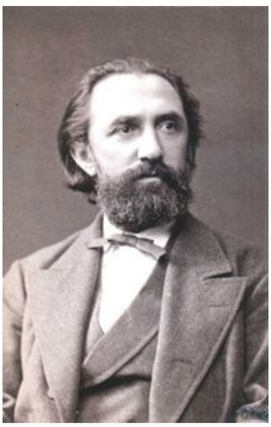
NĚKTERÉ KINEMATICKÉ DVOJICE

JAROSLAV HRDINA

ABSTRAKT. Tento text představuje jednu z mnoha aplikací lineární algebry, Lieovy teorie a diferenciální geometrie v matematické robotice. Našim cílem je připomenout klasifikaci kinematických dvojic vyššího řádu, která odpovídá klasifikaci souvislých Lieových podgrup afinní euklidovské grupy $SE(3)$, a tuto klasifikaci následně provést.

1. ÚVOD

Teorie kinematických dvojic je důležitou partií kinematiky a tento text se jí věnuje jen částečně. Čtenáře s hlubším zájmem o kinematické dvojice můžeme odkázat na první kapitolu knihy [2]. Neformálně řečeno, kinematickou dvojicí rozumíme dvojici objektů (souvislých podvariet $\mathbb{R}^3$), které se vzájemně dotýkají a současně mají volnost při vzájemném pohybu, přičemž pohybem rozumíme spojitou transformaci zachovávající vzdálenosti mezi libovolnými dvěma body objektů a příslušnou orientaci.



Nás zajímají vyšší kinematické dvojice, tedy případ, kdy jsou obě dvojice povrchového typu, a body kontaktu tedy tvoří plochu. Našim cílem je klasifikovat tyto kinematické dvojice aparátem Lieových grup. Po definování afinní euklidovské grupy $SE(3)$ jako polopřímého součinu speciální ortogonální grupy $SO(3)$ a translační grupy $\mathbb{R}^3$ najdeme všechny její Lieovy podgrupy (na tento polopřímý součin se můžeme dívat i jako na afinní rozšíření speciální ortogonální grupy $SO(3)$). Začneme tím, že najdeme všechny Lieovy podgrupy $SO(3)$ a $\mathbb{R}^3$, přičemž u podgrupy $SO(3)$ se omezíme jen na souvislé. Po klasifikaci příslušných podgrup prodiskutujeme, které dvojice tvoří Lieovu podgrupu $SE(3)$ a případně, jaká souvislá plocha je vůči akci této grupy invariantní. Poznamenejme, že historie této klasifikace je spojena se jménem otce kinematiky Franzem Reuleauxem (na obrázku), 30.9. 1829 - 20.8. 1905, strojním inženýrem,

2010 *MSC.* Primární 70B10,22E70, 53A17.
Klíčová slova. Lineární algebra, Lieova teorie, diferenciální geometrie, matematická robotika.
Práce byla podporována projektem OPVK číslo CZ.1.07/2.4.00/17.0100.

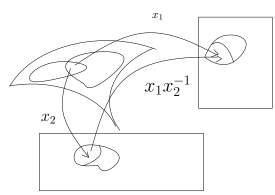
učitelem a pozdějším rektorem Berlin Royal Technical Academy. Jím zavedený pojem Reuleauxovy plochy odpovídá právě plochám ve třírozměrném euklidovském prostoru, které jsou invariantní vůči akci některé z podgrup afinní euklidovské grupy $SE(3)$, jejichž prvky působí jako afinní euklidovské transformace. Tyto plochy odpovídají právě vyšším kinematickým dvojicím.

2. Matematický základ

Pojmy lineární algebry a diferenciální geometrie potřebné pro odvození klasifikace budou v textu na příslušném místě připomenuty. Text vychází převážně z knihy [3], ve které je možné nalézt mnoho dalších podrobností a její studium je možné doporučit i čtenářům s hlubším zájmem o problematiku. Poznamenejme, že existuje i výborná česká monografie [4].

2.1. Lieova grupa

Připomeňme, že topologická varieta je separovaný (každé dva jeho různé body mají disjunktní okolí) topologický prostor M se spočetnou bází, který je lokálně homeomorfní $\mathbb{R}^n$, tj. pro každé $y \in M$ existuje jeho okolí U, otevřená množina $V \subset \mathbb{R}^n$ a homeomorfismus $x : U \to V$. Příslušnou dvojici (U, x) nazýváme lokální mapa. Dvě lokální mapy jsou C^r–relované, pokud přechodové zobrazení na obrazech průniku při zobrazeních x_1 a x_2, tj. $x_1 x_2^{-1} : x_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^n \to x_1(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^n$, je funkce třídy C^r. Atlasem třídy C^r rozumíme soustavu C^r–relovaných map takových, že jejich definiční obory pokrývají celé M a jsou po dvou C^r–relované. Hladkou varietou pak rozumíme topologickou varietu s atlasem třídy C^∞. Podrobný popis je možné najít v libovolném textu diferenciální geometrie, např. ve skriptech [5].



Lieova grupa je hladká varieta vybavena strukturou grupy taková, že příslušné grupové operace jsou hladké, tj.

- Existuje význačný prvek $e \in G$
- Existují dvě hladké funkce $mult : G \times G \to G$, $inv : G \to G$, takové, že

$$mult(a, mult(b, c)) = mult(mult(a, b), c),$$
$$mult(a, e) = mult(e, a) = a,$$
$$mult(a, inv(a)) = mult(inv(a), a) = e,$$

pro každé $a, b, c \in G$.

Příklad. 2.2. *Nejjednodušším příkladem Lieovy grupy je prostor $\mathbb{R}^n$, kde příslušný atlas obsahuje právě jednu mapu, kterou je identita. Příslušné operace jsou definovány po složkách, tj.*

$$mult(u, v) = u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n),$$
$$inv(u) = -u = (-u_1, \dots, -u_n),$$

pro $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ a jsou jistě hladké. Podobně může být Lieovou grupou grupa matic $Mat_n(\mathbb{R})$ spolu s operací sčítání, která je izomorfní grupě $(\mathbb{R}^{n^2}, +)$. Dalším příkladem jsou obecně vektorové prostory dimenze n, kde volba báze znamená volbu izomorfního zobrazení $\alpha : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^n$, a tedy volbu mapy pokrývající celý vektorový prostor. Příslušný atlas je pak tvořený jen touto jedinou mapou.

2.3. Ortogonální grupa $O(n)$

Dalším příkladem Lieovy grupy je grupa všech invertibilních matic $n \times n$ spolu s operací násobení. Tuto grupu označujeme $GL(n, \mathbb{R})$. Jedná se vlastně o grupu lineárních endomorfismů vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$. Diskutujme některé její podgrupy. Ortogonální grupou $O(n, \mathbb{R})$ se myslí podgrupa grupy $GL(n, \mathbb{R})$ obsahující prvky zachovávající nedegenerovanou pozitivně definitní bilineární symetrickou formu na $\mathbb{R}^n$ (skalární součin)

$$x \cdot y = x^T y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

kde $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, nebo maticově

$$\big(x_1, x_2, \ldots, x_n\big) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Pokud $M \in O(n)$, musí pro libovolné dva body $x, y \in \mathbb{R}^n$ platit $\bar{x}^T \bar{y} = x^T y$, kde $\bar{x} = Mx$ a $\bar{y} = My$, a přímočarým výpočtem

$$\bar{x}^T \bar{y} = (Mx)^T My = x^T M^T My$$

ověříme, že grupu $O(n)$ můžeme definovat předpisem

$$O(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) | M^T M = E\},$$

kde E je jednotková matice.

2.4. Speciální ortogonální grupa $SO(n)$

Protože $\det(M^T) = \det(M)$, platí pro každé $M \in O(n)$, že $\det(M)^2 = 1$, a tedy $\det(M) = \pm 1$. Není těžké si rozmyslet, že funkce determinantu je hladké (polynomiální) zobrazení $\det : Mat_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, a varieta $O(n)$ tedy obsahuje právě dvě souvislé komponenty, vzory čísel ± 1 pro funkci determinantu.

$$O_+(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) | M^T M = E, \det(M) = 1\},$$
$$O_-(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) | M^T M = E, \det(M) = -1\}.$$

Pro naše úvahy je důležité, že pouze množina $O_+(n)$ obsahuje identitu, a tedy tvoří Lieovu podgrupu grupy $O(n)$, označovanou jako $SO(n)$.

Příklad. 2.5. *Nejjednodušším příkladem je grupa $O(2)$, která obsahuje dvě souvislé, jednodimenzionální komponenty reprezentované maticemi*

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

kde $\varphi \in (0, 2\pi\rangle$. Není těžké si uvědomit, že podgrupa tvořená maticemi vlevo obsahuje jednotkovou matici, a je tedy podgrupou $SO(2)$. Všimněme si, že příslušné transformace odpovídají právě otočením kolem středu o úhel φ v kladném směru (proti směru hodinových ručiček).

2.6. Homomorfismus Lieových grup

Hladké zobrazení $f : G \to H$ takové, že

$$f(mult_G(g_1, g_2)) = mult_H(f(g_1), f(g_2)), \text{ pro všechna } g_1, g_2 \in G$$

nazýváme homomorfismem Lieových grup $(G, mult_G)$ a $(H, mult_H)$.

Příklad. 2.7. *Na definovaných Lieových grupách můžeme ukázat dva důležité homomorfismy Lieových grup. Protože jsme speciální ortogonální grupu zadefinovali jako podmnožinu ortogonální grupy, můžeme následně definovat příslušné vložení*

$$SO(n) \hookrightarrow O(n).$$

Při maticové reprezentaci Lieových grup, můžeme speciální ortogonální grupu řádu n vložit do speciální ortogonální grupy řádu $n+1$,

$$SO(n) \hookrightarrow SO(n+1)$$

následovně:

$$M \in SO(n) \mapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(n+1).$$

Stačí ověřit, že pro každé $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, kde $M \in SO(n)$, je splněna identita

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^T M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

a hodnota deteminantu je jedna, tj.

$$\det \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(M) \cdot (-1)^{(n+1)+(n+1)} = 1 \cdot (-1)^{2n+2} = 1.$$

2.8. Akce Lieovy grupy G na hladké varietě X

Nechť X je hladká varieta a $(G, mult)$ je Lieova grupa. Pak hladké zobrazení

$$a : G \times X \to X$$

takové, že

- $a(e, x) = x$ pro $\forall x \in X$, kde $e \in G$ je jednotkový prvek
- $a(g_1, a(g_2, x)) = a(mult(g_1, g_2), x)$ pro $\forall x \in X$, $\forall g_1, g_2 \in G$,

se nazývá akcí Lieovy grupy G na hladké varietě X.

Příklad. 2.9. *Vynásobení vektoru $x \in \mathbb{R}^n$ maticí $M \in SO(n)$ (obecně maticí z $GL(n, \mathbb{R})$) zleva má vlastnosti akce, protože se jedná o hladké (polynomiální) zobrazení, jednotková matice působí jako identita a poslední podmínka plyne z asociativity násobení matic. V naší terminologii to znamená, že grupa $SO(n)$ působí na $\mathbb{R}^n$ jako vynásobení maticí, kde*

$$a_1(M, v) = Mv$$

je příslušná akce $M \in SO(n)$, $v \in \mathbb{R}^n$. Obdobně grupa $\mathbb{R}^n$ působí na $\mathbb{R}^n$ jako přičítání (pro přehlednost píšeme zprava), tj.

$$a_2(k, v) = v + k$$

je opět akce, kde $k \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$. Poznamenejme, že složení $a_2 \circ a_1$ těchto akcí působí na $\mathbb{R}^n$ jako afinní endomorfismus

$$a_2(t, a_1(M, v)) = Mv + t,$$

kde $M \in SO(n), t \in \mathbb{R}^n$ jsou prvky grup a vektor $v \in \mathbb{R}^n$ je prvek hladké variety. Současně každý afinní endomorfismus připouštějící jen rotace z $SO(3)$ je možné realizovat vhodnou volbou $M \in SO(n)$ a $t \in \mathbb{R}^n$.

2.10. Přímý součin $SO(n) \times \mathbb{R}^n$

Definujeme přímý součin grup $SO(n) \times \mathbb{R}^n$ jako množinu uspořádaných dvojic s výsledným násobením po složkách (ve druhé složce jde v případě $\mathbb{R}^n$ o sčítání) a definujeme hladké zobrazení $a : (SO(n) \times \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ předpisem

$$a((M, t), v) = Mv + t,$$

kde $M \in SO(n), t \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^n$. Toto hladké zobrazení přiřazuje každé dvojici $M \in SO(n), t \in \mathbb{R}^n$ příslušný afinní epimorfismus a prvek $(E, 0)$ (kde E je jednotková matice) působí jako identita. V tomto případě se ale nejedná o akci, protože druhá podmínka akce není splněna. Stačí zvolit $t_2 \in \mathbb{R}^n$ a $M_1 \in SO(n)$ tak, že t_2 není osou rotace (vlastním vektorem) M_1, a dostaneme

$$a((M_1, t_1), a((M_2, t_2), v)) = M_1M_2v + M_1t_2 + t_1 \neq$$

$$M_1M_2v + t_1 + t_2 = a((M_1M_2, t_1 + t_2), x) = a(mult((M_1, t_1), (M_2, t_2)), v).$$

Afinní transformace jsou kombinace lineárních transformací a posunutí. Jsou to tedy kombinace akcí a_1 a a_2 z příkladu 2.9. Vidíme ale, že se nemůže jednat o přímý součin těchto dvou akcí. Našim cílem je popsat afinní izomorfismy jako akci nějaké vhodné grupy, a grupa $SO(n) \times \mathbb{R}^n$ to tedy být nemůže.

2.11. Euklidovská grupa $SE(n)$

Pohyb v euklidovském prostoru je popsaný souřadnicemi bodu v závislosti na čase. Pro modelování pohybu v robotice je nutné, aby vzdálenost každých dvou bodů pohybujícího se objektu (např. robotické paže) zůstala v čase konstantní. Současně je nutné zachovat orientaci pohybujícího se objektu. Zajímají nás tedy afinní endomorfismy $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ splňující následující dvě podmínky:

- $\parallel g(p) - g(q) \parallel = \parallel p - q \parallel$ pro všechny body $p, q \in \mathbb{R}^n$
- $g_*(v \times w) = g_*(v) \times g_*(w)$, pro všechny vektory $v, w \in \mathbb{R}^n$, kde $g_*(p - q) := g(p) - g(q)$.

Důsledkem této definice je, že tato transformace musí zachovávat skalární součin vzniklý polarizací

$$v^T w = \frac{1}{4}(\parallel v + w \parallel^2 - \parallel v - w \parallel^2),$$

a tedy akci a_1 musíme zúžit k podgrupě $O(n)$. Pro euklidovskou normu v $\mathbb{R}^2$ můžeme korektnost polarizace ověřit. Konkrétně pro

$$\| (x,y) \| = \sqrt{x^2+y^2}$$

dostaneme

$$\begin{aligned}(x_1,y_1)^T(x_2,y_2) &= \frac{1}{4}(\| (x_1+x_2,y_1+y_2) \|^2 - \| (x_1-x_2,y_1-y_2) \|^2) = \\ &= \frac{1}{4}((x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2) = \\ &= \frac{1}{4}(2x_1x_2+2y_1y_2+2x_1x_2+2y_1y_2) = x_1x_2+y_1y_2.\end{aligned}$$

Z druhé podmínky pro pohyb je jasné, že příslušný afinní endomorfismus musí zachovávat i orientaci, a jeho část reprezentující rotaci musí být tedy prvkem speciální ortogonální grupy $SO(n)$.

Podíváme–li se podrobněji na příslušné matice, není těžké dokázat, že každý prvek z $O(n)_-$ lze dostat jako součin vhodného prvku z $SO(n)$ a nějakého pevně zvoleného prvku $P \in O_-(n)$. Připomeňme, že takové P splňuje identitu $P^TP = E$ a jeho determinant je mínus jedna. Příklady takových matic můžou odpovídat různým reflexím, konkrétně

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde například matice P_2 odpovídá reflexi kolem osy x, a tedy určitě nezachovává orientaci. V $\mathbb{R}^2$ matice P_2 směr rotace přímo otáčí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & \sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & -\cos(-\varphi) \end{pmatrix}.$$

Celkově je tedy jasné, že příslušné pohyby tělesa musí být afinní endomorfismy $Mv + t$ takové, že $M \in SO(n)$ a $t \in \mathbb{R}^n$.

Definujeme tedy zobrazení a přiřazující dvojici prvků $(R,t) \in SO(n) \times \mathbb{R}^n$ zobrazeni $a((R,u),x) = Rx+t$. Nejedná se o přímý součin akcí a_1 a a_2 definovaných dříve, protože při složení zobrazení pro dva různé prvky platí

$$a((R_2,t_2),a((R_1,t_1),x)) = a((R_2,t_2),R_1x+t_1) = R_2R_1x + R_2t_1 + t_2$$

a zatím co prvky reprezentující otočení se skládají přímo, prvky reprezentující posunutí jsou ovlivněné předchozím otočením.

Abychom hladkou akci mohli korektně definovat, zavedeme euklidovskou grupu $SE(3)$ jako polopřímý součin

$$SE(n) = SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n,$$

kde polopřímost je určená na druhé složce funkcí $\varphi : t \mapsto Rt$, a tedy obecně píšeme

$$(R_2,t_2)(R_1,t_1) = (R_2R_1, \varphi(t_1)+t_2).$$

Pro počítání s polopřímým součinem zavedeme afinní rozšíření grupy $SO(n)$ jako maticovou reprezentaci grupy $SE(n)$ tak, že použijeme vložení

$$SE(n) \hookrightarrow GL(n+1,\mathbb{R}),$$

maticově zapsané

$$(R, t) \mapsto \begin{pmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Smyslem této reprezentace je, že násobení v polopřímém součinu $SE(n)$ je v afinním rozšíření reprezentováno jako násobení příslušných matic

$$\begin{pmatrix} R_2 & t_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_2R_1 & R_2t_1 + t_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inverzní transformace se pak maticově zapíše jako

$$\begin{pmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} R^T & -R^Tt \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Akce grupy $SE(n)$ na $\mathbb{R}^n$ je definována pomocí injekce

$$\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \ v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \tilde{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix},$$

jako maticové násobení

$$\begin{pmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rv + t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Znovu připomeňme, že geometrický význam této akce je pootočení dané maticí $R \in SO(n)$ a posunutí o vektor $t \in \mathbb{R}^n$.

2.12. Lieovy podgrupy a homomorfismy

Lieovou podgrupou rozumíme podvarietu Lieovy grupy uzavřenou vzhledem ke grupovým operacím. Elementárním příkladem je triviální podgrupa $0 = \{E\} \subset GL(n, \mathbb{R})$, kde E je jednotkový prvek. Připomeňme stručně některé pojmy a hlavně výsledky obecné algebry, pro podrobnější informace je možné nahlédnout do knihy [1].

Prvky jádra grupového homomorfismu $f : (G, t) \to (H, t)$ jsou uzavřené vzhledem ke grupové operaci

$$\forall a, b \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow (f(a) = f(b) = 0) \Rightarrow (f(a + b) = 0) \Rightarrow (a + b) \in \mathrm{Ker} f,$$

a tedy

$$f(-x) = -f(x),$$
$$f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x) = 0 + 0 = 0,$$

tvoří podgrupu v G. Prvky obrazu jsou také uzavřeny na grupovou operaci

$$\forall a, b \in \mathrm{Im} f \Rightarrow (\exists u, v \in G : f(u) = a, f(v) = b) \Rightarrow (f(u + v) = a + b) \Rightarrow (a + b) \in \mathrm{Im} f$$

a tvoří tedy podgrupu v H. V případě, že jde o homomorfismus Lieových grup, f musí být hladké a tyto podgrupy jsou Lieovy podgrupy. Připomeňme také, že každá podgrupa je jádrem vhodného homomorfismu.

Každá podgrupa $H \subset G$ určuje ekvivalenci na G předpisem

$$g_1 \equiv g_2 \Longleftrightarrow g_1 = hg_2 \text{ pro nějaké } h \in H.$$

Stručně připomeňme pojmy, které jsou s relací ekvivalence spojené. Třídami ekvivalence rozumíme množiny $[g] = \{gh|h \in H\}$. Množinu všech tříd ekvivalence nazýváme faktor G/H. Připomeňme, že příslušná surjekce $G \to G/H$ je v případě Lieových grup hladké zobrazení, které se nazývá projekce na faktor.

2.13. Normální podgrupy

Příslušný faktor G/H nemusí obecně zdědit příslušné grupové operace, klíčem je následující definice:

$$N \subseteq G \text{ normální } \iff gng^{-1} \in N, \forall g \in G, \forall n \in N.$$

Pokud zvolíme normální podgrupu, je příslušný faktor G/N opět grupou (faktorgrupou), protože operace na třídách je dobře definovaná, tj. platí

$$[g_1][g_2] = [g_1 g_2].$$

3. Klasifikace

Abychom popsali příslušné podgrupy, všimněme si nejprve, že grupa translací $\mathbb{R}^3$ reprezentovaná maticemi

$$\begin{pmatrix} E & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{kde } t \in \mathbb{R}^3,$$

je normální podgrupa $SE(3)$, kde E je jednotková matice, protože pro každé $R \in SO(3)$ a $u, t \in \mathbb{R}^3$ platí

$$\begin{pmatrix} R & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^T & -R^T u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & Rt \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Výsledná faktorgrupa $SE(3)/\mathbb{R}^3$ je izomorfní s grupou $SO(3)$ a $SE(3) \to SO(3)$ je příslušná projekce. Protože jde o Lieovy grupy, příslušná projekce je hladké zobrazení. Tedy každá Lieova podgrupa $SE(3)$ zúžena k $\mathbb{R}^3$ (jádro projekce) je také Lieova podgrupa $\mathbb{R}^3$ a každá Lieova podgrupa $SE(3)$ zúžena k $SO(3)$ (její obraz v projekci) je také Lieova podgrupa $SO(3)$. Postupujeme tedy obráceně, hledáme podgrupy $SO(3)$ a $\mathbb{R}^3$ a ověřujeme, jestli jejich polopřímý součin je souvislou Lieovou podgrupou $E(3)$.

3.1. Podgrupy $\mathbb{R}^3$ a $SO(3)$

Příslušné podgrupy si uvedeme formou seznamu a čtenáře se zájmem o podrobnější diskuze odkazujeme opět na knihu [3]. Je celkem jednoduché ověřit, že souvislé Lieovy podgrupy $SO(3)$ jsou, až na izomorfismus, právě tři, a to 0, $SO(2)$ a $SO(3)$. Nesouvislé Lieovy podgrupy $SO(3)$ zde nezkoumáme. Lieovy podgrupy $\mathbb{R}^3$ spolu se sčítáním mají strukturu bohatší, jsou to, až na izomorfismus, podgrupy

- $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$, 0,
- $p\mathbb{Z}$, $p\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, $p\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$, $p \in \mathbb{R}$,
- $p\mathbb{Z} \times q\mathbb{Z}$, $p\mathbb{Z} \times q\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{R}$,
- $p\mathbb{Z} \times q\mathbb{Z} \times r\mathbb{Z}$, $p, q, r \in \mathbb{R}$.

Opět je lehké ověřit, že tyto podmnožiny jsou Lieovy podgrupy, ale pro opačný směr je nutné nahlédnout do zmíněné literatury.

3.2. Podgrupy $SE(3)$

Seřadíme výsledné podgrupy podle dimenze (dimenze je tu počet parametrů), popíšeme případné invariantní plochy, pokud existují, a uvedeme příslušné matice ve vhodné bázi.

Hledáme dvojice podgrup $A \subset \mathbb{R}^3$, $H \subset SO(3)$ takových, že $H \ltimes A \subset SE(3)$ je podgrupa. Uvědomme si, že pokud je G podgrupa $SE(3)$, pak její zúžení k $\mathbb{R}^3$ musí být normální podgrupou v G a musí platit, že příslušný faktor je izomorfní s jejím zúžením k $SO(3)$, tj. $G/A \cong H$ musí být podgrupa $SO(3)$. Znamená to, že hledáme takové dvojice (H, A), kde A je uzavřena na konjugování prvky H, tj. maticově

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_3 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_3 & Rt \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A, \quad \text{kde } R \in H.$$

Je vidět, že hledáme takové dvojice (H, A), kde akce maticového násobení prvky z H zachovává množinu A.

Pokud vezmeme za A celý prostor $\mathbb{R}^3$, je jasné, že za H můžeme použít všechny tři podgrupy $SO(3)$. Dostaneme tak podgrupy $SE(3)$ dimenze 6,4 a 3 (viz tabulky). Poznamenejme, že v dimenzi 5 nám žádná podgrupa nevyjde, a tedy neexistuje kinematická dvojice s pěti stupni volnosti. Příslušná invariantní plocha však v žádném z těchto případů existovat nemůže, protože akce grupy A generuje všechna posunutí, a zobrazí tedy libovolný bod na libovolný bod v $\mathbb{R}^3$. Invariantní podprostor je pouze celé $\mathbb{R}^3$ bez ohledu na to, jaké rotace přidáme.

dimenze	podgrupa
6	$SO(3) \ltimes \mathbb{R}^3 = SE(3)$
5	–

dimenze	podgrupa
4	$SO(2) \ltimes \mathbb{R}^3 = SE(2) \times \mathbb{R}$

Pokud vezmeme za A podprostor $\mathbb{R}^2$, je možností více. Za H nemůžeme zvolit grupu všech rotací $SO(3)$, protože ta A nezachovává. Volbou podgrupy $SO(2)$ tak, že příslušné rotace jsou v ose normály, dostaneme $SE(2)$ a příslušná invariantní podplocha bude izomorfní $\mathbb{R}^2$. Stejnou plochu bychom dostali i volbou triviální podgrupy, ale plocha, která by byla invariantní vůči posunutí ve dvou nezávislých směrech a jejich lineárních kombinacích, by byla izomorfní s $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Taková plocha by ale byla také invariantní vůči rotacím ve směru normály.

Zbývající možnost v dimenzi 3 je volba $A = p\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$ a $H = SO(2)$. V tomto případě je nutné, aby první složka grupy A byla osou rotace H. Příslušným invariantním podprostorem pak mohou být disjunktní rovnoběžné roviny vzdálené o p, nebo celé $\mathbb{R}^3$. V prvním případě není plocha souvislá a v druhém případě se nejedná o plochu. Shrneme si tedy dimenzi tři v tabulce.

dimenze	podgrupa
3	$SO(3) \ltimes \mathbb{R}^2 = SE(2)$, $\mathbb{R}^3$, $H_p \ltimes \mathbb{R}^2$

Jediné invariantní podplochy vzhledem k Lieově podgrupě euklidovské grupy pro volbu $A = \mathbb{R}^2$ jsou tedy roviny v $\mathbb{R}^3$. Příslušná matice rotací pak vypadá ve vhodné bázi následovně

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & t_1 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde $t_1, t_2,\ \theta \in (0, 2\pi\rangle$.

Pokud vezmeme za A podgrupu $\mathbb{R}$, dostáváme v dimenzi 2 jednu plochu a v dimenzi 1 dvě plochy. Grupa všech rotací přímku nezachovává, tedy $SO(3)$ zvolit nelze. Volba rotací $SO(2)$ s osou rotace ve směru přímky funguje, a dostáváme tak jedinou kinematickou dvojici dimenze dva.

Poznamenejme, že v dimenzi 2 máme ještě už prodiskutovanou volbu $A = \mathbb{R}^2, H = 0$ a volbu $A = 0, H = SO(3)$, která odpovídá poslední volbě $A = 0$

dimenze	podgrupa
2	$SO(2) \ltimes \mathbb{R}$,$SO(3)$, $\mathbb{R}^2$

$SO(2) \times \mathbb{R}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$SO(3)$	$\begin{pmatrix} 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

V dimenzi 1 nám zbývá pouze volba $A = \mathbb{R}$, $H = 0$ a $A = 0$, $H = SO(2)$ a volba šroubovice H_p. K těmto oběma podgrupám příslušné invariantní plochy, a tedy i kinematické dvojice existují.

dimenze	podgrupa
1	$SO(2)$, $\mathbb{R}$, H_p

$SO(2)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$SO(2) \ltimes H_p$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p\theta/2\pi x \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Na závěr uvedeme tabulku všech Lieových podgrup grupy $SE(3)$ a tabulku těch, kterým odpovídají kinematické dvojice.

dimenze	podgrupa
6	$SO(3) \ltimes \mathbb{R}^3 = SE(3)$
5	–
4	$SO(2) \ltimes \mathbb{R}^3 = SE(2) \times \mathbb{R}$
3	$SO(3) \ltimes \mathbb{R}^2 = SE(2)$, $\mathbb{R}^3$, $H_p \ltimes \mathbb{R}^2$
2	$SO(2) \ltimes \mathbb{R}$,$SO(3)$, $\mathbb{R}^2$
1	$SO(2)$, $\mathbb{R}$, H_p

dimenze	podgrupa
3	$SE(2)$, $\mathbb{R}^3$
2	$SO(2) \ltimes \mathbb{R}$,$SO(3)$
1	$SO(2)$, $\mathbb{R}$, H_p

Reference

[1] G. Birkhoff, S. MacLane: *Aplikovaná algebra*, Alfa, Bratislava, 1981.

[2] K.H. Hunt: *Kinematic Geometry of Mechanisms*, Oxford Engineering Science Series, Oxford University Press, USA, 1990.

[3] J.M. Selig: *Geometric Fundamentals of Robotics*, Monographs in Computer Science, Springer, 2004.

[4] A. Karger, J. Novák: *Prostorová kinematika a Lieovy grupy*, Státní nakladatelství technické literatury, 1978.

[5] I. Kolář: *Úvod do globální analýzy*, skripta PřF MU, 2003.

Jaroslav Hrdina, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69, Brno, Česká republika,

e-mail: `hrdina@fme.vutbr.cz`