Metamateriály: spektrálně-teoretický přístup

Filip Hložek
Školitel: David Krejčiřík

Metamateriály

V obecném smyslu:

- Metamateriály jsou uměle vyrobené kompozitní materiály
- "meta" = pohled shora, na vyšší úrovni, vymanění se ze systému, přesahující
- Disponují neobvyklými fyzikálními vlastnostmi
- Široké možnosti využití

Metamateriály

V obecném smyslu:

- Metamateriály jsou uměle vyrobené kompozitní materiály
- "meta" = pohled shora, na vyšší úrovni, vymanění se ze systému, přesahující
- Disponují neobvyklými fyzikálními vlastnostmi
- Široké možnosti využití

Nás zajímá:

- Záporný index lomu
- Využití:

NEVIDITELNOST

Metamateriály

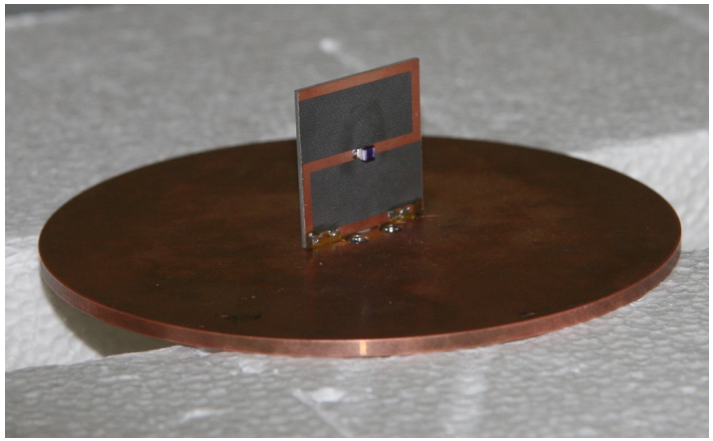
V obecném smyslu:

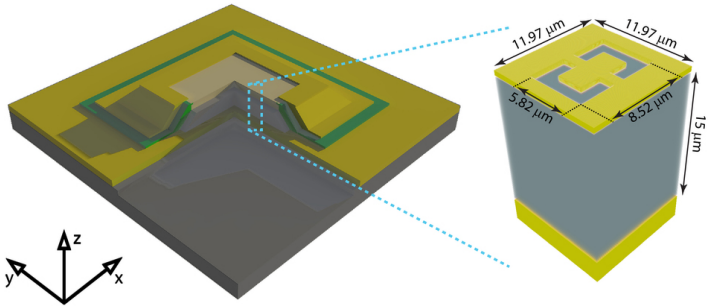
- Metamateriály jsou uměle vyrobené kompozitní materiály
- "meta" = pohled shora, na vyšší úrovni, vymanění se ze systému, přesahující
- Disponují neobvyklými fyzikálními vlastnostmi
- Široké možnosti využití

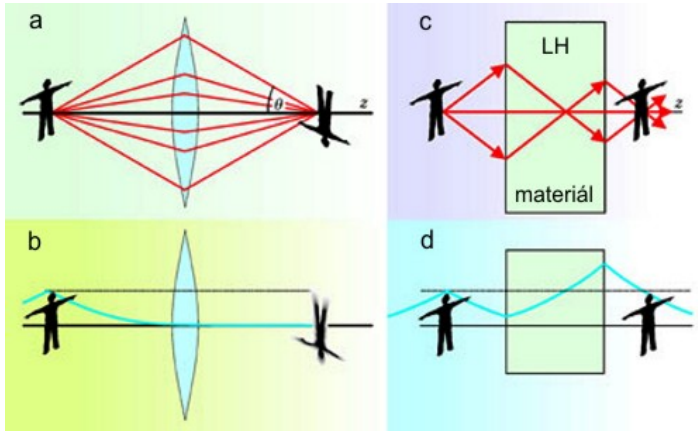
Nás zajímá:

- Záporný index lomu
- Využití:

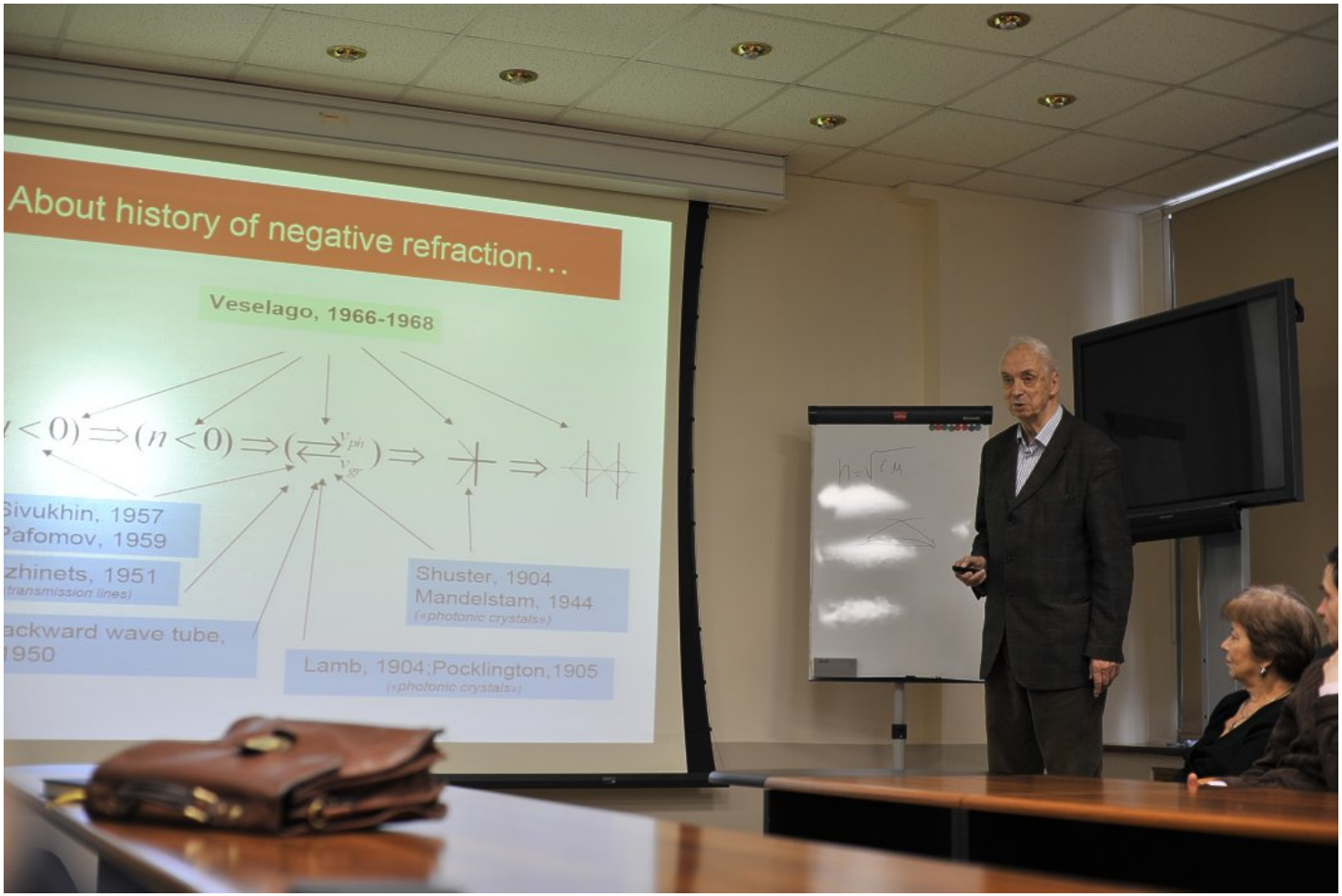
Metamateriály - využití







Průkopníci



- Viktor Veselago - teoreticky analyzoval vlastnosti materiálů se zápornými hodnotami ϵ, μ (1968)

Levotočivé materiály (left-handed materials)

- Z Maxwellových rovnic se dá zjistit, že vlnový vektor $\vec{k}$ bude mít opačné znaménko než v obvyklých materiálech

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

$$\text{rot}\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \vec{D} = \epsilon\vec{E}$$

Levotočivé materiály (left-handed materials)

- Z Maxwellových rovnic se dá zjistit, že vlnový vektor $\vec{k}$ bude mít opačné znaménko než v obvyklých materiálech

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

$$\text{rot}\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \vec{D} = \epsilon\vec{E}$$

- Pro rovinnou monochromatickou vlnu jsou všechny kvantity úměrné $e^{i(kz-\omega t)}$ $\Rightarrow$

$$\vec{k}\times\vec{E} = \frac{\omega}{c}\mu\vec{H}$$

$$\vec{k}\times\vec{H} = -\frac{\omega}{c}\epsilon\vec{E}$$

Levotočivé materiály (left-handed materials)

- Z Maxwellových rovnic se dá zjistit, že vlnový vektor $\vec{k}$ bude mít opačné znaménko než v obvyklých materiálech

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

$$\text{rot}\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \vec{D} = \epsilon\vec{E}$$

- Pro rovinnou monochromatickou vlnu jsou všechny kvantity úměrné $e^{i(kz-\omega t)}$ $\Rightarrow$

$$\vec{k}\times\vec{E} = \frac{\omega}{c}\mu\vec{H}$$

$$\vec{k}\times\vec{H} = -\frac{\omega}{c}\epsilon\vec{E}$$

- Pro $\epsilon > 0$ a $\mu > 0$ tvoří vektory $\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$ pravotočivou trojici vektorů, kdežto pro $\epsilon < 0$ a $\mu < 0$ levotočivou.

Levotočivé materiály (left-handed materials)

- Z Maxwellových rovnic se dá zjistit, že vlnový vektor $\vec{k}$ bude mít opačné znaménko než v obvyklých materiálech

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

$$\text{rot}\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \vec{D} = \epsilon\vec{E}$$

- Pro rovinnou monochromatickou vlnu jsou všechny kvantity úměrné $e^{i(kz-\omega t)}$ $\Rightarrow$

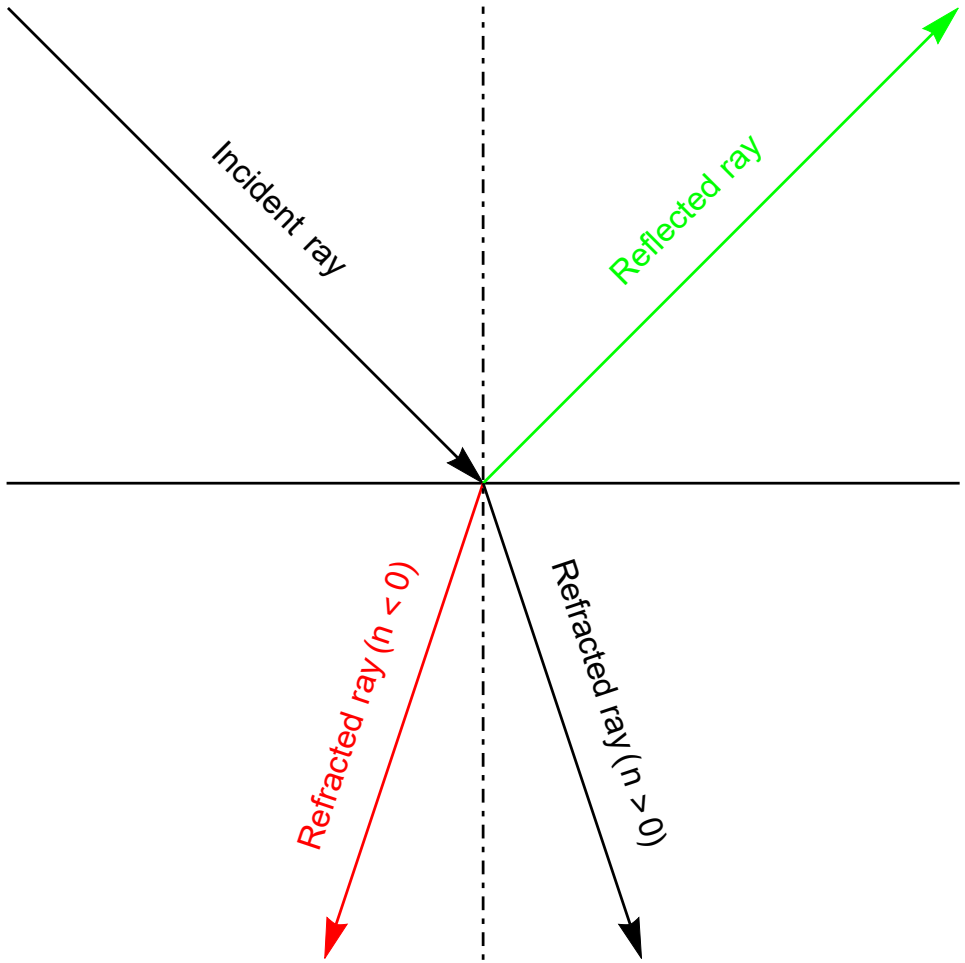
$$\vec{k}\times\vec{E} = \frac{\omega}{c}\mu\vec{H}$$

$$\vec{k}\times\vec{H} = -\frac{\omega}{c}\epsilon\vec{E}$$

- Pro $\epsilon > 0$ a $\mu > 0$ tvoří vektory $\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$ pravotočivou trojici vektorů, kdežto pro $\epsilon < 0$ a $\mu < 0$ levotočivou.
- Naproti tomu Poyintingův vektor $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H}$ tvoří s $\vec{E}, \vec{H}$ vždy pravotočivou trojici vektorů

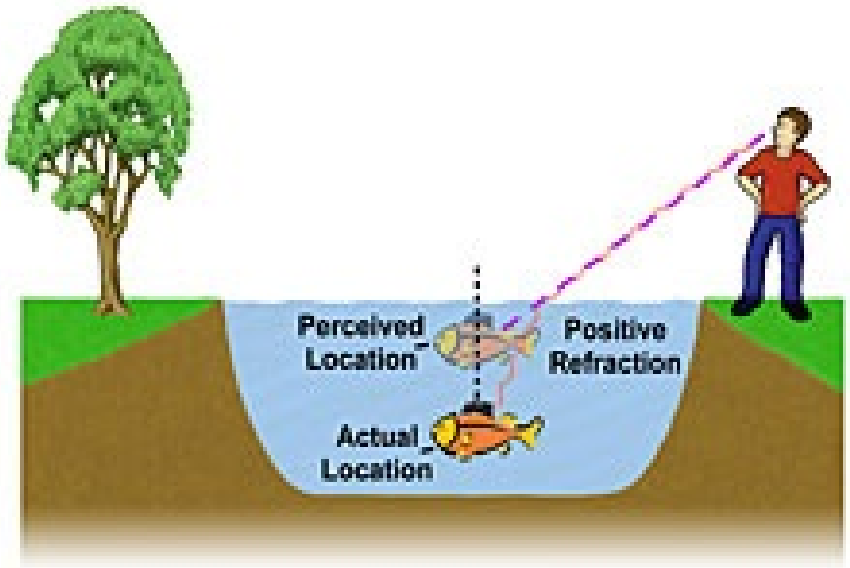
Záporný index lomu

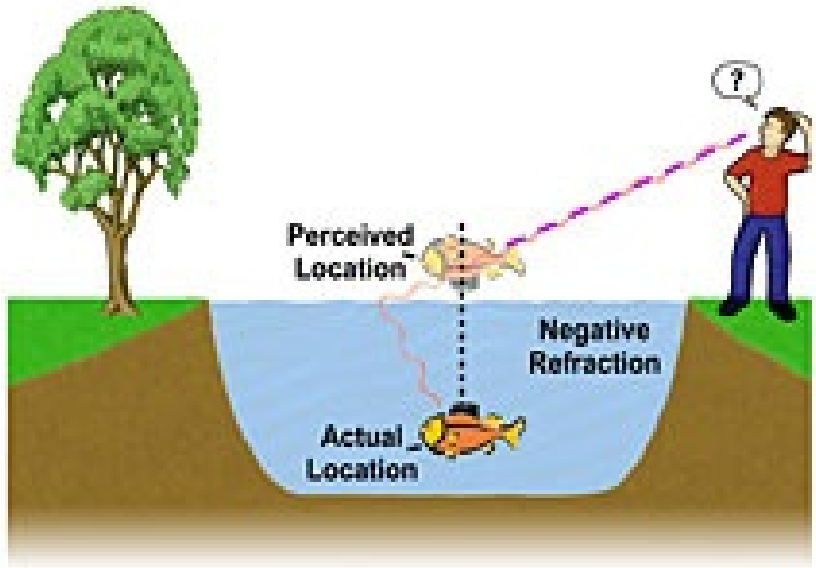
- $n = \sqrt{\epsilon\mu}$
- Snellův zákon $\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = n_{12}$



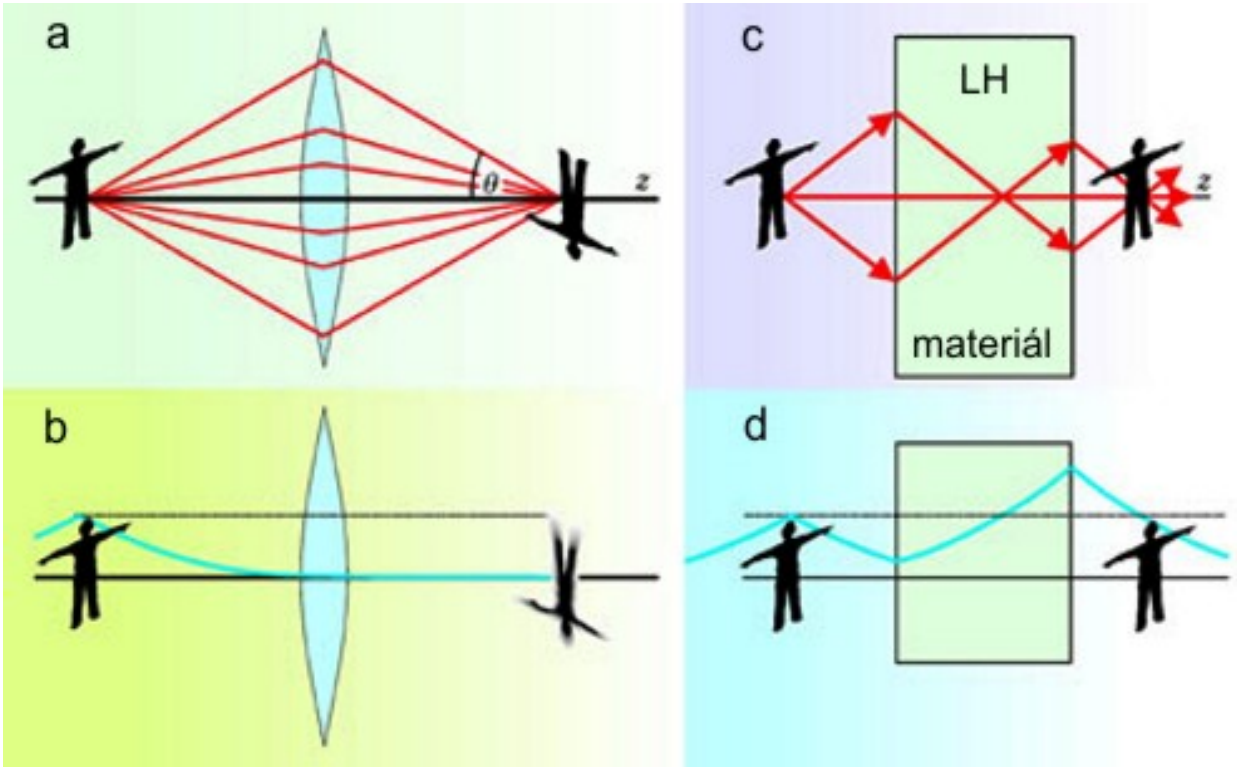
Záporný index lomu

- $n = \sqrt{\epsilon\mu}$
- Snellův zákon $\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = n_{12}$

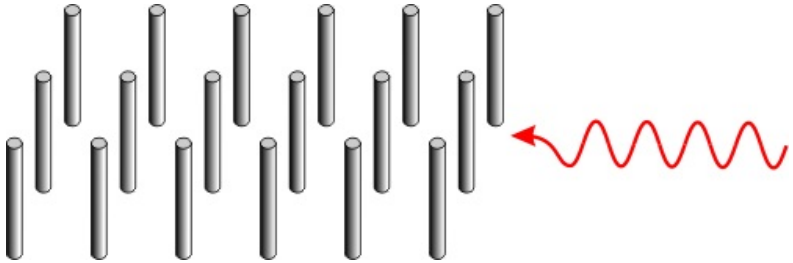




Veselagova čočka (superčočka)



Průkopníci



- John Pendry - navrhl první materiál se zápornou permitivitou (1996)

$$\epsilon_{\text{eff}}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}$$

Průkopníci

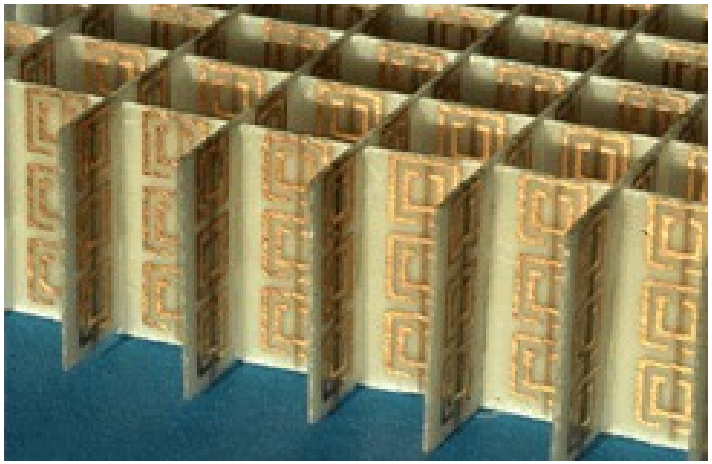
- John Pendry - navrhl první materiál se zápornou permitivitou (1996)

$$\epsilon_{\text{eff}}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}$$

- a se zápornou permeabilitou (1999)

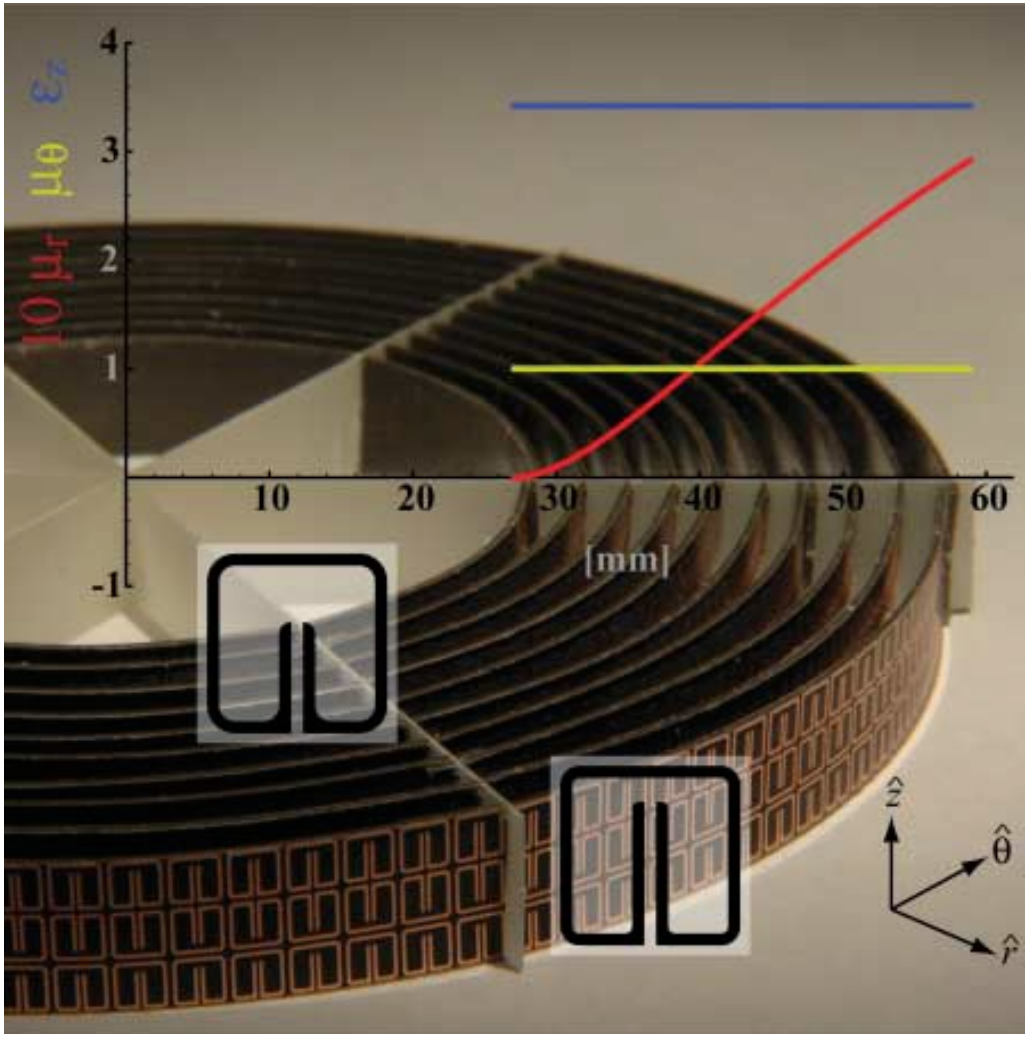
$$\mu_{\text{eff}}(\omega) = 1 - \frac{F\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega\Gamma}$$

Průkopníci



- David R. Smith - zkonstruoval první prostředí se záporným indexem lomu (2000)

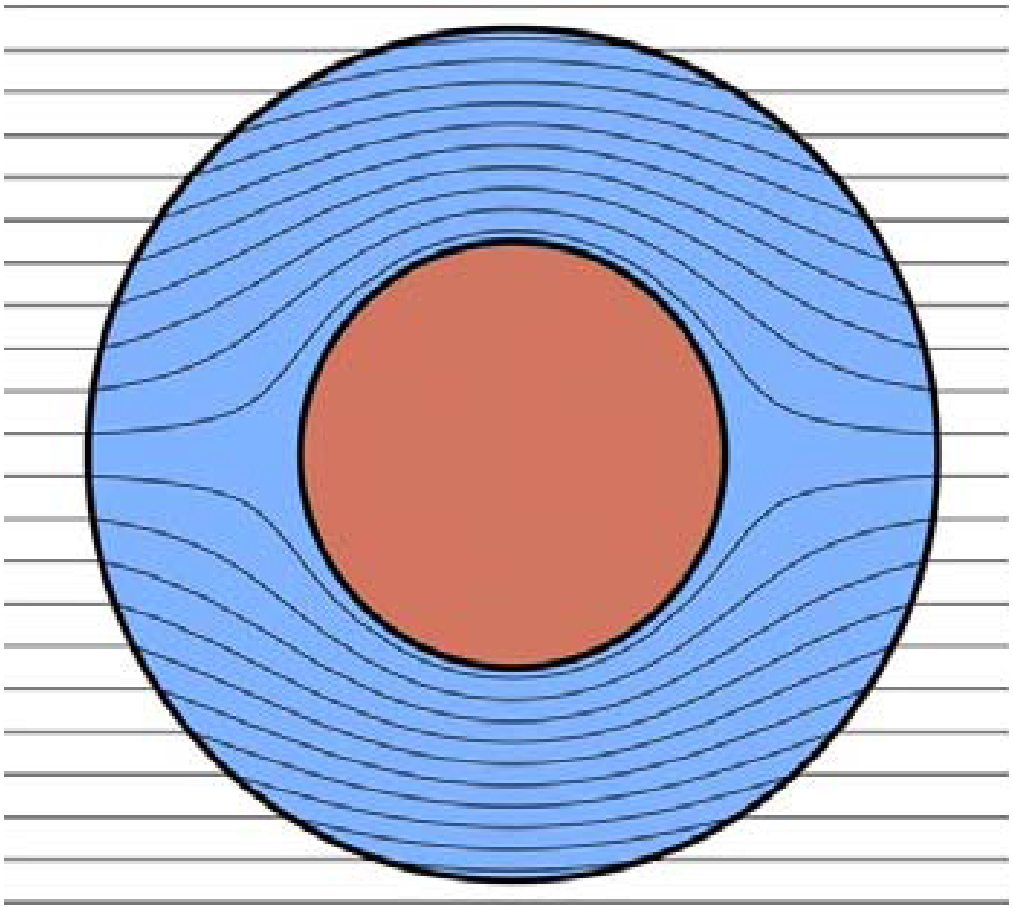
První plášť neviditelnosti



- Schurig, Mock, Justice, Cummer, Pendry, Starr, Smith

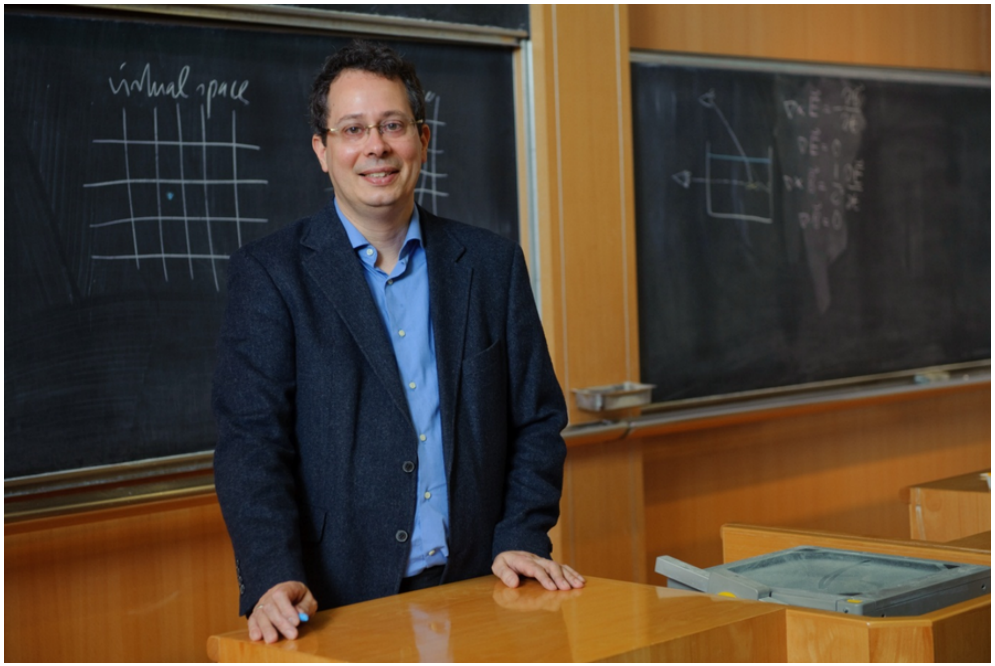
Další fyzikální přístupy

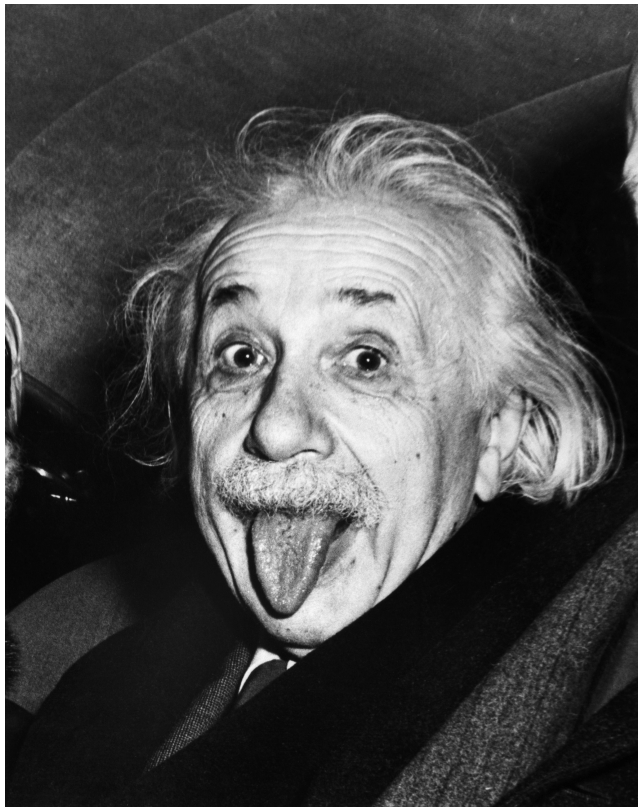
- Geometrická optika



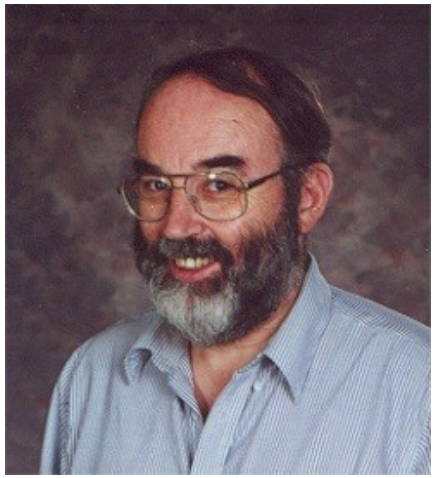
Další fyzikální přístupy

- Ulf Leondhardt - obecná relativita



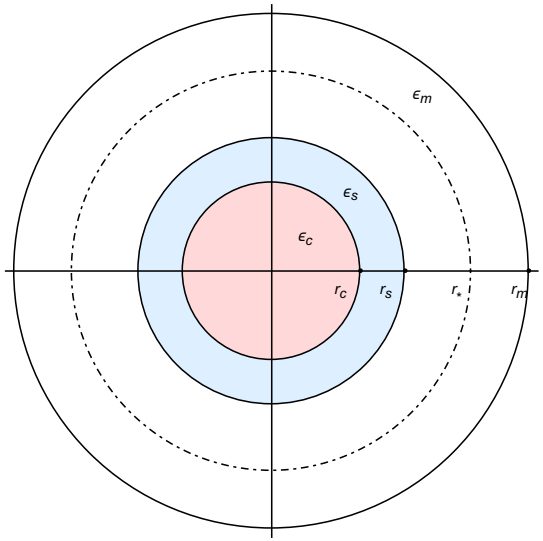


Anomální lokalizovaná rezonance



- N. A. Nicorovici, R. C. McPhedran, G. W. Milton zkoumají případ maskovaného válce (coated cylinder) ve dvou dimenzích (1994)

Anomální lokalizovaná rezonance



- ALR nastává pouze pokud dochází k "blow-upu"energie, tj.

$$E_\delta := \lim_{\delta \to 0} \int_{B_{r_s} \setminus B_{r_c}} \delta \left| \nabla V_\delta \right|^2 dx = \infty$$

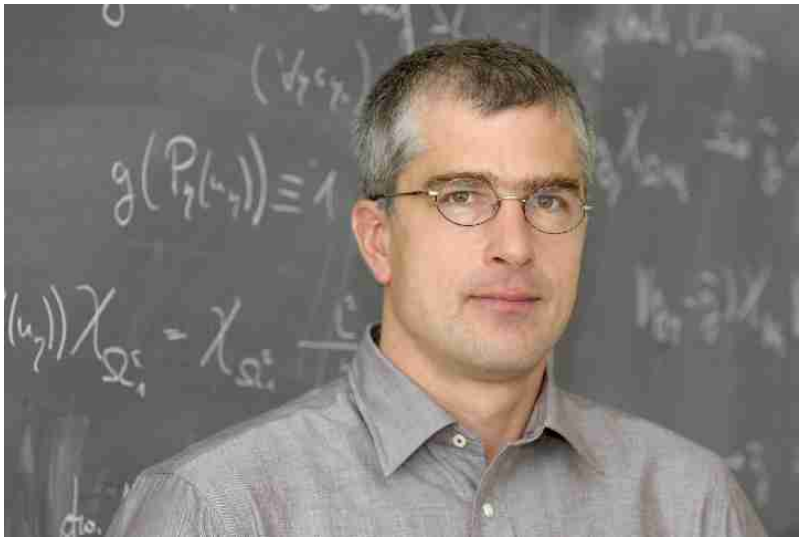
přičemž $V_\delta(x)$ zůstává omezená mimo jistý poloměr a, tj.

$$|V_\delta(x)| < C, \text{pro } |x| > a$$

pro nějaké konstanty C a a nezávislé na $\delta \Rightarrow B_a$ obsahuje celou oblast ALR

- Anomálnost: "blow-up"energie může nastávat i v jisté blízké oblasti kolem maskovacího zařízení

Anomální lokalizovaná rezonance



- G. Bouchitté, B. Schweizer (2009) zkoumali řešení rovnice

$$\nabla \cdot (\epsilon_\delta \nabla u_\delta) = 0$$

$$\epsilon_\delta(x) = \begin{cases} +1, & x \in B_1 \\ -1 + i\delta, & x \in B_R \setminus B_1 \\ +1, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus B_R \end{cases}$$

Anomální lokalizovaná rezonance

- Řešení takovéto rovnice lze najít jako ansatz

$$u_\delta(x) = U_k(r)e^{ik\theta}$$

$$U_k(r) = \begin{cases} r^k, & \text{pro } r \leq 1 \\ ar^k + br^{-k}, & \text{pro } 1 < r \leq R \\ \alpha r^k + \beta r^{-k}, & \text{pro } R < r \end{cases}$$

Anomální lokalizovaná rezonance

- Řešení takovéto rovnice lze najít jako ansatz

$$u_\delta(x) = U_k(r)e^{ik\theta}$$

$$U_k(r) = \begin{cases} r^k, & \text{pro } r \leq 1 \\ ar^k + br^{-k}, & \text{pro } 1 < r \leq R \\ \alpha r^k + \beta r^{-k}, & \text{pro } R < r \end{cases}$$

- Lokalizační index

$$P_k^\delta := P(\delta, k, R) := \frac{\beta}{\alpha}$$

- Zkoumá se limita $\delta \to 0$ výrazu

$$\frac{\beta r^{-k}}{\alpha r^k} = \frac{P_k^\delta}{r^{2k}} = \left(\frac{R^*}{r}\right)^{2k} \frac{(2i\delta - i^2\delta^2)(1 - R^{-2k})}{i^2\delta^2 R^k - (2 - i\delta)^2 R^{-k}}$$

$$R^* = R^{3/2}$$

$$\max_k \frac{\left|P_k^\delta\right|}{r^{2k}} \to 0 \ , r > R^* \qquad \max_k \frac{\left|P_k^\delta\right|}{r^{2k}} \to \infty \ , r < R^*$$

Anomální lokalizovaná rezonance - mezikruží ($d > 3$)

- Zkoumáme stejný problém ve 3 dimenzích, tj. rovnici

$$\Delta\Psi(x) = 0$$

s okrajovými podmínkami

$$\Psi(1^-) = \Psi(1^+)$$
$$\Psi(R^-) = \Psi(R^+)$$
$$\epsilon_\delta(1^-)\nabla\Psi(1^-) = \epsilon_\delta(1^+)\nabla\Psi(1^+)$$
$$\epsilon_\delta(R^-)\nabla\Psi(R^-) = \epsilon_\delta(R^+)\nabla\Psi(R^+)$$

- Laplaceův operátor má ve třech dimenzích tvar

$$-\Delta = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) - \frac{1}{r^2}\Delta_{S^2}$$

- $-\Delta_{S^2}$ je Laplace-Beltramiho operátor, jehož spektrum je $\sigma(-\Delta_{S^2}) = \{l(1+l)\}_{l=0}^{\infty}$ a proto lze Laplaceův operátor psát jako

$$-\Delta = \bigoplus_{l=0}^{\infty}\bigoplus_{k=-l}^{l}(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{l(1+l)}{r^2})$$

Anomální lokalizovaná rezonance - mezikruží ($d > 3$)

- Předpokládáme řešení Laplaceovy rovnice v separovaném tvaru $\Psi(x) = \psi(r)\Phi(\Omega)$, kde $\Omega = (\theta, \phi)$
- Řešíme tak rovnici

$$-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\psi(r)\right) + \frac{l(1+l)}{r^2}\psi(r) = 0$$

$$\Rightarrow \psi(r) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\alpha_l(r)r^l + \beta_l(r)r^{-l-1}\right)$$

- Označíme ψ_l l-tý člen sumy. Koeficienty $\alpha_l(r)$,$\beta_l(r)$ se budou lišit v každé ze tří oblastí

$$\psi_l(r) = \begin{cases} r^l, & \text{pro } r \leq 1 \\ a_l r^l + b_l r^{-l-1}, & \text{pro } 1 < r \leq R \\ \alpha_l r^l + \beta_l r^{-l-1}, & \text{pro } R < r \end{cases}$$

Anomální lokalizovaná rezonance - mezikruží ($d > 3$)

- Po dosazení okrajových podmínek vypočteme čísla α_l, β_l a z nich potom počítáme

$$\left|\frac{\beta_l r^{-l-1}}{\alpha_l r^l}\right| = \frac{\left|P_l^\delta\right|}{r^{2l+1}} =$$

$$= \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+1} \frac{l\sqrt{4+\delta^2}\sqrt{1+\delta^2(1+l)^2}(R^{2l+1}-1)}{\sqrt{\begin{array}{l} 16l^2+32l^3+16l^4+8l^2R^{2l+1}+R^{4l+2}+8lR^{2l+1}+8\delta^2l^2+ \\ 16\delta^2l^3+8\delta^2l^4+6\delta^2lR^{2l+1}+14\delta^2l^2R^{2l+1}+16\delta^2l^3R^{2l+1}+ \\ 8\delta^2l^4R^{2l+1}+\delta^2R^{4l+2}+2\delta^2lR^{4l+2}+2\delta^2l^2R^{4l+2}+\delta^4l^2+ \\ 2\delta^4l^3-\delta^4l^4+2\delta^4l^2R^{2l+1}-4\delta^4l^3R^{2l+1}+2\delta^4l^4R^{2l+1}+ \\ \delta^4l^2R^{4l+2}+2\delta^4l^3R^{4l+2}+\delta^4l^4R^{4l+2} \end{array}}}$$

Anomální lokalizovaná rezonance - mezikruží ($d > 3$)

- Hledáme maximum přes l
  - zjevně v nule má $\frac{|P_l^\delta|}{r^{2l+1}}$ nulovou hodnotu
  - v nekonečnu spočítáme limitu

$$\lim_{l\to+\infty} \frac{|P_l^\delta|}{r^{2l+1}} = \lim_{l\to+\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+1} \frac{l^2 R^{2l+1}}{l^2 R^{2l+1}} \frac{\sqrt{4+\delta^2}\sqrt{\frac{1}{l^2}+\delta^2\left(\frac{1}{l}+1\right)^2}\left(1-\frac{1}{R^{2l+1}}\right)}{\sqrt{\ldots+\delta^4}}$$

Anomální lokalizovaná rezonance - mezikruží ($d > 3$)

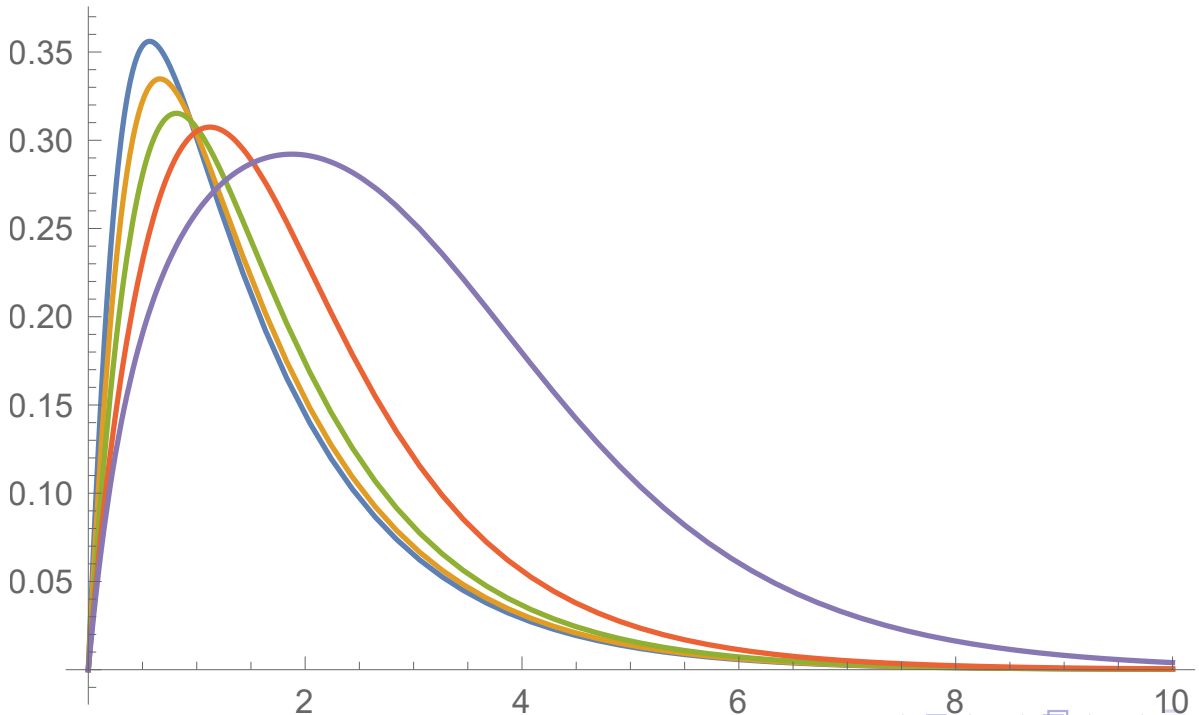
- Hledáme maximum přes l
  - zjevně v nule má $\frac{|P_l^\delta|}{r^{2l+1}}$ nulovou hodnotu
  - v nekonečnu spočítáme limitu

$$\lim_{l\to+\infty} \frac{|P_l^\delta|}{r^{2l+1}} = \lim_{l\to+\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+1} \frac{l^2 R^{2l+1}}{l^2 R^{2l+1}} \frac{\sqrt{4+\delta^2}\sqrt{\frac{1}{l^2}+\delta^2\left(\frac{1}{l}+1\right)^2}\left(1-\frac{1}{R^{2l+1}}\right)}{\sqrt{\ldots+\delta^4}}$$
$$= 0$$

Anomální lokalizovaná rezonance - mezikruží ($d > 3$)

- Hledáme maximum přes l
  - zjevně v nule má $\frac{|P_l^\delta|}{r^{2l+1}}$ nulovou hodnotu
  - v nekonečnu spočítáme limitu

$$\lim_{l\to+\infty} \frac{|P_l^\delta|}{r^{2l+1}} = \lim_{l\to+\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+1} \frac{l^2 R^{2l+1}}{l^2 R^{2l+1}} \frac{\sqrt{4+\delta^2}\sqrt{\frac{1}{l^2}+\delta^2\left(\frac{1}{l}+1\right)^2}\left(1-\frac{1}{R^{2l+1}}\right)}{\sqrt{\ldots+\delta^4}}$$
$$= 0$$



Anomální lokalizovaná rezonance - mezikruží ($d > 3$)

- Pro nalezení maxima provádíme odhad funkce $\frac{\left|P_l^\delta\right|}{r^{2l+1}}$ shora

$$\frac{\left|P_l^\delta\right|}{r^{2l+1}} = \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+1} \frac{l\sqrt{4+\delta^2}\sqrt{1+\delta^2(1+l)^2}(R^{2l+1}-1)}{\sqrt{\dots}}$$

Anomální lokalizovaná rezonance - mezikruží ($d > 3$)

- Pro nalezení maxima provádíme odhad funkce $\frac{|P_l^\delta|}{r^{2l+1}}$ shora

$$\frac{|P_l^\delta|}{r^{2l+1}} = \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+1} \frac{l\sqrt{4+\delta^2}\sqrt{1+\delta^2(1+l)^2}(R^{2l+1}-1)}{\sqrt{\cdots}}$$
$$\leq \frac{1}{l^2} \frac{lC\sqrt{1+\delta^2(1+l)^2}R^{2l+1}}{R^{2l+1}\sqrt{1+\delta^4 l^4}}$$

Anomální lokalizovaná rezonance - mezikruží ($d > 3$)

- Pro nalezení maxima provádíme odhad funkce $\frac{|P_l^\delta|}{r^{2l+1}}$ shora

$$\begin{aligned}\frac{|P_l^\delta|}{r^{2l+1}} &= \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+1} \frac{l\sqrt{4+\delta^2}\sqrt{1+\delta^2(1+l)^2}(R^{2l+1}-1)}{\sqrt{\dots}} \\ &\leq \frac{1}{l^2}\frac{lC\sqrt{1+\delta^2(1+l)^2}R^{2l+1}}{R^{2l+1}\sqrt{1+\delta^4 l^4}} \\ &\leq \frac{C}{l}\frac{1+\delta(1+l)}{1+\delta^2 l^2}\end{aligned}$$

Anomální lokalizovaná rezonance - mezikruží ($d > 3$)

- Pro nalezení maxima provádíme odhad funkce $\frac{|P_l^\delta|}{r^{2l+1}}$ shora

$$\begin{aligned}\frac{|P_l^\delta|}{r^{2l+1}} &= \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+1} \frac{l\sqrt{4+\delta^2}\sqrt{1+\delta^2(1+l)^2}(R^{2l+1}-1)}{\sqrt{\cdots}} \\ &\leq \frac{1}{l^2}\frac{lC\sqrt{1+\delta^2(1+l)^2}R^{2l+1}}{R^{2l+1}\sqrt{1+\delta^4 l^4}} \\ &\leq \frac{C}{l}\frac{1+\delta(1+l)}{1+\delta^2 l^2} \leq \frac{C}{1+\delta^2 l^2} \leq \frac{C}{1+\delta^2 l_0^2}\end{aligned}$$

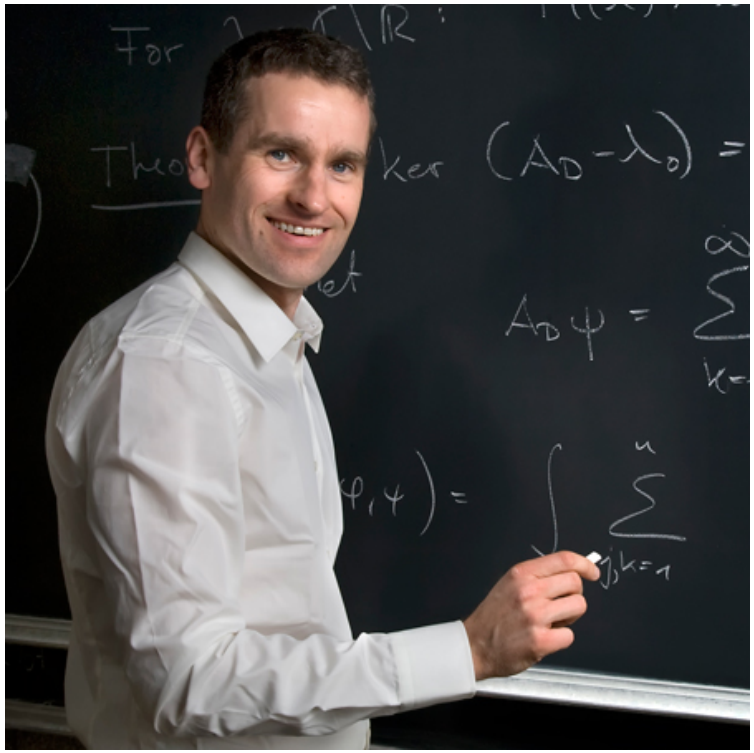
Anomální lokalizovaná rezonance - mezikruží ($d > 3$)

- Pro nalezení maxima provádíme odhad funkce $\frac{|P_l^\delta|}{r^{2l+1}}$ shora

$$\begin{aligned}\frac{|P_l^\delta|}{r^{2l+1}} &= \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+1} \frac{l\sqrt{4+\delta^2}\sqrt{1+\delta^2(1+l)^2}(R^{2l+1}-1)}{\sqrt{\cdots}} \\ &\leq \frac{1}{l^2}\frac{lC\sqrt{1+\delta^2(1+l)^2}R^{2l+1}}{R^{2l+1}\sqrt{1+\delta^4 l^4}} \\ &\leq \frac{C}{l}\frac{1+\delta(1+l)}{1+\delta^2 l^2} \leq \frac{C}{1+\delta^2 l^2} \leq \frac{C}{1+\delta^2 l_0^2}\end{aligned}$$

- Provedeme-li nyní limitu $\delta \to 0$, dostaneme nějakou konstantu C, tedy nedostali jsme $+\infty$ a tedy nedochází k ALR.

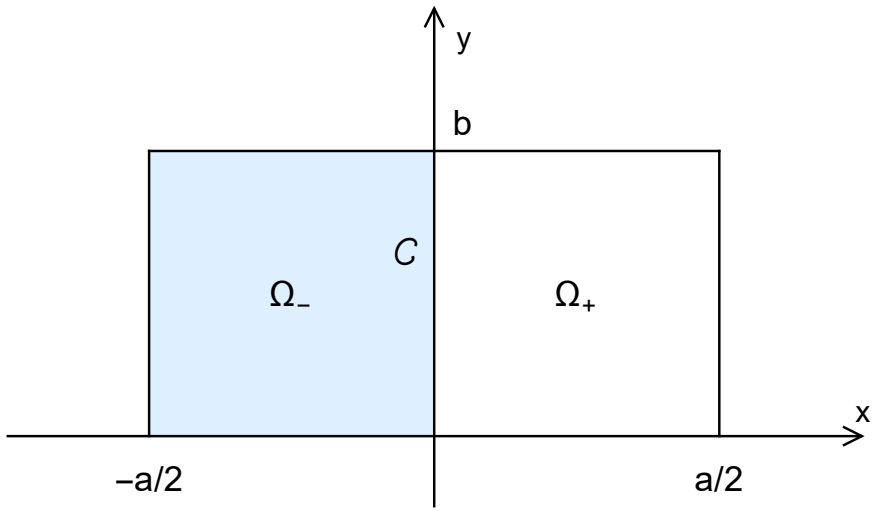
Separovatelné systémy



- J. Behrndt, D. Krejčiřík (2014) - zavedení diferenciálního výrazu $-\operatorname{div}\operatorname{sgn}\nabla$ jako samosdruženého operátoru

Separovatelné systémy - obdélník

- Geometrie:



- Operátor:

$$Af = \begin{pmatrix} -\Delta f_+ \\ \Delta f_- \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{dom} A = \left\{ f = \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} : f_\pm, \Delta f_\pm \in H^2(\Omega_\pm), \right.$$

$$\left. f|_{\partial\Omega} = 0, f_+|_C = f_-|_C, \partial_{\mathbf{n}_+} f_+|_C = \partial_{\mathbf{n}_-} f_-|_C \right\}$$

Separovatelné systémy - obdélník

Věta:

Operátor A je v podstatě samosdružený (tj. symetrický a jeho uzávěr je samosdružený).

- K důkazu využijeme následující větu

Věta: (Davies: Spectral theory and differential operators)

Buď A symetrický operátor na $\mathscr{H}$ a $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je úplná ortonormální množina funkcí v $\mathscr{H}$. Pokud každé ψ_n leží v $\mathrm{Dom}(A)$ a existuje $\lambda_n \in \mathbb{R}$ takové, že $A\psi_n = \lambda_n \psi_n$ pro všechna n, potom je A v podstatě samosdružený operátor. Navíc spektrum operátoru $\bar{A}$ je uzávěr v $\mathbb{R}$ množiny všech λ_n.

Separovatelné systémy - obdélník

Lemma: (vlastní čísla a vlastní funkce)

Spektrum operátoru A tvoří kořeny rovnice

$$\frac{\tanh\left(\sqrt{\lambda+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\frac{a}{2}\right)}{\sqrt{\lambda+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}=\frac{\tan\left(\sqrt{\lambda-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\frac{a}{2}\right)}{\sqrt{\lambda-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}$$

pro $\lambda \neq \pm\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$. Vlastní funkce A příslušející vlastnímu číslu $\lambda_{n,m}$ jsou dány jako

$$f_{n,m}(x,y)=\psi_{n,m\pm}(x)\chi_n(y)$$

kde $\chi_n(y)=\sqrt{\frac{2}{b}}\sin(n\pi\frac{y}{b})$ a

$$\psi_{n,m+}(x)=N_{n,m}\sinh\sqrt{\lambda_n+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\frac{a}{2}\sin\sqrt{\lambda_n-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\left(\frac{a}{2}-x\right)$$

$$\psi_{n,m-}(x)=N_{n,m}\sin\sqrt{\lambda_n-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\frac{a}{2}\sinh\sqrt{\lambda_n+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\left(\frac{a}{2}+x\right)$$

Separovatelné systémy - obdélník

Důkaz: Řešíme rovnici

$$\mp\Delta f_{\pm} = \lambda f_{\pm}$$

v oblastech $\Omega_{\pm}$ pomocí separace proměnných

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)\chi_n(y)$$

kde $\chi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{b}}\sin(n\pi\frac{y}{b})$ jsou funkce ortonormální Dirichletovy báze.

Separovatelné systémy - obdélník

Důkaz: Řešíme rovnici

$$\mp\Delta f_\pm = \lambda f_\pm$$

v oblastech $\Omega_\pm$ pomocí separace proměnných

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)\chi_n(y)$$

kde $\chi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{b}}\sin(n\pi\frac{y}{b})$ jsou funkce ortonormální Dirichletovy báze.
Rovnice na vlastní čísla je pak

$$\mp\sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi''_{n\pm}(x)\chi_n(y) - \psi_{n\pm}(x)\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\chi_n(y)\right) = \lambda\sum_{n=1}^{\infty}(\psi_{n\pm}(x)\chi_n(y))$$

kterou přenásobíme $\chi_m(y)$ a vyintegrujeme přes y od 0 do b

$$-\psi''_{n+}(x) = \left(\lambda - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right)\psi_{n+}(x), \qquad x \in \left(0, \frac{a}{2}\right)$$

$$\psi''_{n-}(x) = \left(\lambda + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right)\psi_{n-}(x), \qquad x \in \left(-\frac{a}{2}, 0\right)$$

Separovatelné systémy - obdélník

Řešíme tedy takovýto systém diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami

$$\psi_{n+}\left(\frac{a}{2}\right) = \psi_{n-}\left(-\frac{a}{2}\right) = 0, \quad \psi_{n+}(0) = \psi_{n-}(0), \quad \psi'_{n+}(0) = -\psi'_{n-}(0)$$

z čehož nám vyjdou hledané vlastní funkce, rovnice na vlastní čísla a podmínka na $N_{n,m}$, aby byly tyto vlastní funkce normalizované

$$\frac{1}{N_{n,m}^2} = \sin^2 \lambda_- \frac{a}{2}\left(\frac{\sinh \lambda_+ a}{4\lambda_+} - \frac{a}{4}\right) + \sinh^2 \lambda_+ \frac{a}{2}\left(\frac{a}{4} - \frac{\sin \lambda_- a}{4\lambda_-}\right)$$

Separovatelné systémy - obdélník

Lemma: (ortogonalita)

Vlastní funkce $f_{n,m}$ operátoru A tvoří ortonormální množinu v $H^2(\Omega)$.

Důkaz:

- $\{\chi_n(y)\}$ je zřejmě ortonormální
- Ortonormalita $\{\psi_n(x)\}$ se ukáže z toho, že operátor

$$(A_n\psi_n)(x) = \begin{cases} -\psi''_{n+}(x) + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \psi_{n+}(x), & x \in \left(0, \frac{a}{2}\right) \\ \psi''_{n-}(x) - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \psi_{n-}(x), & x \in \left(-\frac{a}{2}, 0\right) \end{cases}$$

$$\operatorname{dom} A_n = \left\{ \psi_n = \begin{pmatrix} \psi_{n+} \\ \psi_{n-} \end{pmatrix} : \psi_{n+}, \psi''_{n+} \in H^2((0, \frac{a}{2})), \psi_{n-}, \psi''_{n-} \in H^2((-\frac{a}{2}, 0)), \right.$$
$$\psi_{n+}(\frac{a}{2}) = \psi_{n-}(-\frac{a}{2}) = 0,$$
$$\left. \psi_{n+}(0) = \psi_{n-}(0), \psi'_{n+}(0) = -\psi'_{n-}(0) \right\}$$

jehož vlastní funkce jsou $\psi_n(x)$, je pro každé n samosdružený.

Separovatelné systémy - obdélník

Lemma: (úplnost)

Funkce $f_{n,m}$ tvoří úplnou ortonormální množinu v $H^2(\Omega)$.

Důkaz: (Kato: Perturbation theory for linear operators)
Musíme ukázat, že pokud $(w, f_{n,m}) = 0$ pro všechna n, m a každou funkci w, pak $w = 0$.
Definujeme si funkci

$$w_{n,m}(y) = \int_{-a/2}^{a/2} w(x,y)\psi_{n,m}(x)dx$$

pro níž máme ze Schwarzovy nerovnosti

$$|w_{n,m}(y)|^2 \leq \int_{-a/2}^{a/2} |w(x,y)|^2 \, dx \int_{-a/2}^{a/2} |\psi_{n,m}(x)|^2 \, dx = \int_{-a/2}^{a/2} |w(x,y)|^2 \, dx$$

A zároveň platí

$$\int_0^b |w_{n,m}(y)|^2 \, dy \leq \int_\Omega |w(x,y)|^2 \, dxdy = \|w\|^2$$

Separovatelné systémy - obdélník

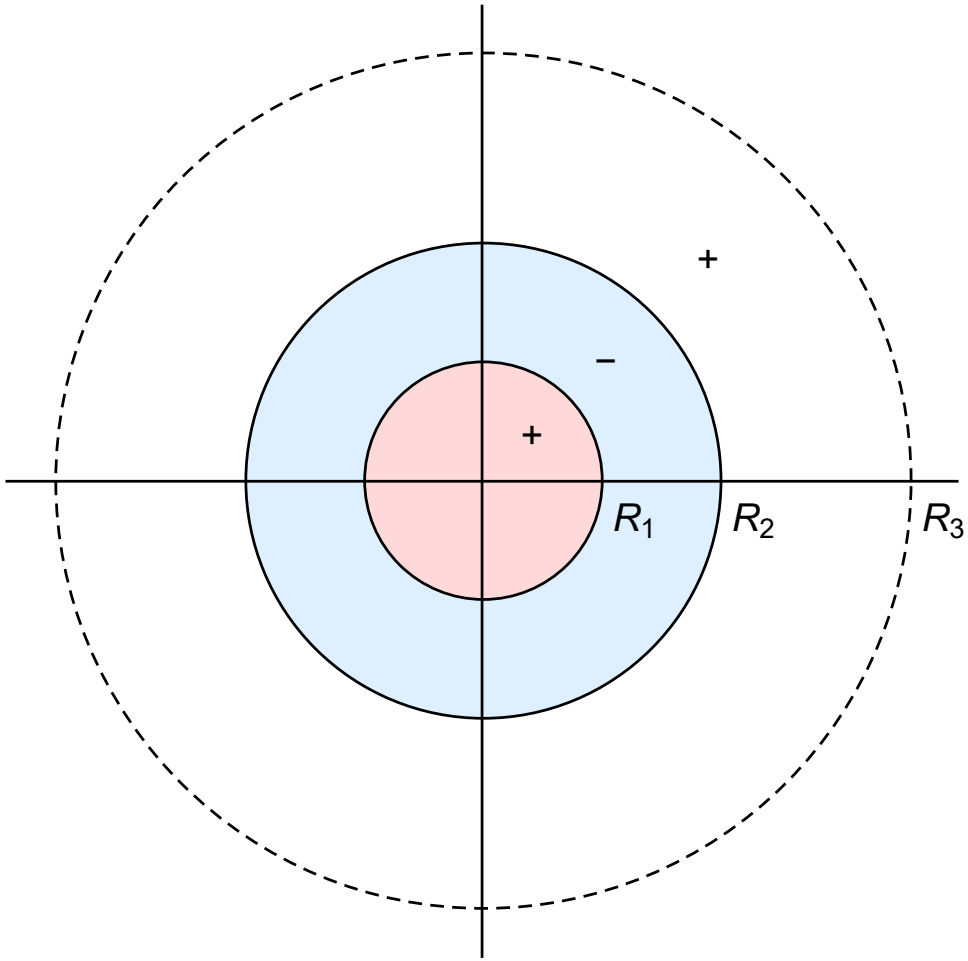
Ty dvě nerovnosti implikují, že $w_{n,m} \in H^2((0,b))$ a proto můžeme psát

$$(w, f_{n,m}) = (w, \psi_{n,m}\chi_n) = (w_{n,m}, \chi_n)$$

Tedy pokud $(w, f_{n,m}) = 0$ pro všechna n, m, pak je i $(w_{n,m}, \chi_n) = 0$ a z úplnosti $\{\chi_n\}$ dostáváme, že $w_{n,m} = 0$.

Separovatelné systémy - mezikruží

- Geometrie:



Separovatelné systémy - mezikruží

- Operátor:

$$Cf = \begin{pmatrix} -\Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ -\Delta f_3 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{dom} C = \left\{ f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad : f_j, \Delta f_j \in H^2((R_{j-1}, R_j), rdr) \times H^2(S^1, d\varphi), \right.$$

$$j = 1, 2, 3, \quad f_3|_{\partial B_{R_3}} = 0, f_1|_{\partial B_{R_1}} = f_2|_{\partial B_{R_1}}, f_2|_{\partial B_{R_2}} = f_3|_{\partial B_{R_2}},$$

$$\left. \partial_{\mathbf{n}+} f_1|_{\partial B_{R_1}} = \partial_{\mathbf{n}_-} f_2|_{\partial B_{R_1}}, \partial_{\mathbf{n}+} f_2|_{\partial B_{R_2}} = \partial_{\mathbf{n}_-} f_3|_{\partial B_{R_2}} \right\}$$

Separovatelné systémy - mezikruží

Věta:

Operátor C je v podstatě samosdružený.

- Zavedeme si označení

$$A = \frac{J_n(-i\lambda_1)}{J_n(\lambda_1)} - i\frac{J_{n-1}(-i\lambda_1) - J_{n+1}(-i\lambda_1)}{J_{n-1}(\lambda_1) - J_{n+1}(\lambda_1)}$$

$$B = \frac{J_n(-i\lambda_1)}{J_n(\lambda_1)} - i\frac{Y_{n-1}(-i\lambda_1) - Y_{n+1}(-i\lambda_1)}{J_{n-1}(\lambda_1) - J_{n+1}(\lambda_1)}$$

$$C = \frac{Y_n(\lambda_2)}{J_n(\lambda_2)} - \frac{Y_n(\lambda_3)}{J_n(\lambda_3)}$$

$$D = \frac{Y_n(-i\lambda_2)}{J_n(\lambda_2)} - \frac{B}{A}\frac{J_n(-i\lambda_2)}{J_n(\lambda_2)}$$

$$E = \frac{Y_{n-1}(\lambda_2) - Y_{n+1}(\lambda_2)}{J_{n-1}(\lambda_2) - J_{n+1}(\lambda_2)} - \frac{Y_n(\lambda_3)}{J_n(\lambda_2)}$$

$$F = \frac{i\left(Y_{n-1}(-i\lambda_2) - Y_{n+1}(-i\lambda_2) - \frac{B}{A}\left(J_{n-1}(-i\lambda_2) - J_{n+1}(-i\lambda_2)\right)\right)}{J_{n-1}(\lambda_2) - J_{n+1}(\lambda_2)}$$

Separovatelné systémy - mezikruží

- Rovnice na vlastní čísla

$$\frac{D}{C} = \frac{F}{E}$$

- Vlastní funkce

$$f(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(r) h_n(\varphi)$$

kde $h_n(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n\varphi)$,

$$g_{1n}(r) = N_n \frac{Y_n(-i\sqrt{\lambda}R_1) - \frac{B}{A} J_n(-i\sqrt{\lambda}R_1)}{J_n(\sqrt{\lambda}R_1)} J_n(\sqrt{\lambda}r), \qquad r \in (0, R_1)$$

$$g_{2n}(r) = N_n \left(Y_n(-i\sqrt{\lambda}r) - \frac{B}{A} J_n(-i\sqrt{\lambda}r) \right), \qquad r \in (R_1, R_2)$$

$$g_{3n}(r) = N_n \frac{D}{C} \left(Y_n(\sqrt{\lambda}r) - \frac{Y_n(\sqrt{\lambda}R_3)}{J_n(\sqrt{\lambda}R_3)} J_n(\sqrt{\lambda}r) \right), \qquad r \in (R_2, R_3)$$

0 jako bod esenciálního spektra

- Obdélník: 0 je vlastní číslo nekonečné násobnosti (Behrndt, Krejčiřík)
- Mezikruží: 0 neleží v bodovém spektru, leží ale v esenciálním

Důkaz: Provedeme rozvoj Besselových funkcí pro $n \to \infty$

$$J_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{ez}{2n}\right)^n + o\left(\left(\frac{ez}{2}\right)^n \frac{1}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right)$$

$$Y_n(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left(\frac{2n}{ez}\right)^n + o\left(\left(\frac{2}{ez}\right)^n n^{n-\frac{1}{2}}\right)$$

0 jako bod esenciálního spektra

$$LS = \frac{R_2^{2n}}{2\left(-i\right)^n R_1^{2n}\left[-1+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]}\left[1-\frac{(n-1)^{n-\frac{1}{2}}(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{n^{2n}}+\right.$$

$$\left.+\frac{e^2R_1^2\lambda}{4}\left(\frac{(n-1)^{2n-2}}{2^{2n}}-\frac{(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$RS = \frac{R_2^{2n}}{2(-i)^nR_1^{2n}\left[\frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{n^{2n}(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}-\frac{e^2R_2^2\lambda}{4}\frac{1}{n^{2n}(n-1)}+o\left(\frac{(n-1)^{n-\frac{3}{2}}}{n^{2n}(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}\right)\right]}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{n^{2n}(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}-\frac{1}{(n-1)^{2n-1}}+\frac{e^2\lambda}{4}\left[R_2^2\left(\frac{1}{n^{2n}(n+1)}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{1}{(n-1)^{n-\frac{1}{2}}(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}\right)+R_1^2\left(\frac{1}{n^{2n}(n-1)}+\frac{1}{(n-1)^{n-\frac{1}{2}}(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}\right)\right]+\right.$$

$$\left.\frac{e^4R_1^2R_2^2\lambda^2}{16}\left[\frac{1}{(n+1)^{2n+3}}+\frac{(n-1)^{n-\frac{3}{2}}}{n^{2n}(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}\right]+o\left(\frac{1}{n^{2n+3}}\right)\right]$$

0 jako bod esenciálního spektra

Dostáváme kupodivu kvadratickou rovnici pro λ

$$0 = -\frac{e^2}{36n^5} + \lambda\frac{e^2}{4}\left[R_1^2\left(\frac{2}{n}+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{3n^4}+\frac{2}{n^5}\right)+R_2^2\left(\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n^4}+\frac{1}{3n^5}\right)\right]+$$
$$+\lambda^2\frac{e^2R_1^2R_2^2}{16}\left(\frac{2}{n^3}-\frac{4}{n^4}+\frac{5}{3n^5}\right)+o\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

$$\lambda_\pm = -\frac{2}{R_1^2R_2^2}\frac{6R_1^2n^4+6R_2^2n^3+6R_1^2n^2+(R_1^2+6R_2^2)n+6R_1^2+R_2^2}{(6n^2-12n+5)}\pm$$
$$\pm\frac{2}{\sqrt{3}R_1^2R_2^2(6n^2-12n+5)}\sqrt{\begin{aligned}&108R_1^4n^8+216R_1^2R_2^2n^7+(216R_1^4+108R_2^4)n^6+\\&(36R_1^4+432R_1^2R_2^2)n^5+(324R_1^4+216R_2^4+\\&+72R_1^2R_2^2)n^4+(36R_2^4+432R_1^2R_2^2)n^3+\\&+(219R_1^4+108R_2^4+78R_1^2R_2^2)n^2+\\&+(36R_1^4+36R_2^4+210R_1^2R_2^2)n+108R_1^4+\\&+3R_2^2+41R_2^2R_2^2\end{aligned}}$$

Ukáže se, že $\lim_{n\to\infty}\lambda_1 = 0$ a tedy, že 0 je skutečně v esenciálním spektru.

Děkuji za pozornost