Obsah

1 Rozdělení mechaniky a její náplň **2**

2 Kinematika hmotného bodu **6**
2.1 Křivočarý pohyb bodu v rovině 7
2.2 Přímočarý pohyb hmotného bodu 9
2.2.1 Rovnoměrný pohyb 9
2.2.2 Rovnoměrně zrychlený (zpomalený) pohyb 10
2.2.3 Nerovnoměrný pohyb 11
2.3 Pohyb hmotného bodu po kružnici 14

3 Kinematika tělesa **16**
3.1 Posuvný pohyb tělesa 16
3.2 Rotační pohyb tělesa 17
3.3 Sférický pohyb tělesa 18
3.4 Obecný pohyb tělesa 18

4 Síla, moment síly, silová dvojice **19**

5 Uložení a rovnováha tělesa **21**
5.1 Uložení a rovnováha tělesa v rovině 22
5.1.1 Rotační kinematická dvojice 23
5.1.2 Posuvná kinematická dvojice 24
5.2 Valivá kinematická dvojice 25
5.3 Obecná kinematická dvojice 26
5.4 Statická rovnováha tělesa 27

6 Dynamika soustav hmotných bodů **28**
6.1 1. Věta o pohybu soustavy hmotných bodů 28
6.2 2. Věta o pohybu soustavy hmotných bodů 29
6.3 1. impulsová věta 29
6.4 2. impulsová věta 30
6.5 Věta o změně kinetické energie 30

7 Hmotnost tělesa a její rozložení v prostoru **31**

8 Dynamika soustav těles **32**
8.1 Metoda redukce 32

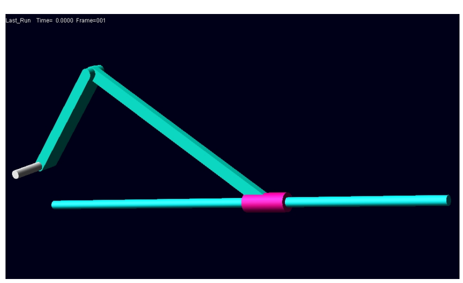
1 Rozdělení mechaniky a její náplň

Mechanika je nauka o rovnováze a pohybu hmotných útvarů pohybujících se rychlostí podstatně menší, než je rychlost světla ($v \ll c$).
Vlastnosti skutečných hmotných útvarů jsou obvykle složité pro popis, zavádíme proto idealizované modely. První rozdělení mechaniky tedy můžeme definovat podle stupně idealizace:

- **hmotný bod** - zanedbáváme rozměry tělesa. Hmotný bod je charakterizován pouze svojí hmotností.
- **tuhé těleso** - nedefomuje se účinkem působících sil. Pohyb tělesa závisí na hmotnosti a jejím rozložení v prostoru.
- **poddajné těleso** - má určitý tvar a objem, který se účinkem působících sil mění - vyšetřujeme deformace a napětí v libovolném bodě tělesa.
- **kapalina** - obvykle má málo proměnný objem, ale nezaujímá určitý tvar.
- **plyn** - nemá určitý objem ani tvar

Podle těchto modelů hmotných útvarů můžeme tedy mechaniku dělit

- **mechanika diskrétních soustav**
  - mechanika hmotných bodů
  - mechanika tuhých těles

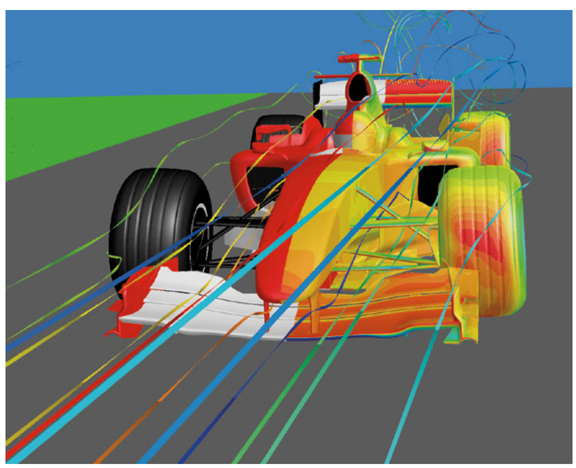


Obrázek 1: Model klikového mechanismu - tuhá tělesa.

- **mechanika kontinua**
  - mechanika poddajných těles

Obrázek 2: Simulace crash-testu osobního automobilu.

  - mechanika tekutin
    * hydromechanika
    * termomechanika



Obrázek 3: Simulace proudění vzduchu v okolí závodního automobilu

Z jiného hlediska dělíme mechaniku na

- **kinematiku** - zkoumá pohyb bez ohledu na působící síly
- **statiku** - zkoumá rovnováhu těles nebo bodů za klidu nebo za rovnoměrného přímočarého pohybu
- **dynamiku** - zkoumá pohyb jako následek působení vnějších sil. Úlohy dynamiky dále dělíme na
  - *úlohy vlastní dynamiky* - vyšetřujeme pohyb v závislosti na definovaných působících silách.
  - *úlohy kinetostatiky* - hledáme působící zátěžné silové účinky, které způsobí předem definovaný pohyb.

Mechanika má samozřejmě mnoho dalších disciplín, které nebudou (nebo jen velice okrajově) předmětem toho kurzu. Jde především o

- **hydrostatiku**
- **hydrodynamiku**
- **aerodynamiku**
- **biomechaniku**

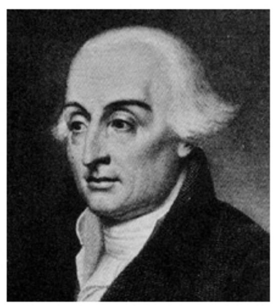
a mnoho dalších.

Isaac Newton (1642-1727)

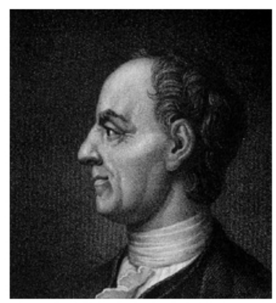
Leonardo Da Vinci (1452-1519)

Augustin Cauchy (1789-1857)

Jean-le-Rond d'Alembert (1717-1783)



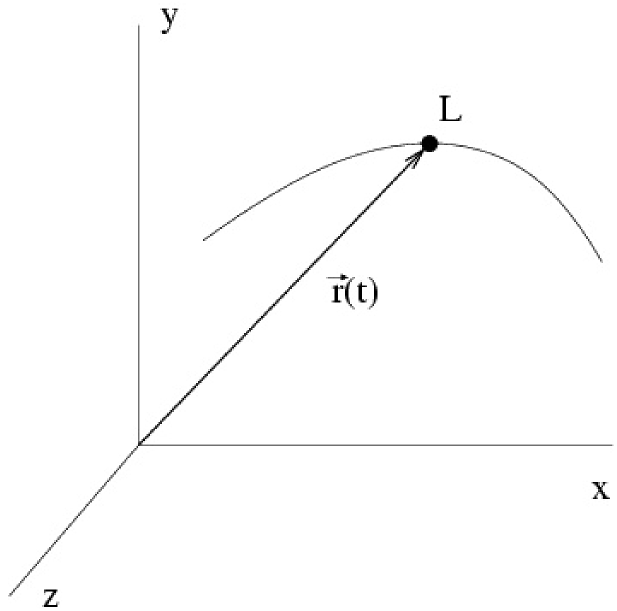
Joseph Lagrange (1736-1813)



Leonard Euler (1707-1783)

2 Kinematika hmotného bodu

Cílem kinematiky hmotného bodu je vyšetřit pohyb hmotného bodu (bodů) bez ohledu na zatěžující síly.



Nechť se hmotný bod pohybuje po spojité křivce v prostoru. Tuto křivku nazýváme **trajektorie - dráha pohybu**. Trajektorie je určena závislostí polohového vektoru $\vec{r}$ na čase

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{1}$$

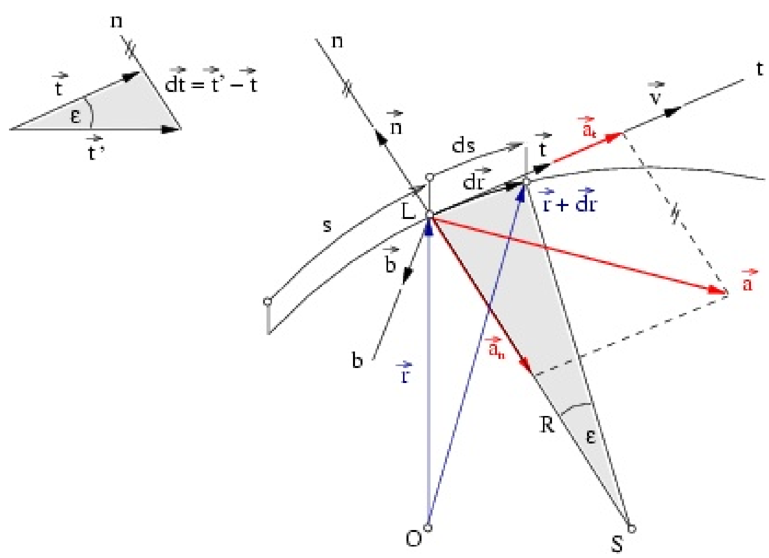
S ohledem na tvar trajektorie dělíme pohyby na

- **přímočarý pohyb hmotného bodu** - trajektorie je přímka
- **křivočarý pohyb hmotného bodu v rovině** - trajektorií je rovinná křivka
- **křivočarý pohyb hmotného bodu v prostoru** - trajektorií je prostorová křivka.

V kinematice hmotného bodu se obecně setkáváme s dvěma typy úloh:

- známe rovnici trajektorie $\vec{r} = \vec{r}(t)$ a derivací této rovnice hledáme základní kinematické veličiny
  - rychlost $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}[ms^{-1}]$
  - zrychlení $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}[ms^{-2}]$
- máme předepsáno zrychlení $\vec{a}(t)$ a počáteční podmínky v čase $t = t_0$ a úlohou je integrací určit
  - rychlost $\vec{v}(t)$
  - rovnici trajektorie $\vec{r}(t)$

2.1 Křivočarý pohyb bodu v rovině



Nechť se hmotný bod L pohybuje po rovinné křivce k. Poloha bodu na křivce je v každém okamžiku určena polohovým vektorem

$$\vec{r} = \vec{r}(s)$$

kde $s = s(t)$ je křivočará oblouková souřadnice.

Rychlost určíme derivací polohového vektoru podle času

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{ds}}_{\vec{t}}\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v(t)} = \vec{t}v(t)$$

$\Rightarrow$ vektor rychlosti **VŽDY** leží na tečně k trajektorii a její velikost je

$$v = \dot{s}.$$

Zrychlení bodu určíme další derivací rychlosti podle času

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{t}v(t))}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{t}}{ds}}_{\perp\vec{t}=K\vec{n}}\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v} v + \vec{t}\frac{dv}{dt}$$

1. Frenetův vztah

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = K\vec{n},$$

$$K = \frac{1}{R}$$

kde K je flexní křivost a R je torzní křivost.

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{n}\underbrace{\frac{v^2}{R}}_{a_n} + \vec{t}\underbrace{\frac{dv}{dt}}_{a_t},$$

kde a_n je velikost normálového zrychlení a a_t je velikost tečného zrychlení. V kartézských souřadnicích můžeme polohový vektor vyjádřit jako:

$$\vec{r}(t) = \vec{i}x(t) + \vec{j}y(t) + \vec{k}z(t)$$

Rychlost a zrychlení potom získáme derivací tohoto vztahu

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z(t)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

2.2 Přímočarý pohyb hmotného bodu

Trajektorií přímočarého pohybu hmotného bodu je přímka $x = x(t)$. Jde pravděpodobně o nejjednodušší a základní pohyb bodu.
Rychlost hmotného bodu charakterizuje časovou změnu polohy a je definována vztahem

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

Zrychlení hmotného bodu, který koná přímočarý pohyb, charakterizuje časovou změnu rychlosti a je určeno vztahy

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v},$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}.$$

Pokud je rychlost funkcí polohy je zrychlení definováno vztahem

$$a = \frac{dv(x)}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = \frac{d(v^2)}{2dx}$$

Vztah

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d(v^2)}{2dx}$$

bývá v literatuře často označován jako **Zlatá rovnice kinematiky**. Podle funkce zrychlení dělíme přímočarý pohyb do tří základních skupin na pohyb

- **rovnoměrný** - $a = 0$
- **rovnoměrně zrychlený (zpomalený)** - $a = konst$
- **nerovnoměrný** - $a = a(t)$

Podívejme se nyní podrobně na jednotlivé druhy přímočarého pohybu hmotného bodu.

2.2.1 Rovnoměrný pohyb

Pro zrychlení při rovnoměrném pohybu platí

$$a = 0.$$

Počáteční poloha a rychlost v čase $t = t_0$ jsou: $v(t_0) = v_0$, $x(t_0) = x_0$. Pro rychlost při rovnoměrném pohybu platí

$$a = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v(t) = v_0 = konst \Rightarrow v(x) = v_0$$

Polohu, jako funkci času určíme integrací

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_0 dt$$
$$x - x_0 = v_0(t - t_0)$$
$$x(t) = x(0) + v_0(t - t_0)$$

2.2.2 Rovnoměrně zrychlený (zpomalený) pohyb

Rovnoměrný přímočarý pohyb hmotného bodu je charakterizován vztahem

$$a = \pm a_0 = konst.$$

(Znaménko + zrychlený, znaménko - zpomalený pohybu).

Pro počáteční rychlost a polohu v čase $t = t_0$ platí: $v(t_0) = v_0$, $x(t_0) = x_0$. Dosazením zrychlení do zlaté rovnice kinematiky a integrací postupně dostaneme

$$a = \frac{dv}{dt} = \pm a_0$$
$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} \pm a_0 dt$$
$$v(t) = v_0 \pm a_0(t - t_0)$$

Další integrací tohoto vztahu dostaneme

$$v = \frac{dx}{dt} = v0 \pm a_0(t - t_0)$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} \left[v0 \pm a_0(t - t_0)\right] dt$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) \pm \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2 \tag{2}$$

Rychlost jako funkci polohy hledáme opět integrací Zlaté rovnice kinematiky

$$a = \frac{d(v^2)}{2dx} = \pm a_0$$

$$\int_{v_0^2}^{v^2} dv^2 = \pm \int_{x_0}^{x} 2a_0 dx$$

$$v^2 = v_0^2 \pm 2a_0(x - x_0)$$

$$v(x) = \sqrt{v_0^2 \pm 2a_0(x - x_0)}$$

2.2.3 Nerovnoměrný pohyb

Pro zrychlení při nerovnoměrném pohybu platí

$$a = a(t, v, x) \tag{3}$$

Počáteční rychlost a poloha jsou v čase $t = t_0$ dány vztahy: $v(t_0) = v_0$, $x(t_0) = x_0$ Řešení nerovnoměrného pohybu je nutné vždy určit integrací zlaté rovnice kinematiky

$$v = \frac{dx}{dt},$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d(v^2)}{2dx}$$

neboť nelze napsat obecně platné vztahy jako u pohybů rovnoměrných.

Příklad Zrychlení hmotného bodu konajícího harmonický pohyb je popsáno funkcí $a = -\Omega^2 x$, kde Ω^2 je kladná konstanta. Vyšetřete všechny kinematické závislosti $v(t)$, $x(t)$ a $v(x)$ tohoto pohybu, jsou-li počáteční podmínky v čase $t = 0$: $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$.

$$a(x) = -\Omega^2 x = \ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = 0$$

Jedná se o obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu.
Charakteristická rovnice má tvar:

$$\lambda^2 + \Omega^2 = 0$$

$$\lambda^2 = \Omega^2$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\Omega$$

Obecné řešení má tvar:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{i\Omega t} + C_2 e^{-i\Omega t}$$

Využijeme Eulerova vztahu:

$$e^{\pm i\Omega t} = \cos\Omega t \pm \sin\Omega t$$

a dostaneme

$$x(t) = C_1 \cos\Omega t + C_1 i \sin\Omega t + C_2 \cos\Omega t - C_2 i \sin\Omega t$$

$$x(t) = \underbrace{(C_1 + C_2)}_{A} \cos\Omega t + \underbrace{i(C_1 - C_2)}_{B} \sin\Omega t$$

$$x(t) = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t$$

Konstanty A a B určíme z počátečních podmínek pohybu

$$\dot{x}(t) = -A\Omega\sin\Omega t + B\Omega\cos\Omega t$$

$$x(0) = x_0 = A$$

$$\dot{x}(0) = v(0) = v_0 = B\Omega$$

$$B = \frac{v_0}{\Omega}$$

Hledaná závislost tedy je:

$$x(t) = x_0 \cos\Omega t + \frac{v_0}{\Omega}\sin\Omega t$$

Tuto závislost ještě můžeme upravit na tvar

$$x(t) = X\sin(\Omega t + \varphi),$$

kde X je amplituda harmonického pohybu, Ω je kruhová frekvence a φ je počáteční fáze. Tedy:

$$x_0 \cos\Omega t + \frac{v_0}{\Omega}\sin\Omega t = X\ sin\Omega t\cos\varphi + X\cos\Omega t\sin\varphi$$

$$x_0 = X \sin\varphi$$
$$\frac{v_0}{\Omega} = X \cos\varphi$$

Součtem druhých mocnin těchto dvou rovnic dostaneme po úpravě

$$X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\Omega}\right)}.$$

Podělením těchto dvou rovnic dostaneme

$$\tan\varphi = \frac{x_0\Omega}{v_0}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{x_0\Omega}{v_0}\right).$$

Našli jsme vztahy pro amplitudu X a fázi φ a tím je závislost jednoznačně určena.

$$v(t) = \dot{x}(t) = X\Omega\cos(\Omega t + \varphi)$$

Závislost $v(x)$ dostaneme integrací vztahu

$$a(x) = \frac{d(v^2)}{2dx} = -\Omega^2 x$$

$$\int_{v_0^2}^{v^2} d(v^2) = -\int_{x_0}^{x} 2\Omega^2 x dx$$
$$v^2 - v_0^2 = -\Omega^2(x^2 - x_0^2)$$
$$v(x) = \sqrt{v_0^2 - \Omega^2(x^2 - x_0^2)}$$

Úpravou tohoto vztahu dostaneme

$$v^2 = v_0^2 - \Omega^2 x^2 + \Omega^2 x_0^2$$

$$\frac{v^2}{\Omega^2} = \underbrace{\frac{v_0^2}{\Omega^2} + x_0^2}_{X^2} - x^2$$

$$x^2 + \frac{v^2}{\Omega^2} = X^2$$

$$\frac{x^2}{X^2} + \frac{v^2}{X^2\Omega^2} = 1$$

Jedná se o elipsu. Graf závislosti rychlosti na výchylce můžeme tedy znázornit v tzv. fázové rovině elipsou.
Perioda harmonického pohybu je

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}[s]$$

a frekvence je

$$f = \frac{1}{T}[s^{-1} = Hz]$$

2.3 Pohyb hmotného bodu po kružnici

pohyb hmotného bodu po kružnici o poloměru R je popsán průvodičem $r = x\vec{i} + y\vec{j}$, kde

$$x = R\cos\varphi$$

$$y = R\sin\varphi$$

a $\vec{i}$ a $\vec{j}$ jsou jednotkové vektory.
V souřadnicové soustavě tečny t a normály n je oblouková souřadnice S vyjádřena jako

$$S = R\varphi$$

. Velikost rychlosti získáme derivací:

$$v = \frac{dS}{dt} = \dot{S} = R\dot{\varphi} = R\omega$$

kde $\omega = \dot{\varphi}$ je úhlová rychlost.
Rychlost v leží vždy na tečně.
Složky zrychlení bodu L jsou:

- **tečné zrychlení** (leží na tečně)

  $$a_t = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{S} = R\ddot{\varphi} = R\alpha,$$

  kde $\alpha = \ddot{\varphi} = \dot{\omega}$ je úhlové zrychlení průvodiče

- **normálové zrychlení**

$$a_n = R\dot{\varphi}^2 = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$$

Velikost výsledného zrychlení hmotného bodu L je potom

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

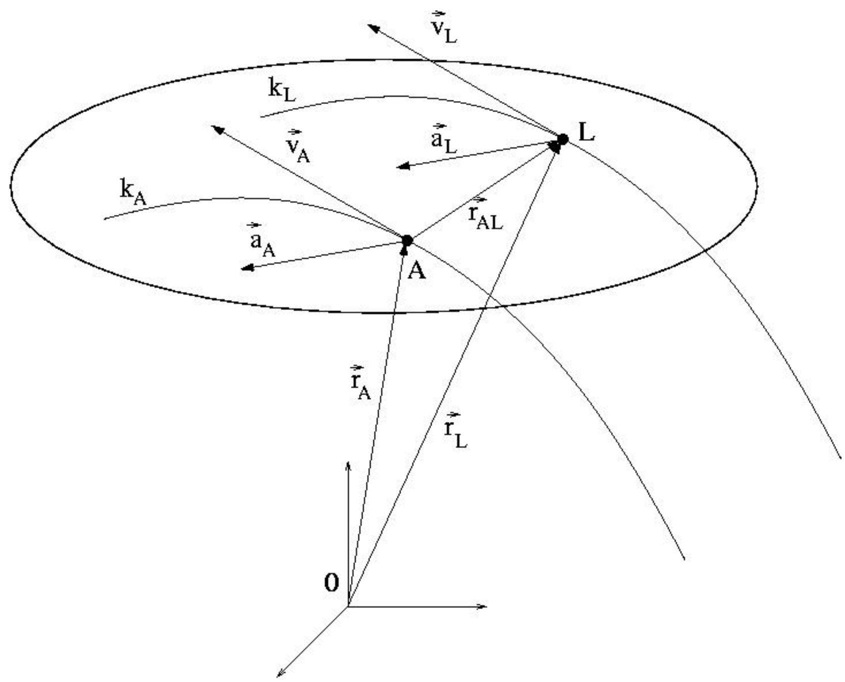
vektorově:

$$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n}$$

3 Kinematika tělesa

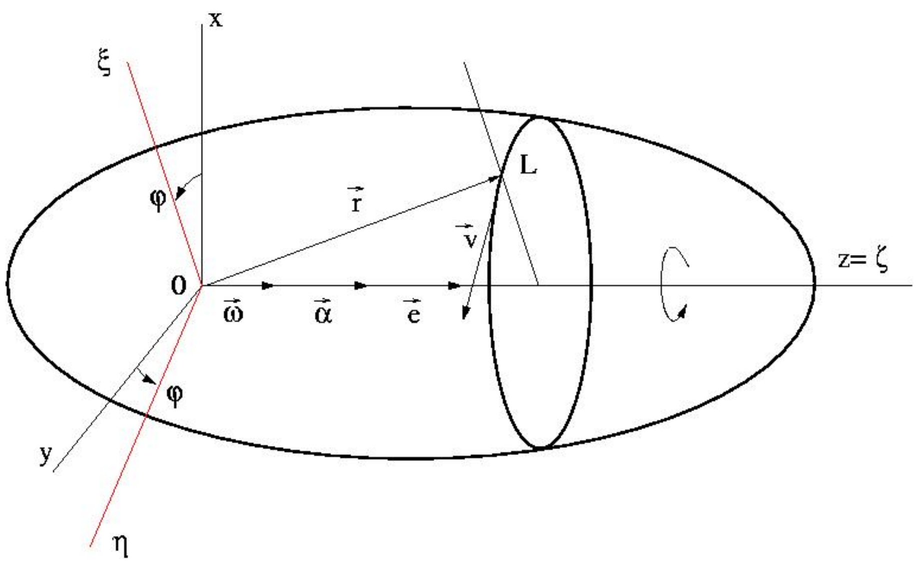
Základními pohyby tělesa jsou posuvný a rotační pohyb. Ostatní pohyby lze považovat za složené z těchto pohybů.

3.1 Posuvný pohyb tělesa



- spojnice dvou libovolných bodů tělesa zachovává svůj směr vzhledem k nehybnému prostoru.
- všechny body tělesa mají stejnou rychlost, stejné zrychlení a pohybují se po stejných vzájemně posunutých křivkách.

3.2 Rotační pohyb tělesa



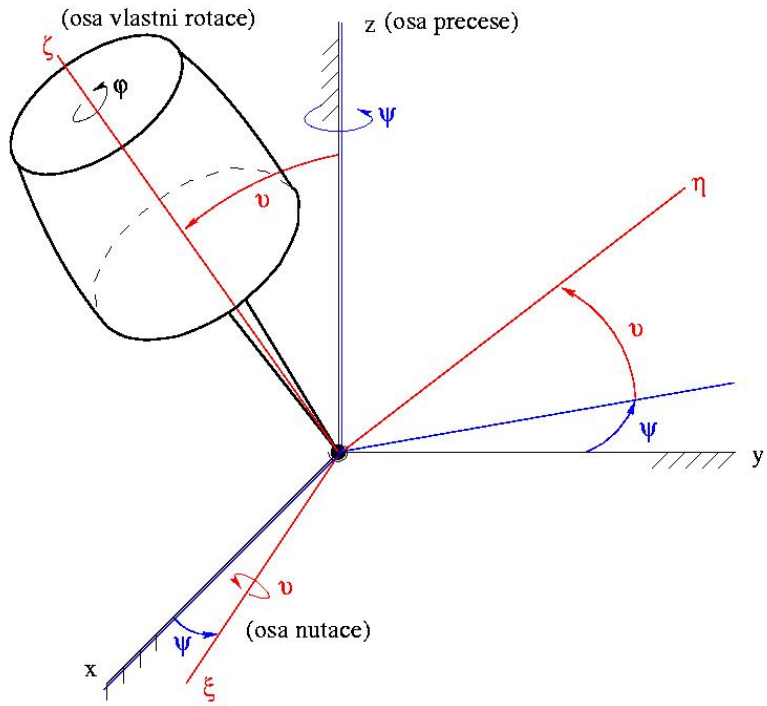
Rozdělení rotačního pohybu podle α

- $\alpha = 0$ - rovnoměrný pohyb
- $\alpha = konst \neq 0$ - rovnoměrně zrychlený pohyb
- $\alpha = \alpha(\varphi, \omega, t)$ - nerovnoměrný pohyb

Nerovnoměrný rotační pohyb tělesa řešíme zcela analogicky k nerovnoměrnému přímočarému pohybu hmotného bodu → dosadíme do *zlaté rovnice kinamatiky* a integrujeme v daných okrajových podmínkách.

3.3 Sférický pohyb tělesa

Polohu tělesa při sférickém pohybu obvykle popisujeme pomocí tzv. Eulerových úhlů - *Nutace, Precese a Rotace.*



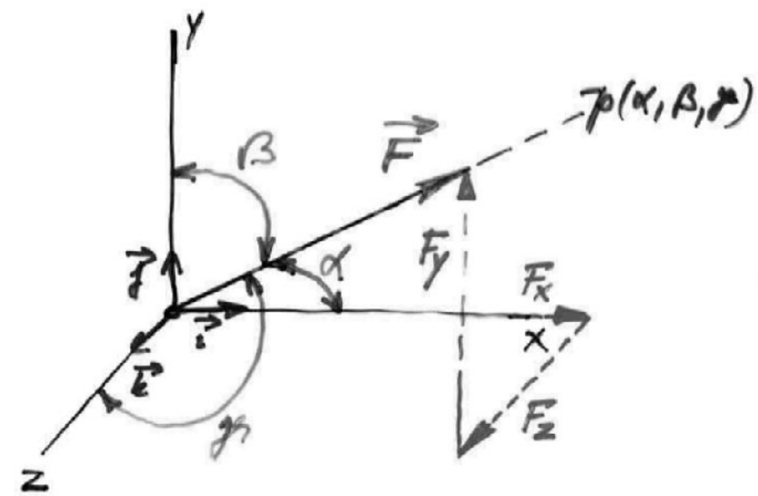
3.4 Obecný pohyb tělesa

Na obecný pohyb (ať v rovině nebo v prostoru) vždy pohlížíme jako na pohyb složený a řešíme jej použitím rozkladu pohybu

- *Základní rozklad* - rozklad obecného rovinného (prostorového) pohybu na pohyb unášivý **posuvný** a relativní rotační (sfériscký) pohyb
- *Obecný rozklad* - rozklad obecného rovinného nebo prostorového pohybu na pohyb unášivý **neposuvný** a relativní.

4 Síla, moment síly, silová dvojice

Příčinou pohybu hmotných útvarů jsou síly. Síla je vektor, který podle 2. Newtonova zákona udílí hmotnému bodu o konstantní hmotnosti m zrychlení $\vec{a}$, tj. $\vec{F} = m\vec{a}$. Rozměr síly je Newton $N = kg\, m\, s^{-2}$.



Síla je určena působištěm A, nositelkou p a velikostí $F = |\vec{F}|$. Pokud vyšetřujeme pouze vnější účinky síly na tuhé těleso, lze sílu po nositelce posunout do libovolného bodu. Je pak vektorem vázaným na přímku.
Sílu je možné rozložit do složek F_x, F_y a F_z. Platí

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

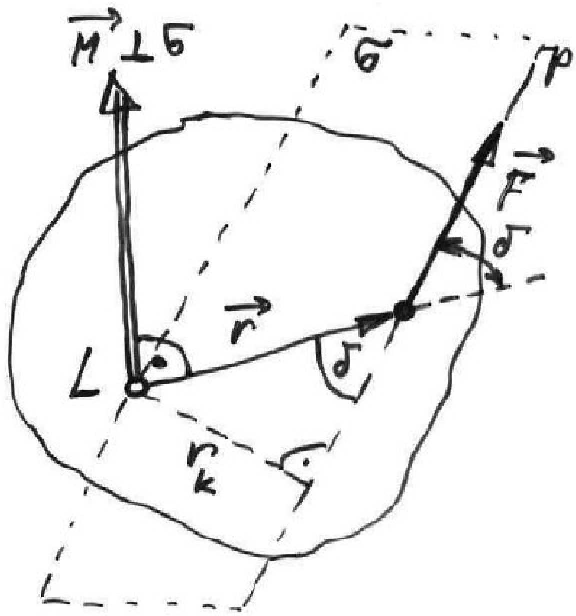
$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}$$

$$\cos\beta = \frac{F_y}{F}$$

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{F}$$

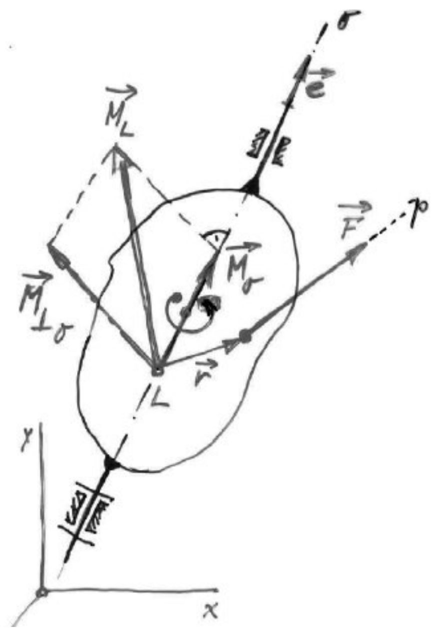
Otáčivý účinek síly k bodu nebo k ose se nazývá **moment**. Moment síly k bodu B je definován vektorovým součinem

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



Moment síly k ose je dán vztahem

$$\vec{M} = \vec{o}[\vec{o}(\vec{r} \times \vec{F})]$$



5 Uložení a rovnováha tělesa

Poloha volného tělesa v prostoru je určena šesti nazávislými souřadnicemi. Polohu je možné určit např. třemi souřadnicemi x, y, z a třemi eulerovými úhly. Volné těleso v prostoru má tedy 6 stupňů volnost $n = 6$.
Pohyblivost tělesa je snižována vazbami. Počet stupňů volnosti tělesa je potom dán vzorcem

$$n = 6 - \sigma,$$

kde σ je počet rovnic vazeb, resp. počet neznámých složek sil přenášených vazbami.
Vazbami tělesa s rámem vznikají tzv. prostorové kinematické dvojice

- **Rotační** $\sigma = 5$
- **Posuvná** $\sigma = 5$
- **Šroubová** $\sigma = 5$
- **Rotačně posuvná** $\sigma = 4$
- **Sférická** $\sigma = 3$

5.1 Uložení a rovnováha tělesa v rovině

Pokud všechny akční a reakční síly leží v jedné rovině, mluvíme o uložení a rovnováze tělesa v rovině. Volné těleso v rovině má tři stupně volnosti. Počet stupňů volnosti vázaného tělesa je dán vzorcem

$$n = 3 - \sigma,$$

kde σ je opět počet neznámých složek sil přenášených vazbami.
Vazbami tělesa s rámem vznikají rovinné kinematické dvojice

- **Obecná** $\sigma = 1$
- **Rotační** $\sigma = 2$
- **Posuvná** $\sigma = 2$
- **Valivá** $\sigma = 2$
- **Pevná** $\sigma = 3$

Popišme nyní podrobně jednotlivé kinemmatické dvojice v rovině

5.1.1 Rotační kinematická dvojice

Pravděpodobně nejběžnější typ pohyblivé kinematické dvojice v technické praxi. Nejčastěji realizovaná čepem uloženým v ložisku.
Ideální rotační kinematická dvojice v rovině přenáší jednu neznámou reakci $\vec{R}$ o neznámém směru. Tuto sílu analiticky hledáme po složkách R_x, R_y.
V reálné rotační kinematické dvojici dochází ke tření. Tento pasivní odpor vyjadřujeme momentem čepového tření

$$M_c = r_c f_c |\vec{R}|,$$

kde r_c je poloměr čepu a f_c je součinitel čepového tření.

5.1.2 Posuvná kinematická dvojice

Posuvná kinematická dvojice je realizována přímočarým vedením tělesa. Ideální posuvná dvojice přenáší normálovou sílu v neznámém místě. U dlouhých vedení tuto jednu normálovou sílu nahrazujeme dvěma normálovými silami na koncích vedení.
Pasivní odpory v reálné posuvné dvojici vyjadřujeme třecí silou (silami) od normálové síly (sil)

$$F_t = f|N|$$

5.2 Valivá kinematická dvojice

Valivá kinematická dvojice přenáší dvě reakce, jednu v tečném a jednu v normálovém směru. Tečná reakce má omezenou velikost

$$|\vec{T}| \leq f_a|\vec{N}|,$$

kde f_a je součinitel adheze. Tato podmínka zaručuje, že v kontaktní ploše nedojde k prokluzu. Nazýváme ji podmínkou valení.

U reálné valivé kinematické dvojice dochází vlivem deformací povrchu k posunutí výslednice normálových sil N ve směru pohybu. Rameno vysunutí e se nazývá rameno valivého odporu.

5.3 Obecná kinematická dvojice

V ideální obecné kinematické dvojici je pouze jedna neznámá normálová síla $\vec{N}$.

Pasivní odpory v reálné obecné kinematické dvojici jsou vyjádřeny třecí silou

$$|\vec{T}| = f|\vec{N}|,$$

kde f je koeficient smykového tření.

5.4 Statická rovnováha tělesa

Těleso je ve statické rovnováze, pokud všechny akční a reakční síly na něj působící splňují podmínky rovnováhy

$$\Sigma \vec{F}_i = \vec{0},$$

$$\Sigma \vec{M}_i = \vec{0}.$$

Podobně jako v případě hmotného bodu vyšetřujeme reakce uložení (vazeb). U pohyblivého tělesa vyšetřujeme přídavné síly pro rovnováhu v závislosti na poloze, nebo rovnovážnou polohu.

6 Dynamika soustav hmotných bodů

Mějme n hmotných bodů v souř. systému xyz. Pohybovou rovnici i-tého hmotného bodu můžeme psát ve tvaru (podmínka dynamické rovnováhy)

$$\vec{F}_i + \vec{D}_i + \vec{S}_i = \vec{0},$$

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_i \times \vec{D}_i + \vec{r}_i \times \vec{S}_i = \vec{0},$$

kde $\vec{F}_i$ je celková vnější síla působící na i-tý hmotný bod, $\vec{D}_i$ je setrvačná síla i-tého bodu a $\vec{S}_i$ je výsledná vnitřní síla (výslednice všech sil, kterými na i-tý hmotný bod působí ostatní hmotné body soustavy). Sečteme-li pohybové rovnice všech hmotných bodů s ohledem na rovnováhu vnitřních sil platí

$$\sum_i \vec{F}_i + \sum_i \vec{D}_i + \underbrace{\sum_i \vec{S}_i}_{\vec{0}} = \vec{0},$$

$$\sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{D}_i) + \underbrace{\sum_i (\vec{r}_i \times \vec{S}_i)}_{\vec{0}} = \vec{0},$$

Tyto vztahy vyjadřují **D'Alembertův princip**

$$\sum_i \vec{F}_i + \sum_i \vec{D}_i = \vec{0},$$

$$\sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{D}_i) = \vec{0},$$

Soustava vnějších a setrvačných sil, působících na soustavu hmotných bodů, je v každém časovém okamžiku v rovnováze.
Vnitřní síly neovlivňují pohyb soustavy hmotných bodů.

6.1 1. Věta o pohybu soustavy hmotných bodů

Střed hmotnosti soustavy hmotných bodů je definován vztahy

$$\vec{r}_S \cdot m = \sum \vec{r}_i \cdot m_i$$

$$m = \sum m_i$$

derivací podle času dostaneme

$$m \underbrace{\frac{d\vec{r}_S}{dt}}_{\vec{v}_S} = \sum m_i \underbrace{\frac{d\vec{r}_i}{dt}}_{\vec{v}_i}$$

$$\Rightarrow m\vec{v}_S = \sum m_i \cdot \vec{v}_i = \sum \vec{H}_i = \vec{H}$$

Výsledný vektor hybnosti $\vec{H} = m\vec{v}_S$ leží ve středu hmotnosti S a je roven vektorovému součtu hybností jednotlivých hmotných bodů.

6.2 2. Věta o pohybu soustavy hmotných bodů

Předchozí vztah ještě jednou zderivujeme podle času. Dostaneme

$$m \underbrace{\frac{d\vec{v}_S}{dt}}_{\vec{a}_S} = \sum m_i \underbrace{\frac{d\vec{v}_i}{dt}}_{\vec{a}_i}$$

$$\Rightarrow m\vec{a}_S = \sum m_i \cdot \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i = \vec{F}$$

Střed hmotnosti S se pohybuje jako hmotný bod, do něhož je soustředěna celková hmotnost soustavy hmotných bodů a do něhož translačně přesuneme všechny vnější síly.

6.3 1. impulsová věta

je věta o změně hybnosti aplikovaná na soustavu hmotných bodů. Pro i-tý hmotný bod platí:

$$m_i\vec{v}_i - m_i\vec{v}_{i0} = \int_0^t \vec{F}_i\,dt + \int_0^t \vec{S}_i\,dt$$

$$\sum_i m_i\vec{v}_i - \sum_i m_i\vec{v}_{i0} = \sum_i \int_0^t \vec{F}_i\,dt + \underbrace{\sum_i \int_0^t \vec{S}_i\,dt}_{\vec{0}}$$

$$\vec{H} - \vec{H}_0 = \vec{I}_F$$

Vnitřní síly neovlivňují změnu hybnosti soustavy hmotných bodů.

6.4 2. impulsová věta

je věta o změně momentu hybnosti aplikovaná na soustavu hmotných bodů. Pro i-tý hmotný bod platí:

$$\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i - \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_{i0} = \int_0^t \vec{r}_i \times \vec{F}_i \, dt + \int_0^t \vec{r}_i \times \vec{S}_i \, dt$$

$$\sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i - \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_{i0} = \sum_i \int_0^t \vec{r}_i \times \vec{F}_i \, dt + \underbrace{\sum_i \int_0^t \vec{r}_i \times \vec{S}_i \, dt}_{\vec{0}}$$

$$\vec{L} - \vec{L}_0 = \vec{I}_M$$

Vnější síly neovlivňují změnu momentu hybnosti soustavy hmotných bodů.

6.5 Věta o změně kinetické energie

je věta o změně kinetické energie aplikovaná na soustavu hmotných bodů. Pro i-tý hmotný bod platí:

$$\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 - \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{i0}^2 = \int_0^t \vec{F}_i \, d\vec{r}_i + \int_0^t \vec{S}_i \, d\vec{r}_i$$

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{i0}^2 = \sum_i \int_0^t \vec{F}_i \, d\vec{r}_i + \sum_i \int_0^t \vec{S}_i \, d\vec{r}_i$$

$$E_k - E_{k0} = W_F + W_S$$

Vnitřní síly **ovlivňují** změnu kinetické energie soustavy hmotných bodů.

7 Hmotnost tělesa a její rozložení v prostoru

poloha středu hmotnosti S tělesa v souřadnicovém systému I_{xyz} je dána vztahy

$$x_s = \frac{\int_{(m)} x\,dm}{m}, \quad y_s = \frac{\int_{(m)} y\,dm}{m}, \quad z_s = \frac{\int_{(m)} z\,dm}{m},$$

kde m je hmotnost a integrály ve jmenovateli jsou tzv. statické momenty tělesa k příslušné rovině.
Za předpokladu homogenity gravitačního pole v rozsahu objemu tělesa, splývá střed hmotnosti tělesa S s těžištěm T.
Momenty setrvačnosti tělesa k souřadnicovým osám jsou definovány integrály

$$I_x = \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm, \quad I_y = \int_{(m)} (x^2 + z^2) dm, \quad I_z = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm.$$

Deviační momenty jsou definovány vztahy

$$D_{xy} = \int_{(m)} xy\,dm, \quad D_{xz} = \int_{(m)} xz\,dm, \quad D_{yz} = \int_{(m)} yz\,dm,$$

8 Dynamika soustav těles

Soustavu těles můžeme chápat jako soustavu hmotných bodů tvořících jednotlivá tělesa. To umožňuje použití všech dříve uvedených vět.
Ve výkladu se většinou omezíme na soustavy s jedním stupněm volnosti. U takových soustav je jeden člen hnací a ostatní hnané.
Pokud je dán pohyb hnaného členu a hledáme (zpravidla jeden) akční silový účinek pro uvedení soustavy těles do dynamické rovnováhy. Takovou úlohu nazýváme úlohou **kinetostatiky**.
Pokud jsou dány všechny akční silové účinky působící na jednotlivé členy soustavy, vyšetřujeme pohyb hnacího členu (resp. soustavy) a mluvíme o tzv. úloze **vlastní dynamiky** Nejuniverzálnější metodou dynamického vyšetřování mechanických soustav je **metoda uvolňování**. Spočívá v aplikaci D'Alembertova principu dynamické rovnováhy postupně na každé uvolněné těleso nebo na skupinu těles. Pro každé uvolněné těleso píšeme příslušný počet podmínek dynamické rovnováhy. K těmto podmínkám musíme ještě připojit příslušný počet vazbových rovnic, které vyjadřují vazby mezi kinematickými veličinami hnacích a hnaných členů.
Pokud se nám pomocí těchto vazbových rovnic podaří vyloučit všechny závislé kinematické veličiny a všechny reakce vazeb, dostaneme přímé závislosti mezi akčními silami a kinematickými veličinami hnacích členů. Tyto vztahy potom nazýváme **vlastní pohybové rovnice** soustavy těles.

8.1 Metoda redukce

Pokud je možné zanedbat pasivní účinky, nebo pokud je možné pasivní účinky aproximovat funkcí závislou na kinematických veličinách je účelné aplikovat **metodu redukce**.
Porovnáním kinetické energie E_k celé soustavy s kinetickou energií jejího jediného tzv. **redukčního členu** podle vztahu

$$\frac{1}{2} m_{red} v^2 = Ek$$

pro posuvný pohyb, resp.

$$\frac{1}{2} I_{red} \omega^2 = Ek$$

pro rotační pohyb, vypočítáme jeho redukovanou hmotnost m_{red} resp. redukovaný moment setrvačnosti I_{red}.

Výkon všech akčních silových účinků (a pasivních odporů v kinematických vazbách) konajících práci označíme P. Nahradíme je redukovanou silou, resp. redukovanou dvojicí sil (bilance výkonu)

$$F_{red} v = P$$

$$M_{red} \omega = P$$

Vlastní pohybová rovnice soustavy těles s jedním stupněm volnosti má potom tvar

$$F_{red} = m_{red} a + \frac{1}{2} v^2 \frac{dm_{red}}{dx}$$

$$M_{red} = I_{red} \alpha + \frac{1}{2} \omega^2 \frac{dI_{red}}{d\varphi}$$

U soustav s konstantními převody je $m_{red} = konst$, $I_{red} = konst$ a pohybová rovnice se zjednoduší do tvaru

$$F_{red} = m_{red} a$$

$$M_{red} = I_{red} \alpha$$