions of evaluation, as it is important for us that the expert's decisions are as „true” as possible, that is, compliant with our expectations regarding acceptance and rejection of a piece.

Stage II The course of an examination

- ✓ Three operators (e.g. signs A, B, C) should take part in an examination.
- ✓ Each of them should evaluate all the parts three times, in three series.
- ✓ An examination should be conducted in the following way:
 - 1) Operator A evaluates all the pieces for the first time
 - 2) Operator B evaluates all the pieces for the first time
 - 3) Operator C evaluates all the pieces for the first time
 - 4) Operator A evaluates all the pieces for the second time
 - 5) Operator B evaluates all the pieces for the second time
 - 6) Operator C evaluates all the pieces for the second time
 - 7) Operator A evaluates all the pieces for the third time
 - 8) Operator B evaluates all the pieces for the third time
 - 9) Operator C evaluates all the pieces for the third time
- ✓ During an evaluation the operators take a decision on the acceptance (value 1 or OK) or rejection (value 0 or NOK) of a particular part.

During an evaluation one should pay attention to the following issues:

- ✓ Operators should not know their previous decisions or the expert's decision.
- ✓ Operators carrying out an evaluation should not know which part they are checking.
- ✓ Records should be taken by an independent person, who does not participate in the inspection (only the recording person knows which piece was evaluated and what the previous decisions were).
- ✓ An examination should be conducted in an ordinary measurement environment. For example, if operators normally carry out an evaluation in the hall, in poor lighting and

in the environment of numerous disturbances, an evaluation of the measurement system should not be conducted in a sterile, well-lit laboratory, as the obtained results will not take into consideration these disturbances.

- ✓ An evaluation should be carried out within a standard time, which means that an evaluating person cannot take a decision longer than under normal production conditions.

Stage III Recording the results in an Excel measurement sheet

The obtained results should be entered in a measurement sheet. An example of such a sheet is contained in Table 1.

Table 1 Results recording in an Excel measurement sheet

Subsequent measurement	Operator A			Operator B			Operator C			Expert	
	A-1	A-2	A-3	B-1	B-2	B-3	C-1	C-2	C-3	REF	Result
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	+
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	+
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
6	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	non-conformity
7	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	non-conformity
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	+
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	+
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	+
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	+
14	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	non-conformity
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	+
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	+
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	+
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	+
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	+
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	+
21	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	non-conformity
.											
.											
49	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	+
50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-

NUMBER OF EVALUATED PIECES 50

Stage IV Calculation of Kappa coefficient (building a cross table)

In order to calculate the Kappa coefficient, the following should first be computed:

- ✓ a sum of observed shares P_o (both operators took the same decisions: good (1) – good (1), bad (0) – bad (0))
- ✓ a sum of expected shares P_e , (expected consistence share „BAD (0) + expected consistence share „GOOD (1)“)

Calculation of the Kappa coefficient:

If both discussed values are known: the sum of the observed shares P_o and the sum of the expected shares P_e , the Kappa coefficient for pair A – B, B – C, A – C, can be calculated according to the formula:

$$K = \frac{P_o - P_e}{1 - P_e} = \frac{\text{The sum of observed consistence shares} - \text{The sum of expected consistence shares}}{1 - \text{The sum of expected consistence shares}}$$

Additionally, the Kappa coefficient for pair A – Expert, B – Expert, C – Expert should be calculated.

Depending on the obtained results of the Kappa coefficient values, the interpretation should be as follows:

Results ≤ 0.4	unacceptable level of consistence
Results > 0.4 and ≤ 0.75	acceptable level of consistence
Results > 0.75	high level of consistence

The Kappa coefficient does not indicate the extent of compliance, its value merely indicates whether the operators' decisions are consistent or not.

Calculation of auxiliary indicators

In order to compare the consistence of decisions taken by an operator with decisions identified as reference (Expert's decisions), it is necessary to calculate the effectiveness of each operator (i.e. how often the operator obtained the same result during three inspections and how often this result was consistent with the reference (Expert's) decisions).

Effectiveness is calculated according to the following formula:

$$\text{Effectiveness} = \frac{\text{A number of products for which consistent decisions were obtained}}{\text{The number of all the examined products}}$$

Numerator – how many times the operator said consistently 1, 1, 1, when the Expert said 1, and how many times the operator said 0, 0, 0 when the Expert's decision was 0.

Stage V Measurement system evaluation

The manner of interpreting the results obtained by means of the Cross Tab Method has been presented in Table 2.

Table 2. Guidelines for measurement system evaluation

Guidelines for measurement system evaluation	Effectiveness	% of false alarms- CONFORMING PRODUCTS	% of improper detection of NON- CONFORMING PRODUCT
Acceptable for operator	$\geq 90\%$	$\leq 5\%$	$\leq 2\%$
Conditionally acceptable for operator – may require improvement	$\geq 80\%$	$\leq 10\%$	$\leq 5\%$
Unacceptable for operator – requires improvement	$< 80\%$	$> 10\%$	$> 5\%$

Frequency of non-detection (acceptance of non-conforming products – II type error (false positive) = number of erroneous acceptance decisions (1) / in relation to the number of all decisions requiring rejection (0) by a given operator.

Frequency of false alarm (rejection of conforming products) – I type error (false negative) = number of erroneous rejection decisions (0) / in relation to the number of all decisions requiring acceptance (1) by a given operator.

An evaluation of the obtained results should result in an analysis and the asking of questions:

- ✓ Do the evaluating persons need a better training?

- ✓ Is it necessary to change the environment of tests?
- ✓ Is the risk acceptable?
- ✓ Does the customer accept such a level of risk? What results does he expect?

Literature

1. Feliks J., Lichota A., „Wspomaganie analizy systemów pomiarowych (MSA), ARCHIVES of FOUNDRY ENGINEERING, nr 33/3, 2010, str. 169-174.
2. Materiały szkoleniowe firmy Team prevent: MSA dla cech atrybutywnych-Metoda Kappa.
3. Measurement System Analysis MSA- Third Edition, Wydawca DaimlerChrysler Corporation, Ford Motor Company, General Motors Corporation, UK 2002.

INTERAKTIVNÍ POMŮCKY A APLIKOVANÉ ÚLOHY VE VÝUCE DIFERENCIÁLNÍHO POČTU

Zuzana Morávková

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TU Ostrava
17. listopadu 15, 708 33 Ostrava Poruba
E-mail: zuzana.moravkova@vsb.cz

Abstrakt: Ukážeme si jak pomocí aplikovaných úloh a interaktivních pomůcek vytvořených v programu GeoGebra motivovat studenty ke studiu diferenciálního počtu funkce jedné proměnné.

Abstract: Students are motivated to study calculus by applied tasks and interactive tools created in program GeoGebra.

1 Úvod

V rámci projektu FRVŠ vznikly na naší katedře nové studijní materiály pro učivo předmětů Matematika I (diferenciální počet funkce jedné proměnné, základy lineární algebry a analytické geometrie) a Matematika II (integrální počet, diferenciální počet funkcí dvou proměnných, základy diferenciálních rovnic).

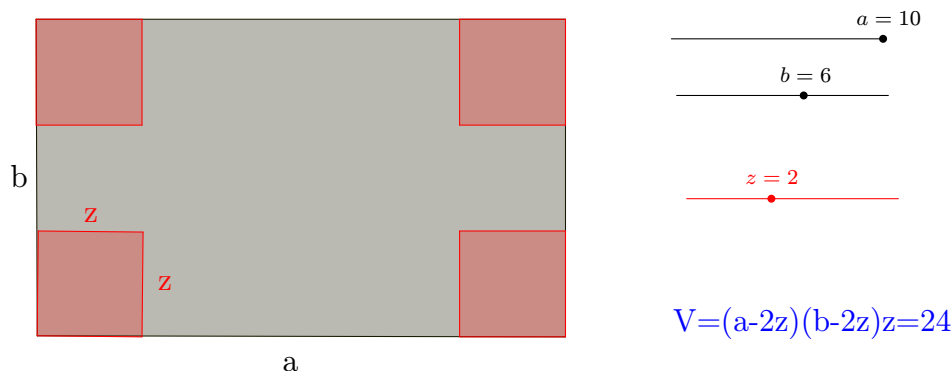
Součástí těchto materiálů je i řada interaktivních pomůcek vytvořených v programu GeoGebra, které jsou dostupné na webu a pomáhají k lepšímu pochopení dané problematiky. Dále byly studijní materiály doplněny o jednoduché aplikované úlohy. V tomto článku si ukážeme jednu extrémní úlohu, včetně jejího zpracování v programu GeoGebra a interaktivní pomůcku popisující pojem derivace funkce v bodě.

2 Aplikované úlohy

Extrémní úlohy jsou nejen častou aplikací aparátu diferenciálního počtu, ale jsou vhodné i k motivaci. Ukážeme si jednu jednoduchou extrémní úlohu a její zpraco-

vání v programu GeoGebra. Sada aplikovaných úloh je volně dostupná na webu: <http://www.geogebraTube.org/user/profile/id/7057/p/collections>

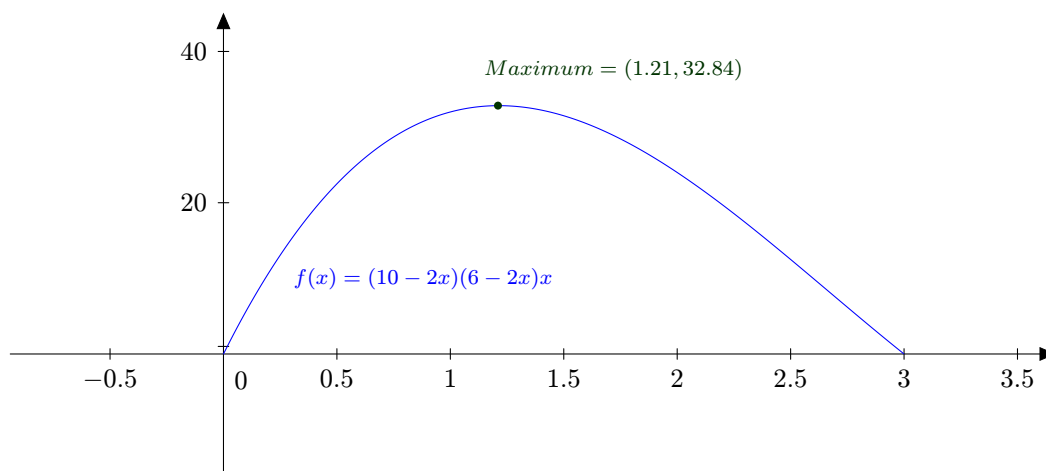
Úloha: V rozích obdélníkové lepenky o rozměrech a , b vyřízneme čtverce (o délce strany z) tak, abychom z ní mohli složit krabici. Určete velikost výřezu tak, aby objem krabice byl co největší.



Obrázek 1: Rozbor extrémální úlohy v programu GeoGebra

Rozbor této úlohy (viz obrázek 1) jsme vytvořili v programu GeoGebra. Proměnné a , b , z jsou v ní reprezentovány posuvníky. Hodnotu objemu krabice (kvádrů spočítáme ze vztahu $V = (a - 2z)(b - 2z)z$.

Změnou hodnoty z můžeme sledovat změnu hodnoty objemu V a její maximální hodnotu zatím hledat tabelací s využitím tabulkového procesoru, který je součástí programu GeoGebra. Na vztah mezi veličinou z a V lze pohlížet jako na funkční závislost, proto si vykreslíme graf funkce $V(x) = (a - 2x)(b - 2x)x$ na intervalu $\langle 0, \min(a, b)/2 \rangle$ (viz obrázek 2). Na grafu vyznačíme maximum, které najdeme příkazem programu GeoGebra.



Obrázek 2: Graf funkce a maximum

3 Interaktivní pomůcky

Nedílnou součástí studijních materiálů se staly interaktivní pomůcky vytvořené v programu GeoGebra. Jsou volně dostupné a spustitelné na webu:

<http://www.geogebraTube.org/user/profile/id/7057/p/collections>

Popíšeme interaktivní pomůcku, která pomáhá studentům pochopit definice pojmu *derivace funkce f v bodě x₀*.

Zakreslíme graf funkce *f* a vyznačíme na něm umístěný bod $T = (x_0, f(x_0))$. Dále je dán další bod $A = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ ležící na grafu funkce *f*. Sestrojíme přímkou *p* procházející body *A* a *T*. Pak směrnice této přímky je dána:

$$k_p = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

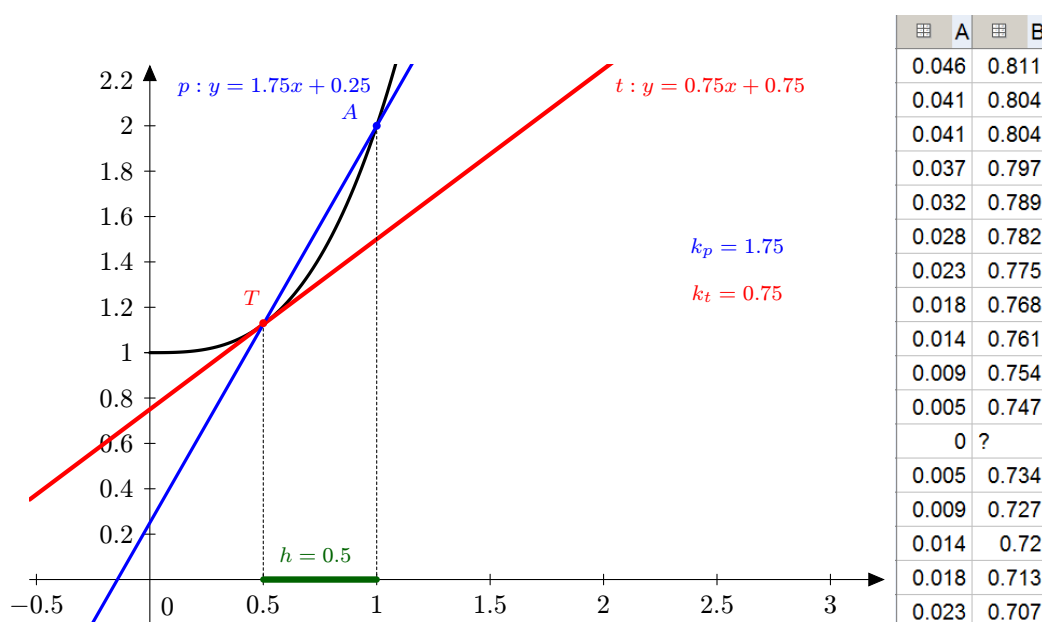
Bude-li bod *A* pohybovat k bodu *T*, tak se přímkou *p* bude blížit k tečně *t* v bodě *T*. Tedy směrnice tečny je limita směrnice přímky *p* pro $h \rightarrow 0$:

$$k_t = \lim_{h \rightarrow 0} k_p = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Derivace funkce *f* v bodě x_0 je definována jako hodnota této limity.

Interaktivní pomůcka (viz obrázek 3) je sestavena tak, že uživatel může posouvat bod *A* a sledovat nejen přímkou *p*, ale i hodnotu její směrnice k_p .

V tabulce se zobrazují hodnoty *h* a hodnoty k_p . Pro hodnotu $h = 0$ je hodnota k_p zjevně nedefinována a tak je pro její výpočet potřeba použít aparát limity.



Obrázek 3: Interaktivní pomůcka *Derivace funkce v bodě*

Poděkování

Problematika je řešena v projektu FRVŠ 1103/2013 „Vytvoření e-learningových kurzů s multimediálními studijními materiály pro matematické předměty na vybraných fakultách Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava“.

MATHEMATICAL MODELING OF PHYSICAL PROBLEMS

Joanna Napiórkowska

Institute of Mathematics and Computer Science,
Opole University, Oleska 48, 45-052 Opole, Poland
E-mail: jn@math.uni.opole.pl

Abstract: The present speech gives a survey of different approaches to studying physical processes and engineering problems. These phenomena can be described by differential equations. For most real-world problems it is difficult or even impossible to obtain an exact, analytic solution. Then, the numerical methods are used to obtain approximate solutions to such problems. Similarly, the numerical methods allow us to solve a wide range of engineering problems. Many methods, both analytic and numerical, can be performed on computer algebra systems. Today, computer simulations are used so often that they have become a useful part of mathematical modeling of many physical and engineering problems.

Selected methods and the examples of applications will be discussed in my speech and my publication.

1 Introduction

Changes are characteristic for the most systems in science, engineering, economics, and other areas. Differential equations well describe how such systems evolve in time, that is, these equations model a given physical phenomenon or engineering problem. A solution of an appropriate differential equation can be found analytically, approximately, graphically or numerically. Both analytic and numerical methods can be performed on computer algebra systems such as Maple, Mathematica, Matlab. Furthermore, in order to model, simulate and analyze dynamical systems, researchers and engineers around the world use packages like Simulink and MapleSim.

By a mathematical model we mean an equation (or set of equations) that describes some problem or phenomenon which occurs in science, engineering or other fields. Mathematical modeling is the process whereby we obtain and analyze the model.

2 Analytic methods and their applications

An analytic method leads to a formula for the solution. However, it is frequently difficult or even impossible to obtain an analytic solution.

Model of the motion of a mass, suspended from a linear pendulum when it is subject to a periodic force

Sometimes in mechanical system an external periodic force has the same frequency as the natural oscillations in this system. Then the phenomenon of resonance occurs and the results can be disastrous. For example, a company of soldiers, marching in cadence across a suspension bridge at the same frequency as the natural frequency of the structure, can set bridge in motion and destroy this construction.

Remind that the damped spring-mass equation

$$mx'' + cx' + kx = F(t),$$

where $x = x(t)$ is the position of the particle at time t , m - the mass of the particle, c - the damping constant and k - the spring constant, models the oscillations of a particle under action of a restoring force $-kx$, a frictional force $-cx'$ and an external force $F(t)$.

The phenomenon of beats is modeled by the equation

$$x'' + (55)^2x = \cos 45t$$

We can find the solution when the initial conditions are $x(0) = x'(0) = 0$.

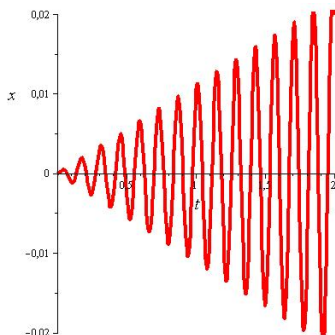
The solution to the homogeneous linear equation with constant coefficients obtained with access to characteristic equation is $x_h(t) = C_1 \cos 55t + C_2 \sin 55t$, where C_1 and C_2 are the arbitrary constants. To calculate a particular solution to the nonhomogeneous equation, note that the forcing term has the cosinusoidal form. Therefore, we guess the trial form of the particular solution $x_p(t) = (a \cos 45t + b \sin 45t)t$. Substituting this form into the original equation gives the exact values of the coefficients $a = 0$ and $b = 1/90$. Consequently, the general solution to the original nonhomogeneous equation is the sum

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 \cos 55t + C_2 \sin 55t + \frac{1}{90}t \sin 45t.$$

Applying the initial conditions, we get

$$x(t) = \frac{1}{90}t \sin 45t.$$

This solution oscillates without bound because of the increasing time factor t multiplying that term. The result can be displayed using Maple, but we can also use MapleSim to simulate the motion of a mass.



Laplace Transform

The Laplace method for solving linear differential equations with constant coefficients is based on transforming the differential equation into an algebraic equation. In physics and engineering it is used for analysis of linear time-invariant systems such as electrical circuits, harmonic oscillators, optical devices, and mechanical systems. Each of these models contains a nonhomogeneous forcing term that is either piecewise continuous function or acts as an impulse. We can easily solve the algebra problem for an associated transformed function $U(s)$ and then return to the state function $u(t)$ via an inverse transform.

Let $u = u(t)$ be a given function defined on $[0, \infty)$. The Laplace transform of $u(t)$ is the function $U(s)$ defined by

$$U(s) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt,$$

provided the improper integral exists. We use the notation $U(s) = \alpha[u(t)](s)$.

Remind that the Heaviside function (the unit switch function) is defined by

$$h_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < a, \\ 1 & \text{if } t \geq a. \end{cases}$$

The Laplace transform of the Heaviside function is $\alpha[h_a(t)] = 1/s \cdot e^{-as}$, $s > 0$.

Model for the charge in an RC circuit when the electromotive force (emf) is applied only at a single instant of time

There are a lot of examples from electrical engineering where the electromotive force has an impulse form, instead of to be a continuous function.

Consider simple electric circuit containing an one-volt battery as a resistor and with zero initial charge on the capacitor. Let $R = 1$ and $C = 1/3$. We calculate the response of an RC circuit with a unit impulse at time $t = 1$. Then the emf is given by the delta function $\delta_a(t)$ that is zero everywhere except at $t = a$, where it is infinite. The delta function is a generalized function and satisfies the identity

$$\int_{a-\epsilon/2}^{a+\epsilon/2} \delta_a(t) dt = 1 \quad \text{for all } \epsilon > 0.$$

Note that the Laplace transform of the delta function is expressed as $\alpha[\delta_a(t)] = e^{-as}$.

Applying Kirchhoff's voltage law (The algebraic sum of the voltage drops around any closed loop in an electric circuit must be zero.) to the RC circuit, we get

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t),$$

where $q = q(t)$ is the charge on the capacitor, R - the resistance and C - the capacitance.

In our case, the governing equation for the charge on the capacitor

$$q'(t) + 3q(t) = \delta_1(t)$$

is accompanied by initial data $q(0) = 0$.

Taking the Laplace transform of everything in the differential equation and applying the initial conditions, we get

$$sQ(s) + 3Q(s) = e^{-s}.$$

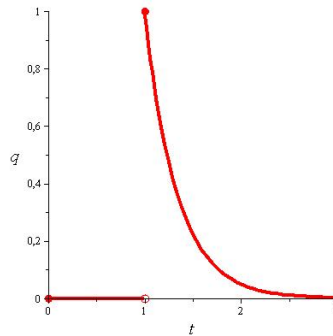
Solving this operator equation for the transformed function $Q(s)$, we have

$$Q(s) = \frac{1}{s+3}e^{-s}.$$

Finally, by the switching property of the Laplace transform and from the table, the inverse transform is

$$q(t) = \alpha^{-1}\left[\frac{1}{s+3}e^{-s}\right] = h_1(t)e^{-3(t-1)}.$$

The charge response is zero up to time $t = 1$, when the impulse occurs. At that time it jumps to the value 1 and then decays away. The plot the charge response can be produced using computer algebra systems like Maple.



3 Comments on numerical methods

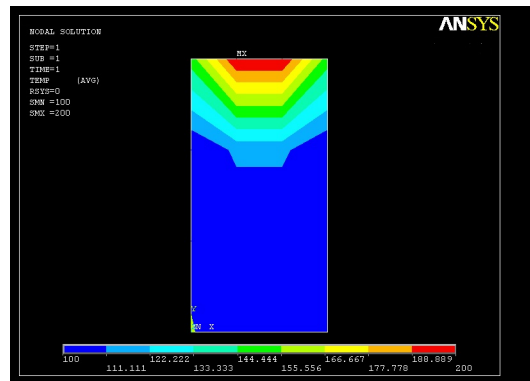
Many real-world problems are too complicated to solve analytically. Therefore, we are interesting in finding an approximate solution. We often solve such problems numerically, using a computer algorithm. A numerical solution can be represented by a data set or by a graph. Nowadays, numerical solutions of the equations describing the physical process or engineering problem can be obtained with the help of the program - called the solver. Computational methods used in solvers include among others the finite element method (FEM), the boundary element method (BEM) and the finite difference method (FDM). The advantage of these methods is that a given problem can be modeled in the computer memory, what in the case of engineering problems simplifies and speeds up the design process, without having to build a prototype. The largest number of the computation programs use FEM. The most commonly used packages for the analysis of problems by FEM are: ABAQUS, ADINA, ANSYS, FIDAP, MSC/NASTRAN, OPERA-2D.

Among the applications of the computational packages are: analysis of the wagon pneumatic suspension, modeling of the vehicle collisions, modeling of the material damage, simulation of the metal cutting, simulation of the cracking pipe in a nuclear reactor, simulation of the launching of a drilling platform, analysis of the hull strength of the passenger ferry, stress analysis of long bones during fracture, analysis of the flow of synovial fluid in the hip joint, modeling of the medical stents.

Analysis of the temperature distribution in ANSYS

Let us analyze the temperature distribution inside a rectangular plate. Consider a rectangular plate with the width $a = 10[m]$ and the height $b = 20[m]$. Let $E = 210000[\frac{N}{mm^2}]$ be the Young's modulus, $\lambda = 401[\frac{W}{mK}]$ - the coefficient of thermal conductivity, $\nu = 0.3$ - the Poisson's ratio, $T_1 = 200[^\circ C]$ - the temperature of upper edge, $T_2 = T_3 = T_4 = 100[^\circ C]$ - the temperature of other edges.

Using ANSYS, we get the following temperature distribution:



Numerical methods are often used in science and industry. In theoretical studies oriented on the applications the computer simulation method is a highly effective tool because it gives the possibility to compare results with the experimental data. Numerical support for the engineering design process allows for reduction of costs (reducing the number of prototypes) and saving of time.

4 References

1. J. Istaş, *Mathematical Modeling for the Life Sciences*, Springer-Verlag, New York 2005.
2. J. D. Logan, *A First Course in Differential Equations*, Springer-Verlag, New York 2006.
3. S. Lynch, *Dynamical Systems with Applications using Maple*, Birkhäuser, Boston 2010.

SOME REMARQUES TO PLASTIC DEFORMATION OF Cd – Zn ALLOYS SINGLE CRYSTALS

Vladislav NAVRÁTIL, Jiřina NOVOTNÁ

Katedra fyziky Pedagogické fakulty Masarykovy Univerzity
Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy Univerzity
E-mail: navratil@ped.muni.cz ; novotna@ped.muni.cz

Abstract. It is well known that plastic deformation of metals is directed by motion of dislocations. The character of plastic deformation is a sensitive function of such variables as temperature, strain, concentration of solute atoms. In fact, impurities play an important part in metal physics research. They form a particular species of point defects, and are able to interact with the other lattice defects which exist in the metal and determine a great number of its properties. It is the purpose of the present work to examine the temperature and solute atoms concentration influence on mechanical properties of Cd – Zn alloys single crystals.

Keywords: mathematics, thermodynamics, dislocations, creep, activation parameters..

1. INTRODUCTION

It is well known that the flow stress of a crystal τ_a can be decomposed into two components τ_i and τ^* . The first one reflects the microstructure (internal long range elastic interactions among obstacles and dislocations). The second component (τ^*) is the stress necessary to push dislocations over local energy barriers (small obstacles, an intrinsic lattice resistance). Then we can write

$$\tau_a = \tau_i + \tau^* \quad (1)$$

Internal stress τ_i is slowly decreasing with increasing temperature (similarly as elastic constants). Short range interactions of dislocations with energy barriers (described by τ^*) takes place in such a small volume that it is strongly influenced by thermal vibrations. Thermal activation helps dislocation to overcome these barriers thus the flow stress is decreasing with increasing temperature. These short – range thermally activated processes govern almost all the temperature dependent mechanical properties of materials

2.THERMALLY ACTIVATION THEORY

The concept of thermally activated plastic deformation was introduced as early as 1925 when Becker [1] applied the Boltzmann principle to the nucleation of a slip region. After the introduction of the absolute reaction rate theory of Eyring [2], Kauzmann [3] formulated a general chemical rate theory of plasticity. Similar equations were derived by Seitz and Read [4] based on thermally activated dislocation motion and by Nowick and Machlin [5] based on thermally activated dislocation generation. Later many efforts have been concentrated on definition of activation parameters, its measurement and interpretation [6, 7].

2.1. Activation parameters

The average velocity of a dislocation traveling in an crystal can be considered as a thermally activated process, governed by the Arrhenius type equation

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{\Delta F}{kT}\right) \quad (2)$$

where ΔF is the standard free energy of activation, k is the Boltzmann constant, T is the absolute temperature and v_0 is the velocity when ΔF is zero. The term v_0 may contain the mean distance the dislocation moves per activation event, a fundamental frequency such as kT/h with h being the Planck constant, and a possible geometric factor. On the other hand, v_0 can simply be regarded as the maximum attainable velocity such as shear wave velocity in the crystal.

If a shear stress τ^* is applied in the slip plane so that τ^* does positive work when the dislocation moves forward, then the free energy of activation is decreased for forward motion and increased for backward motion by $\tau^* b A^*$, where b is the Burgers vector of the dislocation and A^* is the area swept by the dislocation during an activation event (activation area). This indicates that external stress may fully activate the dislocation. The stress that can achieve this is τ_c^* which is defined as the friction stress. Let the activation area be A_0^* at $\tau^* = 0$; a consideration of the reversible process shows

$$\Delta F_0 = b \int_0^{A_0^*} \tau^* dA^* \quad (3)$$

Assuming that a relation exists between τ^* and A^* during the activation event. Hence at an applied stress τ^* , the activation free energy for the forward motion is

$$\Delta F_f = \Delta F_0 - b \tau^* A^* - b \int_{A^*}^{A_0^*} \tau^* dA^* = \Delta F_0 - b \int_0^{\tau^*} A^* d\tau^* \quad (4)$$

Similarly, the activation free energy for backward motion is

$$\Delta F_b = \Delta F_0 + b \int_0^{\tau^*} A^* d\tau^* \quad (5)$$

Equations (2), (4) and (5) give the average velocity of the dislocations [8,9]:

$$v = 2v_c \exp\left(-\frac{\Delta F_0}{kT}\right) \sinh \frac{b}{kT} \int_0^{\tau^*} A^* d\tau^* \quad (6)$$

Which at small τ^* gives

$$v = 2v_c \frac{A_0^* \cdot \tau^* b}{kT} \exp\left(-\frac{\Delta F_0}{kT}\right) \quad (7)$$

a linear relation between stress and velocity. At large τ^* the velocity becomes

$$v = v_c \exp\left(-\frac{\Delta F_0 - b \int_0^{\tau^*} A^* d\tau^*}{kT}\right) \quad (8)$$

A comparison with (2) shows

$$A^* = -\frac{1}{b} \left(\frac{\partial \Delta F}{\partial \tau^*} \right)_{T,p} = \frac{kT}{b} \left[\frac{\partial \ln\left(\frac{v}{v_c}\right)}{\partial \tau^*} \right]_{T,p} \quad (9)$$

It is to be noted that Eq. (9) is valid only if the hyperbolic sine function in (6) can be approximated by an exponential function.

In the literature the quantity $A^* b$ is sometimes called the “activation volume”. To avoid confusion with the activation volume defined as the pressure derivative of the standard free energy of activation, the term “activation area” is defined by Eq. (9).

Similarly other thermodynamic functions can be derived [6,7]:

The „Activation Enthalpy“:

$$\Delta H = -b.A^*T \left(\frac{\partial \tau^*}{\partial T} \right)_{p,v/v_c} \quad (10)$$

The „Activation Volume“:

$$\Delta V = b.A^* \left(\frac{\partial \tau^*}{\partial p} \right)_{T,v/v_c} \quad (11)$$

and the „Activation Entropy“:

$$\Delta S = k \left[\frac{\partial \ln \left(\frac{v}{v_c} \right)}{\partial T} \right] = \frac{\Delta H - \Delta F}{T} \quad (12)$$

The equations (9) and (10) are not yet suitable for measurements of A^* and ΔH from indirect techniques (from the tensile test, creep or stress relaxation test). It is necessary to know the dependence of the shear strain rate on the average velocity of dislocations and density of mobile dislocations. Following the [9] this dependence may be expressed by the relation

$$\frac{da}{dt} = a^{\bullet} = b.v.\rho \quad (13)$$

Using this equation the activation parameters can be rewritten in the forms

$$A^* = \frac{kT}{b} \left(\frac{\partial \ln a^{\bullet}}{\partial \tau^*} \right)_{T,p} = \frac{kT}{b} \left(\frac{\Delta \ln a^{\bullet}}{\Delta \tau^*} \right)_{T,p} \quad (14)$$

$$\Delta H = k.T^2 \left(\frac{\partial \ln a^{\bullet}}{\partial T} \right)_{p,\tau^*} = k.T^2 \left(\frac{\Delta \ln a^{\bullet}}{\Delta T} \right)_{p,\tau^*} \quad (15)$$

From the activations parameters A^* and ΔH the most probably rate controlling mechanisms of the creep can be estimated [7,8] (see Tab.1). In our measurements we have confirmed ourselves to the investigation of the activation area from the creep tensile test only (Fig.1).

Tab.1. The stress dependence of the activation area [7,8,9].

Mechanism	$A^*(\tau)$ dependences
Dislocation – tetragonal defect interaction	$\approx \left(\sqrt{\frac{\tau_0}{\tau}} = 1 \right)$
Cross slip	$\sim \frac{c}{\tau}$
Viscous friction (according to Gillman)	$\sim \frac{E}{\tau^2}$
Jog motion	<i>Const.</i>
The break-away of the Cottrell atmospheres	$\sim \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0} \right)^2; \tau_0 \triangleright \tau$
The recombination of the fixed splitting dislocations (according to Escaig)	$\sim \frac{1}{\tau^2}$
Dislocation forest intersection a) dislocation – dislocation forest elastic interaction	<i>Const.</i>
b) dislocation – dislocation forest anelastic interaction	$\sim \frac{1}{\tau^3}$

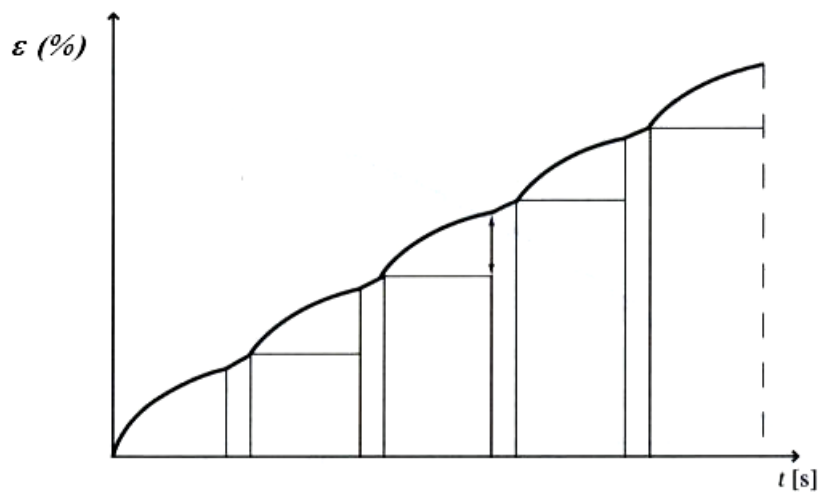


Fig.1. The incrementally loading method of creep deformation

3. CONCLUSION

According to our experimental results [10 - 13] we can conclude, that in the temperature interval 1,5 K – 35 K the activation area value is in the limits $10b^2$ - $100b^2$. These values correspond to some of the dislocation motion:

1. Point defect drag
2. Point defect interaction
3. The cross slip of the screw dislocations.

In the temperature range 100 K – 200 K the value of the activation area is $\sim 10^4 b^2$ and the corresponding mechanisms are:

1. Dislocation intersection
2. Intersection of dislocation dipoles

Finally at room temperature the value of activation area is $\sim 10^3 b^2$. The corresponding mechanisms are:

1. Conservative jog motion
2. Nonconservative jog motion

REFERENCES

- [1] Becker, R.: *Physikalische Zeitschrift* **26**, 919 (1925)
- [2] Eyring, H.J.: *J. Chem. Phys.* **4**, 283, (1936)
- [3] Kauzmann, W.: *Trans. AIME*, **143**, 57, (1941)
- [4] Seitz, F., Read, T.A.: *J. Appl. Phys.* **12**, 100, 170, 470, 538 (1941)
- [5] Novick, A.S., Machluj, E.S.: *J. Appl. Phys.* **18**, 79, (1947)
- [6] Rosenfield, A.R., Hahn, G.T., Bement, A.L., Jaffee, R.I.: *Dislocation Dynamics*, Mc Graw Hill, 1967.
- [7] Martin, J.L., Caillard, D.: *Thermally Activated Mechanisms in Crystal Plasticity*. Pergamon Press, 2003.
- [8] Christian, J.W., Masters, B.C.: *Proc. Roy. Soc. A* **281**, 240 (1964)
- [9] Li, J.C.M.: *Trans. AIME*, **233**, 219 (1965)
- [10] Hamerský, M., Navrátil, V., Lukáč, P., Soldatov, V.P. Startsev, V.I. : *Metallic Materials*, Bratislava, 3s. 20-26. (1982).
- [11] Hamerský, M., Navrátil, V., Startsev, V.I.: *Czech. J. Phys.*, **B31**, 6 s. (1981)
- [12] Lukáč, P., Stulíková, I., Navrátil, V.: *Czech. J. Phys.*, **B31**s. 130-134. (1981).
- [13] Navrátil, V., Novotná, J.: *Matematika tepelně aktivované plastické deformace kovů*. In *Aplimat 6th. Int. Conf.*. 2007. vyd. Bratislava : Faculty of Mechanical Engineering Slovak University of Technology in Bratislava, 2007. od s. 125-130, 6 s.

Prof. RNDr. Vladislav Navrátil, CSc
Katedra fyziky, chemie a odborné přípravy
Pedagogické fakulty Masarykovy Univerzity
Poříčí 7, 603 00 Brno
Tel: 549495753
e-amil: navratil@ped.muni.cz

PhDr. Jiřina Novotná, PhD.
Katedra matematiky
Pedagogické fakulty Masarykovy Univerzity
Poříčí 31, 60300 Brno
Tel: 549491663
e-mail: novotna@ped.muni.cz

The regularity of the matrix–differential systems

Dariusz Pączko

Silesian University of Technology, Kaszubska 23 St, Gliwice, Poland
E-mail: Dariusz.Paczko@polsl.pl

Abstract: The problem of regularity of dynamical system was examined. Conditions of the existence of the invariant torus were given for matrix–differential systems and an integral form of the invariant torus was written.

The issues related to the property of regularity and weak regularity of systems of differential equations in the form

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x,$$

are considered, where the functions $a(\varphi), P(\varphi)$ are the appropriate class of smoothness and defined on the m –dimensional torus $T_m, x \in \mathbb{R}^n$.

Assuming that the system written has infinitely many different $n \times n$ –dimensional Green–Samoilenko functions, consider the possibility of the complement system of triangular form with respect to the normal variable $x \in \mathbb{R}$, so that the new system has exactly one $2n \times 2n$ –dimensional Green–Samoilenko function. The issue, which is thus created, will be discussed. By studying the possibility of converting a system of block-triangular form with respect to the normal variable $x \in \mathbb{R}$ into a block-diagonal form, we obtain the matrix-differential system:

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dX}{dt} = A(\varphi)X - XB(\varphi) + H(\varphi)$$

where $A(\varphi), B(\varphi)$ are square matrices of size $n \times n, p \times p$ respectively, whose elements are continuous real functions, defined on T_m .

The problem of the existence of invariant torus $X = U(\varphi) \in C'(T_m; a)$ for a written above system of the matrix–differential form at each fixed matrix $H(\varphi) \in C^0(T_m)$ is examined. Denote by $\Omega_\tau^t(\varphi; A), \Omega_\tau^t(\varphi; B)$ normalized fundamental matrix of solutions of the appropriate linear systems with parameters

$$\frac{dy}{dt} = A(\varphi(t; \varphi_0))y, \quad \frac{dz}{dt} = B(\varphi(t; \varphi_0))z,$$

It takes place the following theorem.

Theorem 1. *Let's met one of the following estimates:*

$$\begin{aligned} \|\Omega_t^0(\varphi; A)\| \cdot \|\Omega_0^t(\varphi; B)\| &\leq Ke^{-\gamma t}, \quad t \geq 0, \\ \|\Omega_t^0(\varphi; A)\| \cdot \|\Omega_0^t(\varphi; B)\| &\leq Ke^{\gamma t}, \quad t \leq 0, \quad K, \gamma = \text{const} > 0, \end{aligned}$$

then the matrix-differential system has the only one invariant torus $X = U(\varphi)$ for each fixed matrix $H(\varphi) \in C^0(T_m)$. Wherein if it is satisfied first estimate invariant torus is written as

$$X = U(\varphi) = - \int_0^{+\infty} \Omega_\sigma^0(\varphi; A) H(\varphi(\sigma; \varphi_0)) [\Omega_0^\sigma(\varphi; B)]^T d\sigma.$$

and if the second one, in the form of

$$X = U(\varphi) = \int_{-\infty}^0 \Omega_\sigma^0(\varphi; A) H(\varphi(\sigma; \varphi_0)) [\Omega_0^\sigma(\varphi; B)]^T d\sigma.$$

Separation of variables X for simplifying appropriate systems of matrices $A(\varphi)$, $B(\varphi)$ will be refereed. Integral form of invariant tori, and their existence when changing the matrix A, B will be discussed in the lecture.

References

1. Yu. A. Mitropolsky, A. M. Samoilenko, V. L. Kulik, *Dichotomies and stability in nonautonomous linear systems*, Taylor & Francis Inc, London, 2003.
2. V. L. Kulyk, D. Paćzko, *Some methods of complement of weak regular linear extensions of dynamical systems to regular*, Nonlinear Oscillations, vol. 16 (2013), No. 1, pp. 65-74.

SLOVNÍ ÚLOHY NA EXTRÉMY FUNKCE

Marie Polcerová

Ústav fyzikální a spotřební chemie, Fakulta chemická, VUT v Brně,
Purkyňova 118, 612 00 Brno
E-mail: polcerova@fch.vutbr.cz

Abstrakt: V letním semestru prvního ročníku mají studující Fakulty chemické Vysokého učení technického v Brně povinný předmět Počítačová cvičení z matematiky. V rámci tohoto předmětu dostávají individuálně zadávané dílčí úlohy a jednou z nich je i slovní úloha na globální extrém reálné funkce jedné reálné proměnné. Příspěvek se zabývá nejen výběrem a generováním těchto úloh a problémy které přináší stále se zvyšující počet studujících, ale hlavně rozebírá nejčastější problémy a chyby, kterých se při řešení těchto úloh studující dopouštějí a jakých dosahují výsledků.

Abstract: Students of the Faculty of Chemistry of Brno University of Technology have the compulsory subject Computer Exercises from Mathematics in the second semester in the first academic year. In this subject students get individually assigned partial tasks and one of them is the word task on global extreme of the real function of the one real variable. The paper deals not only with choice and generation of these tasks and problems which bring permanently increasing number of students, but most importantly analyse often repeated problems and mistakes which students do while the solving these tasks and what results they achieve.

Počítačová cvičení z matematiky

Na Fakultě chemické Vysokého učení technického v Brně se od akademického roku 2007/2008 vyučuje ve druhém semestru prvního ročníku povinný předmět Počítačová cvičení z matematiky. Výuka probíhá ve specializované učebně výpočetní techniky každý týden v rozsahu dvou vyučovacích hodin cvičení (100 minut). Náplň tohoto předmětu tvoří následující témata:

1. Seznámení s MATLABem - elementární funkce MATLABu.
2. Polynomy a racionální lomené funkce.
3. Zpracování datového souboru, základy programování, aproximace funkcí.
4. Matice a soustavy lineárních rovnic.
5. Reálné funkce.
6. Řešení nelineárních rovnic, Symbolic Math toolbox.
7. Průběh funkce.
8. MATLAB jako nástroj grafické prezentace.
9. Operace s vektory.
10. Kuželosečky.
11. Kvadratické plochy.
12. Semestrální práce.
13. Vědomostní test.

Předmět je zakončen klasifikovaným zápočtem. K jeho získání musí studující mít uznány všechny písemné práce, uspět ve vědomostním testu a nesmí mít neomluvenou absenci. Znamka je každému studujícímu udělena na základě hodnocení, které je uvedeno v tabulce.

Celkem lze dosáhnout 100 bodů a celkové hodnocení odpovídá klasifikaci ECTS. Všechny práce jsou zadávány individuálně. Studující je musí vypracovat podle předem uvedených pokynů a ukázek vyřešených úloh a odevzdat ve stanoveném termínu.

Název	Maximální počet bodů	Počet bodů nutný k uznání
Dílčí úloha č. 1	4	2
Dílčí úloha č. 2	6	3
Průběh funkce	15	8
Dílčí úloha č. 4	4	2
Dílčí úloha č. 5	4	2
Semestrální práce	50	25
Vědomostní test	15	8

Výběr příkladů

Dílčí úloha č. 4, což je slovní úloha na nalezení absolutního extrému reálné funkce jedné reálné proměnné, by měla být celkem jednoduchou aplikací diferenciálního počtu, který studující probírali v povinném předmětu Matematika I v předchozím semestru. Vypracovat tuto úlohu v textovém editoru Word by pak pro studující neměl být žádný velký problém, protože v předchozím semestru v rámci předmětu Chemická informatika probírali právě tento textový editor. Ukazuje se ale, že tomu tak není.

Každý studující dostává svou vlastní dílčí úlohu č. 4, kterou jsem až do roku 2012 generovala pomocí programu z databáze vyřešených úloh. Do letního semestru roku 2012/13 však postoupilo více jak dvojnásobek studujících oproti předchozímu roku. Databáze naprogramovaných úloh byla tudíž nedostatečná a bylo nutno ji urychleně rozšířit. Vyšla jsem tedy z osvědčených zdrojů [1] a [2] a doplnila je o [3] a [4]. Samozřejmě, že těchto úloh bylo málo, tak jsem je různě modifikovala. Tam, kde byl objem, tak jsem použila také plášť, povrch, povrch bez horní podstavky. Kde byla vzdálenost k ose x , tak jsem použila i vzdálenost k ose y atd. Nakonec jsem pak modifikovala několikrát silážní jámu, krabici a kravín tak, že jsem smysluplně změnila násobky stran a cenu.

V současnosti tato úloha obsahuje jak příklady **z běžné praxe**, jako například:

– Dopravní podnik uspořádal zájezd. Jestliže počet účastníků zájezdu je a nebo méně, pak cena zájezdu pro jednoho účastníka je c Kč. Při větším počtu účastníků než a se za každého účastníka navíc sníží cena zájezdu o d Kč. Kolik účastníků se musí přihlásit, aby podnik měl největší příjem? Kolik byl tento příjem, jestliže $a = 60$, $c = 1\,640$, $d = 20$.

– Silážní jáma má tvar pravouhlého rovnoběžnostěnu a objem $V \text{ m}^3$. Délka má být sedminásobkem šířky a 1 m^2 základny je 2-krát lacinější než 1 m^2 stěny. Jaké musí být rozměry, aby stavba silážní jámy byla co nejlacinější, jestliže $V = 52$.

– Půdorys kravína má mít tvar obdélníka o daném obsahu $P \text{ m}^2$. Vnitřní prostor má být rozdělen příčkami na tři nestejně části podle náčrtku. Přitom $3 \cdot |AF| = |AB|$. Náklady na délkový metr vnitřní stěny jsou jen $2/3$ -násobkem nákladů na délkový metr obvodového zdiva. Jaké rozměry musí mít půdorys kravína, aby stavební náklady byly co nejmenší? Určete nejen tyto rozměry, ale i náklady na holou stavbu stěn (všechny stěny jsou vysoké $v \text{ m}$), jestliže $P = 2\,750$.

Příklady, dalo by se říci, **fyzikální**:

– Určete maximální rychlost kmitavého pohybu, jestliže pro výchylku A platí vztah $A = A_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi)$. Určete nejen tuto maximální rychlost, ale také čas t , při kterém kmitavý pohyb této maximální rychlosti dosáhne, jestliže $A_0 = 4$, $\omega = 10$, $\varphi = 1,1$.

– Z m monočlánků, jejichž elektromotorické napětí je U_e Voltů a vnitřní odpor je R_i Ohmů, je sestavena baterie. Kolik článků za sebou a kolik článků vedle sebe je třeba zapojit, aby tato baterie dávala co největší proud, je-li vnější odpor zátěže R Ohmů? Určete tento proud, jestliže $m = 72$, $U_e = 2$, $R_i = 1/6$, $R = 3$.

– Při konstrukci transformátoru je důležité zaplnit vnitřek cívky železným jádrem (obvykle ve tvaru kříže) tak, aby plošný obsah řezu jádra byl maximální. Víte, že $|AB| = y$, $|AS| = x$, $|BS| = r$ a úhel ASB je α . Vypočítejte, jaké mají být rozměry x mm a y mm, jestliže poloměr cívky je r mm. Úhel α vyjádřete obecně, v radiánech a ve stupních, minutách a vteřinách. Vypočítejte též úseky x a y a plošný obsah řezu P , jestliže $r = 5$.

Příklady klasické:

– Do průhledného kulového obalu o poloměru r cm umístěte otevřenou plechovku bez víka (rotační válec bez horní podstavy) tak, aby měla největší povrch. Určete poloměr, výšku a povrch této plechovky, jestliže $r = 17$.

– V kuželovité věžičce o poloměru podstavy r m a výšce v m máte zřídít válcovitou místnost maximálního objemu. Určete poloměr, výšku a objem této válcovité místnosti, jestliže $r = 6$, $v = 9$.

– Kouli o poloměru r cm opište rotační kužel minimálního povrchu. Určete poloměr, výšku, stranu a povrch hledaného kužele, jestliže $r = 5$.

Jak je patrné již z těchto ukázek, tak ne všechny úlohy mají stejnou obtížnost. Z tohoto důvodu je všech pět úloh zkombinováno tak, aby všechny varianty, jako celek, byly přibližně stejné obtížnosti.

Řešení

Řešení zadané slovní úlohy, které bylo po studujících vyžadováno, lze rozložit do těchto kroků:

- Nakreslit pomocí programu MATLAB náčrtek.
- Odvodit funkci, jejíž absolutní extrém je řešením dané úlohy.
- Vypočítat první derivace odvozené funkce.
- Vyhledat stacionární body.
- Ověřit, že nalezený stacionární bod je globálním extrémem a řešením dané úlohy.
- Odvodit všechny požadované veličiny.
- Dosadit zadané číselné hodnoty do odvozených vzorců a nalézt přesné řešení.
- Zadat číselné hodnoty a odvozené vzorce do MATLABu a nalézt přibližné řešení.
- Zformulovat slovní odpověď.
- Vytvořit tabulku s podmínkami (teoretickými i praktickými).
- Vytvořit tabulku s jednotkami (SI i doporučenými).

Bodování příkladu bylo následující:

Vzorce - položky b) + c), d), e), f) celkem $0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25 = 1$ bod.

Číselné řešení - položky g) a h) celkem $0,5 + 0,5 = 1$ bod.

Podmínky - položka j) celkem 0,5 bodu.

Jednotky - položka k) celkem 0,5 bodu.

Obrázek - položka a) celkem 0,5 bodu.

Vzhled - položka i) a formální stránka a vzhled celého dokumentu, celkem 0,5 bodu.

Podmínkou k uznání práce bylo dosažení alespoň dvou bodů, přičemž tyto dva body musely být za vzorce a číselné řešení a musel být odevzdán m -soubor s náčrtem.

Výsledky

Všichni studující dostali svá individuální zadání hned na začátku semestru. Termín řádného odevzdání byl koncem dubna. Od předcházející odevzdané úlohy měli studující na vypracování 14 dní. Každý studující měl možnost dojít na individuální konzultaci, nebo na jednu ze čtyř hromadných konzultací, které byly této úloze věnovány, protože většina studujících nebyla schopna odvodit ani funkci, jejíž globální extrém měli nalézt. Až do řádného termínu odevzdání měli možnost tzv. předtermínů, jejichž počet nebyl nijak omezen. Dílčí úlohu č. 4 dostalo zadáno celkem 277 studujících. Práci však v řádném termínu odevzdalo pouze 163 studujících, což je 59 %. Z těchto 163 studujících bylo v řádném termínu uznáno celkem 21 prací, což je necelých 13 % ze všech odevzdaných úloh. Na plný počet prací vypracovalo 5 studujících (3 %). Drobných chyb se dopustilo 95 studujících (58 %), středních 18 (11 %) a hrubých 29 (18 %). Z těchto výsledků jednoznačně vyplývá, že tato úloha je pro studující velice obtížná a po průběhu funkce v ní dosahují nejhorších výsledků.

Po prvních opravách bylo uznáno 121 prací, tedy 74 % ze 163 původně odevzdaných úloh. Při první opravě se studujícím do hodnocení počítá aritmetický průměr z počtu bodů dosažených při řádném termínu a při první opravě. První opravu tudíž mohou využít i ti, kteří chtějí lepší ohodnocení. Nyní probíhají tzv. druhé opravy, při kterých již musí úlohu vypracovat na plný počet bodů, ale do hodnocení jim bude započítán pouze počet bodů nutný k uznání, tedy 2 body.

Chyby studujících

Jednotlivé položky, které byly hodnoceny, nyní rozeberu z hlediska chyb, kterých se studující nejčastěji dopouštěli.

a) Nakreslit pomocí programu MATLAB náčrtek.

Ačkoliv tato položka studujícím nečinila příliš velké problémy, tak měli snad největší připomínky a nechť k tomu, aby obrázek vytvářeli v MATLABu. Studující zde nejvíce chybovali při popisu, kdy proměnné měli velice často kolmo, místo kursivou. Druhou velice častou chybou pak bylo chybné vložení získaného obrázku do textového editoru.

b) Odvodit funkci, jejíž absolutní extrém je řešením dané úlohy.

Tato položka činila studujícím vůbec největší problém. Většina z nich vůbec nevěděla, jak začít, jak si funkci, která popisuje zadaný problém, vyjádřit, z čeho vycházet. Proto byly uspořádány čtyři hromadné konzultace.

c) Vypočítat první derivace odvozené funkce.

Zde byly velice diametrální rozdíly. Někteří studující funkci derivovali správně hned napoprvé. Někteří měli velké problémy pochopit a rozlišit, co je proměnná a co konstanta. Někteří byli schopni funkci derivovat, až když si proměnnou označili jako x . Všichni však měli problémy s úpravou získaného výrazu.

d) Vyhledat stacionární body.

Protože většina z nich si pořádně neupravila první derivaci, tak tento výpočet byl pro ně dost obtížný a většina z nich získala správně upravený tvar stacionárního bodu, až při opravě. Nejčastěji zapomínali získaný výraz usměrnit, ale někteří ho neměli ani částečně odmocněný ani vykrácený.

e) Ověřit, že nalezený stacionární bod je globálním extrémem a řešením dané úlohy.

Tato položka se ukázala být, hned za získáním funkce, jako nejtěžší. Snad všichni nejprve dosazovali konkrétní číselné hodnoty. Když konečně pochopili, proč to není možné, tak nedovedli obecně určit bod, který v daném intervalu leží, a když i toto konečně pochopili, tak nebyli schopni dosadit tento výraz do první derivace a upravit ho tak, aby se dalo o „znaménku“ jednoznačně rozhodnout.

- f) Odvodit všechny požadované veličiny.
Opět velký problém a analogické chyby jako při ověřování. Někteří studující vědomě „zapomínali“ některé veličiny vyjádřit. Někteří dokonce dosadili konkrétní číselné hodnoty a úlohu řešili znovu, od začátku, s číselnými hodnotami, aby pak získali tzv. přesné řešení.
- g) Dosadit zadané číselné hodnoty do odvozených vzorců a nalézt přesné řešení.
U jednoduchých výrazů, kdy navíc byly hodnoty celočíselné, to problém nebyl. Pokud ale měli částečně odmocnit, nebo usměrnit, tak s tím měli analogické problémy jako v položkách e) a f). Většinou dosadili číselné hodnoty a hned napsali, že se to rovná nějaké hodnotě, která byla vyjádřena jako desetinné číslo.
- h) Zadat číselné hodnoty a odvozené vzorce do MATLABu a nalézt přibližné řešení.
Pokud měli studující všechny požadované veličiny vyjádřené, tak řešení mívali správně. Největší problém u této položky byl, že studující místo původních proměnných, dosazovali již vypočtené hodnoty, které byly pouze přibližné.
- i) Zformulovat slovní odpověď.
Místo správně zformulované slovní odpovědi jsem se nejčastěji setkávala s tím, že studující napsali do výsledku pouze přibližné číselné řešení.
- j) Vytvořit tabulku s podmínkami (teoretickými i praktickými).
Vzhledem k tomu, že zadaných veličin v každé úloze bylo velice málo, tak tato položka měla být velice jednoduchá. Bohužel se ukázalo, že i když studující běžně „vyhledávají“ na internetu, tak relevantní informace většinou nalézt neumějí.
- k) Vytvořit tabulku s jednotkami (SI i doporučenými).
Tato tabulka by měl být velice snadný úkol. Potíž ale byl v tom, že studující neznají názvy jednotek, zvládají jednotky SI, ale do doporučených píší klidně metry i mm.
Poslední se hodnotí celkový vzhled dokumentu. V současné době snad každý z nich píše v jiné verzi Wordu, proto byly hodnoceny pouze práce vytištěné a můžeme pouze konstatovat, že s grafickou stránkou dokumentu mají studující velké potíže a mnohdy oprava je ještě horší, než práce původní.

Závěr

Slovní úlohy na extrémní funkce jsou pro studující velmi obtížné. Samostatně většina z nich není schopna odvodit funkci, jejíž globální extrém jejich úlohu vyřeší. Pokud tuto funkci již získají, tak největší problém mají s ověřením, že nalezený stacionární bod je hledaný globální extrém, pak s obecným vyjádřením všech požadovaných veličin a s tzv. přesným řešením. Ukazuje se, že ze střední školy nemají zažité úpravy algebraických výrazů. Prvotní jejich tendencí je vše roznásobit. Teprve zde „objevují“ k čemu a jak je vhodné používat vytykání, usměrňování, částečné odmocňování, krácení, že umocňování není ekvivalentní úprava atd. Kdybychom považovali první opravný termín za řádný, tak by výsledky studujících již byly přijatelné.

Literatura

- [1] VEJSADA, František a František TALAFIOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1969, 15-534-69,
- [2] ELIÁŠ, J., J. HORVÁTH a J. KAJAN. *Zbierka úloh z vyššej matematiky 2. časť*. Bratislava: Alfa, 1972, 3. vydání, 63-002-72,
- [3] PETÁKOVÁ, Jindra: *MATEMATIKA - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Praha, Prometheus, 2007, dotisk 1. vydání, ISBN 978-80-7196-099-7,
- [4] NEDOMA, Josef. *Matematika I*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Akademické nakladatelství CERM, 2001, ISBN 80-214-1998-9.

THE ESTIMATION OF THE EXPANDED UNCERTAINTY IN THE STUDY OF ACOUSTIC

Marek Profaska

Politechnika Śląska ul. Akademicka 2, 42 – 100 Gliwice,
Wydział Górnictwa i Geologii, Polska, E-mail: marek.profaska@polsl.pl

The paper presents a methodology for estimating uncertainty of measurement extended to an exemplary study of environmental noise immission. The analyzed example involves estimating the uncertainty of asymmetric confidence limits of the mean value resulting from the determination of the average energy as the average measurements. For the analyzed case uncertainties identified type A and B, together with the expanded uncertainty for a confidence level of 95% noise immission test.

1. Introduction

It can be argued that the most important thing in measuring the size of the reliability of experimental results. For this honesty was full it is necessary to estimate the uncertainty of measurement. One example is the measurement uncertainty calculations acoustic research in the area of measurement of traffic routes. An exemplary object of study of traffic noise immission includes one of the avenues in Upper Silesia, where the research was conducted in 6 measurement points and, additionally, the reference points. Alley is the way two-lane asphalt surface (lanes separated by a green belt) with three lanes in each direction. This thoroughfare is moving several thousand vehicles per day. Moving vehicles, not just cars, but are also a large number of lorries and buses. Along the avenue are located ten-apartment buildings with a height of about 30 meters. These buildings are not protected acoustically according to [5], and the inhabitants raise the problem of excessive noise.

2. Presentation of the results of acoustic measurements

The results of individual monitoring points are as follows:

Sheet 1. The measurement results of noise immission measuring points 1 - 3

Time interval	Measuring point 1			Measuring point 2			Measuring point 3		
	L _{Aeq} [dB]	L _{Aeq} [dB]	L _{Aeq} [dB]	L _{Aeq} [dB]	L _{Aeq} [dB]	L _{Aeq} [dB]	L _{Aeq} [dB]	L _{Aeq} [dB]	L _{Aeq} [dB]
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
06:00 – 07:00	58,9	57,9	58,9	54,1	55,2	55	53,9	56,3	56,5
07:00 – 08:00	62,1	63,1	61,9	58,9	56,8	56,3	59,2	57,5	58,1
08:00 – 09:00	61,9	62,8	61,3	55,8	56,7	56,4	56,8	58,5	58,3
09:00 – 10:00	61,5	61,2	62,3	57,5	55,9	56,7	57,7	58,4	57,8
10:00 – 11:00	63,2	63,4	67,4	55,9	57,1	56,4	59,1	57,6	57,9

11:00 – 12:00	64,3	63,2	62,4	61,3	57,2	57,6	58,5	57,4	59,4
12:00 – 13:00	63,4	64,1	65,2	56,4	57,8	58,2	56,7	57,3	57,3
13:00 – 14:00	64,4	62,5	63,2	55,8	58,2	57,1	56,8	57,6	58,4
14:00 – 15:00	65,4	66,0	67,9	65,7	64,8	67,2	59,7	61,2	63,4
15:00 – 16:00	68,9	69,2	69,4	65,6	63,1	67,8	59,8	59,0	58,4
16:00 – 17:00	74,8	75,5	74,5	73,5	72,3	71,6	64,9	65,6	63,2
17:00 – 18:00	74,3	73,1	74,2	61,8	60,1	58,9	61,2	62,7	59,3
18:00 – 19:00	72,1	73,2	72,3	59,9	59,6	58,3	59,2	59,4	58,5
19:00 – 20:00	68,1	69,2	68,7	57,9	57,5	58,1	59,2	58,7	58,2
20:00 – 21:00	61,1	63,2	61,1	58,9	56,4	57,8	58,7	59,2	57,5
21:00 – 22:00	59,3	58,1	58,9	57,8	56,7	56,3	56,1	58,3	55,4
22:00 – 23:00	57,3	58,5	57,8	56,9	54,9	56,1	54,9	54,3	54,6
23:00 – 00:00	55,3	53,2	52,1	52,1	51,9	52,7	52,7	53,9	53,9
00:00 – 01:00	47,8	46,7	46,9	47,2	48,0	47,9	48,1	48,4	48,3
01:00 – 02:00	46,2	47,5	47,8	46,2	45,1	44,9	45,6	46,2	46,9
02:00 – 03:00	46,6	48,3	47,9	48,2	47,6	47,7	47,6	46,4	46,8
03:00 – 04:00	47,4	47,8	48,2	49,7	48,9	48,2	48,6	47,4	50,2
04:00 – 05:00	47,9	47,4	48,1	51,2	52,7	51,8	49,9	51,2	51,7
05:00 – 06:00	52,1	51,3	52,3	55,7	56,2	56,7	55,2	57,6	58,1

Sheet 2. The measurement results of noise immission measurement points from 4 to 6

Time interval	Measuring point 4			Measuring point 5			Measuring point 6		
	L _{Aeq} [dB]	L _{Aeq} [dB]	L _{Aeq} [dB]	L _{Aeq} [dB]	L _{Aeq} [dB]	L _{Aeq} [dB]	L _{Aeq} [dB]	L _{Aeq} [dB]	L _{Aeq} [dB]
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
06:00 – 07:00	51,7	53,9	52,8	59,7	60,1	61,3	52,3	52,5	52,7
07:00 – 08:00	58,0	56,3	54,1	59,9	62,3	60,3	54,7	54,8	54,1
08:00 – 09:00	53,8	55,8	51,1	56,8	60,3	62,1	55,8	55,2	55,6
09:00 – 10:00	56,7	53,3	52,1	57,7	62,3	63,4	55,7	54,5	55,2
10:00 – 11:00	55,4	53,4	53,1	63,4	62,9	63,0	54,8	54,6	55,2
11:00 – 12:00	60,3	51,2	51,3	62,3	62,2	63,2	55,4	55,3	55,3
12:00 – 13:00	56,6	57,4	55,2	63,2	62,9	62,7	55,6	53,3	54,3
13:00 – 14:00	65,8	62,4	64,2	64,7	63,3	64,0	54,8	54,5	55,2
14:00 – 15:00	67,7	65,4	65,1	63,7	62,3	63,3	55,6	54,9	54,1
15:00 – 16:00	60,9	60,9	61,5	64,5	67,1	68,9	57,3	56,7	56,8
16:00 – 17:00	69,5	69,2	62,2	72,3	71,2	69,9	57,1	57,2	57,9
17:00 – 18:00	66,2	61,4	64,0	72,3	72,9	71,3	57,6	57,5	57,3
18:00 – 19:00	59,4	58,8	60,1	69,7	67,4	68,6	57,4	55,9	55,2
19:00 – 20:00	59,0	58,4	57,3	65,2	66,1	67,4	54,8	53,9	54,2
20:00 – 21:00	58,7	58,8	59,8	60,3	62,2	62,1	53,7	53,9	53,2
21:00 – 22:00	54,1	55,1	53,2	61,1	60,2	61,3	50,5	51,7	51,2
22:00 – 23:00	52,5	50,7	49,9	60,7	60,3	61,1	49,1	48,2	49,0
23:00 – 00:00	45,2	44,6	46,9	59,4	59,8	57,9	48,5	46,9	47,5
00:00 – 01:00	44,9	44,6	45,0	57,9	58,3	58,0	45,2	45,5	44,9
01:00 – 02:00	45,2	44,5	45,4	55,8	53,7	52,3	45,2	44,2	45,7
02:00 – 03:00	44,5	44,2	43,1	52,8	51,4	52,8	45,6	44,3	43,4
03:00 – 04:00	45,1	44,3	44,2	48,9	49,8	48,3	48,4	46,9	47,5
04:00 – 05:00	44,7	44,6	45,5	48,9	49,3	49,5	44,7	45,3	46,1
05:00 – 06:00	47,6	46,9	46,5	59,9	59,4	59,1	50,0	51,3	51,4

3. Calculation of Uncertainty in Measurement [3]

Since the total time constant is divided into shorter periods of time, which was measured and recorded value of a level equivalent to the value of a level equivalent to the reference time T with a background acoustic immission which shall be determined according to the formula:

$$L_{Aeq0T} = 10 \log \left[\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n t_i 10^{0,1L_{Aeqi}} \right] \quad (1)$$

where:

- L_{Aeq0T} – value equivalent sound level of pollutants in dB
 L_{Aeqi} – value equivalent sound level measured at time t in the range of dB
 n – number of intervals, which was divided time continuous measurement T , s
 t_i – observation interval contained in the reference time T , s
 T – reference time, s

The value of an equivalent level of sound without background noise, the issue shall be determined according to the formula:

$$L_{AeqT} = 10 \log(10^{0,1L_{Aeq0T}} - 10^{0,1L_{A Tla}}) \quad (2)$$

where:

- L_{AeqT} – value equivalent sound level A of emissions in dB
 L_{Aeq0T} – equivalent sound level A of emissions in dB
 $L_{A Tla}$ – background noise in dB

The level of background noise is the same as the level of the minimum.

Estimating the uncertainty of type A, which deals with static scattering measurement results are treated as random variables with the following characteristics:

- the same probability of an event - for the expected value defined as the arithmetic mean,
- independent,
- repetitive,
- measurement does not affect the result.

A uncertainty of determining the level equivalent calculated on the basis of known emission shares every situation and durations of these situations with the corresponding uncertainties. Uncertainty determine the time is "0" because each measurement lasted exactly five minutes, in which case the uncertainty is equal to "0". The exhibition is the relative equivalent to m listening situations in standard observation time T is determined by the following formula for the relative exposure:

$$E_{eq} = \sum_{k=1}^m \frac{t_k}{T} \cdot E_{emk} \quad (3)$$

where:

- E_{eq} – relative equivalent exposure
 E_{emk} – relative situation of acoustioc exposure
 t_k – observation time included in normative time w s,
 T – normative observation time w s,

m – number of acoustic situations

In a further step calculate a level equivalent to the sum of listening situations for each point:

$$L_{Aeq} = 10 \cdot \log \left(\sum_{k=1}^m \frac{t_k}{T} \cdot 10^{0,1 \cdot L_{Aeq T k}} \right) \quad (4)$$

where:

L_{Aeq} – the sum of equivalent sound level in dB acoustic situations

$L_{em k}$ – equivalent sound level signal to the situation in dB ,

t_k – observation time included in normative time $w s$,

T – normative observation time $w s$,

m – number of acoustic situations

Sheet 3. The equivalent sound level of total listening situations for measuring points during the day and night.

Measuring point	The results of calculation of total equivalent sound level of acoustic situation for measurement points during the day and night	
	For the day time $L_{Aeq D}$ [dB]	For the night time $L_{Aeq N}$ [dB]
1	65,3	50,1
2	59,9	50,7
3	59,1	50,7
4	53,8	45,8
5	64,0	55,2
6	54,8	46,8

Then determine the relative uncertainty of exposure equivalent for every situation:

$$U_{A,95}(E_{eq k}) = \sqrt{\left[\frac{t_k}{T} U_{A,95}(E_{em k}) \right]^2 + \left[10^{0,1 \cdot L_{Aeq T k}} \cdot \frac{U_{A,95}(t_k)}{T} \right]^2} \quad (5)$$

where:

$U_{A,95}(E_{eq k})$ – uncertainty relative exposure equivalent to a confidence level of 95%

$U_{A,95}(E_{em k})$ – uncertainty exposure of issuance of the acoustic situation at a confidence level of 95%

$U_{A,95}(t_k)$ – uncertainty to determine the time at 95% confidence level

T – normative observation time $w s$,

$L_{Aeq T k}$ – equivalent sound level in emissions of acoustic situation .

In the next step we define the relative uncertainty of the resulting exposure equivalent to the sum of listening situations:

$$U_{A,95}(E_{eq}) = \sqrt{\sum_{k=1}^m [U_{A,95}(E_{eqk})]^2} \quad (6)$$

Where:

$U_{A,95}(E_{eq})$ – uncertainty relative exposure equivalent to a confidence level of 95%

$U_{A,95}(E_{eqk})$ – uncertainty exposure of issuance of the acoustic situation at a confidence level of 95%

m – number of acoustic situations.

Next, an analysis of these uncertainties is performed as in the previous two cases, in accordance with earlier models.

Estimating the uncertainty of type B, is related to the uncertainty of measuring instruments, test procedures and adopted models of acoustic phenomena.

The basis for the estimates of this uncertainty are:

- Metrics, certifications,
- Literature data,
- Previously obtained measurement data
- Own experience and knowledge,
- Detailed knowledge of the phenomena studied.

For a given / assumed / estimated type B uncertainty expressed as a deviation of the sound levels we get the following relative standard uncertainty of type B for the relative exposure, assuming the same upper and lower tolerances for sound levels. For example, the phenomenon for which the probability density distribution is modeled by "rectangle":

$$(\Delta L_+ = \Delta L_- = \Delta L) \Rightarrow \begin{cases} \frac{u_B^+(E)}{E} = \left(10^{\frac{\Delta L}{10}} - 1\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{u_B^-(E)}{E} = \frac{u_B^+(E)}{E} \cdot 10^{-\frac{\Delta L}{10}} \end{cases} \quad (7)$$

where:

$u_B^+(E)$ – upper relative standard uncertainty of type B

$u_B^-(E)$ – lower relative standard uncertainty of type B,

E – relative exposure,

ΔL – deviation in dB.

The expanded uncertainty determined for a confidence level of 95% noise test results from scattering measurements of the test along with the background noise and acoustic background noise and uncertainty associated with the measurement hardware used and applied measurement procedure.

$$U_{R,95} = \sqrt{U_{A,95}^2 + U_{B,95}^2} \quad (8)$$

where:

$U_{R,95}$ – expanded uncertainty,

$U_{A,95}$ – Type A uncertainty associated with the projection of the measurement results,

$U_{B,95}$ – Type B uncertainty associated with the equipment and measurement procedure.

Value equivalent to the sum of the sound level of the acoustic situations with expanded uncertainty for a confidence level of 95% are shown in Sheet 4.

Sheet 4. The equivalent sound level of total listening situations for measuring points during the day and night, along with the expanded uncertainty for a confidence level of 95%.

Measuring point	For the day time $L_{Aeq D}$ [dB]	For the night $L_{Aeq N}$ [dB]
	1	65,3 (1,0;1,0)
2	59,9 (0,7;0,8)	50,7 (1,0;1,1)
3	59,1 (0,7;0,7)	50,7 (0,9;1,1)
4	53,8 (0,7;0,7)	45,8 (0,9;1,0)
5	64,0 (0,6;0,7)	52,3 (1,0;1,2)
6	54,8 (0,7;0,7)	46,8 (1,0;1,2)

4. Summation

Calculation of uncertainties of acoustic quantities for which we know the model averaging allows you to use standard statistical tools. However, a prerequisite is that the requirements relating to the definition of static elementary events. It follows from this approach to computing equal uncertainty of various indicators for determining the noise level.

In situations where, for practical reasons, we can not properly define the acoustic events, as in the case of the determination of uncertainty for daily indicators, we can use conventional methods - under certain assumptions modeling phenomena - providing a reliable estimate due to uncertainty.

Bibliography:

- [1] Engel Z.: *Ochrona środowiska przed drganiem i hałasem*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1993.
- [2] Engel Z., Sadowski J., Stawicka-Wałkowska M., Zaremba S.: *Ekrany akustyczne*, Wydawnictwo Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie, Kraków, 1990.
- [3] Kirpluk M.: *Metodyka szacowania niepewności rozszerzonej*, Księga Jakości Laboratorium NTL – M. Kirpluk, 2009.
- [4] Lis P.: *Hałas komunikacyjny*, Wydział Inżynierii i Ochrony Środowiska w Częstochowie, Częstochowa 2009.
- [5] Lis P.: *Hałas w środowisku*, Wydział Inżynierii i Ochrony Środowiska w Częstochowie, Częstochowa 2009.

PCA AND ABPM MONITORING OF BLOOD PRESSURE

Lenka Příbylová¹, Michal Večerek², Miroslav Homza³

¹Department of Applied Mathematics, Technical University of Ostrava

²Department of Preventive Medicine, University Hospital of Ostrava

³ Head of Cardiovascular Clinic, University Hospital of Ostrava

E-mail: lenka.pribylova@vsb.cz,

michal.vecerek@fno.cz, miroslav.homza@fno.cz

Abstract: In this article data of hypertonic patients have been analysed by statistical method principal component analysis. For this analysis the statistical software Stagraphics has been used. Obtained results have been compared with facts known in medical practise.

Keywords: blood pressure, hypertension, ambulatory blood pressure monitoring, matrix, eigenvalue, eigenvector, principal component analysis.

1. Data

For this analysis record values of systolic blood pressure of 177 patients observed in the cardiologic ambulance have been used. Values of blood pressure were marked each 30 minutes. With every patient approximately 48 values during 24 hours was obtained. These 48 times of the day, when blood pressure was marked, it was considered as variables of input data file. The input matrix is of type 177×48 . We also received the information if a patient had been using beta blockers.

2. Ambulatory Blood Pressure Monitoring (ABPM)

Ambulatory Blood Pressure Monitoring is monitoring of a blood pressure and a beating frequency during 24 hours. Values are marked each 15 or 30 minutes. This kind of observation is called a holters observation. A patient has a hypertension when his average of blood pressure marked during 24 hours is higher than 140/90 tors.

3. Principal Components Analysis (PCA)

Motivation: Substitution of big number of variables by a few new variables the number of which is much lower, without the lost of basic information on the data. New variables are called **principal components**. By PCA method it is required so that components explain the best variability of input variables.

Consider the population with p -dimensional random vector $X = (X_1, \dots, X_p)$, where random variables X_1, \dots, X_p have p -dimensional normal distribution with the vector of expected values $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$ and the covariance matrix Σ . Notice eigenvalues of matrix Σ with according $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$ and relevant orthonormal eigenvectors v_i , $i = 1, \dots, p$.

Definition: Random variable Y_1 defined by formula

$$Y_1 = v_{11}(X_1 - \mu_1) + v_{12}(X_2 - \mu_2) + \dots + v_{1p}(X_p - \mu_p)$$

is called **the first principal component** of random vector X .

Analogically second principal component is defined, as so on r -th principal component Y_2, \dots, Y_r , where $r \leq p$.

Properties of principal components

Variance DY_r of r -th principal component Y_r is equal r -th eigenvalue λ_r of covariance matrix Σ , that is $DY_r = \lambda_r$.

Variability $r \leq p$ principal components hold the following equation

$$DY_1 + \dots + DY_r = \lambda_1 + \dots + \lambda_r.$$

Measure of consequence of the r -th principal component Y_r from view of the explained global variability of variables Y_1, Y_2, \dots, Y_r is equal to the ratio

$$\frac{DY_r}{DY_1 + DY_2 + \dots + DY_r} = \frac{\lambda_r}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r}.$$

When $r = p$ component explained the global variability exactly. In practise is preferred $r \ll p$, usually until 1 to 5 principal components are chosen.

PCA in selection

In practical examples a covariances matrix Σ is not known, only its representative in selection, that is a sample covariance matrix. Because an assumption about multidimensional normality X_1, X_2, \dots, X_p is satisfied, it is easy to prove that eigenvalues and eigenvectors of sample covariances matrix are **maximal likelihood estimates** their correspondents from population. Without assumptions of normality they will generally be only **consistent estimates**. In conclusion it is possible to test the hypothesis about equality of remaining eigenvalues by relevant χ^2 test, i.e. the hypothesis $H_0 : \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_p$.

4. Results of PCA applied to ABPM data

Main goal of principal component analysis is a reduction of the number of input variables without the loss of essential effects on the data. The data matrix of type 177×48 had been input. This large input of data matrix was reduced on the matrix in a lower dimension without the loss of essential attributes of data files. It was reduced 48 variables, columns of input data matrix.

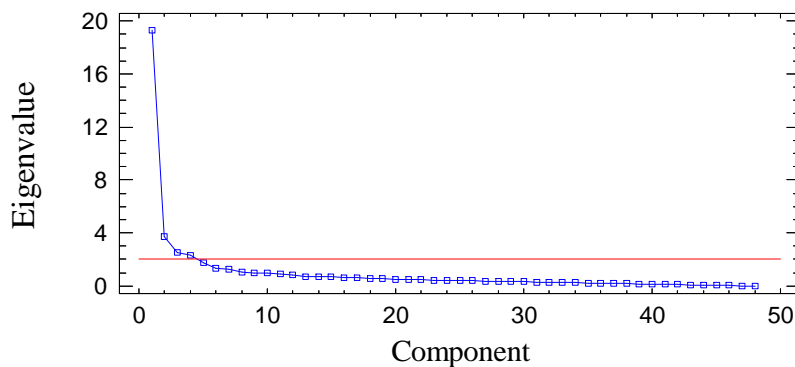
By procedure principal components applied to the statistical software Statgraphics, version 5, it was found **eight** of principal components (for $\lambda > 1$) explained 69% of variability of variables. It was found eight eigenvalues of covariances matrix written in the following table.

Table of PCA

C.n.	Eigenvalue	% of Variance	Cumulative %
1	19,32	40,25	40,25
2	3,71	7,72	47,97
3	2,50	5,21	53,18
4	2,32	4,83	58,00
5	1,73	3,60	61,60
6	1,31	2,74	64,34
7	1,23	2,57	66,90
8	1,04	2,17	69,07

Notice, that the first eigenvalue is 19,32. This eigenvalue is more grater than the others. The first principal component explains 40% of variability of variables. **Four** principal components (for $\lambda > 2$) explain 58% of variability of variables. This situation is illustrated on figure one. It was reduced 48 variables of input data file on eight respectively four new variables. The input data matrix of type 177×48 can be there for reduced on the matrix of type 177×8 , respectively 177×4 .

Figure 1



In results the number of principal components is significant. For completion let us specify the shape of the first principal component Y_1 . Variables X_i in the columns of data matrix are written in the standardized shape:

$$Y_1 = 0, 17*h0+0, 17*h0, 30+0, 18*h1+0, 17*h1, 30+0, 12*h10+0, 12*h10, 30+0, 12*h11+0, 09*h11, 30+0, 13*h12+0, 12*h12, 30+0, 13*h13+0, 13*h13, 30+0, 13*h14+0, 13*h14, 30+0, 14*h15+0, 15*h15, 30+0, 15*h16+0, 15*h16, 30+0, 11*h17+0, 12*h17, 30+0, 15*h18+0, 14*h18, 30+0, 14*h19+0, 15*h19, 30+0, 17*h2+0, 17*h2, 30+0, 14*h20+0, 15*h20, 30+0, 17*h21+0, 16*h21, 30+0, 16*h22+0, 16*h22, 30+0, 16*h23+0, 17*h23, 30+0, 17*h3+0, 16*h3, 30+0, 16*h4+0, 16*h4, 30+0, 16*h5+0, 16*h5, 30+0, 13*h6+0, 13*h6, 30+0, 11*h7+0, 09*h7, 30+0, 11*h8+0, 13*h8, 30+0, 11*h9+0, 11*h9, 30.$$

5. Comparing obtained results with medical practise

It was done comparing obtained results with facts known from medical practise. For 48 input variables had been found as significant eight (or four) latent factors influenced on data. Because variables of input data file represented times of the day, when systolic blood pressure was marked, it had been found latent factors influenced values of blood pressure changed during the day.

Obtained results marked in chapter four have been corresponded with following facts known from medical practise. The first principal component, which explains variability of variables out of 40%, could be corresponded with the matter of fact if patient had been used beta blockers, pills which are used for treatment of hypertension. This fact is the most important latent factor of value of blood pressure changed during the day.

Further principal components as well as further medical influences had been detected not so much significant. Further seven principal components explained 29% of variability of variables could be corresponded with the following factors on a blood pressure, according to their influence on the blood pressure: a matter of fact if the person is healthy or ill, secondary hypertension - influence of other illness, obesity, hereditary factors, chronic stress, hypersalaemia, bad consumer customs, especially redundant consummation of coffee and tea.

6. Disadvantages of PCA and ABPM

A main disadvantage of PCA is a subjective a-priori choice of number of components. An exact criterium for a-priori assessment of numbers of components does not exist, therefore how big residual variance is already insignificant - 10 %, 5% or 1 % ? Statistical software evaluates the number of components according to the numbers of eigenvalues grater then a fixed value. As default value is defined eigenvalue 1.

A main disadvantage of ABPM is an occurrence of sometimes missing data. When the device does not mark the value, it is necessary to fill in an appropriate value. When one value was missing, it was filled in by an arithmetic mean of neighboring two values. When more than one value was missing, it was filled in by values of relevant interpolated polynomial.

7. Conclusions

In this article had been analysed data of hypertonic patients by the method principal component analysis. By procedure principal components applied to the statistical software Statgraphics, version 5, it was found eight of principal components explained 69% of variability of variables. Four principal components explain 58% of variability of variables. The first principal component explains 40% of variability of variables. It was reduced 48 variables of input data file on eight respectively four components. The input data matrix of type 177×48 can be there for reduced on the matrix of type 177×8 , respectively 177×4 .

It was done comparing obtained results with facts known in medical practise. In medical practise it is known that beta blockers have strong influence changes on blood pressure during the day, therefore the influence of beta blocker could be consider as the first principal component, which explains variability of variables out of 40%. Further principal components as further medical influences are not so much significant. As further seven principal components there could be consider the following factors on a blood pressure, according to their influence on the blood pressure: a matter of fact if the person is healthy or ill, secondary hypertension - influence of other illness, obesity, hereditary factors, chronical stress, hypersalaemia, bad consumer customs, especially redundant consummation of coffee and tea.

Acknowledgement

This work was supported by the FEECS VŠB - Technical University of Ostrava (Project No. SP 2013/116).

References

1. Eldén L. : Matrix Methods in Data Mining and Pattern Recognition, SIAM, Philadelphia 2007
2. Dostál Z. : Lineární algebra, VŠB-TU Ostrava 2004
3. Hebák P., Hustopecký J., Malá I. : Vícerozměrné statistické metody I., II., III., Informatorium, Praha 2005
4. Hebák P., Hustopecký J. : Vícerozměrné statistické metody s aplikacemi, SNTL/ALFA, Praha 1987
5. Laub J. A. : Matrix analysis for scientists and engineers, Davis, California 2005

USE OF ANALYSIS OF DATA COLLECTED WITHIN QUALITY MANAGEMENT SYSTEM FOR BUSINESS PROCESSES IMPROVEMENT – CASE STUDY.

Jerzy M. Ścierański,

Silesian University of Technology, Zabrze, Roosevelta Str 28
e-mail: jerzy.scierański@polsl.pl

Streszczenie: Organizacje powinny gromadzić i analizować dane, aby demonstrować swoją zdolność do dostarczenia wyrobów, które spełniają potrzeby klienta oraz wymagania prawne. SZJ budowane w oparciu o wymagania norm ISO serii 9000 oparte są na 8 filarach, wśród których podejście procesowe, analiza danych i podejmowanie decyzji na podstawie faktów stanowią ważne elementy systemu, które składają się na ciągłe doskonalenie. W artykule omówiono wykorzystanie analizę danych pochodzących z procesów i ich analizę na przykładzie małego przedsiębiorstwa. Zaproponowano wykorzystanie karty kontrolnej X – mR do analizy danych pochodzących z procesów zarządczych.

Abstract: The organization shall collect and analysis data to demonstrate its ability to provide products that meet clients' needs as well as statutory and regulatory requirements. An approach to quality system consists of eight pillars. One of them is continuous improving. Actions for improvement include analyzing and evaluating the existing situation on the basis of measuring and analyzing of processes and products. In this paper the use of X – chart has been demonstrated for analysis of Key Productivity Index (KPI) in small enterprise. In the paper attention has been focused on relationships between goals defined within the framework of QMS (Quality Management Systems) and business..

INTRODUCTION

The results of research on the effectiveness of quality management systems based on ISO standards series 9000 have been widely published. In subject literature one can encounter extreme opinions on the usefulness of so expensive and absorbing quality systems. Also the reasons why organisations undertake effort related to the implementation of quality systems are evolving. P. Grudowski lists internal factors, such as better supervision over processes, improved supervision over documentation and records, improved quality of products and services, cost reduction, as well as external factors, which allow fulfilling customers' requirements, limit the number of complaints or improve the market position of an organisation [1]. Investigations carried out in the USA and many European countries reveal that the main factor influencing a decision to implement quality systems is the expectations of customers. Streamlining of the organisation's work is listed second [2, 3, 4, 5]. McAdam and M. McKeown notice that as time goes by, organisations change their opinions about the reasons why quality management systems are implemented – there is a drop in the number of organisations which declare that the main reason for implementing a quality management system was the customer's pressure. A change in the attitude to quality management systems results from a change in the awareness concerning the mechanisms involved in quality management systems. This is among others revealed by M. Ligarski's research [6]. There is a number of investigations questioning the positive aspects of quality management systems based on ISO 9000 standards. J. Mazurkiewicz, M. Wierzbicka [7] believe that quality systems are bureaucratized and make the work more difficult in the opinion of employees in the investigated enterprises. Similar conclusions have been reached by A. Baraniecka and J. Witkowski [8]. The causes of low effectiveness of quality management systems have also been revealed in the investigations which the author of this publication conducted for 20 small enterprises on the territory of Silesia [9]. Attention was paid to the lack of qualifications of staffs working in consulting companies which prepare companies for quality system certification [10]. Problems related to the quality of advisory services were the subject of research presented in the work [11]. Opinions on QMS (Quality Management System) presented in the quoted studies result from an inappropriate approach to quality systems in the analysed organisations. The structure of many documents and, in consequence, supervision over Quality Management System, is based on the requirements contained in the first two issues of the standards, where emphasis was placed on quality assurance, the aim of which was to establish a set of goals for organisations as well as the manner of monitoring their implementation. Such an approach is still clearly visible in the systems the scope of which includes quality management.

QUALITY SYSTEMS AS AN IMPROVEMENT TOOL

Since 2000 quality systems have been based on eight principles, among which the important ones include: process approach, a system look at quality, continuous improvement and taking decisions on the basis of facts. The process approach allows noticing the activities that do not generate an added value and makes it possible to eliminate them (improvement). The introduction of key productivity indexes allows measuring the effectiveness of processes and evaluating their efficacy (improved efficacy means process improvement). Facts are all kinds of data on the processes carried out in an organisation. If we see quality from the angle of a system approach, process analysis, improvement of a broadly understood productivity and facts which allow taking safe decisions, we will perceive Quality Management System as a tool that also

limits the risk involved in the organisation's activity. The importance of risk in business activity is highlighted in works on another amendment of ISO 9001 standard.

The current approach to quality management systems should answer the question: **Is the system and process effective, i.e. capable of achieving the established goals?**

Among the steps to be taken when developing and implementing a quality management system the following should be taken into account:

- ✓ **establishing the methods for measuring the effectiveness and efficacy of each process,**
- ✓ analysis and application of these measurements for determining the effectiveness and efficacy of each process,
- ✓ using the results of measurements and analysis for improvement.

A problem faced by nearly every organisation having an implemented quality management system is to define measures for processes identified in Quality Management System which allow evaluating the effectiveness of a process and assessing the risk involved in the course of this process. Examples of measures presented in a review of management (a requirement contained in point 5.6 of ISO 9001 standard version 2008) include:

- ✓ the extent of quality policy acquaintance,
- ✓ acceptance of goals concerning quality,
- ✓ the extent of ensuring audits and reviews for all organisational units.

The usefulness of such data in QMS (Quality Management System) can be discussed, given the fact that these figures most frequently appear only in reports on management reviews that an auditor of the certifying unit asks for. More useful seem to be the measures which refer to e.g.:

- ✓ quality capability of processes,
- ✓ production defectiveness,
- ✓ efficiency of production processes.

What should be measured to make sure that we are able to achieve the set goals? The following division can be made:

- ✓ **management processes,**
- ✓ **production processes,**
- ✓ **control processes.**

which will enable easy identification of the causes of failures. The process approach makes it possible to determine what should be measured to achieve an expected goal. The mechanism of searching for measures of process effectiveness has been presented in Fig. 1.



Fig. 1 Using the process approach for improvement

Source: own study

However, the most frequent case is the situation illustrated in Fig. 2. As long as the results obtained from the process stay within the ranges contained in the specification, no activities are undertaken.

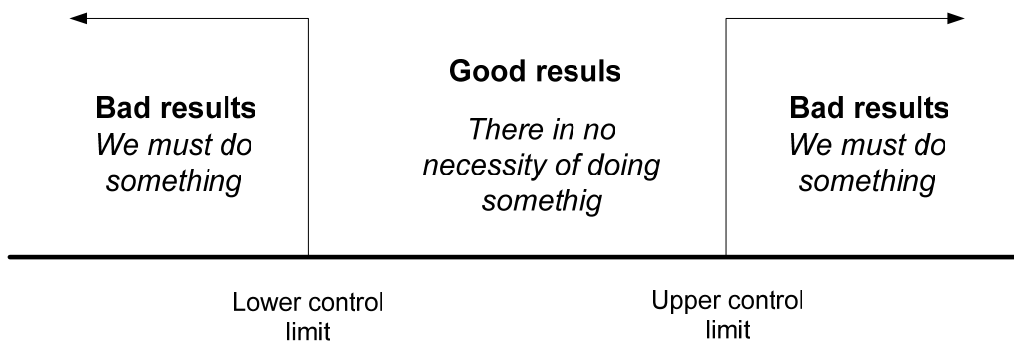


Fig. 2 Referring the results to the specification without analysing the course of the process.

Source: own study

The process consists of a sequence of activities and decisions, which transform the input data into output (process goals). A decision block is the place which in a simple way points to what should be measured so as to achieve the goals in an effective way (with minimal resources used) (Fig. 3).

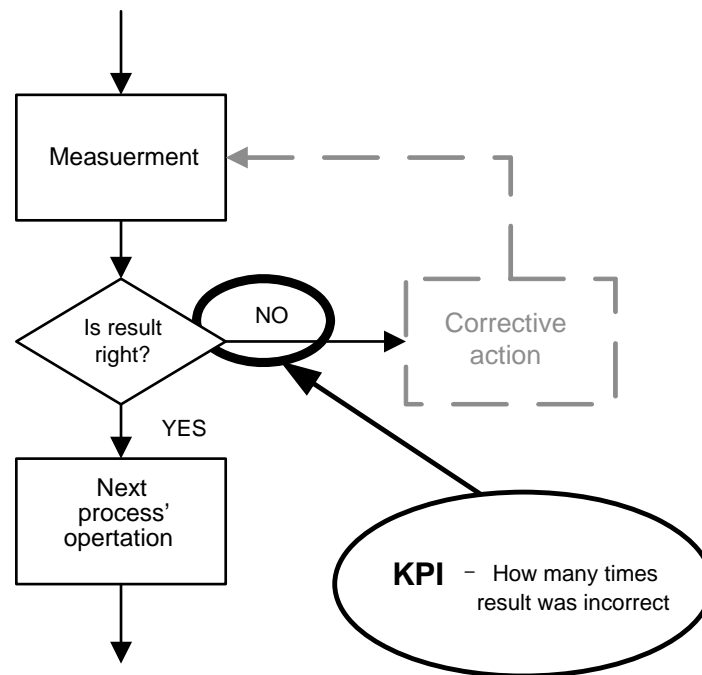


Fig. 3 A point of process effectiveness index determination

Source: own study

An expected result in the decision node presented in Fig. 3 is the answer „YES”, which allows proceeding to another stage of the process. The answer „NO” is an unwelcome state – it needs to be corrected and measured again. These two activities – correction and another measurement – do not provide an added value in the process and are a cost. From the point of view of productivity, one should strive to achieve a state in which such a situation will not occur. It is therefore reasonable to adopt the number of unwelcome situations as a measure of process effectiveness. The question remains whether the occurrence of an unwelcome situation resulted from a factor disturbing the correct course of the process or whether it is a consequence of a random incident that appeared in a statistically regulated process. Answers to these questions should be the result of an analysis of process data and should provide material for starting a discussion on quality systems within the framework of a management review.

AUTHOR’S OWN STUDIES

The studies were conducted in a production organisation having an implemented and certified quality management system for 8 years. Within the system managerial, operational and support systems were identified. The measures of effectiveness, which are systematically monitored and subject to monthly reporting, were determined for each process. Information on the processes is stored by a quality management system plenipotentiary. It is used as input data for annual management reviews and, on a monthly basis, is provided to interested managers of the company’s organisational units. For processes identified in the organisation the measures of process effectiveness were determined. The investigations included a review of all measures, process effectiveness indexes and the manner of their analysis. The current evaluation of the process effectiveness consisted in assessing the numeric value obtained for an analysed measure and comparing it with the value obtained in an analogical period of the previous year as well as the mean value quoted cumulatively from the beginning of the year until the analysed day of the

year (YTD – year to date) and comparing it to the expected value, consistent with the value of the set goal. The analysed annual values were arithmetic means obtained for the values of particular measures.

In the article the values obtained for the work in progress analysis have been discussed. Table 1 contains values which are reported and transferred to the plenipotentiary and managers of respective organisational units.

Table 1 An example of a monthly report

	Department	July this year [Mg*1000]	Planned value [Mg*1000]	Difference [%]	Difference [%] in relation to July of the previous year	Mean value [Mg*1000]	Planned value [Mg*1000]	Process difference [Mg*1000]	Process change YTD from the previous year [%]
Work in progress	A	31	19.7	+42	+13	21.6	19.7	+9.6	+5.9

Source: own study

The percentage difference in relation to July of the previous year was recognized as a signal of special variability and action was taken to establish the cause of the observed deviation. Basing on the mean values, the researchers ignored an evaluation whether the obtained value was a signal or interference resulting from natural variability. In further analyses of the obtained value it was assumed that the obtained value of this index was a result, and not the cause of the deviation.

DATA ANALYSIS USING CONTROL CARDS OF A SINGLE MEASUREMENT AND MOVING RANGE

When analysing the data for the work in progress, it was assumed that the data should be presented in the context in which they occur. The analysis was based on data from the current year and two preceding years. The results have been given in Table 2.

Table 2

The results of the size of work in progress in the years 2010 – 2012 in thousand' of tons.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
2010	19	27	20	16	18	25	22	24	17	25	15	17
2011	20	22	19	16	22	19	25	22	18	20	16	17
2012	20	15	27	25	17	19	31					

Source: own study

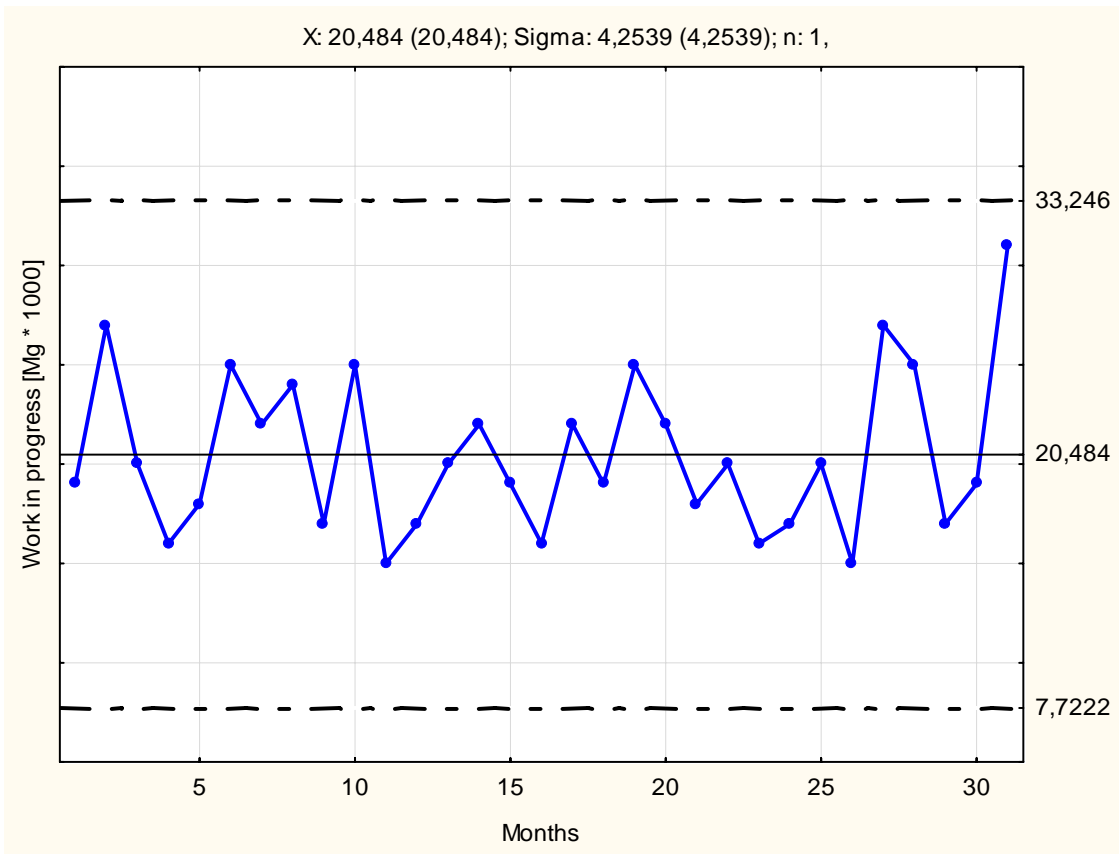


Fig. 3 A control card of the size of work in progress in the years 2010 - 2012
 Source: own study based on the data provided by Department A of the investigated company

A control card of single values indicates that the mean value of the work in progress from 2010 to July 2012 was 20 500 tons. The analysed process did not show any major deviations from the mean values. With so configured process one should expect that the values of work in progress will range between 8 400 and 31 000 tons. However, the card presented in the drawing did not answer the question whether the deviation recorded in July last year was caused by a random or special incident. The answer to this question will be obtained from the card presenting a moving range (mR). This card has been presented in Fig. 4.

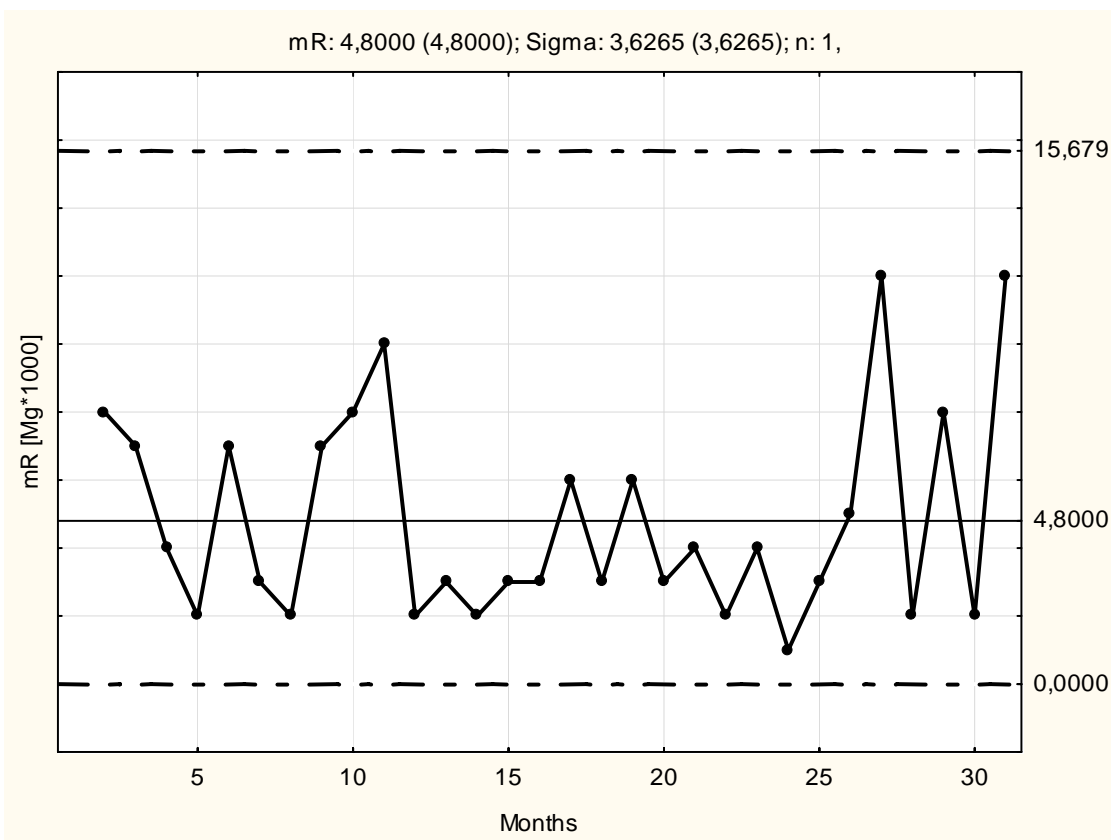


Fig. 4A control card for the work in progress in the years 2010-2012

Source: own study based on the data provided by department A of the investigated company

A control card prepared for ranges between particular months of the analysed periods can say that the obtained values did not exceed the upper control limit established for particular months, which indicates that the analysed process is affected only by random variability.

CONCLUSIONS

1. A comparison of only two values gives very limited results,
2. The commonly applied monthly reports are based on limited comparisons,
3. Control limits presented on a card of individual values define how high or how low must be the analysed value for a single month so that it is considered a signal,
4. The upper limit on anmR card indicates that if an analysed value exceeds this limit in consecutive months, it should be considered a signal that a special cause has occurred,
5. The establishing of goals without taking into account the natural variability of the process, which is frequently encountered in QMS, should be considered a serious mistake, which cannot lead to real improvement.

REFERENCES

1. Grudowski P. Podejście procesowe w systemach zarządzania jakością w małych i średnich przedsiębiorstwach. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2007,

2. Zhu S., Scheuermann L.: A comparison of quality programmes: total quality management and ISO 9000. *Total Quality Management*, 1999, nr 2,
3. Tsiotras G., Gotzmani K.: ISO 9000 as an entry key to TQM; the case of Greek industry, *International Journal of Quality and Reliability Management* 1996, nr 4,
4. Whithers B., Ebrahimipour M.: Does ISO 9000 certification affect the dimensions of quality used for competitive advantage? *European Management Journal* 2000, nr 4,
5. Carlson M., Carlson D.: Experiences of implementing ISO 9000 in Swedish industry. *International Journal of Quality and Reliability Management* 1996, nr 7,
6. Ligarski M.: *Podjęcie systemowe do zarządzania jakością w organizacji*. Wydawnictwa Politechniki Śląskiej w Gliwicach, Gliwice 2010,
7. Mazurkiewicz et al *Badania efektywności system zarządzania jakością*, *Problemy jakości*, nr 8 2007,
8. Baraniecka A., Witkowski J., *Siedem pułapek certyfikacji systemów zarządzania jakością*, *Przegląd Organizacji*, nr 7-8 2005,
9. Ścierański J.M. *Zarządzanie jakością w małych organizacjach – moda, czy sposób poprawy konkurencyjności firmy?* [w] red. J. Pyka, *Nowoczesność przemysłu i usług. Procesy restrukturyzacji i konkurencyjność w przemyśle i usługach*, TNOiK Katowice 2007,
10. Ścierański J. M. *Jakość usług doradczych – wyniki badań*, red. J. Żuchowski *Rola towaroznawstwa w zarządzaniu jakością w warunkach gospodarki opartej na wiedzy – Towaroznawstwo w nauce i praktyce*, Politechnika Radomska, Radom 2010,
11. Ścierański J.M. *Ocena jakości usług doradczych w zakresie SZJ*. [w] red. J. Pyka, *Nowoczesność przemysłu i usług. Metody i narzędzia nowoczesnego zarządzania organizacjami.*, TNOiK Katowice 2008,

ASPECTS OF IMPLEMENTING A MODEL OF THE TRAVELING SALESMAN BY AN INFORMATION SYSTEM FOR MANAGEMENT SUPPORT

Stefan Senczyzna

School of Finances and Law, Poland

Bielsko-Biala, ul Tanskiego 5

E-mail: stefan.senczyzna@prolog.com.pl

Abstrakt: Model komiwojażera reprezentuje szereg problemów występujących w praktyce zarządzania. Ze względu na złożoność obliczeniową ten model nie jest wykorzystywany w systemach informatycznych wspomagania zarządzania. Jednakże takie zagadnienia jak planowanie i kontrola przepływów zasobów w procesach produkcyjnych opisują rozrzedzone zbiory danych. Wykorzystując tę sytuację można zaproponować model komiwojażera w optymalizacji zadań zarządzania. Ważnym aspektem implementacji tego modelu są struktury danych zapewniające, że obliczenia zakończą się sukcesem. W publikacji analizujemy przebieg obliczeń dla implementacji modelu opartej na wielowymiarowych tabelach przy założeniu, że model komiwojażera reprezentuje zbiór o dużym rozrzedzeniu.

Abstract: Salesman model represents a number of problems in the practice of management. Due to the computational complexity of this model is not used in information systems for management support. However, issues such as planning and control of the flow of resources in production processes describe the sparse data sets. Taking advantage of this situation can be offered to the traveling salesman in the optimization model management tasks. An important aspect of the implementation of this model are data structures to ensure that the calculations are successful. The paper analyzes the implementation of the model calculations for multidimensional tables based on the assumption that the model of a Salesman represents a collection of high dilution.

1. Specification optimization problem in supporting the management of

In complex organizations, companies, especially multi-manufacturing companies, where there is a large number of tasks in a large area, this optimization can yield significant benefits. You can benefit by reducing the time to locate specialists handle the task. The manufacturing companies such tasks appear in the operation and repair. For example, operation and maintenance tasks. Such tasks are characterized by scattered location, limited resources and a number of limitations.

2. Applicability of the algorithm Salesman

We expect that the model of the traveling salesman, implemented by the ERP system, can solve the problem of optimization within a reasonable time.

However, even when the input data is sparse, it could overrun the size of data structures and computational time limit. Therefore, it is important to form the implementation of the model, including the data structure and the structure of the algorithm. The starting point is the structure of the data taking into account the specificity (sparse) of the input. What is needed is the definition of a data structure that the calculations will not be proceeded paths leading to the overrun of the data size.

3. The experiment verifies the applicability of the model of a Salesman

Suppose that a model of the traveling salesman is an application based on the specification of [1,2,3]. By setting the application sparse data we can determine what the largest number N (number of network the traveling salesman) is achievable for the technology implementation. For the experiment we can determine how to shape the structure of the data and what technology to use to maximize N . The traveling salesman model application are exploring changes resolution data structure representing the states of calculation, depending on the size of the tasks of the network (N) and thinning of the data set (the number of paths between vertices). We are investigating whether certain data thinning can calculate ending possible outcome for large N . We observe a tendency to resize the data structure representing the states calculations. We consider that this trend is a prerequisite for the application of the practical utility of the traveling salesman algorithm in information systems for management support of company.

4. Specifications experimental application of the model the traveling salesman

5.1 Task optimization

The subject of optimization is to schedule the tasks of the brigade repair in a multi-departmental enterprise. For the experiment on the application of the traveling salesman model we assume the following assumptions:

- the location of renovation tasks represents a network with N vertices, the number of routes between the vertices of the network is small,
- repair job at the vertices of the network implements (simultaneously) k specialists
- duration of the task, which is located at the apex of the network is q .

5.2 Input of the optimization task

The input is a traveling salesman algorithm data structure representing a network of tasks. Path between vertices, the times of the tasks and the data structure representing the states of the calculation algorithm. This structure contains the optimal solution - schedule tasks by k experts. Example shown Figure 1

For the specification of multiple tasks at one node are merged individual nodes, eg 3.4 or 5.6

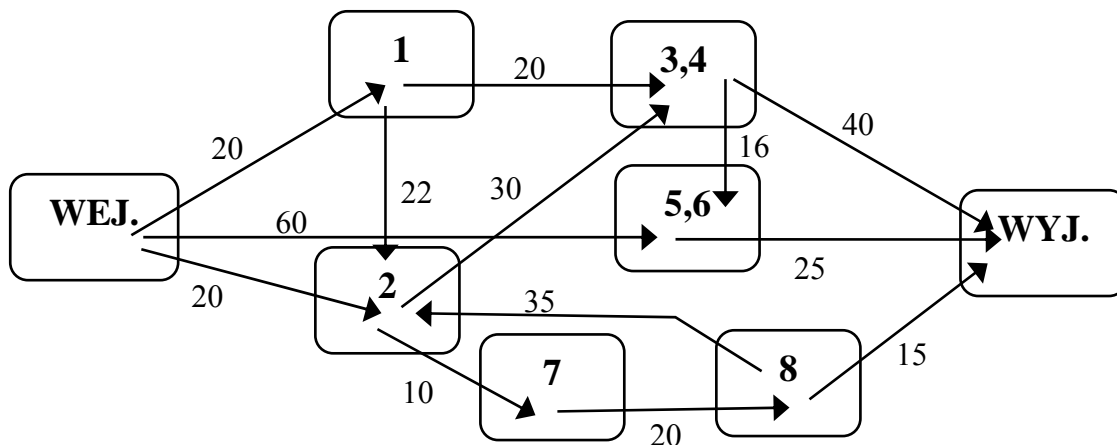


Figure 1. Example of a network of tasks for the repair squad

5.3 Mapping input data into data structures

In order to plan a crew of repair needs to be created is the schedule maintenance tasks in terms of resources and constraints. Pathways to repair tasks maps the array REC1 $(N + 1) \times (N + 1)$, where N is the number of locations.

	0	A	B	C	D
0	0				
A		0			
B			0		
C				0	
D					0

O – the beginning of the path

A, B, C, D - path nodes

Figure 2. The structure of the input array REC1

Duration of the tasks in locations Q is specified in a vector of size N, elements of the vector are respectively the time of the task in a given location.

5.4 Example of the pathways to repair tasks array for figure 1

In the array of "pathways to repair tasks" you can create a collection of all roads pass through repair tasks. Repair tasks, with a duration defined in the vector Q, can be performed by a number ($k_{max} = 3$) of specialists.

Table 1. The example of input values

	O	1	2	3	4	5	6	7	8	8
O	0	20	20	*	*	60	60	*	*	*
1	*	0	22	20	20	*	*	*	*	*
2	*	*	0	30	30	*	*	10	*	*
3	40	*	*	0	0	16	16	*	*	*
4	40	*	*	0	0	16	16	*	*	*
5	25	*	*	*	*	0	0	*	*	*
6	25	*	*	*	*	0	0	*	*	*
7	*	*	*	*	*	*	*	0	20	20
8	15	*	35	*	*	*	*	*	0	0
8	15	*	35	*	*	*	*	*	0	0

5.4 Data structure for the processing

The basis for the implementation of an array RT1 is a collection of vectors P_i (N-element). Signature table is as follows: $2 \times N \times Lt \times N$, where:

- the first coordinate index and the total number of specialist road traveled by a specialist network nodes in a given stage of the calculation, and the state of the calculation,
- second coordinate index node number (n) on the stage of the calculation (nt)
- the third coordinate is the index (lt) in the calculation [1 .. Lt]
- fourth coordinate is an index (nt) phase calculations [1 .. N]

The result of the calculation is a set of vectors for $1 \leq nt \leq N$, $1 \leq lt \leq Lt$. This collection contains the optimal vectors.

The calculation is illustrated in Figure 3

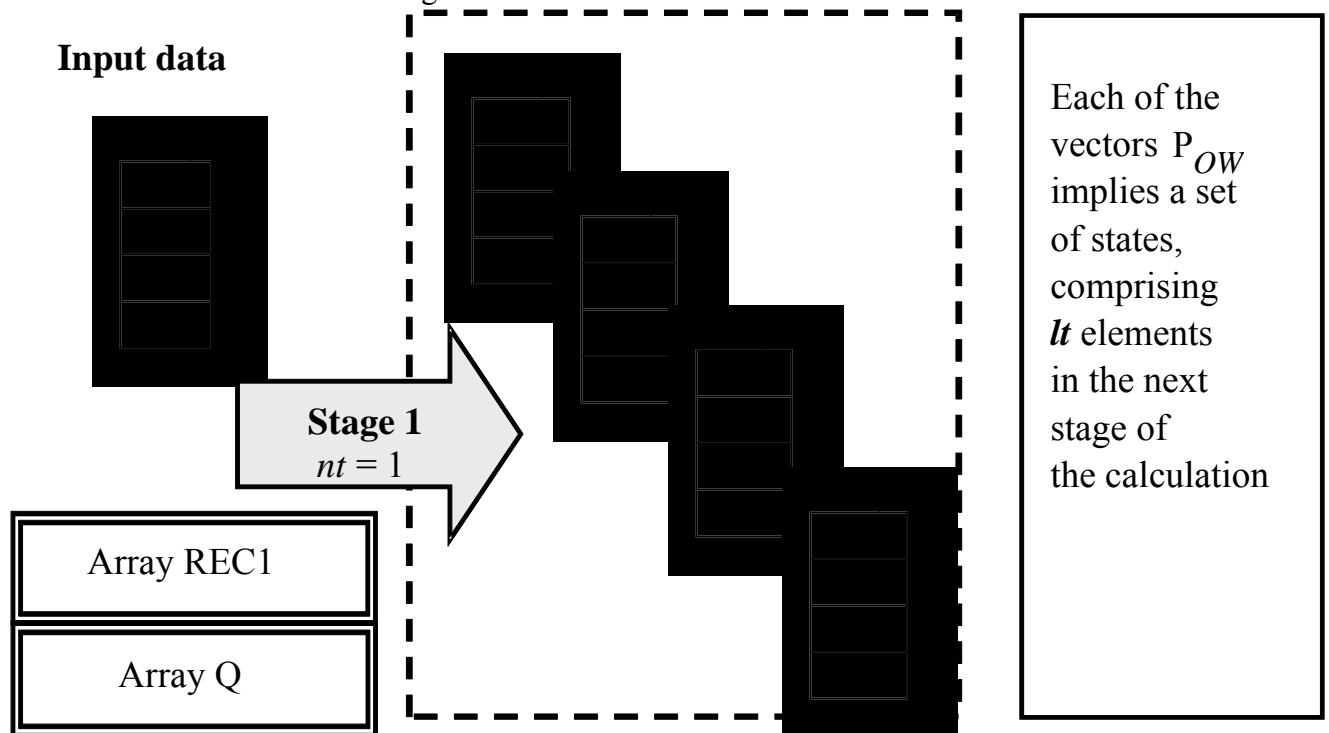


Figure 3 A collection of vectors calculated at some stage

The algorithm takes into account the removal of vectors $P_{i,j}$, for which there are indications that do not result in the minimum of the road (at the end of the calculation).

5. Output

Elements of the set output calculations are arrays contained RT1. Element, which includes the value of pathways and the assignment of specialists to the location gives an array of $2 \times N$, where the first column is a number of the specialist. Second column is a route from the start to the location of a task.

After the calculation the array output RT1 contains elements from the set: $RT1 (\{1..2\}, \{1..N\}, \{1..Lt\}, N)$ where:

1 - number of specialist

2 - the road from the entrance to the venue of the task

Lt - the maximum set of states

N - number of steps in the calculation equal to the number of network nodes (Figure 1)

The output includes a set of optimal.

6. The experiment

We investigate the size of the data structure (It) versus the data input size (N).

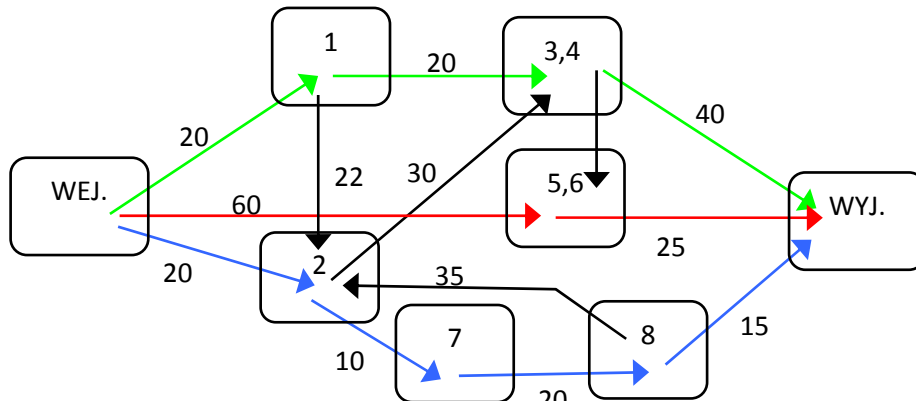


Figure 4 An example of the Salesman model of $N = 8$ mapped by the dilution data set

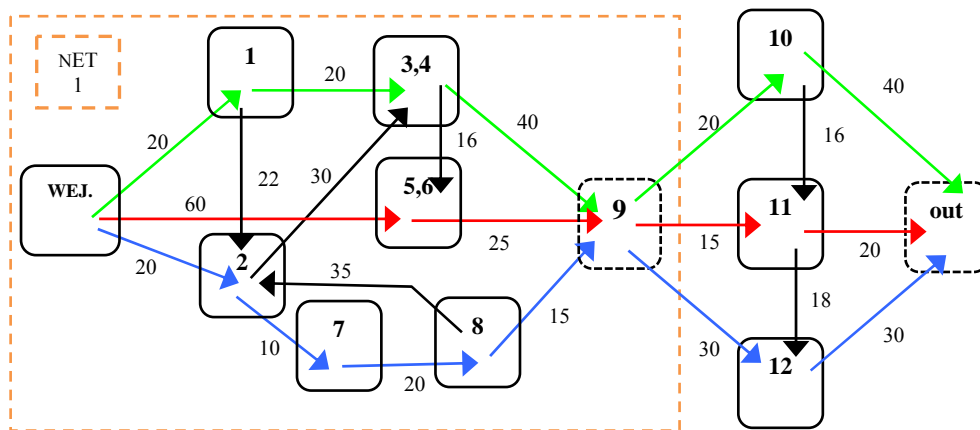


Figure 5 An example of the Salesman model of $N = 12$ mapped by the dilution data set

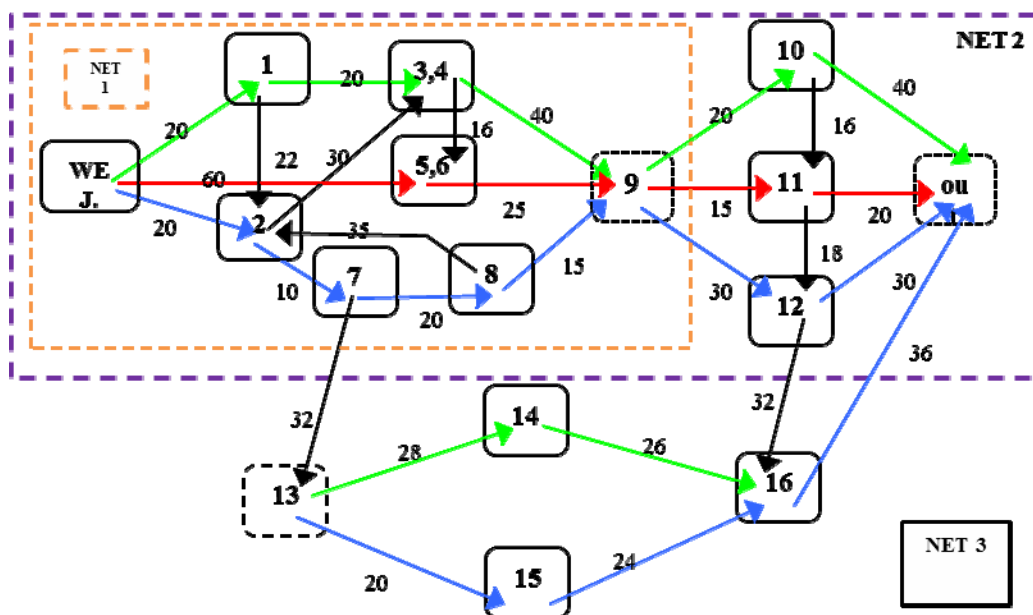


Figure 6 An example of the Salesman model of $N = 16$ mapped by the dilution data set

7. Summary

The main data structure for computational is an array RT1 of $2 \times N \times L_t \times N$, where L_t should be large as possible. Index L_t in range 1 to L_t indicate the maximum peer of data size required for computational for given input data of N .

Figure 7 shows that for N in range from 8 to 20 L_t not exceeded 20000 when for experiment L_t was set to 80000 in a test application of Salesman model. In this experiment an input set maps possible problems given by net on figures 4,5,6. Because these input sets is diluted the computational has finished in an accepted time. It allow to inference that implementation of Salesman model in information systems can be useful for specific tasks in management domains.

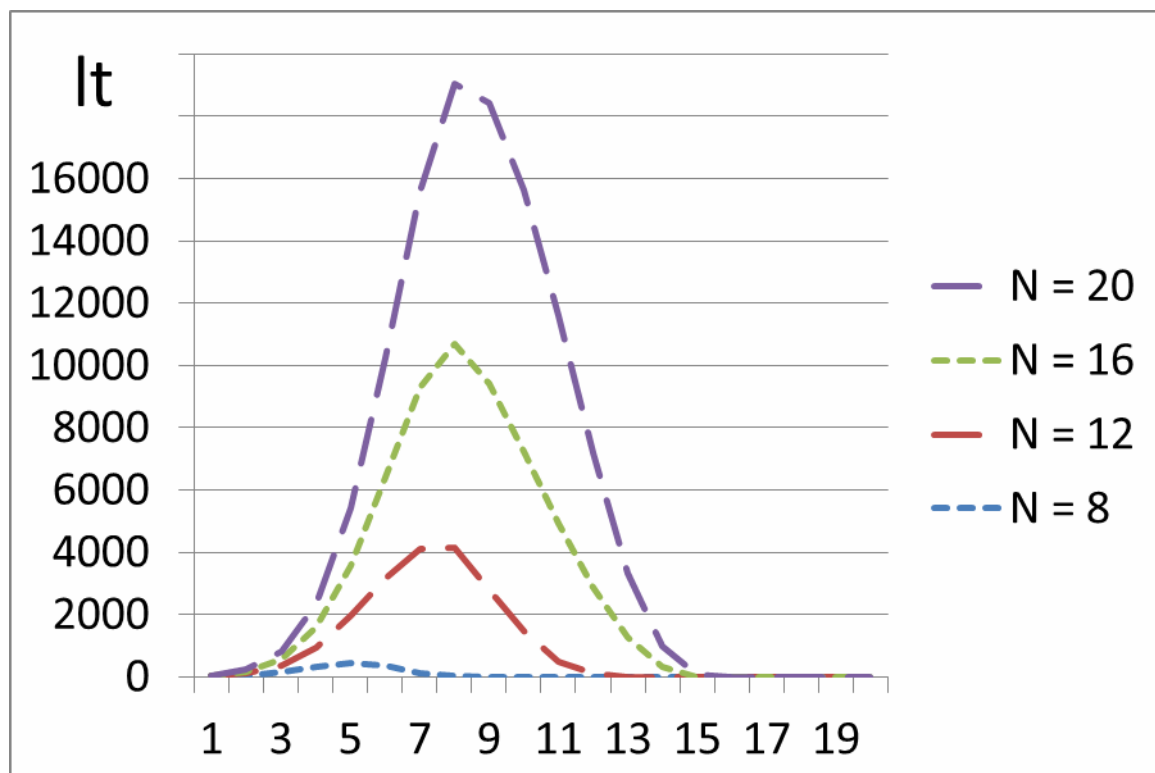


Figure 7. Dependence of the peak size of the data structure (L_t) from (N), the size of the data structure mapping model of a Salesman

References

- [1] Łużny D.: Modelowanie kompleksów operacji z indywidualnymi przedziałami czasu pracy. Zeszyty Naukowe Nr 23 - Wyższa Szkoła Zarządzania i Informatyki Bielsku Białej, Bielsko Biała 2004.
- [2] Łużny D.: Modelowanie kompleksów operacji z ograniczeniami terminów ich rozpoczęcia. Zeszyty Naukowe Nr 21 - Wyższa Szkoła Zarządzania i Informatyki Bielsku Białej, Bielsko Biała 2004.
- [3] Łużny D.: Modelowanie kompleksów operacji z różnymi priorytetami ich realizacji. Zeszyty Naukowe Nr 24 - Wyższa Szkoła Zarządzania i Informatyki Bielsku Białej, Bielsko Biała 2004.

WORKSHEETS FOR MATHEMATICS¹

Petra Schreiberová, Petr Volný

Dept. of Mathematics and Descriptive Geometry, VŠB-TU Ostrava
17. listopadu 15, 708 33 Ostrava-Poruba
E-mail: petra.schreiberova@vsb.cz, petr.volny@vsb.cz

Abstract: The aim of the paper is to present the study materials in a form of worksheets used in Mathematics I and Mathematics II. The worksheets are focused on students of the combined form. The materials were created as a part of FRVŠ project solved at Department of Mathematics and Descriptive Geometry, VŠB-TUO.

Abstrakt: Naším cílem je prezentovat tvorbu studijních materiálů ve formě pracovních listů do matematiky se zaměřením na studenty kombinovaného studia v rámci FRVŠ projektu vedeného na naší katedře a zhodnotit jejich dopad na výuku.

1. Introduction

The motivation to study mathematics is relatively low among students. Their knowledge of mathematics from high and elementary schools are limited. Even more, they do not like mathematics at all.

We try to react on progress in communication and information technologies. Students are familiar with computers, tablets, smart mobile phones, etc. Most of them do not read books in physical form and one cannot expect that students will do it in the case of textbooks. We want to respond on that fact and therefore, we prepare the materials suitable for study with using these most popular electronic platforms.

In general, the study is difficult at technical universities. The self-study is necessary and our worksheets should facilitate it as one of available forms of study. The worksheets can be used in common with free mathematical software (GeoGebra, Wolfram, Gnuplot) in the lectures not only for the students of the combined form of study but also for full-time students.

We would like to mention our collaborators which cooperates on this FRVŠ project; M. Bobková, D. Dlouhá, R. Hamříková, Z. Morávková, R. Paláček.

At the end of the paper one can find web pages containing our materials and other sources, [1]-[3].

¹Authors appreciate support of the project FRVŠ 1103/2013 and of their departments.

2. Worksheets

There has been created a uniform latex style. As a result one obtains a pdf file containing hyperlinks that allow the student to come throughout the text. Resulting pdf file also obtains hyperlinks leading to external video files with comments concerning theory and some illustrative examples.

On the following picture we want to show example of worksheets for Mathematics II.

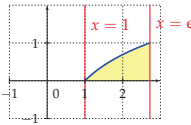
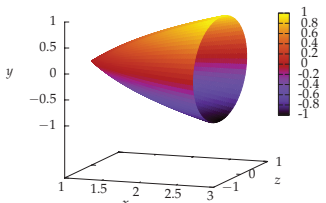
Matematika I - řešené příklady		Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB - Technická univerzita Ostrava	
36 - Užití určitého integrálu - objem rotačního tělesa			
Zadání Vypočítejte objem tělesa vzniklého rotací (kolem osy x) oblastí ohraničené funkcí $y = \ln x$, osou x v $(1, e)$.		Poznámky	
Řešení Řešený video příklad		<i>Objem rotačního tělesa</i>	
Znáznámíme si oblast, která bude rotovat: $y = \ln x, x \in (1, e)$		Teorie: ?? Příklady: ??,??	
		$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$	
Oblast je ohraničena pouze jednou funkcí, tzn. budeme počítat integrál z druhé mocniny dané funkce.			
Dosadíme do vzorečku:			
$V = \pi \int_1^e \ln^2 x dx = (PP) = \pi [x \ln^2 x]_1^e - 2\pi \int_1^e \ln x dx = (PP) = \pi e - 2\pi \left([x \ln x]_1^e - \int_1^e dx \right) =$ $= \pi e - 2\pi e + 2\pi [x]_1^e = \pi(e - 2)$			

Fig. 1: Worksheet - Riemannian definite integral - volume of a rotational body (in Czech)

Note that the worksheets are written in Czech. Other possible extension is to translate these worksheets into English and after that they can be used for Erasmus students.

3. Questionnaire

In the last school year (summer semester) we used our first version of worksheets containing only unsolved examples during the lectures of mathematics held at the Faculty of Civil Engineering and the Faculty of Mechanical Engineering, VŠB - Technical University of Ostrava.

At the end of the courses we let the students to fill a questionnaire because we would like to have a feedback from students which would allow us to improve our worksheets. The results were statistically analysed.

Mathematics II, worksheets

Evaluation: 1-definitely yes, 5-definitely not

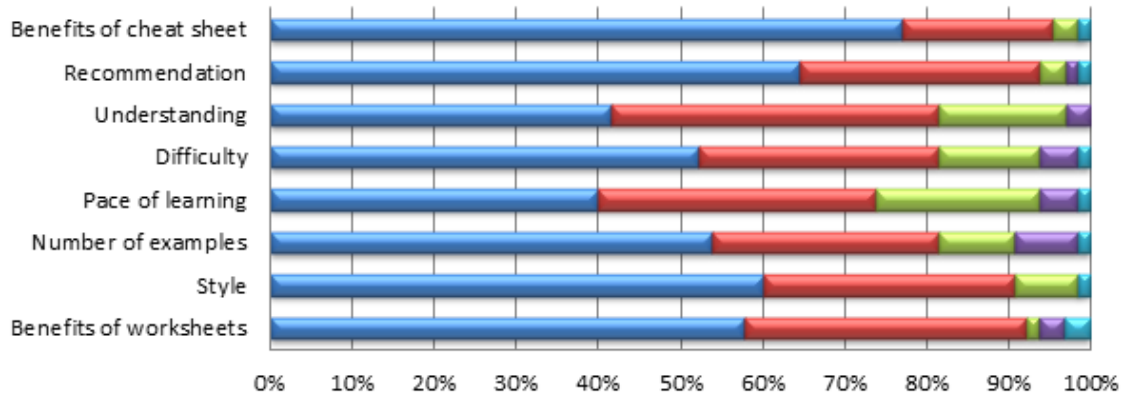
Faculty:

Gender: M/F

1 2 3 4 5

- | | |
|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Did the worksheets help you to gain better understanding in mathematics? | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| 2. Was the style of worksheets acceptable? | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| 3. Was the number of examples sufficient? | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| 4. Did you suit pace of learning? | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| 5. Did you consider the performance of the examples in the worksheets sufficient? | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| 6. Were the worksheets helpfull for you? | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| 7. Would you recommend worksheets to other students? | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| 8. Was the cheat sheet usefull for you? | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| 9. Your commentary to worksheets | |

Questionnaire - Faculty of Civil Engineering



	Benefits of worksheets	Style	Number of examples	Pace of learning	Difficulty	Understanding	Recommendation	Benefits of cheat sheet
1	37	39	35	26	34	27	42	50
2	22	20	18	22	19	26	19	12
3	1	5	6	13	8	10	2	2
4	2	0	5	3	3	2	1	0
5	2	1	1	1	1	0	1	1

Fig. 2: Results for the Faculty of Civil Engineering

Questionnaire - Faculty of Mechanical Engineering



Fig. 3: Results for the Faculty of Mechanical Engineering

4. Conclusion

We obtained a positive feedback from students. The questionnaire was related to full-time students. The statistical sample included answers of 115 students. With worksheets and their use in teaching students were very satisfied, which was reflected by higher score achieved by them. For interest, here are some of the comments of students: “the results of examples are missing”, “increase the working space”, “the financial performance (printing of sheets)”, “the presence of cheat sheet is very welcome”, “fajne” (it means cool), “I gave the worksheets to my friend”, etc.

Reference

- [1] Web pages of Department of Mathematics and Descriptive Geometry, <http://mdg.vsb.cz/en/index.php>.
- [2] Worksheets, http://mdg.vsb.cz/wiki/index.php/Hlavní_strana (in Czech).
- [3] Textbooks, <http://www.studopory.vsb.cz/materialy.html> (in Czech).

WYKORZYSTANIE METODY SZEREGÓW DYNAMICZNYCH W ANALIZIE RETROSPEKTYWNEJ STANU BEZPIECZEŃSTWA PRACY W GÓRNICTWIE WĘGLA KAMIENNEGO W POLSCE W LATACH 2008 - 2012

Paulina Sikora-Drabik

Politechnika Śląska, Wydział Górnicztwa i Geologii, Katedra Zarządzania
i Inżynierii Bezpieczeństwa, ul. Akademicka 2, 44-100 Gliwice, Polska
email: paulina.sikora@polsl.pl

Abstrakt: Rozwój tzw. zbiorowości statystycznych oraz ich cech często przedstawiany jest za pomocą tzw. szeregów czasowych, których analiza może być wykorzystywana m. in. w procesie podejmowania decyzji i prognozowania różnego rodzaju zjawisk (np. gospodarczych). W artykule zaprezentowane zostały możliwości praktycznego wykorzystania analizy dynamicznych szeregów statystycznych dla potrzeb oceny retrospektywnej stanu bhp w górnictwie węgla kamiennego w Polsce.

Abstract: The development of the statistical community and their characteristics is often represented by the time series analysis which can be used, among others in the process of decision-making and forecasting of various phenomena (eg economic). The article presents the possibilities of practical use of dynamic analysis of the statistical series for the retrospective assessment of health and safety in the coal mining industry in Poland.

1. Wprowadzenie

Postęp gospodarczy i technologiczny koresponduje z reguły ze wzrostem świadomości społecznej. Nie dziwi więc fakt, że coraz częściej kwestie produkcji traktowane są na równi z problematyką ochrony środowiska, czy bezpieczeństwa. W dobie silnej konkurencji na rynku nie tylko ilość, ale także jakość oferowanego produktu, oraz warunki w jakich następuje realizacji produkcji decyduje o kondycji finansowej firmy i jej wizerunku (uwaga ta dotyczy także zakładów górniczych wydobywających węgiel kamienny). Regulacje prawne, rachunek kosztów, czy też brak

przyzwolenia społecznego na pracę w niebezpiecznych warunkach powoduje, że pracodawcy są zmuszeni do traktowania problematyki bezpieczeństwa pracy priorytetowo. Nie dziwi więc fakt wdrażania systemów zarządzania bezpieczeństwem i higieną pracy, czy też szerszego wykorzystywania narzędzi diagnostycznych np. w procesie analiz przyczyn i okoliczności zaistniałych wypadków.

W artykule w oparciu o dane statystyczne WUG przeanalizowano wypadki zaistniałe w górnictwie węgla kamiennego w Polsce biorąc pod uwagę jedynie przyczyny ich zajścia (tab. 1).

Tabela 1. Górnictwo węgla kamiennego- liczba wypadków śmiertelnych (S) i ciężkich (C) z podziałem na przyczyny ich powstania w latach 2008 – 2012

Przyczyna	2008		2009		2010		2011		2012		SUMA
	Ś	C	Ś	C	Ś	C	Ś	C	Ś	C	
Organ urabiający	0	0	0	0	0	1	1	0	2	0	4
Samozapalenie węgla	10	5	0	0	0	0	0	0	0	0	15
Lokomotywa w ruchu	5	2	2	2	2	0	2	1	0	0	16
Obudowa zmechanizowana (przesunięcie)	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	3
Oberwanie się skał ze stropu lub ociosu	5	1	6	5	1	2	6	0	7	4	37
Przenośnik taśmowy	0	0	2	2	2	7	1	1	3	1	19
Zapalenie CH4	6	1	20	25	0	0	3	9	0	0	64
Przenośnik ścianowy	0	0	2	1	0	1	2	1	0	1	8
Złamanie stropnicy	1	0	2	0	1	0	0	1	2	0	7
Wyciek emulsji z obudowy zmechanizowanej	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	4
Pochwycenie przez ruchome części maszyn i urządzeń (taśmociąg)	1	1	0	0	0	0	3	0	0	0	5
Niewłaściwe stosowanie maszyn i urządzeń	0	0	1	3	0	0	1	1	1	1	8
Mikroklimat	1	0	1	0	2	1	0	0	0	0	5
Odpryski metali	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	2
Prąd elektryczny	1	0	1	0	0	0	0	0	2	0	4
Elementy w ruchu	1	2	0	0	0	0	0	0	0	2	5
Śliska, nierówna nawierzchnia	2	2	0	2	0	0	0	0	0	0	6
Utrata stabilności elementów konstrukcji	1	2	0	1	1	1	1	0	1	0	8
Wystające elementy stanowiska pracy	1	1	0	1	0	1	0	0	1	2	7
Luźne kable	0	2	0	1	0	1	1	1	0	1	7
Praca na wysokości	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	3
Ostre elementy maszyn i urządzeń	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Niewłaściwy sposób transportowania	0	2	1	0	3	1	1	1	2	0	11
Roboty strzałowe	0	5	0	0	0	0	1	0	0	0	6
Tąpięcie	0	0	0	6	2	2	2	0	2	0	14
SUMA	35	28	39	52	16	19	26	18	24	12	269

W artykule odniesiono się jedynie do tych przyczyn wypadków, które w ostatnich pięciu latach spowodowały uszczerbek na zdrowiu lub śmierć u co najmniej 10

pracowników. Dzięki temu ww. zakres zawęził się do 7 przypadków¹ (pozycje wyfłuszczone w tabeli 1).

Przyczyny wypadków wyselekcjonowanych z tab. 1 podzielone zostały na sześć podzbiorów (A, B, C, D, E i F) -tab. 2, w odniesieniu do których wykorzystano wybrane metody statystyki opisowej (miary statystyczne, miary tendencji centralnej, miary zmienności).

Tabela 2. Zestawienie przyczyn wypadków w latach 2008 - 2012 zakwalifikowanych do dalszej analizy.

	Przyczyna	2008	2009	2010	2011	2012	SUMA
A	Lokomotywa w ruchu	7	4	2	3	0	16
B	Oberwanie się skał ze stropu lub ociosu	6	11	3	6	11	37
C	Przełożenie taśmowy	0	4	9	2	4	19
D	Zapalenie CH4	7	45	0	12	0	64
E	Niewłaściwy sposób transportowania	2	1	4	2	2	11
F	Tapnięcie	0	6	4	2	2	14
	SUMA	22	71	22	27	19	161

2. Przeciętne miary pozycyjne

W ramach analizowanego materiału statystycznego wyznaczone zostały następujące miary:

a) miary statystyczne

- *wartość maksymalna zbioru:*

$$X_{\max_A}=7, \quad X_{\max_B}=11, \quad X_{\max_C}=9, \quad X_{\max_D}=45, \quad X_{\max_E}=4, \quad X_{\max_F}=6.$$

- *wartość minimalna zbioru:*

$$X_{\min_A}=0, \quad X_{\min_B}=3, \quad X_{\min_C}=0, \quad X_{\min_D}=0, \quad X_{\min_E}=1, \quad X_{\min_F}=0.$$

b) miary tendencji centralnej

- *średnia arytmetyczna:*

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.1)$$

$$\bar{x}_A=3,20; \quad \bar{x}_B=7,40; \quad \bar{x}_C=3,80; \quad \bar{x}_D=12,80; \quad \bar{x}_E=2,20; \quad \bar{x}_{CF}=2,80,$$

- *wartość modalna (dominanta):*

$$\text{Dom}_A=NP; \quad \text{Dom}_B=6; \quad \text{Dom}_C=4; \quad \text{Dom}_D=0; \quad \text{Dom}_E=2; \quad \text{Dom}_F=2.$$

- *mediana (wartość średnia):*

$$M_e \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} \text{ dla } n \text{ nieparzystego} \\ \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}) \text{ dla } n \text{ parzystego} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$Me_A=3; \quad Me_B=6; \quad Me_C=4; \quad Me_D=7; \quad Me_E=2; \quad Me_F=2;$$

c) miary zmienności

- *rozstęp zbioru:*

$$R = x_{\max} - x_{\min} \quad (2.3)$$

¹ - w ramach dalszej analizy „samozapalenie węgla” odrzucono z uwagi na fakt iż poszkodowani ze względu na tę przyczynę byli odnotowani jedynie w 2008 roku (brak powtarzalności).

$R_A=7, R_B=8, R_C=9, R_D=45, R_E=3, R_F=6,$

- *średnie odchylenie standardowe:*

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.4)$$

$s_A=6,81; s_B=15,13; s_C=8,17; s_D=30,58; s_E=4,51; s_{CF}=5,96.$

- *współczynnik zmienności:*

$$V_x = \frac{s}{\bar{x}} \quad (2.5)$$

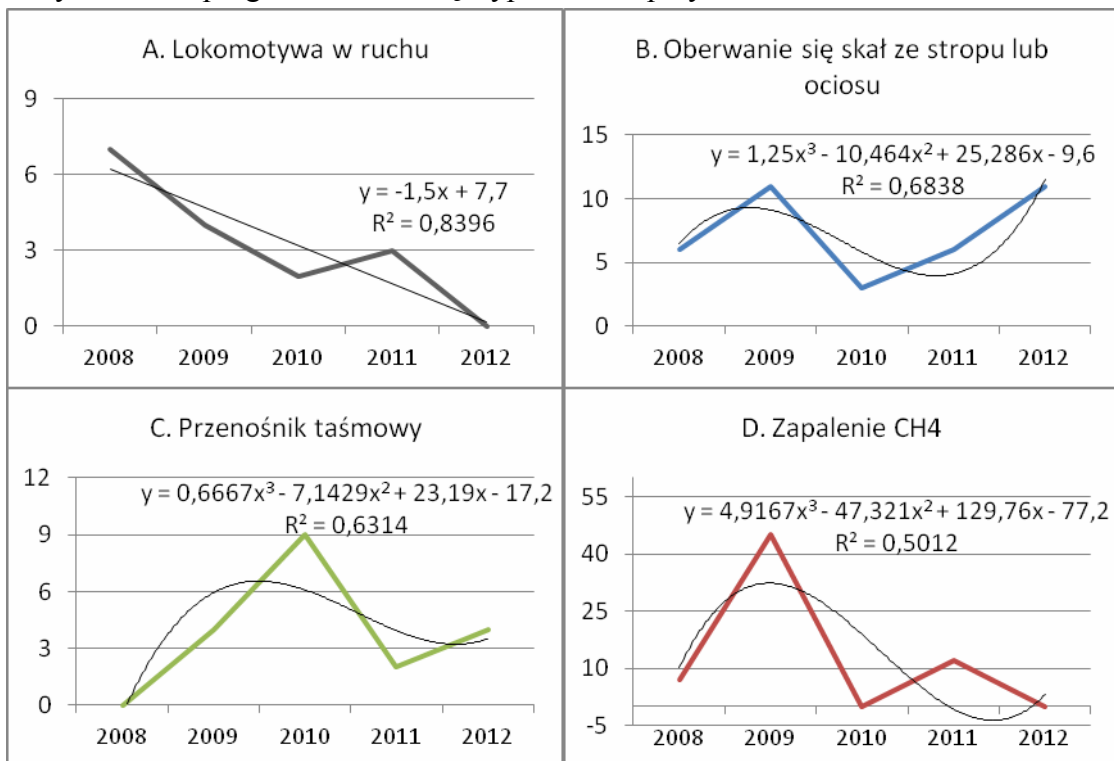
$V_{SA}=2,13; V_{SB}=2,04; V_{SC}=2,15; V_{SD}=2,39; V_{SE}=2,05; V_{SF}=2,13;$

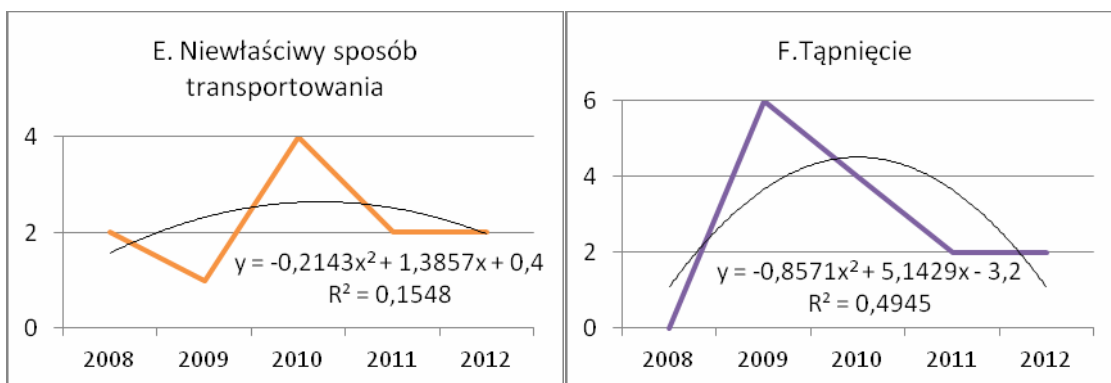
Na podstawie powyższych obliczeń można stwierdzić że zbiór D (wypadki spowodowane zapłonem metanu) jest zbiorem najbardziej zróżnicowanym spośród sześciu analizowanych zbiorów.

3. Szeregi czasowe

Metoda szeregów czasowych opiera się na sekwencji pomiarów, które charakteryzują się nieprzypadkowością w porządku. Metoda ta może służyć jako narzędzie do prognozowania przyszłych stanów dzięki wynikom pomiarów uzyskiwanym podczas badań. Należy jednak pamiętać, że nie wszystkie wyniki są składnikami systematycznymi, często pojawiają się zakłócenia zwane szumem losowym, które utrudniają identyfikację zjawiska (w tym jego struktury).

Dla 6 wytypowanych przyczyn (tab. 2), które w analizowanym okresie czasu spowodowały największą ilość wypadków wyznaczono funkcje trendów, na podstawie których można prognozować liczbę wypadków w przyszłości.





Rys. 1. Wybrane przyczyny wypadków w górnictwie węgla kamiennego w Polsce w latach 2008 – 2012 – interpretacja graficzna wraz z linią trendu.

3. Analiza wskaźnika wypadków przy pracy

Jednym ze wskaźników stosowanym do zobrazowania stanu bezpieczeństwa pracy w górnictwie węgla kamiennego w Polsce jest wskaźnik częstości wypadków w przeliczeniu na 1000 osób zatrudnionych.

$$W_z = \frac{W}{Z} \cdot 10^3 \quad (3.1)$$

gdzie:

W - liczba wypadków,

Z - liczba załogi.

Zestawienie wskaźników częstości wypadków śmiertelnych i ciężkich w przeliczeniu na 1000 osób zatrudnionych w przypadku kopalń węgla kamiennego w Polsce w latach 2008-2012 przedstawia rys. 2 i 3:



Rys 2. Wskaźnik $W_{zś}$ w latach 2008 – 2012.



Rys 3. Wskaźnik W_{zc} w latach 2008 - 2012

Wartości wskaźników wypadkowości wykazują zróżnicowanie: jeśli w przypadku wskaźnika częstości wypadków śmiertelnych W_{zs} rozstęp wynosi 0,199, to w przypadku W_{zc} wartość rozstępu wynosi już 0,347 (prawie dwukrotnie więcej). W obydwu przypadkach można stwierdzić tendencję malejącą.

W oparciu o wyznaczone linie trendu można prognozować wartości wskaźników w przyszłości – przykładowo wartość wskaźnika częstości wypadków śmiertelnych (średni błąd szacunku na poziomie 0,073) powinna wynieść w 2013 roku ok. 0,234 (przy założeniu, że zostanie utrzymany dotychczasowy trend).

4. Wnioski

W przypadku zakładów górniczych wydobywających węgiel kamienny analiza retrospektywna stanu bhp jest realizowana równoległe z procedurami wdrażanych systemów zarządzania bezpieczeństwem i higieną pracy. Dla potrzeb tejże analizy, której przedmiotem jest badanie przyczyn i okoliczności zaistniałych wypadków wykorzystywane są coraz powszechniej metody statystyczne, np. metody analizy szeregów dynamicznych. Przedstawiony w artykule materiał pokazuje możliwości analizowania informacji o stanie wypadkowości w oparciu o podstawowe metody statystyki opisowej. Zdaniem autora, szersze wykorzystanie możliwości jakie dają ww. metody pozwala na pogłębienie analizy bogatego materiału statystycznego jaki jest w posiadaniu służb bhp i umożliwia przygotowanie informacji, które mogą być wykorzystane także w ramach procedur zarządzania bezpieczeństwem i higieną pracy (np. w procesie oceny ryzyka zawodowego).

Literatura:

1. Dudka G., Bojanowski R.: Metodyka statystycznych analiz wypadków przy pracy; Centralny Instytut Ochrony Pracy – Państwowy Instytut Badawczy; Warszawa 2007.
2. Kowalik S.: Wybrane zagadnienia z matematyki wykłady dla doktorantów. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2007.
3. Sobczyk M.: Statystyka. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998.
4. Sikora P.: Wykorzystanie korelacji do oceny wpływu warunków środowiska pracy na konkretne części ciała człowieka na przykładzie stanowiska pracy wyposażonego w monitor ekranowy; „Moderní matematické metody v inženýrství (3mi)”. VŠB, Technická Univerzita v Ostravě, Czechy, Dolní Lomná, 31.05-01.06.2010.
5. Sikora-Drabik P.: Wykorzystanie wybranych metod statystyki opisowej w procesie analizy wypadkowej w górnictwie węgla kamiennego w Polsce w latach 2008-2011; „Moderní matematické metody v inženýrství (3mi)”. VŠB, Technická Univerzita v Ostravě, Czechy, Ostrava 2012; ISBN 978-80248-2883-1.

CHOSEN FACTORS EFFECT OF ELEMENTS AMONG OTHERS THE FIRE AND WIND TO BUILDING STRUCTURES

Jacek Sitko

Institute of Production Engineering.
Faculty of Organisation and Management.
Silesian University of Technology,
ul. Roosevelta 42, 41-800 Zabrze
Jacek.Sitko@polsl.pl

Abstrakt:

Cztery żywioły, ogień, powietrze, woda i ziemia są źródłem wyjątkowych działań na obiekty budowlane, wywołanych pożarem, wichurą, powodzią i wstrząsami sejsmicznymi. Elementy fizyki, wsparte działaniami matematycznymi są pomocne w obliczeniach oddziaływań konstrukcji.

Modele probabilistyczne wypadków budowlanych spowodowanych działaniami żywiołów dają podstawy do projektowania racjonalnie wzmocnionych konstrukcji.

Abstract:

Four elements, the fire, air, water and the earth are the source of exceptional action to civil structures, triggered with fire, strong gale, flood and seismic shocks. Elements of physics, backed up with mathematical action are help to a structure in calculations of influences.

Probabilistic models of construction accidents caused by effects elements are giving bases for the rationally reinforced structures design.



Fig. 1. Example the effect of fire to building structures

Real fire

Fire burden

$$q_f = \sum \mu_i m_i H_i / A_T \quad [\text{MJ}/\text{m}^2]$$

$m_i < 1$ rate of the burn,

m_i [kg/m²] masses of materials,

H_i [MJ/kg] heating.

Indicator of holes in structures

$$w = A \cdot \sqrt{h} / A_T \quad [\text{m}^{1/2}]$$

A_T [m²] – internal area,

A [m²] – field of holes,

h [m] – average height of holes.

Properties of barriers

α_T [1/K] – thermal expandability,

λ [W/m·K] – thermal conductivity,

C [MJ/m³K] – thermal capacity.

Probabilities

fire:

$$p_f = h_1 \cdot \sum A \cdot t_d + p_2 \cdot p_3$$

h_1 – risk of setting fire in 1m² i 1 year

residential: $10^{-7} \dots 5 \cdot 10^{-7}$

commercial: $5 \cdot 10^{-7} \dots 5 \cdot 10^{-6}$

industrial: $10^{-6} \dots 5 \cdot 10^{-6}$

hotel: $10^{-6} \dots 10^{-5}$

Probability:

$p_2 \sim 10^{-1}$ not smothering fire:

- fire service 10^{-2} ,

- company fire guard: 10^{-4}

Requiring the fire resistance for building products

Fire resistance: R – threat - covering up the structure.

Airtightness E - smokes and toxic gasses.

Insularity I - flames and temperature

Categories threat of people ZL:

I – shops,

II – hospitals,

III – schools, hotels,

IV – house,

V- museums, archives.

Fire resistance of elements of the building

Walls, poles, frames: 240 min

Ceilings: 120 min

Partition walls and protective: 60 min

Roofs, terraces: 30 min

Criteria of destroying beams in trials by fire:

- diffraction $g > L/15 \dots L/30$

- crawling $\frac{dg}{dt} > \frac{1}{9000} \cdot \frac{L^2}{H}$ [m/min]

Barriers and fire doors are one important components affecting the improvement in safety directly the object. A protection of the life and possessions are an important task of such a fire fighting structure. When it is about a health care and lives of people the solution should be uncompromising and woodwork best quality.

Assortment right materials in terms the class resistances and applying due construction of buildings are very important on account fire safety.

In the construction ceramic materials are ones of most popular used materials. They are these are appropriately prepared oxides, silicates, aluminosilicates, produced in sintering processes and burning down in highest temperature.

Fire resistant materials are marked by a thermal resistance taking out at least 1500°C. Material the ones they can be in figure formed, poured out, cut out as well can appear in the grain, powder or stringy figure.

They are elementary elements of these materials - beyond SiC - oxides, out of which he usually undergoes analysis: SiO₂, Al₂O₃, CaO, MgO and FeO₂, and additionally often a Na₂O density, K₂O, Cr₂O₃ and ZrO₂ are being indicated [1].

Around with composition chemical and mineralological a chemical nature of fire resistant materials, expressing their resistance to action of agents is connected. In this respect fire resistant materials are being divided on:

- sour,
- alkaline,
- indifferent.

Insulating materials

It is another change of fire resistant materials, of which limiting streams thermal, directed from devices or alternative sources the warmth is a fire to surroundings [2]. A low thermal conductivity is a basic property insulating materials. They are being produced of ceramic materials and nonceramic.

Ceramic insulating materials are getting their of isolation better properties through granting the great porosity products appropriately at small all at the same time of diameter single leaks.

We are ranking among the most popular nonceramic insulating materials diadomit, mineral wool and glass wool.

The mineral wool is casual material, consisting chaotically directed fibres of metallurgical cinder about the minute diameter. She is applied to 600°C in the form thin powder or received mats mixt by pressing wool with the paucity of tar as binders [3].

The glass wool is received with method of taking fibres out of molten glass about diameter 15÷30mm. For her the temperature of applying is 400°C.

Podsumowanie

Przytoczone powyżej przykłady oraz parametry materiałów stosowanych w budownictwie cywilnym oraz przemysłowym, można stosować w szerokim zakresie do konstruowania i budowy elementów odpornych na działanie jednego z omawianych żywiołów, jakim jest możliwość działania ognia na otaczające nas budynki.

Zastosowanie powyższych materiałów i dostosowanie się do przytoczonych zaleceń stanowi poważny wkład w ograniczenie wypadkowości i negatywnych skutków działania żywiołu.

Summary

It is possible to apply cited above examples and parameters of materials applied in the civil and industrial construction in a wide range to constructing and the structure of elements immune to action one of discussed elements a possibility is which effects the fire on buildings surrounding us.

Using above materials and accommodating oneself to quoted recommendations constitute the substantial contribution into the restriction accident and adverse effects of effect the element.

Literature:

1. Krzemień E.: Materiałoznawstwo. Wyd. Pol. Śl. Gliwice 2000.
2. Podrzucki C., Szopa J.: Piece i urządzenia metalurgiczne stosowane w odlewnictwie. Wyd. "Śląsk", Katowice 1983.
3. Dobrzański L. A.: Wprowadzenie do nauki o materiałach. Wyd. Pol. Śl. Gliwice 2007.

AN APPLICATION OF GRAPH THEORY IN MARKOV CHAINS RELIABILITY ANALYSIS

Pavel Skalny

VSB-Technical University of Ostrava, 17. listopadu 15/2172,
Department of applied mathematics
E-mail: pavel.skalny@vsb.cz

Abstrakt: The paper presents reliability analysis which was held for an industrial firm. Aim of the paper is to estimate the probability that the firm fails to satisfy an order to its industrial partners. Since the production process consists of many components, Markov chains- describe the issue ideally. The method is suitable for many systems where we can easily distinguish various states. To quantify the production for each state an algorithm inspired by Graph theory is used.

1 Introduction

The reliability of production plays the fundamental role in an industrial sphere. Nowadays the reliability of industry process is on a high level. It is increased by improving the quality of each component or by redundancy of the production process. Even though it is the top reliability process, there is still a chance that system fails. In our case we analyse the process which has no redundancy. Thus the information about the probability of the systems failures is very valuable.

In the previous work an [2] a reliability analysis of the part of an industry process was realized. In this paper we would like to present use of graph theory in reliability analysis. Graph theory have previously been applied to reliability, but for different purposes than we intend. One of example of application of graph theory in reliability is a reliability polynomial [4] or network reliability [5]. In this approach a graph describes a network where each edge has the same probability of fail. Probably the most related work to our paper is the research of Ch. Dabrowski [6]. Alike as in our paper Dabrowski uses graph theory as a tool for counting with discrete time Markov chains Apart from our work the Markov chains described in Dabrowski consists of states .

2 Markov Chains

Markov chain is a random process with a discrete time set $T \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$, which satisfies the so called “Markov property”. The Markov property means that the future evolution of the system depends only on the current state of the system and not on its past history.

$$P\{X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n\} = P\{X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n\}. \quad (1)$$

where:

X_1, \dots, X_n is a sequence of random variables. The index denotes certain time $t \in T$. x_1, \dots, x_n is a sequence of states in time $t \in T$. As a transition probability p_{ij} we regard probability, that the system changes from the state i to the state j .

$$p_{ij} = P\{X_{n+1} = x_j | X_n = x_i\}. \quad (2)$$

Square matrix P , where p_{ij} is placed in row i and column j , is for all admissible i and j called transition probability matrix.

Clearly all elements of the matrix row satisfy the following property:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1. \quad (3)$$

By $v(t)$ we denote vector of probabilities of all the states in time $t \in T$. By $v(0)$ we denote an initial vector. Usually, all its coordinates are equal to zero except the one, which is equal to 1. It is easy to proof that:

$$v(t) = v(0) \cdot P^t. \quad (4)$$

3 preliminaries of graph theory

In this chapter we will establish fundamental terminology of graph theory which will be used further in the paper for another informations see e.g. [3].

3.1 Definition of Network

Network is a four-tuple $S = (G; z; s; x)$, where:

- G is an oriented graph,
- vertices $z \in V(G)$, $s \in V(G)$ are the source and sink,
- $x : E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ ia a positive labeling on edges, called edge capacities.

3.2 Definition of Flow in network

Flow in a network $S = (G; z; s; x)$ is a function $f : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, where:

- no edge capacity is exceeded: $\forall e \in E(G) : 0 \leq f(e) \leq x(e)$

- the conservation of flow equation holds: $\forall v \in V(G), v \neq z, s : \sum_{e \rightarrow v} f(e) = \sum_{e \leftarrow v} f(e)$
- The value of a flow f is $\|f\| = \sum_{e \leftarrow z} f(e) - \sum_{e \rightarrow z} f(e)$

4 Application

The research presented here, was motivated by the practical problem. Analysed company was asked what the probability of production failure was. Knowledge of risk, that the order won't be delivered in time, is important for the partner's firm to establish sufficient goods supplies. In the previous application see [2] a reliability analysis of the part of an industry process was realized. For each machine we could distinguish two modes – in order '1' or in fail '0'. Thus the whole system could occur in one of the 2^n states where n is an amount of machines of analysed industry process. Since machines were connected in parallel it was easy to calculate a whole production of each state. The production of the certain state was calculated as a sum of production of functional states. More complicated situation occurs when the system is not connected in parallel. The aim of this paper is to present a calculation of a maximal production of each of 2^n states by usage a graph flow in network theory. In the following application we will simplify the process that, even at the beginning of the goods can be reached from the begin to end of the process. We assume that for each state the process will produce a maximal possible production w . In this chapter we will present an example how to use a flow in network theory in a reliability analysis. At first we will define states of the industry process and calculate a maximum production of each state by using a well known Ford Fulkerson algorithm. At the end we will demonstrate on the certain data how to calculate an expected value of production for given time t .

The industry process consists of 6 machines. For each machine we distinguish 2 different states 1-work, 0-in fail. Thus the industry process consists of 2^6 different states. State denotes an ordered 6-tuple of 1, 0.

Let us describe the industry process of a firm with an oriented network. Every machine is represented as a vertex. The begin and the end of the processes represented by a source and sink of the network. The begin of a process consists of acceptance of goods and division between machines of the process. The end of a process consists of product inspection and expediting to the customers. Oriented edges describes the direction of the production process. Labelling of vertices represents the maximum amount of goods processed by the certain machine. To be able to work with labelled edges each vertex $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ (See fig. 1) is replaced by two vertices connected by the edge labelled by the same value as former vertex (this technique is described in [3]). For our purposes all edges except newly created edges (with original labelling of vertices) incident with source and sink are labelled by ∞ . For each of 2^6 state we will find the maximum flow in a network. For each state the edges incident with the vertices representing the machines occurred in failure will be removed from the network. To calculate the maximal production of each state we will find a max flow in network. To find a maximal flow we will use a well known Ford-Fulkerson algorithm described e.g. in [3]. For searching the graph edges a "Breadth-first" search was used.

To be able, to calculate with Discrete-time Markov chains, we need to calculate

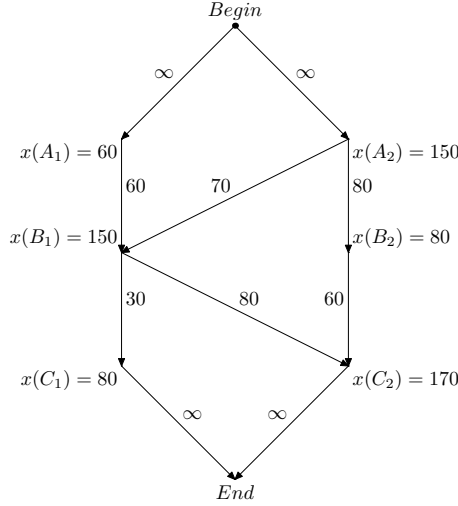


Figure 1: Structure of process

Table 1: Input probabilities

probability	A_1	A_2	B_1	B_2	C_1	C_2
p_f	0.104	0.0063	0.0048	0.0031	0.004	0.0033
p_r	0.36	0.36	0.4	0.375	0.24	0.19

elements of transition probability matrix. Since there are 2^6 different states the probability matrix will consist of 2^{6+6} elements. To calculate the transition probability matrix P we calculated probabilities of failure- p_f , and probability of repair p_r for each machine (further about the calculation see [2]). The calculated probabilities for given machines A_1, A_2, \dots, C_2 are presented in the table 1.

After calculating the transition probability matrix P and the production of each state we can quantify the reliability of the industry process. For example the expected value of production W within time T is a sum of all expected values for each time step $t \in \{1, 2, \dots, T\}$. In our case, the expected value $E(W)(t)$ of production for the certain time t is equal to:

$$E(W)(t) = \sum_{i=1}^t v(0)P^i W. \quad (5)$$

where W is a vector of productions w of all 2^6 states. The results for calculating an expected value of production for time step 1 (time t) are presented in the table 2 (maximal production for one time step is 170.).

5 Complexity of the algorithm

The complexity of F-F. algorithm is $O(|V|^3)$, where V is a set of vertices. The algorithm should run up to 2^V . Thus $O(a) < O\left(\sum_{v=1}^{2^{|V|}} |V|^3\right)$. The formula on the left side could be changed to the following form: $O(a) < O\left(\sum_{i=1}^{|V|} \binom{|V|}{i} (i)^3\right)$.

Table 2: Calculation of expected value

time	expected value	relative expected value
1	162,2211002	0,954
2	157.744	0.928
3	155.125	0.913
4	153.566	0.903
5	152.618	0.898
6	152.028	0.894

The given formula is an upper bound of complexity of the algorithm for searching the vector of production W in a network. To be able to estimate a complexity of the whole application we have to add a complexity of matrix exponentiation and multiplication of first row of transition probability matrix by the vector W In comparison with complexity of matrix exponentiation and calculating the vector W of production.

6 Conclusion

In this paper we have presented an application of graph flow in network in reliability. The main worth of this work is in unusual use of discrete time Markov chains and flow in network theory in reliability analysis. In further research is possible to modify F.F. algorithm to be more suitable for our purposes. Especially usage of minimal cut could decrease an amount of computations.

References

- [1] J. Hájek, Z. Martínek, Teorie spolehlivosti v elektrotechnice II. Západočeská Univerzita v Plzni, 1994.
- [2] P. Skalný, B. Krajc, Discrete Time Markov Chains in Reliability Analysis-Case Study, 7th International Conference on Soft Computing Models in Industrial and Environmental Applications, Ostrava 2012.
- [3] P. Kovář. Úvod do teorie grafů, výukový text II (skripta online), FEI VŠB-TUO, 2012.
- [4] L B. Page,Jo Ellen Perry, Reliability Polynomials and Link Importance in Networks,Reliability, IEEE Transactions, 1994.
- [5] M O Ball, Ch. J. Coulborn, Network reliability, 1995.
- [6] Dabrowski, C., Hunt, F. and Morrison, K., 2010. Improving the Efficiency of Markov Chain Analysis of Complex Distributed Systems. National Institute of Standards and Technology, Interagency Report 7744.
- [7] W. Stewart Introduction to the Numerical Solution of Markov Chains, Princeton Uni-versity Press, 1994.

ON REGULARIZATION PROCEDURE OF LAGRANGIANS LINEAR IN FIRST DERIVATIVES IN FIRST-ORDER FIELD THEORY

Dana Smetanová

Katedra přírodních věd, Vysoká škola technická a ekonomická,
Okružní 10, 370 01 České Budějovice
E-mail: smetanova@mail.vstecb.cz

Abstract: Standard Hamiltonian formulation of field theory is found upon the Poincaré–Cartan form. Keeping the requirement on equivalence of the Hamilton and Euler–Lagrange equations as a (geometric) definition of regularity, and considering more general Lepagean equivalents of a Lagrangian than the Poincaré–Cartan equivalent, we obtain a regularity condition, depending not only on a Lagrangian but also on 2-contact parts of its Lepagean equivalents. In this way one gets a possibility to “regularize” many Lagrangian systems which are linear in first derivatives (singular in the standard sense). The theory is illustrated on an example.

1 Fibred manifolds and Lepagean equivalents

A surjective submersion $\pi : Y \rightarrow X$ is called a *fibred manifold* with a *base* X , $\dim X = n$ and a *total space* Y , $\dim Y = m + n$. For every point $x \in X$, the submanifold $\pi^{-1}(x) \in Y$ is called a *fibred* over x ($\dim \pi^{-1}(x) = m$).

To every fibred chart (V, ψ) , $\psi = (x^i, y^\sigma)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq \sigma \leq m$, on π there exist an *associated fibred chart* on J^1Y , denoted by (V_1, ψ_1) , $\psi_1 = (x^i, y^\sigma, y_j^\sigma)$.

We recall Saunders ([4]) for more details on calculus of fibred manifold and its associated structures.

Definition. (Krupka [1]) An n -form ρ on J^rY is called a *Lepagean equivalent of a Lagrangian* λ (resp. Lepagean n -form) if

- 1) $h\rho = \lambda$, $\lambda = L\omega_0$,
- 2) $(n + 1)$ -form $p_1(d\rho)$ is a $\pi_{r+1,0}$ -horizontal form.

For an 1-st order Lagrangian we have all its Lepagean equivalents of order 1 characterized by the following formula

$$\pi_{r+1,r}^* \rho = \theta + \mu, \quad (1)$$

where θ_λ is the Poincaré–Cartan form of λ ,

$$\theta_\lambda = L\omega_0 + \frac{\partial L}{\partial y_j^\sigma} \omega^\sigma \wedge \omega_j.$$

A section γ of π is an extremal of λ if and only if

$$J^{2r-1} \gamma^* i_{J^{2r-1} \xi} d\rho = 0 \quad (2)$$

for every π -vertical vector field ξ on Y .

A section δ of the fibered manifold π_{2r-1} is called a *Hamilton extremal* of ρ if

$$\delta^* i_\xi d\rho = 0 \quad (3)$$

for every π_{2r-1} -vertical vector field ξ on $J^{2r-1}Y$.

The equations (2) are called the *Euler–Lagrange equations* and (3) the *Hamilton equations of ρ* , respectively. Notice that while the Euler–Lagrange equations are uniquely determined by λ , Hamilton equations depend upon a choice of μ . Consequently, one gets many different Hamilton theories associated to a given variational problem.

Definition. [2] A Lepagean form ρ on J^1Y is called *regular* if every its Hamilton extremal is holonomic.

2 Regularization procedure

In the sequel we shall consider Lepagean forms (1) where μ is 2-*contact*,

$$\rho = L\omega_0 + \frac{\partial L}{\partial y_j^\sigma} \omega^\sigma \wedge \omega_j + g_{\sigma\nu}^{ij} \omega^\sigma \wedge \omega^\nu \wedge \omega_{ij}, \quad (4)$$

(summation over all sequences of indices) where the functions $g_{\sigma\nu}^{ij}$ do not depend on the y_i^k 's and satisfy the conditions

$$g_{\sigma\nu}^{ij} = -g_{\nu\sigma}^{ij}, \quad g_{\sigma\nu}^{ij} = -g_{\sigma\nu}^{ji}, \quad g_{\sigma\nu}^{ij} = g_{\nu\sigma}^{ji}. \quad (5)$$

Note that equations (5) mean that only

$$\binom{m}{2} \cdot \binom{n}{2} = \frac{1}{4} mn(m-1)(n-1)$$

of the $m^2 \cdot n^2$ functions $g_{\sigma\nu}^{ij}$ are independent.

Theorem. (Krupková and Smetanová [2])

Let λ be a first-order Lagrangian, let $\lambda = L\omega_0$ be its expression in a fiber chart

(V, ψ) , $\psi = (x^i, y^\sigma)$ on Y . Let ρ be a Lepagean equivalent of λ of the form (4), (5). Assume that the matrix

$$A_{\sigma\nu}^{ij} = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y_i^\sigma \partial y_j^\nu} - 4g_{\sigma\nu}^{ij} \right) \quad (6)$$

with rows (resp. columns) labelled by the pair (σ, i) (resp. (ν, j)), is regular.

Then ρ is regular, i.e., every Hamilton extremal δ of ρ is of the form $\delta = J^1\gamma$, where γ is an extremal of λ .

Note that the above regularity condition (6) means that Hamilton equations and the Euler–Lagrange equations are equivalent.

Proposition. [3]

If the form $\eta = g_{\sigma\nu}^{ij} dy^\sigma \wedge dy^\nu \wedge \omega_{ij}$ is closed then the Lagrangian $\bar{\lambda} = (L - 2g_{\sigma\nu}^{ij} y_i^\sigma y_j^\nu) \omega_0$ is equivalent with Lagrangian $\lambda = L\omega_0$, and $d\rho = d\theta_{\bar{\lambda}}$.

Above Lagrangian $\bar{\lambda}$ is called a *dedonderization* of the Lagrangian λ .

3 Lagrangians affine in the variables y_j^σ

Proposition.

Let λ be a first-order Lagrangian affine in the variables y_j^σ , let $\lambda = (L_0 + L_\sigma^j y_j^\sigma) \omega_0$, where the functions L_0, L_σ^j do not depend on y_j^σ , be its expression in a fiber chart (V, ψ) , $\psi = (x^i, y^\sigma)$ on Y . Let ρ be a Lepagean equivalent of λ of the form (4), (5). Assume that the matrix

$$A_{\sigma\nu}^{ij} = (g_{\sigma\nu}^{ij}) \quad (7)$$

with rows (resp. columns) labelled by the pair (σ, i) (resp. (ν, j)), is regular.

Then ρ is regular, i.e., every Hamilton extremal δ of ρ is of the form $\delta = J^1\gamma$, where γ is an extremal of λ .

The above proposition is the direct consequence of the theorem (Krupková and Smetanová). It means that the regularization procedure for first-order Lagrangian affine in the variables y_j^σ is finding to the coefficient $g_{\sigma\nu}^{ij}$ (i.e., find appropriate regular matrix $(g_{\sigma\nu}^{ij})$). How to find the matrix, we can see on simple example.

4 EXAMPLE: Lagrangians affine in the variables y_j^σ in $\dim X = 2$

The conditions (5) on the $g_{\sigma\nu}^{ij}$'s mean that we have only one independent free function g_{12}^{12} . Denote $u = 4g_{12}^{12}$. Let us choose for simplicity $u \neq 0$ a constant function (in general u might depend upon the variables x^i and y^σ). For Lepagean equivalents of the Lagrangian we now get

$$\rho = (L_0 + L_\sigma^i y_i^\sigma) dx^1 \wedge dx^2 + L_\sigma^i \omega^\sigma \wedge \omega_i + u \omega^1 \wedge \omega^2.$$

The regularity condition (6) reads

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ -u & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

i.e, it is satisfied for our choice of u , and the corresponding Hamilton p_2 -equations are *equivalent* with the Euler–Lagrange equations.

Notice that for every fixed $u \neq 0$ we have obtained equations which are equivalent with the Euler-Lagrange equations.

Dirac field Lagrangian. Dirac field Lagrangian is linear in the variables y_i'' , hence special case of affine Lagrangian. In this case we have $X = R^2$, $Y = R^2 \times R^2$, i.e. $J^1Y = R^2 \times R^2 \times R^4$, with the global coordinates denoted by $(x^\mu, \psi, \bar{\psi}, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \bar{\psi})$, $\mu = 1, 2$, Lagrangian takes the form $\lambda = L\omega_0$, where

$$L = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - \bar{\psi} m \psi$$

and it is apparently degenerate in the Hamilton–De Donder sense.

The Lagrangian $\bar{\lambda} = \bar{L}\omega_0$, where

$$\bar{L} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - \bar{\psi} m \psi + u \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \bar{\psi} \partial_\nu \psi,$$

and u is non-zero constant, $\epsilon^{\mu\nu}$ is the Levi–Civita symbol; is a dedonderization of the Dirac field Lagrangian, which is regular in the “standard” sense.

Reference

- [1] D. Krupka, Some geometric aspects of variational problems in fibered manifolds, *Folia Fac. Sci. Nat. UJEP Brunensis* 14 (1973) 1–65.
- [2] O. Krupková and D. Smetanová, On regularization of variational problems in first-order field theory, *Proceedings of the 20th Winter School “Geometry and Physics”* (Srń, 2000). *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2) Suppl. No. 66, (2001), 133–140.
- [3] O. Krupková and D. Smetanová, Legendre transformation for regularizable Lagrangians in field theory, *Letters in Math. Phys.* 58 (2001) 189–204.
- [4] D. J. Saunders, *The Geometry of Jet Bundles* (London Math. Soc. Lecture Notes Series 142, Cambridge University Press, Cambridge, 1989).

Existence, uniqueness and asymptotic behavior of solutions of singular second order ODE

Jakub Stryja

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TU Ostrava
17. listopadu 15/2172, 708 33 Ostrava-Poruba
E-mail: jakub.stryja@vsb.cz

Abstrakt: Příspěvek se zabývá existencí, jednoznačností a asymptotickým chováním řešení rovnice

$$(p(t)u'(t))' = p(t)f(u(t))$$

na polopřímce $\langle 0; \infty \rangle$. Funkce f lokálně na \mathbb{R} splňuje Lipchitzovu podmínku a má alespoň dva nulové body, $p(0) = 0$, dále je funkce p spojitá na $\langle 0; \infty \rangle$ a má kladnou spojitou derivaci na $(0; \infty)$.

Abstract: We investigate the singular differential equation

$$(p(t)u'(t))' = p(t)f(u(t))$$

on the half-line $\langle 0; \infty \rangle$. Function f satisfies the local Lipschitz condition on \mathbb{R} and has at least two simple zeros. The function p is continuous on $\langle 0; \infty \rangle$ and has a positive continuous derivative on $(0; \infty)$ and $p(0) = 0$.

1 Introduction

We investigate a singular boundary value problem motivated by some models used in nonlinear field theory or in the Cahn-Hilliard theory in hydrodynamics. If ρ is the density, $\mu(\rho)$ the chemical potential of a non-homogeneous fluid and the motion of the fluid is zero, then the state of the fluid in \mathbb{R}^N is described by the equation

$$\gamma \Delta \rho = \mu(\rho) - \mu_0, \quad (1)$$

where γ and μ_0 are suitable constants. When we search for a solution with the spherical symmetry, then equation (1) is reduced to the ordinary differential equation

$$\gamma \left(\rho'' + \frac{N-1}{r} \rho' \right) = \mu(\rho) - \mu_0, \quad r \in (0; \infty). \quad (2)$$

Equation (2) with the boundary conditions

$$\rho'(0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho_\ell > 0 \quad (3)$$

describe the formation of microscopic bubbles in a fluid, in particular, vapor inside liquid. The first condition in (3) follows from central symmetry and it is necessary for the smoothness of solutions of the singular equation (2) at $r = 0$. The second condition in (3) means the bubble is surrounded by an external liquid with density ρ_ℓ .

Let $N = 3$. In the simplest model of non-homogeneous fluid, problem (2), (3) is reduced to the form

$$(t^2 u')' = 4\lambda^2 t^2 (u + 1)u(u - \xi), \quad (4)$$

$$u'(0) = 0, \quad u(\infty) = \xi, \quad (5)$$

where $\lambda \in (0; \infty)$ and $\xi \in (0; 1)$ are parameters. Many important physical properties of the bubbles depend on the existence of an increasing solution of the problem (4), (5) with just one zero. In particular, the gas density inside the bubble, the bubble radius and the surface tension.

2 Formulation of the problem

We investigate generalizations of the problem (4), (5). We study the equation

$$(p(t)u'(t))' = p(t)f(u(t)) \quad (6)$$

on the half-line $\langle 0; \infty \rangle$, where

$$f \in Lip_{loc}(\mathbb{R}), \quad p \in C \langle 0; \infty \rangle \cap C^1(0; \infty), \quad (7)$$

$$p(0) = 0, \quad p'(t) > 0 \text{ for } t > 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p'(t)}{p(t)} = 0. \quad (8)$$

There exist $L_0 < 0$ ($L_0 = -\infty$ is possible), $L > 0$, $C_L > 0$ such that

$$xf(x) < 0 \text{ for } x \in (L_0; 0) \cup (0; L), \quad (9)$$

$$0 \leq f(x) \leq C_L \text{ for } x \geq L. \quad (10)$$

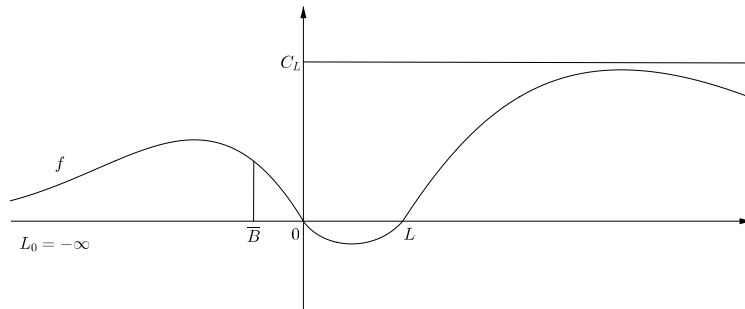


Figure 1: Example of function f .

Example 2. An example of the function p satisfying (7), (8) is $p(t) = t^2$, $t \in \langle 0; \infty \rangle$.

Remark 3. Equation (6) is singular at $t = 0$ because $p(0) = 0$ and

$$\begin{aligned} (p(t)u'(t))' &= p(t)f(u(t)) , \\ p(t)u''(t) + p'(t)u'(t) &= p(t)f(u(t)) , \\ u''(t) + \frac{p'(t)}{p(t)}u'(t) - f(u(t)) &= 0 , \\ \int_0^\varepsilon \frac{p'(t)}{p(t)} dt &= \ln(p(\varepsilon)) - \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(p(t)) = \infty . \end{aligned}$$

Definition 4. A function $u \in C^1 \langle 0; \infty \rangle$ which has a continuous second derivative on $(0; \infty)$ and satisfies equation (6) for all $t \in (0; \infty)$ is called *solution* of (6).

Consider $B < 0$ and the initial conditions

$$u(0) = B , \quad u'(0) = 0 . \quad (11)$$

Remark 5. Consider a solution u of equation (6). Since $u \in C^1 \langle 0; \infty \rangle$, we have $u(0), u'(0) \in \mathbb{R}$, and the assumption $p(0) = 0$ yields $p(0)u'(0) = 0$. We can find $M > 0$ and $\delta > 0$ such that $|f(u(t))| \leq M$ for $t \in (0; \delta)$. Integrating equation (6) and using the fact, that p is increasing, we get

$$|u'(t)| = \left| \frac{1}{p(t)} \int_0^t p(s)f(u(s)) ds \right| \leq \frac{M}{p(t)} \int_0^t p(s) ds \leq Mt \text{ for } t \in (0; \delta) .$$

Consequently, the condition $u'(0) = 0$ is necessary for each solution u of equation (6). Therefore the set of all solutions of equation (6) forms a one-parameter system of functions u satisfying $u(0) = A$, $A \in \mathbb{R}$.

3 Existence and uniqueness

Theorem 6 (Existence and uniqueness). *Assume that (7), (8), (9), and (10) hold and let $B \in (L_0; 0)$. Then problem (6), (11) has a unique solution u , and moreover the solution u satisfies*

$$u(t) \geq B \text{ for } t \in \langle 0; \infty \rangle .$$

4 Asymptotic behavior

Consider such a solution u and denote

$$u_{\text{sup}} = \sup\{u(t) : t \in \langle 0; \infty \rangle\} .$$

Definition 7. If $u_{\text{sup}} < L$ ($u_{\text{sup}} = L$ or $u_{\text{sup}} > L$), then u is called a *damped solution* (a *homoclinic solution* or an *escape solution*) of the problem (6), (11).

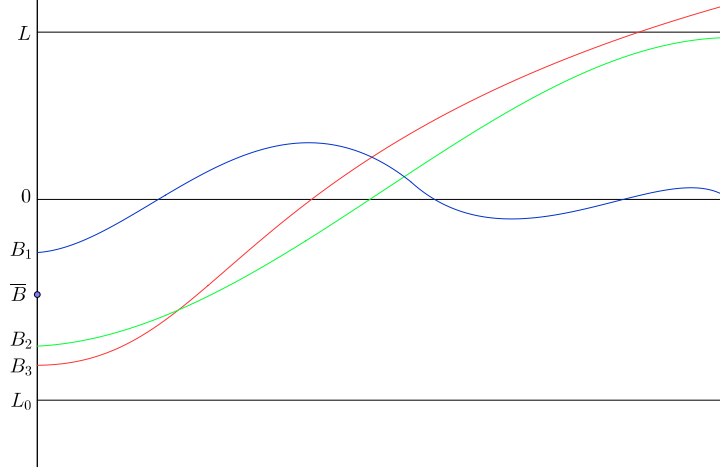


Figure 2: Three types of solutions.

Definition 8. A damped solution is *oscillatory*, if it has an unbounded set of isolated zeros.

Let us put

$$F(x) = - \int_0^x f(z) dz \text{ for } x \in \mathbb{R} .$$

Due to (7), (9) the function F is continuous on \mathbb{R} , decreasing and positive on $(L_0; 0)$, increasing and positive on $(0; L)$. Therefore we can define $\bar{B} < 0$ by

$$\bar{B} = \inf\{B_0 \in (L_0; 0) : F(B) < F(L) \forall B \in (B_0; 0)\} \quad (12)$$

($\bar{B} = -\infty$ is possible).

Theorem 9 (Existence of damped solutions). Assume that (7), (8) (9), and (10) hold. Let \bar{B} be given by (12), and assume that u is a solution of the problem (6), (11) with $B \in (\bar{B}; 0)$. Then u is a damped solution.

Now we bring additional conditions for f and p under which the equation has oscillatory solutions with decreasing amplitudes.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} < 0 , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0 , \quad (13)$$

$$p \in C^2(0; \infty) , \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{p''(t)}{p'(t)} \right| < \infty . \quad (14)$$

Theorem 10. Assume that (7), (8), (9), (10), (13), and (14) hold. Let u be a solution of the problem (6), (11) with $B \in (L_0; 0)$. If u is a damped solution, then u is oscillatory and its amplitudes are decreasing.

The next assertion follows from Theorems 9 and 10.

Theorem 11 (Existence of oscillatory solutions). Assume that (7), (8), (9), (10), (13), and (14) hold. Let \bar{B} be given by (12) and let u be a solution of the problem (6), (11) with $B \in (\bar{B}; 0)$. Then u is an oscillatory solution with decreasing amplitudes.

Remark 12. The assumption (10) in Theorem 11 can be omitted, because it has no influence on the existence of oscillatory solutions. It follows from the fact that (10) imposes conditions on the function values of the function f for arguments greater than L ; however, the function values of oscillatory solutions are lower than this constant L . This condition (used only in Theorem 6) guaranteed the existence of solution of each problem (6), (11) for each $B < 0$ on the whole half-line, which simplified the investigation of the problem.

References

- [1] I. Rachůnková, J. Tomeček: *Homoclinic Solutions of Singular Nonautonomous Second-Order Differential Equations*, Boundary Value Problems, **2009**(2009), Article ID 959636, 1-21.
- [2] I. Rachůnková, J. Tomeček: *Singular problem on the Half-line*, Acta Univ. Palacki. Olomouc, Fac. rer. nat., Mathematica, **48**(2009), 109-128.
- [3] I. Rachůnková, J. Tomeček: *Buble-type solutions of nonlinear singular problems*, Mathematical and Computer Modelling, **51**(2010), 658-669.
- [4] I. Rachůnková, J. Tomeček: *Strictly increasing solutions of a nonlinear singular differential equation arising in hydrodynamics*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, **72**(2010), 2114-2118.
- [5] I. Rachůnková, J. Tomeček: *Superlinear Singular Problems on the Half Line*, Boundary Value Problems, **2010**(2010), Article ID 429813, 1-18.
- [6] I. Rachůnková, J. Tomeček, J. Stryja: *Oscillatory solutions of singular equations arising in hydrodynamics*, Advances in Difference Equations, **2010**(2010), Article ID 872160, 1-13.

SPREADSHEET APPLICATION SUPPORTING THE X-R CONTROL CHART

Szczęśniak Bartosz, Ph.D. Eng., Molenda Michał, Ph.D. Eng.
Silesian University of Technology
Institute of Production Engineering
E-mail: bartosz.szczesniak@polsl.pl, michal.molenda@polsl.pl

Abstract: The article provides a discussion concerning control charts used according to the concept of statistical quality control. The first part of the article comprises basic information on the structure of control charts and their practical application as well as tests conducted in order to analyse the configuration of control points plotted on control charts. The second part is a description of a tool developed by the authors based on the MS Excel spreadsheet, verified in practice in supporting the application of an X-R control chart. The functionality envisaged for the tool proposed encompasses the following:

- automatic identification of the points forming one of eight configurations specified in the standard, indicating situations which require further explanation,
- calculation of the values needed to create graphs for mean values and ranges.

Introduction

One of key aspects of the development of quality management and its practical implications is a concept widely discussed in publications [1, 2], namely statistical process control (SPC). SPC stands for ongoing, i.e. real-time based process control used to detect cases of its potential destabilisation [3]. The basic SPC tool is a control chart, being a graphical process control method. A control chart was originally proposed in 1924 by Dr. Walter Shewhart [4]. The initial purpose of control charts was to develop the manufacturing process in a manner reaching an acceptable and stable level ensuring that the process complies with product requirements provided in specifications. Contemporary process charts have also found their application in service related processes, including in marketing or administration [5]. At present, control charts have acquired their implications in dedicated computer applications, although, in order to support them, one may also use common spreadsheets, as proved in this article. Spreadsheets may be used to assist an enterprise in various spheres of its activity, and numerous publications have discussed concepts of their application in the scope of quality management [6, 7, 8, 9], financial management and controlling [10, 11] or HR management [12, 13]. Some authors have also proposed conceptual solutions supporting performance of selected processes in organisations [14, 15, 16].

This article provides a description of a tool developed by the authors, based on the MS Excel spreadsheet, to be used to support the application of an X-R control chart.

Structure and application of control charts

Both the structure and the application of control charts have been described in detail in PN-ISO 8258+AC1. According to this standard, a control chart is a graph representing the value of the subset property being analysed (test sample) in the function of the subset number. Charts are developed with reference to the *central line* (CL) corresponding to the reference value of the value being depicted and two control limits established statistically, namely the *upper control limit* (UCL) and the *lower control limit* (LCL), running in a distance of 3sigma on each side from the central line (Fig. 1).

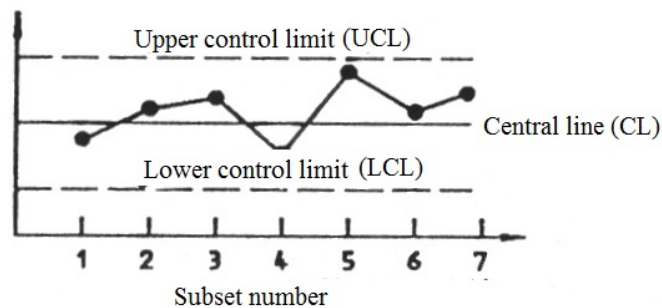


Figure 1. Control chart structure [4]

Application of control charts requires data to be obtained by testing samples collected in regular time intervals (e.g. on an hourly basis) or quantity intervals (every batch). Values of the properties examined are entered into a chart prepared beforehand. The purpose of control charts is to ensure that a statistical signal emerges providing information on the occurrence of an assignable, non-random cause based on special causes of variability. Standard PN-ISO 8258+AC1 provides descriptions of eight basic tests applied in interpretation of process variability. According to the standard, they constitute practical principles used to identify situations when assignable causes may occur. In order to be able to apply the tests shown in Fig. 2, the control chart has been divided into 6 zones (A, B, C, C, B, A), each having the width of 1sigma. The X-R control chart analysed in this article is a classical example of control charts, particularly those applied in quantitative assessment of properties, and may be used in production based on pre-established, demanded normative values or without such values. The chart describes process data in the categories of positioning (arithmetic mean of values of the property assessed in sample X) and scatter (variability between measurements in sample R, i.e. the range). In the following paragraphs of the article, the authors have proposed an IT tool supporting the development of an X-R chart.

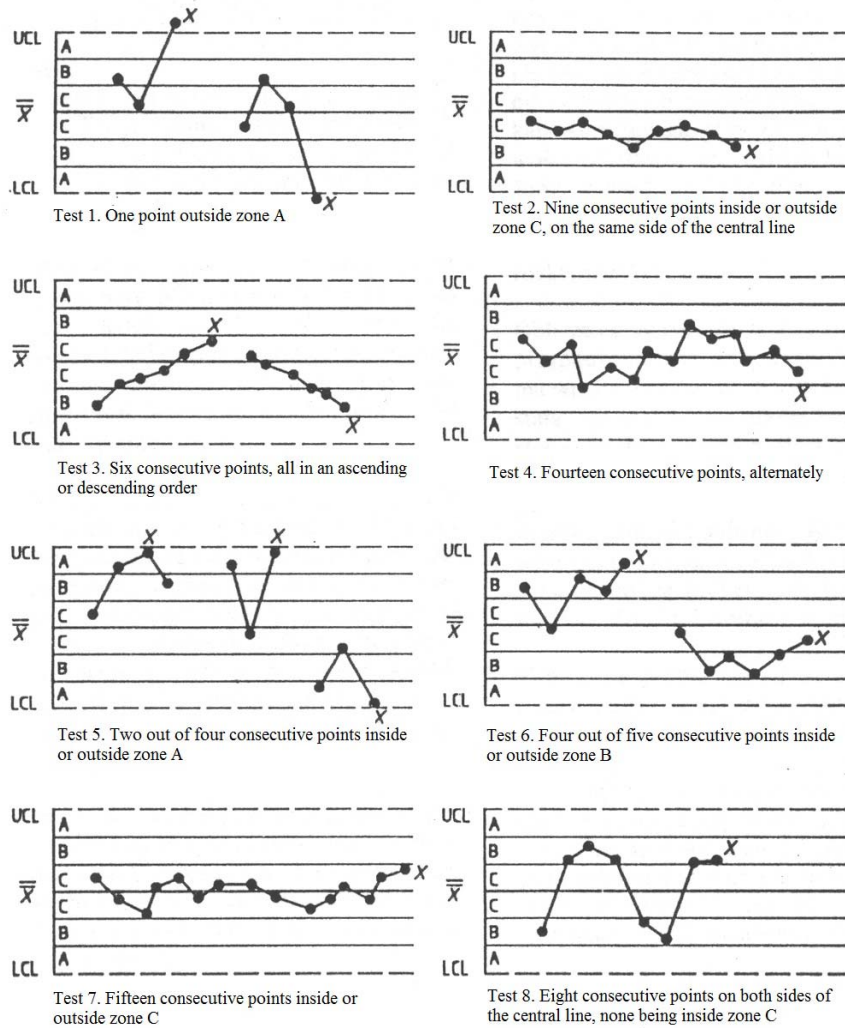


Figure 2. Test of assignable causes using Shewhart charts [4]

Description of the tool proposed

The tool proposed has been created based on the MS Excel spreadsheet, and its functionality envisaged comprises:

- automatic identification of points forming one of eight configurations specified in the standard, indicating situations which require further explanation,
- calculation of the values needed to create graphs for mean values and ranges.

In the scope of automatic indication of points' configuration, it has been assumed as a principle that the given point in the graph may only occur in a single set of points creating a configuration characteristic of the given test. For instance, if seven consecutive points show an ascending trend, then only points 1-6 form a configuration exemplarily marked as "K1", characteristic of test 3. Points 2-7 do not create another configuration, since points 2-6 have already been incorporated in configuration "K1". It has been additionally assumed that the demanded value of X_0 and standard deviation σ_0 for the quantity being analysed are known and that the number of measurements per each sample is identical.

For the sake of the tool presentation, the following limitations have been introduced: the maximum number of measurements per the sample examined is 10 and the maximum number of samples equals 60. Presenting the formulas to fill a certain range of cells with, only the form of a formula appropriate for the top left cell of the area

displayed has been provided. Formulas for other cells can be obtained by copying the given cell into the remaining ones within the area.

Values of measurements for other samples are entered in the “A3:K62” area of the “Data” worksheet. The said area, along with the formulas used to calculate mean values and ranges for individual samples, has been illustrated in Figure 3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1															
2	Sample	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10		N	mX	R
3	1	4,93	5,00	5,07	4,96	4,98	5,03	4,99	4,97				8	4,989	0,14
4	2	4,98	4,96	5,02	5,02	4,94							5	4,963	0,09
5	3	4,91	4,97	4,97	4,91	5,00	5,01	5,02					7	4,952	0,09
6	4	4,87	4,92	4,98	5,04	4,94	4,99						6	4,950	0,16
7	5	4,96	4,96	5,00	5,09	4,98	4,97	4,97	4,99				8	4,997	0,13
8	6	4,98	5,04	4,99	5,02	4,89							5	4,984	0,14

F01	=IF(COUNTA(B3:K3)>1;COUNTA(B3:K3);"")
F02	=IF(M3<>"";AVERAGE(OFFSET(B3;0;0;1;MIN(\$M\$3:\$M\$62)));"")
F03	=IF(M3<>"";MAX(OFFSET(B3;0;0;1;MIN(\$M\$3:\$M\$62)))-MIN(OFFSET(B3;0;0;1;MIN(\$M\$3:\$M\$62)));"")

Figure 3. Measurement result entry area along with formulas calculating mean values and ranges

According to the limitation assumed, the maximum number of measurements is 10. If different numbers of measurements are entered for different samples, then such a number of them is taken into consideration in further calculations as occurring in each of the samples entered. For the exemplary data shown in Figure 3, for each sample, mean value and ranges are calculated based on the first five measurements. In worksheet “Data” and in cells BN6:BR15”, according to standard [4], the values entered are those that have been used to calculate the central line position for the given range and control limits for both the mean and the range. A part of this area has been depicted in Figure 4.

	BN	BO	BP	BQ	BR
6	n	A	d2	D1	D2
7	2	2,121	1,128	0,000	3,686
8	3	1,732	1,693	0,000	4,358
9	4	1,500	2,059	0,000	4,698

Figure 4. Values used to calculate central value R and all limit values

Besides measurements, also the demanded values of X_0 are σ_0 are entered in worksheet “Data”. Based on the measurement values entered, the values shown in Figure 4 and the demanded values of X_0 and σ_0 , the following quantities are calculated: UCL and LCL – control limits for a mean, U_AB and L_AB – limit values between zones A and B, U_BC and L_BC – limit values between zones B and C, R_C – central line for the range, R_UCL and R_LCL – control limits for the range. The area in which X_0 and σ_0 are entered along with the formulas applied to calculate all the aforementioned values have been shown in Figure 5.

	BN	BO	BP	BQ	BR	BS	BT	BU	BV	BW	BX	BY
2	\bar{X}_0	σ_0	n	UCL	LCL	U_AB	L_AB	U_BC	L_BC	R_c	R_UCL	R_LCL
3	5	0,05	5	5,067	4,933	5,045	4,955	5,022	4,978	0,12	0,25	0,00
4												
5												

F04	=MIN(M3:M62)
F05	=BN3+BO3*VLOOKUP(BP3,\$BNS7:\$BR\$15;2;FALSE)
F06	=BN3-BO3*VLOOKUP(BP3,\$BNS7:\$BR\$15;2;FALSE)
F07	=BN3+BO3*2/3*VLOOKUP(BP3,\$BNS7:\$BR\$15;2;FALSE)
F08	=BN3-BO3*2/3*VLOOKUP(BP3,\$BNS7:\$BR\$15;2;FALSE)
F09	=BN3+BO3*1/3*VLOOKUP(BP3,\$BNS7:\$BR\$15;2;FALSE)
F10	=BN3-BO3*1/3*VLOOKUP(BP3,\$BNS7:\$BR\$15;2;FALSE)
F11	=BO3*VLOOKUP(BP3,\$BNS7:\$BR\$15;3;FALSE)
F12	=BO3*VLOOKUP(BP3,\$BNS7:\$BR\$15;5;FALSE)
F13	=BO3*VLOOKUP(BP3,\$BNS7:\$BR\$15;4;FALSE)

Figure 5. Selection of formulas applied to calculate central value R and all limit values

Having calculated the aforementioned values, one can identify the configuration of points corresponding to individual tests. Results of each test are entered into three columns designated as “A”, “B” and “C”. The points marked in column “A” meet the given condition, points marked in column “B” are those at which the given configuration is determined, whereas points marked in column “C” are included in the given configuration. The first test verified using the tool is “Test 1”. Due to the simplicity of the condition the tool is to check, the result has only been entered into column “C” in this case. The corresponding formula has been provided in Figure 6.

	A	N	P	Q
1				Test1
2	Sample	mX		C
28	26	5,050		0
29	27	5,072		1
30	28	5,056		0
31	29	5,040		0

F14	=IF(M28<>"",IF(OR(N28<SBR\$3;N28>SBQ\$3);1;0);"")
-----	---------------------------------------------------

Figure 6. “Test_1” formula

Other tests may be divided into three groups. The first one contains tests whose conditions refer to positions of individual points against limit lines, and the point configuration is determined based on a constant number of consecutive points – “Test 2”, “Test 7” and “Test_8”. The second group comprises tests whose conditions refer to relations between consecutive points, where the point configuration is determined based on a constant number of consecutive points – “Test 3” and “Test 4”. The third one consists of tests whose conditions refer to positions of individual points against limit lines, but the point configuration is identified based on a variable number of points – “Test 5” and “Test 6”. The formulas applied to different tests in the given group are very similar. Consequently, for each group, a set of formulas for a single chosen test has been presented. For the first and the second group, sets of formulas for “Test 8” and “Test 3” have been provided. They are illustrated in Figure 7.

	A	N	AG	AH	AI	AJ
1				Test 8		
2	Sample	mX		A	B	C
3	1	4,989		0		0
4	2	4,983		0		0
5	3	4,952	F15		F16	
6	4	4,950	1			
7	5	4,997	0			0
8	6	4,984				0
9	7	4,997	F17			0
10	8	4,963	1	0	0	
21	19	4,974	1	0	1	
22	20	4,972	1	0	1	
23	21	4,956	1	0	1	
24	22	4,949	1	0	1	
25	23	4,947	1	0	1	
26	24	4,940	1	0	1	
27	25	4,938	1	0	1	
28	26	5,050	1	1	1	

	A	N	AK	AL	AM	AN
1				Test3		
2	Sample	mX		A	B	C
3	1	4,989				0
4	2	4,983	F18			0
5	3	4,952	1		F20	0
6	4	4,950		1		0
7	5	4,997	F19	0		0
8	6	4,984		0	0	0
18	16	4,950		0	0	0
19	17	4,997		0	0	1
20	18	4,993		0	0	1
21	19	4,974		1	0	1
22	20	4,972		1	0	1
23	21	4,956		1	0	1
24	22	4,949		1	1	1

F15	=IF(M3<>"",IF(OR(N3>\$B\$3;N3<\$B\$3);1;0),"")
F16	=IF(M3<>"",IF(SUM(AI3:AI10)=1;1;0),"")
F17	=IF(M10<>"",IF(AND(SUM(AH3:AH10)=8;SUM(AI3:AI9)=0);1;0),"")
F18	=IF(M5<>"",IF(OR(AND(N4<N3;N5<N4);AND(N4>N3;N5>N4));1;0),"")
F19	=IF(M8<>"",IF(AND(SUM(AL5:AL8)=4;SUM(AM3:AM7)=0);1;0),"")
F20	=IF(M3<>"",IF(SUM(AM3:AM8)=1;1;0),"")

Figure 7. Set of formulas for “Test 8” and “Test 3”

Figure 8 shows a set of formulas developed for “Test 5” with reference to the third group.

	A	N	AS	AT	AU	AV	AW	AX	AY	AZ	BA	BB
1				Test 5								
2	Sample	mX		A	B	C	B1	B2	B3	B4	B5	B6
3	1	4,989		0	0	0	2	0	2	2	1	0
4	2	4,983		0	0	1	3	1	3	3	1	0
5	3	4,952		1	0	1	3	2	3	4	2	1
6	4	4,950		1	1	1	3	3	3	5	3	2
7	5	4,997		0	0	0	6	4	6	6	1	0
8	6	4,984										
9	7	4,997	F21	F22	F24	F26	F28	F29				

F21	=IF(M3<>"",IF(OR(N3>\$B\$3;N3<\$B\$3);1;0),"")
F22	=IF(M3<>"",IF(BB3>1;MAX(\$A\$2:A\$2)+1;0),"")
F23	=IF(M3<>"",IF(SUM(AU3:A\$5)>0;1;0),"")
F24	=IF(M3<>"",IFERROR(MATCH(MAX(\$A\$1:A\$2);\$A\$1:A\$2;0);2),"")
F25	=IF(M3<>"",ROW()-3;"")
F26	=IF(M3<>"",MAX(AW3:AX3);"")
F27	=IF(M3<>"",ROW()-1;"")
F28	=IF(M3<>"",AZ3-AY3+1;"")
F29	=IF(M3<>"",SUM(OFFSET(\$A\$1;AY3;0;BA3;1)));"")

Figure 8. Set of formulas for “Test 5”

Checking “Test 5” is definitely a larger issue than verification of previous tests. In this case, the signal to take actions is the occurrence of two points among three consecutive points positioned inside zone A or outside it. In certain cases, this signal will emerge once three points are assessed, and in others – after assessment of two points only. Therefore, in order to find out whether a configuration has occurred, one cannot check three consecutive points each time. Having found a configuration characteristic of the given test in point x, for the points following it, in order to determine another configuration, one should only check the points following point x.

For the sake of increased transparency of presentation, formula “F22” identifying the occurrence of configuration has been broken down into partial formulas “F24-F29”.

Conclusions

The solution proposed implies that, by means of a spreadsheet, one can successfully create a tool to support the X-R control chart in the scope of identification of all the point configurations referred to in the said standard, proving the occurrence of assignable causes. The solution discussed has been formulated by application of built-in spreadsheet functions, such as: IF(), COUNTA(), AVERAGE(), MIN(), MAX(), OFFSET(), VLOOKUP(), OR(), AND(), SUM(), MATCH(), ROW(). And the configurations identified have been marked using a conditional formatting mechanism.

References:

1. Oakland J.S., Followell R.F., *Statistical Processes Control*, Heinemann Newnes, Oxford-London, 1990.
2. Montgomery, D.C., *Introduction to statistical Quality Control*, second edition, John Wiley & Sons, New York, 1990.
3. <http://www.statsoft.pl/czytelnia/marketing/karty.pdf>.
4. Polish Standard PN-ISO 8258+AC1, *Shewhart control charts*, June, 1996.
5. http://www.statsoft.pl/czytelnia/jakosc/Koronacki_Statystyka_i_Metody.pdf.
6. Carlberg C., *Microsoft Excel 2007 PL. Analizy biznesowe. Rozwiązania w biznesie*, 3rd edition, Helion, Gliwice, 2009.
7. Szczeńiak B., “Zastosowanie arkusza kalkulacyjnego do wspomaganie metody ABC”, *Scientific Journals of the Silesian University of Technology, Organisation and Management series*, book 50, 2010.
8. Szczeńiak B., “Concept of supportive spreadsheet application in the survey of production departments’ satisfaction with services of maintenance departments”, *Scientific Journals of the Maritime University of Szczecin*, 32(104), book 1/2012.
9. Knight G., *Excel. Analiza danych biznesowych*, Helion, Gliwice, 2006.
10. Jackson M., Staunton M., *Zaawansowane modele finansowe z wykorzystaniem Excela i VBA*, Helion, Gliwice, 2004.
11. Winston Wayne L., *Microsoft Excel 2010. Data Analysis and Business Modeling*, 3rd edition, Microsoft Press, Washington, 2011.
12. Flanczewski S., *Excel w biurze i nie tylko*, 2nd edition, Helion, Gliwice, 2010.
13. Flanczewski S., *Excel z elementami VBA w firmie*, Helion, Gliwice, 2008.
14. Szczeńiak B., “Arkusz kalkulacyjny w doskonaleniu procesu układania planu zajęć w szkole specjalnej”, at: *Komputerowo zintegrowane zarządzanie*, vol. II, collective study, Ryszard Knosala (ed.), Publishing House of the Polish Association for Production Management, Opole, 2010.
15. Szczeńiak B., Bujanowska A., “Koncepcja zastosowania arkusza kalkulacyjnego do wspomaganie procesu przeglądów urządzeń w wybranym szpitalu”, *Studies and Materials of the Polish Association for Knowledge Management*, vo. 45, PSZW Bydgoszcz, 2011.
16. Szczeńiak B., Bujanowska A., “Koncepcja zastosowania arkusza kalkulacyjnego do wspomaganie realizacji procesu diagnostyki oraz napraw w wybranym szpitalu”, at: *Systemy wspomaganie w inżynierii produkcji*, Biały W., Kaźmierczak J. (eds.), Wydawnictwo PKJS, Gliwice, 2012.

WEYR CANONICAL FORM

Martina Štěpánová

Department of Mathematics Education, Charles University in Prague
Sokolovská 83, 186 75 Prague 8
E-mail: martinastepanova@centrum.cz

Abstract: Our concern in this paper is to popularize the Weyr canonical form and its connections to the commonly used Jordan canonical form.

We begin by introducing the most basic notions. We work over an algebraically closed field. More precisely, suppose that A is a square matrix of order n over the field of complex numbers \mathbb{C} .

Let E be the identity matrix of order n . The polynomial

$$A - \lambda E$$

is called the *characteristic matrix* of A . Its determinant $|A - \lambda E|$ is called the *characteristic polynomial* of A and the equation

$$|A - \lambda E| = 0$$

is called the *characteristic equation* of A . A complex number λ which is a root of the characteristic equation of A is said to be an *eigenvalue* of A . The *algebraic multiplicity* (*multiplicity* for short) *of an eigenvalue* λ of A coincides with its multiplicity as a zero point of the characteristic polynomial.¹

If $|A - \lambda E| = 0$, then the matrix $(A - \lambda E)$ is singular and the system of homogeneous linear equations $(A - \lambda E)v = o$ has a nontrivial solution.² Equation $(A - \lambda E)v = o$ can be rewritten as $Av = \lambda v$. A nonzero vector v such that $Av = \lambda v$ is called an *eigenvector* of A associated with λ . We denote the set of all vectors which fulfil $(A - \lambda E)v = o$, i.e. the set of all eigenvectors of A associated with λ together with the zero vector, by $\text{Ker}(A - \lambda E)$. It is a subspace of \mathbb{C}^n and it is customary to call it the *eigenspace* of A associated with λ . Its dimension is equal to the number of the linear independent eigenvectors associated with λ and this positive integer is called the *geometric multiplicity* of λ . The *generalized eigenvectors* of A

¹ A square matrix of order n has n eigenvalues (which are not necessarily distinct).

² Here, and in the sequel, vector is a column vector.

associated with its eigenvalue λ are defined as the set of all nonzero vectors v which fulfil $(A - \lambda E)^n v = o$. The set of all generalized eigenvectors of A associated with λ together with the zero vector form a subspace of \mathbb{C}^n , we denote it by $\text{GKer}(A - \lambda E)$ and call it the *generalized eigenspace of A associated with λ* . Note that the dimension of $\text{GKer}(A - \lambda E)$ is equal to the algebraic multiplicity of λ .

In discussing the properties related to eigenvalues of matrices the concept of similarity plays a crucial role. If A and B be two matrices of the same order and if there is a nonsingular matrix S such that

$$B = S^{-1}AS,$$

then B is said to be *similar to A* .

Since

$$A = SBS^{-1} = (S^{-1})^{-1}BS^{-1},$$

the similarity is a symmetric relation and we can say that the matrices A and B are *mutually similar* (*similar* for short). Moreover, the similarity is also a reflexive and transitive relation. Thus, it is an equivalence relation in the set of square matrices of the same order and it turns out that two matrices A and B are similar if and only if they are similar to the same canonical form, for example to the same Weyr canonical form. Before proceeding further with this form, the main theme of this contribution, we briefly recall the concept of the well-known Jordan canonical form.

The *Jordan block* is defined to be a square matrix with zeros everywhere except for the constant diagonal entries and 1's along the diagonal just above the main diagonal. In other words, it is an upper triangular square matrix of the form

$$\begin{pmatrix} c & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c \end{pmatrix},$$

where c is some scalar.

Let A be a square matrix of order n . The *Jordan canonical form of A* is a square block diagonal matrix J such that matrices A and J are similar and diagonal blocks of J are the Jordan blocks.

It is well known, that every square matrix over the field of complex numbers has the Jordan canonical form which is uniquely determined up to permutations of the Jordan blocks. It is customary to group the Jordan block associated with the same eigenvalues together. Two matrices A and B are similar if and only if they have the same Jordan canonical form (up to permutations of the Jordan blocks). Notice that the diagonal entries of the Jordan canonical form of A are just the eigenvalues λ_i , $i = 1, 2, \dots, u$, of A , the number of the eigenvalue λ_i , $i = 1, 2, \dots, u$, on the main diagonal, i.e. the sum of the sizes of all Jordan blocks which correspond to λ_i , is equal to the algebraic multiplicity s_i of λ_i (therefore, $\sum_{i=1}^u s_i = n$) and the number of Jordan blocks associated with λ_i is equal to its geometric multiplicity.

For example, the matrix

$$J = \left(\begin{array}{cccccccc} \boxed{\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{array}} & & & & & & & \\ & \boxed{\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ & 2 \end{array}} & & & & & & \\ & & \boxed{2} & & & & & \\ & & & \boxed{\begin{array}{cc} -3 & 1 \\ & -3 \end{array}} & & & & \\ & & & & \boxed{\begin{array}{cc} -3 & 1 \\ & -3 \end{array}} & & & \\ & & & & & \boxed{-3} & & \end{array} \right) \quad (*)$$

is the Jordan canonical form of a matrix with the eigenvalues 2 and -3 of the algebraic multiplicities 7 and 5 and the geometric multiplicities 3 and 3.³

A further important concept is that of a *Segre characteristic*. Let λ_i be a given eigenvalue of A . The nonincreasing sequence $\xi(\lambda) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q)$ of sizes ξ_i , $i = 1, 2, \dots, q$, of the Jordan blocks associated with λ is called the *Segre characteristic of A associated with λ* .

Let $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u$ be mutually distinct eigenvalues of A , let $(\iota_1, \iota_2, \dots, \iota_{q_1})$ be the Segre characteristic of A associated with the eigenvalue λ_1 , let $(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{q_2})$ be the Segre characteristic of A associated with the eigenvalue λ_2 etc. and let $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{q_u})$ be the Segre characteristic of A associated with the eigenvalue λ_u . By the *Segre characteristic of A* we mean the system of positive integers

$$\xi(A) = [(\iota_1, \iota_2, \dots, \iota_{q_1}), (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{q_2}), \dots, (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{q_u})].$$

The next section of this paper introduce the basic ideas of the *Weyr theory of characteristic numbers*, and the relationship between the Weyr characteristic and the Segre characteristic as well as the connections between the Weyr canonical form and the Jordan canonical form.

If A is a square matrix of order n and $r(A)$ denotes the rank of A , then the nonnegative integer $\text{null } A = n - r(A)$ is called the *nullity of A* .⁴

If λ is an eigenvalue of A , then, obviously, a matrix $(A - \lambda E)$ is singular. Hence $\text{null}(A - \lambda E) > 0$. Moreover

$$\text{null}(A - \lambda E)^k \leq \text{null}(A - \lambda E)^{k+1} \quad \text{for all } k = 0, 1, \dots$$

³ It is important to note that algebraic and geometric multiplicities of all eigenvalues of A do not determine the Jordan canonical form of A uniquely. Consider, for example, a matrix with the only eigenvalue whose algebraic multiplicity is 4 and geometric multiplicity is 2. The corresponding Jordan blocks may not only have sizes 1 and 3, but also 2 and 2. The so-called *elementary divisors of A* play an essential role in distinguishing the first case from the second one.

It is not the aim of this contribution to familiarize the reader with the Jordan canonical form in detail. Further information may be found in standard texts on linear algebra.

⁴ The nullity of A is equal to the dimension of $\text{Ker}(A)$. Thus, the nullity of $(A - \lambda E)$ is equal to the dimension of $\text{Ker}(A - \lambda E)$.

If s is the algebraic multiplicity of λ , then $\text{null}(A - \lambda E)^k = \text{null}(A - \lambda E)^{k+1}$ if and only if $\text{null}(A - \lambda E)^k = \text{null}(A - \lambda E)^{k+1} = s$. Thus, there exists a positive integer $t \geq 1$ such that

$$0 < \text{null}(A - \lambda E) < \text{null}(A - \lambda E)^2 < \dots < \text{null}(A - \lambda E)^t = \text{null}(A - \lambda E)^{t+1} = \dots,$$

and

$$s = \text{null}(A - \lambda E)^t = \text{null}(A - \lambda E)^{t+1} = \dots$$

The smallest positive integer t satisfying $\text{null}(A - \lambda E)^t = \text{null}(A - \lambda E)^{t+1}$ is called the *index of A associated with the eigenvalue λ* .⁵

Let λ be an eigenvalue of A and let t be the index of A associated with λ . The *characteristic numbers of A associated with λ* are defined as the positive integers

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \text{null}(A - \lambda E), \\ \eta_2 &= \text{null}(A - \lambda E)^2 - \text{null}(A - \lambda E), \\ &\dots\dots\dots \\ \eta_t &= \text{null}(A - \lambda E)^t - \text{null}(A - \lambda E)^{t-1}. \end{aligned}$$

The sequence $\eta(\lambda)$ of positive integers $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ is called the *Weyr characteristic of A associated with λ* . We write $\eta(\lambda) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t)$.

If λ is an eigenvalue of A of the algebraic multiplicity s and $\eta(\lambda) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t)$ is the Weyr characteristic of A associated with λ , then

- (i) $\eta_1 \geq \eta_2 \geq \dots \geq \eta_t > 0$,
- (ii) $\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_t = s$.

Let $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u$ be mutually distinct eigenvalues of a complex square matrix A , let $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{t_1})$ be the Weyr characteristic of A associated with the eigenvalue λ_1 , let $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{t_2})$ be the Weyr characteristic of A associated with the eigenvalue λ_2 etc. and let $(v_1, v_2, \dots, v_{t_u})$ be the Weyr characteristic of A associated with the eigenvalue λ_u . Then the system of positive integers

$$\eta(A) = [(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{t_1}), (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{t_2}), \dots, (v_1, v_2, \dots, v_{t_u})]$$

is called the *Weyr characteristic of A* .

Let $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u$ be mutually distinct eigenvalues of A and let

$$\eta(A) = [(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{t_1}), (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{t_2}), \dots, (v_1, v_2, \dots, v_{t_u})]$$

be the Weyr characteristic of A . Then the sum of all characteristic numbers of the Weyr characteristic of A is equal to the order n of A .

Indeed, the sum of the characteristic numbers associated with the eigenvalue λ_i is equal to its algebraic multiplicity s_i , and the sum of all algebraic multiplicities of the mutually distinct eigenvalues is equal to order n of A . Thus,

$$n = \sum_{i=1}^u s_i, \quad \text{where} \quad s_1 = \sum_{i=1}^{t_1} \alpha_i, \quad s_2 = \sum_{i=1}^{t_2} \beta_i, \quad \dots, \quad s_u = \sum_{i=1}^{t_u} v_i.$$

⁵ Clearly, $\text{GKer}(A - \lambda E) = \text{Ker}(A - \lambda E)^n = \text{Ker}(A - \lambda E)^t$.

It can be proved that two complex matrices are similar if and only if they have the same distinct eigenvalues and the associated Weyr characteristics.

Now we introduce a very useful diagram. Let $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ be a non-increasing sequence of positive integers. The *Ferrers diagram corresponding to the sequence α* is defined as a diagram which is formed by m columns of dots, such that the j th column (from the left) has α_j dots. The sequence α^* is said to be *dual to α* if it is the sequence of row lengths of the Ferrers diagram corresponding to α (read upwards). The dual sequence is often referred to as the *conjugate sequence*.

The following theorem describes surprising relationship between above-mentioned characteristics: The Weyr characteristic of A associated with the eigenvalue λ is the dual sequence to the Segre characteristic of A associated with the same eigenvalue λ . Hence the first characteristic number η_1 of the Weyr characteristic $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t)$ of A associated with the eigenvalue λ is the number of blocks in the Jordan canonical form associated with λ . The number η_2 is the number of blocks that have size at least 2, the number η_3 is the number of blocks that have size at least 3 etc.

For example, if $\xi(\lambda) = (3, 3, 2, 2, 2, 1)$, then the corresponding Ferrers diagram is given in Figure 1

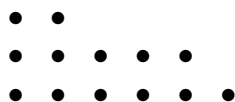


Figure 1

and $\eta(\lambda) = (6, 5, 2)$.

The algebraic multiplicity of λ is equal to the number of the dots in the corresponding Ferrers diagram.

We come now to the definition of the Weyr canonical form of a square matrix. For $i \geq j$, the notation ${}_{i \times j}E$ denotes the matrix with i rows and j columns in which the first i rows form the identity matrix and the remaining $i - j$ rows consist of zeros.

$${}_{i \times j}E = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \right\} j \\ \right\} i-j \end{array}$$

Let λ be an eigenvalue of A and let $\eta(\lambda) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t)$ be the Weyr characteristic of A associated with λ . The *Weyr block of A associated with λ* is defined as the matrix of the form

A basis for \mathbb{C}^n that consists of disjoint Jordan chains for $(A - \lambda_i E)$, $i = 1, 2, \dots, u$, is said to be a *Jordan basis* for \mathbb{C}^n .

As is well known, \mathbb{C}^n always has a Jordan basis. For example, the vectors which are columns of the matrix G in the identity $J = G^{-1}AG$ form a Jordan basis for \mathbb{C}^n .

Let A be the matrix of an endomorphism f relative to the standard basis. Consider the above-mentioned Jordan canonical form J (see (*)) and the basis $\mathcal{J} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ for \mathbb{C}^n such that J is the matrix of the endomorphism f relative to \mathcal{J} . The images $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ of the vectors v_1, v_2, \dots, v_n fulfil

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 2v_1, & f(v_8) &= -3v_8, \\ f(v_2) &= 2v_2 + v_1, & f(v_9) &= -3v_9 + v_8, \\ f(v_3) &= 2v_3 + v_2, & f(v_{10}) &= -3v_{10}, \\ f(v_4) &= 2v_4 + v_3, & f(v_{11}) &= -3v_{11} + v_{10}, \\ f(v_5) &= 2v_5, & f(v_{12}) &= -3v_{12}, \\ f(v_6) &= 2v_6 + v_5, \\ f(v_7) &= 2v_7, \end{aligned}$$

which can be rewritten as

$$\begin{aligned} (A - 2E)v_1 &= o, & (A + 3E)v_8 &= o, \\ (A - 2E)v_2 &= v_1, & (A + 3E)v_9 &= v_8, \\ (A - 2E)v_3 &= v_2, & (A + 3E)v_{10} &= o, \\ (A - 2E)v_4 &= v_3, & (A + 3E)v_{11} &= v_{10}, \\ (A - 2E)v_5 &= o, & (A + 3E)v_{12} &= o. \\ (A - 2E)v_6 &= v_5, \\ (A - 2E)v_7 &= o, \end{aligned}$$

The basis \mathcal{J} is a Jordan basis for \mathbb{C}^n . It can be visualized by means of the diagram

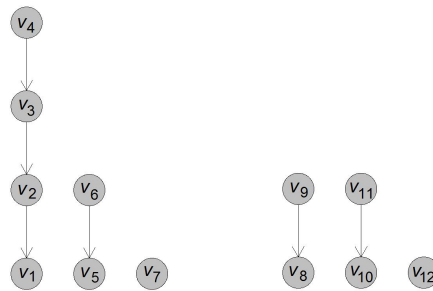


Figure 2

The three Jordan chains for $(A - 2E)$ correspond to the three Jordan blocks associated with the eigenvalue 2. The lengths of the chains are equal to the sizes of the Jordan blocks. The vectors v_1, v_5, v_7 , the last vectors in these Jordan chains, are the eigenvectors associated with the eigenvalue 2. The number of vectors in each row (corresponding to 2) is equal to the characteristic numbers which form the Weyr characteristic of A associated with the eigenvalue 2, the number of vectors in each column (corresponding to 2) is equal to the positive integers which form the Segre characteristic of A associated with the eigenvalue 2. Similar statements hold for the eigenvalue -3 .

Now, we change the order of the basis vectors in \mathcal{J} . We take vectors in Figure 2 line by line (read upwards).

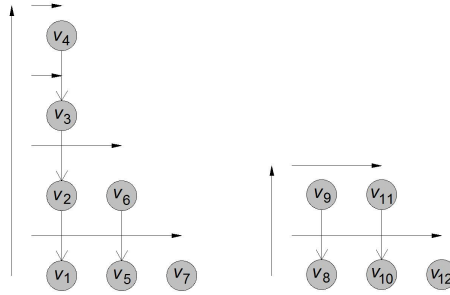


Figure 3

Our new basis is $\mathcal{W} = \{v_1, v_5, v_7, v_2, v_6, v_3, v_4, v_8, v_{10}, v_{12}, v_9, v_{11}\}$, and after relabelling $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9, w_{10}, w_{11}, w_{12}\}$. These vectors satisfy

$$\begin{aligned}
 f(w_1) &= 2w_1, & f(w_8) &= -3w_8, \\
 f(w_4) &= 2w_4 + w_1, & f(w_{11}) &= -3w_{11} + w_8, \\
 f(w_6) &= 2w_6 + w_4, & f(w_9) &= -3w_9, \\
 f(w_7) &= 2w_7 + w_6, & f(w_{12}) &= -3w_{12} + w_9, \\
 f(w_2) &= 2w_2, & f(w_{10}) &= -3w_{10}, \\
 f(w_5) &= 2w_5 + w_2, \\
 f(w_3) &= 2w_3,
 \end{aligned}$$

and these identities immediately imply the Weyr canonical form W (see (**)) of A .

The Weyr canonical form was discovered by the Prague mathematician Eduard Weyr (1852–1903) in 1885. He was one of the few European mathematicians acquainted with matrix theory and working in this area at the time. Unfortunately, his results in this theory (see, for example, [3], [4], [5]) have been almost forgotten. Nowadays, more than one century since Weyr’s death, the Weyr characteristic and the Weyr canonical form occur rather frequently in contemporary works. In 2013, Roger Alan Horn and Charles R. Johnson published second edition of their famous monograph [1], which appeared in 1985 for the first time. Roger Horn rewrote one chapter dealing with the canonical forms, and recast the exposition in terms of the Weyr characteristic. The Weyr canonical form has become much better known in the last few years and even the monograph [2] devoted to this topic was published by Kevin C. O’Meara, John Clark a Charles Irvin Vinsohaler in 2011.

References

- [1] Horn R. A., Johnson C. R., *Matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985; reprint: 1990, 2nd (revised) edition: Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
- [2] O’Meara K. C., Clark J., Vinsohaler C. I., *Advanced Topics in Linear Algebra: Weaving Matrix Problems through the Weyr Form*, Oxford University Press, New York, Oxford, 2011.
- [3] Weyr Ed., *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l’Académie des Sciences 100(1885), 966–969.
- [4] Weyr Ed., *O theorii forem bilineárných*, Spisův počtěných jubilejní cenou Královské české společnosti nauk v Praze č. II, Praha, 1889.
- [5] Weyr Ed., *Zur Theorie der bilinearen Formen*, Monatshefte für Mathematik und Physik 1(1890), 163–200, 201–236.

THE SUBJECTIVE-MARGINALISTIC NATURE OF THE FREE MARKET VERSUS THE ROLE OF MATHEMATICS IN NEOCLASSIC ECONOMICS STRAVA

Leszek Tarasiński

Bielsko-Biała School of Finances and Law
ul. Cz. Tańskiego 5, 43-382 Bielsko-Biała
tel. +48 33 829 72 26
E-mail : leszek.tarasinski@pr.radom.pl

Abstrakt: Contemporary free market economics (also referred to as neoclassic economics), which in the opinion of some people is undergoing a crisis, explains that the essence of management is reflected in man's aspiration to overcome the problem of scarceness. This aspiration is related to the necessity of answering a few important questions: what, how and for whom we should produce as well as in what order these questions should be answered. The last question is the most significant in the sense that an answer to it finally decides about the role of man in the economic process as a subject or object of management. Assuming an individual's natural right of freedom, the choice of the free market by humanity, although untimely, is the best possible economic system, which in an obvious way highlights the subjectivity of man in management. Its consequence is that the basic rule followed by individuals in their decisions as consumers and producers (as well as other free market subjects) is the principle of marginal conditions, which ultimately enables an individual to choose the optimum of consumption and production. In economics this calculation is called marginal calculation, which in turn has its equivalent in mathematics – differential calculus, the necessity of which in neoclassic microeconomic analysis (and not only) seems to be as natural as human pursuit of happiness. The article is a reflection on this issue.

Introduction

Economics is a science of laws governing the economic process. To achieve its goal, i.e. real knowledge of this process regularities, it employs some cognitive resources, which are systematically applied in a particular way, constituting a scientific method used for achieving real knowledge¹. As the economic process is very complex, it is only through mental separation of what is repeated and, in consequence, significant, i.e. necessary, and through elimination of what is incidental and secondary that man can create an idea – a model of a real economic process. Acting this way, economics creates abstract notions – economic

¹ Lange O., *Ekonomia polityczna, vol. I and II*, PWN, Warszawa 1978, p. 94

categories, which express general properties of various elements and aspects of management². The establishing of necessary, constantly recurring dependencies between them is tantamount to the formulation of economics laws, which, in the subsequent stage of scientific method, combined with each other into coherent and logical systems, create an economic theory. Of course, all the time we talk about the mental process, which, if it is correct, always produces a result in a form of determining the effects of particular causes. We call it logical thinking, that is, „reasoning which determines if certain sentences are true on the basis of other sentences that are considered true”³. Although contemporary logic distinguishes three main types of concluding: induction, deduction and reduction, in the context of economics special attention should be paid to deduction, which consists in drawing conclusions from general premises. When faced with premises, which have a nature of axioms, a truth considered obvious by all people (as in this sense they have a general character), deductive reasoning gives results in a form of logically necessary conclusions - it is reliable concluding, and the conclusions result from the premises on the strength of logical necessity⁴. In economics the vast majority of categories, i.e. general abstract notions – economic process elements – fulfil the criterion of the notion of axiom because, firstly, they are great values, the measuring of which seems both pointless and virtually impossible⁵, and, secondly, they are notions the truth of which does not need to be proved (e.g. behavioural assumptions in the consumer’s choice model), as they do not have a character of a value and are based on simple observations and generalisations of various aspects of the economic process. Axiomatization, i.e. clear specification of the economic model assumptions, which are premises for deductive reasoning, as well as formalization, which consists in using the formulas established by logic, finally guarantee the logical necessity of deduction. This indicates that economics, largely based on deductive reasoning (which in a way results from necessity), is a system of knowledge almost identical with mathematics. For, in the case of the latter, we clearly deal with deductive reasoning, as mathematical „entities”, playing the role of assumptions in theorems, by their nature cannot be experienced by senses; they are strictly intellectual entities and yet we have no doubts they exist (in our minds) and we do not need to prove it.

Economics (in the sense: economic theory), as a system of knowledge resulting from deduction, frequently and in a special way refers to mathematics. General abstract categories of contemporary mathematics are effective tools for describing the real world phenomena and processes⁶. Further development of the economic theory will not be possible without progress in the field of mathematical economics, in which since the very beginning emphasis has been placed on the axiomatic approach to the subject of research. The only problem is that although a mathematical economist, building his axiomatic system, does not completely resign from confronting the adopted assumptions with reality and, if possible, tries to adopt assumptions consistent with the observations of real economy processes, this observation does not provide him with bases for adopting as clear and unambiguous assumptions as experience in e.g. natural sciences⁷.

² Milewski R., Kwiatkowski E., *Podstawy ekonomii*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005, p. 18

³ Lange O., op.cit., p.120. Logical (gr. *logikos*, that is, consistent with reasoning, thinking in a correct way, sensible, consistent; see: *Słownik wyrazów obcych*, PWN, Warszawa)

⁴ Ibid., pp. 120-125

⁵ An example of this might be work, that is, one of the components of economic resources. In fact, if we rightly associate it, though in a direct way, with the size of human population, nobody knows the exact number which would precisely describe the size of this population and, subsequently, the resource of work in the world. On the other hand, in theoretical economic models this shortage of information does not play a major role, as whenever work is an element of a set of assumptions of an economic model, e.g. a model explaining the phenomenon of diminishing marginal income, it occurs as an axiom not because of the number that presents its size, but due to the necessity of taking it into consideration in each process of goods manufacturing.

⁶ Malawski A. *Wprowadzenie do ekonomii matematycznej*, Publishing House of the University of Economics in Cracow, 1999, pp. 11-12

⁷ Panek E., *Ekonomia matematyczna*, AE, Poznań 2000, p.10

Free market as an alternative way of solving an economic problem

What in fact is people's management on earth? It can be said that it is a process of production, division, exchange and consumption of resources which satisfy human needs. The first link in the cause and effect chain of management phenomena are people and their needs. Due to the existence of infinite needs, the society, which is the exclusive disposer of economic resources (chiefly: work, land and capital), produces goods it needs in a conscious, deliberate and creative way, characterised by an unrestrained tendency to improve the previous methods of operation. But creating a new value is a result of people's co-operation (which means that the process of creating a social product takes place), so a necessary condition for management continuity is fair division of the created social product. Certainly, in terms of contemporary free economy based on money and goods, we are simply talking about payments of resources for the provided services (salaries, interests, profits etc.), but also about the necessity of paying taxes. For it has to be remembered that it is people who invented taxes for themselves, which are a kind of „whip-round” to ensure a possibility of producing the so-called public goods, without which in the past, and all the more so nowadays, it is hard to imagine man's normal functioning on earth, and the production of which is really extremely expensive, therefore, impossible to carry out solely by means of private economy, i.e. by single people in the free market process⁸. Another link of management is exchange. In a free society it is a process in which people enjoying individual freedom, some of them being buyers, the others – sellers, determine conditions for concluding a purchase-sale transaction. Of course, this economy is called a market. As a result, people who have already provided themselves with indispensable goods and services, having the best baskets at their disposal, can now satisfy their needs (consumption)⁹. The importance of individual's personal freedom has been repeatedly emphasised in the article. This issue requires a more extensive explanation, especially if we look at it from a historical perspective.

The above presented model of economy (frequently referred to as the *circular flow model*), when subjected to a more thorough examination, can be presented in an even simpler way, which at the same time seems to better reflect the essence of management. The infinity of human needs on the one hand, and the finiteness of economic resources, on the other hand, lead to the conclusion that we deal with scarceness, that is, the fact that one cannot have everything all the time. This implies that management (and in general – life) consists in making continual choices, and in each of the variants we face the emergence of costs (understood as the worth of the most valuable, not used alternative¹⁰). Finally, when allocating the finite resources among competitive applications, the society must answer the question: what, how and for whom it should produce as well as how we are going to answer these questions. The last of the questions seems to be the most important, and in fact it is a question about the best sequence of the first three questions, in particular, which of them should be asked first. If we agree that the key issue is the way in which society organises itself in management, which means „turning on” the green light for individual freedom of choice or for any form of collective economy (including tyranny), it seems that the first question should be: for whom? It is a question which only seemingly regards the issue how the created social product should be divided (a question that we would „locate” by the circular flow link, i.e. distribution), as there appears a justified postulate that the division should be fair. Distribution, if it is fair (i.e. based on an evaluation how much a particular individual

⁸ Kamerschen D.R., McKenzie R.B., Nardinelli C., *Ekonomia*, Fundacja Gospodarcza NSZZ „Solidarność”, Gdańsk 1991, pp.78-98

⁹ Midor K., Tarasiński L., *Zarządzanie przez jakość aspekcie przewyższania rzadkości (jako problemu ekonomii)*, [w]: *Metody i narzędzia nowoczesnego zarządzania organizacjami*, joint publication edited by J. Pyka, TNOiK, Katowice 2008, p. 487

¹⁰ Kamerschen D.R., McKenzie R.B., Nardinelli C., op.cit., p. 21

„contributed” in the product), in actual fact rewards the owners of resources. A worker should be paid wages, a capital owner – profit and a land owner – a ground rent. If remuneration for the services of factors is paid to their owners, it means that the basic principle of society organisation in the manufacturing process is individual’s personal freedom. This is because the owner is in the first place a free man. Ownership of anything has its real dimension only if the individual simply owns himself, that is, can freely decide about himself, so he can at least receive income from work. By adopting an attitude of prudence and industriousness, with time this man can become the owner of nearly all the riches of this world. As a result, private property seems to be a natural basis of human economy on earth and the free market economic system is an equally natural space for fulfilling the aspirations of a free individual. And although this certainly means fulfilling oneself as an egoist, the invisible hand of the market will soon reveal its beneficial power, when human egoistic aspirations finally clash with each other on the spontaneously functioning free market.

The subjective-marginalistic character of economic calculation in the free market economic system versus differential calculus

It has to be admitted that the history of mankind, which at the same time is a story of how people organised themselves as a society in management, systematically shows an evolution of man as an individual „moving” from the position of an object in the economic process to that of a subject. Following the history of humanity, from the primitive community, through ancient and medieval civilisations, and finishing with contemporary capitalism (i.e. free market), we see man persistently and consistently breaking free from the constraints of slavery and quasi-slavery. The climax of this pursuit was the emergence (approximately at the beginning of the 19th century) of modern free-market economies, with relevant institutions (property rights, democratic constitution that guaranteed full civil liberties etc.), which in a way crowned people’s eternal pursuit of freedom and welfare. Since then the economic problem, which has always meant a necessity to make choices, has been an economic calculation carried out by free people, therefore, a calculation characterised by the primacy of subjective judgments, typical of a human individual.

This is a very important issue, because while the economic calculation means a difference which an individual deducts in the process of calculation from the benefits he/she gets when making a particular choice, the cost of achieving these benefits (understood as the most valuable, unused alternative), each subsequent experience (e.g. each subsequent bun) will be accompanied by a completely different way of calculating both benefits and costs. This, in turn, is related to the objectively operating principles of the *diminishing marginal utility* of goods as well as *diminishing marginal income*. The presented idea of the economic calculation, typical of the free market system, is in actual fact a presentation of the major characteristics of the research method of the so-called subjectivistic economics, which are:

- a) a microeconomic point of view,
- b) subjectivism,
- c) acceptance of the primacy of consumption,
- d) application of marginal calculation¹¹.

In brief, from the perspective of subjectivistic economics, a free individual fulfils himself/herself in his/her material existence as a consumer and producer. In each of the roles he/she must make choices, that is, constantly compare benefits resulting from a particular choice with its cost. The problem lies in the fact that the nature of human existence is mainly expressed in the changeability of judgments we pass on subsequent experiences, in which we participate as consumers and, on another occasion, as suppliers – producers (it is an extremely

¹¹ Górski J., Sierpiński W., Historia powszechnej myśli ekonomicznej 1870-1950, PWN, Warszawa 1987, pp. 16-17

rare case when life consists in experiencing single events, i.e. purchasing only one item of goods or producing only one piece of something). In other words, satisfaction, that is, a benefit resulting from each subsequent, additional i -th unit of goods we consume diminishes as consumption increases. Unfortunately, the cost which has to be incurred due to the supply of each subsequent, additional i -th unit of goods keeps growing. Finally, the economic calculation that we carry out each time comes down to comparing the benefits and costs which arose (or may arise) due to experiencing another, additional i -th unit of goods. As a result, we permanently use marginal values, which on the one hand, are a measure of marginal benefit and, on the other hand, a marginal cost. Hence, it is necessary to evaluate the economic calculation carried out by a free individual as a *marginal calculation* (because its essence lies in a comparison of marginal values), which, for obvious reasons, has a subjective character (because every individual has his/her own way of evaluating benefits and costs).

This is the point where mathematics comes with its offer to use differential calculus in analysis. A basic notion of this calculus is derivative, stating that it is a limit of difference quotient $\Delta y / \Delta x$, assuming that Δx approaches zero, according to the formula:

$$\frac{dy}{dx} \equiv f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

The presented formula of *derivative function* (also referred to as *marginal function*, which is aimed at emphasising the influence exerted on a change of function's value Δy by a change in argument Δx of the least possible, *infinitesimal*¹², by the last – marginal – unit) in reality fulfils the criterion of marginal benefit/cost. In the case of this notion, it is in fact about a benefit/cost assigned (in other words: „falling to”, which means that we are dealing with a fraction the numerator of which is an increase of benefit/cost, while denominator – an increase of consumption/production, both increases being *infinitesimal*) to the last additional, i.e. marginal, i -th unit of consumed/produced goods. Of course, the applied notions of marginal benefit/cost have a very general character, as they do not indicate in detail whether it is about the marginal benefits/costs of a consumer, producer or other free market subjects. This unquestionable attractiveness of *derivative function*, expressed in its universality presenting the marginal values of *marginal calculation of subjectivistic-marginalistic economics* was the reason why it was used, along with the whole so-called *differential calculus*, to solve economic issues¹³. The drawing below is an attempt to diagrammatically present the cause and effect relations between the free-market order of the economic process and economic calculation, which in this case, „basing” on marginal values, obviously makes use of differential calculus.

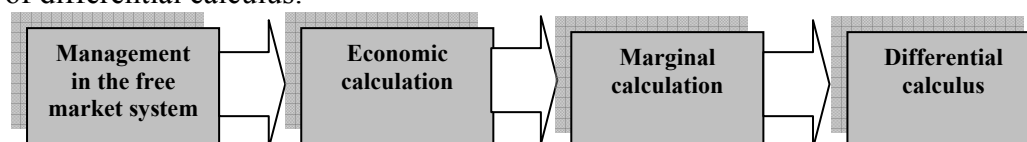


Fig. 1. The economic calculation of the free market versus differential calculus Source: own study

Concluding the discussion, it is worth highlighting the fact that this form of economics mathematization, in which the main mathematical tool, borrowed from physical sciences, was differential calculus with its *function derivative*, *partial derivative* and *Lagrange multiplier* for determining maximums and, with time, *difference equations* (which created bases for

¹² *Infinitesimalne* means infinitely small; see: Chiang Alpha C., *Podstawy ekonomii matematycznej*, PWE, Warszawa 1994, p.198

¹³ Kryński H.E., *Matematyka dla ekonomistów*, PWN, Warszawa 1976, p. 476

modern theories of consumer, company, oligopol and general balance) is defined as the first stage in the development of mathematical economics, the so-called *marginalistic period*¹⁴.

Literature

- [1] Arrow K.J., Handbook of Mathematical Economics, M.D. Intriligator, eds., North-Holland, Amsterdam 1981.
- [2] Chiang Alpha C., Podstawy ekonomii matematycznej, PWE, Warszawa 1994.
- [3] Górski J., Sierpiński W., Historia powszechnej myśli ekonomicznej 1870-1950, PWN, Warszawa 1987.
- [4] Kamerschen D.R., McKenzie R.B., Nardinelli C., Ekonomia, Fundacja Gospodarcza NSZZ „Solidarność”, Gdańsk 1991.
- [5] Kryński H.E., Matematyka dla ekonomistów, PWN, Warszawa 1976.
- [6] Lange O., Ekonomia polityczna, tom I i II, PWN, Warszawa 1978.
- [7] Malawski A. Wprowadzenie do ekonomii matematycznej, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, 1999.
- [8] Midor K., Tarasiński L., Zarządzanie przez jakość aspekcie przewyższania rzadkości (jako problemu ekonomii), [w]: Metody i narzędzia nowoczesnego zarządzania organizacjami, praca zbiorowa pod red. J. Pyki, TNOiK, Katowice 2008.
- [9] Milewski R., Kwiatkowski E., Podstawy ekonomii, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
- [10] Panek E., Ekonomia matematyczna, AE, Poznań 2000.

¹⁴ Arrow K.J., *Handbook of Mathematical Economics*, M.D. Intriligator, eds., North-Holland, Amsterdam 1981, quoted after: Malawski A., op.cit, p. 10

Open Source Software for Engineers

Pavel Tomasek

tomasek@fai.utb.cz

Department of Electronics and Measurement
Tomas Bata University in Zlin, The Czech Republic

Abstract— The aim of this work is to introduce the world of Open Source with presentation of several examples of freely distributable and utilizable software.

Open Source software is a kind of software with a specific licence policy. Users can use such software without any restrictions in use and distribution. Moreover, users can freely change the source codes of the software to produce a new version or to create another software. All of this is free of charge, without any fees and compulsory registrations. A great variety of applications belongs to the set of software which is published as Open Source. Representatives can be found in text editors, bitmap and vector editors, file managers, archive managers, burning and backup software, web browsers, e-mail clients, music and video editors and players, applications directly utilizable at high schools in tuition from physics to musical appreciation, applications utilizable in geometry or numerical mathematics. In addition, open source alternatives exist also for whole office suites and operating systems.

Open Source software can noticeably decrease expenses. There are also another aspects. Using of alternatives can improve adaptability and creativity of users. Naturally, Open Source has not only advantages. Initial efficiency of work can be declined because of differences between user interfaces. Another problem can be in incompatibility of documents (input/output in general) of standard commercial and Open Source software.

Keywords— Open Source, Free Software Foundation, alternative software

1. INTRODUCTION

Open source software (OSS) can play a significant role in upcoming times. It presents an alternative to traditional commercial software.

To date, a lot of literature is devoted to the topic of open source software ([2-9]). A lot of websites already exists and some of them are mentioned in this work. However, information about free alternatives is usually rare among academicians and scientists. This paper provides information about open source software, typical and less known alternatives. Therefore this work can contribute to save money and spread the idea of open sources.

2. OPEN SOURCE SOFTWARE

“Liberté, égalité, fraternité!” These are the words of the French Revolution at the end of the 18th century (Liberty, equality, brotherhood). And these words could also represent the basic idea of open sources (not only software) which are opened to everyone for free. There is also a specific policy saying that modified software based on OSS which is distributed under GPL license must be also publish under this license GPL and thus stay free [10].

In comparison with today’s situation, the commercial software could be assimilated to the situation presented in Fig. 1. OSS can be also commercial but the situation here is much different. Users can pay for (or sometimes only donate if they want) support, training, consultancy or customisation of software.

The beginning of Free and Open Source Software (FOSS) is dated to 1983 when Richard Stallman founded the Free Software Foundation (FSF) [11].

Some of the main reasons for OSS:

- Low costs & rapid innovations
- The freedom in OSS consists of three important points:
 1. Freedom to run software without restrictions



Figure 1: Reality depicting today's state of users' freedom [1]

2. Freedom to study and modify the source code
3. Freedom to redistribute original or modified parts of the software (respecting the license of the original software)

OSS is suitable almost for everyone who is not dependent on a specific software: offices, schools, non-profit making organizations and obviously individuals.

A short case study was made to state the reasons for not using free alternatives. In short summary, the main reasons were satisfaction with current state, a lack of information about alternatives or time to experiment with them, insufficient functionality of an alternative.

3. TYPICAL AND SPECIFIC ALTERNATIVES

The typical and also less-known specific mathematical alternatives to mainstream commercial software is presented in table 1.

Kind of Software	Alternative OSS
Operating system	Linux, FreeBSD, Android
Web browser	Firefox, Chromium
Mail client	Thunderbird, Evolution
Office suite	LibreOffice, OpenOffice, KOffice
Graphics	Gimp, Inkscape, Scribus, Blender, FreeCAD, XnView, VLC
Others	Tvrůce rozvrhů, GRASS GIS, CalculiX, Audacity, 7-zip
Math: Interactive education	GeoGebra
Math: Complex software	FreeMat, Octave, Scilab, SpeQ
Math: MAPLE-like	Maxima
Math: Visualizations in 2D, 3D	GEONExT, Graph, Zhu3D

Table 1: Alternative OSS

I chose two open source applications from table 1 which are mentioned in more detail on the following lines. It is FreeMat and Maxima.

FreeMat is a software which is among others capable of parallel computations, visualizations in 2D, 3D, solving of differential equations. The syntax is at about 95% compatible with Matlab [12]. Appearance of FreeMat OSS is presented in Fig. 2.

Maxima is a representative of software which is similar to MAPLE with respect to capabilities (not to syntax) [13]. Screenshot of one of the possible graphical user interfaces of Maxima OSS is presented in Fig. 3.

Resources:

- <http://distrowatch.com/>
- <http://opensourceecology.org/>
- <http://opensourceecology.org/wiki/Category:Software>

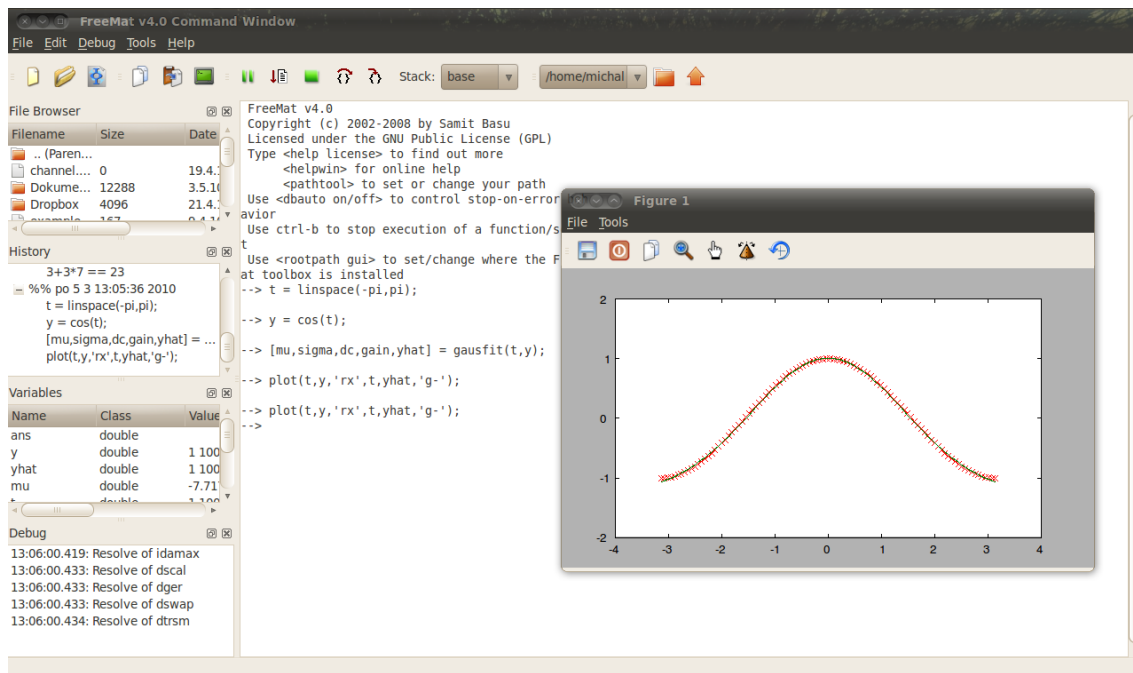


Figure 2: Alternative mathematical software: FreeMat

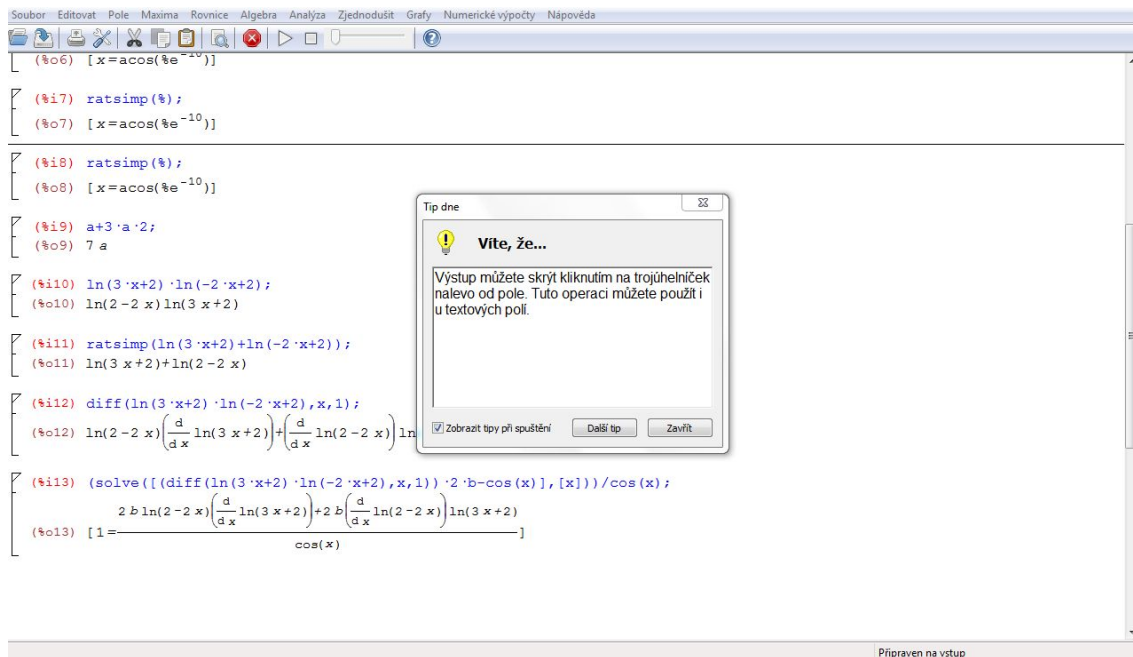


Figure 3: Alternative mathematical software: Maxima using graphical interface wxMaxima

- <http://sourceforge.net/>
- <http://www.osalt.com/>
- <http://www.oss.cz/cs/skolstvi>
- <http://osspraxe.cz/>
- <http://liberix.cz/>

4. CONCLUSION

Free and open source software was presented in this paper with brief history and some typical and specific alternatives to mainstream commercial software.

As Aristotle wrote in his *Metaphysics*, everything existing is a unity of *hýlé* and *morfé* [9]. From one point of view *morfé* (shape) can represent the framework containing instruments by which we can form the *hýlé* (content). The advice at the end of this paper is not to forget on the shape, the form we present a content.

ACKNOWLEDGMENT

This work was supported by the internal grant of Tomas Bata University in Zlin: IGA/FAI/2013/007.

REFERENCES

1. "Preventing Liberal Monopolisation of the Right. [on-line]," <http://centreriight.in/2011/08/preventing-liberal-monopolisation-of-the-right/#.UayRKRVJ9T8>, 2011-08-04 [cit. 2013-05-30].
2. Tomášek, P., *Využití volně šiřitelných počítačových programů ve výuce*, Brno, 2010, Final work of additional pedagogical studies, Brno University of Technology, FEEC.
3. Crowston, K., Annabi, H., and Howison, J., "Defining Open Source Software project success." *In Proceedings of the International Conference on Information Systems (ICIS 2003)*, Seattle, WA, USA, December. doi: 10.1287/mnsc.1060.0550.
4. Lerner, J. and Tirole, J., "Some Simple Economics of Open Source." *The Journal of Industrial Economics*, 2002, 50: 197234. doi: 10.1111/1467-6451.00174
5. Krogh, G., Spaeth, S. and Lakhani K., "Community, joining, and specialization in open source software innovation: a case study", *Research Policy*, Volume 32, Issue 7, July 2003, Pages 1217-1241, ISSN 0048-7333.
6. Hippel, E. and Krogh, G., "Open Source Software and the "Private-Collective" Innovation Model: Issues for Organization Science," *Organization Science*, March/April 2003, 14:209-223.
7. Lakhani, K. and Wolf, R. G., "Why Hackers Do What They Do: Understanding Motivation and Effort in Free/Open Source Software Projects", *MIT Sloan Working Paper No. 4425-03*, September 2003.
8. Lerner, J. and Tirole, J., "The open source movement: Key research questions", *European Economic Review*, Volume 45, Issues 46, May 2001, Pages 819-826, ISSN 0014-2921.
9. Aristotle, "Metaphysics," VIII, 1045 a-b.
10. Free Software Foundation, Inc., "GNU General Public License, version 2 [on-line]," <http://www.gnu.org/licenses/old-licenses/gpl-2.0.html>, 2013-03-16, [cit. 2013-05-30].
11. Free Software Foundation Europe, "Transcript of Richard Stallman on the Free Software movement, Zagreb; 2006-03-09 [on-line]," <http://fsfe.org/freesoftware/transcripts/rms-fs-2006-03-09.en.html>, [cit. 2013-05-30].
12. "FreeMat [on-line]," <http://freemat.sourceforge.net/>, [cit. 2013-05-30].
13. "Maxima, a Computer Algebra System [on-line]," <http://maxima.sourceforge.net/>, [cit. 2013-05-30].

MODELING TESTS OF AN IMPACT OF GEOMETRY OF CROSS-SECTION OF THE MINING HEADING ON THE PHYSICAL PARAMETERS OF THE AIRFLOW

Magdalena Tutak

Institute of Mining, Faculty of Mining & Geology, Silesian University of Technology
Akademicka 2, 44-100 Gliwice, Poland

E-mail : magdalena.tutak@polsl.pl

Abstract: *The basic meaning for the security of persons working in underground mining heading heir ventilation of headings. Providing the fresh air into the active mining heading is a fundamental task of ventilation service in the mine. Very significant impact on the efficiency of the ventilation process has the physical parameters of supplied airflow, such as its amount, speed and pressure. These parameters can be determined based on the "in situ" tests or modeling tests. Carrying out the tests in underground conditions is very expensive and not always available due to exploitation. As an alternative, in such cases the modeling tests can be used, which give more possibilities of analysis the impact of differentials factors on the studied parameters. In the paper there is presented results of modeling of airflow in mining heading, obtained basing on the numerical simulations with use of finite volume method in ANSYS Fluent software. The aim of the tests was determined the impact on geometry of cross-section of mining heading on the physical parameters of the airflow. The analysis was performed for the three-dimensional airflow. The physical models of headings were prepared basing on the real cross sections of the dog headings. To find the solution of the mathematical model, the $k-\varepsilon$ turbulence model was used.*

1. Introduction

The fundamental meaning for the safety of persons working in underground mine headings has proper ventilation of headings. Very significant impact on the efficiency of the ventilation process, have physical parameters of the air stream supplied to heading, such as its amount (volumetric flow), velocity, and pressure [3, 5].

The parameters of flowing air stream through the mining headings can be determined based on the "in situ" tests or on the basis of modeling tests. However due to the conditions in mining headings, including exploitation, and also due to the high cost, measurements in real conditions are not always available.

Present state of science and technology allows to use numerical methods for solving problems associated to process of ventillation of headings. However, it should be noted that simulation is only an approximated description of phenomena occuring in reality.

The mining headings can have different geometry of cross-section. Nowadays, in practice the most often we deal with horizontal mining headings with arch lining, and thus – with the same cross-section. Headings of rectangular or trapezoid cross-section also can be found.

In this paper results of simulations of the impact of cross-section geometry of mining heading on the physical parameters of the airflow are presented.

2. Mathematical model of airflow through the mining dog heading

Computational Fluid Dynamics (CFD) is a simulation method of processes connected with flow of liquids and gases, heat and mass transfer, or chemical reactions [6].

To perform the model tests, ANSYS Fluent 13 software was used, which uses the Finite Volume Method. This method is used to solve problems, in which the principle of continuity of the field variable in the considered area has not to be fulfilled [4].

Problem connected with the airflow through mining headings in the Ansys Fluent software are solved based on the equation of mass conservation and on the equation of momentum conservation, which take the following form [1]:

a) *The Mass Conservation Equation*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = S_m \quad (1)$$

where:

- \vec{v} - velocity, m/s
- ρ - density, kg/m³
- t - time, s
- S_m - the mass added to the continuous phase from the dispersed second phase, kg/s

b) *The Momentum Conservation Equations*

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\bar{\tau}) + \rho \vec{g} + \vec{F} \quad (2)$$

where:

- p - static pressure, Pa
- $\bar{\tau}$ - the stress tensor, Pa
- \vec{g} - the gravitational body force, m/s²
- \vec{F} - the external body forces, N

To model the airflow through the mining heading, the k-ε turbulence model, implemented in software, was used. In this model Navier-Stokes Equation was rearranged in so-called an Averaged Navier-Stokes Equation, which includes the additional term – Reynolds stress tensor [2]. For single-phase flow, equations of the kinetic energy of turbulences k and the kinetic energy dissipation speed of turbulences ε take form:

c) *k*-transport equation

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \mu_t S^2 - \rho \varepsilon \quad (3)$$

d) ε -transport equation

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\varepsilon}{k} (C_{1\varepsilon} \mu_t S^2 - \rho C_{2\varepsilon} \varepsilon) \quad (4)$$

where:

$C_{1\varepsilon}, C_{2\varepsilon}$ - constats,

$\sigma_k, \sigma_\varepsilon$ - turbulent Prandtl numbers for k and ε .

3. Numerical analysis and its results

An airflow through the three-dimensional models of the mining headings was subjected to CFD numerical analysis. The models have the following geometry of cross-sections: trapezoidal, rectangular and arc. The length of each model of heading amounted to 25 m, and cross-section area 17.2 m.

Simulation calculations were performed for the air, whose input parameters for all geometrical models of headings were the same (density 1.225 kg/m³, and viscosity 1.7894e-05 Pa·s).

As the inlet boundary conditions there was assumed a velocity field of the air stream equal to 3.5 m/s, intensity of turbulences of the order of 10%, and the hydraulic diameter equal to 3.8 m. For all geometrical models of heading, the outlet of heading was defined as outlet boundary condition, whereas walls were defined as impermeable, which surface roughness corresponded to height of 0.1 m.

Calculations were performed for the pressure (as reference value) equal to 101325 Pa.

Performed calculations included series of simplifications; a straight section of mining heading, without mining machines and equipments was assumed. Also the resistances for the flowing air stream, caused by the support of dog heading were neglected.

Calculations were performed for the airflow using a turbulence model k - ε . As a result of the performed simulations, distributions of the velocity and pressure fields along the models of mining heading with different geometry of cross-section were obtained.

Following figures show distributions of velocities (Fig. 1a – 1c, 2a – 2c, 3a – 3c) and pressures (1d, 2d and 3d) in geometrical models of mining headings. Figures 1b, 2b, 3b show

the distributions of the velocity field along the length of heading, whereas figures 1c, 2c and 3c show the distributions of velocity field at outlet of heading.

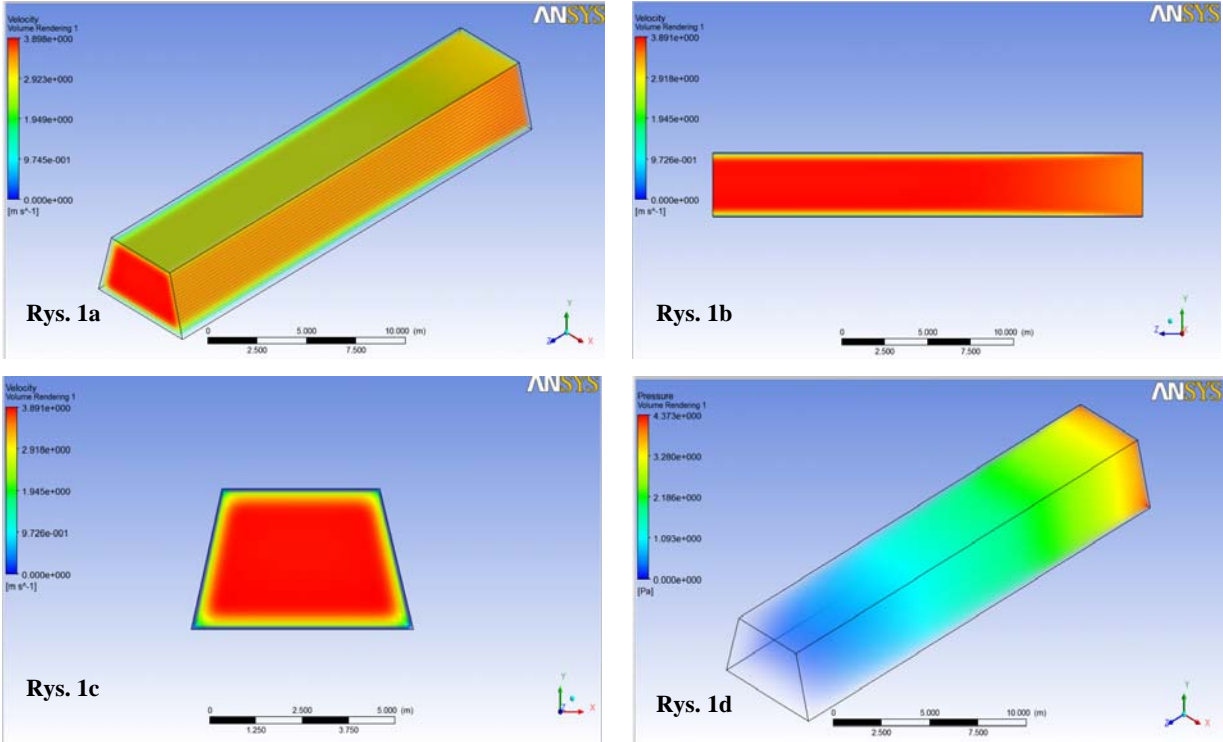


Fig.1. Distribution of velocity and static pressure of air stream flowing through the mining heading of trapezoidal geometry of cross-section

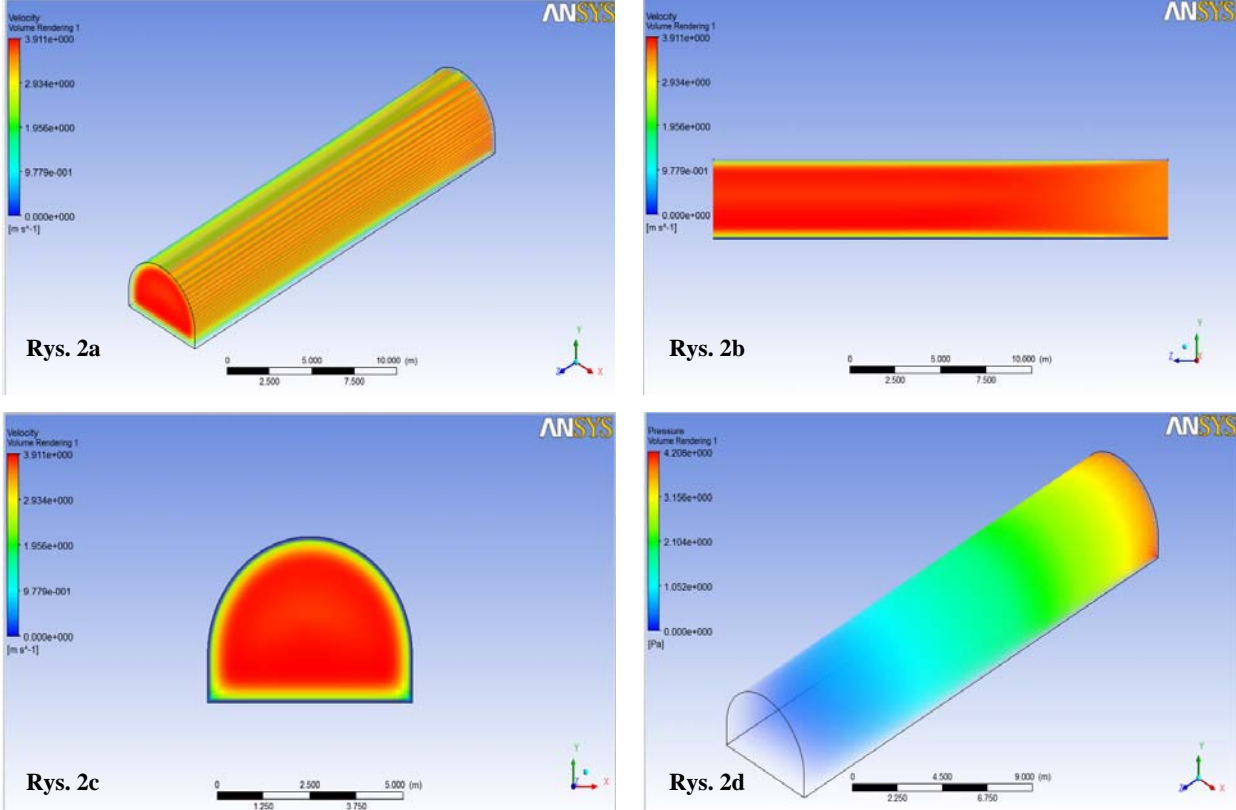
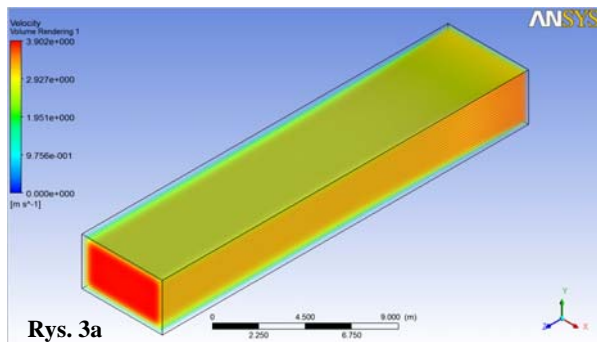
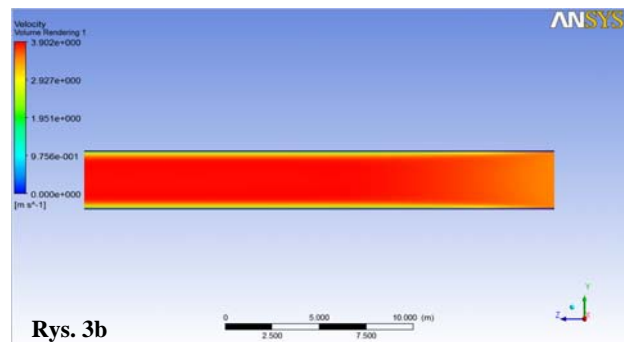


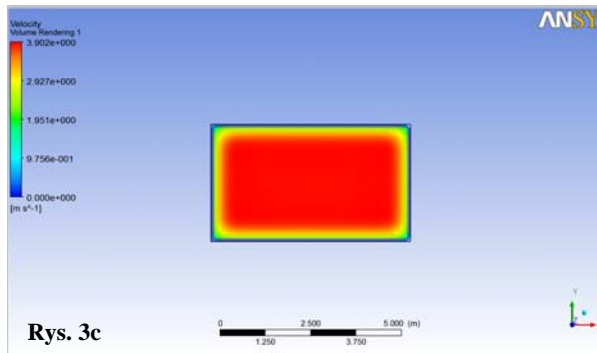
Fig.2. Distribution of velocity and static pressure of air stream flowing through the mining heading of arc geometry of cross-section.



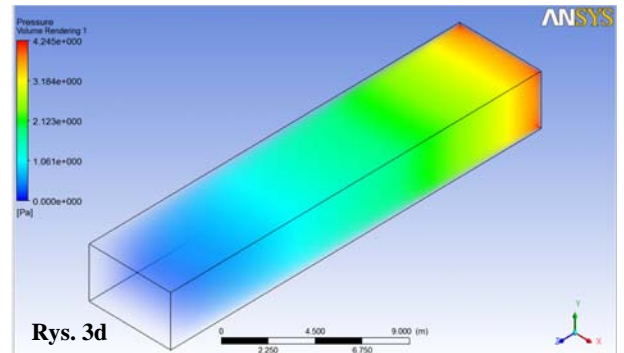
Rys. 3a



Rys. 3b



Rys. 3c



Rys. 3d

Fig.3. Distribution of velocity and static pressure of air stream flowing through the mining heading of rectangular geometry of cross-section.

4. Conclusion

In the paper results of modeling tests connected with airflow through the mining heading, with different geometries of cross-section were presented.

Based on obtained results one can state, that the geometry of cross-section of heading has not significant effect on the physical of the air stream flowing through the mining heading.

In a case of velocity, as well as of pressure along the analyzed sections of the mining heading with different geometries of cross-section, the differences are small. Analysis showed that regardless of the geometry of cross-section of headings, there is a tendency for the formation of the boundary layer, in which the velocity of air stream significantly deviates from the velocity in the central part of the geometry of mining heading.

Measurements of physical parameters of the air stream can not always be performed under favourable conditions. Thus, performing the simulation tests can be a supplement, and in an exceptional situations, an alternative for the tests carried out in real conditions

References

1. Ansys Fluent Theory Guide, 2012
2. Gicala B., Turewicz A.: Metoda numerycznej mechaniki płynów w projektowaniu maszyn i urządzeń górniczych. *Maszyny Górnicze*, nr 4/2011, s.3-9;
3. Janus J., Krawczyk J., Kruczkowski J.: Porównanie symulacji numerycznych z wynikami pomiarów rozkładów pól prędkości w przekrojach chodników kopalnianych. *Prace Instytutu Mechaniki Górotworu PAN*, Tom 13, nr 1-4/2011, s.165-182;
4. Kmiołek M.: Przegląd solverów numerycznych stosowanych w mechanice obliczeniowej. *Scientific Bulletin of Chełm. Section of Mathematics and Computer Science*, No 1/2008, s. 151-159;
5. Lięża P., Poleszczyk E., Skotniczny P.: " Analiza prędkości powietrza w warstwie przyściennej w warunkach przepływu w wyrobisku górniczym. *Przegląd Górniczy*, nr 7-8/2008, s. 55-60;
6. Tomkiewicz D., Cudzewicz A., Górecka – Orzechowska J.: Zastosowanie programu fluent do modelowania zjawisk termodynamicznych w komorze klimatycznej. *Inżynieria Rolicza*, nr 6/2011, s.239-245.

THE EFFECTIVENESS OF SELECTED METHODS OF SOLVING NONLINEAR EQUATIONS

Juliusz Wójcik

**Institute of Production Engineering, Silesian University of Technology
Roosevelta 26 Str., 41-800 Zabrze, Poland
E-mail : juliusz.stanislaw.wojcik@polsl.pl**

Abstrakt: Based on the system of nonlinear equations, the effectiveness of roots calculation methods depending on the initial approximations was determined. Apart from the Newton's method, the modified Newton's method, the Steffensen's method and gradient descent were considered.

1. Introduction

In the modeling of physical phenomena very often is a necessary resolve nonlinear equation. Depending on the nature of the equations, searched element of solution can be single or multiple - if the equation includes variable parameters for which solutions are searched. In the second case, due to the necessity re-solving the system of equations, it becomes important to the effectiveness of the method. The method is even more effective if, for obtaining solutions with predetermined accuracy is made smaller number of iterations. A particular case is to solve the system of nonlinear equations at each time step in solving the system of partial differential equations-time. The solution is the boundary values of physical quantities such as the border of the two phases [1]. In that situation, stability and efficiency of the method in solving the system of nonlinear equations, decide on the dissolution of the complex mathematical model. In the literature, many methods are known for solving systems of nonlinear equations, and their modifications are created [2,3,4,5]. For the purpose of this article, were chosen four features - the classical Newton's method and its modification, Stephenson's method and the method of gradient.

After a brief characterization of each method were presented examples illustrating the effectiveness of each one.

2. Newton's method

Given is a system of nonlinear equations

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \end{bmatrix} = 0 \quad , \quad (1)$$

where $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T$ is the set of arguments to the function $f(x)$. If $x^{(i)}$ is consecutive, the its approximation of the exact solution of equation (1), then the exact square root of this equation is equal to

$$x = x^{(i)} + h^{(i)} \quad , \quad (2)$$

where $h^{(i)} = (h_1^{(i)}, h_2^{(i)}, h_3^{(i)}, \dots, h_n^{(i)})^T$ is the estimate error of $x^{(i)}$. This means that after substituting equation (2) to (1) the equation will be true

$$f(x^{(i)} + h^{(i)}) = 0 \quad (3)$$

In the order to determine the error $h^{(i)}$ equation (3) should be developed in a Taylor series in the neighborhood of point $x^{(i)}$, then

$$f(x^{(i)} + h^{(i)}) = f(x^{(i)}) + f'(x^{(i)})h^{(i)} + \frac{1}{2}f''(x^{(i)})(h^{(i)})^2 + \dots \quad (4a)$$

By restricting the development of the linear component only is obtained

$$f(x^{(i)} + h^{(i)}) \approx f(x^{(i)}) + f'(x^{(i)})h^{(i)} \quad , \quad (4b)$$

where $f'(x^{(i)})$ is a matrix function (Jacobi) and often denoted by $J(x^{(i)})$.

Taking into account (3), it can be written that

$$f(x^{(i)}) + J(x^{(i)})h^{(i)} = 0 \quad . \quad (5)$$

Assuming that $J(x^{(i)})$ is a non-singular matrix, we obtain

$$h^{(i)} = -J(x^{(i)})^{-1} f(x^{(i)}) \quad . \quad (6)$$

Expansion of the function (3) in a Taylor series is subject to some error, because it is limited only to the linear component, therefore, using the equation (2), consecutive approximation $x^{(i+1)}$ of the exact solution is equal to

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + h^{(i)} \quad . \quad (7)$$

Use of (6), we obtain

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - J(x^{(i)})^{-1} f(x^{(i)}) \quad . \quad (8)$$

Equation (8) describes the method of Newton, and the matrix $J(x^{(i)})^{-1}$ is the inverse matrix to the Jacobi's matrix

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

In each iteration step i is needed calculation of a matrix function

$$J(x^{(i)}) = \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right]_{x=x^{(i)}}, j, k=1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

for example, approximating her for example by the differential quotient

$$\left[\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right]_{x=x^{(i)}} \approx \Delta_{j,k} f(x, h) = \frac{f_j(x_1, \dots, x_k + h_k, \dots, x_n) - f_j(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)}{h_k}. \quad (11)$$

As a result, it is obtained the approximate formula of Newton's method

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - \Delta f(x^{(i)}, h^{(i)})^{-1} \cdot f(x^{(i)}), \quad (12)$$

where $\Delta f(x^{(i)}, h^{(i)})$ is the Jacobian approximation $J(x^{(i)})$.

The calculation is discontinued when the length of the vector $f(x)$ in a consecutive iteration step does not exceed arbitrarily small number ε , that is, when

$$\|f(x^{(i+1)})\| \leq \varepsilon, \quad (13)$$

where the Euclidean norm (length of the vector $f(x)$) is determined from the relation

$$\|f(x)\| = \sqrt{f(x)^T f(x)} = \sqrt{\sum_{j=1}^n |f_j(x)|^2} \quad (14)$$

3. Modified Newton's method

Stoer and Bulirsch [2] proposed a modification of Newton's method (12) to form a

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - \lambda^{(i)} \cdot \Delta f(x^{(i)}, h^{(i)})^{-1} f(x^{(i)}), \quad 0 < \lambda^{(i)} \leq 1, \quad (15)$$

wherein the parameter $\lambda^{(i)}$ is determined such that in each iteration step that the condition be fulfilled

$$\|f(x^{(i+1)})\| < \|f(x^{(i)})\|. \quad (16)$$

Parameter $\lambda^{(i)}$ can take values

$$\lambda_j^{(i)} = 2^{-j}, \quad (17)$$

where $j=0,1,2,3,\dots$ means another change in the value of this parameter in the $(i+1)$ iteration step, when the condition (16) is not satisfied. So, do not meet the condition (16) is associated with the parameter adjustment $\lambda^{(i)}$

$$\lambda_{j+1}^{(i)} = \lambda_j^{(i)}/2, \quad (18)$$

and the calculation of the new value of the vector $x^{(i+1)}$, for which re-calculates the length of the vector $f(x^{(i+1)})$. This is repeated until the condition (16) is met. If the condition (16) is satisfied, then the next $(i+2)$ iteration, value of parameter $\lambda^{(i+2)}$ is increased keeping in mind the limitation $0 < \lambda^{(i+2)} \leq 1$.

4. Steffensen's method

Originally, this method was used for functions with one variable. Another approximation x^{i+1} of the exact solution is obtained by the formula [3]

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - g(x^{(i)})^{-1} f(x^{(i)}), \quad (19)$$

where

$$g(x^{(i)}) = \frac{f(x^{(i)} + f(x^{(i)})) - f(x^{(i)})}{f(x^{(i)})}. \quad (20)$$

This method can be generalized to a system of n nonlinear equations [3]. If in equation (6) for $h^{(i)}$ we substitute $f(x^{(i)})$ then take into consideration (7), we obtain a generalized Steffens method for a system of n nonlinear equations

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - J(x^{(i)}, f(x^{(i)}))^{-1} f(x^{(i)}). \quad (21)$$

In each iteration, the characteristic matrix is determined from the formula

$$J(x, f(x)) = \frac{f_j(x_1, \dots, x_k + f_k(x), \dots, x_n) - f_j(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)}{f_k(x)}, \quad j, k=1, 2, \dots, n. \quad (22)$$

5. Gradient method

In this method, also called the method of steepest descent, we introduce an auxiliary function as

$$U(x) = \sum_{j=1}^n [f_j(x)]^2 = f(x) \cdot f(x) = f(x)^T f(x), \quad (23)$$

where the dot is the scalar product of two vectors.

Any solution of the equation (1) is the zero of function $U(x)$. Thus, the numbers $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, for which $U(x) = 0$, are elements of the system (1).

Let be x a solution of system (1) and $x^{(0)}$ its approximation to zero (Fig. 1). Through the points M_i surfaces pass of equal value $U(x) = U(x^{(i)})$. A method for finding the exact solution is the following.

From the point M_0 move along the normal to the surface of equal value $U(x) = U(x^{(0)})$ until to the point of contact M_1 of that normal with another surface equal value $U(x) = U(x^{(1)})$ (Fig. 1).

Next, from the point M_1 we move along normal to the surface equal value of $U(x) = U(x^{(1)})$ until to the tangent point M_2 of that normal with another surface equal to the value $U(x) = U(x^{(2)})$.

Because $U(x^{(0)}) > U(x^{(1)}) > U(x^{(2)}) > \dots$, when moving along the broken line (red) we reach the bottom of the "valley", i.e. the place where the function $U(x)$ reaches a minimum. This point is a solution x of the equation (1).

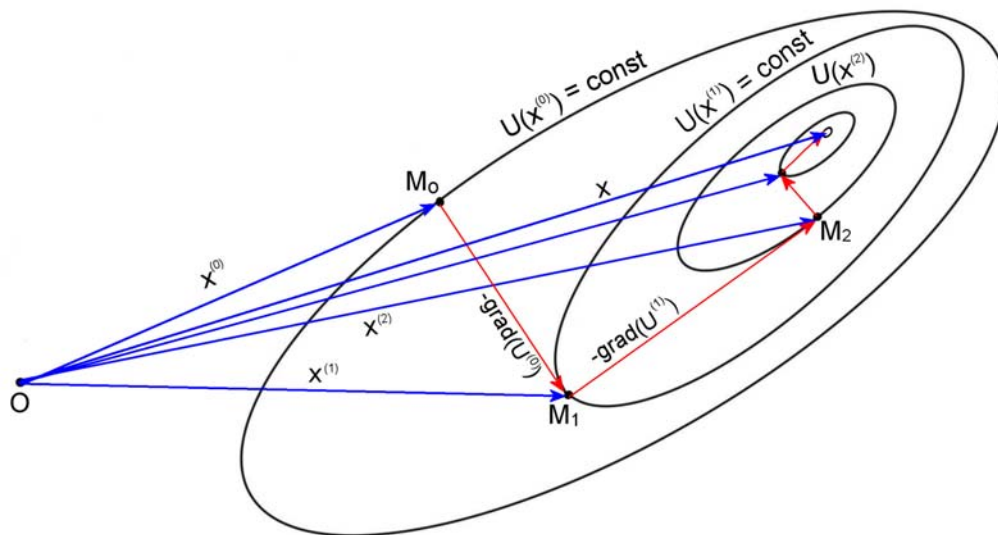


Fig. 1. Graphical illustration of gradient method (steepest descent).

A move along the broken line (red) is essentially moving along the gradients of function $U(x)$, where each of which refers to a particular iteration step.

Function gradient $U(x)$ is a vector aligned with normal to the surface equal value to $U(x)$ oriented in the direction of growth of this function

$$\text{grad}U = \nabla U = \left[\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_n} \right]^T. \quad (24)$$

The triangles vector OM_0M_1 and OM_1M_2 (Fig. 1) shows that

$$\vec{OM}_1 = \vec{OM}_0 + M_0\vec{M}_1 \quad \text{and} \quad \vec{OM}_2 = \vec{OM}_1 + M_1\vec{M}_2. \quad (25)$$

Because returns vectors $M_0\vec{M}_1$ and $M_1\vec{M}_2$ are opposed to the gradient, respectively $\text{grad}U(x^{(0)})$ and $\text{grad}U(x^{(1)})$, therefore, in summary form, you can write it

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - \text{grad}U(x^{(i)}). \quad (26)$$

In order to minimize the function $U(x)$ in equation (26) is introduced λ parameter. Then, is getting the general form of the gradient method [4]

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - \lambda^{(i)} \nabla U(x^{(i)}), \quad i=1,2,3,\dots. \quad (27)$$

The parameter $\lambda^{(i)}$ is determined in each iteration step. For this purpose we define a function $\Phi(\lambda)$ such that

$$\Phi(\lambda) = U(x^{(i+1)}) = U[x^{(i)} - \lambda^{(i)} \nabla U(x^{(i)})] = \sum_{j=1}^n f_j [x^{(i)} - \lambda^{(i)} \nabla U(x^{(i)})]^2. \quad (28)$$

Calculating the derivative of the function $\Phi(\lambda)$ in relation to λ and comparing it to zero is getting the search value for the parameter $\lambda^{(i)}$

$$\frac{d\Phi}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \sum_{j=1}^n f_j [x^{(i)} - \lambda^{(i)} \nabla U(x^{(i)})]^2 = 0. \quad (29)$$

The function f_j can be expanded in a Taylor series in the neighborhood of the point $x^{(i)}$ to the relation of parameter $\lambda^{(i)}$ and the accuracy of linear components of this expansion. We obtain

$$\Phi(\lambda) = \sum_{j=1}^n [f_j(x^{(i)}) - \lambda^{(i)} \nabla U(x^{(i)}) \frac{\partial f_j(x^{(i)})}{\partial x}]^2 = 0, \quad (30)$$

where

$$\frac{\partial f_j(x^{(i)})}{\partial x} = \left[\frac{\partial f_j(x^{(i)})}{\partial x_1}, \frac{\partial f_j(x^{(i)})}{\partial x_2}, \frac{\partial f_j(x^{(i)})}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial f_j(x^{(i)})}{\partial x_n} \right]. \quad (31)$$

Thus, the derivative of the function $\Phi(\lambda)$ in relation to λ will be

$$\frac{d\Phi}{d\lambda} = -2 \sum_{j=1}^n [f_j(x^{(i)}) - \lambda^{(i)} \nabla U(x^{(i)})] \frac{\partial f_j(x^{(i)})}{\partial x} \nabla U(x^{(i)}) \frac{\partial f_j(x^{(i)})}{\partial x} = 0. \quad (32)$$

By grouping the expression under the sign of summation and guiding the parameter $\lambda^{(i)}$ before the sign sum we get

$$\lambda^{(i)} = \frac{\sum_{j=1}^n f_j(x^{(i)}) \frac{\partial f_j(x^{(i)})}{\partial x} \nabla U(x^{(i)})}{\sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial f_j(x^{(i)})}{\partial x} \nabla U(x^{(i)}) \right]^2}. \quad (33)$$

In the matrix notation, equation (33) takes the form

$$\lambda^{(i)} = \frac{f(x^{(i)}) \cdot J(x^{(i)}) \nabla U(x^{(i)})}{J(x^{(i)}) \nabla U(x^{(i)}) \cdot J(x^{(i)}) \nabla U(x^{(i)})}, \quad (34)$$

where $J(x^{(i)})$ is the Jacobian function (1) and the dot in the numerator and the denominator is the scalar product of two vectors. To express the gradient $\nabla U(x^{(i)})$ using function $f(x^{(i)})$ we determine first the k -th component

$$\frac{\partial U(x^{(i)})}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{j=1}^n [f_j(x^{(i)})]^2 = 2 \sum_{j=1}^n f_j(x^{(i)}) \frac{\partial f_j(x^{(i)})}{\partial x_k}, \quad k=1,2,3,\dots,n \quad (35)$$

Thus, using equation (24) gave the formula to calculate the gradient

$$\nabla U(x^{(i)}) = 2 \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j(x^{(i)})}{\partial x_1} f_j(x^{(i)}) \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j(x^{(i)})}{\partial x_2} f_j(x^{(i)}) \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j(x^{(i)})}{\partial x_n} f_j(x^{(i)}) \end{bmatrix} = 2J(x^{(i)})^T f(x^{(i)}). \quad (36)$$

Taking into account the last equation we obtain the final equation for the calculation of the parameter $\lambda^{(i)}$

$$\lambda^{(i)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{f(x^{(i)}) \cdot J(x^{(i)}) J(x^{(i)})^T f(x^{(i)})}{J(x^{(i)}) J(x^{(i)})^T f(x^{(i)}) \cdot J(x^{(i)}) J(x^{(i)})^T f(x^{(i)})}. \quad (37)$$

Examples of parameter $\lambda^{(i)}$ values are presented in the following work.

6. Examples of calculation

To test the effectiveness of methods to locate elements were used three examples of systems of nonlinear equations with varying degrees of nonlinearity.

Using the method, each example solved twice for different values of the initial approximation $x^{(0)}$ of accuracy $\varepsilon \leq 10^{-12}$.

Example 1

Given is a system of nonlinear equations

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \\ 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_3 \\ 3x_1^2 - 4x_2 + x_3^2 \end{bmatrix} = 0, \quad (38)$$

for which solution is vector

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.785196933062 \\ 0.496611392945 \\ 0.369922830746 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Fig. 2 illustrates convergence of these methods for an initial approximation $x^{(0)} = [0,5; 0,5]^T$. To achieve the desired accuracy of the calculations $\varepsilon \leq 10^{-12}$, Newton's method, modified Newton's and Steffensen's method require the same number of iterations ($i = 6$). Gradient method is much slower ($i = 163$) and its convergence is very characteristic. In the initial iterations the reduction of error is large, and in subsequent iterations the error decreases very slowly, resulting in a large number of iterations.

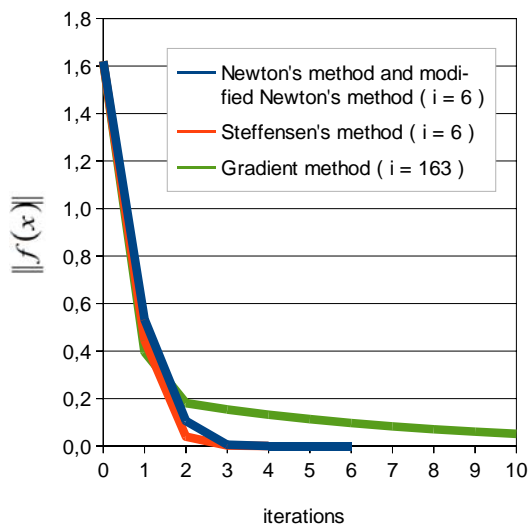


Fig. 2. The convergence of methods for solving the system of equations (38) for the initial approximation $x^{(0)} = [0,5; 0,5]^T$.

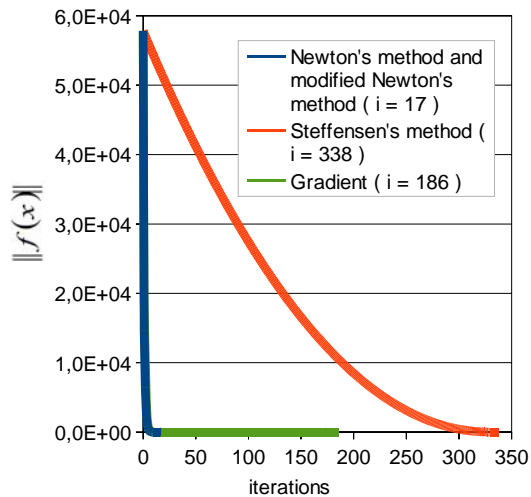


Fig. 3. The convergence of methods for solving the system of equations (38) for the initial approximation $x^{(0)} = [100,0; 100,0]^T$.

i	$\ f(x^{(i)})\ $	$\ f(x^{(i+j)})\ $	$\lambda^{(i)}$
0	5,7830E+04	1,8988E+04	0,000002
1	1,8988E+04	1,0925E+04	0,000003
2	1,0925E+04	4,4775E+03	0,000012
3	4,4775E+03	1,7233E+03	0,000029
4	1,7233E+03	6,5410E+02	0,000064
5	6,5410E+02	2,7969E+02	0,000163
6	2,7969E+02	1,0873E+02	0,000454
7	1,0873E+02	4,3230E+01	0,001112
8	4,3230E+01	1,9118E+01	0,002809
9	1,9118E+01	9,7432E+00	0,007259
10	9,7432E+00	5,4148E+00	0,018586
11	5,4148E+00	1,2157E+00	0,051925
12	1,2157E+00	7,8276E-01	0,039387
13	7,8276E-01	6,1229E-01	0,032470
14	6,1229E-01	4,9595E-01	0,034414
15	4,9595E-01	4,0904E-01	0,036670
16	4,0904E-01	3,3731E-01	0,035862
17	3,3731E-01	2,8137E-01	0,039048
18	2,8137E-01	2,3464E-01	0,036913
19	2,3464E-01	1,9719E-01	0,040952
20	1,9719E-01	1,6567E-01	0,037647

Table 1. The convergence of the gradient method for the system of equations (38) with the initial approximation $x^{(0)} = [100,0 ; 100,0]^T$ (for the initial iterations).

The convergence of methods for the following initial approximation $x^{(0)} = [100,0 ; 100,0]^T$ is shown in Fig. 3. The nature of the nonlinear equations (38) allows there to introduce large changes in the choice of new values of initial approximations. Consequently, in each method has increased the number of iterations. Turned out to be the slowest method of Steffensen. In Table 1 is shown convergence of the gradient method in the early iterations. Is visible the big change of parameter $\lambda^{(i)}$ which stimulates convergence of this method.

Example 2

Given is a system of nonlinear equations

$$f(x) = \begin{bmatrix} e^{x_1^2 + x_2^2} - 3 \\ x_1 + x_2 - \sin(3(x_1 + x_2)) \end{bmatrix} = 0, \quad (40)$$

for which solution is vector

$$x = \begin{bmatrix} -0,256625076922 \\ 1,016245963614 \end{bmatrix}. \quad (41)$$

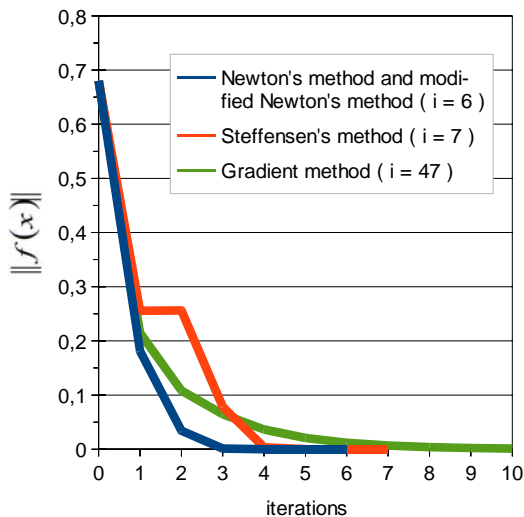


Fig. 4. The convergence of methods for solving the system of equations (40) for the initial approximation $x^{(0)} = [0,2 ; 0,9]^T$.

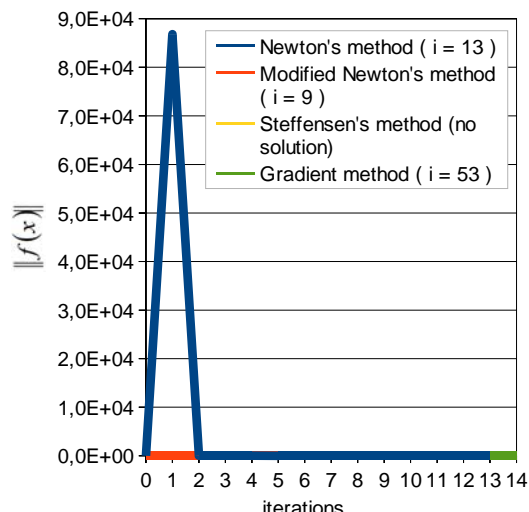


Fig. 5. The convergence of methods for solving the system of equations (40) for the initial approximation $x^{(0)} = [0,5 ; 1,0]^T$.

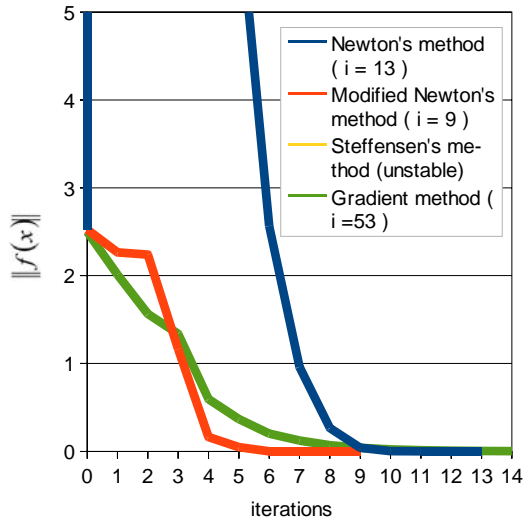


Fig. 6. The convergence of methods for solving the system of equations (40) for the initial approximation $x^{(0)} = [0,5; 1,0]^T$ - partial graph.

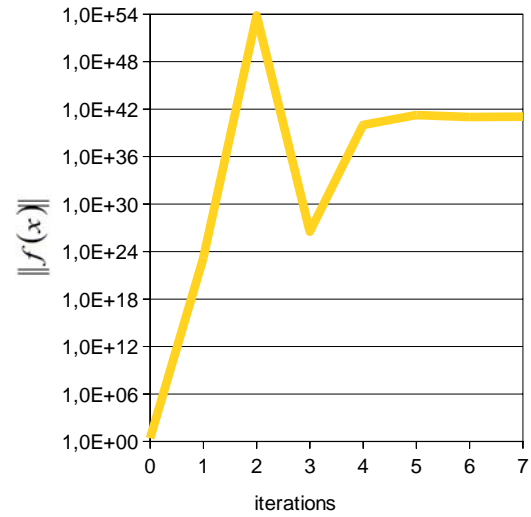


Fig. 7. No convergence of Steffensen's method on solving the system of equations (40) for the initial approximation $x^{(0)} = [0,5; 1,0]^T$.

i	$\ f(x^{(i)})\ $	$\ f(x^{(i+l)})\ $	$\lambda^{(i)}$
0	2,53E+000	8,68E+004	1
0	2,53E+000	3,93E+001	0,5
0	2,53E+000	3,65E+000	0,25
0	2,53E+000	2,27E+000	0,125
1	2,27E+000	1,36E+018	1
1	2,27E+000	2,26E+005	0,5
1	2,27E+000	9,17E+001	0,25
1	2,27E+000	7,96E+000	0,125
1	2,27E+000	3,00E+000	0,0625
1	2,27E+000	2,32E+000	0,03125
1	2,27E+000	2,24E+000	0,015625
2	2,24E+000	1,16E+000	1
3	1,16E+000	1,63E-001	1
4	1,63E-001	4,84E-002	1
5	4,84E-002	5,62E-004	1
6	5,62E-004	6,26E-006	1
7	6,26E-006	7,16E-010	1
8	7,16E-010	1,13E-015	1

Table 2. The convergence of a modified Newton's method the system of equations (40) with the initial approximation $x^{(0)} = [0,5; 1,0]^T$.

Fig. 4 shows the convergence of these methods for the initial approximation $x^{(0)} = [0,2; 0,9]^T$ and in Fig. 5 and Fig. 6 - for the next approximation $x^{(0)} = [0,5; 0,1]^T$. The change in an initial approximation resulted the oscillation in the Newton's method, and the instability and lack of resolution in the Steffensen's method (Fig.7).

Table 2 shows the convergence of the modified Newton's method and the impact of the parameter $\lambda^{(i)}$ on this convergence.

Adjusting by the parameter $\lambda^{(i)}$ increments of successive approximations roots of solution (15) causes here monotonic nature of convergence $\|f(x^{(i)})\|, i=1,2,3, \dots$.

Example 3

Given is a system of nonlinear equations

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 - 1 - 0,05(e^{x_2^{\sqrt{x_1}}} + 3x_1^2) \\ x_2 - 0,5 - 0,05tg(e^{x_1} + x_2) \end{bmatrix} = 0, \quad (42)$$

which the solution is vector

$$x = \begin{bmatrix} 1,37054520 \ 5234 \\ 0,62258570 \ 9759 \end{bmatrix}. \quad (43)$$

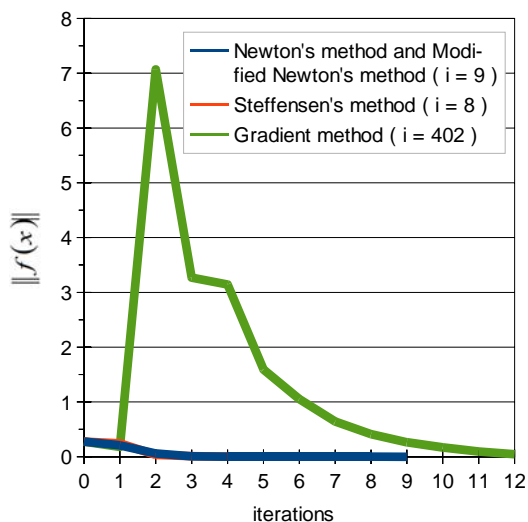


Fig. 8. The convergence of methods for solving the system of equations (42) for the initial approximation $x^{(0)} = [1,7 ; 0,7]^T$:

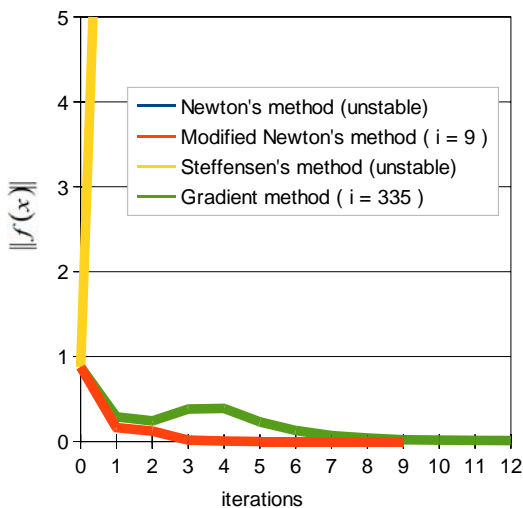


Fig. 9. The convergence of methods for solving the system of equations (42) for the initial approximation $x^{(0)} = [1,3 ; 1,3]^T$.

Table 3. The convergence of the modified Newton's method of the system equations (42) with the initial approximation $x^{(0)} = [1,3 ; 1,3]^T$.

i	$\ f(x^{(i)})\ $	$\ f(x^{(i+1)})\ $	$\lambda^{(i)}$
0	8,78E-001	-1, #INDE+000 (*)	1
0	8,78E-001	1,64E-001	0,5
1	1,64E-001	1,24E-001	1
2	1,24E-001	1,75E-002	1
3	1,75E-002	5,39E-003	1
4	5,39E-003	1,05E-003	1
5	1,05E-003	9,76E-005	1
6	9,76E-005	2,10E-006	1
7	2,10E-006	4,28E-009	1
8	4,28E-009	1,88E-013	1

(*) - undefined result

convergence of modified Newton's method.

Fig. 8 shows the convergence of the methods of solving the system of equations (42) for the initial approximation $x^{(0)} = [1,7 ; 0,7]^T$. Steffensen's method, Newton's and modified Newton's method have a comparable number of iterations - for 8, 9, 9 Their graphs visually overlap. Gradient method, as in the previous example is slower (402 iterations).

Fig. 9 shows the convergence of a modified Newton's method and gradient method for initial approximations $x^{(0)} = [1,3 ; 1,3]^T$. Changing the initial approximations caused instability in Newton's method and Steffensen's - in both cases, after the first iteration, an excess error occurred (undefined result). Table 3 shows the effect of parameter $\lambda^{(i)}$ on keeping the

7. Conclusion

Table 4 presents ranking of selected methods for solving systems of nonlinear equations, used in Examples 1, 2 and 3. For the classification criterion it was adopted effectiveness of method for different initial estimates. Although, all presented methods are in second order, the most stable and effective, at the same time, turned out to be modified Newton's method and gradient method (Example 3). The characteristic feature of these two methods is the parameter $\lambda^{(i)}$ simulating convergence of an iterative process. Of course, how to determine this parameter for each method is different, however, in each of which it is responsible for causing a monotonic decrease in error of solution. Oscillations of an error occurring in the process of iterative can lead to instability of methods and therefore no solution.

Table 4. The effectiveness of methods for solving systems of nonlinear equations.

S.n.	Example 1	Example 2	Example 3
1	Newton's method ($i=17$)	Modified Newton's method ($i=9$)	Modified Newton's method ($i=9$)
2	Modified Newton's method ($i=17$)	Newton's method ($i=13$)	Ggradient method ($i=335$)
3	Gradient method ($i=186$)	Gradient method ($i=53$)	Newton's method (unstable)
4	Steffensen's method ($i=338$)	Steffensen's method (unstable)	Steffensen's method (unstable)

As mentioned in the introduction, there are many methods for solving systems of nonlinear equations. Presented in this study ranking of four them do not diminish the importance and usefulness of other methods. On the contrary. The variety of systems of nonlinear equations and varying degrees of involvement in them arguments implies the necessity of testing several methods, especially if the calculation is to be performed cyclically.

References

- [1] Wójcik J., Mathematical model of burning of solid fuel particle, XV Congress of Thermodynamic, Proceedings Volume 2, Silesian University of Technology, Gliwice Kokotek 1993, pp. 743-751.
- [2] Stoer J., Bulirsch R., Introduction to Numerical Methods, Volume II, State Scientific Publishers, Warsaw, 1980.
- [3] Björck Å., Dahlquist G., Metody numeryczne, Wydanie drugie, State Scientific Publishers, Warszawa 1987.
- [4] Demidowicz B. P., Maron I. A Numerical Methods, Part I, State Scientific Publishers, Warsaw 1965.
- [5] Stoer J., Introduction to Numerical Methods, Volume I, State Scientific Publishers, Poland, Warsaw 1979.

APPLICATION OF FACTOR ANALYSIS FOR EXAMINING THE STRUCTURE OF VARIABLES IN SURVEY STUDIES

Radosław Wolniak, Bożena Skotnicka-Zasadzień

Institute of the Production Engineering, Silesian University of Technology
ul. Roosevelta 26, 44-800 Zabrze, POLAND

E-mail : radoslaw.wolniak@polsl.pl, bozena.skotnicka@polsl.pl

Abstrakt: There is an significant number of variables in number of studies in which we have to deal with in our survey research. When there is a lot of variables is a lot, it is useful to group them into collective categories - the so-called factors. This enable you to find order in the structure of the variables. Also you can allow to conduct analysis of smaller number of consistent factors. This agglomeration of variables can be performed using different statistical methods. One of the methods using for this purpose is called confirmatory factor analysis. This method will be presented in our publication.

Introduction

In many investigations involving survey studies we deal with a number of variables. In the event there is a large number of variables – several or several dozen, it is useful to group them into common categories – so-called factors, which allow finding an order in the structure of variables and leaving a smaller number of consistent factors for analysis. Such an agglomeration of variables can be performed using various statistical methods. One of the methods that are often successfully used for this purpose is so-called confirmatory factor analysis, which will be presented in this publication.

Assumptions and principles of factor analysis

In order to determine the structure of investigated variables, it is necessary to conduct a factor analysis. It is one of the most frequently applied techniques of so-called „co-dependence analysis” [1]. All variables in co-dependence analysis studies are treated equally, and the analyst is interested in the whole set of dependencies between the variables which characterise the objects. Its aim is to combine important information from the set of observed variables into a new, smaller set of factors expressing what the initial variables have in common. When carrying out a factor analysis, we try to find factors that are of crucial importance with regard to a description of the problem we are dealing with [2]. In subject literature it is assumed that a factor analysis can be conducted if relevant assumptions are fulfilled by the data introduced in the analysis. In the case of factor analysis, it is most frequently assumed that the data should meet three requirements:

- the number of analysed cases should be at least ten times higher than the number of analysed variables,
- the covariance matrix determinant should fulfil Bartlett's test of sphericity, which verifies the null hypothesis saying that variables correlation matrix is an identity matrix, i.e. has ones on the main diagonal and zeros elsewhere. This would be tantamount to the lack of correlation between variables [3],
- fulfil the Kaiser-Maier-Olkin measure [4]. This index assumes $<0.1>$ values. The higher the value of the index, the stronger the bases for applying a factor analysis in the evaluation of correlations between the investigated variables. The higher the values adopted by KMO statistics, the stronger the bases for conducting a factor analysis [5]. The following interpretation of Kaiser-Mayer-Olkin indexes is usually adopted [6]:
 - $KMO > 0,9$ – very high,
 - $KMO > 0,8$ – high,
 - $KMO > 0,7$ – average,
 - $KMO > 0,6$ – moderate,
 - $KMO < 0,6$ – very low.

It is believed that the value of this index should exceed 0.5. Some researchers assume that a factor analysis can only be conducted if the index is higher than 0.7.

Barlett's test verifies the null hypothesis, which says that the correlation matrix is a unit matrix ($H_0: R=I$), which means that all correlation indexes equal zero. The null hypothesis is verified by statistics [6]:

$$U = -(n - 1 - \frac{2p+5}{6}) \sum_{i=1}^p \ln \lambda_i \quad (1)$$

where: p – the number of variables, n – the number of cases, λ_i – i th own value.

This statistics has a chi-squared distribution (χ^2) with $v=p(p-1)$ degrees of freedom. If the value of statistics is higher than the one read out from the chi-squared distribution tables with the level of statistical significance $\alpha=0,05$, the set of all correlation indexes can be deemed as statistically significant. As the value of this statistics depends on the sample size, in the case of a large number of observations even weak correlations will be sufficient to fulfil the requirements of Barlett's test. For this reason, when using the above mentioned KMO measure, it is necessary to assess to what extent the sample data meet the factor analysis assumptions [5].

The manner of KMO statistics calculation is described by the following formula [7]:

$$KMO = \frac{\sum_{i \neq j} \sum_{j \neq i} r_{ij}^2}{\sum_{i \neq j} \sum_{j \neq i} r_{ij}^2 + \sum_{i \neq j} \sum_{j \neq i} a_{ij}^2} \quad (2)$$

where: r_{ij} – correlation matrix element R ; a_{ij} – coefficient of multiple partial correlation between variables i and j , while the influence of the remaining variables is eliminated.

If Barlett's test results are satisfactory, i.e. coefficients of correlations between variables are significant, and the value of KMO statistics suggests that there are bases for constructing a factor analysis model, an attempt can be undertaken to evaluate to what extent each of the variables observed in an empirical study is dependent on the remaining variables. The degree of this dependence is described by a common variable, which is a sum of squared loadings by the factors in each equation of the model. For the real variable X_i , the common variability, which defines like variable X_i , depends on the remaining real variables, therefore it equals: $\sum_{j=1}^k \lambda_{ij}^2$ [5]. There are a few algorithms of factors rotation. In this monograph, the most frequently applied standardized varimax method has been used [8]. This algorithm is aimed at finding a solution in which variables are highly fitted to one distinguished factor, while their fitting to the remaining factors is possibly the lowest. Therefore, the algorithm maximises the sum of loadings variances in the matrix of factors, hence the name varimax. By

applying this method, we obtain a final result in which factors are strongly correlated with some and poorly correlated with other variables [2].

The last stage of the procedure after isolating the factors is evaluation of the scale reliability for each of the dimensions isolated by particular factors separately. The success of using an ordinal scale in attitude testing requires knowledge about the theory of this measurement [9]. To this end, a measure called Cronbach's alpha is commonly used. This index adopts values of [0,1] range. It is a lower measure of reliability estimator and is used for one-dimensional scales [10]. It is recommended that it should equal minimum 0.7 for ordinal scales referring to attitude testing [5]. This coefficient is applied to assess the reliability of questionnaires made up of any number of answer categories [6]. The reliability of attitude scales refers to attitude measurement errors. Cronbach's alpha can be calculated from the following formula [5]:

$$a_c = \frac{k}{k-1} \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^k S_j^2}{\sum_{j=1}^k S_j^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{j=2 \\ i < j}}^k S_i S_j} \right) \quad (3)$$

where: k – the number of simple one-dimensional scales, which make up a whole block referring to a particular attitude testing; S_j^2 - variance of measurement results, on each of the distinguished simple one-dimensional scales, for $j=1, \dots, k$; S_i, S_j - standard deviations of measurement results on the i th and j th scale; r_{ij} – coefficient of correlation between measurement results on the i th and j th scale.

In practice, so-called Kaiser's criterion [10] is the most frequently used when determining the number of factors. This criterion recommends that in an analysis we should leave factors whose own values are higher than 1 [11]. This criterion was proposed in 1959 by Kaiser. It is based on own values and, as mentioned before, it assumes that the factors the own value of which is higher than 1 should be left in the analysis. This means that a particular factor explains a greater part of variance compared to the initial variables.

With respect to customer focus, this criterion recommends leaving three factors characterised by their own values higher than 1.

In some cases, it is worth complementing this criterion with another one, very frequently used in factor analysis (Subject literature discusses many other criteria for the selection of the number of factors, such as: the criterion of half, the sufficient position criterion, the residual criterion etc. Different criteria can suggest a selection of a different number of factors. It is the researcher who decides what criterion will be used in a given case.) – enabling a selection of the number of factors, referred to as Cattell's scree test [12].

This criterion is based on so-called Cattell's scree test. It is a simple line graph showing subsequent own values. Cattell proposes finding a place to the right of which the own values begin to drop gently. Beyond this point there is probably only a „scree”. This is a place where the increment of information is broken. Cattell's scree test was developed in 1966. This criterion assumes that in a line graph we should look for a point to the right of which a gentle drop of own values is observed. To the right of this point there is probably a „factor scree”. Therefore, we do not keep more factors than the ones on the left side of this point [6].

An example of application

The presented research in this publication was conducted in the second half of 2009 by means of random method in medical clinics in Silesia Voivodeship. 50 patients were randomly surveyed in each clinic. As a result of research, 2400 questionnaires were obtained.

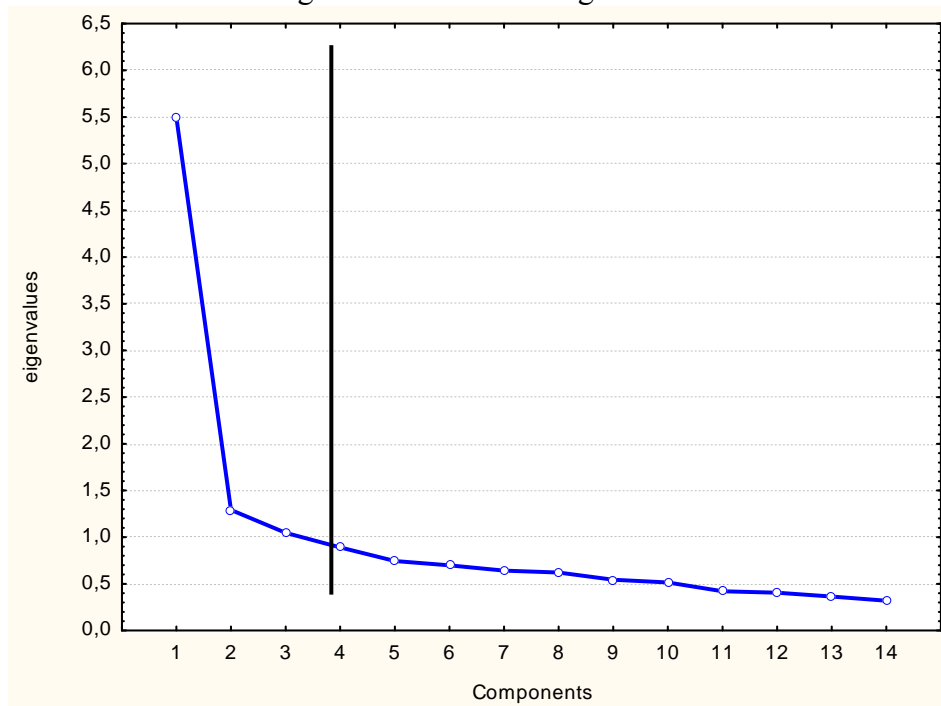
The questionnaire was used when studying the level of services in medical clinics. The set of 14 following variables were taken into account:

- Z1 – medical staff's conscientiousness attitude to a patient in a clinic,
- Z2 – medical Staff 's knowledge

- Z3 – medical staff’s courtesy
- Z4 – clinic’s opening hours
- Z5 – available medical equipment
- Z6 – staff’s willingness to help
- Z7 – close clinic’s location to patients’ place of living
- Z8 – clinic’s adaptation for the handicapped
- Z9 – cleanness of a clinic
- Z10 – staff’s neatness
- Z11 – clarity of clinic’s website
- Z12 – appearance of a building in which a clinic is based
- Z13 – providing a service by a clinic in emergency
- Z14 – staff’s understanding and patience towards a patient

Liczba badanych przypadków wynosząca 2400 jest większa niż dziesięciokrotność liczby zmiennych, dlatego badanie spełnia pierwszy warunek. Obliczenia wykazały również, że wyznacznik macierzy kowariancji spełnia test sferyczności Bartletta.

Cattell’s talus method (scree method) was used to define the number of factors. It was considered that Kaiser criterion which recommends to leave in the analysis these factors whose own value is higher than 1 and hence, it marks out too little factors in case of studied problem. On the basis of Cattell’s talus graph (picture no 1) , 4 hidden factors have been marked out. In order to obtain a simple factor structure of matrix of factor loadings which present correlations between variables and marked out main component, they were subjected to orthogonal rotation, called Varimax method. Varimax rotation is especially useful when looking for factors with the highest loadings because it attributes each factor to a couple of variables with the highest loadings and the rest variables with low loadings. As a result, factors with variables with the highest values of loadings are marked.



Picture 1. The Cattell scree

As it was mentioned in the previous chapter during factor analysis, four hidden factors of quality of services were identified. Table No 1 presents factor values within the scope of

separate factors. Table no 2 presents factor loadings for separate factors. All together, the identified factors explain 62% of variability.

The first identified factor- **service level**- explains 31% of variability. It includes problems connected with employees' behaviour towards patients, their competence, politeness and willingness to work. This factor includes eight variables: Z1- conscientiousness of medical staff's behaviour toward a patient, Z2- medical staff's knowledge, Z3- staff's politeness, Z4- opening hours of a clinic, Z5-avaialbe medical equipment,Z6- staff's willingness to help, Z13- providing a service by a clinic in an emergency, Z14-understanding and patience toward a patient.

The second aspect- **material aspect**- explains 15% of variability. This factor consists of four variables concerning material aspects of providing medical services within a scope of image and cleanness of a building where the clinic is based and the staff. The following variables constitute this aspect: Z8-adaptation of a building to the handicap's needs, Z9-cleaness in a clinic, Z10-staff's neatness, Z12-the building appearance.

The third factor- **e-clinic**- it explains 8% of variability. It consists of one variable – the assessment of a clinic website. This factor tells how patients perceive perceived the quality of information which is on a clinic's website. Whether it is legible, whether there is information concerning opening hours of individual surgery, information about employed doctors and offer, etc.

Table 1. The identification of hidden loadings of perceived quality

Variables	Hidden factors			
	Factor 1	Factor 2	Factor 3	Factor 4
Z1	0,79	0,14	-0,04	0,03
Z2	0,73	0,16	-0,01	0,09
Z3	0,78	0,15	0,08	-0,01
Z4	0,55	0,00	0,07	0,41
Z5	0,62	0,15	0,33	0,26
Z6	0,73	0,20	0,05	0,07
Z7	0,08	0,22	-0,12	0,85
Z8	0,04	0,66	0,18	0,31
Z9	0,43	0,72	-0,06	-0,02
Z10	0,51	0,64	-0,17	-0,09
Z11	0,11	0,13	0,89	-0,10
Z12	0,13	0,68	0,22	0,16
Z13	0,61	0,20	0,22	0,14
Z14	0,71	0,31	0,04	-0,05

The fourth factor – **location**- explains 8% of variability. It also consists of only one factor – closeness of a clinic to a place of patient's house. An old, sick person can have problem with getting to a clinic if it is situated far from his house. Thus, the closeness of clinic has turned out to be an independent factor which has an influence on perceived quality of service.

In order to use a prepared factor model for measurement of quality of service in case of studied clinics, it should be defined if a reliable defining of measures and subordination of variables to them was conducted for each defined factor. It can be done by means of alfa-Cronbach co-efficient which constitutes a bottom boarder of an estimator of reliability scale for multi-dimension scales. This coefficient can accept values from 0-1. It is recommended for this coefficient to be bigger than 0, 7. In case of the defined factors of values of alfa Cronbach 's coefficient in the analysis, they are higher than 0,7 thus, they can be claimed to be reliable.

Conclusion

Analysis presented in this paper demonstrates using of the method of factor analysis for the analysis of data collected in the survey. The factor method allowed to reduce 17 variables by grouping them in four so-called hidden factors that have been identified in a set of variables. Further analysis of the level of quality in medical clinics (presented in the example) you do not have to analyse all the variables but only you can to examine the level of quality in terms of identified four factors.

References:

- [1] Gilbert A., Ch.: Badania marketingowe. Podstawy metodologiczne, PWN, Warszawa 2002.
- [2] Aczel A.: Statystyka w zarządzaniu, PWN, Warszawa 2000.
- [3] Wieczorkowska G., Wierziński J.: Statystyka. Analiza badan społecznych, Wydawnictwo Naukowe SCHOLAR, Warszawa 2007, s. 322-324.
- [4] Dodge Y.: The Oxford Dictionary of Statistical Terms, Oxford University Press, Oxford.
- [5] Rószkiewicz M.: Metody ilościowe w badaniach marketingowych, PWN, Warszawa 2002.
- [6] Stanisław A.: Przystępny kurs statystyki z zastosowaniem STATISTICA PL. Tom 3. Analizy wielowymiarowe, StatSoft, Kraków 2006.
- [7] Kaiser H. F.: An index of factorical simplicity, „Psychometrika”, nr 39 1974.
- [8] Kaiser H. F.: The varimax criterion for analytic rotation in factor analysis, „Psychometryka”, nr 3 1958, s. 187-200.
- [9] Brzeziński J.: Metodologia badań psychologicznych, PWN, warszawa 1997.
- [10] Gatnar E., Walesiak M.: Metody statystycznej analizy wielowymiarowej w badaniach marketingowych, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. O. Langego we Wrocławiu, Wrocław 2004.
- [11] Brown T. A.: Confirmatory factor analysis for applied research, Guilford Press, New York, 2006.
- [12] Wieczorkowska G., Wierziński J.: Statystyka. Analiza badan społecznych, Wydawnictwo Naukowe SCHOLAR, Warszawa 2007.

AKO ZAPOJIŤ ŠTUDENTOV DO SYSTEMATICKEJ PRÁCE POČAS SEMESTRA

Viera Záhonová

Ústav matematiky a fyziky, Sjf STU
Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovenská republika
E-mail: viera.zahonova@stuba.sk

Abstrakt: Počet študentov, ktorí úspešne ukončia predmet Matematika I z roka na rok klesá. Vplyv na tento fakt má nedostatočná príprava z matematiky na strednej školy a taktiež aj to, že študenti nie sú naučení priebežne študovať. V príspevku je popísaný návrh experimentu a jeho vyhodnotenie, ktoré Ústav matematiky a fyziky Sjf STU zrealizoval v prvom semestri akademického roka 2012/13. Tento experiment bol zameraný na zlepšenie práce študentov počas celého semestra a následne aj na lepšie zvládnutie predmetu Matematika I.

Abstract: Number of students who successfully complete the subject Mathematics I is constantly decreasing. This situation is caused by inadequate preparation at secondary schools and also by the fact that students are not accustomed to systematic study. The paper describes the experiment, Institute of mathematics and physics implemented in the first semester of the school year 2012/13. This experiment was aimed at improving students' work during the whole semester and consequently at better mastering of the subject Mathematics I.

1. Úvod

Počet uchádzačov o štúdium na Strojníckej fakulte STU v Bratislave sa postupne zvyšuje, ale úroveň ich vedomostí zo stredoškolskej matematiky naopak klesá [2]. Študenti, ktorí sú prijatí na Sjf STU majú možnosť pred začiatkom semestra si zopakovať tie oblasti matematiky, ktoré sú nutné k úspešnému zvládnutiu predmetu Matematika I, prípadne, ak nezvládnu vstupný test zo stredoškolskej matematiky na začiatku semestra, musia navštevovať povinne voliteľný predmet Doplnkové cvičenia z Matematiky I, ktorý je ukončený zápočtom. Vyrovnanie vedomostí pomocou absolvovania tohto predmetu sa osvedčilo [1], no aj napriek tomu, výsledky z Matematiky I sú neuspokojivé [2]. Počas semestra väčšina študentov pracuje nepravidelne, nevyužívajú materiály, ktoré sú im dostupné na štúdium, dalo by sa povedať, že ignorujú konzultačné hodiny učiteľov. Menší pohyb nastane pred priebežnými kontrolkami počas semestra a tiež aj pred termínmi skúšok. Otázky na konzultáciách však nie sú zamerané na podstatu nejakého problému, ale skôr na to, aké

príklady budú na kontrolke, resp. na skúške. Niektorí študenti sa dokonca radšej naučia príklady z minulých školských rokov naspamäť, ako keby sa mali nad nimi zamyslieť a pochopiť ich.

2. Ako zapojiť študentov do systematickej práce počas semestra?

Istým predpokladom úspešného absolvovania predmetu Matematika I, je dostatočný vedomostný základ študenta a jeho samostatná a systematická práca počas celého semestra. Ako bolo už v úvode povedané, vedomosti študentov sú rôznorodé a študenti nie sú naučení pravidelne sa pripravovať na cvičenia. Ako ich však k tomu donútiť (hoci štúdium na vysokej škole je dobrovoľné)? Buď začneme pravidelne dávať študentom domáce úlohy a nabehneme na stredoškolský systém. Pre učiteľa, ktorý však učí napríklad 4 pracovné skupiny, pribudne neúmerne množstvo práce. Aby tento systém fungoval a mal nejaký zmysel, učiteľ musí domáce úlohy skontrolovať a opraviť. Stále však nemá zaručené, že tieto úlohy väčšina študentov neopísala, a teda zase systematicky nepracujú hlavne slabší študenti. Aby sa vylúčilo opisovanie, dajú sa vygenerovať príklady podobného charakteru, ale opäť, kto má s tým robotu navyše? Podotýkam, že tieto príklady je potrebné vytvárať každý rok, pretože všetci vieme, že študenti si predávajú svoje poznatky z roka na rok.

Ďalšou možnosťou je písať na každom cvičení krátku kontrolku, ktorá nie je časovo náročná na výpočty a opravu. Na takejto kontrolke je však vhodné zadať iba úplne jednoduché príklady, kde je zrejmý hneď výsledok. V opačnom prípade sa „ponoríme“ do stáleho vymýšľania a opravovania písomiek. Negatívom tejto formy je aj to, že študent sa pripraví ozať iba na základné výpočty a použitie týchto výpočtov na riešenie komplexnejších úloh začína byť problematické. Skúšali sme aj týmto spôsobom prinútiť študentov systematicky pracovať počas semestra, ale veľmi sa to neosvedčilo, aj keď body za kontrolky boli časťou hodnotenia študentov za semester, a tým aj na skúške.

Existujú aj iné metódy, ale stále je to na učiteľovi, či niektorú z nich použije. Na Ústave matematiky a fyziky na cvičeniach z Matematiky I sme v akademickom roku 2012/13 vyskúšali v jednej z troch paraleliiek metódu, ktorou sme chceli naučiť študentov priebežne sa pripravovať na cvičenia.

3. Popis experimentu

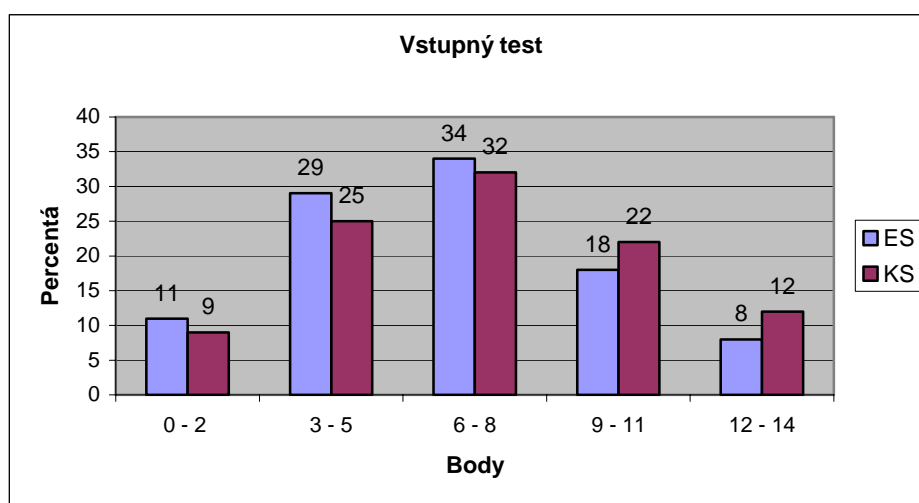
Vzhľadom na to, že na SjF STU na zápočet z Matematiky I je potrebných 13 bodov zo 40, na začiatku semestra každý študent získal 13 bodov, teda mal zaručený zápočet. Aby si ich udržal, musel na tom pravidelne pracovať. Študenti dostávali na domácu úlohu príklady, ktoré si mali vypracovať a pripraviť na nasledujúce cvičenie. V prvej polovici ďalšieho cvičenia študenti tieto príklady samostatne riešili a vysvetľovali bez použitia poznámok. Boli vyvolávaní sporadicky, nebol v tom žiaden systém. Každý študent počas semestra bol vyvolaný 13-krát. V prípade, že sa nepripravil, stratil bod. Keďže semester trvá 13 týždňov a cvičenia z Matematiky I sú vo výmere 4 hodiny, teda dve cvičenia za týždeň, požiadavka trinástich samostatných vystúpení pred tabuľou počas semestra bola realizovateľná. Tiež, ak bol komplikovanejší príklad, tak riešenia tohto príkladu sa zúčastnili viacerí študenti. Problematika, z ktorej boli domáce úlohy, bola vysvetlená na prednáškach a na predchádzajúcom cvičení v druhej polovici cvičenia sa podrobne riešili podobné príklady ako tie, ktoré boli zadané na domácu úlohu. Študenti mohli využiť aj konzultačné hodiny. Tie boli naplánované tak, že pri riešení domácich úloh medzi cvičeniami študenti mohli vyhľadať pomoc učiteľa ak sa vyskytol nejaký problém. To ich malo donútiť pracovať v predstihu a nenechávať si úlohu na poslednú

chvíľu. Tiež mali k dispozícii skriptá s riešenými príkladmi z Matematiky I. Počas semestra študenti experimentálnej paralelky podobne, ako aj zvyšných dvoch, písali dve kontrolky za 27 bodov.

Na skúške je maximálny počet bodov, ktoré môže študent získať 60, z toho 40 bodov za príklady a 20 bodov za teoretický test. Nutné podmienky k získaniu skúšky sú minimálne 20 bodov z príkladov, 5 bodov teoretický test, 30 bodov zo skúšky a 51 bodov spolu za cvičenia a skúšku. V prípade, že študent nesplní niektorú nutnú podmienku okrem prvej, tak ešte absolvuje ústnu skúšku.

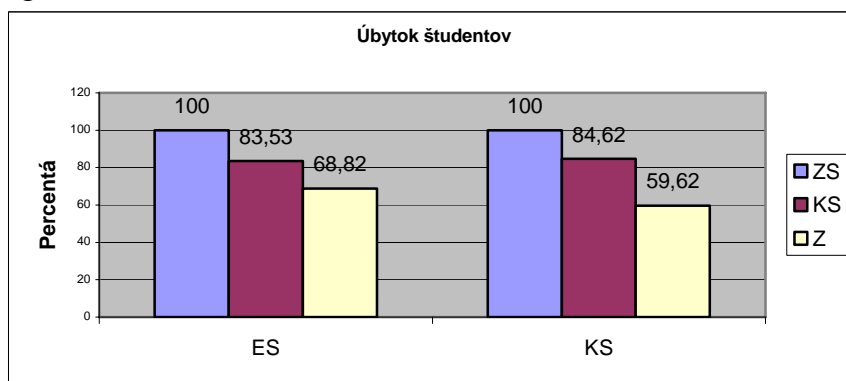
4. Vyhodnotenie experimentu

Na začiatku semestra všetci študenti písali vstupný test zo stredoškolskej matematiky s jednoduchými otázkami za 14 bodov [1]. Jeho vyhodnotenie v percentách je na nasledujúcom grafe.



Keďže otázky boli veľmi jednoduché, tak ideálne by bolo, keby všetci študenti sa nachádzali v hraniciach 12 – 14 bodov. Bohužiaľ, opak je pravdou, a navyše študenti experimentálnej dosiahli horšie výsledky ako študenti kontrolnej skupiny. 74% študentov experimentálnej skupiny získalo 0 – 8 bodov, kým v kontrolnej skupine to bolo 66%. Vo vyššom bodovom hodnotení 9 – 14 bodov je pomer opačný. Tento počet bodov získalo 26% študentov experimentálnej skupiny a 34% študentov kontrolnej skupiny.

Ako ovplyvnila systematická práca úbytok študentov počas semestra, ukazuje nasledujúci graf.



Napriek tomu, že študenti experimentálnej skupiny vo vstupnom teste mali horšie výsledky ako študenti kontrolnej skupiny, počas semestra mali lepšie výsledky. Aj keď ich úbytok bol počas semestra viac ako 1% vzhľadom na kontrolnú skupinu, zápočet získalo 68,82% týchto študentov. V kontrolnej skupine to bolo 59,62%. Ak porovnáme počet študentov, ktorí získali zápočet vzhľadom k počtu študentov na konci semestra, tak tak v experimentálnej skupine to bolo 82,39% študentov a v kontrolnej skupine 70,45%. Navyše ešte všetci študenti, ktorí nezískali zápočet za prácu počas semestra a z priebežných kontroliek získali aspoň 5 bodov, mali možnosť získať zápočet v náhradnom termíne. V experimentálnej skupine to bol iba jeden študent, ktorý zápočet aj získal, v kontrolnej skupine sa náhradného termínu zúčastnilo 58 študentov a zápočet získalo iba 16.

Všetky tieto výsledky ukazujú, že systematická práca počas semestra mala zmysel, úspešnosť pri získaní zápočtu v experimentálnej skupine bola vyššia, tí čo pracovali počas semestra, až na výnimku jedného študenta, získali zápočet v riadnom termíne, aj keď ich vedomosti vo vstupnom teste boli na nižšej úrovni ako v kontrolnej skupine.

Trochu iná situácia vznikla na skúške. Úspešnosť v tomto predmete vzhľadom na počet študentov na začiatku semestra je v experimentálnej skupine 34,12% a v kontrolnej skupine 40,66%, úspešnosť vzhľadom na počet študentov na konci semestra v experimentálnej skupine je 41,73% a v kontrolnej skupine je 47,01%. Aj keď v experimentálnej skupine zápočet získalo percentuálne viac študentov ako v kontrolnej skupine, tak skúšku z tohto počtu v experimentálnej skupine získalo iba 50,88% a v kontrolnej 68,20% študentov, čo je o 17,32% viac. Ak však porovnáme výsledky skúšky z Matematiky I vzhľadom na výsledky študentov vo vstupnom teste, tak v experimentálnej skupine približne o 8% viac študentov získalo skúšku vzhľadom na percento študentov, ktorí napísali vstupný test na 9 až 14 bodov a v kontrolnej skupine to bolo približne 5%. (Porovnávali sme úspešnosť v predmete vzhľadom na začiatok školského roka.)

5. Dotazník

Aj keď posledné porovnanie bolo v prospech experimentálnej skupiny, experiment nedopadol tak, ako sme očakávali. Preto sme rozdali študentom experimentálnej skupiny na začiatku druhého semestra dotazník, kde sme sa chceli dozvedieť príčiny neúspechov na skúške z Matematiky I. Dotazník obdržalo 96 študentov a jeho návratnosť bola 84,38%.

Prvou otázkou bola otázka, či daný študent maturoval z matematiky. 45,68% študentov odpovedalo áno, 6,17% odpovedalo nie, lebo nemali takú možnosť a odpoveďou zostávajúcich 48,15% študentov bolo, že nematurovali, lebo nechceli. Porovnanie úspešnosti študentov na skúške vzhľadom na absolvovanie štátnej maturitnej skúšky z matematiky ukázalo, že 72,98% maturantov z matematiky bolo úspešných na skúške z Matematiky I.

Výsledky dotazníka tiež hovoria, že 11,11% študentov považuje svoje vedomosti a zručnosti zo stredoškolskej matematiky za veľmi dobré, 35,80% za dobré, 22,22% za dostatočné a 30,86% za nedostatočné. 12,35% respondentov považuje matematiku za predmet veľmi náročný, 34,57% za náročný, 43,21% primerane náročný a 6,17% nenáročný. 3,7% na túto otázku neodpovedalo.

Aj napriek tomu, že študenti na cvičeniach mali obhájiť získané body na začiatku semestra, tak iba 29,63% študentov pravidelne riešilo domáce úlohy na cvičenia, 43,21% ich riešilo viac pravidelne ako nepravidelne, 17,28% viac nepravidelne ako pravidelne, 8,64% ich neriešilo, 1,23% na túto otázku neodpovedalo. 58,02%

respondentov odpovedalo kladne na otázky, či im systém práce na cvičeniach vyhovoval. 23,46% systém práce skôr vyhovoval ako nevyhovoval, 16,05% skôr nevyhovoval ako vyhovoval. Možnosť, že daný systém práce na cvičeniach nevyhovoval nikto neoznačil. Na túto otázku 2,47% neodpovedalo.

91,36% študentov, ktorí vyplnili dotazník získalo zápočet z matematiky, 7,41% ho nezískalo a 1,23% na otázku neodpovedalo. Podmienky na získanie zápočtu z Matematiky I v pre 4,94% opýtaných boli veľmi náročné, pe 12,35% náročné, pre 53,09% primerane náročné, 28,40% ich považovalo za nenáročné a jeden študent neodpovedal.

Úspešných na skúške bolo 65,43% študentov. Keďže percento úspešnosti je väčšie ako je vzhľadom za koniec prvého semestra (35,97%), je zrejmé, že študenti, ktorí neuspeli na Matematike I, neuspeli ani na ostatných predmetoch a boli vylúčení zo štúdia. Podmienky na získanie skúšky z Matematiky I pre 20,99% študentov boli veľmi náročné, 43,21% ich považuje za náročné, 23,46% za primerane náročné, 3,7% za nenáročné a 8,46% neodpovedalo na túto otázku. Študenti, ktorí ukončili predmet Matematika I kladne hodnotili systematickú prácu počas semestra. Pri príprave na skúšku im systematická príprava na cvičenia veľmi pomohla v 59,57% a viac pomohla ako nepomohla v 40,43%. 28 študentov skúšku neurobilo a na otázku, prečo ju nerobili, 25% odpovedalo, že mali slabé základy stredoškolskej matematiky, 46,43% podcenilo prípravu na skúšku. Odpoveďou zvyšných študentov bolo, že nevedia, resp. mali dojem, že bolo veľa učiva a príklady na skúške boli náročnejšie ako boli na cvičeniach a prednáškach.

V závere dotazníka mali študenti možnosť napísať ich námety

- a) čo by chceli zmeniť na prednáškach a cvičeniach
- b) ako by sa dala vylepšiť systematická práca počas semestra
- c) čo by im pomohlo pri príprave na skúšku
- d) iné

Túto časť dotazníka vyplnilo iba 39 študentov, čo je 48,15% respondentov. Vyhodnotenie:

a)

14 študentom systém práce na cvičeniach a prednáškach vyhovoval, ďalšie odpovede, ktoré sa vyskytli, napr. zmeniť obsah učiva, zmeniť cvičiaceho, spomaliť tempo a znížiť objem učiva, viac precvičovať a opakovať, viac hodín prednášok a cvičení, urýchliť tempo na cvičeniach, viac povinných úloh s vlastnými zadaniami, viac písomiek, viac vzorových príkladov, zmeniť čas prednášok z 8,00 hod. aspoň na 10,00 hod.... Sú to odpovede jednotlivcov, vyskytli sa maximálne dvakrát. Štyria študenti sa nevyjadrili.

b)

21 študentov sa nevyjadrilo, 6 študenti súhlasili s metódami práce popísanej v experimente, 6 chcelo viac kontroliek a krátkych písomiek a ojedinelé odpovede typu, viac domácich úloh, resp. zadávanie domácich úloh tak, aby každý študent mal iné zadanie a ich dôsledná kontrola.

c)

20 študentov požaduje viac riešiť podobné príklady, aké budú na skúške (hoci vzorové príklady sa riešia na prednáškach a cvičeniach), prípadne zverejniť vzorovo riešené príklady, dokonca niektorí (4 študenti) požadujú zverejnenie príkladov a testov, ktoré môžu byť na niektorom z termínov skúšky. Niektorí sú sebakritickí a vyjadrili sa, že prednášky a cvičenia boli v poriadku a prípravu na skúšku zanedbali. 11 študentov sa nevyjadrilo.

d)

K tejto časti sa vyjadrili iba štyria študenti. Jeden sa vyjadril, že získanie zápočtu bolo veľmi jednoduché (úspešne ukončil predmet Matematika I) druhý, že veľmi ťažké – zápočet nezískal. Pripomienka ďalšieho sa týkala veľkého objemu učiva a štvrtý poukázal na skúškové testy, v ktorých sú „chytáky“. Každá otázka v teste na skúške má štyri odpovede, z ktorých môže byť správnych 0 – 4. Aby študent správne zodpovedal takúto otázku, musí rozumieť učivu.

6. Záver

Experiment, ktorý je v tomto článku popísaný nepriniesol očakávané výsledky. Aj keď pri udeľovaní zápočtu bola experimentálna skupina lepšia, aj napriek horším vstupným testom, priechodnosť na skúške však bola horšia. V porovnaní so vstupným testom, však experimentálna skupina dosiahla lepšie výsledky. Vyhodnotili sme aj dotazník, ktorý dostali študenti experimentálnej skupiny na začiatku letného semestra, ktorý sme aj vyhodnotili. V podstate väčšina študentov kladne hodnotila systematickú prácu počas celého semestra, niektorí dokonca by chceli ešte aj viac povinných domácich úloh a kontroliek. Najviac sa dožadujú sú vzorovo riešených príkladov, ktoré sa môžu objaviť na písomnej časti skúšky. Otázka je, či preto, aby mohli skontrolovať svoje riešenia alebo aby sa ich mohli naučiť naspamäť, prípadne si ich vyriešené pripraviť a na písomnej časti skúšky ich jednoducho podstrčiť. Od začiatku akademického roka 2012/13 majú však k dispozícii skriptá Matematika I – riešené príklady, kde je dostatočné množstvo vzorovo preriešených príkladov podobných tým, aké môžu byť na skúške. Na budúci akademický rok by sme tento experiment chceli zopakovať s paralelkou, kde budú najlepšie výsledky vstupného testu.

Literatúra

- [1] ZÁHONOVÁ, V.: *Môžu študenti zvládnuť Matematiku na SjF STU v Bratislave?* Sborník z 20. seminára Dolní Lomná, 30.5. - 1. 6. 2011. - Ostrava : VŠB-Technická univerzita Ostrava, 2011. - ISBN 978-80-248-2517-5. - S. 132-136
- [2] ZÁHONOVÁ, V.: *Úspešnosť študentov v predmete Matematika I na SjF STU v Bratislave.* In: *Moderní matematické metody v inženýrství [elektronický zdroj]* : Sborník z 21. semináře. Horní Lomná, 4.6. - 6.6. 2012. - Ostrava : Vysoká škola báňská – Technická univerzita v Ostravě, 2012. - ISBN 978-80-248-2883-1. - S. 148- 152

INSTRUKTÁŽNÍ VIDEA V PŘEDMĚTU TEORIE OBVODŮ II

Stanislav Zajaczek, Pavel Svoboda, Pavel Sobota, Stanislav Rusnok, Jan Unger,

Katedra elektrotechniky, Katedra elektroenergetiky VŠB-TU Ostrava

17. listopadu, 708 33 Ostrava-Poruba

E-mail : stanislav.zajaczek@vsb.cz, pavel.svoboda1@vsb.cz, pavel.sobota@vsb.cz,
stanislav.rusnok@vsb.cz, jan.unger@vsb.cz

Abstrakt: Článek popisuje vytvoření instruktážního videa přechodného děje, včetně tvorby scénáře a postup při jeho natáčení. Přechodný děj je jednou z kapitol předmětu Teorie obvodů II. Tato videa jsou zaměřena převážně pro studenty distanční a kombinované formy studia.

Abstract: The article describes creation of instructional videos about transients in electrical circuits, including the creation of scenarios and procedures for the shooting. Transients in EC is one chapter of the subject Circuit Theory II. These videos are aimed mainly for students of distance learning and part-time study.

1. Úvod

V článku je popsána tvorba videí v distanční výuce předmětů Teorie obvodů II. Celý systém je zpracován tak, aby vyhověl distanční, kombinované i prezenční formě studia. Tento předmět se vyučuje v 1. ročníku bakalářských studijních programů Elektrotechnika a Mechatronika.

Pro předmět Teorie obvodů II je připraveno doposud pět kapitol: Trojfázové obvody, Přechodné jevy, Dvojbrany, Zesilovače a Klopné obvody. Student má také k dispozici složku nazvanou Poznámky, kde může sdělit své osobní názory na daný projekt. Každá z těchto kapitol je dále dělena do pěti podkapitol. První je Zadání, zde mají studenti zadání, prezentaci a realizaci studie. Další je Virtuální laboratoř. Zde si mohou studenti pomoci počítačové simulace nasimulovat měření. V kapitole Prezentace jsou ukázky jak má student prezentovat sebe a svou práci. Kapitola řízený výklad je charakteristická tím, že student může konfrontovat svoje názory s výkladem pedagoga. Poslední kapitolou je Video. Zde jsou natočeny instruktážní videa k jednotlivým kapitolám.

V současné době máme natočeny videa k trojfázovým obvodům, přechodným jevům a dvojbranům. Dále videa zaměřená na to jak má student pracovat se zdroji napětí nebo měřicími přístroji. A také už máme natočeny některá videa do předmětu Teorie obvodů I. Na zbývajících se v současné době pracuje. Pro prezentaci naší práce jsem si vybral natáčení videa z kapitoly nazvané Přechodné jevy.

2. Scénář

Před samotným natáčením videa je nezbytné vypracovat scénář, který je založen na předchozí analýze studované látky. Museli jsme si uvědomit, co chceme studentovi prezentovat.

Scénář je rozdělený do několika částí. Scénář obsahuje cíl, popis prostředí, verbální projev, pokyny kameramanovi, činnost předvádějícího, údaje o nastaveném pracovním režimu zařízení a předpokládaná stopage. Cílem vymezujeme, s čím bude student po shlédnutí videa seznámen. Popisem prostředí specifikujeme rozložení součástek, generátoru a měřících přístrojů. Verbálním projevem rozlišujeme hlas nezabíraného řečníka a akustický projev zabíraného řečníka, který dělíme na řeč při pohledu řečníka do kamery a bez pohledu řečníka do kamery. V pokynech kameramanovi stanovujeme záběry celkové a detailní na vymezené objekty a studenta. Text scénáře je barevně rozlišen kvůli lepší orientaci. Hnědou barvou je řeč učitele, bez záběru kamery. Modrou barvou jsou označeny věty, při kterých se řečník dívá do kamery. Červenou barvou jsou označeny věty, které řečník říká bez pohledu do kamery. Tučně jsou popsány úkony studenta. Zelenou barvou jsou znázorněny technické poznámky pro doplnění scénáře a orientaci na pracovním stole.

Po napsání prvního scénáře a natočení zkušebního videa a jeho shlédnutí jsme se rozhodli scénář přepracovat. Na posuzování videa a scénářů jsme měli oponenty, podle nich jsme postupně přepracovávali scénář. Takhle jsme postupovali, dokud nedostal konečnou podobu. Například jsme vynechali pasáž zapojení obvodu a soustředili se na to, aby student pochopil základní principy. Poslední slovo v tomto projektu však budou mít sami studenti. Jak již bylo řečeno v úvodu. Do složky Poznámky, může student psát své připomínky a hodnocení k jednotlivým kapitolám. Ty budou postupně vyhodnocovány. Pro porovnání je níže uveden scénář ve své dosavadní finální podobě.

Zapojení LC článku

Cíl: Naučit studenta - zapojit LC článek,
- rozlišit vedené a vlastní kmity
- používat zdroj napětí
- používat osciloskop

Akteři: učitel – U, student – S, kameraman - K, prostředí – P, rekvizity – R

Situace: U pouze hlas, S obraz, hlas

R: Cívka, kondenzátor, Zdroj napětí, osciloskop, vodiče.

P- na stole je připravena cívka s železným jádrem, kondenzátor, zdroj napětí, osciloskop, příslušný počet vodičů.

Přímou řeč označujeme barvami:

Hnědou – pouze hlas, bez záběru řečníka,

Modrou – pohled řečníka do kamery,

Červenou – bez pohledu řečníka do kamery

Zelenou - poznámky

KLAPKA:

**stopage: odhadovaná 120 vteřin
skutečná 103 vteřiny**

K: Záběr na pracoviště, včetně studenta

U(hnědý text): „Každý student přichází do laboratorních cvičení připraven. Umí rozlišit vedené a vlastní kmity.“

S(tučný text): **Mluví a zároveň ukazuje už zapojený obvod.**

K: Záběr na zapojení cívky a kondenzátoru a poté na generátor a zůstane na něm.

S(červený text): „Vlastní kmity je vhodné modelovat sériovým zapojením cívky a kondenzátoru, jako odezvu na skokové změny napětí, které budíme generátorem.“

K: Zabírá generátor.

S(tučný a zelený text): **Zapne generátor**, (je už nastaven na napětí $U_{pp}=3\text{ V}$ s periodou 5 milisekund) **a ukáže na přepínač obdélníkového průběhu.**

S(červený text): „Na generátoru nastavíme obdélníkový průběh napětí.“

K: Zabírá osciloskop.

S(tučný a zelený text): **Ukáže na monitor zapnutého osciloskopu**, který má nastavenou časovou základnu 2 ms/dílek, napěťový rozsah zeleného kanálu na maximum a napěťový rozsah hnědého kanálu 100 mV/dílek.

S(červený text): „Osciloskopem zobrazíme průběh napětí kondenzátoru.“

S(tučný text): **Postupně ukazuje zobrazené vedené a vlastní kmity.**

S(červený text): „Na vedených obdélníkových kmitech napětí je nasuperponováno napětí tlumených

S(tučný text): **Přepne časovou základnu osciloskopu.**

S(červený text): „Pro přesnější zjištění doby period kmitů nyní změním časovou základnu osciloskopu z hodnoty dvě na jednu milisekundu na dílek.“

S(tučný text): **Na monitoru osciloskopu ukazuje dobu periody vedeného obdélníkového průběhu napětí**

S(červený text): „Doba periody vedeného obdélníkového průběhu napětí je 5 milisekund ...“

S(tučný text): **Na monitoru osciloskopu ukazuje dobu periody napětí tlumených vlastních kmitů obvodu.**

S(červený text): „... a doba periody napětí tlumených vlastních kmitů obvodu je 0,46 milisekundy.“

S(tučný text): **Na monitoru osciloskopu ukazuje dobu periody napětí tlumených vlastních kmitů obvodu.**

S(červený text): „... a doba periody napětí tlumených vlastních kmitů obvodu je 0,46 milisekundy.“

S(tučný text): **Na monitoru osciloskopu naznačuje obalovou křivku napětí tlumených vlastních kmitů obvodu.**

S(červený text): „Hodnota činitele tlumení vlastních kmitů obvodu je minus 350 s^{-1} “

S(modrý text): „Hodnota kmitočtu vlastních kmitů obvodu je vždy menší než hodnota kmitočtu rezonančních kmitů téhož obvodu a není harmonickou vedených kmitů.“

KONEC

3. Popis měření

Na pracovní desce jsou do série zapojeny cívka a kondenzátor. Jsou připojeny ke zdroji napětí. Paralelně ke kondenzátoru je připojen osciloskop. Osciloskopem měříme vedené a vlastní kmity. Měříme je následujícím způsobem. Zapneme generátor a přepneme na něm obdélníkový impulz napětí. Na němž jsou nejlépe viditelné vedené a vlastní kmity obvodu. Přepnutím rozsahu můžeme přesněji zjistit dobu periody a také můžeme stanovit činitele tlumení vlastních kmitů.

4. Tvorba videa

Jak již bylo zmíněno výše, tyto video sekvence slouží pro studenty distanční, kombinované i prezenční formě studia. Proto jsme si před natáčením stanovili jisté meze. Snahou bylo dané úlohy co nejvíce zjednodušit. Tedy nezahlcovat studenta přívalem spousty nových informací, ale soustředit jeho pozornost na podstatu daného problému. Dále jsme se snažili prezentovat videa co nejpřehledněji, jedná se především o co možná nejpřehlednější rozložení měřících přístrojů a přípravků na pracovním stole (Obr. 1). Rozhodli jsme se, že délka videa by neměla překročit 180

sekund. Vycházíme z předpokladu, že delší video sekvence jsou náročnější na udržení pozornosti.

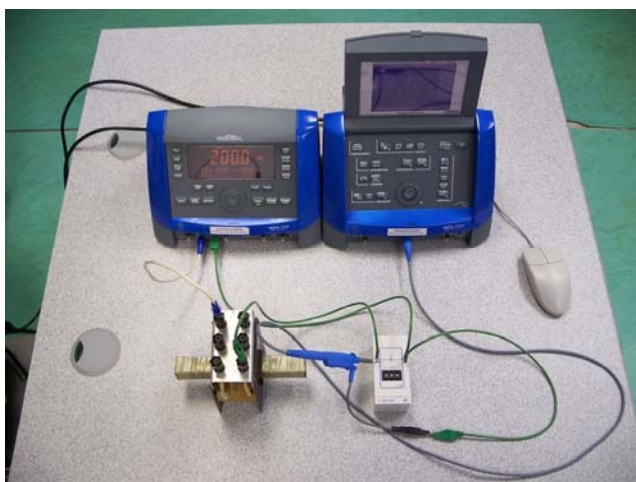
Samotná realizace spočívá v tom, že před kamerou je v našem případě studentka, která provádí daná měření. První věta patří vždy učiteli, který uvede studenta do problematiky a motivuje ho k jejímu zvládnutí. Učitel není zabírán kamerou, na záznamu je pouze učitelův hlas. Poté začne student provádět měření podle scénáře. Některé věty student říká na kameru, ve scénáři jsou označeny modře. Na tyto věty je kladen důraz a měly by tak být lépe zapamatovatelné. Červeně jsou označeny věty, které student říká v průběhu měření. Tyto věty popisují studentovu činnost se součástkami a měřícími přístroji. Po celou tu dobu kamera zabírá studenta a pracovní stůl. Pro prezentaci naměřených výsledků zabírá kamera v tomto případě pouze obrazovku osciloskopu.

Student ukazovátkem ukazuje na obrazovce osciloskopu vlastní a vedené kmity a tyto přitom slovně popisuje. Poté přepne časovou základnu osciloskopu, pro názornější zobrazení

průběhu. Na obrazovce osciloskopu ukazuje a k tomu slovně popisuje dobu periody napětí tlumených vlastních kmitů obvodu a také hodnotu činitele tlumení vlastních kmitů obvodu.

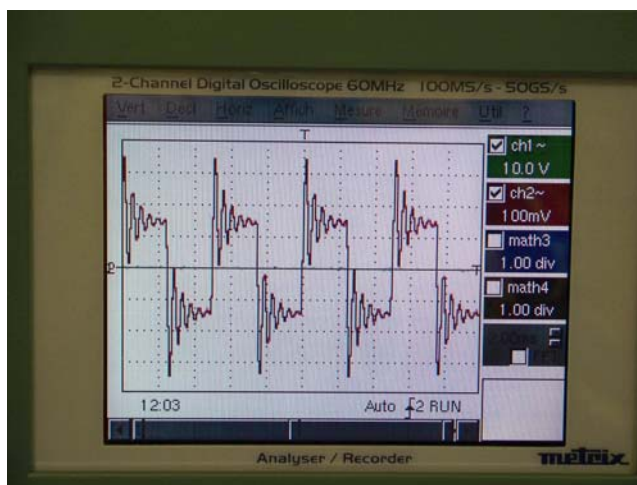
5. Využití videa videa pro výuku

Další velký přínos videa vidíme v utváření problémových úloh pro studenty. Například: „Popište co je zobrazeno na snímku., xx“ „Stanovte periodu a kmitočet zobrazeného průběhu“, „Sestavte matematický model charakterizující naměřený průběh.“, „Nakreslete náhradní schéma zapojení zobrazeného jevu.“, „Určete hodnotu činitele tlumení vlastních kmitů.“, atd.



Obr 1. Zapojený obvod

Natočili jsme také instruktážní návody na manipulaci s měřicími přístroji. Student je v nich seznámen s ovládacími prvky jednotlivých přístrojů, které jsou používány při měření. To znamená, že i student distanční formy studia, u kterého se předpokládá, že s těmito přístroji nepřijde do styku, by měl mít představu o manipulaci s těmito měřicími přístroji. Součástí vedení studenta k odborné tvůrčí činnosti jsou prezentace samostatných prací studentem zpracovaných v PowerPoint a jejich obhajoba. Je požadována jedna prezentace v češtině a jedna prezentace v cizím jazyku, obvykle v angličtině. V pracovním sešitu jsou v obou jazycích natočena videa ukázek prezentací, v nichž student prezentaci v PowerPointu promítá dataprojektorem na plátno a doprovází nečteným slovním projevem v příslušném jazyce.



Obr 2. Výsledky na osciloskopu

6. Závěr

Všechny natočené video sekvence i scénáře byly posuzovány oponenty a následně dle jejich připomínek přepracovány. Ale tím naše práce zdaleka neskončila, hlavním oponentem budou totiž až sami studenti. Jsme teprve na začátku své cesty, proto chceme pružně reagovat na připomínky a kritiky studentů, a pomocí nich zdokonalit tento projekt.

Budoucnost takového systému výuky vidím v tom, že nedělá ze studentů „otroky“, studenti se sami mohou rozhodnout co se mají naučit a tím se vlastně sami i ohodnotí. Učitel jim v tomto případě nabídne pouze možnost volby. Na studenty se tedy přenáší odpovědnost se sám rozhodnout.

Oznámení

Příspěvek byl zpracován s podporou projektu SGS SP 2013/47 a grantu KONTAKT II : LH 11125. Za podporu autoři děkují.

Literatura

[1] Internetové stránky VŠB – TU, <http://portal.vsb.cz/vsb/>

O autorech...

Stanislav ZAJACZEK (Ing.), narozen 1978 v Havířově. Vystudoval na katedře elektrických strojů a přístrojů na VŠB-TU Ostrava (2003 – Ing.), od října 2006 odborný asistent na katedře teoretické elektrotechniky. Ve vědecké oblasti se zabývá problematikou tvarové optimalizace.

APPLICATION OF ACCESSIBILITY AND RELIABILITY INDICES FOR ANALYSIS OF THE FAILURE FREQUENCY OF MACHINES IN A PRODUCTION ENTERPRISE

Michał Zasadzień

Institute of Production Engineering, Silesian University of Technology
ul. Roosevelta 26, 41-800 Zabrze
E-mail: michal.zasadzien@polsl

Abstrakt: In the article the results of investigations into the failure frequency of crucial machines in a selected production enterprise manufacturing pre-insulated pipes for the needs of the heat generating industry have been presented. The analyses of failure frequency were conducted using the indices of accessibility, effectiveness and efficacy based on measures applied in the plant, i.e. the working time, duration of a failure and duration of failure removal. Two machines as well as their mechanical and electrical systems were subjected to analysis. The research results allowed identifying weak points of the maintenance process and enabled formulating recommendations for improvement measures.

Introduction

All technical devices are objects which are subject to damage, but it is important not only to restore their usability after damage, but also increase their reliability [1].

Shortening the duration of downtimes caused by failures and, in consequence, prolonging the time of failure-free work is not possible without identifying crucial machines for the production process as well as the most crucial elements and systems of machines which break down most often or breakdown removal is long and expensive. Finding the weakest spots of major technical means will make it possible to better manage material and non-material resources as well as prevent breakdowns in a more effective way [2].

Investigations were conducted in a production enterprise manufacturing pre-insulating pipes for the needs of the heat engineering branch. Two crucial machines in the production process were chosen for analysis, namely extruders of plastics, used for producing external protective jackets from such materials as low-density polypropylene (PE-LD) and high-density polypropylene (PE-HD).

Calculation of indexes

The indexes of availability, effectiveness and efficacy were calculated by means of the following values available in the IT system for the support of maintenance works:

ET – average effective time of work = 28800 minutes in a month;

DT – downtime;

TW – time before repair is undertaken;

TR – duration of repair,

An analysis was carried out for whole machines as well as for their major systems: mechanical and electrical. The values of downtimes and the number of recorded breakdowns have been presented in Table 1.

Table 1
Values of indexes included in the analysis

Line labels	Average DT	Average TW	Average TR	Number of failures
Extruder 1	237.47	101.42	136.05	112
Electrical failure	249.10	93.04	156.06	71
Mechanical failure	217.34	115.93	101.41	41
Extruder 2	301.31	139.77	161.54	168
Electrical failure	391.24	167.81	223.43	79
Mechanical failure	221.48	114.89	106.60	89

The non-parametric Mann-Whitney U test was used to check if particular results for each of the tools differed significantly from each other [3]. Calculations were carried out by means of Statistica 10 programme. The zero hypothesis was rejected when the level of significance p was no higher than 5%. The results of particular statistics are presented in Tables 2-5.

Table 2
The Mann-Whitney Test for all failures

Zmienna	Sum.rang Ekstruder 1	Sum.rang Ekstruder 2	U	Z	p	Z popraw.	p
DT	13836,50	26066,50	7395,500	-3,20744	0,001339	-3,23427	0,001220
TW	14601,00	25302,00	8160,000	-2,06826	0,038617	-2,07578	0,037915
TR	10785,50	29117,50	4344,500	-7,75372	0,000000	-8,15990	0,000000

(Zmienna – Variable, popraw. – corrected, Sum. rang – rank sum)

Table 3
The Mann-Whitney Test for mechanical failures

Zmienna	Sum.rang Ekstruder 1	Sum.rang Ekstruder 2	U	Z	p	Z popraw.	p
DT	2461,000	6054,000	1600,000	-1,12232	0,261728	-1,13652	0,255738
TW	2633,000	5882,000	1772,000	-0,260538	0,794449	-0,261752	0,793513
TR	1965,000	6550,000	1104,000	-3,60745	0,000309	-3,96429	0,000074

(Zmienna – Variable, popraw. – corrected, Sum. rang – rank sum)

Table 4
The Mann-Whitney Test for electrical failures

Zmienna	Sum.rang Ekstruder 1	Sum.rang Ekstruder 2	U	Z	p	Z popraw.	p
DT	4578,500	6746,500	2022,500	-2,94163	0,003265	-2,96453	0,003032
TW	4748,500	6576,500	2192,500	-2,30174	0,021351	-2,31027	0,020874
TR	3609,000	7716,000	1053,000	-6,59091	0,000000	-6,86594	0,000000

(Zmienna – Variable, popraw. – corrected, Sum. rang – rank sum)

The obtained values of downtimes allowed determining the most important indexes necessary for characterising the failure frequency of the crucial machines. The following were calculated: technical availability, effectiveness and efficacy.

Technical availability indicates the percentage of the effective time during which the machine worked without a failure. It is determined by the following formula [4]:

$$AT = \frac{ET - DT}{ET} \times 100\% \quad (1)$$

Efficacy indicates what percentage of downtimes is taken by delays in the undertaking of repair works. This delay may result from the unavailability of employees, spare parts, consumables or from administrative and organisational activities. Efficacy is expressed by the following formula:

$$E = \frac{DT - TW}{DT} \times 100\% \quad (2)$$

Effectiveness should be understood as a fraction of downtime devoted to works related to failure removal. This time includes activities of maintenance workers directly connected with failure removal and may depend on the competencies, knowledge and efficiency of employees

$$S = \frac{DT - TR}{DT} \times 100\% \quad (3)$$

Analysis of results

Figure 1 presents the values of particular components of downtimes caused by breakdowns. It contains a comparison of both crucial machines with their division into mechanical and electrical ones.

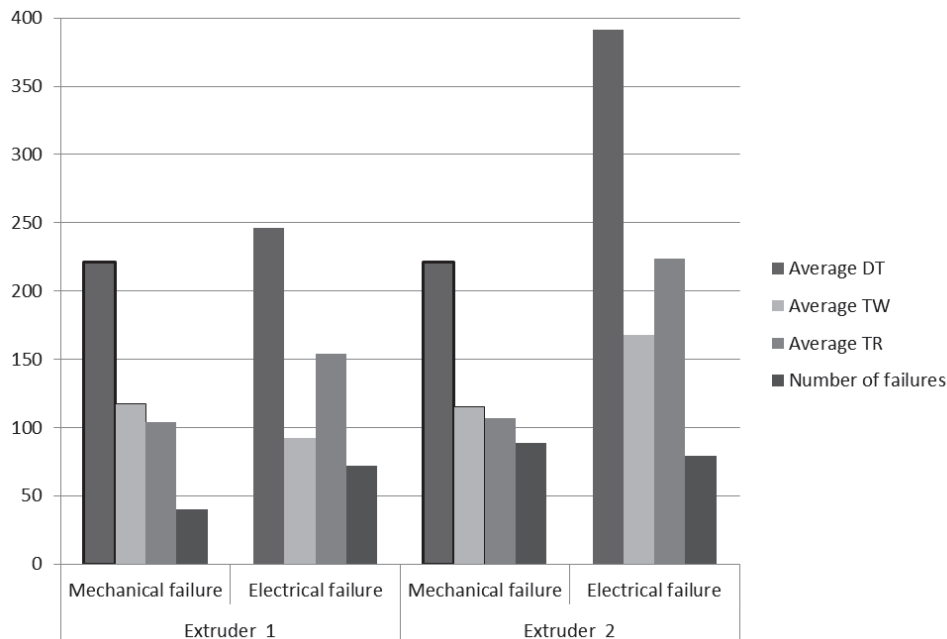


Fig. 1. The values of downtimes of the examined extruders and their systems

It can be seen (Fig 1 and Tab. 1) that extruder 2 is a more unreliable machine. This is indicated by the number of failures and downtimes. It can also be noticed that failure removal times and delays in the undertaking of repair works are longer. Extruder 2 is definitely more unreliable in mechanical terms. The number of electrical failures reaches a comparable level. Failure removal efficiency for the mechanical system is comparable for both extruders, which is proved by the statistics contained in Table 3. On the other hand, electrical failures are removed faster in the case of extruder 1.

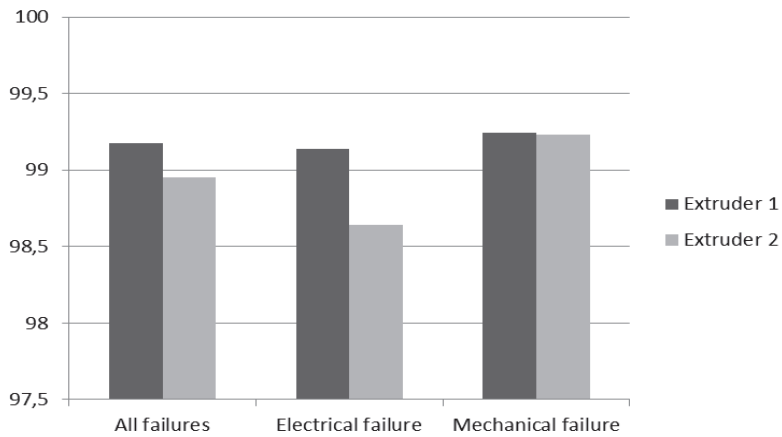


Fig. 2. Availability index values for the examined extruders

The value of availability index for extruder 1 is greater (Fig. 2). This is influenced mainly by the value of electrical system availability. The mechanical system availability reaches a comparable level.

Figures 3 and 4 contain a graphic presentation of the efficacy and effectiveness indexes for the examined extruders as well as for their mechanical and electrical systems.

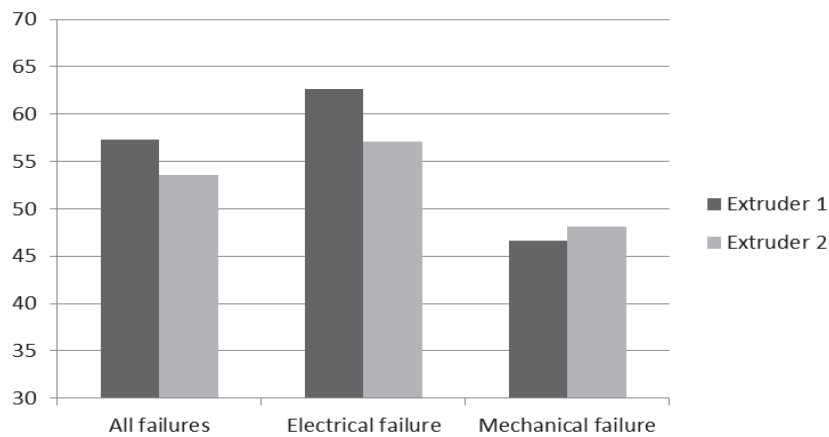


Fig. 3. Efficacy index values for the examined extruders

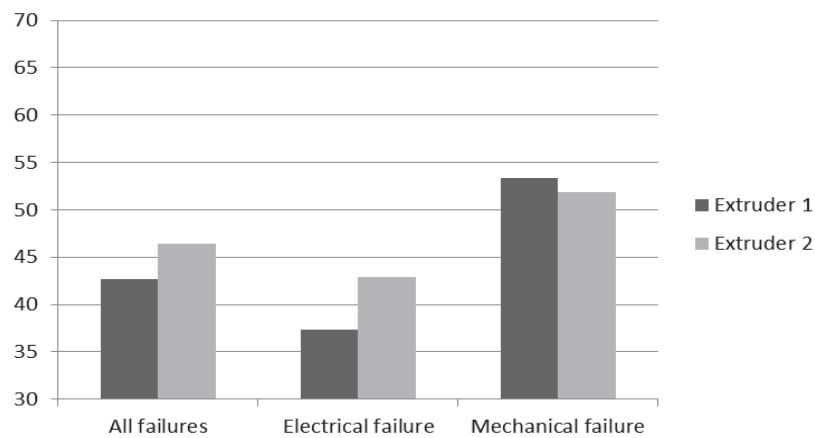


Fig. 4. Effectiveness index values for the examined extruders

As can be seen on the charts presented in Figures 3 and 4, preparatory works for both extruders last longer than failure removal. This is most visible in the case of electrical failures. In the case of mechanical failures the time of delay and works is evenly distributed. In the case of extruder 1, the time of delay is longer than for extruder 2.

Conclusions

1. Extruder 2 is a significantly more unreliable machine than extruder 1. This is indicated by: the number of failures, downtimes and the resulting availability index.
2. In the case of mechanical failures there are no significant differences in the times of DT, TW and TR, and the time of failure removal is longer than the time of delay in the undertaking of works.
3. The duration of downtimes, delays and work for the electrical system of extruder 2 is significantly longer than analogical times measured for extruder 1.
4. The decreased availability of extruder 2 was most significantly influenced by the length of downtimes caused by electrical system failures.
5. In order to increase the availability of extruder 2, first of all it is necessary to analyse the reasons for delays in the undertaking of repair works and the length of electrical system failure removal time as well as take preventive measures, decreasing the number of mechanical breakdowns.

References

- [1] Słowiński B.: Inżynieria eksploatacji maszyn. Koszalin University of Technology. Koszalin 2011.
- [2] Skotnicka-Zasadzień B. Biały W.: Zastosowanie narzędzi zarządzania jakością do oceny awaryjności urządzeń górniczych, *Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability* 3, 2011, pp. 51-55.
- [3] Stanisław A., *Przystępny kurs statystyki z zastosowaniem programu STATISTICA PL na przykładach z medycyny*, vol. I. StatSoft. Kraków, 2006.
- [4] Loska A.: Przegląd modeli ocen eksploatacyjnych systemów technicznych [at:] Knosala R. (red.): *Komputerowo zintegrowane zarządzanie*. Oficyna Wydawnicza PTZP, Opole 2011. pp 37–46.

Seznam účastníků

Mgr. Richard Andrášik	PřF UP Olomouc	andrasik.richard@gmail.com
Henryk Badura	CKI Rybnik	henryk_badura@o2.pl
Doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.	MFF UK Praha	becvar@karlin.mff.cuni.cz
Ing. Josef Bednář, Ph.D.	ÚM FSI VUT Brno	bednar@fme.vutbr.cz
Mgr. Jana Bělohávková	KMDG VŠB - TU Ostrava	jana.belohlavkova@vsb.cz
Dr. Hab. Inž. Witold Bialy	PS Gliwice	witold.bialy@polsl.pl
Doc. RNDr. Zdeněk Boháč, CSc.	KMDG VŠB - TU Ostrava	zdenek.bohac@vsb.cz
RNDr. Marie Budíková, Dr..	PřF MU Brno	budikova@math.muni.cz
Mgr. Dagmar Dlouhá, Ph.D.	KMDG VŠB - TU Ostrava	dagmar.dlouha@vsb.cz
Dr. Krzysztof Dłutek	PS Gliwice	krzysztof.dlutek@polsl.pl
RNDr. Milan Doležal, CSc.	KMDG VŠB - TU Ostrava	milan.dolezal@vsb.cz
Ing. Hana Doležalová, Ph.D.	ÚGN AV ČR Ostrava	hana.dolezalova@ugn.cas.cz
Doc. RNDr. Jarmila Doležalová, CSc.	KMDG VŠB - TU Ostrava	jarmila.dolezalova@vsb.cz
Mgr. Radka Hamříková	KMDG VŠB - TU Ostrava	Radka.Hamrikova@vsb.cz
Mgr. Jana Hoderová, Ph.D.	ÚM FSI VUT Brno	hoderova@fme.vutbr.cz
Mgr. Inž. Agata Juszccak	PS Gliwice	jusz.agata@gmail.com
Ing. Pavla Kabelíková, Ph.D.	FEI VŠB - TU Ostrava	pavla.kabelikova@vsb.cz
RNDr. Zdeněk Kalousek, CSc.	FP TU Liberec	zdenek.kalousek@tul.cz
Doc. Dr. Mgr. Ivan Kolomazník	KMDG VŠB - TU Ostrava	ivan.kolomaznik@vsb.cz
Dr. Inž. Zygmunt Korban	PS Gliwice	zygmunt.korban@polsl.pl
RNDr. Jan Kotůlek, Ph.D.	KMDG VŠB - TU Ostrava	jan.kotulek@vsb.cz
Dr Hab. Inž. Stanisław Kowalik, prof.	WSB Dąbrowa Górnicza	skowalik@wsb.edu.pl
RNDr. Břetislav Krček, CSc.	KMDG VŠB - TU Ostrava	bretislav.krcek@vsb.cz
Doc. RNDr. Pavel Kreml, CSc.	KMDG VŠB - TU Ostrava	pavel.kreml@vsb.cz
Doc. RNDr. Radek Kučera , Ph.D.	KMDG VŠB - TU Ostrava	radek.kucera@vsb.cz
Mgr. Inž. Krzysztof Kurus	PS Gliwice	krzysztof.kurus@polsl.pl

Mariusz Ligarski, PhD. Eng.	PS Gliwice	Mariusz.Ligarski@polsl.pl
Dr. Inż. Anna Manowska	PS Gliwice	amanowska@polsl.pl
Doc. RNDr. Bohumil Maroš, CSc.	ÚM FSI VUT Brno	maros@fme.vutbr.cz
Dr. Inż. Krzysztof Michalski	PS Gliwice	krzysztof.michalski@polsl.pl
Dr. Inż. Katarzyna Midor	WSFP Bielsko-Biała	katarzyna.midor@polsl.pl
Dr. Inż. Michał Molenda	PS Gliwice	michal.molenda@polsl.pl
Mgr. Zuzana Morávková, Ph.D.	KMDG VŠB - TU Ostrava	zuzana.moravkova@vsb.cz
Dr. Joanna Napiórkowska-Sitko	Opole University	jn@math.uni.opole.pl
Prof. RNDr. Vladislav Navrátil, CSc.	PdF MU Brno	navratil@ped.muni.cz
Ing. Luděk Nechvátal, Ph.D.	ÚM FSI VUT Brno	nechvatal@fme.vutbr.cz
PhDr. Jiřina Novotná, Ph.D.	PdF MU Brno	novotna@ped.muni.cz
Mgr. Zdeněk Opluštěl, Ph.D.	FSI VUT Brno	oplustil@fme.vutbr.cz
Dr. Inż. Dariusz Pączko	PS Gliwice	Dariusz.Paczko@polsl.pl
RNDr. Radomír Paláček, Ph.D.	KMDG VŠB - TU Ostrava	radomir.palacek@vsb.cz
RNDr. Marie Polcerová, Ph.D.	FCH VUT Brno	polcerova@fch.vutbr.cz
Dr. Inż. Marek Profaska	PS Gliwice	marek.profaska@polsl.pl
Mgr. Lenka Příbylová	FEI VŠB - TU Ostrava	lenka.pribylova@vsb.cz
Ing. Stanislav Rusnok	FEI VŠB - TU Ostrava	s.rusnok@email.cz
Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.	KMDG VŠB - TU Ostrava	petra.schreiberova@vsb.cz
Jerzy Scierski, PhD. Eng.	PS Gliwice	jerzy.scierski@polsl.pl
Dr. Inż. Stefan Senczyna	WSFP Bielsko-Biała	stefan.senczyna@prolog.com.pl
Dr. Inż. Jacek Sitko	PS Gliwice	jsitko@polsl.pl
Mgr. Pavel Skalný	FEI VŠB - TU Ostrava	pasqual@seznam.cz
Dr. Inż. Božena Skotnická – Zasadzień	PS Gliwice	bozena.skotnicka@polsl.pl
RNDr. Dana Smetanová, Ph.D.	VŠTE České Budějovice	smetanova@mail.vstecb.cz
Ing. Pavel Sobota	FEI VŠB - TU Ostrava	sob133@vsb.cz
Mgr. Jakub Stryja, Ph.D.	KMDG VŠB - TU Ostrava	jakub.stryja@vsb.cz
Ing. Pavel Svoboda	FEI VŠB - TU Ostrava	svoboda86@seznam.cz
Dr. Inż. Bartosz Szczęśniak	PS Gliwice	bartosz.szczesniak@polsl.pl

Mgr. Martina Štěpánová	MFF UK Praha	martinastepanova@centrum.cz
Dr. Leszek Tarasiński	WSFP Bielsko-Biała	leszek.tarasinski@pr.radom.pl
Ing. Pavel Tomášek	ÚTB Zlín	tomasek@fai.utb.cz
Ing. Petr Tomášek, Ph.D.	ÚM FSI VUT Brno	tomasek@fme.vutbr.cz
Ing. Jan Unger	FEI VŠB - TU Ostrava	jenda.unger@seznam.cz
RNDr. Petr Volný, Ph.D.	KMDG VŠB - TU Ostrava	petr.volny@vsb.cz
Dr. Inż. Juliusz Stanisław Wojcik	PS Gliwice	juliusz.stanislaw.wojcik@polsl.pl
Dr. Hab. Inż. Radosław Wolniak	PS Gliwice	rwolniak@polsl.pl
RNDr. Viera Záhonová, CSc.	SjF STU Bratislava	viera.zahonova@stuba.sk
Ing. Stanislav Zajacek, Ph.D.	FEI VŠB - TU Ostrava	stanislav.zajazek@vsb.cz
Dr. Inż. Michał Jerzy Zasadzień	PS Gliwice	michal.zasadzien@polsl.pl
Mgr. Jitka Zatočilová, Ph.D.	ÚM FSI VUT Brno	zatocilova@fme.vutbr.cz



Využití GeoGebry ve výuce matematiky a geometrie

Workshop na konferenci 3μ 2013

Horní Lomná, 3. – 5. června 2013

Jana Bělohlávková
Dagmar Dlouhá
Zuzana Morávková
Radka Hamříková
Radomír Paláček
Petra Schreiberová
Petr Volný

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB - TU Ostrava

Co je GeoGebra?

GeoGebra je volný a multiplatformní dynamický software pro všechny úrovně vzdělávání, neboť spojuje geometrii, algebru, tabulky, znázornění grafů, statistiku a infinitezimální počet, to vše v jednom balíčku. Tento program získal četná ocenění pro vzdělávací software v Evropě a USA.

- Grafika, algebra a tabulky jsou propojeny a plně dynamické
- Jednoduše použitelné uživatelské prostředí, mnohé výkonné funkce
- Autorizační nástroje k vytvoření výukového materiálu na webové stránce
- Přístupné milionům uživatelů na celém světě v mnoha jazycích
- Free a open source software

<http://www.geogebra.org>

Problematika je řešena v projektu FRVŠ 1103/2013 „Vytvoření e-learningových kurzů s multi-mediálními studijními materiály pro matematické předměty na vybraných fakultách Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava“.

Co se naučíte na našem workshopu?

Kuželosečky v GeoGebře

Dagmar Dlouhá (dagmar.dlouha@vsb.cz)

V lekci si ukážeme některé základní úlohy analytické geometrie, např. vzájemnou polohu přímky a kuželosečky, tečny z vnějšího bodu ke kuželosečce. Cílem bude naučit se ovládat nástroje GeoGebry.

GeoGebra ve výuce Matematiky I a II

Radka Hamříková (radka.hamrikova@vsb.cz)

V lekci si ukážeme úlohy, které lze využít ve výuce Matematiky I a II, derivace v průběhu funkce, určitý integrál jako obsah rovinného obrazce.

Ukázka využití GeoGebry při řešení základních statistických problémů

Petra Schreiberová (petra.schreiberova@vsb.cz)

Cílem bude naučit se pracovat s nástrojem tabulky a analyzovat jednoduché statistické úlohy. Konkrétně se budeme zabývat analýzou jedné proměnné - tvorba histogramu, hledání minima a dalších číselných charakteristik.

„Art“ GeoGebra - Geometrické vzory

Radomír Paláček (radomir.palacek@vsb.cz)

Je to již několik let, kdy GeoGebra vznikla. Od té doby si podmanila mnohé z nás. Zejména učitele a některé studenty zaujala natolik, že v ní začali vytvářet své první konstrukce a posléze také animace, které jim napomáhají v rozvoji jejich představivosti a také mohou sloužit jako pomůcky při práci. Ruku v ruce se stoupajícími znalostmi a dovednostmi ovládat do hloubky GeoGebra se na YouTube začaly objevovat první tzv. „Art“ animace sloužící k potěše oka a také naznačující krásu matematiky. Na následujících dvou příkladech si ukážeme, jak snadno lze tyto výtvary konstruovat se základní znalostí softwaru a s inspirací z YouTube.

Pythagorův strom a Bézierova křivka

Jana Bělohávková (jana.belohlavkova@vsb.cz)

Pokud při práci s GeoGebrou často používáme nějakou sekvenci příkazů, vyplatí se vytvořit si pro ni zvláštní příkaz, takzvaný nástroj. Na konstrukci Pythagorova stromu a Bézierovy křivky si ukážeme, jak takový nástroj v GeoGebře vytvořit a jak ho použít.

Dynamické propojení dat mezi *Nákresnou* a *Tabulkou*

Zuzana Morávková (zuzana.moravkova@vsb.cz)

Nedílnou součástí GeoGebry je i Tabulkový procesor s obdobnými možnostmi jako má např. Excel. Ukážeme si některé ze široké škály možností dynamického propojení dat mezi *Nákresnou* a *Tabulkou*.

GeoGebra a CAS

Petr Volný (petr.volny@vsb.cz)

Od verze 4.2. byly do GeoGebry implementovány symbolické výpočty (CAS - computer algebra system). Ukážeme si některé možnosti symbolických výpočtů a manipulací v GeoGebře.



Využití GeoGebry ve výuce matematiky a geometrie

3 μ 2013

Kuželosečky v GeoGebře

Dagmar Dlouhá

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB - TU Ostrava

V lekci si ukážeme některé základní úlohy analytické geometrie, např. vzájemnou polohu přímky a kuželosečky, tečny z vnějšího bodu ke kuželosečce. Cílem bude naučit se ovládat nástroje GeoGebry.

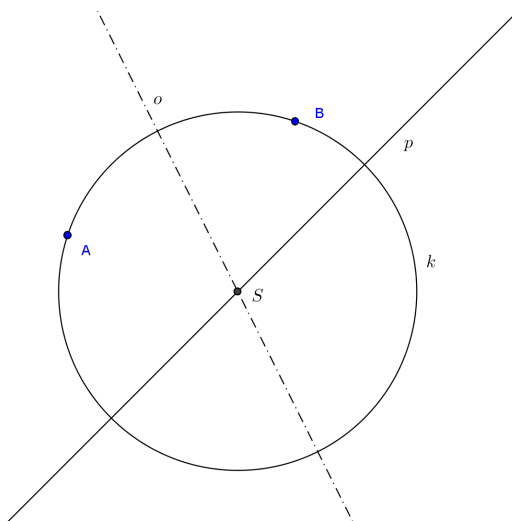
Poděkování

Příspěvek vznikl za podpory projektu FRVŠ 1103/2013 „Vytvoření e-learningových kurzů s multimediálními studijními materiály pro matematické předměty na vybraných fakultách VŠB-TUO“ a Katedry matematiky a deskriptivní geometrie.

Příklad 1: Kružnice daných vlastností

Zadání:

Určete rovnici kružnice k , která prochází body A, B a její střed S leží na přímce p .
 $A[-3; 2]$, $B[1; 4]$, $p: y = x + 1$.



Obrázek 1: Kružnice daných vlastností

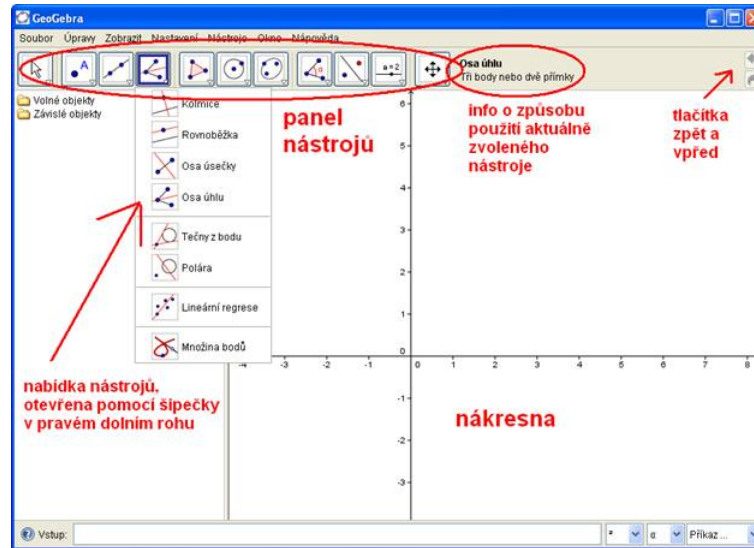
Příprava

Po spuštění programu se objeví prostředí GeoGebry .

Vkládání příkazů pomocí vstupního pole




Usnadnění práce se vstupním polem

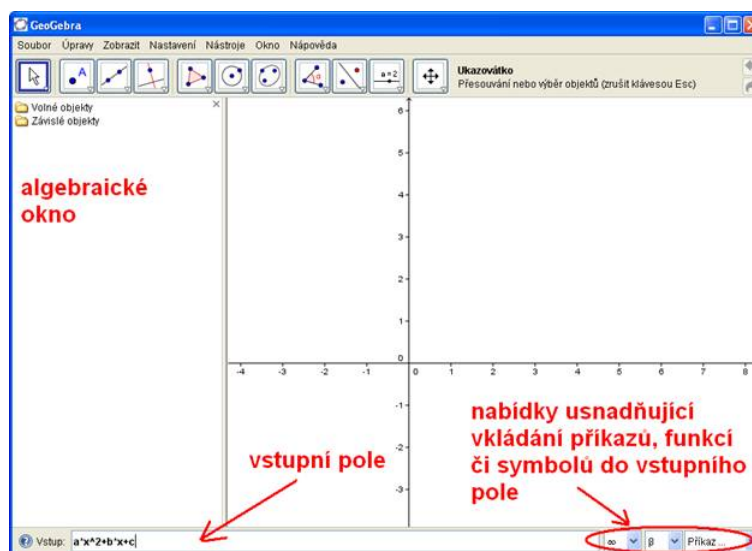
Po napsání prvních dvou písmen příkazu se tento automaticky doplňuje. Souhlasíme-li s tímto doplněním, stiskneme *Enter*, v opačném případě pokračujeme v psaní. Další informace o práci se vstupním polem získáme kliknutím na *Vstup* v levém horním rohu. Máme-li nastaven jazyk na češtinu, můžeme používat českou i anglickou verzi příkazů.



Obrázek 2: Úvodní stránka GeoGebry







Upravme si vzhled nákresny

- Osy odstraníme (či znovu navrátíme) pomocí *Zobrazit* → *Osy*.
- Nákresnu posuneme pomocí nástroje *Posunout nákresnu*  nebo tažením myši se stisknutou klávesou Shift.
- Nákresnu přiblížíme či oddálíme pomocí nástrojů *Zvětšit*  a *Zmenšit*  nebo pomocí kolečka myši.



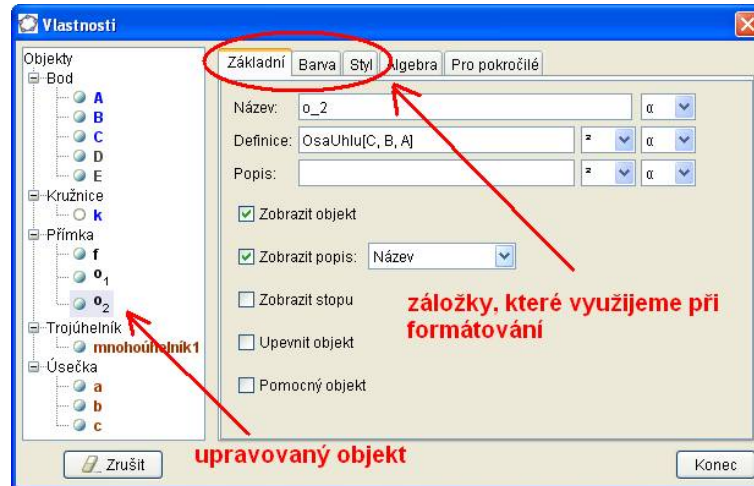
Obrázek 3: Vkládání příkazů

Konstrukce

1.		Vyneseme body A, B pomocí nástroje <i>Bod</i> .
2.		Rovnici přímky p zapíšeme do příkazového řádku.
3.		Sestrojíme osu úsečky A, B pomocí nástroje <i>Osa úsečky</i> .
4.		Střed kružnice sestrojíme nástrojem <i>Průsečík dvou objektů</i> .
5.		Ke konstrukci kružnice požadovaných vlastností využijeme nástroj <i>Kružnice daná středem a bodem</i> .
6.		Rovnici kružnice $x^2 + (y - 1)^2 = 10$ najdeme v algebraickém okně.
7.		Hotovo.

Úpravy

Vlastnosti objektů můžeme dle potřeby měnit. Lze například změnit barvy jednotlivých objektů tak, aby byl výsledný obrázek přehlednější.



Obrázek 4: Úpravy vlastností objektu

Zvolíme-li nástroj *Ukazovátka*, můžeme pohybovat objekty.

- V algebraickém okně si můžeme prohlédnout, které objekty jsou volné a které závislé.
- Hýbat můžeme volnými objekty, v tomto případě body A, B .
- Vidíme, že ostatní objekty se přizpůsobují, to je dáno jejich závislostí.

Úlohy k procvičení

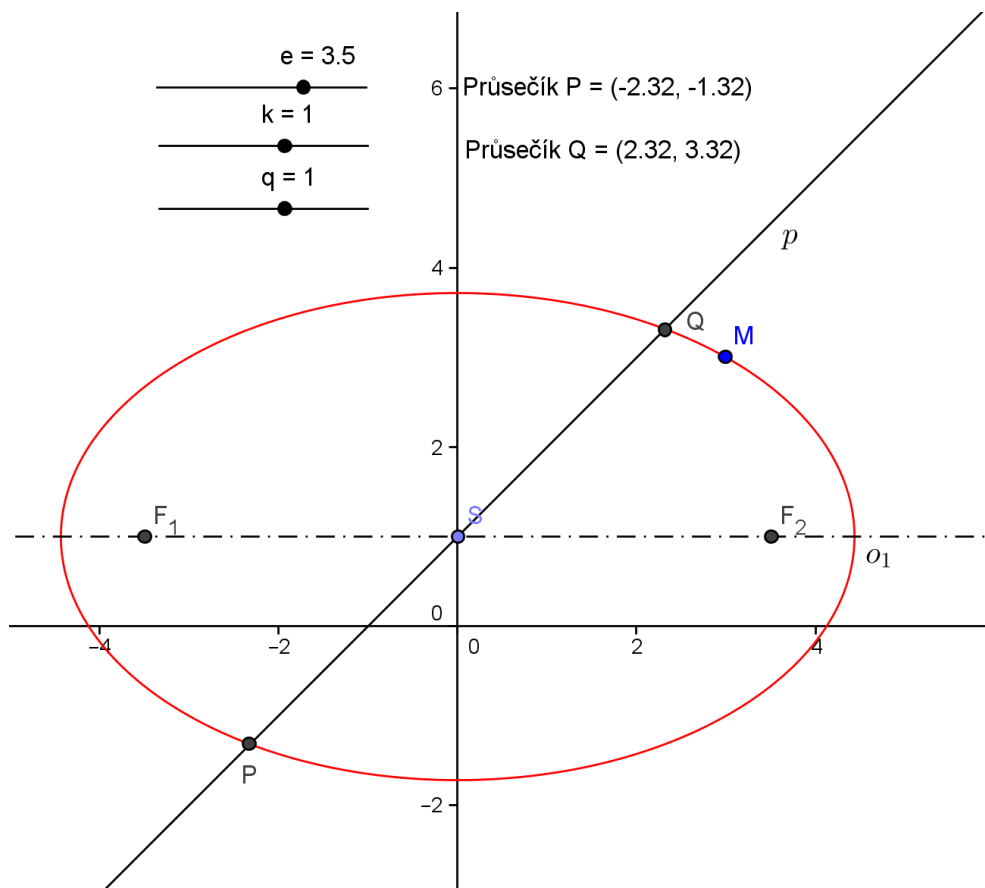
- Určete délku oblouku AB .
- Určete velikost úhlu ASB .
- Sestrojte kružnici k' osově souměrnou s kružnicí k , přičemž osou souměrnosti je přímka p .
- Sestrojte přímku p' středově souměrnou s přímkou p , přičemž středem souměrnosti je bod A .

Příklad 2: Vzájemná poloha elipsy a přímky

Zadání:

Elipsa je dána hlavní osou o_1 , středem S , excentricitou e a bodem elipsy M . Střed $S[0, 1]$, $o_1 \parallel x$, $M[3, 3]$. Přímka p je dána rovnicí $p: y = kx + q$.











Určete průsečíky přímky a elipsy v závislosti na volbě parametrů e, k, q .



Obrázek 5: Vzájemná poloha elipsy a přímky

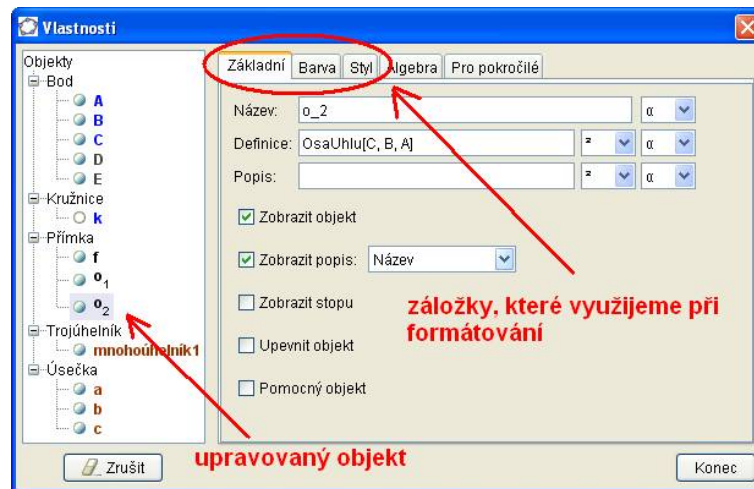
Úlohu o vzájemné poloze přímky a elipsy máme řešit v závislosti na volbě parametrů, proto e, k, q zadáme pomocí posuvníků.

Konstrukce

1.		Vyneseme souřadnice bodu S nebo je zadáme v souřadnicích do příkazového řádku $S = (0, 1)$.
2.		Hlavní poloosu sestrojíme pomocí nástroje <i>Rovnoběžka</i> .
3.		Zobrazíme a nastavíme nástroj <i>Posuvník</i> pro excentricitu e .
4.		Dále sestrojíme kružnici \mathcal{K} , danou středem S a poloměrem e , a to pomocí nástroje <i>Kružnice daná středem a poloměrem</i> . Případně můžeme zadat do vstupního pole $Kružnice[S, e]$.
5.		Ohniska $F_1, F_2 = o_1 \cap \mathcal{K}$ určíme pomocí nástroje <i>Průsečíky dvou objektů</i> .
6.		Sestrojíme bod M .
7.		Pomocí nástroje <i>Elipsa</i> sestrojíme elipsu \mathcal{E} určenou ohnisky F_1, F_2 a bodem M .
8.		Vytvoříme dva posuvníky pro koeficienty k, q .
9.	<input type="text" value="Vstup:"/>	Do příkazového řádku zadáme rovnici přímky p , tj. $y=k*x+q$.
10.		Využijeme nástroje <i>Průsečíky dvou objektů</i> k nalezení bodů společných přímce p a elipse \mathcal{E} .
11.		Hotovo.

Úpravy

Vlastnosti objektů můžeme dle potřeby měnit. Lze například změnit barvy jednotlivých objektů tak, aby byl výsledný obrázek přehlednější.




Obrázek 6: Úpravy vlastností objektu

Upravíme vzhled čar, bodů a popisků


- Pro přímku p nastavíme v záložce *Základní* položku *Zobrazit popis* na *Název & Hodnota*.
- Zadáme text, který bude popisovat souřadnice průsečíků atd., tento popis se bude dynamicky měnit spolu v závislosti na prováděných úpravách.
- Uvozovky značí statický text. Hodnotu proměnné, která se může dynamicky měnit, ohraničuje $+$.
- Do vstupního pole postupně zadáme následující:
 - "Průsečík: $P =$ " + P
 - "Průsečík: $Q =$ " + Q
- Text můžeme upravovat a formátovat ve *Vlastnostech*. Samotný text se dá změnit i po dvojkliku myší.
- Ve vlastnostech v záložce *Text* nastavíme tučnost a velikost 14.
- Text zatím umístíme libovolně, jeho pozici upravíme v dalším kroku.

Export do html

Nejprve můžeme vše upravit do podoby, jakou by měl mít applet na našem webu.

- Zavřeme algebraické okno.
- Upravíme velikost okna.
- Použijeme nástroj *Posunout nákresnu*, tj. , a upravíme umístění počátku souřadnic.

Vytvoříme html soubor obsahující tento applet.

- *Soubor* → *Export* → *Dynamický pracovní list jako webová stránka (html)* 
- Nebo použijeme klávesovou zkratku *Ctrl + Shift + W*. Otevře se okno pro export.
- V záložce *Pro pokročilé* zatrhneme možnost *Zobrazit ikonu pro resetování konstrukce*.
- Potvrdíme tlačítkem *Export*. Otevře se webová stránka obsahující náš výtvar.
- Jeho zdrojový kód otevřeme v textovém editoru.
- Zkopírujeme tělo stránky a vložíme, kam potřebujeme.
- 😊 Hotovo.

Úlohy k procvičení

- Tečny z vnějšího bodu k elipse
- Zahradnická konstrukce elipsy
- Kloubový antiparalelogram



Využití GeoGebry ve výuce matematiky a geometrie

3 μ 2013

GeoGebra ve výuce Matematiky I a II

Radka Hamříková

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TU Ostrava

V lekci si ukážeme úlohy, které lze využít ve výuce Matematiky I a II, derivace v průběhu funkce, určitý integrál jako obsah rovinného obrazce.

První úloha

Ukážeme si, jak zadat 'univerzální' funkci, najít její extrémy, inflexní body, sestavit tečnu.

Druhá úloha

Vyzkoušíme si, jak vypočítat určitý integrál.

Poděkování










Příspěvek vznikl za podpory projektu FRVŠ 1103/2013 „Vytvoření e-learningových kurzů s multimediálními studijními materiály pro matematické předměty na vybraných fakultách VŠB-TUO“ a Katedry matematiky a deskriptivní geometrie.

Příklad 3: Průběh funkce

Zadání:

Průběh funkce - oblíbenou funkci budeme zadávat v obecném tvaru $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

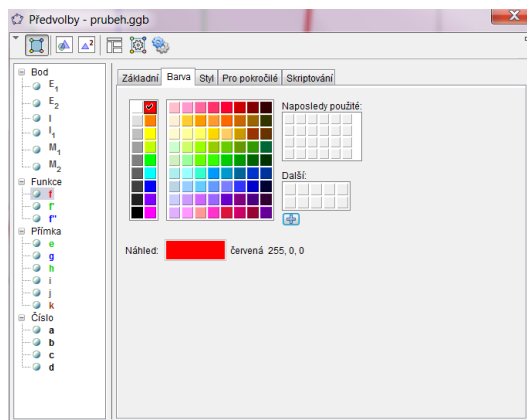
Konstrukce

1.		Zadáme potřebný počet posuvníků - v našem případě 4, budou se postupně pojmenovávat a, b, c, d .
2.		Do příkazového řádku zadáme funkci - $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ nebo nějakou jinou - v algebraickém okně se objeví $f(x)$ s konkrétními parametry a, b, c, d a vykreslí se nám graf funkce, další úpravy provedeme později.
3.		Do příkazového řádku napíšeme (nabídne se nám příkaz) <code>Derivace[f]</code> - v algebraickém okně se objeví $f'(x)$ a spočítaná derivace, v nákrešně přibude další graf.
4.		Budeme hledat průsečíky derivace funkce a osy x .
5.		V průsečících sestrojíme kolmice k ose x .
6.		Najdeme extrémy jako průsečíky kolmic se zadanou funkcí, hned je vidět, kdy se o extrém nejedná.
7.		Do příkazového řádku napíšeme <code>Derivace[f']</code> - v algebraickém okně se objeví $f''(x)$ a spočítaná derivace, v nákrešně přibude další graf.
8.		Budeme hledat průsečíky druhé derivace funkce a osy x .
9.		V průsečících sestrojíme kolmice k ose x .
10.		Najdeme inflexní body jako průsečíky kolmic se zadanou funkcí, hned je vidět, kdy se o inflexi nejedná.
11.		V lokálních extrémech a inflexních bodech sestrojíme tečny.
12.		Tlačítkem PLAY můžeme zapnout změnu posuvníků, bude se nám podle toho měnit tvar první a druhé derivace, extrémy a inflexní body, posuvníkem můžeme také hýbat jen pomocí myši nebo kurzoru.

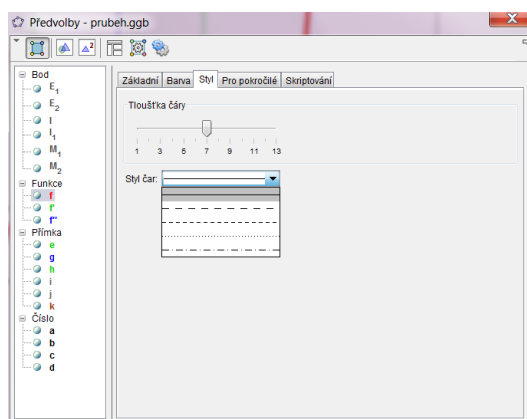
Barvy a styly

- Jistě jste postřehli, že obrázek je na konci velmi pomalovaný, ne-li přímo nepřehledný.

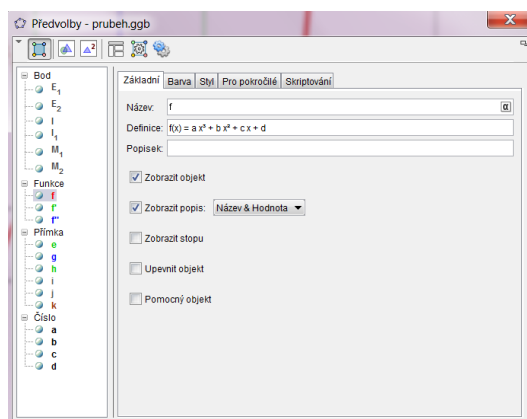
Změníme proto barvy jednotlivých křivek.



Můžeme také změnit styl čar.

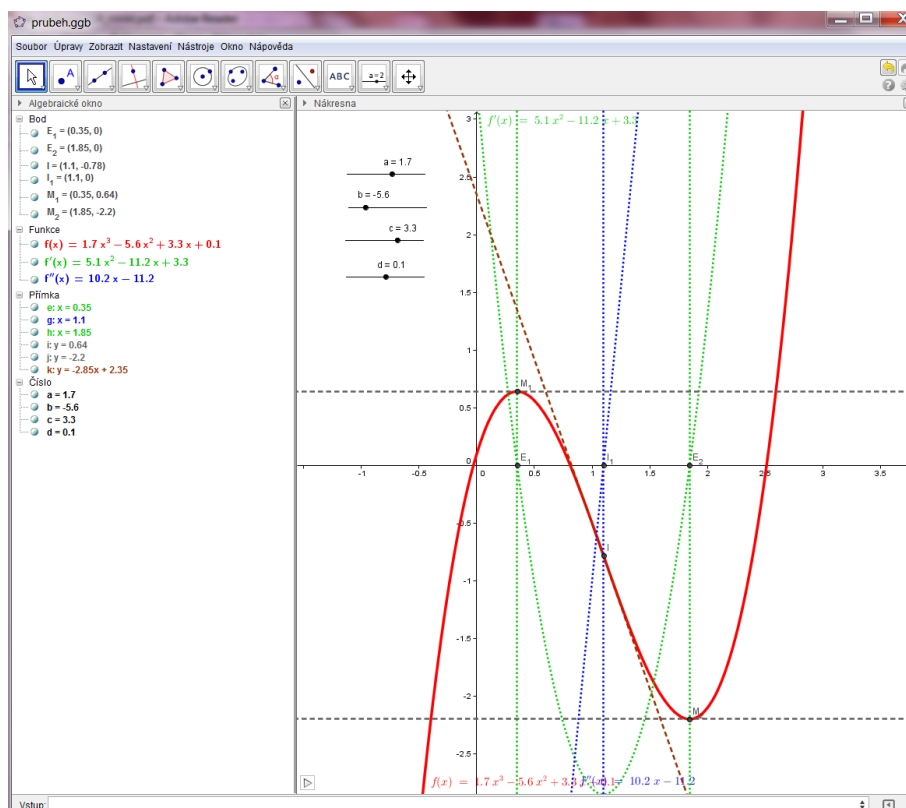


Upravíme popis křivek.

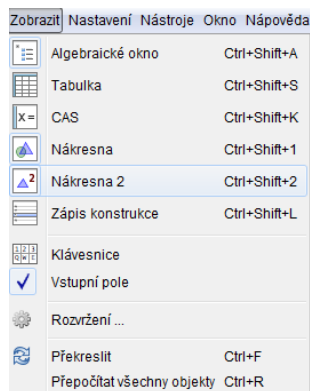


Druhá nákrasna

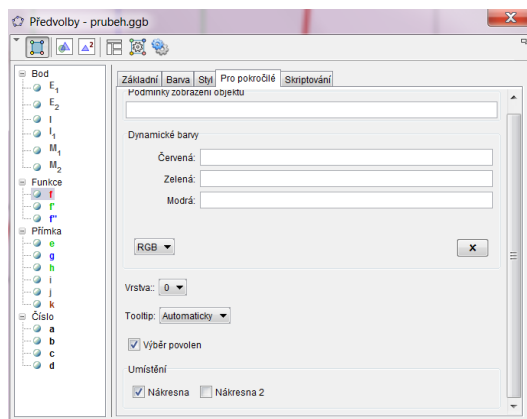
- Zdá se vám, že je tam toho pořád hodně?



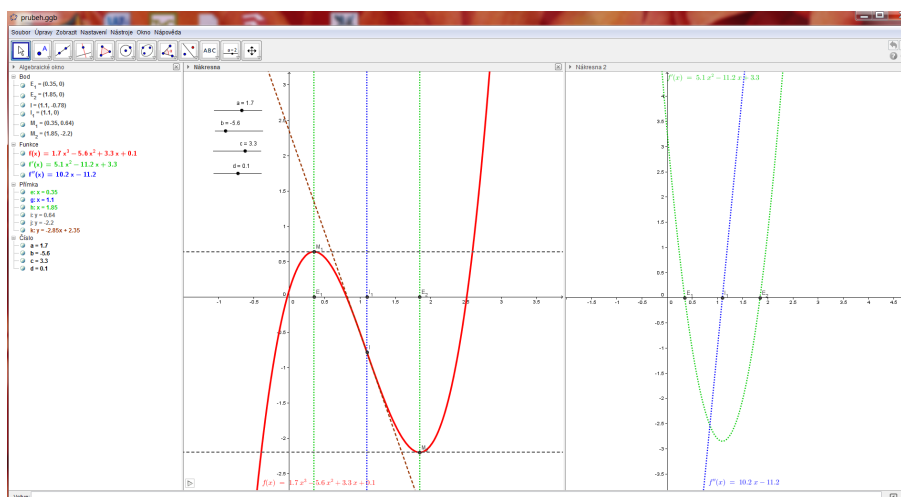
Využijme proto možnosti zapnout si druhou nákrasnu.



Nyní na ni můžeme přesunout část průběhu funkce.



Výsledek může vypadat třeba následovně.







Příklad 4: Určitý integrál

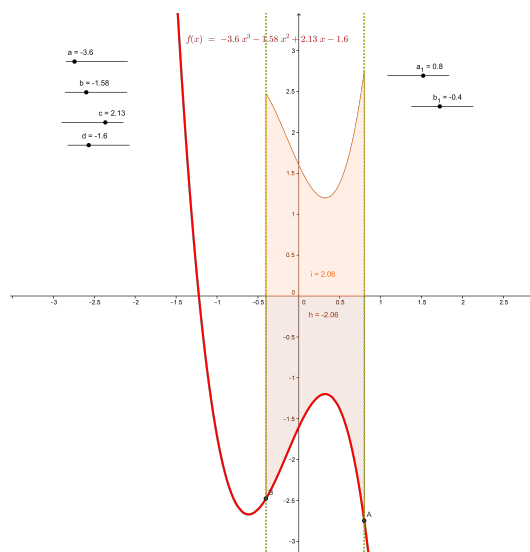
Zadání:

Určitý integrál - obsah oblasti ohraničené grafem funkce $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ a osou x .

Konstrukce

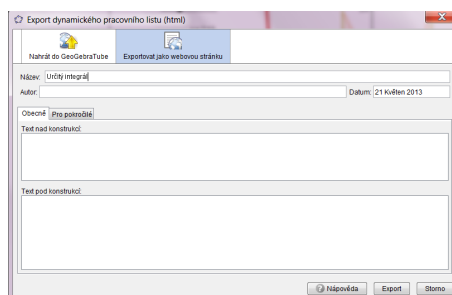
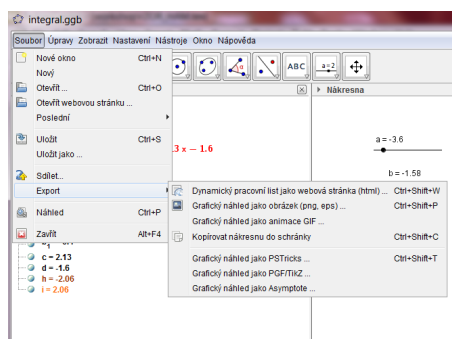
1.		Zadáme potřebný počet posuvníků - v našem případě 4, budou se postupně pojmenovávat a, b, c, d .
2.		Do příkazového řádku zadáme funkci - $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ nebo nějakou jinou - v algebraickém okně se objeví $f(x)$ s konkrétními parametry a, b, c, d a vykreslí se nám graf funkce, další úpravy (barvu, čáru...) provedeme později.
3.		Zadáme potřebný počet posuvníků - nyní 2, pojmenujeme je a_1, b_1 .
4.		V příkazovém řádku zadáme body na grafu funkce $A = (a_1, f(a_1))$ a $B = (b_1, f(b_1))$.
5.		V bodech A a B sestrojíme kolmice k ose x , získáme tak ohraničenou oblast, její obsah budeme hledat.
6.		Do příkazového řádku napíšeme (nabídne se nám příkaz) <code>Integral[<Funkce>, <Počáteční hodnota x>, <Koncová hodnota x>]</code> - funkce je f , Počáteční hodnota x je a_1 , Koncová hodnota x je b_1 , vykreslí se nám výsledek integrálu, takto nám ale může vyjít i záporně.
7.		Do příkazového řádku napíšeme <code>Integral[<Funkce>, <Počáteční hodnota x>, <Koncová hodnota x>]</code> - funkce je $absf$, Počáteční hodnota x je a_1 , je-li to dolní mez, Koncová hodnota x je b_1 , je-li to horní mez.
8.		Posuvníky můžeme libovolně měnit, nebo spustit animaci.

Nyní si můžeme prohlédnout výsledek.



Export

Výsledek můžeme exportovat jako obrázek s různou příponou nebo html stránku.



Literatura

BARTSCH, Hans - Jochen. Matematické vzorce. 3. vyd. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1971.



Využití GeoGebry ve výuce matematiky a geometrie

3 μ 2013

Ukázka využití GeoGebry při řešení základních statistických problémů

Petra Schreiberová

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TU Ostrava

Cílem lekce je naučit se pracovat v programu GeoGebra s nástrojem tabulky a řešit jednoduché statistické úlohy. Konkrétně se budeme zabývat analýzou jedné proměnné (tvorba histogramu, hledání číselných charakteristik).

Analýza jednorozměrných dat

Často se vyskytuje situace, kdy potřebujeme získat lepší a souhrnný přehled o datech (např. výsledcích určitého experimentu). Proto se naučíme v prostředí GeoGebry vkládat do nástroje Tabulka data, která budeme následně zpracovávat.

Poděkování

Příspěvek vznikl za podpory projektu FRVŠ 1103/2013 „Vytvoření e-learningových kurzů s multimediálními studijními materiály pro matematické předměty na vybraných fakultách VŠB-TUO“ a Katedry matematiky a deskriptivní geometrie.

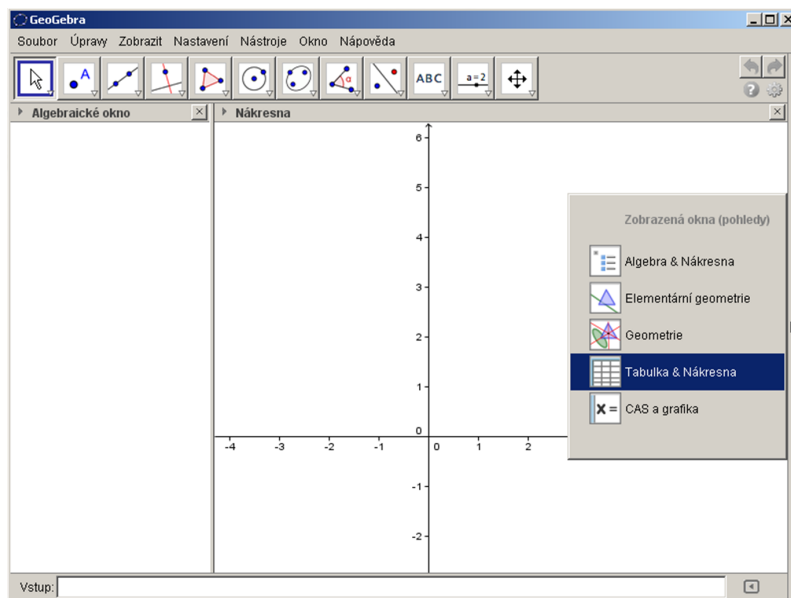
Příklad 5: Analýza jednorozměrných dat

Zadání:

Zajímá nás, jak se pohyboval počet bodů získaných studenty na zápočet v daném předmětu. K dispozici máme údaje od 47 studentů. Tato data potřebujeme zpracovat.

Řešení:

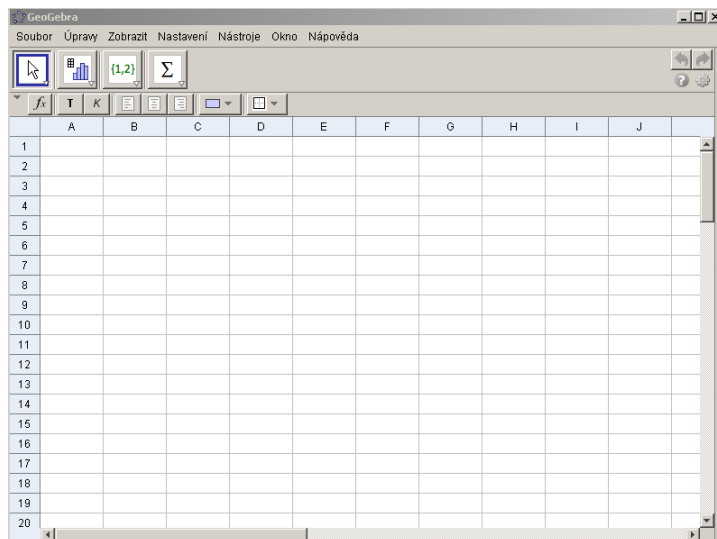
1.	Otevřeme GeoGebru.
2.	Klikneme na možnost <i>Tabulka a nákrasna</i> .



Obrázek 7: Otevření tabulky

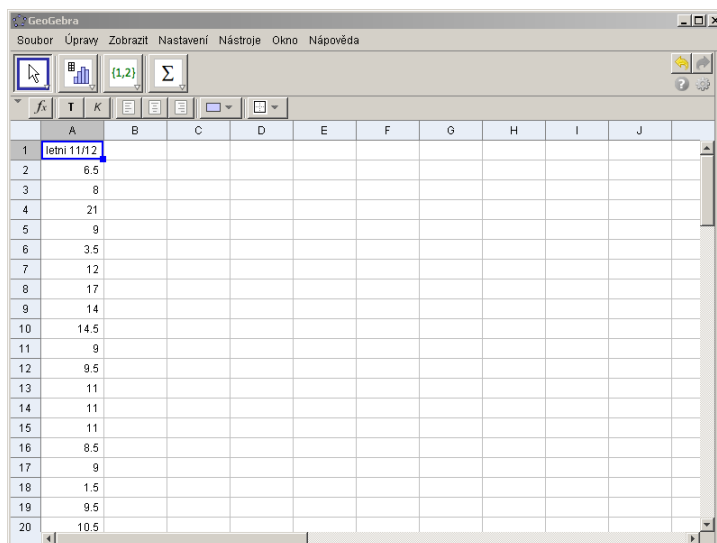
3.	Nákrasnu zavřeme křížkem.
----	---------------------------

Tyto kroky lze provést i v menu pomocí záložky **Zobrazit**, kde zaškrtneme pouze volbu Tabulka




Obrázek 8: Tabulka

4.	Otevřeme soubor <code>data.xlsx</code> , data ve sloupci A označíme a dáme <code>Ctrl+C</code> .
5.	Pomocí <code>Alt+Tab</code> se vrátíme do GeoGebry.
6.	Klikneme do buňky A1 a dáme <code>Ctrl+V</code> .



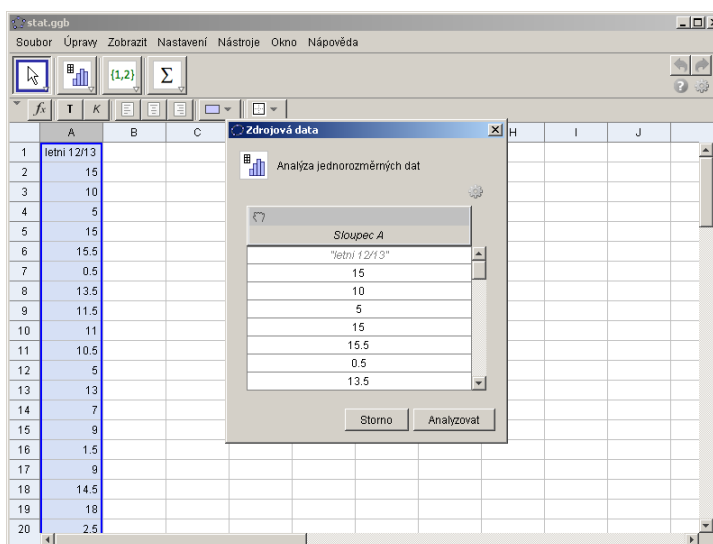
Obrázek 9: Data v tabulce

Pokud klikneme na sloupec A, označí se celý sloupec. Máme možnost měnit tloušťku písma, kurzívu, zarovnání v buňkách, pozadí a ohraničení tabulky .

7.




Označíme sloupec A a zvolíme nástroj *Analýza jednorozměrných dat*.



Obrázek 10: Analýza dat

8.

Klikneme na *analyzovat*.

Tímto způsobem jsme vytvořili histogram. S využitím posuvníku  můžeme v histogramu dynamicky měnit počet tříd.

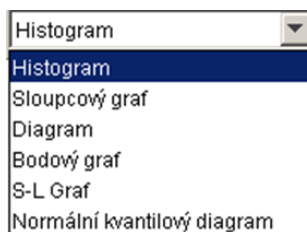
9.



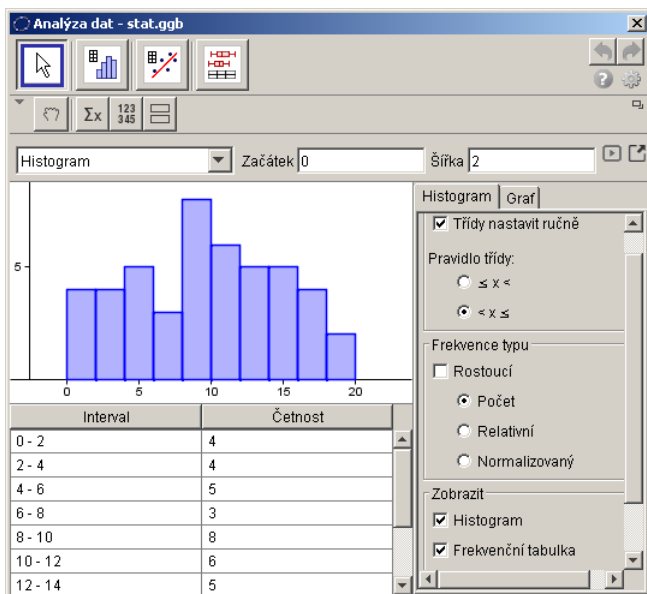
V nastavení Histogramu lze nastavit třídy i ručně, volbou *Začátku* a *Šířky*.

Abychom znázornili četnosti, zaškrtneme v nastavení **Frekvenční tabulka**. Můžeme vyjádřit i relativní četnosti volbou **Relativní**.

V rolovacím okně si lze vybrat i jiný typ grafu (Box plot - Diagram, Stem and Leaf, ...).

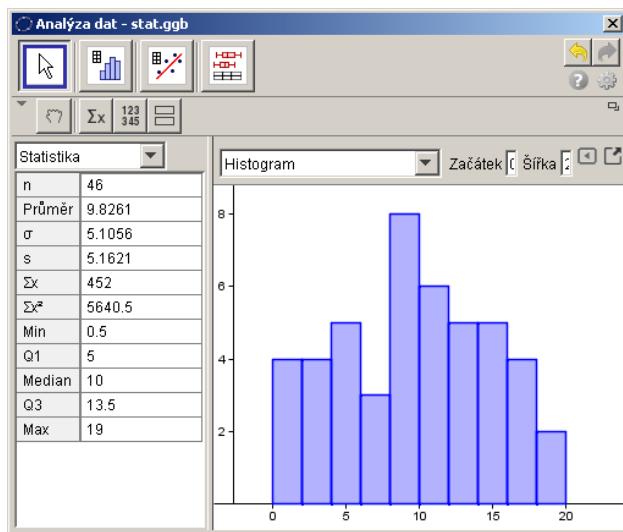


Obrázek 11: Menu grafy








Obrázek 12: Histogram

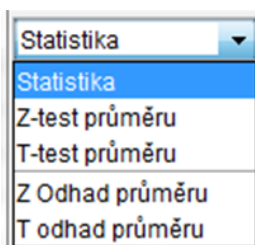
10.		Vytvořený graf uložíme jako obrázek.
11.		Znázorníme dva grafy pod sebou. Opakovaným klikem druhý graf schováme.
12.		Znázorníme základní charakteristiky.



Obrázek 13: Základní charakteristiky

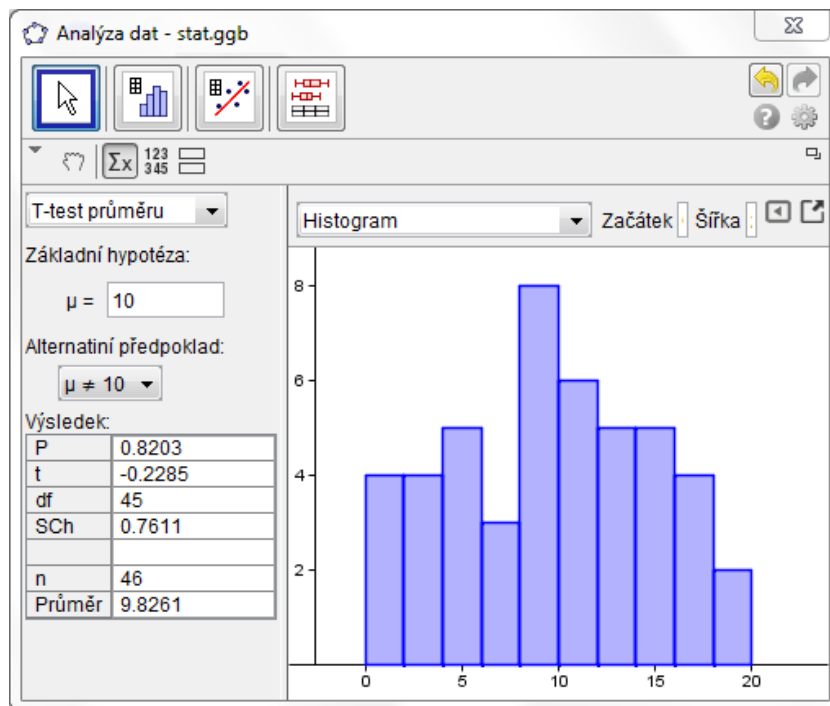
Některé charakteristiky lze určit i přímo v tabulce. Klikneme do libovolné buňky a zvolíme možnost  pro součet,  pro počet hodnot,  pro průměr,  pro minimální a  pro maximální hodnotu. Následně označíme data, pro která chceme charakteristiku vypočítat.

13. V rolovacím menu lze vybrat možnost testování hypotézy o střední hodnotě či nalezení intervalových odhadů.



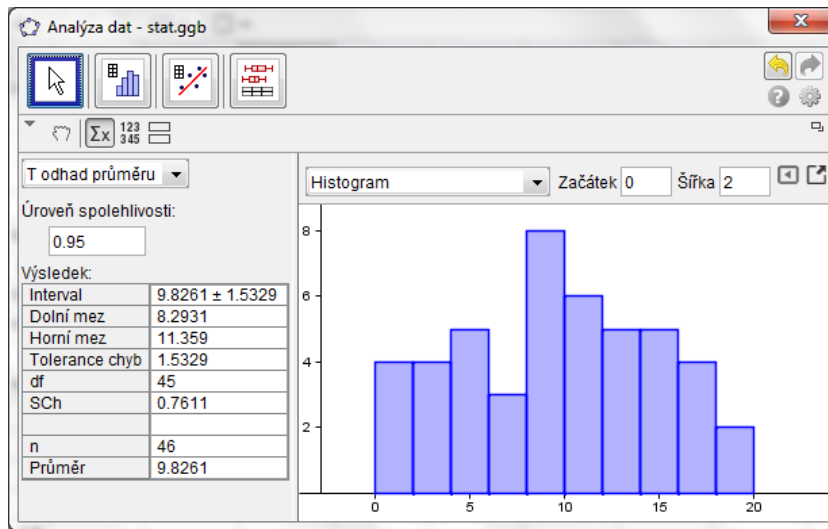
Obrázek 14: Menu

Pokud chceme otestovat hypotézu, že studenti získali průměrně 10 bodů, využijeme *T-test průměru*, kde můžeme měnit hodnotu v nulové (Základní) hypotéze. Ve výsledku je v prvním řádku hodnota p-value.



Obrázek 15: Testování hypotéz

Pro intervalový odhad středního počtu získaných bodů klikneme na *T odhad průměru*. Lze měnit hodnotu spolehlivosti, na které odhad provádíme.



Obrázek 16: Intervalové odhady



Využití GeoGebry ve výuce matematiky a geometrie

3 μ 2013

„Art“ GeoGebra - Geometrické vzory

Radomír Paláček

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TU Ostrava

Je to již několik let, kdy GeoGebra vznikla. Od té doby si podmanila mnohé z nás. Zejména učitele a některé studenty zaujala natolik, že v ní začali vytvářet své první konstrukce a posléze také animace, které jim napomáhají v rozvoji jejich představivosti a také mohou sloužit jako pomůcky při práci. Ruku v ruce se stoupajícími znalostmi a dovednostmi ovládat do hloubky GeoGebry se na YouTube začaly objevovat první tzv. „Art“ animace sloužící k potěše oka a také naznačující krásu matematiky. Na následujících dvou příkladech si ukážeme, jak snadno lze tyto výtvary konstruovat se základní znalostí softwaru a s inspirací z YouTube.

Geometrické vzory 1

Vytvořte geometrický obrazec vznikající ze stopy rotujících bodů ležících na jednotkové kružnici. Tyto body zbarvěte různými barvami podle toho, ve kterém kvadrantu leží (viz. obr. 17).

Geometrické vzory 2

Vytvořte animaci sestávající z bodů ležících na jednotkové kružnici, posloupnosti bodů

$$[(1 + k \cos(m\theta)) \cos(\theta + \alpha), (1 + k \cos(m\theta)) \sin(\theta + \alpha)]$$

a vektorů spojujících body pod stejným úhlem. Vykreslování animace bude zajištěno prostřednictvím parametrů k, m, α a pomocného parametru n .

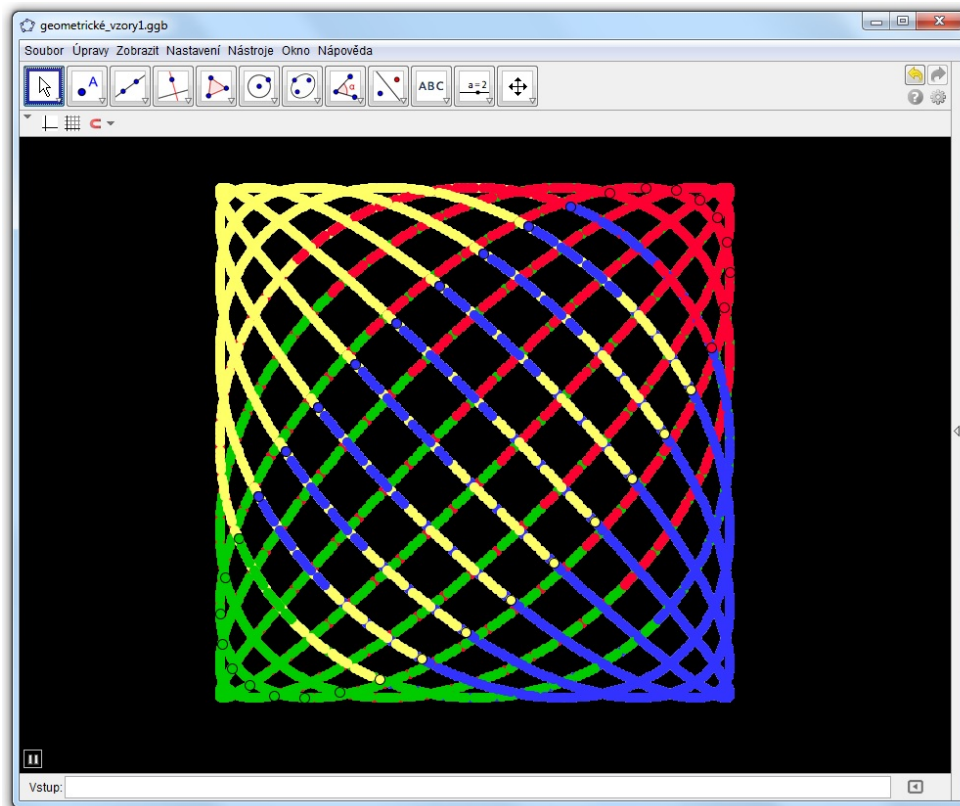
Poděkování

Příspěvek vznikl za podpory projektu FRVŠ 1103/2013 „Vytvoření e-learningových kurzů s multimediálními studijními materiály pro matematické předměty na vybraných fakultách VŠB-TUO“ a Katedry matematiky a deskriptivní geometrie.

Příklad 6: Geometrické vzory 1

Zadání:

Vytvořte geometrický obrazec vznikající ze stopy rotujících bodů ležících na jednotkové kružnici. Tyto body zbarvěte různými barvami podle toho, ve kterém kvadrantu leží (viz. obr. 17).

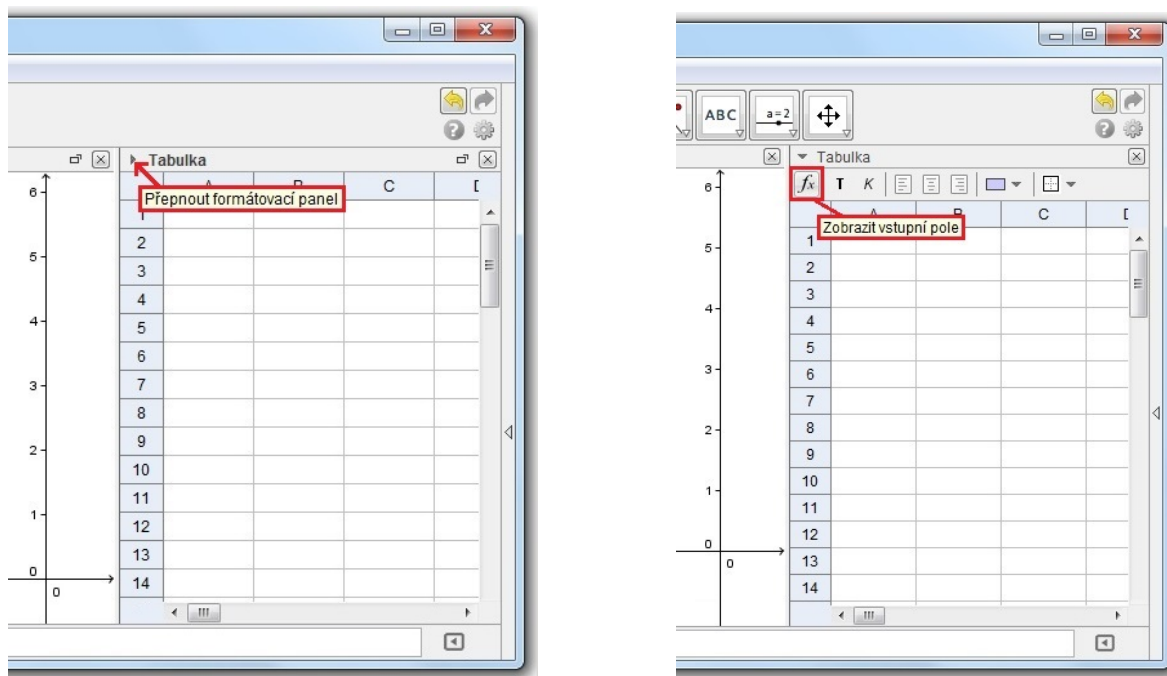


Obrázek 17: Náhled na obrazec

Příprava




1. Nejprve zapneme okno Tabulka. V nabídce klikneme na *Zobrazit – Tabulka*.
2. V okně Tabulka najedeme myší na trojúhelník vedle nápisu *Tabulka* a klikneme na *Přepnout formátovací panel*. Poté klikneme myší na *Zobrazit vstupní pole* (viz. obr. 18).

To nám umožní při zápisu výrazu do buňky používat speciální znaky včetně písmen řecké abecedy nebo znak pro stupně. Podrobněji, zaklikneme buňku, do které chceme psát výraz a poté píšeme do vstupního pole.




Obrázek 18: Náhled na přepínání formátovacího panelu a zobrazení vstupního pole

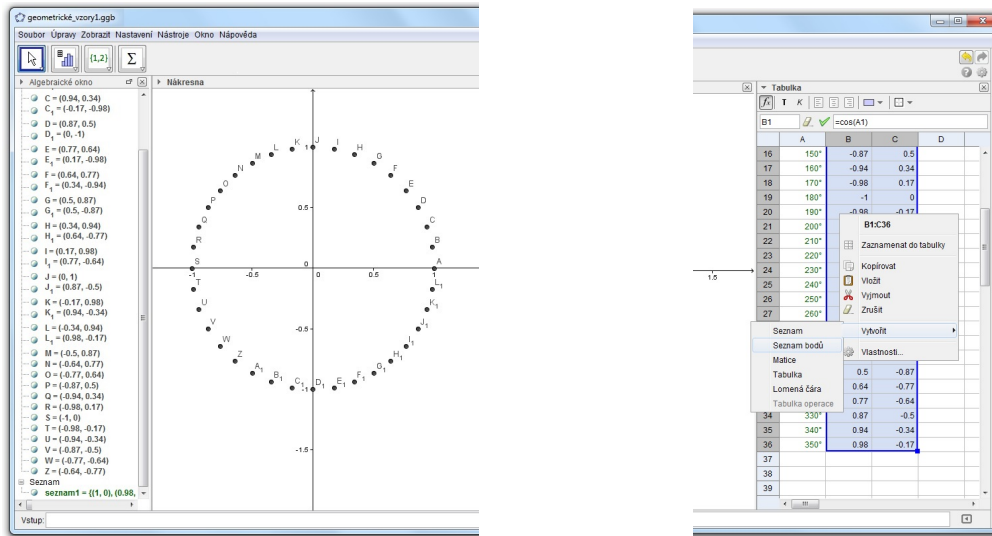
Konstrukce

1.		Do sloupce A budeme postupně zapisovat po deseti hodnoty 0° až 350° .
2.		Do prvního políčka sloupce B zapíšeme výraz $\cos(A1)$, 2. políčka $\cos(A2)$, atd.
3.		Do prvního políčka sloupce C zapíšeme výraz $\sin(A1)$, do 2. políčka $\sin(A2)$, atd.

Všimněme si, že vzhledově tabulka v GeoGebře vypadá stejně jako tabulka Excelovská. Můžeme dokonce říci, že buňky se obdobně také chovají a z toho důvodu nemusíme v 1. až 3. kroku konstrukce vypisovat jednotlivé hodnoty ručně, ale postačuje zapsat například jen 2 hodnoty, ty označit a poté potáhnout za čtvereček nacházející se v pravém dolním rohu buňky.

4.		Označíme myší všechny hodnoty ve sloupcích B a C, klikneme pravým tlačítkem myši a vybereme <i>Vytvořit – Seznam bodů</i> .
----	-------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

V nákrese se objeví 36 bodů ležících na jednotkové kružnici a v algebraickém okně navíc ještě



Obrázek 19: Vytvoření objektu seznam z Tabulky

objekt seznam (viz. obr. 19). Nyní změním vlastnosti bodů v nákrešně. U každého dáme nezobrazovat popisek, v záložce *Styl* nastavíme *Velikost bodu* na hodnotu 5 a zbarvíme body podle toho ve kterém kvadrantu leží (červená, žlutá, zelená, modrá).

Nyní u každého bodu zapneme stopu a body „rozpohybujeme“.

5.		Označíme všechny body v nákrešně, klikneme na pravé tlačítko myši a dáme <i>Stopa zapnuta</i> .
6.		Vytvoříme posuvník na úhel α od 0° do 360° s krokem 1° .
7.		Výrazy ve sloupci B pozměníme na $\cos(A1-\alpha)$.
9.		Výrazy ve sloupci C pozměníme na $\sin(A1+\alpha)$.
10.		Animaci spustíme pravým tlačítkem na posuvník α – <i>Animace zapnuta</i> .

Poslední úpravou bude nastavení barvy nákrešny na černou a skrytí posuvníku.

11.		Klikneme pravým tlačítkem myši na nákrešnu a vybereme <i>Nákresna – Základní – Barva pozadí</i> .
12.		Klikneme pravým tlačítkem myši na posuvník a odklikneme <i>Zobrazit objekt</i> .

Nyní můžeme vypnout Algebraické okno a Tabulku.

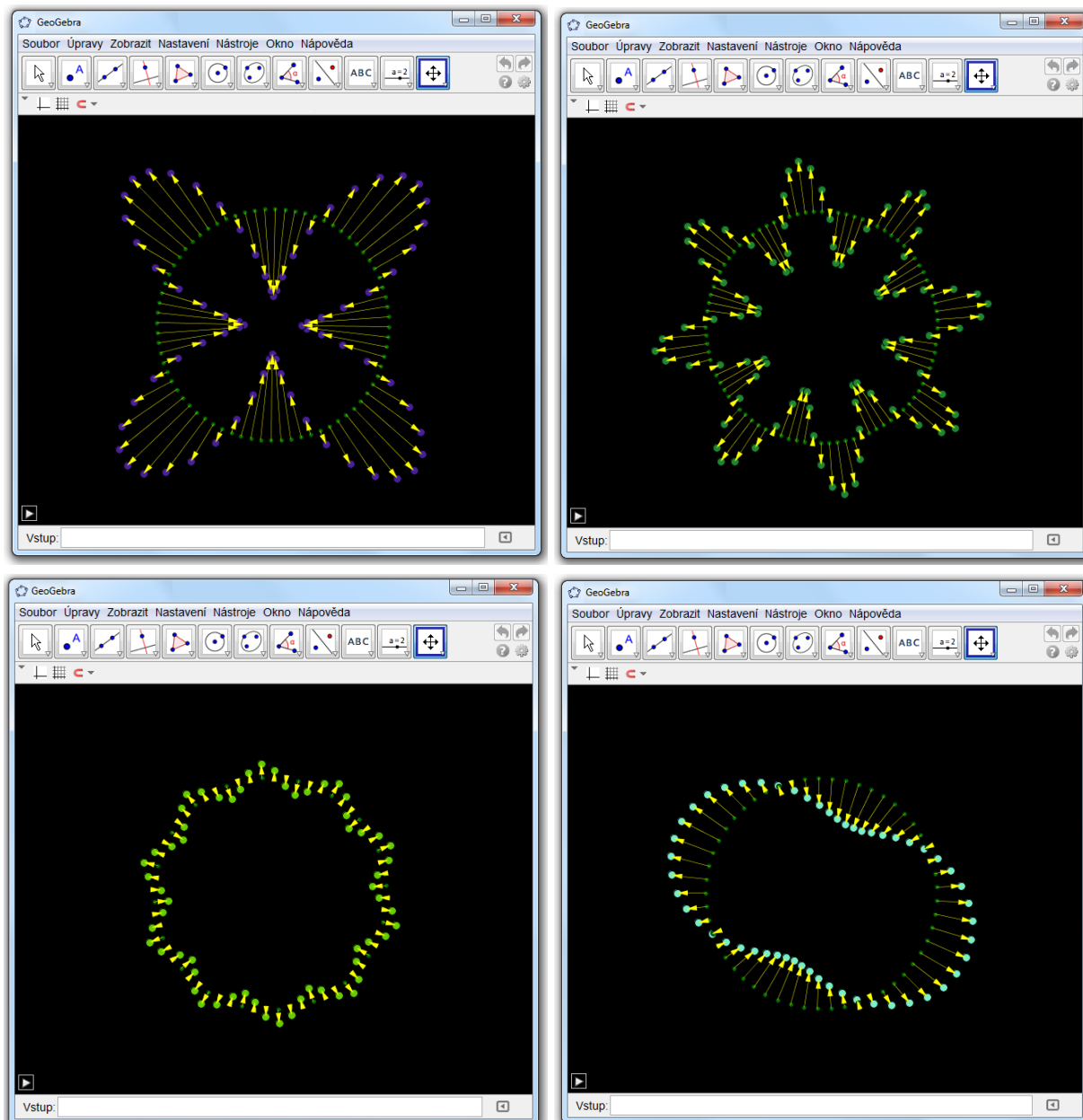
Příklad 7: Geometrické vzory 2

Zadání:

Vytvořte animaci sestávající z bodů ležících na jednotkové kružnici, posloupnosti bodů






$$[(1 + k \cos(m\theta)) \cos(\theta + \alpha), (1 + k \cos(m\theta)) \sin(\theta + \alpha)]$$

a vektorů spojujících body pod stejným úhlem. Vykreslování animace bude zajištěno prostřednictvím parametrů k, m, α a pomocného parametru n .



Obrázek 20: Několik „screenshotu“ z finální animace

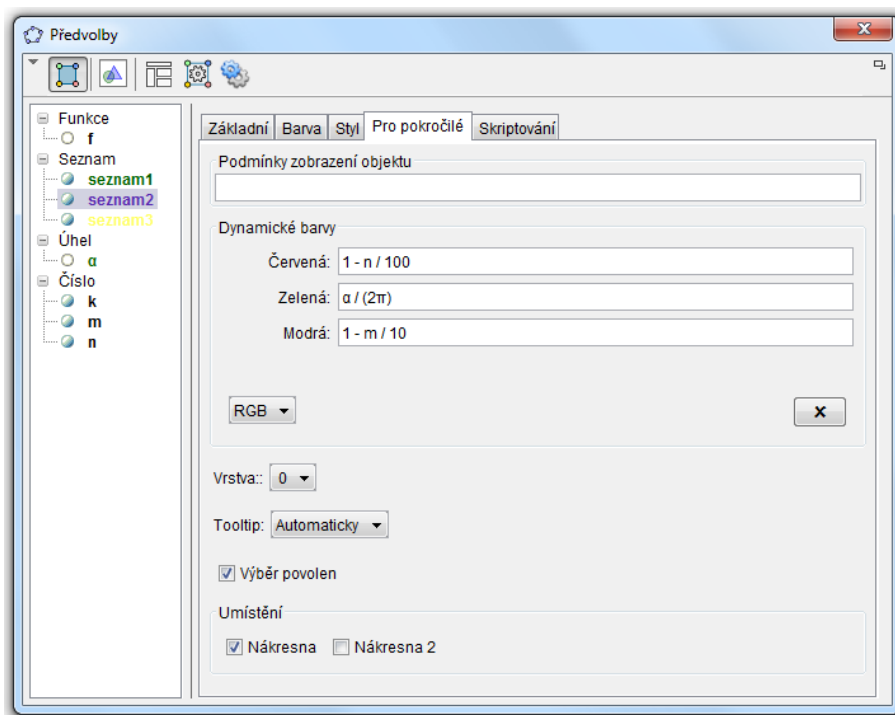
Konstrukce

1.		Vytvoříme posuvníky <ul style="list-style-type: none"> • k od -1 do 1 s krokem 0.1 a počáteční hodnotou 0.5, • m od 1 do 10 s krokem 1 a počáteční hodnotou 3, • n od 1 do 100 s krokem 1 a počáteční hodnotou 60.
2.		Vytvoříme posuvník na úhel α od 0° do 360° s krokem 1° .
3.	<input data-bbox="162 714 235 745" type="text" value="Vstup:"/>	Vytvoříme posloupnost bodů ležících na jednotkové kružnici. Do vstupního pole zapíšeme Posloupnost $[(\cos(\theta + \alpha), \sin(\theta + \alpha)), \theta, 0, 360, 360/n]$
4.	<input data-bbox="162 882 235 913" type="text" value="Vstup:"/>	Do vstupního pole zadáme pomocnou funkci $f(x)=1+k \cos(m x)$. Klikneme pravým tlačítkem myši na funkci v nákrešě a odklikneme <i>Zobrazit objekt</i> .
5.	<input data-bbox="162 1008 235 1039" type="text" value="Vstup:"/>	Do vstupního pole zapíšeme Posloupnost $[(f(\theta) \cos(\theta + \alpha), f(\theta) \sin(\theta + \alpha)), \theta, 0, 360, 360/n]$
6.	<input data-bbox="162 1134 235 1165" type="text" value="Vstup:"/>	Vytvoříme posloupnost vektorů Posloupnost [Vektor[Prvek[seznam1, i], Prvek[seznam2, i]], i, 1, n].
7.		Nastavíme barvy u jednotlivých posloupností (postupně budeme klikat pravým tlačítkem myši na posloupnosti v algebraickém okně a budeme vybírat <i>Vlastnosti – Barva</i>) <ul style="list-style-type: none"> • seznam bodů na kružnici (seznam1) – zelená barva, • seznam bodů z 5. kroku (seznam2) – fialová barva, • seznam vektorů (seznam3) – žlutá barva.
8.		Spustíme animaci. Nejprve označíme všechny posuvníky, klikneme pravým tlačítkem myši a vybereme – <i>Animace zapnuta</i> .
9.		Nastavíme pozadí nákresny na černou a skryjeme všechny posuvníky.

Nyní můžeme vypnout Algebraické okno.

Pro pokročilé

Pro nastavení barvy jednotlivých seznamů můžeme využít také dynamických barev, které nalezneme ve vlastnostech každého objektu v záložce *Pro pokročilé*. Jedná se o míchání barev prostřednictvím RGB (začáteční písmena anglických slov Red, Green, Blue). Do vstupních polí zadáváme hodnoty mezi 0 a 1. Na obrázku (21) vidíme použití dynamických barev u objektu `seznam2`.



Obrázek 21: Příklad použití dynamických barev



Využití GeoGebry ve výuce matematiky a geometrie

3 μ 2013

Pythagorův strom a Bézierova křivka

Jana Bělohávková

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TU Ostrava

Pokud při práci s GeoGebrou často používáme nějakou sekvenci příkazů, vyplatí se vytvořit si pro ni zvláštní příkaz, takzvaný nástroj. Na konstrukci Pythagorova stromu a Bézierovy křivky si ukážeme, jak si takový nástroj v GeoGebře vytvořit a jak ho použít.

Pythagorův strom

Vytvořte nástroj na sestrojení nulté iterace Pythagorova stromu. Použijte ho pro sestrojení dalších iterací.

Bézierova křivka

Vytvořte nástroj na sestrojení kubické Bézierovy křivky.

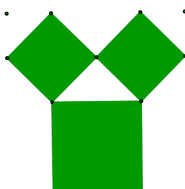
Příklad 8: Pythagorův strom

Zadání:

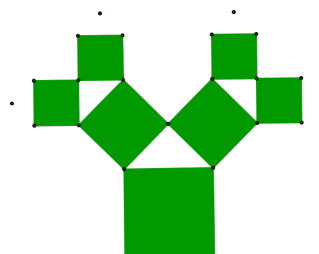
Vytvořte nástroj na sestavení nulté iterace Pythagorova stromu. Použijte ho pro sestavení dalších iterací.



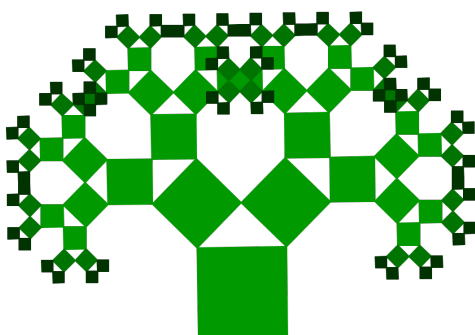
nultá iterace



1. iterace

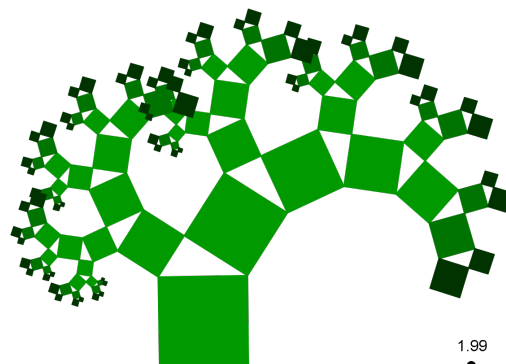


2. iterace



6. iterace

1.57







modifikace 6. iterace

1.99

Konstrukce

1.		Vytvoříme libovolný čtverec ABCD.
2.		Najdeme střed E úsečky CD.
3.		Vytvoříme posuvník e od 0 do π s krokem 0.01.
4.		Sestrojíme bod C' jako obraz bodu C v otočení se středem E a úhlem e (tedy klikneme na bod C, pak na bod E a pak zadáme číslo e, s volbou <i>proti směru hodin</i>).
5.		Schováme body A, B a E.

6.		U bodů C,D a C' vypneme popis (klikneme na ně pravým tlačítkem a odtrhneme <i>Zobrazit popis</i>) a změníme jejich velikost ze 3 na 1 (<i>Vlastnosti/Styl</i>).
7.		Zvolíme si barvu čtverce a zvětšíme jeho neprůhlednost na 100% (<i>Vlastnosti/Barva</i>).
8.		Vytvoříme nový nástroj. Z menu vybereme <i>Nástroje/Vytvořit nový nástroj</i> . <i>Výstupní objekty</i> : Bod C', Bod C, Bod D, čtverec (čtyřstranný mnohoúhelník1). Potvrdíme tlačítkem <i>Další</i> . <i>Vstupní objekty</i> : Bod A, Bod B, posuvník e <i>Jméno nástroje</i> : Pythagorův strom <i>Nápověda k nástrojům</i> : Dva body a číslo
9.		Nový nástroj <i>Pythagorův strom</i> se automaticky přidá na panel nástrojů. Vybereme ho a použijeme ho k sestavení dalších iterací.
10.		Zapneme animaci posuvníku e.

Pro inspiraci



Zdroj

http://cs.wikipedia.org/wiki/Pythagorův_strom

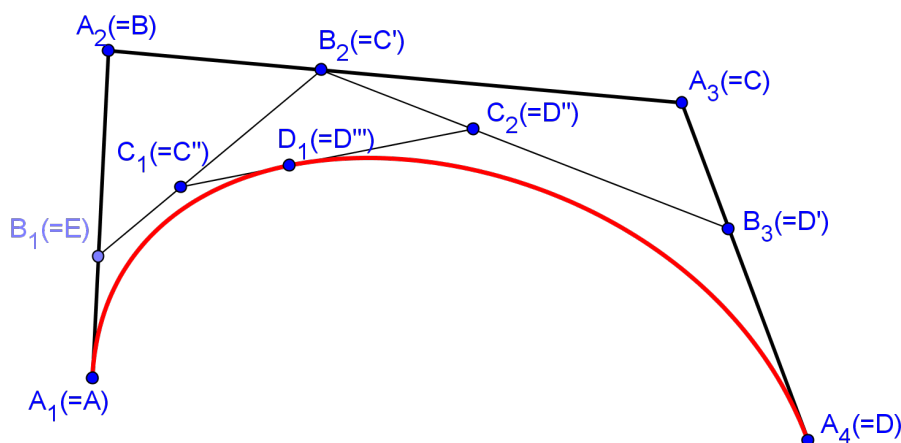
<http://www.wikipaintings.org/en/mel-bochner/pythagoras-4-2006>

Příklad 9: Bézierova křivka







Zadání:







Vytvoříme nástroj na sestavení kubické Bézierovy křivky. K sestavení křivky použijeme algoritmus de Casteljau: Křivka (kubická) je dána řídicím polygonem daným čtyřmi body A_1, A_2, A_3, A_4 . Postupně sestrojíme body $B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, D_1$. Křivka je pak určena všemi takto sestrojenými body $D_1(t)$, kde t je z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

- 1.interpolace: $B_1 = (1 - t)A_1 + tA_2, B_2 = (1 - t)A_2 + tA_3, B_3 = (1 - t)A_3 + tA_4$;
- 2.interpolace: $C_1 = (1 - t)B_1 + tB_2, C_2 = (1 - t)B_2 + tB_3$;
- 3.interpolace: $D_1 = (1 - t)C_2 + tC_1$.



Konstrukce

1.		Zvolíme si čtyři body A,B,C,D.
2.		Sestrojíme úsečky AB, BC a CD.
3.		Na úsečce AB si libovolně zvolíme bod E.
4.		Sestrojíme úsečku AE.
5.	<input type="text" value="Vstup:"/>	Do vstupního pole zadáme číslo $t=AE/AB$.
6.		Vytvoříme bod C' jako obraz bodu C ve stejnolehlosti se středem B a koeficientem t (tedy klikneme na bod C, na bod B a zadáme číslo t).
7.		Vytvoříme bod D' jako obraz bodu D ve stejnolehlosti se středem C a koeficientem t.

8.		Sestrojíme úsečky EC' a $C'D'$.
9.		Vytvoříme bod C'' jako obraz bodu C' ve stejnolehlosti se středem E a koeficientem t a bod D'' jako obraz bodu D' ve stejnolehlosti se středem C' a koeficientem t .
10.		Sestrojíme úsečku $C''D''$.
11.		Vytvoříme bod D''' - obraz bodu D'' ve stejnolehlosti se středem C'' a koeficientem t .
12.		Sestrojíme Bézierovu křivku jako množinu bodů danou bodem D''' a bodem E (tedy klikneme nejprve na bod D''' a pak na bod E).
13.		Vytvoříme nový nástroj s názvem Bezier (z menu <i>Nástroje/Vytvořit nový nástroj</i>). <i>Výstupní objekty:</i> množina1 <i>Vstupní objekty:</i> Bod A, Bod B, Bod C, Bod D <i>Jméno nástroje:</i> např. Bézierova křivka <i>Název příkazu:</i> např. Bezier <i>Nápověda k nástrojům:</i> např. Čtyři body
14.		Vyzkoušíme si nově vytvořený nástroj.

Poznámky

- Máme-li sestrojený nástroj a čtyři body (např. K,L,M,N), můžeme křivku vytvořit i zadáním příkazu `Bezier[K, L, M, N]` do vstupního pole (resp. příkazem, který jsme si zvolili při vytváření nástroje).
- Chceme-li nástroj používat i v jiných geogebrových souborech, uložíme si ho (z menu *Nástroje/Správa nástrojů/ Uložit jako*). Nástroj se uloží do souboru s příponou ggt (GeoGebra Tool). Uložený nástroj pak v jiném souboru otevřeme buď z menu (*Soubor/Otevřít*) nebo ho do souboru „přetáhneme myší“.
- Chceme-li, aby se nám nový nástroj objevoval v panelu nástrojů při každém spuštění GeoGebry, zvolíme z menu *Nastavení/Uložit nastavení*.
- Nástroje můžeme na panelu nástrojů sdružit do skupin v *Nástroje/Nastavit panel nástrojů*.

Zdroj

http://cs.wikipedia.org/wiki/Bézierova_křivka



Využití GeoGebry ve výuce matematiky a geometrie

3 μ 2013

Dynamické propojení dat mezi *Nákresnou* a *Tabulkou*

Zuzana Morávková

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TU Ostrava

Nedílnou součástí GeoGebry je i Tabulkový procesor s obdobnými možnostmi jako má např. Excel. Ukážeme si některé ze široké škály možností dynamického propojení dat mezi *Nákresnou* a *Tabulkou*.

Tabelace funkce

Ukážeme tabelaci funkce s využitím *Tabulky*.

Taylorův polynom

Sestrojíme aplikaci na výpočet Taylorova polynomu s volitelným středem x_0 a stupněm n . S využitím tabulky vytabelujeme hodnotu funkce a Taylorova polynomu na intervalu $\langle x_0 - 1, x_0 + 1 \rangle$. Tyto hodnoty porovnáme, tj. spočítáme absolutní hodnotu jejich rozdílu.

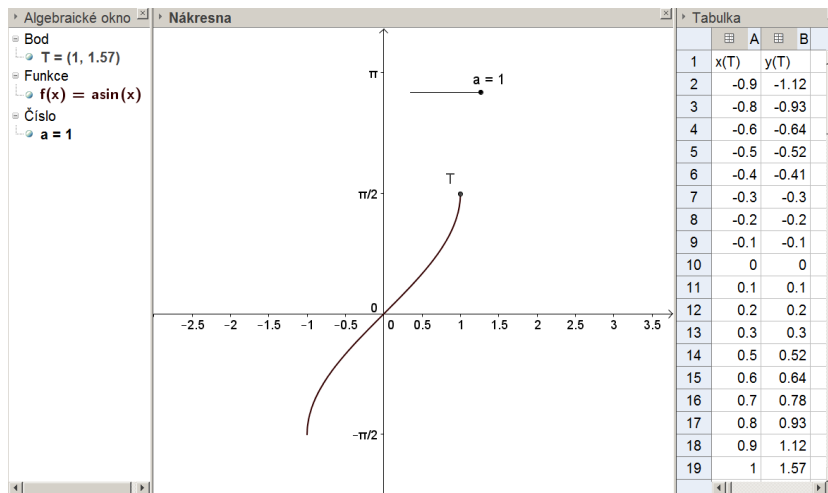
Poděkování

Problematika je řešena v projektu FRVŠ 1103/2013 „Vytvoření e-learningových kurzů s multi-mediálními studijními materiály pro matematické předměty na vybraných fakultách Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava“.

Příklad 10: Tabele funkce

Zadání:

Ukážeme tabelaci funkce s využitím Tabulky.



Obrázek 22: Tabele funkce

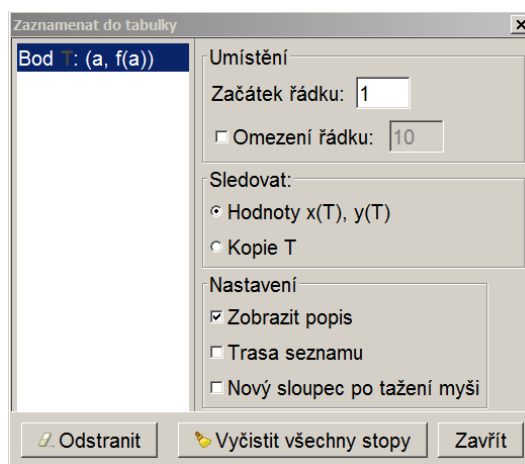
Konstrukce

1.	<input type="text" value="Vstup:"/>	Vložíme předpis funkce $f(x) = \arcsin(x)$
2.	<input type="text" value="a = 2"/>	Vytvoříme posuvník a od -1 do 1 s krokem 0.1. Posuvník nastavíme na nejmenší hodnotu, tj. -1.
4.	<input type="text" value="Vstup:"/>	Zadáme bod na grafu funkce $T = (a, f(a))$
6.		V menu <i>Zobrazit – Tabulka</i> zapneme zobrazení Tabulky.
7.		Zobrazíme nabídku u bodu T (pravým tlačítkem myši) a vybereme <i>Zaznamenat do tabulky</i> . (Tato položka se objeví pouze, je-li zobrazena Tabulka.)
8.		Otevře se okno <i>Zaznamenat do tabulky</i> - viz obrázek 23. Okno s nabídkou nezavíráme, budeme ho dále používat.
9.		Myší měníme hodnoty posuvníku v celém rozsahu (od 1 do -1). V Tabulce (ve sloupcích A, B) se postupně zobrazují souřadnice bodu T.

Postřehy a poznámky

Záznam v tabulce vyčistíte tlačítkem *Vyčistit všechny stopy*, které najdete v okně *Zaznamenat do tabulky* (viz. obrázek 23).

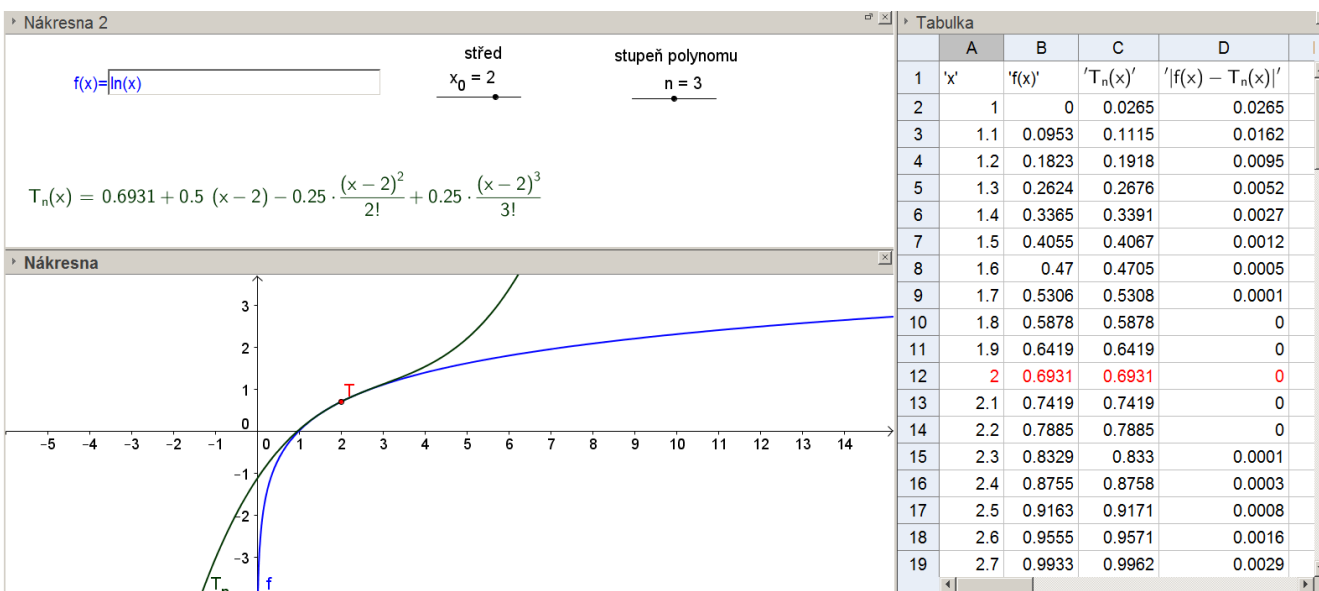
Zatržením volby *Omezení řádku* nastavíme počet zobrazených dat (viz. obrázek 23).

Obrázek 23: Okno *Zaznamenat do tabulky*

Příklad 11: Taylorův polynom















Zadání:

Sestrojíme aplikaci pro výpočet Taylorova polynomu s volitelným středem x_0 a stupněm n . S využitím Tabulky vytabelujeme hodnotu funkce a Taylorova polynomu na intervalu $\langle x_0 - 1, x_0 + 1 \rangle$. Tyto hodnoty porovnáme, tj. spočítáme absolutní hodnotu jejich rozdílu.



Obrázek 24: Taylorův polynom


Konstrukce

1.		Vložíme předpis funkce $f(x) = \ln(x)$
2.		Vložíme textové pole s popisem $f(x) =$ a propojíme ho s funkcí $f(x)$.
3.		Vytvoříme posuvník n jako celé číslo od 1 do 5.
4.		Vytvoříme posuvník x_0 od -5 do 5 s krokem 0.1.
5.		Zadáme bod na grafu funkce $T = (x_0, f(x_0))$
6.		Zadáme příkaz pro výpočet Taylorova polynomu $T_n = \text{TaylorovaRada}[f, x_0, n]$
7.		V menu <i>Zobrazit – Tabulka</i> zapneme zobrazení Tabulky.
8.		První řádek tabulky použijeme pro označení jednotlivých sloupců. Do první buňky A1 zapíšeme text ' x ', do B1 ' $f(x)$ ', do C1 ' $T(x)$ ' a do D1 ' $ f(x) - T(x) $ '. Text zapisujeme včetně uvozovek.
9.		Do buňky A2 zapíšeme $x_0 - 1$
10.		Do buňky A3 zapíšeme $x_0 - 0.9$
11.		Označíme myší současně obě buňky A2 a A3 (podržíme klávesu <i>Shift</i>) a tažením myši za modrý čtvereček pole roztáhneme až do buňky A22.
12.		Do buňky B2 napíšeme $f(A2)$ a roztáhneme za modrý čtvereček až do buňky B22.
13.		Do buňky C2 napíšeme $T_n(A2)$ a roztáhneme až do buňky C22.
14.		Do pole D2 napíšeme $\text{abs}(B2 - C2)$ a roztáhneme až do buňky D22.
15.		Řádek číslo 12 (odpovídající x_0) označíme červeně.

Postřehy a poznámky

Počet zobrazovaných desetinných míst lze nastavit v menu *Nastavení - Zaokrouhlování*.

Pro pokročilé

16.		V menu <i>Zobrazit – Nákresna 2</i> zapneme zobrazení Nákresny 2.
17.		Posuvníky n , x_0 a textové pole (pro zadání funkce) přemístíme do Nákresny 2.
18.		Z Algebraického okna do Nákresny 2 přetáhneme myší funkci T_n .
19.		Barevně sjednotíme objekty, viz obrázek 24.



Využití GeoGebry ve výuce matematiky a geometrie

3 μ 2013

GeoGebra a CAS

Petr Volný

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TU Ostrava

Abstrakt: Od verze 4.2. byly do GeoGebry implementovány symbolické výpočty (CAS - computer algebra system). Ukážeme si některé možnosti symbolických výpočtů a manipulací v GeoGebře.

Možnost realizovat v GeoGebře symbolické výpočty výrazně zvyšuje využitelnost programu pro matematiku. Cílem našeho příspěvku v rámci workshopu z GeoGebry na semináři Moderní matematické metody v inženýrství (3 μ) je projít a zhodnotit implementaci symbolických výpočtů a manipulací v GeoGebře a na jednoduchých příkladech si ukázat a popsat nové nástroje určené pro symbolické výpočty.

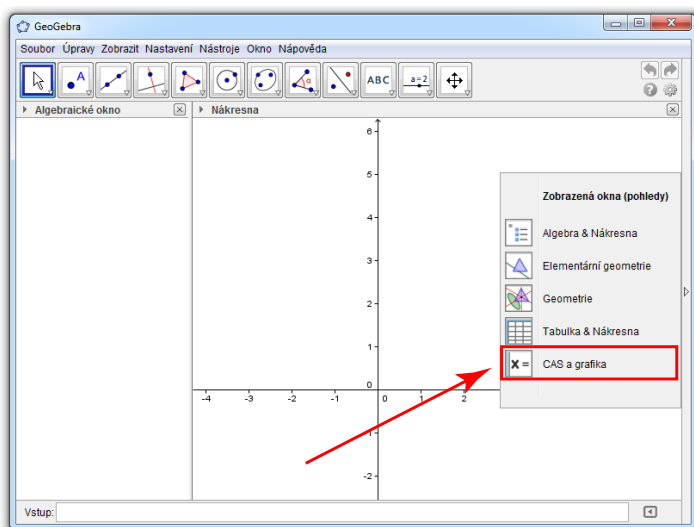
Vzhledem k tomu, že GeoGebra je intenzívně vyvíjena a nové verze se objevují relativně často, může se stát, že případná nová verze GeoGebry se může chovat jinak, než v době psaní tohoto příspěvku. Příspěvek je postaven na GeoGebře verze 4.2.36.0 (Java 1.6.0_43-32bit), datum sestavení: 28.4.2013.

Příspěvek byl zpracován s využitím zdrojů a informací na www.geogebra.org.

Poděkování

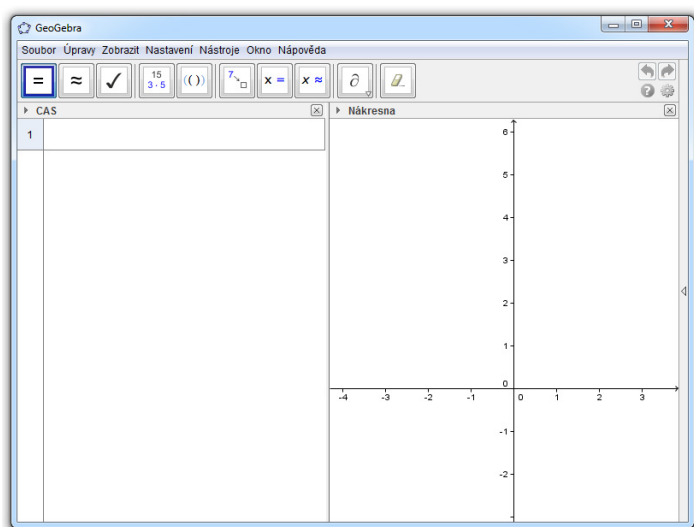
Problematika je řešena v projektu FRVŠ 1103/2013 „Vytvoření e-learningových kurzů s multi-mediálními studijními materiály pro matematické předměty na vybraných fakultách Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava“.

Po spuštění GeoGebry se v dialogovém okně objeví nabídka výběru činnosti.



Obrázek 25: Úvodní obrazovka

Vybereme položku *CAS a grafika*. Dialogové okno CAS lze také vyvolat z nabídky v menu: *Nastavení* → *CAS*. Otevře se okno pro symbolické výpočty.



Obrázek 26: CAS

Popíšeme si jednotlivé nástroje, jejich použití budeme demonstrovat na příkladech.

Nástroje CAS



Vyhodnotit/Přesné vyhodnocení

Toto je základní nástroj pro vkládání objektů. Jeho ekvivalentem je klávesa *Enter*. Klikneme do prvního řádku CAS okna a zadáme např. funkci $\sin(x)$, stiskneme klávesu *Enter*. Klikneme na funkci $\sin(x)$ v řádku č. 1, a poté na nástroj *Vyhodnotit*. Obdržíme stejný výsledek.

Navíc lze použitím nástroje *Zobrazit/Skrýt objekt*, který se nachází pod číslem řádku, funkci $\sin x$ zobrazit v grafickém okně. Všimněme si, že GeoGebra poté této funkci přiřadí název, vnitřní proměnnou, pomocí které se na tuto funkci můžeme odkázat. O dalších možnostech odkazování se zmíníme na konci příspěvku.

Zkusme zadat $a+b$ *Enter* $\rightarrow a+b$, není nutné definovat konkrétní hodnoty proměnných a a b .

Zadejme $(a+b) * (a-b)$ *Enter*, GeoGebra výraz upraví, dostáváme $a^2 - b^2$.



Numerický/Numerický výpočet

Tento nástroj realizuje numerický výpočet. Jeho ekvivalentem je klávesová zkratka *Ctrl+Enter*. Zadejme $\text{sqrt}(2)$ *Enter* $\rightarrow \sqrt{2}$. Nyní zkusíme odmocninu ze dvou vyhodnotit numericky, s použitím tohoto nástroje, $\text{sqrt}(2)$ *Ctrl+Enter* $\rightarrow 1.41$.



Zachovat a zkontrolovat vstup

Pokud nechceme, aby byl vkládaný výraz jakkoliv měněn, zvolíme tento nástroj. Ekvivalentem je klávesová zkratka *Alt+Enter*.

Zadejme $(a+b) * (a-b)$ *Alt+Enter* $\rightarrow (a+b)(a-b)$. Zadejme $1+2$ *Enter* $\rightarrow 3$. Zadejme $1+2$ *Alt+Enter* $\rightarrow 1+2$.

Pokud chceme používat výše uvedené klávesové zkratky, je nutné, aby byl aktivní, tj. označený nástroj *Vyhodnotit*.



Faktor/Nalézt faktory

Tento příkaz v zadaném výrazu hledá faktory, vytýká, počítá rozklad. Rozložme číslo 75, $75 \rightarrow 3 \cdot 5^2$. Zkusme další příklad, $(\cos(x))^2 - \sin(x) * \cos(x) \rightarrow (\cos(x) - \sin(x)) \cos(x)$.



Rozšířit/Rozšířit závorky

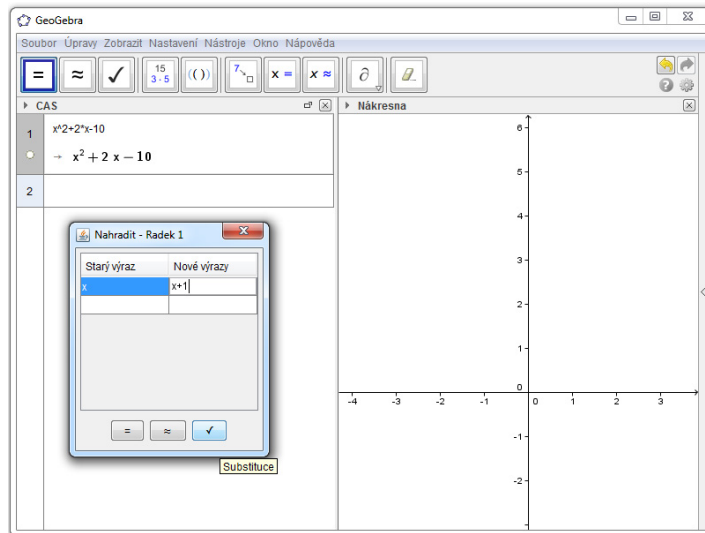
Tento nástroj roznásobuje (rozšiřuje) závorky, $2 * (a+b) \rightarrow 2a + 2b$. Stejný výsledek ovšem obdržíme i v případě použití prvního nástroje, $2 * (a+b)$ *Enter* $\rightarrow 2a + 2b$.



Substituce/Nahradit část výrazu

Zadáme výraz a zvolíme tento nástroj. Objeví se dialogové okno, které nám nabídne možnosti substitucí v daném výrazu.

Zadejme, $x^2+2x-10$. Vyberme nástroj *Substituce*. V dialogovém okně zvolíme část výrazu, který je možné nahradit a do sousedního pole zapíšeme vlastní substituci, $x+1$. Klikneme na ikonku „fajfka, odrážka“ a obdržíme $(x+1)^2+2(x+1)-10$. Všimněme si, že je možné také přímo použít nástroj přesného vyhodnocení a numerického výpočtu.



Obrázek 27: Substituce



Vyřešit/Řešit jednu nebo více rovnic

Nástroj umožňuje symbolicky vyřešit jednu nebo více rovnic. V případě, že GeoGebra řešení nenalezne, je možné použít následující nástroj, sloužící k numerickému řešení rovnic. Zadejme, $x^2+4x-12=0 \rightarrow \{x=2, x=-6\}$.

Je možné řešit i systém rovnic, zadáme jednotlivé rovnice, poté rovnice označíme myší a zvolíme nástroj. Např. zadáme $3x+2y-10=0$ *Enter*, $x^2+y^2=25$ *Enter*. Označíme myší oba řádky, klikneme na ikonu nástroje, obdržíme výsledek $\left\{ \left\{ x = \frac{60}{30}, y = -\frac{25}{13} \right\}, \{ x = 0, y = 5 \} \right\}$.



Řešit numericky/Numericky vyřeší jednu či více rovnic

Tento nástroj vyřeší numericky rovnici nebo soustavu rovnic, pracujeme zcela analogicky jako s předcházejícím nástrojem. Zadejme, $x-3x^2+y-y^3=16$ *Enter*, $x-y^2=11$ *Enter*, zkusme řešit soustavu nejdříve symbolicky, GeoGebra symbolické řešení nenalezne. Stejnou soustavu ovšem vyřešíme numericky, řešení: $\{x=11, y=-0.01\}$.



Derivace/Nalézt první derivaci

Pomocí tohoto nástroje získáme symbolickou derivaci funkce. Např. $\text{tg}(x) \rightarrow \text{tg}^2(x)+1$. Pro studenty může být překvapující, že výsledek není $\frac{1}{\cos^2 x}$, nicméně se snadno přesvědčíme, že se jedná o alternativní zápis téže funkce.



Integrál/Najít neurčitý integrál

Hledáme neurčitý integrál zadané funkce. Na tomto místě bychom chtěli poznamenat, že není možné očekávat od GeoGebry, že si poradí s libovolnou funkcí. Dokonce i některé, triviálně integrovatelné funkce v současné verzi GeoGebra neintegruje.

Např. funkci $\cos(2x) / (\sin(x))^2$ GeoGebra neintegruje, ale stačí čítec rozložit pomocí známé identity, $(\cos(x))^2 - (\sin(x))^2 / ((\sin(x))^2)$, s takovou funkcí už si GeoGebra poradí, $\frac{-\cos(x)-2 \sin(x) x}{\sin(x)} + C_1$.



Zrušit objekt/Vybrat objekt

Smaže označený řádek nebo řádky.

Postřehy a poznámky

Implementace symbolického řešiče do GeoGebry posouvá software na vyšší úroveň. Nabízí něco navíc a přitom zůstaly zachovány všechny klíčové vlastnosti Geogebry, interaktivita, provázanost s grafickým výstupem, atd.

Příspěvek si nekladl za cíl podat úplný popis práce se symbolickými výpočty v GeoGebře, jedná se o úvod do problematiky.

Zmiňme se v krátkosti ještě o další možnostech: je možné definovat proměnné, např. $a:=5$. Název proměnné lze také uvolnit, $\text{Smazat}[a]$. Chceme-li proměnnou změnit, je nutné to udělat ve stejném řádku, jinak to GeoGebra vyhodnotí jako novou proměnnou a přiřadí této proměnné nový název.

Několik poznámek na téma odkazování. Pro statický odkaz se používá symbol #, např. #3 odkáže na třetí řádek. Pro dynamický odkaz se používá symbol \$, \$3 odkáže na třetí řádek. Rozdíl spočívá v tom, že ve druhém případě při změně v řádku 3, dojde ke změně i v řádku, který se na tento třetí řádek odkazuje.

V prázdném řádku je možné několika způsoby se odkázat na předchozí řádek; Space se odkáže na výstup předchozího řádku, $=$ na vstup, $)$ na výstup v závorkách.

Obsah

Kuželosečky v GeoGebře	IV
Příklad 1: Kružnice daných vlastností	V
Příklad 2: Vzájemná poloha elipsy a přímky	IX
GeoGebra ve výuce Matematiky I a II	XIII
Příklad 3: Průběh funkce	XIV
Příklad 4: Určitý integrál	XVIII
Ukázka využití GeoGebry při řešení základních statistických problémů	XX
Příklad 5: Analýza jednorozměrných dat	XXI
„Art“ GeoGebra - Geometrické vzory	XXVII
Příklad 6: Geometrické vzory 1	XXVIII
Příklad 7: Geometrické vzory 2	XXXI
Pythagorův strom a Bézierova křivka	XXXIV
Příklad 8: Pythagorův strom	XXXV
Příklad 9: Bézierova křivka	XXXVII
Dynamické propojení dat mezi <i>Nákresnou</i> a <i>Tabulkou</i>	XXXIX
Příklad 10: Tabele funkce	XL
Příklad 11: Taylorův polynom	XLI
GeoGebra a CAS	XLIII

Název:	Sborník z 22. semináře Moderní matematické metody v inženýrství, česko – polský seminář
Místo, rok, vydání:	Ostrava, 2013, I. vydání
Počet stran:	298
Vydala:	Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava
Katedra:	matematiky a deskriptivní geometrie
Náklad:	80 ks

Neprodejně

ISBN 978-80-248-3233-3