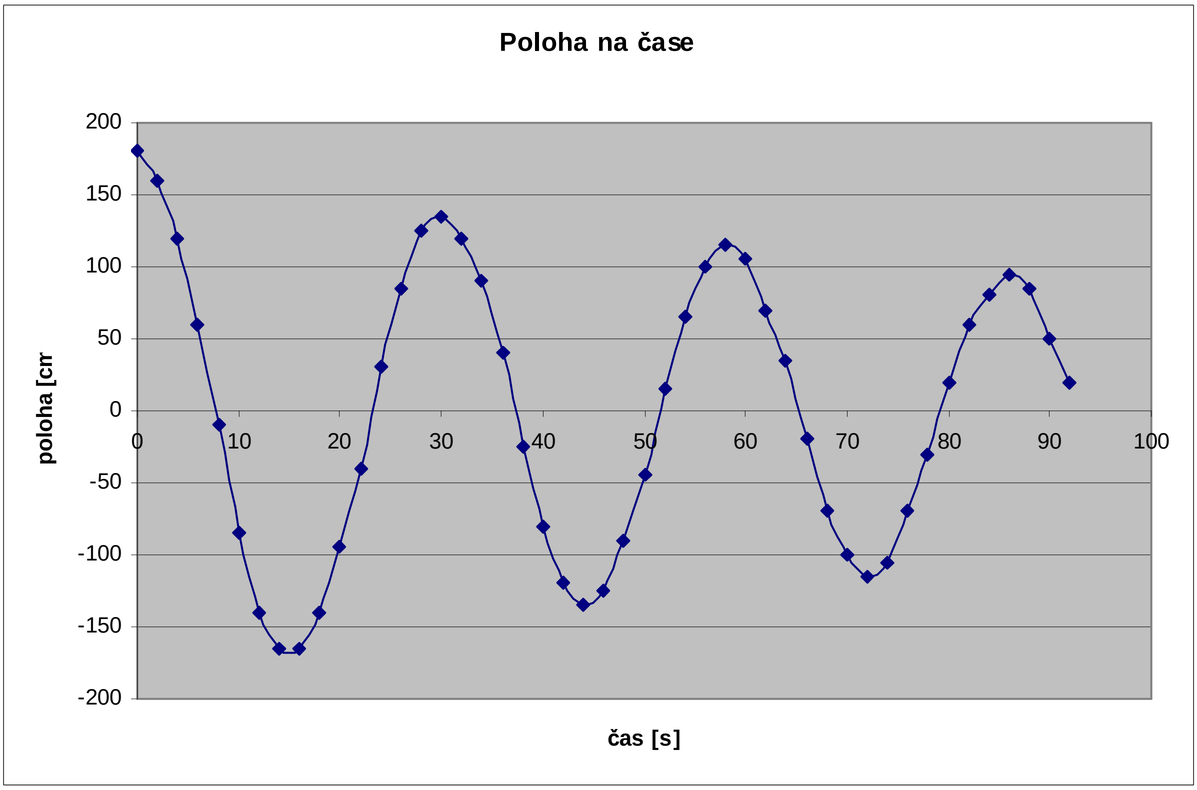
4.1.2 Periodické funkce

Předpoklady: 4101

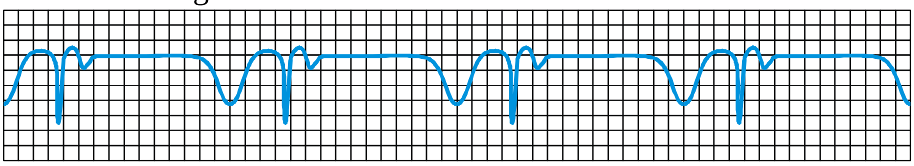
Co znamená slovo **periodický**?
Opakující se $\Rightarrow$ periodická funkce = funkce, která se opakuje.

Hodně příkladů:
Graf kývajícího se koštěte:



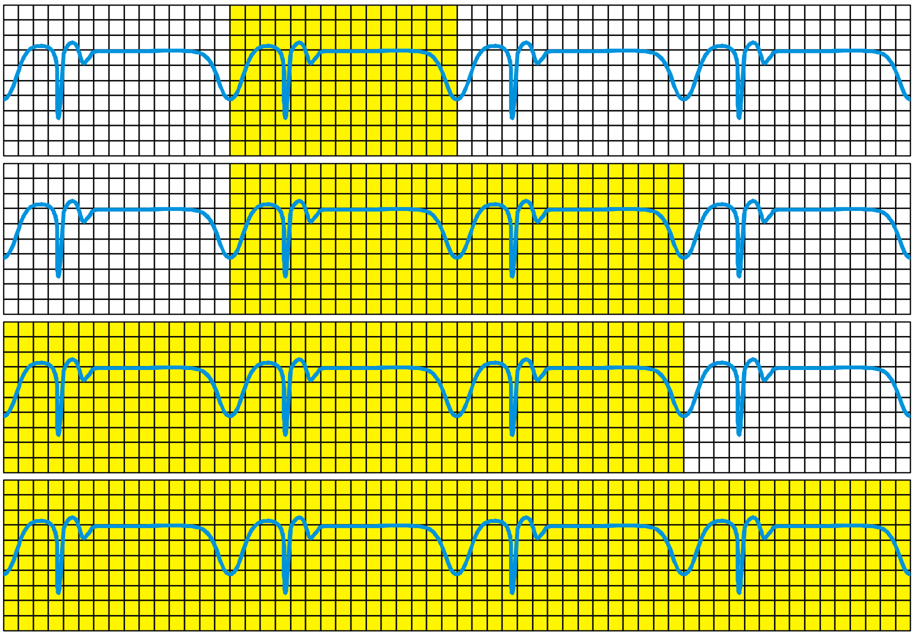
Poznámka: Funkce v grafu samozřejmě není zcela periodická, protože se snižuje výška vlnek (pohyb koštěte se postupně zpomaluje a uklidňuje).

Záznam kardiografu:



Poznámka: Funkce v grafu samozřejmě je periodická pouze proto, že nejde o skutečný kardiograf. Opravdové srdce nebije pokaždé stejně, například při námaze nebo stresu bije rychleji (Jak by se to projevilo?).

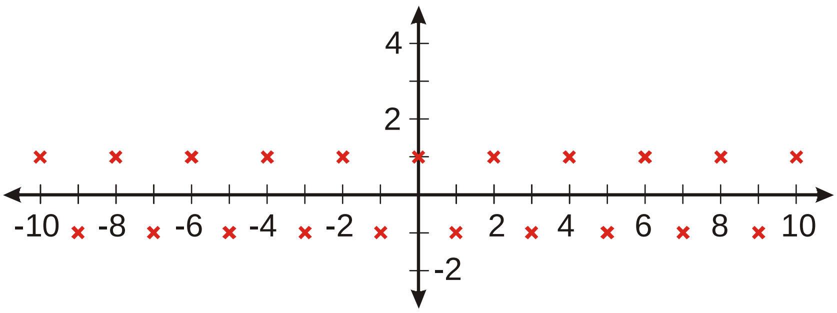
Oba grafy mají vzor, který se stále opakuje. $\Rightarrow$ **periodická funkce se skládá ze stále se opakujících kousků**.
Kousků, ze kterých můžeme graf sestavit, je víc. Například kardiograf jde sestavit z těchto základních (stále se opakujících) částí:



$\Rightarrow$ graf můžeme sestavit z „typického nejmenšího“ kousku a pak ze všech kousků, které sestavíme z něj.

Teď to zkusíme exaktně.

Př. 1: Nakresli graf funkce $y = (-1)^x$; $x \in Z$ a rozhodni, zda je funkce periodická.



Funkce je periodická. Dva křížky (jeden v 1, druhý v –1) se stále opakují. Vždy, když se posuneme o dvě, získáme stejné hodnoty.

Pedagogická poznámka: Studenti často nakreslí správně body grafu a pak je špatně spojí čarami. Jde o dobrou ukázku automatismu, který plyne z toho, že naprostá většina grafů, které kreslili, je složena z čar.

Př. 2: Každé reálné číslo *b* můžeme vyjádřit ve tvaru $b = c + d$, kde *c* je celé číslo, *d* je celé číslo, $d \in \langle 0,1)$. Číslo *c* se nazývá celá část čísla *b*, značí se $[b]$ (píšeme $c = [b]$).

a) Napiš uvedený rozklad pro čísla 4; 1,1 a 2,9, s jejich pomocí urči $[4]$; $[1{,}1]$; $[2{,}9]$.

b) Urči $[\pi]$; $[-0{,}5]$; $[-1{,}1]$.

a)

$4 = 4 + 0 \;\Rightarrow\; [4] = 4$ (0 patří do intervalu $\langle 0,1)$ pro *d*)

$1{,}1 = 1 + 0{,}1 \Rightarrow [1{,}1] = 1$ $\quad$ $2{,}9 = 2 + 0{,}9 \Rightarrow [2{,}9] = 2$

b)

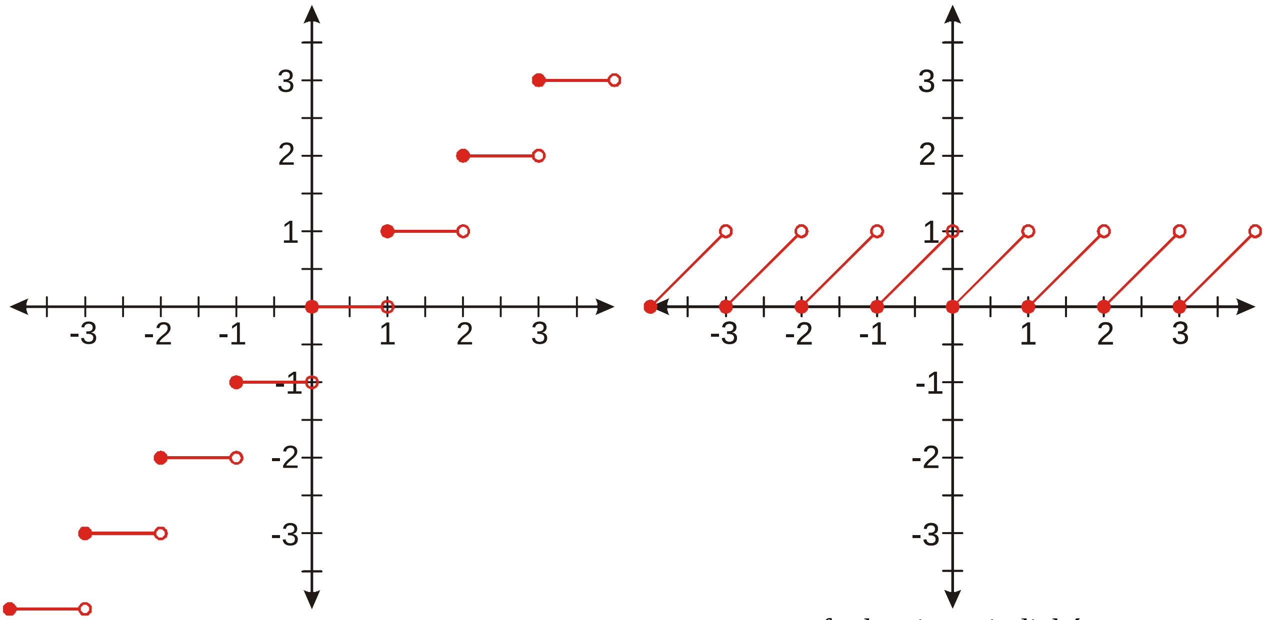
$\pi = 3 + 0{,}1428... \Rightarrow [\pi] = 3$

$-0{,}5 = -1 + 0{,}5 \Rightarrow [-0{,}5] = -1$ (rozklad $-0{,}5 = 0 + (-0{,}5)$ neodpovídá zadání, protože $d = -0{,}5 \notin \langle 0{,}1)$)

$-1{,}1 = -2 + 0{,}9 \Rightarrow [-1{,}1] = -2$

Pedagogická poznámka: Pro hodně studentů je obtížné napsat $4 = 4 + 0$, proto doporučuji studentům, aby zkusili napsat rozklad pro všechna tři čísla zadaná v bodě a). Velmi často se vyskytuje špatný zápis: $-0{,}5 = 0 - 0{,}5 = 0 + (-0{,}5)$. Chybující studenty upozorněte a nechte je samostatně (alespoň na chvíli) hledat chybu. Jde o důležité cvičení pozorného čtení textu. (chyba: $d = -0{,}5 \notin \langle 0{,}1)$). $[-1{,}1]$ pak již určí všichni správně.

Př. 3: Nakresli grafy funkcí $y = [x]$ a $y = x - [x]$. Rozhodni, zda jde o periodické funkce.



funkce není periodická $\qquad$ funkce je periodická

Jak porovnáváním zapsat, že se opakuje nějaký vzor?
Funkce vyrábí na stejných místech vzorku stejná čísla (třeba na začátku vzorku je vždy stejná hodnota, uprostřed také) $\Rightarrow$ na začátku každého vzorku, musíme dostat stejné číslo jako na začátku předchozího.

Důležité je, za jak dlouho se začne vzor opakovat.
Funkce $y = x - [x]$ se opakuje po $1; 2; 3...$ $\Rightarrow$ když se posuneme na ose x o $1; 2; 3...$, získáme stejnou hodnotu jako v místě, ze kterého jsme vyšli $\Rightarrow$

Definice: Funkce se nazývá periodická právě tehdy, když existuje takové číslo $p > 0$, že pro každé $k \in Z$ platí následující podmínky:

a) pro každé $x \in D(f)$ **je i** $x + k.p \in D(f)$**,**

b) pro každé $x \in D(f)$ **platí** $f(x + p.k) = f(x)$**.**

Př. 4: Popiš běžnými slovy význam čísel *k* a *p* v předchozí definici.

p udává délku opakujícího se úseku.
k udává, o kolik opakovacích vzdáleností se posouváme (kladné *k* znamená posun doprava, záporné *k* znamená posun doleva).

Číslo *k* se nazývá perioda.

Př. 5: Urči periodu pro funkci $y = x - [x]$.

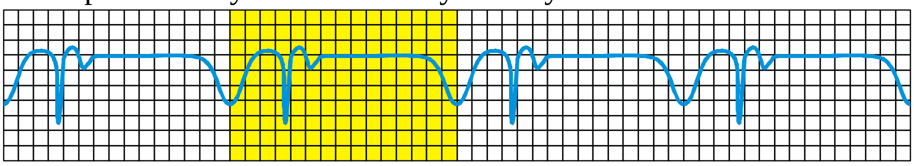
Funkce se opakuje po 1 a všech násobcích tohoto čísla $\Rightarrow$ $p = 1; 2; 3; 4 \ldots$.

Mezi periodami funkce $y = x - [x]$ je nejmenší číslo 1. Nazývá se **nejmenší perioda**.

Dodatek: Je zajímavé, že existují periodické funkce bez nejmenší periody.

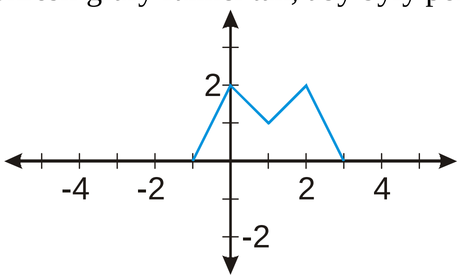
Př. 6: Urči (v dílcích) periodu záznamu kardiografu.

Stačí spočítat dílky na obrázku s vyznačeným vzorem.

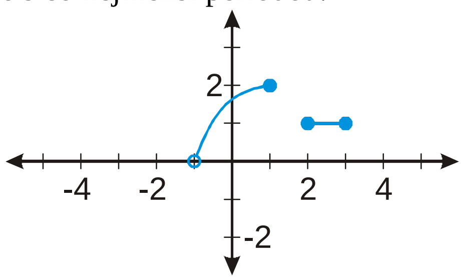


Perioda záznamu je 15 dílků.

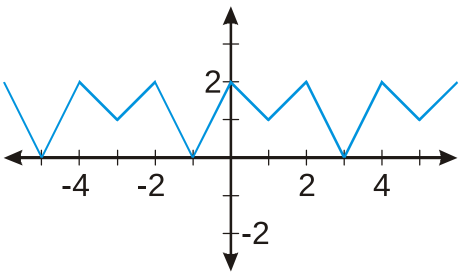
Př. 7: Dokresli grafy funkcí tak, aby byly periodické s co nejmenší periodou.



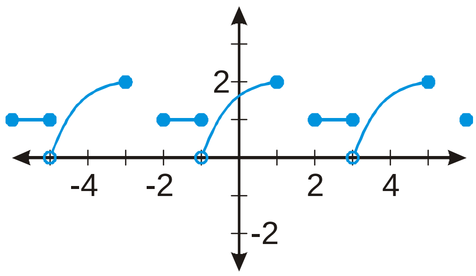
a)



b)



a)



b)

Pedagogická poznámka: S druhým grafem mají studenti daleko větší problémy, v nakresleném kousku je „díra“ a počáteční a konečný bod nejsou stejně vysoko (studenti mají „odpor“ k funkcím, které nejsou spojité).

Shrnutí: Hodnoty periodické funkce se opakují. Její nejkratší opakující se část se nazývá nejmenší perioda.