Poznámky k výsledkům zkoušek

Zkouška 8. 1. 2014 Účast 40: 2 A, 3 B, 1 C, 8 D, 14 E, 12 F (30 %)

Komentář: Při pohledu na historii výsledků zkoušek z MA 4 je vidět, že procento úspěšnosti řadí tuto zkoušku k těm vydařeným. Nicméně na tomto úspěchu se kromě studujících podíleli i opravující svým velmi velkorysým postojem k záplavě chyb v triviálních matematických úkonech.

Už po opravení několika prvních písemek se jasně projevily tyto nedostatky:

- *Malá zběhlost v elementárním počítání.* Příklady „ladím" tak, aby většina výpočtů nepotřebovala více než operace s celými čísly, případně s jednoduchými zlomky. Přesto mnozí ani správně nesečtou (neodečtou) dvě celá čísla.
- *Těžkopádnost při výpočtech* — souvisí i s předchozím bodem. Studující ztrácejí spoustu času[1] tím, že provádějí naprosto zbytečné úkony, více viz například v komentáři k příkladu 2. Navíc si tím výrazně zvyšují riziko chyby.
- *Neprovádění zkoušek.* **Je-li to jen trochu možné, proveďte zkoušku správnosti mezivýsledku a hlavního výsledku.** Dosaďte vypočtené kořeny kvadratické rovnice do výchozí rovnice. Ověřte, že vypočtený vektor řeší výchozí soustavu nebo skutečně je hledaným vlastním vektorem. Uvědomte si, že zkouška by měla být úplná, viz komentář k příkladu 1.
- *Nepřemýšlení nad získaným výsledkem* — souvisí s předchozím bodem. Někdy chyba přímo křičí, například když vyjde nula tam, kde výsledek musí být kladný, ale přesto zůstává nepovšimnuta.

K jednotlivým příkladům:

Příklad 1 *Matice závislá na parametrech.*
Úloha byla motivována sbírkovými příklady (např.) 1.14 a 4.11, ale bez ortogonalizace, výpočetně byla jednodušší než příklad 1.14. Většina řešitelů věděla, jak sestavit rovnice pro hledané parametry, praktické provedení však vázlo na numerických chybách.

Úplná zkouška obnášela dva kroky: ověření, že u je vlastní vektor matice A, a ověření normy vektoru Av.

Příklad 2 *Okrajová úloha s homogenními okrajovými podmínkami řešená metodou konečných prvků.*
Šlo o mírnou modifikaci příkladu 11.16, výsledná soustava lineárních algebraických rovnic byla jednodušší a snadno řešitelná. Příjemně mě překvapilo dobře zvládnuté nalezení pozitivně definitního operátoru v divergentním tvaru, naopak mě zaskočila slabá schopnost integrovat jednoduché polynomy a neznalost pojmu „převládající diagonála" — stačilo nalistovat stranu 13 Příručky pro přežití (či předtím doma projít příklad 11.16).

Příklad 11.16 také ukazuje, jak si ulehčit práci:

---
[1] Osoba testující zkouškové příklady je zvládla *úplně a bezchybně* vyřešit za $20 + 31 + 16 = 67$ minut.

- Při odvozování pozitivní definitnosti operátoru je možné využít skalárního součinu ve tvaru po integraci po částech, která už byla provedena při vyšetřování symetrie operátoru.

- Pokud se při sestavování matice soustavy v integrálech vyskytuje jen derivace funkce u, je naprosto zbytečné vymýšlet výrazy, jimiž jsou bázové funkce definovány, a pak je derivovat. Hodnoty derivace jsou patrné přímo z náčrtku bázových funkcí (v dnešní úloze ± 2).

- Zmíněné integrály si jsou velmi podobné, liší se jen integračními mezemi. Některé integrály jsou sice definovány na dvou sousedních intervalech, ale výpočet může být proveden na jednom intervalu, totiž na jejich sjednocení — v příkladě 11.16 se podívejte na výpočet hodnot $(v_1, v_1)_A$, $(v_2, v_2)_A$ a $(v_3, v_3)_A$.

- Je-li pravá strana operátorové rovnice konstantní, je výpočet pravé strany algebraické soustavy velmi snadný a založený na ploše mezi grafem bázové funkce a osou x.

Příklad 3 *Metoda sítí – výpočet přibližné hodnoty prvních dvou vlastních čísel okrajového problému.*
Úloha byla zcela standardní a výpočetně jednoduchou obdobou sbírkových příkladů z 13. kapitoly. Při hledání kořenů kvadratické rovnice $\mu^2 - 16\mu + 48 = 0$ bylo možné obejít větší čísla při výpočtu diskriminantu

$$D = 16^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16 = 16(16 - 12) = 16 \cdot 4 = 4^2 2^2.$$

Zkouška 15. 1. 2014 Účast 43: 2 A, 4 B, 5 C, 9 D, 7 E, 16 F (37%)

Komentář: Procento neúspěšnosti je vyšší než minulý týden, což je překvapení, neboť příklady se mně i cvičícím zdály méně náročné než před týdnem.

Opět se však projevily nedostatky, které jsem vyjmenoval minule. Je vidět, že mnozí nemají téměř nic napočítáno. Navíc se také ukázalo, že při písemce málo používáte Příručku pro přežití, řadu užitečných tvrzení a návodů byste v ní našli.

K jednotlivým příkladům:

Příklad 1 *Vlastní čísla a vlastní vektory matice, skalární součin lineární kombinace vlastních vektorů.*

Úloha byla malou modifikací sbírkového příkladu 1.25. Překvapilo mě, jak málo řešitelů se pokusilo o úkol c) a jak neobratně ho počítali. A nejhorší bylo zjištění, že někteří počítali sice správně, ale detaily výpočtu nedokázali zdůvodnit. Jejich „ono to tak je ve sbírce“ odhalilo, že se zkrátka naučili postup zpaměti, ale vůbec netušili, co a proč se v něm dělá.

Příklad 2 *Odhad spektrálního poloměru matice – aplikace Geršgorinovy věty.*

Úloha byla malou modifikací sbírkového příkladu 3.10. Úspěšnost při výpočtu poloměrů Geršgorinových kruhů byla k pláči, zejména správný výpočet absolutní hodnoty komplexního čísla byl pro mnohé nepřekonatelnou překážkou. Přitom vše potřebné je v Příručce pro přežití.

Příklad 3 *Úloha vedení tepla řešená metodou sítí.*

Upravený sbírkový příklad 17.5 byl zamýšlen jako zdroj snadno získaných bodů. Žel, mnozí řešitelé k němu ani nedorazili, protože se příliš zdrželi u předchozích úloh.Ale i ti, kdo třetí příklad zvládli, se u něj mnohdy zbytečně zdrželi, protože zapisovali výrazy pro výpočet konkrétních hodnot v jednotlivých uzlech. To bylo zbytečné. Stačilo – tak, jak je to ve sbírce – uvést obecný vztah $U_i^{k+1} = (U_{i-1}^k + U_{i+1}^k)/2$ a číselné hodnoty přímo zapisovat k uzlům sítě.

Zkouška 22. 1. 2014 Účast 43: 2 A, 2 B, 3 C, 5 D, 4 E, 27 F (63%)

Komentář: Zdá se, že ve středu platilo ono údajně studentské „zkouška je od slovesa zkusiti“. Nejhůře dopadl štědře bodově dotovaný příklad 1, přestože zadání obsahovalo podrobný popis afinního zobrazení, na jehož základě by každý aspirant na inženýrský titul měl úlohu vyřešit, i kdyby ji viděl poprvé v životě a nesetkal se s jejím řešením ve sbírce úloh.

Připomínám, že na webových stránkách k Matematice 4 je výčet čísel příkladů hodných pozornosti, tento (s pozměněnými souřadnicemi některých bodů) je mezi nimi.

K jednotlivým příkladům:

Příklad 1 *Afinní zobrazení.*

Příklad je nepatrnou modifikací sbírkového příkladu 6.5. Označme a_i prvky matice, tj. $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, a přeznačme prvky vektoru b takto: $b = \begin{pmatrix} a_5 \\ a_6 \end{pmatrix}$. Sestavení rozšířené matice soustavy se ještě mnohým povedlo, ale s řešením to bylo horší. Úpravy přitom byly snadné:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{array}\right).$$

Odtud $a_6 = 5/6$, $a_5 = -1/6$, $a_4 = 1/2$, $a_3 = 1 - 5/6 = 1/6$, $a_2 = -1/2$, $a_1 = -a_5 = 1/6$.

Příklad 2 *Okrajová úloha s nehomogenními okrajovými podmínkami řešená přibližně Ritzovou metodou.*

Modifikace sbírkových příkladů 11.11-13. Velké chyby se dopustili ti, kdo úlohu nepřevedli na problém s homogenními okrajovými podmíkami.

Příklad 3 *Určení hodnoty parametrů a, b, c v matici tak, aby byla splněna podmínka daná skalárním součinem obsahujícím vlastní vektory.*

Nápověda měla řešitele přivést k úvahám o symetrické matici s reálnými prvky (viz příslušné tvrzení o ortogonálních vlastních vektorech v příručce). Bylo snadné ukázat, že taková matice má tři různá vlastní čísla, z ortogonality vlastních vektorů pak plynulo jak splnění podmínky, tak snadné vyřešení úkolu **b)**. Naprosto nebylo nutné počítat příslušné vlastní vektory, čímž mnozí zbytečně ztratili mnoho času.

Zkouška 29. 1. 2014 Účast 47: 1 A, 1 B, 3 C, 6 D, 12 E, 24 F (51%)

Komentář: Ruku ma srdce — nebylo by dobré se začít na zkoušku pořádně připravovat? Jinak než lehkomyslým přístupem si totiž nedovedu vysvětlit minulé bídné a dnešní jen o trochu lepší, ale stále hanebné výsledky. Příklady byly opět standardní a s drobnými změnami převzaté ze sbírky.

Zejména mě rozladí, když si uvědomím, že trávím hodiny vylaďováním příkladů tak, aby se v nich co nejdéle a snadno dalo počítat s celými čísly, ale studující hned v prvním kroku něco zvrtají a jejich celý výpočet je numericky špatně. Nebo — proč podtrhuji, že je třeba udělat zkoušku, když mnozí řešitelé po zkoušce ani nevzdechnou a nevzrušeně počítají se špatným řešením, případně udělají zkoušku jen částečnou, jen pro jednu rovnici ze tří?

Příklady jednodušší nebudou a začínám tušit, že se s pěknou řádkou z vás setkám opět na konci letošního září.

K jednotlivým příkladům:

Příklad 1 *Iterační metody.*

Viz sbírkový příklad 7.6. Poslední úkol (počet iterací) byl inspirován úkolem d) z příkladu 7.5.

Příklad 2 *Implicitní sedmibodové schéma.*

Nepatrná obměna sbírkového příkladu, viz 16.8, 16.9 nebo 16.10. Místo bodových žní jen paběrky. Dosadit do vzorečku z „taháku“ a výraz upravit je téměř pro všechny nepřekonatelný problém. *Jen jediný student neztratil ani bod!!!* Pohled na výpočty ostatních rozšířil slova „bída“, „zoufalství“ a „utrpení“ o další slzavé a srdceryvné dimenze. Přitom se boji (prohranému) se zlomky dalo snadno předejít úpravou výchozího výrazu, takže po dosazení se počítalo jen s celými čísly: Schéma, kde $a^2 = 4$, $h = 1/2$ a $\tau = 1/4$,

$$\begin{aligned}
\frac{U_i^{k+1} - 2U_i^k + U_i^{k-1}}{\tau^2} &= \frac{a^2}{2h^2}\left[U_{i-1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i+1}^{k+1} + U_{i-1}^{k-1} - 2U_i^{k-1} + U_{i+1}^{k-1}\right],\\
16\left(U_i^{k+1} - 2U_i^k + U_i^{k-1}\right) &= 8\left[U_{i-1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i+1}^{k+1} + U_{i-1}^{k-1} - 2U_i^{k-1} + U_{i+1}^{k-1}\right],\\
2\left(U_i^{k+1} - 2U_i^k + U_i^{k-1}\right) &= \left[U_{i-1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i+1}^{k+1} + U_{i-1}^{k-1} - 2U_i^{k-1} + U_{i+1}^{k-1}\right].
\end{aligned}$$

Rovnice při označení $u_i = U_i^{k+1}$, kde $i = 1, 2, 3$ a $k = 1$:

$$\begin{aligned}
2(u_1 - 2\cdot 12 + 3) &= 0 - 2u_1 + u_2 + 0 - 2\cdot 3 + 8,\\
4u_1 - u_2 &= 44,\\
2(u_2 - 2\cdot 16 + 8) &= u_1 - 2u_2 + u_3 + 3 - 2\cdot 8 + 9,\\
-u_1 + 4u_2 - u_3 &= 44,\\
2(u_3 - 2\cdot 12 + 9) &= u_2 - 2u_3 + 0 + 8 - 2\cdot 9 + 0,\\
-u_2 + 4u_3 &= 20.
\end{aligned}$$

Maticově

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 0 & 44\\ -1 & 4 & -1 & 44\\ 0 & -1 & 4 & 20 \end{array}\right).$$

Příklad 3 *Pozitivně definitní operátor.*

Úkol **a)** byl zjednodušenou obdobou například sbírkového příkladu 10.7 nebo 10.8. K vyřešení úkolu **b)** stačilo využít část postupu z bodu **a)** a myšlenku předvedenou v příkladu 10.9.

Tyto úlohy už tradičně dělají studujícím problémy, zejména těm, kdo nerozumí podstatě a zadělají si na potíže zmatkem ve znaméncích. V této úloze bylo operátory dány, přenásobování číslem -1 bylo zbytečné, ba škodlivé. Řada řešitelů si naopak vůbec neuvědomila, že při integraci po částech k jisté změně znaménka před integrálem dochází.

Dvě dobré rady pro příště

- <u>NIKDY</u> nenechávejte znaménko <u>MINUS PŘED INTEGRÁLEM</u>, ale vynásobte jím funkci (koeficient) v integrálu.
  <u>NIKDY</u> nenechávejte <u>MINUS</u> stát <u>PŘED „min“</u>.
  Nechat minus „vně“ není chyba, ale má to důsledky, na něž je třeba si dát pozor, což (neurazte se, ale mluvím z letité zkušenosti) většina z vás nezvládne.

- <u>Naučte se najít globální minimum</u> spojité funkce na uzavřeném a omezeném intervalu, viz příklady ve sbírce a kapitolu 3.4 v příručce. Koho načapám, že to pořádně neumí, tak na shledanou v září.

Zkouška 5. 2. 2014 Účast 39: 2 A, 0 B, 8 C, 3 D, 6 E, 20 F (51%)

Komentář: Příklady 1 a) a 2 b) se daly řešit elegantně a rychle. Většina řešitelů však dala přednost postupům těžkopádnějším, pomalejším a s větším nebezpečím početních chyb.

K jednotlivým příkladům:

Příklad 1 *Řešení soustavy se singulární maticí, jež má být kolmé k zadaným vektorům a má mít předepsanou normu.*

Na rozdíl od sbírkového příkladu 6.4, jenž byl inspirací pro tuto zkouškovou úlohu, bylo o řešení soustavy dáno tolik informací, že bylo možné zvolit různé výpočetní postupy. Nejjednodušší cesta byla založena na využití kolmosti řešení na tři zadané vektory. Kolmost byla ekvivalentní s homogenní soustavou tří rovnic, jejíž řešení mělo tvar vektoru $s\omega$, kde s je reálný parametr. Hodnota parametru s se určila z požadavku na hodnotu normy řešení. Odpovídající kvadratická rovnice dala pro parametr s dvě řešení. Jak se zjistilo vynásobením řešení maticí A, jedno řešení bylo správné, druhé mělo opačné znaménko a řešilo soustavu $Aw = -f$. Jinou možností bylo porovnat vektor $sA\omega$ s vektorem f a odtud určit hodnotu s.

Cesta, po níž se vydala většina řešitelů, totiž přímé řešení soustavy $Aw = f$, byla obtížnější. Řešení má tvar $w = u + tv$, kde u a v jsou vektory a t je reálný parametr. Z požadavku kolmosti například k vektoru v_1 se určila hodnota parametru t. Zbývalo ověřit, že je splněno, že vektor w má požadovanou délku a je kolmý i k v_2 a v_3. Odvodit $w = u + tv$ a pracovat s tímto tvarem však bylo těžší, než získat $s\omega$ a pracovat s tímto vyjádřením.

Velkou chybou bylo, že ač v zadání stálo, že matice A má hodnost 3, některým vyšla hodnost 2 nebo 4, ale nic je nezarazilo.

Příklad 2 *Řešení Poissonovy rovnice metodou sítí – sestavení odpovídající matice.*

Sbírkový příklad 15.8 s obměněnou pravou stranou a okrajovou podmínkou. Řešení části a) se celkem dařilo, až na potíže se správným vyčíslením okrajové podmínky a (především) se zjednodušujícími úpravami síťových rovnic.

Horší to bylo s částí b). Naprostá většina vyčíslovala vektory Av_1, Av_2 AAv_1 atd. složku po složce. Ti obratnější aspoň využili vlastních čísel, ale vyskytly se i případy násobení vektoru maticí A! To všechno stálo hodně času a vedlo i k chybám. Elegantnější bylo počítat přímo se skalárním součinem:

$(Av_1 + Av_2, v_1) = (13v_1 + 21v_2,\, v_1) = 13(v_1,\, v_1) = 13 \cdot 4 = 52,$

$(AAv_2, Av_2) = (21^2 v_2,\, 21v_2) = 4 \cdot 21^3,$

$(AAv_1, AAv_2) = (13^2 v_1,\, 21^2 v_2) = 0,$

$(A^{-1}v_1 + Av_1,\, A^{-1}v_1 + Av_2) = \left(\frac{1}{13}v_1 + 13v_1,\, \frac{1}{13}v_1 + 21v_2\right) = \left(\frac{1}{13}v_1,\, \frac{1}{13}v_1\right) + (v_1,\, v_1)$

$= \left(\frac{1}{13^2} + 1\right) 4 = \frac{4\cdot 170}{169} = \frac{680}{169}.$

Příklad 3 *Řešitelnost okrajové úlohy.*

Modifikace sbírkového příkladu 9.5. Úloha dělala značné potíže, bylo patrné, že mnozí řešitelé nemají moc jasno, jak se takové příklady řeší. Kvůli elementárním chybám byla často chybně určena odpovídající vlastní funkce. Zejména se chybovalo v důsledku falešného přesvědčení, že integrál sudé funkce na intervalu $[-a, a]$ je vždy nenulový, či dokonce kladný. Doporučuji zopakovat si větu o řešitelnosti okrajové úlohy, viz webovou stránku k MA 4, přesněji strany 26 a 30-32 z textu k přednášce z 24. 10. 2013, 31. 10. 2013, a projít příklady z kapitoly 9.

Zkouška 7. 2. 2014 Účast 43: 0 A, 1 B, 6 C, 7 D, 12 E, 17 F (40

Komentář: Svými výsledky zkouška patřila ke zdařilým. Zásluhu na tom měly především příklady 2 a 3, zejména příklad 3 přinášel rozhodující bodové zisky. Naopak postupy řešení příkladu 1 byly jasným dokladem toho, jak málo mají řešitelé toto téma zvládnuté a že postupují zcela mechanicky bez pochopení podstaty věci. Řešitelé se připravili o body i chybami při standardních úkonech, kdy jim připadalo zbytečné ověřit si správnost například vypočtených kořenů kvadratické rovnice nebo vlastních vektorů. Stačilo jen dosadit do výchozí rovnice nebo vektor vynásobit příslušnou maticí.

K jednotlivým příkladům:

Příklad 1 *Pozitivní definitnost operátoru.*

Úloha byla inspirována sbírkovým příkladem 10.8 či zjednodušením příkladu 10.9. Při řešení se mělo postupovat úplně stejně jako například v úloze 10.8, jen hodnota minima jedné funkce obsahovala parametr a, tj. $a - 11$, minimum funkce u členu u^2 se rovnalo -1, viz obdobnou situaci v příkladu 10.9. Po uplatnění Friedrichsovy nerovnosti šlo o platnost nerovnosti $\dfrac{a-11}{8} - 1 > 0$, odtud $a \in (19, +\infty)$.

Mnozí našli nějaké extrémy zúčastněných parametrů (funkcí), ale kvůli zmatkům ve znaméncích a kvůli dalším pochybením z toho nakonec nic kloudného nebylo.

Při řešení části b) se objevily i úvahy jdoucí správným směrem, jen nebyly dotažené do konce.

U příkladu 1 se ukázalo, že komentáře, které tady už pět týdnů vytvářím, snad nikdo nečte, protože rady, které jsem uvedl v komentářích ke zkoušce 29. ledna, zcela zapadly. I nyní se totiž objevovaly tytéž chyby: znaménka minus před integrály a před minimalizací funkce. Ke všemu ještě mnozí z nepochopitelných důvodů zadaný operátor hned přenásobili číslem -1. Též se zhusta objevoval novátorský, ale nesprávný postup při aplikaci Friedrichsovy nerovnosti.

Příklad 2 *Vlastní čísla a vlastní vektory matice.*

Hlavní část sbírkového příkladu 1.27 s pozměněnými vstupními daty. Úloha byla často úplně nebo téměř úplně vyřešena. Jen mnozí zapomínali, že všechny vlastní vektory popíšeme pomocí vhodných násobků jednoho základního vektoru.

Příklad 3 *Rovnice vedení tepla s parametry řešená metodou sítí.*

Šlo o sbírkový příklad 17.4 s mírně pozměněnými vstupními daty. Většině se řešení dařilo, mnohé výsledky byly bezchybné. Někteří řešitelé však zbytečně ztráceli čas tím, že psali výrazy pro hodnoty v jednotivých uzlech sítě mimo obrázek sítě. Není to chyba, ale daleko efektivnější je vpisovat hodnoty přímo k uzlům sítě tak, jak je to děláno ve sbírce. Také kontrola je pak mnohem snadnější – stačí sečíst hodnoty dvou níže položených sousedů a vydělit dvěma.

Zkouška 12. 2. 2014 Účast 37: 0 A, 0 B, 1 C, 0 D, 7 E, 29 F (78%)

Komentář: V historickém srovnání hůře dopadla jen písemka z 16. ledna 2013, kdy největší problémy dělala poměrně obtížná (tehdy nová) úloha zaměřená na vlastní čísla a na vlastní vektory, a také úloha s výpočtem ortogonálních funkcí. V poslední písemce nynějšího zkouškového období však žádné tak těžké ani nové příklady nebyly.

Nyní jsem předpokládal, že více než 50 bodů bude pro každého snadno k dosažení díky vyřešení těch částí příkladů, které odpovídaly standardním, mnohokrát opakovaným úlohám ve sbírce: metoda sítí; jednoduchá norma matice; odhad spektrálního poloměru pomocí Geršgorinovy věty; nalezení ortogonálního vektoru k zadanému vektoru; vlastní funkce okrajové úlohy (jen dosazením do vzorečku, bez rozhodování, zda existuje řešení okrajové úlohy); určení vlastního čísla, je-li zadán vlastní vektor, určení vlastního vektoru, je-li zadáno vlastní číslo; pozitivní definitnost matice (stačilo se podívat do příručky na definici a všimnout si, že je zadáno záporné vlastní číslo). Tyto úkoly jsou standardní, s jednoduchým výpočtem, dokonce i bez výpočtu. Neměly by nikoho překvapit.

Ani cesta k dalším bodovým ziskům nebyla obtížná, což ukazují vysvětlení k jednotlivým příkladům.

Příklad 1 *Okrajová úloha řešená metodou sítí; lineární kombinace řešení soustavy lineárních algebraických rovnic.*

Sestavení rozšířené matice dopadlo docela dobře, nicméně je třeba zdůraznit, že ztráta bodů za četné numerické chyby při úpravách síťových rovnic byla spíše symbolická a vůbec neodpovídala důsledku, jaký by řešení chybné soustavy mělo v praxi.

U hledání řešení soustavy ve tvaru lineární kombinace známých řešení pro jiné pravé strany asi nápověda způsobila víc škody než užitku, protože se řešitelé pravděpodobně zalekli zmínky o lineárním zobrazení. Jiné vysvětlení pro nepatrnou úspěšnost nemám. Vektor g pravé strany soustavy byl lineární kombinací vektorů γ_i. V případě b) bylo bez počítání vidět, že $g = 2\gamma_1 - 3\gamma_2 + 4\gamma_3$, tudíž vektor řešení soustavy byl lineární kombinací řešení v_i, a to se stejnými koeficienty, tj. $w = 2v_1 - 3v_2 + 4v_3$. Případ c) se řešil stějně, jen vyžadoval necelé dva řádky počítání.

Příklad 2 *Odhad spektrálního poloměru, ortogonální vektor.*

Ani tento příklad nedopadl tak dobře, jak jsem původně očekával, ač byl kombinací sbírkových příkladů 3.7 a 3.8, ale ve výpočetně velice zjednodušeném vydání. Geršgorinovy kruhy se většinou dařilo určit správně, často však z nich nebyly vyvozeny správné závěry. Ortogonální vektor bylo možné napsat přímo, bez pomocných výpočtů, o to bylo smutnější vidět dlouhé počítání zakončené výsledkem, který byl na první pohled chybný.

Příklad 3 *Řešitelnost okrajové úlohy.*

Zklamalo mě, že tento úkol dopadl opravdu špatně, ač jsem před zkouškou všem účastníkům poslal e-mail s doporučením podívat se na komentáře ke zkouškám, kde se o řešitelnosti psalo a byly uvedeny konkrétní odkazy na detailní výklad a příklady. A po tom všem polovina studentů ani nemá správně napsaný vzoreček pro vlastní čísla daného typu okrajové úlohy a mnozí z těch, kdo ho mají, ho neumějí použít. Šlo u typ úloh dávno probraný v MA 3, mnou na přednášce připomenutý, ve sbírce ilustrovaný příklady (například 9.5, 9.6-8). Díky v nápovědě vyčíslenému integrálu nebylo prakticky nutné nic složitého počítat, stačily úvahy o lichých funkcích a o kladných sudých funkcích a integrace funkce cosinus.

Příklad 4 *Vlastní čísla a vlastní vektory matice.*

Příklad s maticí 4×4 vůbec nevyžadoval výpočet determinantu, u matice 4×4 bych si ani nedovolil tak poměrně komplikovaný početní úkol požadovat. Úloha byla inspirována sbírkovým příkladem 1.24, jen místo tří vlastních vektorů byl zadán jeden vlastní vektor a jedno vlastní číslo. Stačilo zadaný vlastní vektor vynásobit maticí A, tím se odhalilo vlastní číslo -5, a pak spočítat vlastní vektory příslušné k zadanému vlastnímu číslu -3 (matice $A + 3I$ obsahovala plno nul, takže řešení příslušné homogenní soustavy bylo velice snadné) a buď si uvědomit, že -3 je dvojnásobné vlastní číslo (a do hodnoty stopy matice chybí vlastní číslo -1), nebo si povšimnout, že matice A je reálná a symetrická a najít vektor kolmý ke třem vektorům (jeden vlastní zadaný, dva vypočtené). Takto získaný vlastní vektor po vynásobení maticí A odhalil vlastní číslo -1.

Statistika zkoušky z MA 4

Na začátku semestru zapsáno studujících	186
Zápočtů uděleno	180
Zkoušku zdárně absolvovalo	147 (9 A, 11 B, 27 C, 38 D, 62 E)
Písemných prací opraveno	292
Relativní četnost úspěšných pokusů	50%