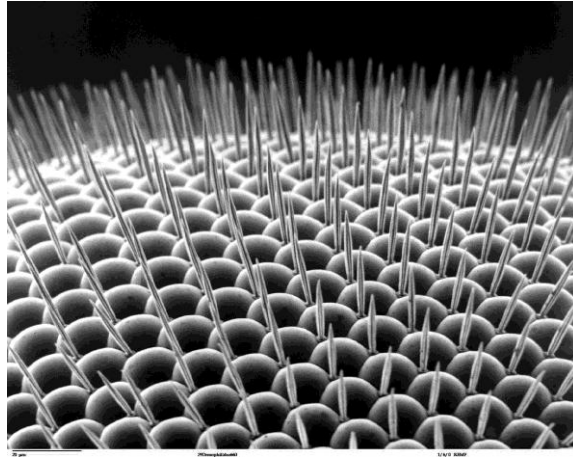


3.10 Ladungsträger im elektrischen Feld

In der modernen Physik können mit Hilfe von sog. Rasterelektronenmikroskopen mikroskopisch kleine Objekte beobachtet werden, die mit Hilfe von herkömmlichen Lichtmikroskopen nicht mehr aufgelöst werden können. Die folgende Abbildung zeigt die Facetten eines Fliegenauges.



[20] Facettenauge

Um derartige Beobachtungen zu machen wird bei einem Rasterelektronenmikroskop ein stark gebündelter Elektronenstrahl erzeugt, mit dem die zu beobachtende Oberfläche (zum Beispiel das Fliegenauge) Stück für Stück abgerastert wird. Mit einer komplizierten Messelektronik auf die hier nicht näher eingegangen werden soll, werden die an der Oberfläche reflektierten Elektronen (Primärelektronen) sowie aus der Oberfläche herausgeschlagenen Elektronen (Sekundärelektronen) erfasst und mit Hilfe von Messprogrammen im Computer zu einem Bild zusammengesetzt.

Im Folgenden soll nun geklärt werden wie es technisch möglich ist, einen feinen Elektronenstrahl wie er in Rasterelektronenmikroskopen verwendet wird zu erzeugen. Hierzu wird im Detail der Aufbau einer sog. Kathodenstrahlröhre/Elektronenstrahlröhre betrachtet.

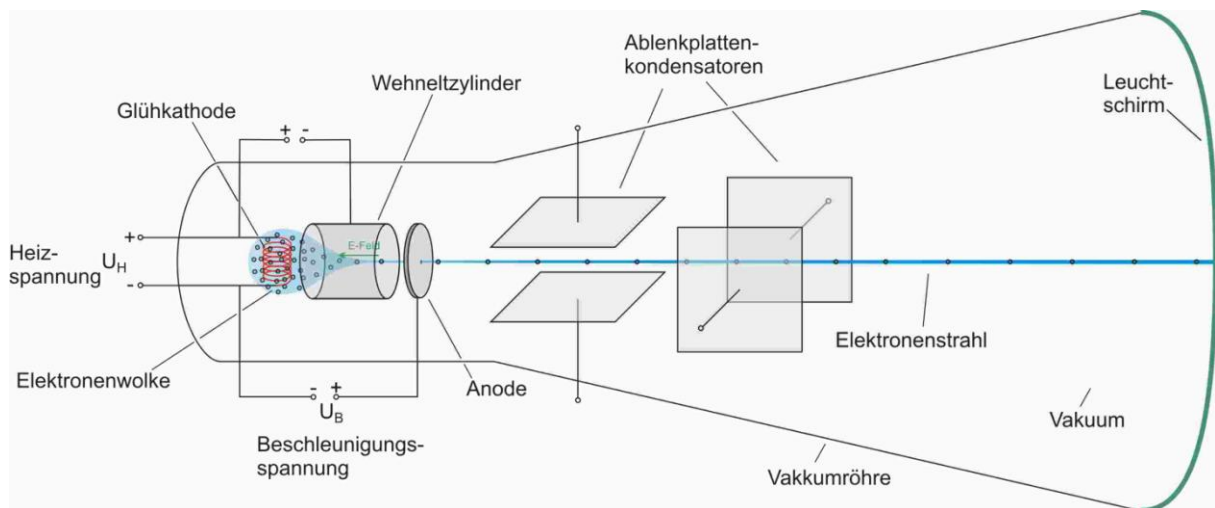
3.10.1 Glühelektrischer Effekt

Die in einem Rasterelektronenmikroskop freigesetzten Elektronen werden in einer sog. Glühkathode gemäß dem Glühelektrischen Effekt erzeugt (auch: Edisoneffekt bzw. Richardstoneffekt). Dieser besagt, dass glühende Metalle nicht nur Licht, sondern auch freie Elektronen emittieren. Im Gegensatz zum Licht, das sich mit Lichtgeschwindigkeit c vom glühenden Metall wegbewegt, besitzen die Elektronen nur eine relativ geringe, in nachfolgenden Rechnungen zu vernachlässigende Geschwindigkeit v_{Austritt} und bewegen sich deshalb nur unwesentlich von der Metalloberfläche weg. Als Elektronenemitter verwendet man häufig sog. Glühwendel (sehr feine aufgewickelte Metalldrähte), wie sie auch aus handelsüblichen Glühlampen bekannt sind. Beschleunigt man die Elektronen nun in einem elektrischen Feld, so entfernen sie sich nennenswert von der Glühwendel und können je nach Feldkonfiguration zum Beispiel in Richtung der zu beobachteten Oberfläche bewegt werden.

3.10.2 Kathodenstrahlröhren

In einer Kathodenstrahlröhre werden genau wie im Rasterelektronenmikroskop Elektronen freigesetzt, gebündelt und beschleunigt. Die aus der Glühkathode austretenden Elektronen (negativ geladen) werden durch das Anlegen einer Beschleunigungsspannung U_B in Richtung einer sog. Anode (positiv geladen) beschleunigt. Die Kathode fungiert dabei wie die negative und die Anode wie die positive Platte eines Plattenkondensators.

Um einen möglichst gebündelten Strahl zu erhalten, ist ein Teil der Beschleunigungsstrecke von einem negativ geladenen Metallzylinder dem sog. Wehneltzylinder umgeben. Durch eine Bohrung in der Anode können die Elektronen dann hindurchtreten und bewegen sich danach zunächst mit konstanter Geschwindigkeit in Richtung Leuchtschirm.



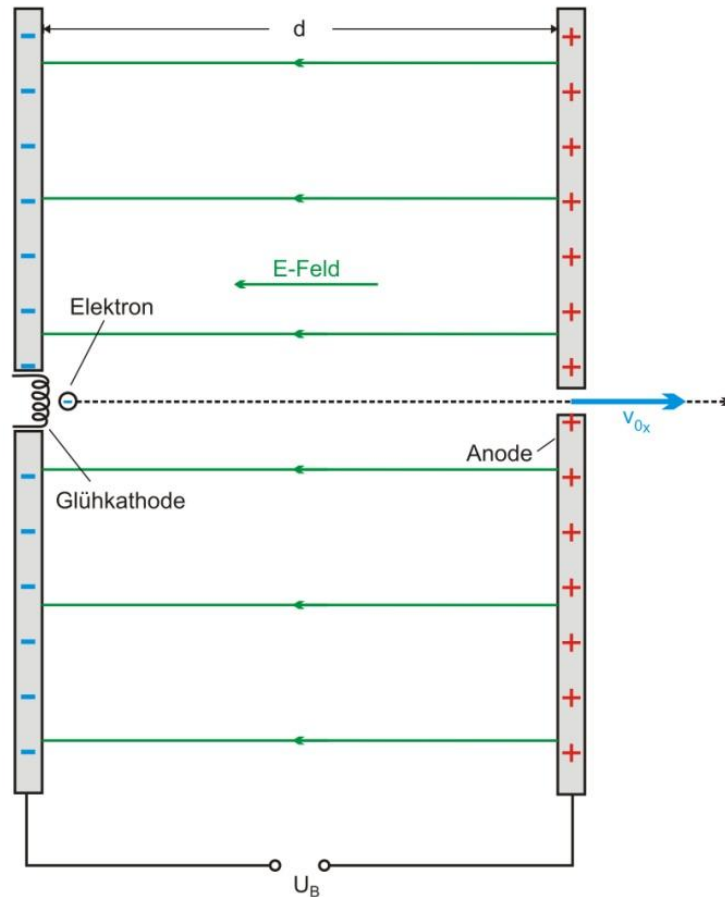
Ergänzt wird die Kathodenstrahlröhre durch zwei kleine Plattenkondensatoren die den Strahl je nach gewünschter Richtung ablenken können.

3.10.3 Beschleunigung der Elektronen im Linearteilchenbeschleuniger

Das elektrische Feld, in dem die Elektronen zwischen Kathode und Anode einer Kathodenstrahlröhre beschleunigt werden ist nicht homogen. Dies spielt jedoch für weitere Überlegungen keine Rolle, da nur die zwischen Kathode und Anode anliegende Beschleunigungsspannung für die Beschleunigung der Elektronen ausschlaggebend ist.

Vereinfacht man gedanklich den Aufbau derart, dass Kathode und Anode aus zwei zueinander parallelen Platten eines Plattenkondensators bestehen (Linearteilchenbeschleuniger, siehe Abbildung), so kann sehr leicht die an den Elektronen verrichtete Beschleunigungsarbeit bzw. deren Endgeschwindigkeit berechnet werden:

$$W_{\text{Beschl.}} = F \cdot s$$



Im Linearteilchenbeschleuniger werden die Elektronen mit der elektrischen Kraft

$F_{el.} = E \cdot q = E \cdot e$ entlang der Strecke d (Plattenabstand) beschleunigt:

$$W_{Beschl.} = F_{el.} \cdot d = E \cdot e \cdot d$$

mit $E = U_B/d$ ergibt sich:

$$W_{Beschl.} = U_B \cdot e$$

Wie man sieht, ist die Beschleunigung der Elektronen nicht mehr abhängig von der elektrischen Feldstärke bzw. der Form des elektrischen Feldes, sondern nur von der Beschleunigungsspannung U_B .

Für die Endgeschwindigkeit v_{0x} ergibt sich:

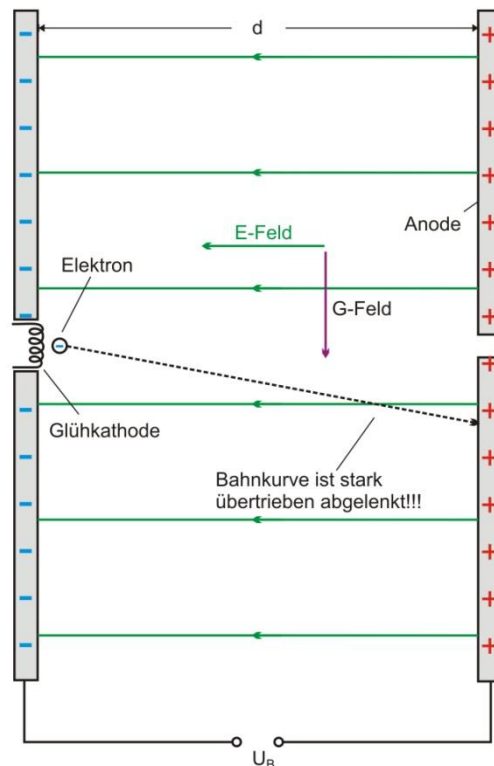
$$\frac{1}{2} m_e \cdot v_{0x}^2 = U_B \cdot e$$

$$v_{0x} = \sqrt{\frac{2 \cdot U \cdot e}{m_e}}$$

3.10.4 Berücksichtigung der Gravitation

Bei der obigen Überlegung wurde lediglich von einer horizontalen Beschleunigung der Elektronen durch das elektrische Feld zwischen den Platten des Linearteilchenbeschleunigers ausgegangen. Da die Elektronen jedoch auch eine Masse besitzen, wirkt auf sie während des gesamten Vorgangs auch die Erdanziehungskraft, die die Elektronen vertikal mit der Erdbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ in Richtung Erdboden beschleunigt.

Nach dem Superpositionsprinzip ist die Bewegung der Elektronen deshalb die Überlagerung einer gleichförmig beschleunigten Bewegung in x-Richtung mit einem freien Fall in y-Richtung. Beide Bewegungen überlagern sich hierbei ungestört. Dieser Vorgang darf nicht mit einem „waagerechten Wurf“ verwechselt werden, bei dem in x-Richtung eine geradlinig gleichförmige und keine beschleunigte Bewegung vorliegt.



x-Komponente:	y-Komponente
$s_x(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$	$s_y(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$
$v_x(t) = a \cdot t$ ($= \dot{s}_x(t)$)	$v_y(t) = -g \cdot t$ ($= \dot{s}_y(t)$)
$a_x(t) = a = const$ ($= \ddot{s}_x(t)$)	$a_y(t) = -g = const.$ ($= \ddot{s}_y(t)$)

Formt man das Weg-Zeit-Gesetz der x-Komponente nach der Zeit t um,

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot s_x}{a}}$$

so kann man dieses in die zugehörige Gleichung der y-Komponente einsetzen

$$s_y = -\frac{1}{2}g \cdot \frac{2 \cdot s_x}{a}$$

und es ergibt sich die Gleichung der Bahnkurve der Elektronen:

$$s_y(s_x) = -\frac{g}{a} \cdot s_x$$

Die vertikale Ablenkung s_y ist dabei eine Funktion der x-Komponente s_x . Die Bahnkurve ist eine Gerade, da die Bahngleichung im mathematischen Sinne der Funktionsgleichung einer linearen Funktion $f(x) = m \cdot x$ entspricht. Die Beschleunigung a in x-Richtung kann aus der Kräftebilanz berechnet werden:

$$F_{\text{Beschl.}} = F_{el}$$

Mit der Beschleunigungsspannung U_B und dem Plattenabstand d ergibt sich:

$$m_e \cdot a = E \cdot e$$

$$m_e \cdot a = \frac{U_B}{d} \cdot e$$

$$a = \frac{U_B \cdot e}{d \cdot m_e}$$

Die allgemeine Bahngleichung lautet somit:

$$s_y(s_x) = -\frac{g \cdot d \cdot m_e}{U_B \cdot e} \cdot s_x$$

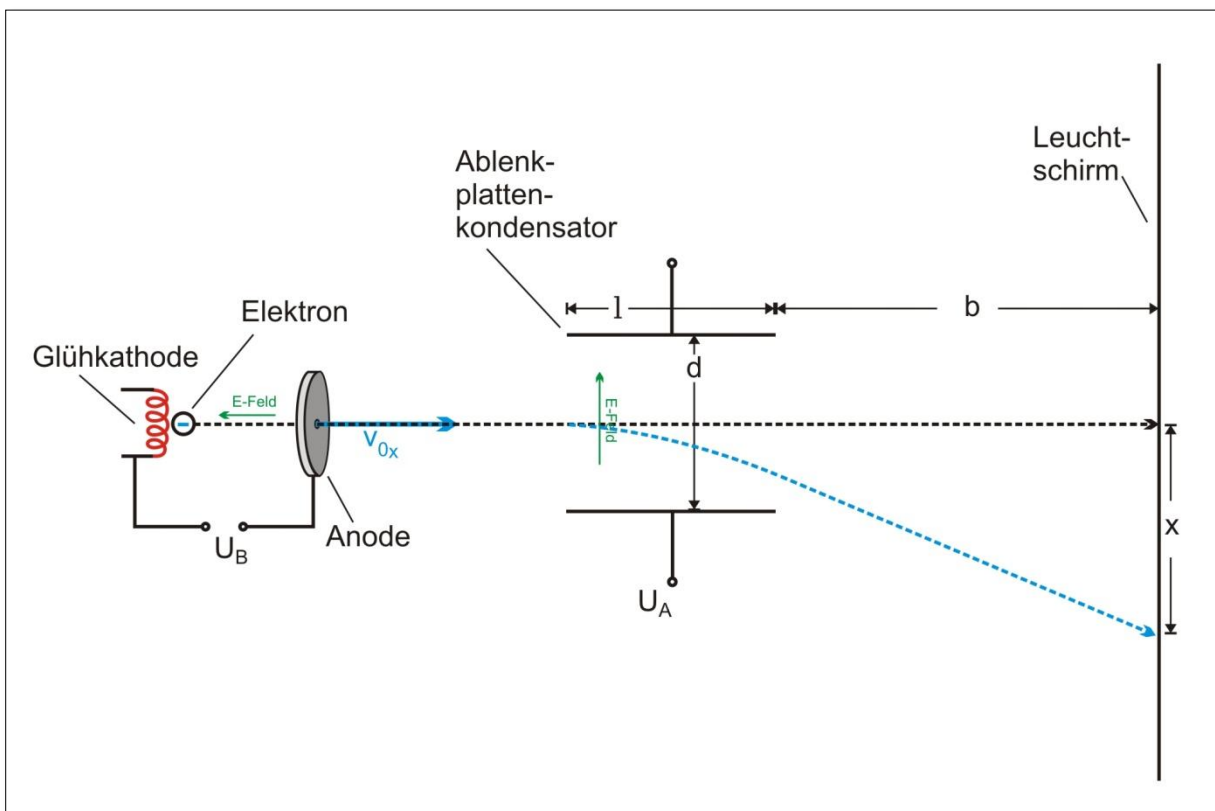
Bemerkung: In der Praxis kann die Ablenkung der Flugbahn der Elektronen durch die Gravitation vernachlässigt werden, da die Beschleunigung der Elektronen im elektrischen Feld a sehr groß gegen die Beschleunigung der Elektronen im Gravitationsfeld der Erde ist.

3.10.5 Ablenkung der Elektronen im Ablenkplattenkondensator

Nachdem die Elektronen in der Elektronenstrahlröhre die Beschleunigungsstrecke zwischen Kathode und Anode zurückgelegt haben, bewegen sie sich zunächst mit konstanter Geschwindigkeit in

Richtung des Leuchtschirms. Um wie beim Fernseher auch Bildpunkte erzeugen zu können, die nicht auf der zentralen Achse der Röhre liegen, müssen die Elektronen von zusätzlichen elektrischen Feldern abgelenkt werden. Diese werden von zwei Ablenkkondensatoren erzeugt, die sich zwischen Anode und Leuchtschirm befinden.

Da das Grundprinzip der Ablenkung in horizontaler und in vertikaler Richtung dasselbe ist, wird im Folgenden nur auf die vertikale Ablenkung des Elektronenstrahls durch den ersten Ablenklplattenkondensator eingegangen. Rechnungen zur horizontalen Ablenkung sind analog zu denen der vertikalen Ablenkung, da die Gravitationskraft aufgrund der geringen Erdbeschleunigung vernachlässigt werden kann.



Die Elektronen gelangen mit der Startgeschwindigkeit v_{0x} in das elektrische Feld des horizontal ausgerichteten Plattenkondensators. Dort werden sie je nach angelegter Ablenkspannung U_A nach oben bzw. nach unten beschleunigt. Nach Verlassen des Plattenkondensators bewegen sich die Elektronen kräftefrei auf einer geraden Bahn in Richtung Leuchtschirm.

Die Bahn der Elektronen im Ablenklplattenkondensator kann in diesem Fall analog zum waagerechten Wurf beschrieben werden, da in x -Richtung nur eine unbeschleunigte geradlinig gleichförmige Bewegung vorliegt. Einziger Unterschied zum waagerechten Wurf in der Mechanik ist die Tatsache, dass hier die Beschleunigung in y -Richtung nicht durch die Erdanziehungskraft, sondern durch das elektrische Feld zwischen den Kondensatorplatten hervorgerufen wird.

Die Bewegungsgleichungen lauten somit:

x-Komponente:	y-Komponente
$s_x(t) = v_{0_x} \cdot t$	$s_y(t) = -\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$
$v_x(t) = v_{0_x} = \text{const.} \quad (= \dot{s}_x(t))$	$v_y(t) = -a \cdot t \quad (= \dot{s}_y(t))$
$a_x(t) = 0 \quad (= \ddot{s}_x(t))$	$a_y(t) = -a = \text{const.} \quad (= \ddot{s}_y(t))$

Die Bahngleichung erhält man wie oben durch einsetzen der x-Komponente in die y-Komponente:

$$s_y(t) = -\frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{s_x}{v_{0_x}} \right)^2$$

bzw.

$$s_y(t) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{v_{0_x}^2} \cdot s_x^2$$

Die Beschleunigung a ergibt sich aus einer neuen Kräftebilanz:

$$F_{\text{Beschl.}} = F_{el}$$

Mit der Ablenkspannung U_A und dem Plattenabstand d ergibt sich:

$$m_e \cdot a = E \cdot e$$

$$m_e \cdot a = \frac{U_A}{d} \cdot e$$

$$a = \frac{U_A \cdot e}{d \cdot m_e}$$

Achtung: Der Plattenabstand d entspricht hier nicht dem Abstand von Kathode und Anode der Kathodenstrahlröhre, sondern dem Abstand der Platten des Ablenkkondensators.

Mit der Startgeschwindigkeit

$$v_{0_x} = \sqrt{\frac{2 \cdot U_B \cdot e}{m_e}}$$

ergibt sich dann die allgemeine Bahngleichung:

$$s_y(t) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{U_A \cdot e}{d \cdot m_e} \right)}{\left(\sqrt{\frac{2 \cdot U_B \cdot e}{m_e}} \right)^2} \cdot s_x^2$$

bzw.

$$s_y(t) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{U_A}{U_B} \cdot \frac{1}{d} \cdot s_x^2$$

Es ist zu erkennen, dass die Bahngleichung unabhängig von der Elektronenmasse und der Elektronenladung ist und im Wesentlichen nur durch die Beschleunigungs- und die Ablenkspannung bestimmt wird. Hieraus kann folgender Schluss gezogen werden:

Satz: Es ist nicht möglich allein mit homogenen elektrischen Feldern die Masse des Elektrons zu bestimmen. (Hinweis: Hierzu benötigt man magnetische Felder. Siehe Kapitel 4)
