Reakčně difuzní rovnice a jejich stabilita

Michal Kozák, Radek Novák

MAFIA
FJFI ČVUT

20.5.2014

Obsah

RD rovnice

$$\left.\begin{aligned} w_t &= d_1 \Delta w + f(w,z) \\ z_t &= d_2 \Delta z + g(w,z) \end{aligned}\right\} \quad \text{v } [0,\infty) \times \Omega,$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial z}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega,$$

$$w(x,0) = w_0, \quad z(x,0) = z_0,$$

Novinky:

- závislost na prostoru,
- okrajové podmínky,
  - Dirichletovy: $u = g$ na hranici Ω,
  - Neumannovy: $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ na $\partial\Omega$,
  - Robinsonovy: $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = g$ na $\partial\Omega$,
- modelování chování morfogenů a chemických látek.

RD rovnice

$$
\begin{aligned}
w_t &= d_1 \Delta w + f(w,z) \\
z_t &= d_2 \Delta z + g(w,z)
\end{aligned}
\qquad \text{v } [0,\infty) \times \Omega,
$$

$$
\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial z}{\partial n} = 0 \qquad \text{na } \partial\Omega,
$$

$$
w(x,0) = w_0, \qquad z(x,0) = z_0,
$$

Novinky:

- závislost na prostoru,
- okrajové podmínky,
  - Dirichletovy: $u = g$ na hranici Ω,
  - Neumannovy: $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ na $\partial\Omega$,
  - Robinsonovy: $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = g$ na $\partial\Omega$,
- modelování chování morfogenů a chemických látek.

RD rovnice

$$
\begin{aligned}
w_t &= d_1 \Delta w + f(w,z) \\
z_t &= d_2 \Delta z + g(w,z)
\end{aligned}
\quad \text{v } [0,\infty) \times \Omega,
$$

$$
\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial z}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega,
$$

$$
w(x,0) = w_0, \quad z(x,0) = z_0,
$$

Novinky:

- závislost na prostoru,
- okrajové podmínky,
  - Dirichletovy: $u = g$ na hranici Ω,
  - Neumannovy: $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ na $\partial\Omega$,
  - Robinsonovy: $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = g$ na $\partial\Omega$,
- modelování chování morfogenů a chemických látek.

RD rovnice

$$
\begin{aligned}
w_t &= d_1 \Delta w + f(w,z) \\
z_t &= d_2 \Delta z + g(w,z)
\end{aligned}
\quad \text{v } [0,\infty) \times \Omega,
$$

$$
\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial z}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega,
$$

$$
w(x,0) = w_0, \quad z(x,0) = z_0,
$$

Novinky:

- závislost na prostoru,
- okrajové podmínky,
  - Dirichletovy: $u = g$ na hranici Ω,
  - Neumannovy: $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ na $\partial\Omega$,
  - Robinsonovy: $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = g$ na $\partial\Omega$,
- modelování chování morfogenů a chemických látek.

RD rovnice

$$
\begin{aligned}
w_t &= d_1 \Delta w + f(w,z) \\
z_t &= d_2 \Delta z + g(w,z)
\end{aligned}
\quad \text{v } [0,\infty) \times \Omega,
$$

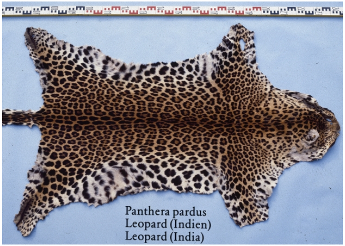
$$
\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial z}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega,
$$

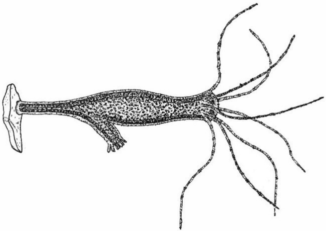
$$
w(x,0) = w_0, \quad z(x,0) = z_0,
$$

Novinky:

- závislost na prostoru,
- okrajové podmínky,
  - Dirichletovy: $u = g$ na hranici Ω,
  - Neumannovy: $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ na $\partial\Omega$,
  - Robinsonovy: $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = g$ na $\partial\Omega$,
- modelování chování morfogenů a chemických látek.

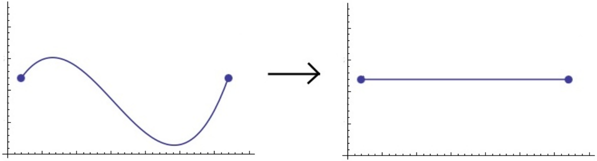
Motivace - prostorové vzorky





Difuze

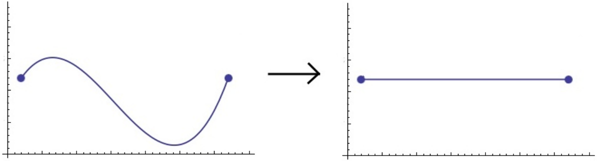
- způsobuje vyhlazování, rozmělňování (1 rovnice)



- králící u dálnice

Difuze

- způsobuje vyhlazování, rozmělňování (1 rovnice)



- králící u dálnice

Turingova idea

- Dvě rovnice → nestabilita způsobená difuzí.
- Stacionární homogenní řešení, které je stabilní v kinetikách (bez difuze), ale nestabilní za přítomnosti difuze.

K čemu to je?

- nulové řešení 0 nestabilní
  - existence nehomogenního (stabilního) řešení
- bifurkace
  - použití bifurkačních vět
  - existence množiny nehomogenních řešení
- biologický a chemický smysl

Turingova idea

- Dvě rovnice → nestabilita způsobená difuzí.
- Stacionární homogenní řešení, které je stabilní v kinetikách (bez difuze), ale nestabilní za přítomnosti difuze.

K čemu to je?

- nulové řešení 0 nestabilní
  - existence nehomogenního (stabilního) řešení
- bifurkace
  - použití bifurkačních vět
  - existence množiny nehomogenních řešení
- biologický a chemický smysl

Turingova idea

- Dvě rovnice → nestabilita způsobená difuzí.
- Stacionární homogenní řešení, které je stabilní v kinetikách (bez difuze), ale nestabilní za přítomnosti difuze.

K čemu to je?

- nulové řešení 0 nestabilní
  - existence nehomogenního (stabilního) řešení
- bifurkace
  - použití bifurkačních vět
  - existence množiny nehomogenních řešení
- biologický a chemický smysl

Turingova idea

- Dvě rovnice → nestabilita způsobená difuzí.
- Stacionární homogenní řešení, které je stabilní v kinetikách (bez difuze), ale nestabilní za přítomnosti difuze.

K čemu to je?

- nulové řešení 0 nestabilní
  - existence nehomogenního (stabilního) řešení
- bifurkace
  - použití bifurkačních vět
  - existence množiny nehomogenních řešení
- biologický a chemický smysl

Turingova idea

- Dvě rovnice → nestabilita způsobená difuzí.
- Stacionární homogenní řešení, které je stabilní v kinetikách (bez difuze), ale nestabilní za přítomnosti difuze.

K čemu to je?

- nulové řešení 0 nestabilní
  - existence nehomogenního (stabilního) řešení
- bifurkace
  - použití bifurkačních vět
  - existence množiny nehomogenních řešení
- biologický a chemický smysl

Turingova idea

- Dvě rovnice → nestabilita způsobená difuzí.
- Stacionární homogenní řešení, které je stabilní v kinetikách (bez difuze), ale nestabilní za přítomnosti difuze.

K čemu to je?

- nulové řešení 0 nestabilní
  - existence nehomogenního (stabilního) řešení
- bifurkace
  - použití bifurkačních vět
  - existence množiny nehomogenních řešení
- biologický a chemický smysl

Turingova idea

- Dvě rovnice → nestabilita způsobená difuzí.
- Stacionární homogenní řešení, které je stabilní v kinetikách (bez difuze), ale nestabilní za přítomnosti difuze.

K čemu to je?

- nulové řešení 0 nestabilní
  - existence nehomogenního (stabilního) řešení
- bifurkace
  - použití bifurkačních vět
  - existence množiny nehomogenních řešení
- biologický a chemický smysl

Turingova idea

- Dvě rovnice → nestabilita způsobená difuzí.
- Stacionární homogenní řešení, které je stabilní v kinetikách (bez difuze), ale nestabilní za přítomnosti difuze.

K čemu to je?

- nulové řešení 0 nestabilní
    - existence nehomogenního (stabilního) řešení
- bifurkace
    - použití bifurkačních vět
    - existence množiny nehomogenních řešení
- biologický a chemický smysl

Turingova idea

- Dvě rovnice → nestabilita způsobená difuzí.
- Stacionární homogenní řešení, které je stabilní v kinetikách (bez difuze), ale nestabilní za přítomnosti difuze.

K čemu to je?

- nulové řešení 0 nestabilní
  - existence nehomogenního (stabilního) řešení
- bifurkace
  - použití bifurkačních vět
  - existence množiny nehomogenních řešení
- biologický a chemický smysl

Obsah

Linearizace systému

Mějme systém:

$$\begin{aligned} w_t &= d_1 \Delta w + f(w, z) \\ z_t &= d_2 \Delta z + g(w, z). \end{aligned}$$

Nechť existuje stacionární homogenní řešení (w_0, z_0) systému, tj konstanty splňující:

$$f(w_0, z_0) = 0, \qquad g(w_0, z_0) = 0.$$

Substituce $u = w - w_0$ a $v = z - z_0$:

$$\begin{aligned} u_t &= d_1 \Delta u + f(u + w_0, v + z_0) \\ v_t &= d_2 \Delta v + g(u + w_0, v + z_0) \end{aligned}$$

Linearizace systému

Mějme systém:

$$w_t = d_1 \Delta w + f(w, z)$$
$$z_t = d_2 \Delta z + g(w, z).$$

Nechť existuje stacionární homogenní řešení (w_0, z_0) systému, tj konstanty splňující:

$$f(w_0, z_0) = 0, \quad g(w_0, z_0) = 0.$$

Substituce $u = w - w_0$ a $v = z - z_0$:

$$u_t = d_1 \Delta u + f(u + w_0, v + z_0)$$
$$v_t = d_2 \Delta v + g(u + w_0, v + z_0)$$

Linearizace systému

Mějme systém:

$$\begin{aligned} w_t &= d_1 \Delta w + f(w, z) \\ z_t &= d_2 \Delta z + g(w, z). \end{aligned}$$

Nechť existuje stacionární homogenní řešení (w_0, z_0) systému, tj konstanty splňující:

$$f(w_0, z_0) = 0, \qquad g(w_0, z_0) = 0.$$

Substituce $u = w - w_0$ a $v = z - z_0$:

$$\begin{aligned} u_t &= d_1 \Delta u + f(u + w_0, v + z_0) \\ v_t &= d_2 \Delta v + g(u + w_0, v + z_0) \end{aligned}$$

Linearizace systému

Taylorův polynom funkcí f, g:

$$f(u + w_0, v + z_0) = 0 + \frac{\partial f}{\partial u} u + \frac{\partial f}{\partial v} v + n_1(u, v),$$
$$g(u + w_0, v + z_0) = 0 + \frac{\partial g}{\partial u} u + \frac{\partial g}{\partial v} v + n_2(u, v).$$

Dosadím:

$$u_t = d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v + n_1(u, v)$$
$$v_t = d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v + n_2(u, v)$$

Jiný tvar:

$$U_t = D \Delta U + BU + N(U).$$

Řešíme stabilitu nulového řešení.

Linearizace systému

Taylorův polynom funkcí f, g:

$$f(u + w_0, v + z_0) = 0 + \frac{\partial f}{\partial u} u + \frac{\partial f}{\partial v} v + n_1(u, v),$$
$$g(u + w_0, v + z_0) = 0 + \frac{\partial g}{\partial u} u + \frac{\partial g}{\partial v} v + n_2(u, v).$$

Dosadím:

$$u_t = d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v + n_1(u, v)$$
$$v_t = d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v + n_2(u, v)$$

Jiný tvar:

$$U_t = D \Delta U + BU + N(U).$$

Řešíme stabilitu nulového řešení.

Stabilita bez difuze

Uvažme systém

$$\begin{aligned} u_t &= b_{11}u + b_{12}v + n_1(u,v) \\ v_t &= b_{21}u + b_{22}v + n_2(u,v) \end{aligned} \quad \text{na } [0,\infty).$$

Z věty o linearizované stabilitě:

$$\det(B - \lambda I) = 0.$$

Po úpravě:

$$\lambda^2 - (b_{11} + b_{22})\lambda + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = 0.$$

Stabilita bez difuze

Uvažme systém

$$\begin{aligned} u_t &= b_{11}u + b_{12}v + n_1(u,v) \\ v_t &= b_{21}u + b_{22}v + n_2(u,v) \end{aligned} \quad \text{na } [0,\infty).$$

Z věty o linearizované stabilitě:

$$\det(B - \lambda I) = 0.$$

Po úpravě:

$$\lambda^2 - (b_{11} + b_{22})\lambda + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = 0.$$

Stabilita bez difuze

Uvažme systém

$$\begin{aligned} u_t &= b_{11}u + b_{12}v + n_1(u,v) \\ v_t &= b_{21}u + b_{22}v + n_2(u,v) \end{aligned} \quad \text{na } [0,\infty).$$

Z věty o linearizované stabilitě:

$$\det(B - \lambda I) = 0.$$

Po úpravě:

$$\lambda^2 - (b_{11} + b_{22})\lambda + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = 0.$$

Stabilita bez difuze

Máme rovnici:

$$\lambda^2 - (b_{11} + b_{22})\lambda + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = 0,$$

jejíž řešení jsou:

$$\lambda_1 = \frac{b_{11} + b_{22} + \sqrt{(b_{11} + b_{22})^2 - 4(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{b_{11} + b_{22} - \sqrt{(b_{11} + b_{22})^2 - 4(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})}}{2}.$$

Tvrzení

Nulové řešení je asymptoticky stabilní, právě když

$$b_{11} + b_{22} = \operatorname{tr} B < 0,$$

$$b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = \det B > 0.$$

Stabilita bez difuze

Máme rovnici:

$$\lambda^2 - (b_{11} + b_{22})\lambda + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = 0,$$

jejíž řešení jsou:

$$\lambda_1 = \frac{b_{11} + b_{22} + \sqrt{(b_{11} + b_{22})^2 - 4(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{b_{11} + b_{22} - \sqrt{(b_{11} + b_{22})^2 - 4(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})}}{2}.$$

Tvrzení

Nulové řešení je asymptoticky stabilní, právě když

$$b_{11} + b_{22} = \operatorname{tr} B < 0,$$

$$b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = \det B > 0.$$

Stabilita bez difuze

Máme rovnici:

$$\lambda^2 - (b_{11} + b_{22})\lambda + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = 0,$$

jejíž řešení jsou:

$$\lambda_1 = \frac{b_{11} + b_{22} + \sqrt{(b_{11} + b_{22})^2 - 4(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{b_{11} + b_{22} - \sqrt{(b_{11} + b_{22})^2 - 4(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})}}{2}.$$

Tvrzení

Nulové řešení je asymptoticky stabilní, právě když

$$b_{11} + b_{22} = \operatorname{tr} B < 0,$$

$$b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = \det B > 0.$$

Nestabilita s difuzí - motivace

Náš systém:

$$\begin{aligned} u_t &= d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v + n_1(u, v) \\ v_t &= d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v + n_2(u, v) \end{aligned}$$

Stabilita v ODR:

$$AU = \lambda U.$$

Stabilita v PDR:

$$\mathcal{L} U = \lambda U,$$

kde

$$\mathcal{L} = D\Delta + B.$$

Hledáme vlastní čísla operátoru $\mathcal{L}$, tj. λ splňující:

$$\begin{aligned} \lambda u &= d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v \\ \lambda v &= d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v. \end{aligned}$$

Nestabilita s difuzí - motivace

Náš systém:

$$
\begin{aligned}
u_t &= d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v + n_1(u, v) \\
v_t &= d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v + n_2(u, v)
\end{aligned}
$$

Stabilita v ODR:

$$AU = \lambda U.$$

Stabilita v PDR:

$$\mathcal{L}U = \lambda U,$$

kde

$$\mathcal{L} = D\Delta + B.$$

Hledáme vlastní čísla operátoru $\mathcal{L}$, tj. λ splňující:

$$
\begin{aligned}
\lambda u &= d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v \\
\lambda v &= d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v.
\end{aligned}
$$

Nestabilita s difuzí - motivace

Náš systém:

$$u_t = d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v + n_1(u, v)$$
$$v_t = d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v + n_2(u, v)$$

Stabilita v ODR:

$$AU = \lambda U.$$

Stabilita v PDR:

$$\mathcal{L} U = \lambda U,$$

kde

$$\mathcal{L} = D\Delta + B.$$

Hledáme vlastní čísla operátoru $\mathcal{L}$, tj. λ splňující:

$$\lambda u = d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v$$
$$\lambda v = d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v.$$

Nestabilita s difuzí - motivace

Náš systém:

$$
\begin{aligned}
u_t &= d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v + n_1(u, v) \\
v_t &= d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v + n_2(u, v)
\end{aligned}
$$

Stabilita v ODR:

$$AU = \lambda U.$$

Stabilita v PDR:

$$\mathcal{L} U = \lambda U,$$

kde

$$\mathcal{L} = D\Delta + B.$$

Hledáme vlastní čísla operátoru $\mathcal{L}$, tj. λ splňující:

$$
\begin{aligned}
\lambda u &= d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v \\
\lambda v &= d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v.
\end{aligned}
$$

Nestabilita s difuzí

Vyšetřujeme nestabilitu linearizovaného systému:

$$\left.\begin{aligned} u_t &= d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v \\ v_t &= d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v \end{aligned}\right. \quad \text{v } \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Předpokládejme řešení ve tvaru

$$U(t,x) = \varphi(t)\psi(x)$$

a dosaďme:

$$\varphi'(t)\psi(x) = D\varphi(t)\Delta\psi(x) + B\varphi(t)\psi(x).$$

Nestabilita s difuzí

Vyšetřujeme nestabilitu linearizovaného systému:

$$\left.\begin{aligned} u_t &= d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v \\ v_t &= d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v \end{aligned}\right. \quad \text{v } \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Předpokládejme řešení ve tvaru

$$U(t,x) = \varphi(t)\psi(x)$$

a dosaďme:

$$\varphi'(t)\psi(x) = D\varphi(t)\Delta\psi(x) + B\varphi(t)\psi(x).$$

Nestabilita s difuzí

Vyšetřujeme nestabilitu linearizovaného systému:

$$\left.\begin{aligned} u_t &= d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v \\ v_t &= d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v \end{aligned}\right. \quad \text{v } \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Předpokládejme řešení ve tvaru

$$U(t,x) = \varphi(t)\psi(x)$$

a dosaďme:

$$\varphi'(t)\psi(x) = D\varphi(t)\Delta\psi(x) + B\varphi(t)\psi(x).$$

Nestabilita s difuzí

Upravme:

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = D\frac{\Delta\psi(x)}{\psi(x)} + B = \lambda.$$

Z levé strany:

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}$$

Z pravé strany:

$$\Delta\psi(x) + B\psi(x) = \lambda\psi(x)$$

Po přeznačení:

$$\begin{aligned} d_1\Delta u + b_{11}u + b_{12}v &= \lambda u \\ d_2\Delta v + b_{21}u + b_{22}v &= \lambda v \end{aligned} \qquad \text{v } [0,\infty)\times\Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \qquad \text{na } \partial\Omega.$$

Nestabilita s difuzí

Upravme:

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = D\frac{\Delta\psi(x)}{\psi(x)} + B = \lambda.$$

Z levé strany:

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}$$

Z pravé strany:

$$\Delta\psi(x) + B\psi(x) = \lambda\psi(x)$$

Po přeznačení:

$$\begin{aligned} d_1\Delta u + b_{11}u + b_{12}v &= \lambda u \\ d_2\Delta v + b_{21}u + b_{22}v &= \lambda v \end{aligned} \qquad \text{v } [0,\infty)\times\Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \qquad \text{na } \partial\Omega.$$

Nestabilita s difuzí

Upravme:

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = D\frac{\Delta\psi(x)}{\psi(x)} + B = \lambda.$$

Z levé strany:

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}$$

Z pravé strany:

$$\Delta\psi(x) + B\psi(x) = \lambda\psi(x)$$

Po přeznačení:

$$\begin{aligned} d_1\Delta u + b_{11}u + b_{12}v &= \lambda u \\ d_2\Delta v + b_{21}u + b_{22}v &= \lambda v \end{aligned} \qquad \text{v } [0,\infty)\times\Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \qquad \text{na } \partial\Omega.$$

Nestabilita s difuzí

Upravme:

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = D\frac{\Delta\psi(x)}{\psi(x)} + B = \lambda.$$

Z levé strany:

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}$$

Z pravé strany:

$$\Delta\psi(x) + B\psi(x) = \lambda\psi(x)$$

Po přeznačení:

$$\begin{aligned} d_1\Delta u + b_{11}u + b_{12}v &= \lambda u \\ d_2\Delta v + b_{21}u + b_{22}v &= \lambda v \end{aligned} \quad \text{v } [0,\infty)\times\Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Věta o stabilitě RD rovnic

Věta

$$\left.\begin{aligned} d_1\Delta u + b_{11}u + b_{12}v &= \lambda u \\ d_2\Delta v + b_{21}u + b_{22}v &= \lambda v \end{aligned}\right. \qquad v\ \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \qquad na\ \partial\Omega.$$

Pak platí:

1. *Jestliže existuje kladné ε takové, že je $\operatorname{Re}\lambda \leq -\varepsilon$ pro všechna vlastní čísla λ, pak je nulové řešení systému stabilní v normě prostoru.*
2. *Jestliže existuje vlastní číslo λ splňující $\operatorname{Re}\lambda > 0$, pak je nulové řešení systému nestabilní v normě prostoru.*

Vlastní čísla laplaciánu

Vlastní čísla κ laplaciánu, tj. úlohy:

$$-\Delta u = \kappa u \quad \text{v } \Omega,$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega.$$

- dají se uspořádat do nekonečné neklesající posloupnosti:
$$0 = \kappa_0 < \kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \kappa_3 \leq \dots .$$
- pro speciální oblasti jsou známy:
  - interval $(0, L)$: $\kappa_j = (\frac{j\pi}{L})^2$, $u_j = \cos(\frac{j\pi}{L})$,
  - n-rozměrný kvádr:
$$\kappa_\alpha = \left(\frac{\alpha_1\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_2\pi}{L_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\alpha_n\pi}{L_n}\right)^2,$$
$$u_\alpha = \cos\left(\frac{\alpha_1\pi}{L_1}\right)\cos\left(\frac{\alpha_2\pi}{L_2}\right)\dots\cos\left(\frac{\alpha_n\pi}{L_n}\right).$$
  - sféra.

Vlastní čísla laplaciánu

Vlastní čísla κ laplaciánu, tj. úlohy:

$$-\Delta u = \kappa u \quad \text{v } \Omega,$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega.$$

- dají se uspořádat do nekonečné neklesající posloupnosti:

$$0 = \kappa_0 < \kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \kappa_3 \leq \dots .$$

- pro speciální oblasti jsou známy:
  - interval $(0, L)$: $\kappa_j = (\frac{j\pi}{L})^2$, $u_j = \cos(\frac{j\pi}{L})$,
  - n-rozměrný kvádr:

$$\kappa_\alpha = \left(\frac{\alpha_1\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_2\pi}{L_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\alpha_n\pi}{L_n}\right)^2,$$
$$u_\alpha = \cos\left(\frac{\alpha_1\pi}{L_1}\right)\cos\left(\frac{\alpha_2\pi}{L_2}\right)\dots\cos\left(\frac{\alpha_n\pi}{L_n}\right).$$

  - sféra.

Nestabilita s difuzí

Máme systém:

$$d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v = \lambda u$$
$$d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v = \lambda v.$$

Dosaďme vlastní čísla laplaciánu:

$$-\kappa_j d_1 u + b_{11} u + b_{12} v = \lambda u$$
$$-\kappa_j d_2 v + b_{21} u + b_{22} v = \lambda v.$$

Přepišme:

$$-\kappa_j DU + BU - \lambda U = 0.$$

Řešíme:

$$\det\left(\kappa_j D - B + \lambda I\right) = 0.$$

Nestabilita s difuzí

Máme systém:

$$\begin{aligned} d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v &= \lambda u \\ d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v &= \lambda v. \end{aligned}$$

Dosaďme vlastní čísla laplaciánu:

$$\begin{aligned} -\kappa_j d_1 u + b_{11} u + b_{12} v &= \lambda u \\ -\kappa_j d_2 v + b_{21} u + b_{22} v &= \lambda v. \end{aligned}$$

Přepišme:

$$-\kappa_j DU + BU - \lambda U = 0.$$

Řešíme:

$$\det\left(\kappa_j D - B + \lambda I\right) = 0.$$

Nestabilita s difuzí

Máme systém:

$$d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v = \lambda u$$
$$d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v = \lambda v.$$

Dosaďme vlastní čísla laplaciánu:

$$-\kappa_j d_1 u + b_{11} u + b_{12} v = \lambda u$$
$$-\kappa_j d_2 v + b_{21} u + b_{22} v = \lambda v.$$

Přepišme:

$$-\kappa_j DU + BU - \lambda U = 0.$$

Řešíme:

$$\det\left(\kappa_j D - B + \lambda I\right) = 0.$$

Nestabilita s difuzí

Máme systém:

$$d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v = \lambda u$$
$$d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v = \lambda v.$$

Dosaďme vlastní čísla laplaciánu:

$$-\kappa_j d_1 u + b_{11} u + b_{12} v = \lambda u$$
$$-\kappa_j d_2 v + b_{21} u + b_{22} v = \lambda v.$$

Přepišme:

$$-\kappa_j DU + BU - \lambda U = 0.$$

Řešíme:

$$\det\left(\kappa_j D - B + \lambda I\right) = 0.$$

Nestabilita s difuzí

Máme:

$$\det\left(\kappa_j D - B + \lambda I\right) = 0.$$

Rozepsané:

$$0 = (\kappa_j d_1 - b_{11} + \lambda)(\kappa_j d_2 - b_{22} + \lambda) - b_{12}b_{21} =$$
$$= \lambda^2 + (\kappa_j d_1 + \kappa_j d_2 - b_{11} - b_{22})\lambda + H_d(\kappa_j),$$

kde

$$H_d(\kappa_j) = (\kappa_j d_1 - b_{11})(\kappa_j d_2 - b_{22}) - b_{12}b_{21}.$$

Nestabilita s difuzí

Máme:

$$\det\left(\kappa_j D - B + \lambda I\right) = 0.$$

Rozepsané:

$$\begin{aligned} 0 &= (\kappa_j d_1 - b_{11} + \lambda)(\kappa_j d_2 - b_{22} + \lambda) - b_{12} b_{21} = \\ &= \lambda^2 + (\kappa_j d_1 + \kappa_j d_2 - b_{11} - b_{22})\lambda + H_d(\kappa_j), \end{aligned}$$

kde

$$H_d(\kappa_j) = (\kappa_j d_1 - b_{11})(\kappa_j d_2 - b_{22}) - b_{12} b_{21}.$$

Nestabilita s difuzí

$$\lambda_1^{(j)} = \frac{b_{11} + b_{22} - (d_1 + d_2)\kappa_j + \sqrt{[b_{11} + b_{22} - (d_1 + d_2)\kappa_j]^2 - 4H_d(\kappa_j)}}{2},$$

$$\lambda_2^{(j)} = \frac{b_{11} + b_{22} - (d_1 + d_2)\kappa_j - \sqrt{[b_{11} + b_{22} - (d_1 + d_2)\kappa_j]^2 - 4H_d(\kappa_j)}}{2}.$$

Víme

$$b_{11} + b_{22} - (d_1 + d_2)\kappa_j < 0.$$

Chceme

$$H_d(\kappa_j) = d_1 d_2 (\kappa_j)^2 - (b_{11} d_2 + b_{22} d_1)\kappa_j + b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21} < 0.$$

Máme

$$b_{11} d_2 + b_{22} d_1 > 0.$$

Nestabilita s difuzí

$$\lambda_1^{(j)} = \frac{b_{11} + b_{22} - (d_1 + d_2)\kappa_j + \sqrt{[b_{11} + b_{22} - (d_1 + d_2)\kappa_j]^2 - 4H_d(\kappa_j)}}{2},$$

$$\lambda_2^{(j)} = \frac{b_{11} + b_{22} - (d_1 + d_2)\kappa_j - \sqrt{[b_{11} + b_{22} - (d_1 + d_2)\kappa_j]^2 - 4H_d(\kappa_j)}}{2}.$$

Víme

$$b_{11} + b_{22} - (d_1 + d_2)\kappa_j < 0.$$

Chceme

$$H_d(\kappa_j) = d_1 d_2 (\kappa_j)^2 - (b_{11} d_2 + b_{22} d_1)\kappa_j + b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21} < 0.$$

Máme

$$b_{11} d_2 + b_{22} d_1 > 0.$$

Nestabilita s difuzí

$$\lambda_1^{(j)} = \frac{b_{11} + b_{22} - (d_1 + d_2)\kappa_j + \sqrt{[b_{11} + b_{22} - (d_1 + d_2)\kappa_j]^2 - 4H_d(\kappa_j)}}{2},$$
$$\lambda_2^{(j)} = \frac{b_{11} + b_{22} - (d_1 + d_2)\kappa_j - \sqrt{[b_{11} + b_{22} - (d_1 + d_2)\kappa_j]^2 - 4H_d(\kappa_j)}}{2}.$$

Víme

$$b_{11} + b_{22} - (d_1 + d_2)\kappa_j < 0.$$

Chceme

$$H_d(\kappa_j) = d_1 d_2(\kappa_j)^2 - (b_{11}d_2 + b_{22}d_1)\kappa_j + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} < 0.$$

Máme

$$b_{11}d_2 + b_{22}d_1 > 0.$$

Nestabilita s difuzí

$$\lambda_1^{(j)} = \frac{b_{11} + b_{22} - (d_1 + d_2)\kappa_j + \sqrt{[b_{11} + b_{22} - (d_1 + d_2)\kappa_j]^2 - 4H_d(\kappa_j)}}{2},$$

$$\lambda_2^{(j)} = \frac{b_{11} + b_{22} - (d_1 + d_2)\kappa_j - \sqrt{[b_{11} + b_{22} - (d_1 + d_2)\kappa_j]^2 - 4H_d(\kappa_j)}}{2}.$$

Víme

$$b_{11} + b_{22} - (d_1 + d_2)\kappa_j < 0.$$

Chceme

$$H_d(\kappa_j) = d_1 d_2 (\kappa_j)^2 - (b_{11} d_2 + b_{22} d_1)\kappa_j + b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21} < 0.$$

Máme

$$b_{11} d_2 + b_{22} d_1 > 0.$$

Nestabilita s difuzí

Úvaha: Funkce, která je alespoň v jednom bodě záporná, je v bodě minima také záporná.

$$0 = \frac{\partial H_d(\kappa)}{\partial \kappa} = 2\kappa d_1 d_2 - (b_{11} d_2 + b_{22} d_1),$$

$$\kappa_{\min} = \frac{b_{11} d_2 + b_{22} d_1}{2 d_1 d_2}.$$

$$H_d(\kappa_{\min}) = -\frac{(b_{11} d_2 + b_{22} d_1)^2}{4 d_1 d_2} + b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}.$$

Dostáváme podmínku:

$$\frac{(b_{11} d_2 + b_{22} d_1)^2}{4 d_1 d_2} > \det B.$$

Nestabilita s difuzí

Úvaha: Funkce, která je alespoň v jednom bodě záporná, je v bodě minima také záporná.

$$0 = \frac{\partial H_d(\kappa)}{\partial \kappa} = 2\kappa d_1 d_2 - (b_{11} d_2 + b_{22} d_1),$$

$$\kappa_{\min} = \frac{b_{11} d_2 + b_{22} d_1}{2 d_1 d_2}.$$

$$H_d(\kappa_{\min}) = -\frac{(b_{11} d_2 + b_{22} d_1)^2}{4 d_1 d_2} + b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}.$$

Dostáváme podmínku:

$$\frac{(b_{11} d_2 + b_{22} d_1)^2}{4 d_1 d_2} > \det B.$$

Nestabilita s difuzí

Úvaha: Funkce, která je alespoň v jednom bodě záporná, je v bodě minima také záporná.

$$0 = \frac{\partial H_d(\kappa)}{\partial \kappa} = 2\kappa d_1 d_2 - (b_{11} d_2 + b_{22} d_1),$$

$$\kappa_{\text{min}} = \frac{b_{11} d_2 + b_{22} d_1}{2 d_1 d_2}.$$

$$H_d(\kappa_{\text{min}}) = -\frac{(b_{11} d_2 + b_{22} d_1)^2}{4 d_1 d_2} + b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}.$$

Dostáváme podmínku:

$$\frac{(b_{11} d_2 + b_{22} d_1)^2}{4 d_1 d_2} > \det B.$$

Nestabilita s difuzí

Z podmínek
$$b_{11} + b_{22} < 0, \qquad b_{11}d_2 + b_{22}d_1 > 0$$
plyne
$$\operatorname{sgn}(b_{11}) = -\operatorname{sgn}(b_{22}).$$
Dohromady s podmínkou
$$\det B > 0$$
dostáváme, že B je tvaru
$$\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} - & - \\ + & + \end{pmatrix}.$$
a
$$d_1 < d_2.$$

Nestabilita s difuzí

Z podmínek

$$b_{11} + b_{22} < 0, \qquad b_{11} d_2 + b_{22} d_1 > 0$$

plyne

$$\operatorname{sgn}(b_{11}) = -\operatorname{sgn}(b_{22}).$$

Dohromady s podmínkou

$$\det B > 0$$

dostáváme, že B je tvaru

$$\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} - & - \\ + & + \end{pmatrix}.$$

a

$$d_1 < d_2.$$

Nestabilita s difuzí

Z podmínek

$$b_{11} + b_{22} < 0, \qquad b_{11} d_2 + b_{22} d_1 > 0$$

plyne

$$\operatorname{sgn}(b_{11}) = -\operatorname{sgn}(b_{22}).$$

Dohromady s podmínkou

$$\det B > 0$$

dostáváme, že B je tvaru

$$\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} - & - \\ + & + \end{pmatrix}.$$

a

$$d_1 < d_2.$$

Nestabilita s difuzí

Z podmínek

$$b_{11} + b_{22} < 0, \qquad b_{11} d_2 + b_{22} d_1 > 0$$

plyne

$$\operatorname{sgn}(b_{11}) = -\operatorname{sgn}(b_{22}).$$

Dohromady s podmínkou

$$\det B > 0$$

dostáváme, že B je tvaru

$$\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} - & - \\ + & + \end{pmatrix}.$$

a

$$d_1 < d_2.$$

Souhrn

Nutné podmínky k Turingovu efektu:

$$\operatorname{tr} B < 0, \qquad \det B > 0, \qquad b_{11}d_2 + b_{22}d_1 > 0,$$

$$(b_{11}d_2 + b_{22}d_1)^2 > 4d_1d_2 \det B.$$

Tyto podmínky zaručují platnost nerovností

$$b_{11}b_{22} < 0, \quad b_{12}b_{21} < 0, \quad d_1 < d_2$$

a toho, že matice B je jednoho z typů

$$\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}.$$

Oblast stability a nestability

Připomeňme, že ke stabilitě stačí

$$H_d(\kappa_j) = d_1 d_2(\kappa_j)^2 - (b_{11}d_2 + b_{22}d_1)\kappa_j + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} < 0.$$

Mezní křivky dány rovnicí $H_d(\kappa_j) = 0$, tj.:

$$C_j = \left\{[d_1, d_2] \in \mathbb{R}_+^2, d_2 = \frac{1}{\kappa_j}\left(\frac{b_{12}b_{21}}{d_1\kappa_j - b_{11}} + b_{22}\right)\right\}$$

Vlastnosti C_j:

- hyperboly,
- asymptoty $d_1 = \frac{b_{11}}{\kappa_j}$, $d_2 = \frac{b_{22}}{\kappa_j}$,
- společná tečna

$$d_2 = \frac{b_{11}b_{22} + 2\sqrt{-b_{12}b_{21}\det B}}{b_{11}^2} d_1 .$$

Oblast stability a nestability

Připomeňme, že ke stabilitě stačí

$$H_d(\kappa_j) = d_1 d_2 (\kappa_j)^2 - (b_{11} d_2 + b_{22} d_1)\kappa_j + b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21} < 0.$$

Mezní křivky dány rovnicí $H_d(\kappa_j) = 0$, tj.:

$$C_j = \left\{ [d_1, d_2] \in \mathbb{R}^2_+, d_2 = \frac{1}{\kappa_j} \left(\frac{b_{12} b_{21}}{d_1 \kappa_j - b_{11}} + b_{22} \right) \right\}$$

Vlastnosti C_j:

- hyperboly,
- asymptoty $d_1 = \frac{b_{11}}{\kappa_j}$, $d_2 = \frac{b_{22}}{\kappa_j}$,
- společná tečna

$$d_2 = \frac{b_{11} b_{22} + 2\sqrt{-b_{12} b_{21} \det B}}{b_{11}^2} d_1 .$$

Oblast stability a nestability

Připomeňme, že ke stabilitě stačí

$$H_d(\kappa_j) = d_1 d_2 (\kappa_j)^2 - (b_{11} d_2 + b_{22} d_1)\kappa_j + b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21} < 0.$$

Mezní křivky dány rovnicí $H_d(\kappa_j) = 0$, tj.:

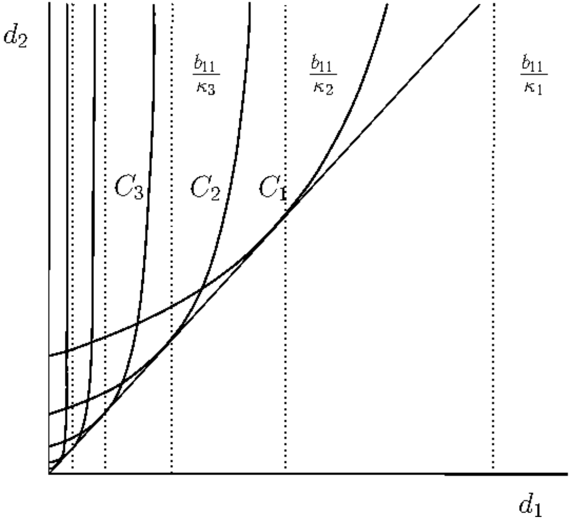
$$C_j = \left\{ [d_1, d_2] \in \mathbb{R}_+^2, d_2 = \frac{1}{\kappa_j} \left(\frac{b_{12} b_{21}}{d_1 \kappa_j - b_{11}} + b_{22} \right) \right\}$$

Vlastnosti C_j:

- hyperboly,
- asymptoty $d_1 = \frac{b_{11}}{\kappa_j}$, $d_2 = \frac{b_{22}}{\kappa_j}$,
- společná tečna

$$d_2 = \frac{b_{11} b_{22} + 2\sqrt{-b_{12} b_{21} \det B}}{b_{11}^2} d_1.$$

Oblast stability a nestability



Oblast stability a nestability

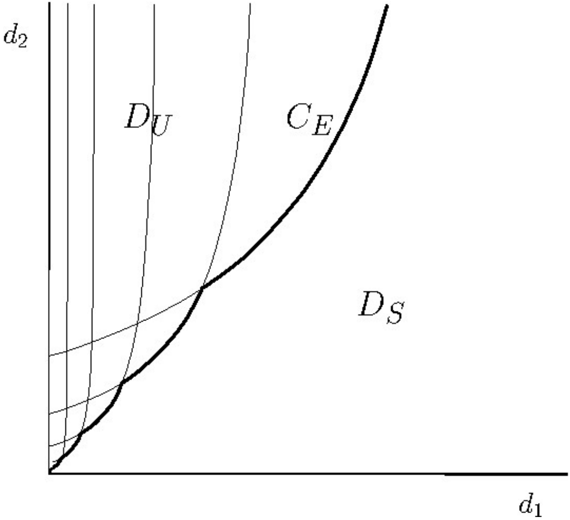
Tvrzení

Předpokládejme, že jsou splněny nutné podmínky pro Turingův efekt. Pak pro každé vlastní číslo $\lambda_j := \lambda_1^{(j)}$ *platí:*

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\lambda_j < 0 & \textit{pro } d \textit{ vpravo od } C_j, \\ \lambda_j = 0 & \textit{pro } d \textit{ na } C_j, \\ \lambda_j > 0 & \textit{pro } d \textit{ vlevo od } C_j. \end{cases}$$

Reálná část vlastního čísla $\lambda_2^{(j)}$ *je vždy záporná.*

Oblast stability a nestability



Bonbonek - závislost difuzního koeficientu a parametru nafukování oblasti

Uvažme úlohu s nafukovací oblastí

$$\begin{aligned} u_t &= d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v + n_1(u,v) \\ v_t &= d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v + n_2(u,v) \end{aligned} \quad \text{v } [0,\infty) \times L\Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \partial L\Omega.$$

Substitucí $x = L\tilde{x}$ převedeme na úlohu

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{d_1}{L^2} \Delta u + b_{11} u + b_{12} v + n_1(u,v) \\ v_t &= \frac{d_2}{L^2} \Delta v + b_{21} u + b_{22} v + n_2(u,v) \end{aligned} \quad \text{v } [0,\infty) \times \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Bonbonek - závislost difuzního koeficientu a parametru nafukování oblasti

Uvažme úlohu s nafukovací oblastí

$$\left.\begin{aligned} u_t &= d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v + n_1(u, v) \\ v_t &= d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v + n_2(u, v) \end{aligned}\right\} \quad \text{v } [0, \infty) \times L\Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \partial L\Omega.$$

Substitucí $x = L\tilde{x}$ převedeme na úlohu

$$\left.\begin{aligned} u_t &= \frac{d_1}{L^2} \Delta u + b_{11} u + b_{12} v + n_1(u, v) \\ v_t &= \frac{d_2}{L^2} \Delta v + b_{21} u + b_{22} v + n_2(u, v) \end{aligned}\right\} \quad \text{v } [0, \infty) \times \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Bonbonek - závislost difuzního koeficientu a parametru nafukování oblasti

Uvažme úlohu s nafukovací oblastí

$$\left.\begin{aligned} u_t &= d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v + n_1(u,v) \\ v_t &= d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v + n_2(u,v) \end{aligned}\right. \quad \text{v } [0,\infty) \times L\Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \partial L\Omega.$$

Substitucí $x = L\widetilde{x}$ převedeme na úlohu

$$\left.\begin{aligned} u_t &= \frac{d_1}{L^2} \Delta u + b_{11} u + b_{12} v + n_1(u,v) \\ v_t &= \frac{d_2}{L^2} \Delta v + b_{21} u + b_{22} v + n_2(u,v) \end{aligned}\right. \quad \text{v } [0,\infty) \times \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \partial \Omega.$$

MAFIA

Děkuji za pozornost.