

Katedra matematiky Fakulty stavební
Českého vysokého učení technického v Praze

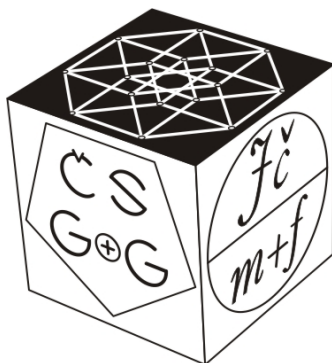
Česká společnost pro geometrii a grafiku
Jednoty českých matematiků a fyziků

SBORNÍK

25. KONFERENCE

O GEOMETRII A POČÍTAČOVÉ GRAFICE

12. - 16. září 2005



PROCEEDINGS OF THE

25TH CONFERENCE

ON GEOMETRY AND COMPUTER GRAPHICS

September 12 - 16, 2005

Department of Mathematics, Faculty of Civil Engineering,
Czech Technical University in Prague

Czech Society for Geometry and Graphics
of the Union of Czech Mathematicians and Physicists

Vydavatel: Jednota českých matematiků a fyziků
Praha 2005
Editor: Stanislav Olivík

ISBN 80-7015-013-0

Programový výbor konference:

Doc. RNDr. Jaroslav Černý, CSc., Fakulta stavební,
České vysoké učení technické v Praze

Doc. RNDr. František Ježek, CSc., Fakulta aplikovaných věd,
Západočeská univerzita v Plzni

Prof. RNDr. Adolf Karger, DrSc., Matematicko-fyzikální fakulta,
Univerzita Karlova v Praze

Doc. RNDr. Marie Kargerová, CSc., Fakulta strojní,
České vysoké učení technické v Praze

Doc. RNDr. Pavel Pech, CSc., Pedagogická fakulta,
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Prof. Dr. Hellmuth Stachel, Vienna University of Technology, Wien

Doc. RNDr. Daniela Velichová, CSc., Slovenská technická univerzita,
Bratislava

Prof. Dr. Gunter Weiss, Dresden University of Technology, Dresden

Organizační výbor konference:

Doc. RNDr. Jaroslav Černý, CSc., FSv ČVUT v Praze

Doc. RNDr. Milada Kočandrlová, CSc., FSv ČVUT v Praze

Mgr. Jana Vecková, FSv ČVUT v Praze

Ing. Stanislav Olivík, FSv ČVUT v Praze

Mgr. Milan Bořík, Ph.D., FSv ČVUT v Praze

Mgr. Anna Kovářová, FSv ČVUT v Praze

Ing. Zuzana Benáková, FSv ČVUT v Praze

Ing. Michal Beneš, FSv ČVUT v Praze

RNDr. Iva Křivková, FSv ČVUT v Praze

Místo konání:

Hotel Achát, Janov nad Nisou, Jizerské hory

Tematické okruhy:

- Geometrie, geometrické modelování a výpočtová geometrie a jejich aplikace
- Výuka geometrie na vysokých a středních školách
- Proměny geometrického kurikula
- Doktorská studia

Scientific Committee:

Doc. RNDr. Jaroslav Černý, CSc., Faculty of Civil Engineering,
Czech Technical University in Prague

Doc. RNDr. František Ježek, CSc., Faculty of Applied Science,
University of West Bohemia in Pilsen

Prof. RNDr. Adolf Karger, DrSc., Faculty of Mathematics and Physics,
Charles University in Prague

Doc. RNDr. Marie Kargerová, CSc., Faculty of Mechanical Engineering,
Czech Technical University in Prague

Doc. RNDr. Pavel Pech, CSc., Faculty of Education,
University of South Bohemia in České Budějovice

Prof. Dr. Hellmuth Stachel, Vienna University of Technology, Wien

Doc. RNDr. Daniela Velichová, CSc., Slovak University of Technology,
Bratislava

Prof. Dr. Gunter Weiss, Dresden University of Technology, Dresden

Organizing Committee:

Doc. RNDr. Jaroslav Černý, CSc., FCE CTU in Prague

Doc. RNDr. Milada Kočandrlová, CSc., FCE CTU in Prague

Mgr. Jana Vecková, FCE CTU in Prague

Ing. Stanislav Olivík, FCE CTU in Prague

Mgr. Milan Bořík, Ph.D., FCE CTU in Prague

Mgr. Anna Kovářová, FCE CTU in Prague

Ing. Zuzana Benáková, FCE CTU in Prague

Ing. Michal Beneš, FCE CTU in Prague

RNDr. Iva Křivková, FCE CTU in Prague

Conference site:

Hotel Achát, Janov nad Nisou, Jizerské mountains

Conference topics:

- Geometry, geometric modeling, computing geometry and their application
- Teaching geometry at universities and grammar schools
- Transformations of geometry curriculum
- Ph.D. studies

OBSAH

TABLE OF CONTENTS

25. KONFERENCE O GEOMETRII A POČÍTAČOVÉ GRAFICE

Předmluva	11
PLENÁRNÍ PŘEDNÁŠKY / PLENARY LECTURES	
František Kuřina <i>Geometrie a geometrické vzdělávání</i>	15
Gunter Weiss <i>Geometry between Pisa and Bologna</i>	23
Hellmuth Stachel <i>Reconstruction from Two Digital Images - Epipolar Geometry</i>	33
REFERÁTY / CONFERENCE PAPERS	
Eva Baranová, Kamil Maleček <i>Od stredového priemetu kružnice ku stredovým cyklidám</i>	37
Michael Bartoň <i>Prostorové problémy související s pohybem</i>	43
Bohumír Bastl <i>CAGD Package for Mathematica and its Usage in the Teaching</i>	49
Zuzana Benáková <i>Křivky na ploše kužele</i>	55
Michal Beneš <i>Analysis of Surfaces at Small Deformations</i>	59
Milan Bořík, Vojtěch Honzík <i>Open Source GIS – Funkce v prostředí PostGIS, tvorba vlastních funkcí a grafických výstupů</i>	67
Jaromír Dobrý <i>Generalization of Laguerre Geometry</i>	73
Henryk Gliński <i>Correction of Radial Distortion in Photographs</i>	79
Roman Hašek <i>Využití programu Derive při výuce analytické geometrie</i>	83
Oldřich Hykš <i>Linear Perspective in Painting – A Tool Supporting Geometric Education</i>	89

Table of Contents

Petr Kahánek, Alexej Kolcun <i>Bresenham's Regular Mesh Deformation and Angle Criteria</i>	95
Mária Kmeťová <i>Dynamické geometrické programy vo vyučovaní Bézierových kriviek</i>	103
Milada Kočandrllová <i>Elipsoid homotetický k referenčnému elipsoidu</i>	111
Jiří Kosinka <i>Approximating Medial Axis Transforms of Planar Domains</i>	117
Iva Křivková <i>Použití programu Geometrica 02</i>	123
Karolína Kundrátová <i>NURBS reprezentace křivek v Maple</i>	129
Miroslav Lávička <i>Projective Model of Möbius Geometry and its Application in CAGD</i>	135
Pavel Leischner <i>Kritéria tětívového čtyřúhelníku</i>	143
Ivana Linkeová <i>Speciální případy NURBS reprezentace</i>	149
Dalibor Martišek <i>Počítačová grafika jako motivace studia matematiky</i>	155
Katarína Mészárosová <i>Krása a fraktálna geometria</i>	161
Martin Němec <i>Využití geometrie v aplikacích určených pro testování a automatické vyhodnocování nestandardních otázek a úloh</i>	169
Stanislav Olivík <i>Porovnání dvou metod hledání odrazného bodu na povrchu elipsoidu</i>	175
Anna Porazilová <i>The Shortest Path</i>	181
Lenka Pospíšilová <i>Obálky rovinných křivek s programem Maple</i>	189

	Obsah
Radka Pospíšilová <i>Kritické konfigurace pro výpočet geometrie kamery</i>	195
Jana Procházková <i>Derivative of B-Spline Function</i>	199
Marie Provazníková <i>Nakrytí grup $SO(3)$ a $SO(4)$ spinorovými grupami</i>	205
Jana Přivratská <i>Černobilá symetrie obdélníkové desky</i>	211
Adam Ružyczka <i>Spatial Imagination among Students Commencing the Course of Descriptive Geometry at Technical Studies in 2003 and 2004</i>	215
Ivo Serba <i>Mozaiky geometrickou substitucí</i>	221
Tomáš Staudek <i>CINEMA 4D: Zkušenosti s 3D modelováním ve výuce počítačové grafiky</i>	229
Zbyněk Šír <i>Hermite Interpolation by Planar Biarcs</i>	235
Jiří Šrubař <i>Vlastnosti trojúhelníka a jejich analogie pro čtyřstěn</i>	239
Diana Šteflová <i>Některé metody fotogrammetrie</i>	245
Vladimír Tichý <i>Vícenásobná kruhová inverze</i>	249
Světlana Tomiczková <i>Area of the Minkowski Sum of Two Convex Sets</i>	255
Margita Vajsábllová <i>Zobrazenia na kuželovú plochu použité na území ČR a SR</i>	261
Jiří Vaniček <i>Počítač jako nositel změn ve školském geometrickém kurikulu</i>	267
Jana Vecková <i>Plocha se čtvercovým půdorysem určená hraničními křivkami</i>	275

Table of Contents

Daniela Velichová <i>Dvojosové rotačné plochy II</i>	279
Šárka Voráčová <i>Computational Geometry with Maple</i>	287
Edita Vranková <i>On Two Approaches for Construction of Direct Alternate Layout for Stamping</i>	293
Radek Výrut <i>Výpočet Minkowského sumy ve 2D a 3D</i>	301
Lucie Zrůstová <i>Historie deskriptivní geometrie na VUT v Brně</i>	307
Mária Zvariková, Zuzana Juščáková <i>Gender Differences in Tests of Space Abilities</i>	313
Antonina Žaba <i>Bartholomew Strobel's Drawing Compared to Peter Krueger's Publication</i>	319
Antonina Žaba <i>Illusionistic Architectural Vault Paintings as Anamorphic Pictures</i>	325
SEZNAM ÚČASTNÍKŮ / LIST OF PARTICIPANTS	333

Předmluva

Pod záštitou České společnosti pro geometrii a grafiku Jednoty českých matematiků a fyziků se ve dnech 12. – 16. září 2005 konala jubilejní 25. konference z geometrie a počítačové grafiky. Konference probíhala v hotelu Achát v Janově nad Nisou v Jizerských horách.

Konference se zúčastnili kromě učitelů vysokých a středních škol České republiky též kolegové ze Slovenska, Polska, Německa a Rakouska. 75 účastníků vyslechlo 40 přednášek a referátů. 11 účastníků prezentovalo své příspěvky na posteru. Na konferenci zazněly příspěvky z geometrie a počítačové grafiky a jejich aplikací. Některé referáty měly metodický charakter.

V průběhu konference bylo předáno doc. M. Kargerové a prof. A. Kargerovi ocenění při příležitosti jejich 65. narozenin za dlouholeté zásluhy a výsledky v geometrii.

Poděkování patří organizátorům z katedry matematiky Stavební fakulty ČVUT v Praze, kteří pod vedením pana doc. J. Černého zajistili zdárný průběh konference.

Programový výbor konference pracoval ve složení:

Doc. RNDr. Jaroslav Černý, CSc., FSv ČVUT v Praze

Doc. RNDr. František Ježek, CSc., FAV ZČU v Plzni

Prof. RNDr. Adolf Karger, DrSc., MFF UK Praha

Doc. RNDr. Marie Kargerová, CSc., FS ČVUT v Praze

Doc. RNDr. Pavel Pech, CSc., PF JČU České Budějovice

Prof. Dr. Hellmuth Stachel, Vienna University of Technology, Wien

Doc. RNDr. Daniela Velichová, CSc., Slovenská technická univerzita,
Bratislava

Prof. Dr. Gunter Weiss, Dresden University of Technology, Dresden

Dovolte mi, abych Vás pozval na 26. konferenci z geometrie a počítačové grafiky, která se bude konat ve dnech 11. - 15. září 2006 v oblasti Nového Města na Moravě. Organizátoři budou tentokrát z katedry matematiky Pedagogické fakulty Jihočeské univerzity.

České Budějovice 25. října 2005

Pavel Pech
předseda ČSGG

PLENÁRNÍ PŘEDNÁŠKY

PLENARY LECTURES

František Kuřina

GEOMETRIE A GEOMETRICKÉ VZDĚLÁVÁNÍ

Abstrakt

Na základě podnětů tří knih o geometrii se příspěvek zabývá otázkou postavení geometrie v současném vzdělávání na střední a vysoké škole. Základní otázka, kterou by měl příspěvek vyprovokovat, zní: Jak učit matematiku, aby rozvíjela myšlení. Dílčí hypotetický závěr je uveden ve třetí části příspěvku.

Klíčová slova

Geometrie, axiomatika, historie, geometrické vzdělávání, transmise struktury, řešení úloh

Je pro mne ctí, že mohu před tak kvalifikovaným plénem odborníků na geometrii a počítačovou grafiku vystoupit s referátem pedagogického zaměření. Chci se zamyslet nad některými otázkami geometrického a obecně matematického vzdělávání, které vyvstaly při studiu tří pozoruhodných publikací: 5 000 let geometrie [1], Matematika: hranice a perspektivy [2] a sborník příspěvků z konference o počítačové grafice 2004 [3].

1 Charakteristika zdrojů

Kniha „5 000 let geometrie“ je bohatě ilustrovaná publikace s rozsahem 596 stran, v níž autoři shromáždili velké množství materiálu nazíraného z hlediska historického, kulturního a společenského. Historie je členěna do osmi kapitol, publikace dále obsahuje výběr originálních textů, mezi jinými např. Platona, Archimeda, Helmholtze a Abbota a obsáhlý soubor úloh inspirovaný historií. Jejich řešitelé tak mají příležitost vcítit se do vývoje mnoha matematických problémů.

Velkou předností knihy jsou bezesporu její ilustrace. Geometrické ornamenty, z nichž se zde některé reprodukují, jsou podle publikace doložitelné již z doby 40 000 let př. n. l. Kromě ukázek ilustrací z Euklidových Základů zde nalezneme např. obrázky z knih čínských a japonských, z geometrie Boethiovy, z tvorby Dürerovy a Leonardovy, ale i reprodukce obrazů Escherových, prací Salvadora Daliho (krucifix ve tvaru

sítě čtyřdimenzionální krychle) nebo aperiodickou parketaž Penrosovu. Mnohé ilustrace jsou barevné.

Každá epocha je charakterizována výčtem řady vědeckých, technických a společenských událostí. Na pozadí této „scény“ charakterizují autoři „podstatné geometrické jevy“ studované éry v těchto oblastech: deskriptivní geometrie, projektivní geometrie, teorie geometrických konstrukcí, diferenciální geometrie, „vnitřní geometrie“ ploch, neeuclidovská geometrie, n-dimenzioální geometrie a vektorový počet, grupy transformací, základy geometrie.

Z naznačeného výčtu je zřejmé, jak obrovský úkol si autoři stanovili. Je pochopitelné, že dovést takto založený úkol až do r. 1991 (jak autoři proklamují), je sotva splnitelný úkol. Srovnají-li zájemci charakteristiku geometrie 20. století v publikaci [1] např. s rozbořem I. Koláře [4], budou se mnou patrně souhlasit, že hodnocení „v každém směru excelentní kniha“ z české recenze autorů K. Malečka a Z. Nádenfka [5], je poněkud nekritické. Souhlasím ovšem s jejich hodnocením, že se autorům „zdařilo velmi přirozeně spojit historii geometrie s obecným kulturním vývojem i dějinami vůbec“.

Český čtenář bude jistě hledat, zda autoři 5 000 let uvádějí nějaké geometrické podněty z našich zemí. V knize marně hledáme např. zmínku o V. Hlavatém nebo E. Čechovi, dozvíme se však, že obávaný profesor pražské univerzity v letech 1803 – 1857 Ladislav Jandera, byl „matematický mužiček“, jakoby vzatý z pohádky E. T. A. Hoffmanna (s. 551) a že prof. F. Kadeřávek byl synem řemeslníka z pražské chirurgické kliniky (s. 508). Profesor K. Havlíček je uveden v rejstříku, ale nikde jinde v knize jsem o něm zmínku nenašel. Najdeme zde ovšem informace o pracech F.Kadeřávka a o knize Objektivem počítače od L.Drse a J. Všeťčky.

Podstatným nedostatkem knihy je, jak uvádějí i citovaní recenzenti, že autoři prakticky nepřihlížejí k francouzské a ruské literatuře (pokud nebyla přeložena do angličtiny nebo němčiny) a např. algebraická geometrie z 19. století prakticky vypadla. Přesto je kniha 5 000 let geometrie publikací krásnou a každý milovník geometrie v ní najde řadu podnětů. Vřele ji doporučuji ke studiu.

Druhá kniha „Hranice a perspektivy“ má zcela odlišný charakter. Je to publikace, kterou k roku 2000 jako Mezinárodnímu roku matematiky zpracovali pod patronací Mezinárodní matematické unie „velcí“ matematici současnosti. Připomeňme z neznámějších aspoň M. Atiyaha, R. Penrose, A. Wilese a V. I. Arnolda. Autoři se snaží, inspirování Hilbertovými problémy z roku 1900, na 459 stránkách, formulovat vizi současné matematiky. Explicitně uvádí 18 problémů pro 21. století

S. Smale. Tyto problémy nejsou pro mne přirozeně zcela srozumitelné, přesto jsem však jako učitel matematiky našel v knize několik zajímavých otázek, k nimž se vrátím v druhé části příspěvku.

Třetí publikace, která mi dala podněty k zamyšlení, je sborník [3]. V něm je představena geometrická tvorba 57 autorů, převážně z českých vysokých škol z let 2003 a 2004. Vzhledem k tomu, že to není jistě veškerá geometrická tvorba autorů z České republiky, zdá se mi těchto 263 stránek dokladem dosti dobrého výkonu geometrické vědy. Bylo by jistě poučné zhodnotit tuto produkci z hlediska originality výsledků a jejího přínosu současnému bádání. To je ovšem nad mé možnosti. Řada prací má „aplikační“ charakter: výsledky známé z teorie se aplikují na řešení určitého geometrického nebo technického problému. Není sporu o tom, že i takovéto práce jsou potřebné a rozvoji poznání slouží. Některé práce jsou spjaty s pedagogickými otázkami a historií vědy. I takováto pojednání mají svůj význam.

2 O geometrii

Dosti dobrou představu o té složce matematiky, kterou nazýváme tradičně geometrií, si můžeme učinit na základě publikací [1] a [3]. Pozoruhodné charakteristiky této disciplíny připomeňme z klasické *Hilbertovy* práce [6] a ze stati *Davida Ruella* publikované v knize [2].

Hilbert píše: „V matematice se setkáváme, podobně jako v jiných oblastech bádání, se dvěma tendencemi: s tendencí k abstrakci a tendencí k názornosti. Tendence k abstrakci se snaží na základě logiky oboru disciplínu systematicky uspořádat. Názornost vychází z živého nazírání a z jejích obsahových vztahů. V geometrii vedly abstraktní principy k velkolepým systematickým stavbám, jakými jsou např. algebraická a Riemannova geometrie a topologie. V nich se podařilo široce aplikovat abstraktní uvažování, symboliku a kalkuly. Přesto však hraje i dnes významnou roli v geometrii i názornost, a to nejen jako podnětující síla v bádání; pomáhá i s oceněním jeho výsledků“ [6].

Dnes hodnotí *D. Ruell* geometrii takto: „Současný matematik listující Euklidem zde nalézá zcela netriviální i když dobře známé věty. Řecká geometrie je raná sice, ale zcela moderní matematika. Ukazuje jasněji než matematika pozdější dvě zvláštnosti lidského rozumu, který ji produkuje:

- 1) Užívá vizuální systém. Sama geometrie je přímo odvozena z vizuálních zkušeností a intuice.
- 2) Užívá „externí paměť“ ve formě kreslených čar a kružnic s body označenými písmeny“ ([2], s. 256).

Kombinace těchto dvou zvláštností umožňuje vypracovat logické konstrukce, které Řekové oprávněně považují za významný intelektuální výkon. Hilbertova verze geometrie „bez obrázků“ ukazuje, o jak obtížný předmět jde ([2], s. 256).

Významu vizuálních aspektů matematického nazírání jsem si všiml již před více než 20 léty a na elementární úrovni jsem na toto téma publikoval knihu „*Umění vidět v matematice*“ [7]. Podobnou tematikou se dnes zabývají např. knihy amerického autora *R. B. Nelsena Proofs without Words* [8].

Po tomto výkladu se naléhavě vtírá otázka: „Co je příčinou toho, že geometrie hraje dnes, jak ve školské matematice, tak i v matematice pěstované na vědecké úrovni, spíše vedlejší než hlavní roli?“ Pro mne přesvědčivou odpověď jsem našel ve vývoji matematiky ve dvacátém století silně ovlivněném Hilbertovým „nejslavnějším žákem“ *N. Bourbakim*. Podle Bourbakiho je geometrie vyčerpanou žilou, které se s úspěchem mohou věnovat milovníci geometrie trojúhelníku, čtyřstěnu, ..., která však neobsahuje strukturální problémy schopné dát impulsy dalším odvětvím matematiky. Je zajímavé, že *Eduard Čech* napsal v r. 1953: „Když jsem před 40 lety vstoupil na univerzitu jako student matematiky, měl jsem ten dojem, že geometrie, kterou jsem měl po celý život ve zvláštní oblibě, se stává poměrně málo významnou částí matematiky. Ve skutečnosti jsou právě dvacátá léta tohoto století počátkem úžasného, dodnes trvajících rozmachu geometrie.“ Tento pohled je podle mého názoru zcela v souladu se současnými názory *M. Atiaha*, jak je publikuje v předmluvě knihy [2]. Bourbakiho éru následuje „hybridní“ perioda, v níž se spojují různí specialisté (algebraická topologie a topologické grupy) tak, že konec 20. století znamená návrat k duchu matematiky *H. Poincarého*, s důrazem na geometrické myšlení i v takových oblastech jako je algebra nebo teorie čísel.

Tyto otázky souvisejí s podněty, z nichž matematika čerpá svou sílu. V roce 1941 napsal *R. Courant*: „V současnosti převládající zdůrazňování deduktivně–logického charakteru matematiky považujeme za velmi nebezpečné. Je sice pravda, že není lehké popsat, co je tvořivý objev nebo úspěšný intuitivní začátek, přesto však právě tyto jevy tvoří jádro i těch nejabstraktnějších matematických výsledků. Krystalicky čistá deduktivní forma je možná cílem matematiky, ale její hybnou silou je intuice. Vážné ohrožení pro samotný život matematiky vyplývá z tvrzení, že matematika není nic jiného než bezesporný systém důsledků odvozený z definic a axiomů.“

Podle mého názoru v takto nebezpečném pojetí žijeme ve značné části matematiky přednášené na našich vysokých školách, patrně i technických,

dodnes. V přednáškách se obvykle snažíme podat ucelený výklad části určité teoretické disciplíny, úlohy a problémy, z nichž disciplína vyrůstala, zůstávají v pozadí, pokud vůbec naleznou v kurzu uplatnění. Jakoby polemizoval s Courantovými názory uvádí *V. I. Arnold* v citovaných *Perspektivách* [2]: „Matematiku můžeme rozdělit na tři části: *kryptografii* (placenou CIA, KGB apod.), jejímž plodem je teorie čísel, algebraická geometrie, algebra, kombinatorika, ..., *hydrodynamiku* (podporovanou výrobcí atomových ponorek), která zrodila komplexní analýzu, parciální diferenciální rovnice, ... a *nebeskou mechaniku* (financovanou armádami), která je zdrojem topologie, variačního počtu, ...

Když jsem po univerzitních studiích začal vyučovat matematiku na střední škole, byl jsem přesvědčen, že náležitým vysvětlením definic, vět a důkazů dovedu studenty k porozumění matematice. V praxi jsem poznal, že důležitější pro pochopení problematiky jsou příklady. Tento poznatek jsem si mnohem později přečetl u *Komenského*: „Všemu se vyučuje a učí příklady, ukázkami a cvičeními“ ([9], XL), ale teprve při studiu knihy [2] jsem pochopil, jak důležité jsou tyto otázky i pro matematiku samotnou.

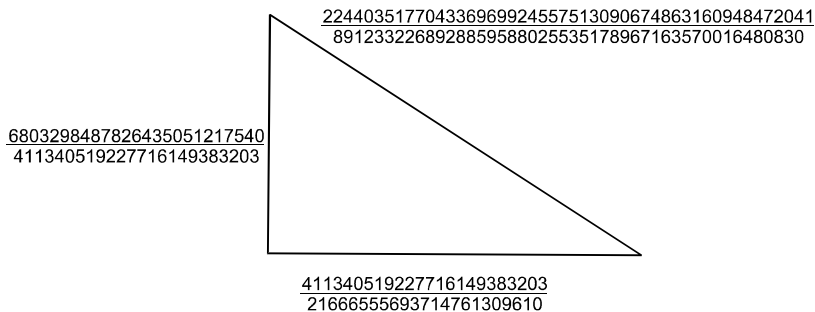
W. T. Gowers zde v článku *Dvě matematické kultury* rozlišuje dva různé přístupy k matematice podle těchto kritérií:

- cílem řešení problémů je lepší porozumění matematice,
- cílem porozumění matematice je umět lépe řešit problémy.

Konečně světově proslulý matematik *A. Wiles* začíná článek *Dvacet let teorie čísel* v knize [2] rozbořem tří Fermatových problémů:

1. Která prvočísla jsou součty čtverců celých čísel?
2. Existuje pravoúhlý trojúhelník, jehož délky stran jsou racionální čísla a jehož obsah je 1?
3. Existuje celočíselné řešení rovnice $x^n + y^n = z^n$ pro $n \geq 3$?

Prvé dvě úlohy vyřešil Fermat sám, poslední problém vyřešil, jak známo v roce 1995 právě *A. Wiles*. V citovaném článku se uvádí, že zobecnění problému 2 vede k jednomu z nejzajímavějších problémů moderní číselné teorie. Jako kuriozitu zde na obrázku připomeňme jeden z dílčích výsledků z tohoto okruhu: „nejjednodušší“ pravoúhlý trojúhelník s racionálními délkami stran a obsahem 157. Otázku, které úlohy jsou významné pro školní vzdělávání a pro matematiku samotnou, lze stěží jednoduše zodpovědět.



3 Matematika a vzdělávání

Matematické poznatky potřebuje na různých úrovních každý: žena v domácnosti, spisovatel, technik, vědec z oblasti věd společenských i přírodovědec. Matematika by však měla přispívat i ke kultivaci myšlení, měla by mít i významný formativní vliv. Je rozšířeným omylem, že tomu tak vždycky je. U zkoušek se občas setkáváme s reprodukcemi matematických definic, vět, důkazů i naučenými řešeními úloh, s minimální mírou porozumění. Takto osvojovaná matematika myšlení nerozvíjí. Zdá se, že příčinou tohoto jevu jsou zčásti zbytečně vysoké rozsahy učiva a styl učení, který tomu odpovídá. Na první problém upozornil již v 19. století náš pedagog *G. A. Lindner* („chceme vychovávat obry, ale vychováváme trpaslíky“) na otázky metod výuky matematiky orientované ke kultivaci myšlení obracel pozornost učitelů známý matematik *G. Polya*. Aniž bychom zde mohli dělat důkladnější rozbor problematiky, připomeňme několik názorů, které bychom měli považovat především za podněty k diskusi.

Geometrii můžeme chápat na elementární úrovni jako matematickou strukturu. Podle Hilbertova pojetí např. jako strukturu

$$(B, P, \in, m, \cong),$$

kde B je množina bodů, P je množina přímk, \in je relace incidence, m je relace mezi a \cong je relace shodnosti. Přitom jsou vlastnosti příslušných množin a relací formulovány v axiomech.

Ve *Weylově* pojetí je geometrie studiem struktury

$$(B, V, +, \cdot, \circ, -),$$

kde B je množina bodů, V je množina vektorů, $+$ je algebraická operace sčítání vektorů, \cdot je algebraická operace násobení vektorů číslem, symbolem \circ popisujeme skalární násobení vektorů a $-$ je zobrazení kartézského součinu $B \times B$ do množiny vektorů. Dále je formulována soustava axiomů, která implicitně definuje geometrickou strukturu eukleidovského prostoru.

Ačkoliv se ve škole nezavádí žádná z takovýchto struktur exaktně, napovídá členění geometrie na naší střední škole, že přece jen považujeme strukturální pohled za základní, neboť studujeme izolovaně např. stereometrii v syntetickém pojetí a analytickou geometrii. Takovýto přístup není přirozený z hlediska studenta. Proč by ho měly zajímat jakési vyspekulované abstraktní struktury? Snad by ho však měly zajímat vlastnosti prostoru, v němž žije. Měl by tomuto prostoru rozumět, orientovat se v něm a řešit geometrické problémy přirozeným způsobem, bez „svěrací kazajky“ struktury. Matematika chápaná jako systém definic, vět, důkazů nebo na elementární úrovni jako systém vzorců, není nejvhodnějším základem pro přístup ke školské matematice, neboť skýtá mnoho příležitostí k formálnímu zvládnutí poznatků. Definice, věty a důkazy se lze naučit, aniž bychom jim rozuměli, tento soubor „vědomostí“ lze reprodukovat u zkoušek. Dobrá paměť rozvíjená tréninkem se zdá být postačující k „osvojení si“ minima matematiky. Takováto matematika však myšlení nerozvíjí, ale spíše utlumuje, protože myšlení komplikuje pohled na strukturu vytříbenou často mnohageneračním vývojem názorů na řešení určitého problému. Ne tedy studium části hotové matematiky, ale poznávání cest k matematice je základní příležitostí k rozvíjení myšlení. Snaha porozumět věcem je doložitelná historicky a aplikovatelná i didakticky. Co je geometrie, není-li studiem geometrických struktur? Za geometrii „ve stavu zrodu“ můžeme považovat řadu dovedností, které k jejímu utváření historicky patrně vedly, a které k ní mohou vést i ve škole. Jsou to především tyto dovednosti, tato „umění“ (v původním slova smyslu):

umění vidět,

umění sestrojovat a

umění dokazovat.

Snad každý cítí, že tyto dovednosti nejsou specificky geometrické. Vidět můžeme nejen prostorový či rovinný geometrický útvar, vidět můžeme i útvar přírodní, vidět můžeme i souvislosti, příčiny, řešení problému, konstrukci nebo důkaz. Sestrojit můžeme nejen trojúhelník nebo kružnici, ale i model, stroj, algebraický výraz nebo rovnici. Tvzení dokazujeme nejen v geometrii, ale i v algebře, důkazy se zabývají soudy, argumentace je složkou každodenního života.

Povzbuzen tím, že podle monografie [2] je pro rozvíjení matematiky základní řešení problémů, právě tak jako je řešení problémů prioritní pro jakoukoliv vědu přírodní či společenskou, s vědomím toho, že máme technické prostředky výpočetní a reprodukční techniky jako nikdy v minulosti, kladu otázku, zda jsou tradičně koncipované kurzy matematiky zaměřené na transmissi struktur nejvhodnějším přístupem k matematickému vzdělávání. Studium vhodných problémů a účinné vytváření aparátů k jejich

řešení je alternativou, která by možná mohla aspoň zčásti přispět v budoucnu k řešení současné krize ve vzdělávání. Ve vyučování matematice snad na každé úrovni často uniká studentům smysl. Smysl dokazování i smysl definování. To je začátek konce úspěšného studia. Dokážeme-li přesvědčit studenty o účelnosti koncepce kurzu matematiky, máme jistou naději na probuzení zájmu. Víím ze zkušenosti, osobní i zprostředkované, že výuka matematiky na vysoké škole a řešení problémů budoucí praxe absolventa jsou, především díky formálnímu absolvování příslušných kurzů, ale i vzhledem k akademičnosti těchto kurzů, mimoběžné oblasti. Co je platné inženýru ekonomie studium lineární algebry a řešení soustav rovnic, když v praxi řeší lineární rovnici „zkusmo!?”

Literatura

- [1] C. J. Scriba, P. Schreiber: *5 000 Jahre Geometrie*, Springer, Berlin 2001.
- [2] V. Arnold, M. Atiyah,, P. Lax, B. Mazur: *Mathematics: Frontiers and Perspectives*. AMS 2000.
- [3] *Geometry and Computer Graphics 2004*. Sborník příspěvků 24. konference o geometrii a počítačové grafice. VŠB, Ostrava 2004.
- [4] I. Kolář: *Postavení geometrie v současné matematice*, Matematika – fyzika – informatika, č. 8, roč. 5, 1996.
- [5] K. Maleček, Z. Nádeník: *Recenze knihy* [1], Pokroky matematiky, fyziky, astronomie.
- [6] D. Hilbert, S. Cohn Vossen: *Anschauliche Geometrie*, Berlin 1932.
- [7] F. Kuřina: *Umění vidět v matematice*. SPN, Praha 1989.
- [8] R. B. Nelsen: *Proofs without Words I., II.* MAA, Washington 2002.
- [9] J. A. Komenský: *Didaktika analytická*. Samcovo knihkupectví, Praha 1946.

Gunter Weiss

GEOMETRY BETWEEN PISA AND BOLOGNA

Abstract

The lecture tries to analyse the often contradicting attempts to restructure our European educational scenery. Even Geometry is recognised an important general educating subject.

Especially for technical studies, almost all these attempts end up with reducing teaching hours down under the limit of effectiveness.

Some strategies to improve or, at least, to cope with this situation are proposed. For example we could gather bad examples of clumsy or even wrong geometry-free solutions of problems and present them commonly as a “European state of no art” – report to our politicians. We could do lobbying. We could organize conferences and workshops, where we explicitly invite our graduates having jobs in industry. Let us also emphasise commonly that Europe and the World needs a sort of new humanism, a new “Greek point of view” of science and educational politics.

Keywords

Geometry in maths and engineering education, Bologna process

1 Geometry between PISA results and Bologna process

This article tries to give a description of the situation of nowadays geometry education and of its possible trends. There exist already many papers dealing with geometry education, but mostly they aim at details: special teaching software, collections of problems and methodical approaches. Here a somehow more global view will be presented based on discussions on Bachelor/Master studies replacing the traditional diploma engineer as well as general structural changes within European universities.

When PISA results were discussed, most reactions aimed at symptoms: insufficiently educated pupils, instead of curing the disease: *neglected education of teachers*. When talking about “Bologna”, this name becomes synonymous for the unification of our European higher educational system. We see a need for mobility for students as well as for teachers.

Thus studies and courses have to be somehow interchangeable. On the other hand we face trends of diversification in studies, as every University

should show an own scientific profile and wants get the status of an “Elite University”. In a situation of educational and economical competition between Universities ranking lists pretend objectivity, but they often compare ‘apples with pears’. Such ranking procedures put hard pressure onto us teachers and we are daily forced to justify our existence:

- Effective duration of studies should not exceed standard duration;
- the number of beginners should not differ to much from that of graduates;
- we should produce publications with high impact factor;
- and first of all, we should be successful fund risers.

The big press often leads to improper reactions, as we have to cope somehow with “the system” and to compete with other colleagues instead of cooperate with them. I suppose that the loud calls for a re-organization of Universities and their studies just mask the shortage of financial resource and help to hide cutbacks in staff.

While PISA and Bologna, together with bad economy of the states, take effects from ‘outside’ to our universities, our way to cope with those effects also has ‘inner’ changes as consequences. Thus it might be useful to analyze the following question:

2 What happens within our educational/research system?

I see competition between European Universities, within limits, not at all as only a bad thing. There are the limits it will depend on! Universities of bigger countries are indeed very different, often due to long scientific traditions, special profile, contacts to industry. But they all are governed and ruled by the same national laws. To escape from this, some Universities try to become the status of privatised institutions, like foundations. Such a structural change has many consequences. Some of the consequences are, to my experience,

- Reduction of teaching staff: As the faculties are ranked according to their fund rising abilities, Mathematics and Didactics/Pedagogic usually have the last position.
- Downgrading of teaching jobs: If a person retires, the replacement – if at all possible – has to be at cheapest conditions. In Jena, Dresden, Karlsruhe I know of examples, where full-professor jobs at Mathematics departments are replaced by jobs at assistant level. Especially Geometry falls victim to this downgrading, which will have negative consequences for Geometry as a mathematical science.

- Founding of “Centres for Innovation and/or Competence”: According to the opinion of University leaderships standard teaching and education of undergraduates is no longer held in great esteem. What counts is working within “graduate colleges” and “special research programs”, Fraunhofer- or Max-Planck-Institutes, where we can harvest the educational fruits of undergraduate teaching from far abroad. But finally: Who cares about our own undergraduates?
- Outsourcing of teaching capacity: A cheap solution is to let retired persons give courses at the basis of honorary contracts. This seems to be common use not only in Germany but also in Eastern European countries. Even these persons might have been ‘scientifically strong’ and are routines in teaching, they are more or less isolated. They are excluded from University benefits as they cannot get travelling money and conference fees. Their contracts yield one semester, what is not very motivating to keep courses up to date. But it is a cheap solution, with negative consequences after a decade, maybe not at once.

3 How do mathematicians cope with the new teaching/research structures?

Because of lack of teaching staff in Mathematics courses for different types of studies have to be merged. Here one can mention the catchword “*One Mathematics for everybody*”, which should justify such a pedagogically wrong fusion of courses with different purposes. The catchword is quite common opinion among mathematicians! But there are several misunderstandings, at least from the Geometry point of view, as it is subsumed that

- Geometry – as far it is part of Mathematics – and Mathematics are based on equal methods of thinking, and that therefore
- teaching Mathematics/Geometry primary has to impart mathematical thinking, argumentation and methods to students independently of their study and needs, and that the
- transfer to applications and treating specific ‘real’ problems arising from diverse engineering professions comes secondary.

From personal teaching experience I learned that “pure” Mathematics or Geometry is not the biggest hurdle; it is the ‘mathematisation’ of problems posed by ‘real life’, what causes the greatest difficulties. But exactly, with *problem oriented learning/teaching* (POL), students become best motivated for acquisition of mathematical tools. Of course, POL demands some knowledge of the respective engineering study by the teacher. Here most Mathematics teachers have weak points. There is much ignorance about

“industrial reality”, and the languages spoken by engineers and mathematicians are very different and aggravate communication between them.

In Germany politicians want to establish the Bachelor qualification as an academic degree qualifying for a profession. So the ‘Pure Mathematics’ point of view is surely wrong!

One parameter for gaining financial bonuses for a department or an institute is the number of articles published by the members of that unit. Sometimes also their impact factor and citation index counts. This causes a so called ‘*publish or perish*’-mentality among scientists. Here the single fields in Mathematics have to compete with each other and classical Geometry has not a good hand in that game, as Geometry journals undeservedly are ranked absolutely not at the top. There is no lobby for declaring classical Geometry for being a “mainstream science”.

Authors of papers with classical geometric content often emphasise the ‘many possible applications’ of their results and algorithms in industry. But it is a fact that of hundreds of articles e.g. on CAGD only a handful reaches to have influence on industrial software. The reasons for not being accepted of industry are

- lack of communication abilities on both sides, the engineers and the mathematicians, as already mentioned above, and
- incomplete description of the transfer of the result to a final industrial product or algorithm,
- resistance in industry to give up well approved and maybe patented solutions, which perhaps have cost much money.

Some examples will be shown in the next chapters.

4 Why still ‘Constructive Geometry’ in engineering and teachers’ education?

This subject flourished at the begin of the 20th century but now it has rather low scientific reputation. In fact, there are still no modern textbooks on the theory of geometric mappings besides the three famous volumes “Lehrbücher zur Darstellenden Geometrie” of E. MÜLLER (~ 1923), which link Geometry as a tool for engineers with its scientific background. Recent research results on geometric mappings exist of course and can be found in mathematical journals, but they have little or no impact to the classical Descriptive Geometry teacher, who is, in most cases, an architect or engineer. Recent research on Constructive Geometry mostly deals with differential geometric problems, too. But even the results are indeed

beautiful, they are hard to communicate to the broader public. On one hand they need a lot of geometric pre-knowledge, and on the other the reader or applicant must possess a rather well developed ability of spatial perception.

Since in Germany Geometry is totally banished from school curricula, there is almost no literacy to read and understand sketches of simple 3D-figures among students. People have difficulties with for example IKEA assembly instructions. So in spite of an environment full of images and visualisations the connection between spatial representation, geometric abstraction and logical reasoning for most persons is only rudimentary developed. It shows that even Mathematicians are not safe from faulty geometric reasoning! There is no doubt about that the mentioned abilities belong to basic human skills and that they can be trained up to a large extent by Descriptive Geometry courses.

Such a training in Geometry is worthwhile, as the following example figure 1 might show: It represents an elegant proof of the conformity of the so called stereographic projection ‘just by looking’ at figures and using very elementary geometric arguments.

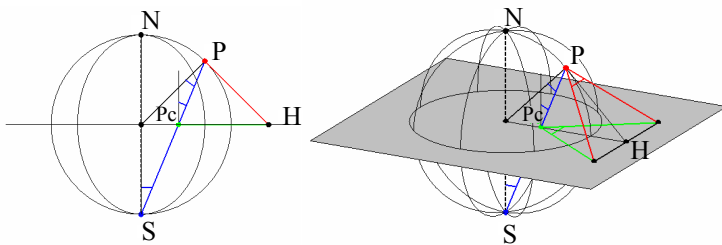
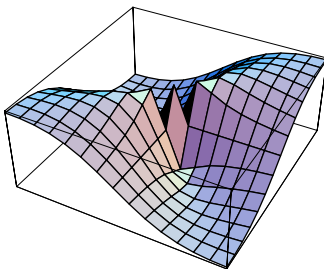


Figure 1: Elementary geometric proof of conformity of the stereographic projection

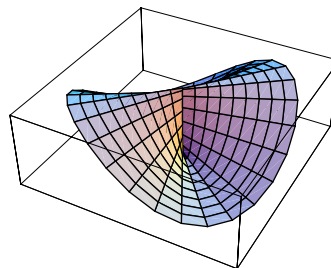
Even there is a declared need for the mentioned human basic skills especially for engineers and architects, but also for many other professions, and Constructive Geometry still is taught at University level for some studies there exist no organised education for the teachers of that subject and hardly further education for those who are teaching it at the moment. (There is only one exception in Europe: Austria)

5 “e-learning Geometry”?

The needs of teaching classical 3D-geometry on one hand and the lack of teachers on the other could force the development of e-learning material in Geometry. Such e-courses are generously supported by European Community programs, as they aim at a unification of educational systems in Europe. What can be found of e-courses up to now supports the respective Geometry courses of each author of those e-learning modules, such that they are not really of general use. By the way, not everything is correct in these e-learning materials! For example, in an Analysis e-teaching project supported by the EC the left figure 2 represents the graph of a cubic surface. This seemingly complicated surface is depicted also by its top view, using the same rough discretisation based on default values of *MATHEMATICA*.. Here mathematicians neglect essential mathematical fundamentals: the influence of discretisation, parameterisation, regularity. (The right figure 2 shows a ‘correct’ image of the left surface, which is the well known PLÜCKER conoid.)



Cartesian graph



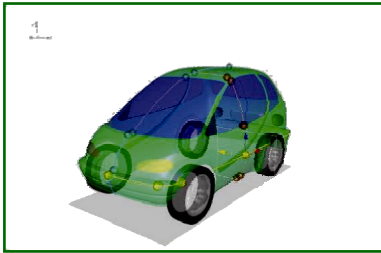
Graph in cylinder coordinates

Figure 2: PLÜCKER conoid plots with *MATHEMATICA*[®]

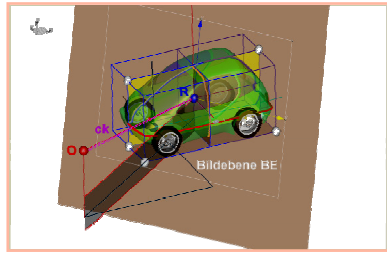
New media require other methodical approaches than classical ruler and compass constructions involve. For example, it can no longer be the central task of Descriptive Geometry to dissolve a 3D-problems into incidence and measure problems in the drawing plane. The classical set of geometric objects should be enriched by freeform objects, a listing of the single steps of the solution of an arbitrary problem should be based on argumentation in space. A one-to-one translation of former strategies to 3D-Cad-software surely is the wrong conception! As long as e-learning units have authors, whose education in Constructive Geometry only is based on engineering standard knowledge and who have not fathomed the subject scientifically, I have great reservations about the use of such teaching software.

6 Geometry: old knowledge to solve modern problems

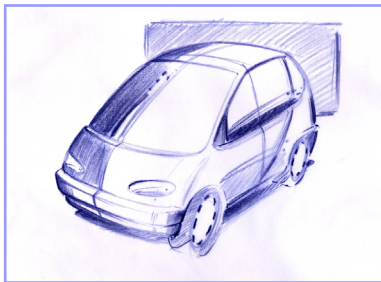
Recent research in reverse engineering, computer vision, robotics seems to be most successful, if based on classical knowledge in Geometry. Here H. POTTMAN, H. STACHEL, B. JÜTLER, O. RÖSCHEL, H. HAVLICEK, M. HUSTY have to be named as special representatives. They use Projective Geometry, (non Euclidean geometry, linear mappings), classical Differential Geometry (line geometry, kinematics), Circle Geometries (of MÖBIUS, LAGUERRE, LIE) and classical Algebraic Geometry, often in a generalised form, to treat a technical problem in a very elegant and successful manner. When we recognise that all these subjects are standard courses for teachers of Descriptive Geometry in Austria, it is no longer strange that the mentioned persons all come from Austria. It seems to be like in sports: For a nation the chance of gaining medals in a certain branch of sports is higher, if that special sport is commonly practiced.



Reference points at „known“ places and main sections



3D Model with centre of projection O , optical ref. point R , focal distance ck



Sketch close to a perspective projection

Figure 3: 3D-Reconstruction from Sketches (F. HENSCHEL)

In the following some own experiences shall be represented by two diploma theses: The first one of F. HENSCHEL deals with Computer Vision and Linear Mappings. In cooperation with a software firm the theme was to reconstruct an object from planar freehand sketches, see figure 3 and 4. The professional software already had some modules for central projection, and they had to be used also in the thesis, in spite of sketches not being exact central projections and in spite of the principle point not being the centre of the box, in which the object is embedded. So even one could easily improve the algorithms by applying some geometrical knowledge, the firm rather wants to implement an approximation algorithm than to accept the better solution.

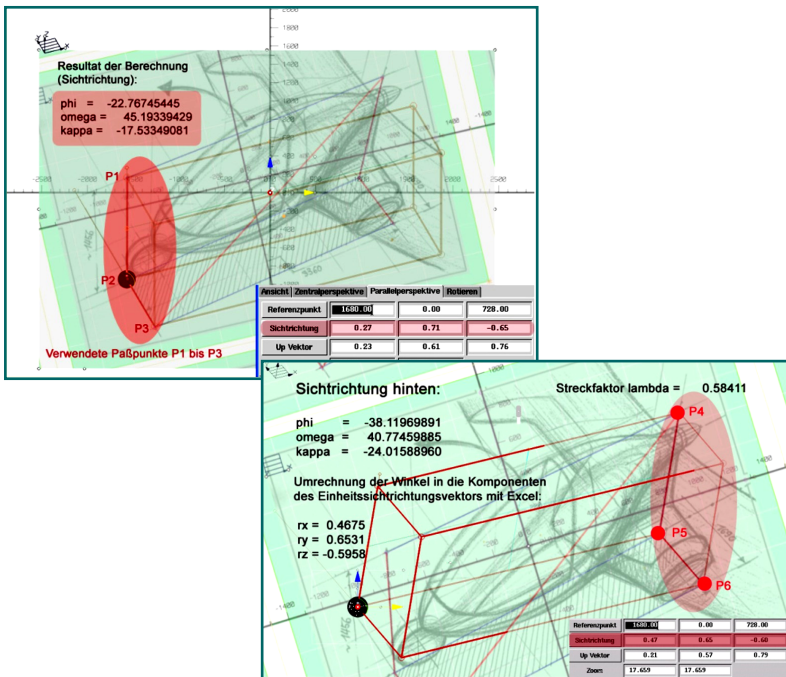


Figure 4: Inexact reference points

The second diploma thesis deals with material science and elementary geometry. A rotating crystalline probe reflects a laser beam onto a screen. Reflection happens, when the ray forms a special angle with the grid planes of the crystal. The traces of the reflected rays on the screen are conic

GEOMETRY BETWEEN PISA AND BOLOGNA

sections, and the task was to find the mutual positions of the grid planes, thus detecting distortion and stress of the probe.

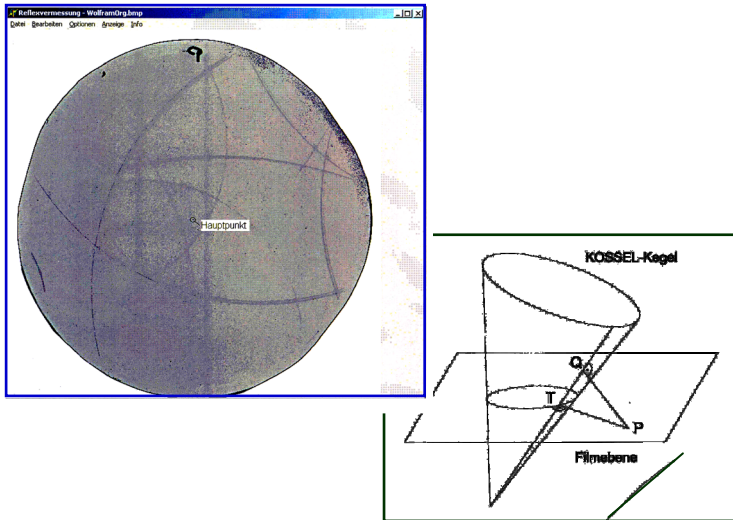


Figure 5: Wolframkristall: KOSEL-Image

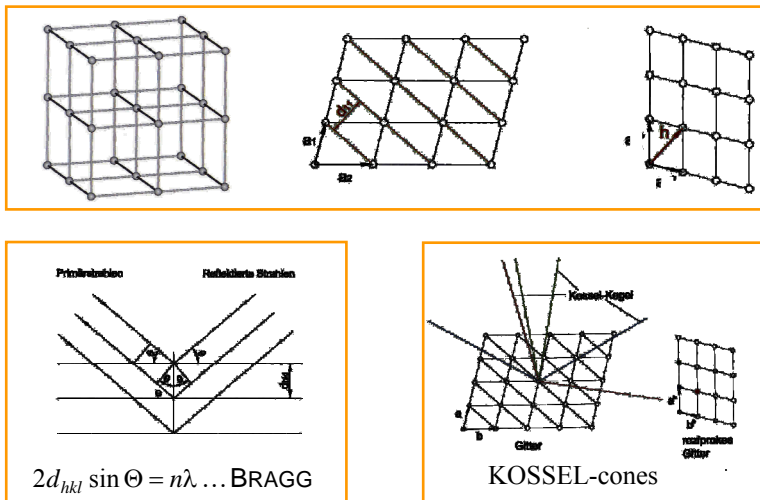


Figure 6: Stress and strain analysis of kristallinen materials (St. WEGE)

From simple elementary geometric arguments it follows that the traces are conics with the main axis passing through the principle point of the

screen. This made it finally possible to evaluate the stress tensor from the so called KOSSEL image. Even the idea is – for a classical geometer – very simple, it was unknown to material scientists.

7 Conclusion

What can be done to improve geometry education at all levels? We, the national societies for geometry and graphics should work together in making study plans for Bachelor studies for teachers, engineers, architects, geodesists, ... *with* Geometry, before engineers make these plans with *no* Geometry education at all. We teachers in Constructive Geometry should support each other at our different locations at Universities to avoid isolation.

We should do lobbying, cultivate contacts to other faculties, and we should be present in public and show, what we are doing.

One important thing is to organise conferences and workshops, where we also invite alumni with jobs in industry to give lectures. By this we could get used to each other's professional language to diminish communication difficulties.

Last but not least we should support exchange of Geometry students and teaching staff on the basis of Erasmus or DAAD stipends.

And we never should give up to show that Geometry is a basic human skill, a mighty tool for solving problems and for systemizing them, and that it is the most beautiful science mankind has developed!

Hellmuth Stachel

RECONSTRUCTION FROM TWO DIGITAL IMAGES – EPIPOLAR GEOMETRY

Abstract

A central problem in computer vision is how to recover a 3D structure from a collection of 2D images. For more than 90 years this has been a standard problem of Descriptive Geometry and Photogrammetry (Remote Sensing), too. It will be demonstrated to which extent results from Descriptive Geometry can contribute to „Epipolar Geometry“, which is the new name for the geometry of multiple images. Of course, the previous graphical methods have to be replaced by numerical methods. But with the aid of both, software for measuring digital images and any computer algebra system, it is possible to solve such reconstruction problems 'manually'.

Keywords

Epipolar Geometry, Digital Photogrammetry

REFERÁTY

CONFERENCE PAPERS

Eva Baranová, Kamil Maleček

OD STREDOVÉHO PRIEMETU KRUŽNICE KU STREDOVÝM CYKLIDÁM

Abstrakt

V prvej časti príspevku odvodzujeme podmienku, kedy je v danom stredovom premietaní priemetom kružnice opäť kružnica. Ukazujeme súvislosť so stredovou kolíneáciou a lineárnou perspektívou. V druhej časti uvádzame ako využiť výsledky prvej časti k vytvoreniu stredových cyklidá a ich klasifikácie.

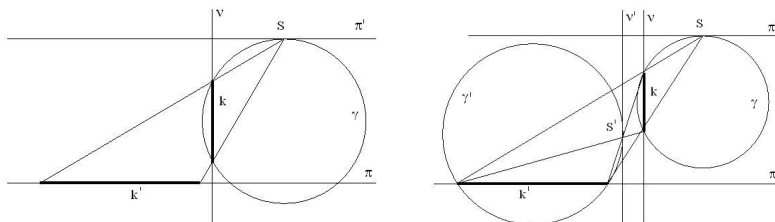
Kľúčové slová

Stredové premietanie, stereografická projekcia, kolíneácia, lineárna perspektíva, cyklida.

1 Priemet kružnice v stredovom premietaní

Majme dané v priestore dve roviny π a v , ktoré sú na seba kolmé a mimo nich bod S . V rovine v zvolíme kružnicu k a zostrojíme jej priemet v stredovom premietaní s priemetňou π a stredom S . Premietacou plochou kružnice k je kruhová kužeľová plocha s vrcholom S a jej rez rovinou π je stredový priemet kružnice k . Stredovým priemetom kružnice k môže byť vo všeobecnosti akákoľvek kužeľosečka.

Nás bude zaujímať, či je možné, aby stredovým priemetom kružnice k bola opäť kružnica a ak áno, tak pri akej voľbe kružnice k to nastane.



Obrázok 1, 2: Stredový priemet kružnice

Táto situácia je možná a vyplýva zo stereografickej projekcie. V stereografickej projekcii premietame guľovú plochu z jej bodu S do roviny, ktorá je rovnobežná s dotykovou rovinou guľovej plochy v bode

S a ako je známe, stereografickým priemetom kružnice, ktorá neprechádza bodom S , je opäť kružnica.

Voľba kružnice $k \subset v$ je znázornená na obr.1. Bodom S zostrojíme rovinu π' , ktorá je rovnobežná s rovinou π . Zostrojíme guľovú plochu γ , ktorá sa dotýka roviny π' v bode S a pretína rovinu v v kružnici k . Potom stredovým priemetom kružnice $k \subset v$ je kružnica $k' \subset \pi$. Je zrejmé, že kružnic k je nekonečne veľa a dostaneme ich ako krivky rezu roviny v a guľových plôch, ktoré sa dotýkajú roviny π' v bode S . Polomery guľových plôch musia byť väčšie ako je vzdialenosť bodu S od roviny v .

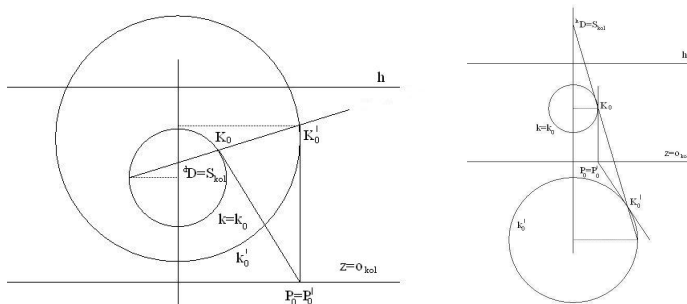
Majme kružnice $k \subset v$ a $k' \subset \pi$. Kružnica k' je stredovým priemetom kružnice k tak ako je to znázornené na obr.1. Existuje ale ešte jedno stredové premietanie, v ktorom je priemetom kružnice k kružnica k' . Na obr.2 je stredom premietania bod S' , ktorý je bodom guľovej plochy γ' . Na ploche γ' leží kružnica k' a dotyková rovina guľovej plochy γ' v bode S' je rovina $v' \parallel v$. Úloha roviny v a roviny π ako priemetne sa vymenia.

1.1 Súvislosť s priestorovou kolíneáciou

Majme dve kolmé roviny π a v a mimo nich bod S . Stredovým premietaním zo stredy S je realizované zobrazenie jednej roviny do druhej a zobrazenie sa nazýva priestorová kolíneácia. Bod S je stred a priesečnica rovín π a v je os kolíneácie. V predchádzajúcej časti sme vyriešili problém, či v danej priestorovej kolíneácii môže byť obrazom kružnice ležiacej v jednej rovine, kružnica v druhej rovine.

1.2 Súvislosť s lineárnou perspektívou

V perspektíve, keď priemetňou je rovina v , je rovina π základná a rovina π'



Obrázok 3, 4: Od lineárnej perspektívy k stredovej kolíneácii

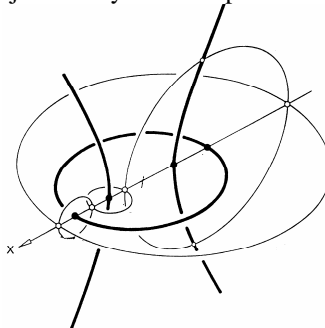
obzorová rovina, vid'. obr.1. Priesečnica z rovín ν a π je základnica a priesečnica rovín ν a π' je horizont h . Ak otočíme v rovnakom zmysle rovinu π a π' do priemetne ν , potom kružnica k' sa samozrejme otočí do zhodnej kružnice a otočením bodu S dostaneme buď dolný alebo horný dištančník. Situáciu v rovine ν po otočení sme znázornili na obr.3 a obr.4. Všimnime si, že os kolineácie je chordála kružníc k_0 a k_0' .

2 Stredové cyklidy

V roku 1822 objavil francúzsky matematik Charles Dupin neguľovú plochu, ktorej čiary krivosti boli kružnice a tvorili dve sústavy čiar na ploche. Túto plochu nazval **cyklida**. V prácach mnohých autorov [1], [2], [3] môžeme nájsť rôzne definície cyklíd. My použijeme nasledujúcu.

Definícia (Cayley): Cyklida je obálka meniacich sa guľových plôch, ktoré majú stredy v danej rovine a dotýkajú sa dvoch pevných guľových plôch.

Rovina stredov meniacich sa guľových plôch je prvá rovina symetrie a pretína pevné guľové plochy v extrémnych kružniciach cyklidy. Druhá rovina symetrie prechádza stredmi pevných guľových plôch a je kolmá k prvej rovine symetrie. Obsahuje tiež dve extrémne kružnice. Cyklida je kanálová plocha a jej charakteristické kružnice sú čiarami krivosti. Všetky normály kanálovej plochy (a teda aj cyklidy) pozdĺž jej charakteristiky prechádzajú spoločným bodom (stred guľovej plochy pre príslušnú polohu), ktorý leží na určujúcej krivke kanálovej plochy. Pre stredové cyklidy je určujúcou krivkou v prvej rovine symetrie elipsa a v druhej hyperbola obr.5.



Obrázok 5: Roviny symetrie

Pre každú charakteristiku vieme zostrojiť dotyčnicovú kužeľovú plochu príslušnej guľovej plochy, na ktorej charakteristika leží. Ortogonálne priemety pevných guľových plôch do prvej roviny symetrie sú ohraničené

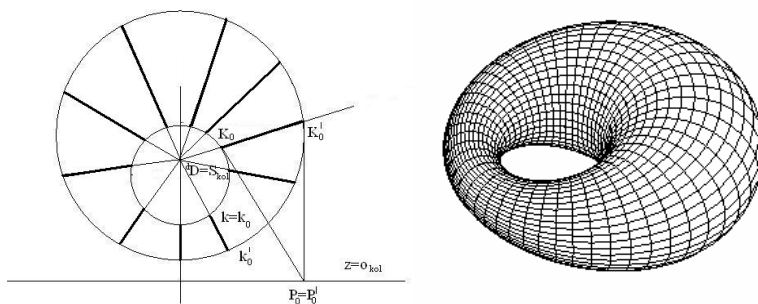
extrémnymi kružnicami a priemet dotyčnicovej kužeľovej plochy je ohraničený dotyčnicami týchto kružníc. Vrcholy dotyčnicových kužeľových plôch ležia na chordále oboch kružníc. Charakteristiky sa premietnu do úsečiek.

2.1 Konštrukcia cyklíd využitím stredovej kolineácie

Majme v rovine dve kružnice k_0 a k_0' s rôznymi stredmi a polermi. Z predchádzajúcej časti vieme, že existujú dve stredové kolineácie, v ktorých obrazom jednej kružnice je druhá. Obe kolineácie majú spoločnú os, ale stredy sú rôzne. Pretože os kolineácie je chordála oboch kružníc, vieme z jej ľubovoľného bodu P_0 zostrojiť dotyčnice k oboj kružniciam (obr.3,4). Dotykové body K_0 (vzor) a K_0' (obraz) sú odpovedajúce body v danej stredovej kolineácii. Stred kolineácie je potom priesečník priamky K_0K_0' so spojnicou stredov kružníc k_0 a k_0' . Ak bod P_0 prebehne chordálu, dostaneme množinu úsečiek, ktorých krajné body sú vzor a obraz v niektorej kolineácii. Každú úsečku považujeme za pravouhlý priemet kružnice so stredom v rovine kružníc k_0 a k_0' do tejto roviny. Tak dostaneme systém kružníc, ktoré tvoria charakteristiky cyklidy. Tieto kružnice sú meridiány plochy.

2.2 Klasifikácia stredových cyklíd

Stredové cyklidy sa delia do troch skupín: ring, horn a spindle. Toto rozdelenie vieme určiť na základe stredovej kolineácie, ktorá platí pre extrémne kružnice v rovinách symetrie. My budeme uvažovať extrémne kružnice v prvej rovine symetrie.

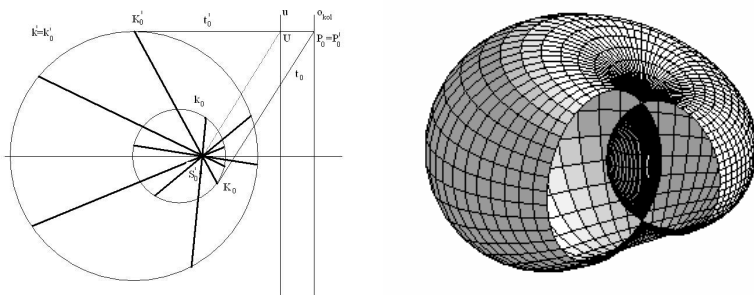


Obrázok 6: Ring cyklida

RING CYKLIDA - na obr.6 je ukážka konštrukcie ring cyklidy. Priemety meridiánov sú zvýraznené silnejšie. Pre extrémne kružnice platí, že jedna

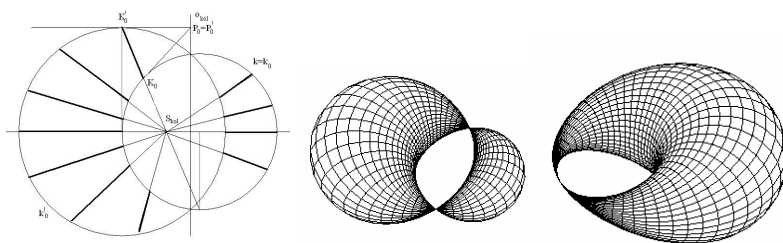
leží vo vnútri druhej. V prípade, že kružnice sú sústredné, dostaneme anuloid. Os kolineácie je nevlastná priamka a stred kolineácie je v strede sústredných kružníc.

SPINDLE CYKLIDA - základná poloha extrémnych kružníc je tá istá (obr.7). Uvažujme teraz stred druhej kolineácie, ktorá platí pre dve kružnice. Pre lepšiu názornosť je pre spindle cyklidu zostrojený výkroj plochy. Ak by sme uvažovali druhú kolineáciu pre sústredné kružnice, dostaneme špeciálny prípad anuloidu a to melonoid.



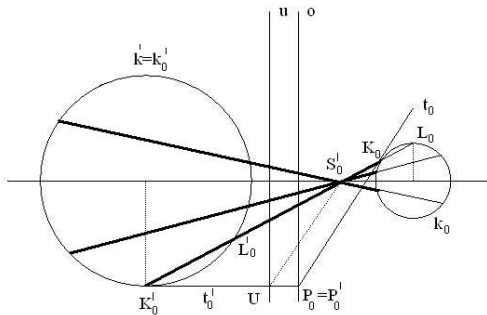
Obrázok 7: Spindle cyklida

HORN CYKLIDA - extrémne kružnice sa pretínajú, alebo dotýkajú (obr.8). V prípade, že by sme uvažovali druhý stred kolineácie, dostaneme spindle cyklidu.



Obrázok 8: Horn cyklida

Použitím stredovej kolineácie by sme vedeli určiť aj rovnobežkové kružnice cyklidy. Základná poloha extrémnych kružníc by však bola v druhej rovine symetrie. Na obr.9 je ukážka konštrukcie rovnobežkových kružníc pre spindle cyklidu.



Obrázok 9: Konštrukcia rovnobežkových kružnic

Názorné obrázky cyklíd boli vykreslené v programovom prostredí MAPLE použitím parametrických rovníc uvedených v [4].

Literatúra

- [1] V. Chandru, D. Dutta, C. M. Hoffmann: *On the geometry of Dupin cyclides*. The Visual Computer, Springer Verlag, No.5., 1989, pp.277-290
- [2] W. Boehn: *On cyclides in geometric modeling*, Computer Aided Geometric Design, No. 7, 1990, pp. 243-255
- [3] D. Dutta, R. R. Martin, M. J. Pratt: *Cyclides in Surfaces and Solid Modeling*, IEEE Computer Graphics and Applications, Vol. 13, No. 1, 1993, pp. 53-59
- [4] E. Baranová: *Cyklidy v geometrickom modelovaní*. In: Sborník příspěvků 24. ročník mezinárodní konference GCG 2004, Praděd-Jeseníky, ČR, ISBN 80-248-0581-2, 2004, pp.20-25

Michael Bartoň

PROSTOROVÉ PROBLÉMY SOUVISEJÍCÍ S POHYBEM

Abstrakt

Príspevek se zabývá hledáním prostorového pohybu se třemi přímkovými trajektoriemi. Pomocí Studyho reprezentace grupy shodnodností je problém převeden na nalezení společné křivky tří kvadrik.

Klíčová slova

prostorový pohyb, Eulerovy parametry, Studyho reprezentace, Cliffordova kvadrika.

1 Úvod

Tento příspěvek byl inspirován klasifikací prostorových pohybů v [1], kde je prezentována většina pohybů majících technické využití. Pohyby se dvěma přímkovými trajektoriemi byly již klasifikovány v [1], [2], nicméně se třemi doposud nikoliv. Problém tedy formulujeme následovně: V prostoru jsou dány tři vzájemně mimoběžné přímky. Naleznete prostorový pohyb, kde tyto přímky budou trajektoriemi tří bodů při tomto pohybu.

2 Studyho reprezentace grupy shodností

Hledání prostorového pohybu se třemi přímkovými trajektoriemi je geometrickou formulací. Matematicky můžeme problém interpretovat následovně: Naleznete jednoparametrickou podmnožinu grupy shodností, zachovávající tři body na daných přímkách.

Shodnost v E_3 je jednoznačně určena předpisem $X' = XR + T$, kde R je ortonormální matice ($RR^T = E$) asociovaného zobrazení a T je translační složka posouvající počátek soustavy souřadnic. Přechodem k homogenním souřadnicím získáme předpis shodnosti ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix} \quad (1)$$

Rozpisem do souřadnic pak získáme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_1 & r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ p_2 & r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ p_3 & r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Tento popis shodnosti však není nejhodnější. Matice (2) má dvanáct parametrů, zatímco shodnost v E_3 má pouze šest stupňů volnosti. Zřejmě podmínka ortonormality $RR^T = E$ snižuje počet na sobě nezávislých parametrů.

Shodnost vyjádříme lépe pomocí Studyho reprezentace [3]. Pomocí Eulerových parametrů x_0, x_1, x_2, x_3 pak rotační složku matice (2) můžeme psát

$$R = \begin{pmatrix} x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 & 2x_1x_2 - 2x_0x_3 & 2x_1x_3 + 2x_0x_2 \\ 2x_0x_3 + 2x_1x_2 & x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 & 2x_3x_2 - 2x_0x_1 \\ 2x_1x_3 - 2x_0x_2 & 2x_0x_1 + 2x_2x_3 & x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \end{pmatrix}$$

translační složka je pak ve tvaru

$$\begin{aligned} p_1 &= -2y_0x_1 + 2x_0y_1 - 2y_2x_3 + 2x_2y_3 \\ p_2 &= -2x_1y_3 + 2y_1x_3 - 2y_0x_2 + 2x_0y_2 \\ p_3 &= -2y_0x_3 + 2x_1y_2 + 2x_0y_3 - 2y_1x_2, \end{aligned}$$

přičemž platí identity

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \quad (3)$$

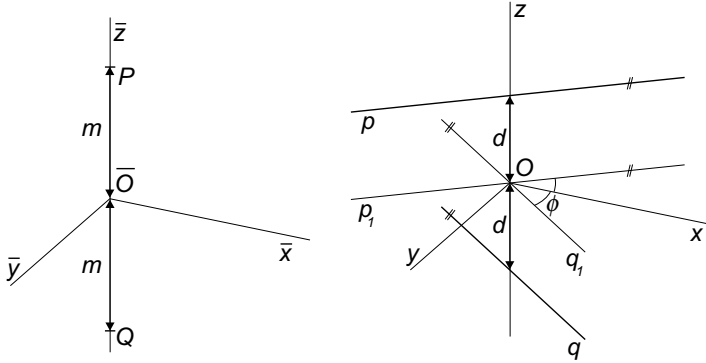
$$x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0. \quad (4)$$

Každou shodnost v E_3 lze popsat pomocí osmi parametrů $x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3$ a vzhledem k identitám (3) a (4) získáme šest stupňů volnosti.

3 Vyjádření pohybu

Předpokládejme dva Kartézské souřadné systémy – repéry, pevný $\Sigma = (O, x, y, z)$ a hybný $\Phi = (\bar{O}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Bez újmy na obecnosti

můžeme dvě přímky vhodně umístit do pevného Kartézského souřadnicového systému: Nechť osa z splývá s nejkratší příčkou těchto mimoběžek, označme $2d$ jejich vzdálenost, a nechť počátek soustavy splývá se středem této úsečky. Dále nechť jsou půdorysy těchto přímek umístěny symetricky podle osy x – viz Obr. 1.



Obrázek 1: Umístění dvou přímek

Dále můžeme rovněž předpokládat vhodné umístění obou bodů. Homogenní souřadnice bodů P and Q v hybné soustavě Φ nechť jsou

$$P = (1, 0, 0, m), \quad Q = (1, 0, 0, -m);$$

a jejich trajektorie v soustavě Σ jsou přímky p, q dané předpisy

$$p : y = -\lambda x, z = d, \quad q : y = \lambda x, z = -d,$$

kde $\lambda = \tan(\phi)$, 2ϕ je úhel mezi přímkami p a q .

Pak každá shodnost zobrazující body P a Q na přímky p a q vyhovuje podmínce

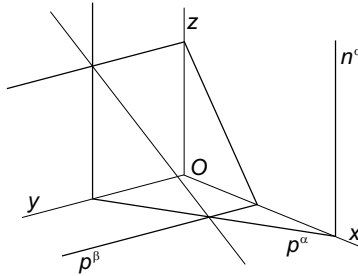
$$d(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + m(-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) = 0. \quad (5)$$

Nulová množina rovnice (5) pak tvoří kvadriku C v eliptickém prostoru Eulerových parametrů a tedy každá shodnost zobrazující body P, Q na přímky p, q může být chápána jako bod na C . Kvadrika se nazývá Cliffordova a odvození rovnice (5) je k nahlédnutí v [2].

Bez újmy na obecnosti umístíme bod R v hybné soustavě Φ tak, že jeho homogenní souřadnice jsou $R = (1, a, 0, c)$. Jeho trajektorie je přímka r v Σ , kterou vyjádříme jako průsečnici dvou rovin

$$\alpha : s_1x + q_1y - r_1 = 0, \quad \beta : s_2x + q_2z - r_2 = 0, \quad (6)$$

které jsou rovnoběžné s osami z resp. y – viz Obr. 2.



Obrázek 2: Umístění třetí přímky

Pohyb bodu R v rovině α je vyjádřen – pomocí Eulerových parametrů – předpisem:

$$s_1(2d(x_2x_3 - x_0x_1)/k + (x_1^2 - x_3^2 - x_2^2 + x_0^2)a + (2x_0x_2 + 2x_3x_1)c) + q_1(2kd(x_0x_2 + x_3x_1) + (2x_3x_0 + 2x_2x_1)a + (2x_2x_3 - 2x_0x_1)c) - r_1 = 0, \quad (7)$$

a analogicky pohyb v rovině β

$$s_2(2m(x_2x_3 - x_0x_1)/k + (x_1^2 - x_3^2 - x_2^2 + x_0^2)a + (2x_0x_2 + 2x_3x_1)c) + q_2((2x_3x_1 - 2x_0x_2)a + (-x_1^2 + x_0^2 - x_2^2 + x_3^2)c) - r_2 = 0. \quad (8)$$

Užitím identity (3) a dosazením $r_1(x_1^2 + x_3^2 + x_2^2 + x_0^2)$ za r_1 do rovnice (7) a (8), se tyto rovnice stanou homogenními a pravé strany těchto rovnic mohou být chápány jako kvadratické formy v čtyřrozměrném vektorovém prostoru W_4 . Nulové množiny těchto forem pak definují kvadriky v trojrozměrném projektivním prostoru P_3 . Proto pohyb zachovávající body P, Q, R na přímkách p, q, r (v tomto pořadí) existuje právě tehdy když mají tyto kvadriky společnou křivku.

4 Výpočet pomocí softwaru

Kvadriky Q_1, Q_2, Q_3 definované rovnicemi (5), (7) a (8) závisí na mnoha parametrech. Parametry $d, k, s_1, s_2, q_1, q_2, r_1, r_2$ ovlivňují polohu přímek, parametry a, c, m polohu bodů. Rozhodnout, zda mají kvadriky společnou křivku, je velice komplikované. Žádoucí je proto snížit co nejvíce počet parametrů. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $d = 1$ – vzdálenost přímek p a q můžeme brát až na stejnohlkost – a dále $r_1 = r_2 = 1$, neboť rovnice (6) roviny α, β jsou určeny až na násobek.

Průnik tří kvadrik Q_1, Q_2, Q_3 v P_3 je hledán posloupností příkazu *resultant* a zkouáním společných faktorů příslušných resultantů. Problémem však stále zůstává velký počet parametrů a hledání společného faktoru je proto náročné. Z tohoto důvodu je zapotřebí, aby sled příkazů *resultant* byl co nejkratší. Jednou z možností je parametrizovat jednu z kvadrik. Výpočet je proveden pomocí softwaru Maple.

4.1 Parametrizace Cliffordovy kvadriky

Dosazením za $m = d(1 + v^2)/(-1 + v^2)$ do rovnice (5) získáme

$$x_1^2 + x_1^2 v^2 - x_0^2 - x_0^2 v^2 + x_2^2 + x_2^2 v^2 - x_3^2 - x_3^2 v^2 - 1 + v^2 = 0,$$

což reprezentuje dvojrotační kvadriku v eliptickém prostoru Euleroových parametrů. Parametrizace Cliffordovy kvadriky je po použití goniometrické substituce $\tan(\frac{\varphi}{2}) = u, \tan(\frac{\psi}{2}) = t$ následující

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{v(-1+t^2)}{\sqrt{1+v^2}(1+t^2)}, & x_1 &= -\frac{-1+u^2}{\sqrt{1+v^2}(1+u^2)}, \\ x_2 &= \frac{2u}{\sqrt{1+v^2}(1+u^2)}, & x_3 &= \frac{2vt}{\sqrt{1+v^2}(1+t^2)}, \end{aligned} \quad (9)$$

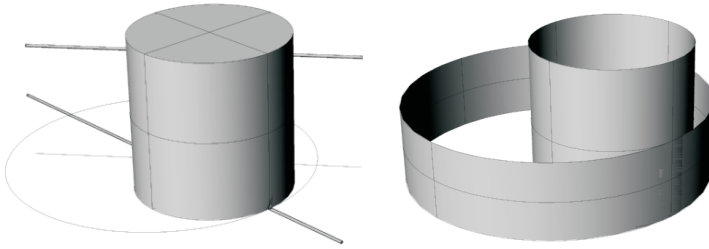
s neznámými u, t . Podrobnější odvození naleznete v [2].

Dosazením za $x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_3^2$ do rovnic (7), (8) získáme dvě rovnice s dvěma neznámými t, u a osmi parametry $a, c, m, k, s_1, s_2, q_1, q_2$.

5 Eliptický pohyb

Nalezeno bylo jediné (netriviální) řešení. Jedná se o zobecnění eliptického pohybu známého z rovinné kinematiky, trajektorie všech bodů

při tomto pohybu jsou rovinné křivky. Uvažujme dvě rotační válcové plochy s poloměry r_1 a $2r_1$ mající vnitřní dotyk podél společné povrchové přímky – viz Obr. 3. Pevná axoida je větší z válcových ploch, hybná je menší a pohyb je reprezentován valením hybné axoidy po pevné. Trajektorie všech bodů jsou proto elipsy vyjma bodů hybné axoidy, jejichž trajektorie jsou přímky.



Obrázek 3: Eliptický pohyb

6 Závěr

V příspěvku je prezentován postup hledání prostorového pohybu z daných prvků, konkrétně pak pohybu s třemi přímkovými trajektoriemi. Nalezeno bylo jediné netriviální řešení, nicméně přímkových trajektorií je v tomto případě nekonečně mnoho.

Reference

- [1] Bottema O., Roth B.: *Theoretical kinematics*, North-Holland Publishing company, Amsterdam 1979
- [2] Kargerová M.: *Properties of space motions with two straight trajectories*, Aplikace matematiky 35, Praha 1990
- [3] Karger A., Kargerová M.: *Základy robotiky a prostorové kinematiky*, Vyd. ČVUT, Praha 2000

Bohumír Bastl

CAGD PACKAGE FOR MATHEMATICA AND ITS USAGE IN THE TEACHING

Abstract

This talk presents a new package for Wolfram's Mathematica which provides functions for finding parametrizations and rendering figures of splines, Bernstein and B-spline basis functions, Bézier and B-spline curves and surfaces together with their rational variants and also functions for basic planar and spatial transformations and surface of revolution as a NURBS surface. Such a package can be used in the teaching of geometric modelling for an interesting demonstration of some properties of Bézier and B-spline objects, e.g. the convex hull property, local modification scheme or an effect of weights of control points to the shape of a rational curve or surface etc.

Keywords

CAGD, Mathematica, NURBS curves, NURBS surfaces.

1 Introduction

Mathematica software, developed by Wolfram Research, is a powerful tool for symbolic and numeric computations. Unfortunately, it provides almost no functions concerning the Computer Aided Geometric Design (CAGD). There are only functions for cubic splines and Bézier curves, but only for visualization of these curves, it is not possible to obtain parametrizations and to work with it further. It means that there are no functions for visualization and computation (obtaining parametrizations) of modern curve and surface representations, such as rational Bézier, B-spline and NURBS curves and surfaces. That's why I have decided to write a new package for Mathematica devoted to CAGD objects to be able to work with these objects and also to demonstrate some interesting properties of these objects in the teaching of geometric modelling on our faculty.

The second reason for writing such a package followed from solving the project “Realization of interactively-information portal for scientific technical applications” which Department of Mathematics on our faculty obtained from Ministry of Education, Youth and Sports in 2004. The aim of this project is to create a new web portal, at this time located on <http://webmath.zcu.cz>, based on webMathematica software, which will provide different kinds of scientific computations. The computation and visualization of CAGD objects is also integrated to this web portal and anyone can use it.

2 Description of the package

After loading the package to Mathematica kernel by standard Mathematica command `<< CAGD.m`, information about functions contained in the package are printed on the screen. The package contains functions for different objects of CAGD which can be classified into following groups: splines, Bézier and rational Bézier curves and surfaces, B-spline and NURBS curves and surfaces, transformations, surface of revolution.

Now, following paragraphs are devoted to the functions contained in the package in more detail.

In connection with classical interpolating splines, the package contains functions for quadratic and cubic splines. For quadratic spline, supporting points and the boundary condition represented by tangent vector in the first point has to be specified, e.g. the command

```
QuadraticSpline[{{0,0},{-1,5},{3,-2},{5,1},{4,7},{1,-5}},{0,1},t]
```

returns the figure of the corresponding quadratic spline (see Fig. 1 (left)) and also parametrizations of all parts of the spline.

Similar function can be used for computation and visualization of a cubic spline. All possibilities of boundary conditions for cubic spline are implemented (clamped, periodic, natural and spline with given second derivatives in the first and last points) and can be specified by optional parameter of the function, e.g. by the command

```
CubicSpline[{{0,0},{-1,5},{3,-2},{5,1},{4,7},{1,-5}},t,  
BoundaryConditions->Clamped,{{-10,-10},{-10,0}}]
```

the figure (see Fig. 1 (right)) and the parametrization of the cubic spline for given points and boundary conditions (tangent vectors in the first and last points, here) are obtained.

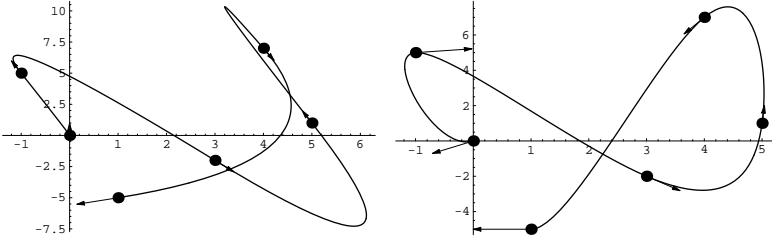


Figure 1: Quadratic and cubic splines.

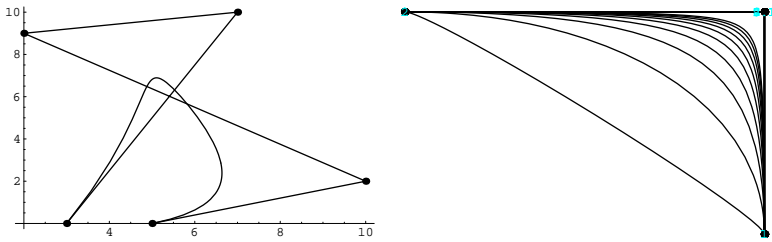


Figure 2: Bézier and rational Bézier curves.

Bézier objects belong to basic and very important CAGD objects. For given control polygon of $n + 1$ control points $P_i, i = 0, \dots, n$, or control net of $(n + 1)(m + 1)$ control points $P_{ij}, i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m$ respectively, the *Bézier curve*, or the *Bézier surface* respectively, is defined in the following way

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t), \quad P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v) \quad (1)$$

where $B_i^n(t)$ are Bernstein polynomials of n th degree. The package provides functions `Bernstein[]` for computation of Bernstein polynomials, `BezierCurve[]` and `BezierSurface[]` for obtaining parametrizations and `PlotBezierCurve[]` and `PlotBezierSurface[]` for visualization of Bézier objects (see Fig. 2 (left) and 3 (left)).

Rational Bézier objects are important for representation of curves or surfaces which cannot be parametrized by polynomial parametrizations, only by rational, e.g. arc of a circle. To each control point P_i

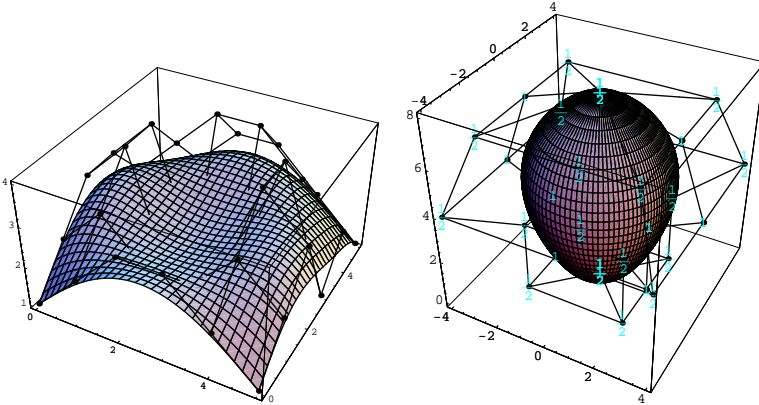


Figure 3: Bézier surface and surface of revolution.

the weight is added as an additional curve (surface) modification tool. Therefore, P_i^w are projective coordinates of control points. The projective definitions of the *rational Bézier curve* and the *rational Bézier surface* are similar to definition of polynomial Bézier objects, i.e.

$$P^w(t) = \sum_{i=0}^n P_i^w B_i^n(t), \quad P^w(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij}^w B_i^n(u) B_j^m(v). \quad (2)$$

Similarly, functions `RatBezierCurve []` and `RatBezierSurface []` for obtaining the parametrizations and `Plot... []` versions for visualization (see Fig. 2 (right)) are included in the package.

Important object in CAGD are B-spline objects which differ from Bézier objects by another basis functions called *B-spline basis functions* defined recursively on the knot vector $T = \{t_0, \dots, t_m\}$ by

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

$$N_{i,p}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1} - t}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t).$$

Using basis (3), B-spline curves and surfaces can be defined similarly as Bézier curves and surfaces in (1), only instead of Bernstein polynomials B-spline basis (3) is used. The change of basis has a lot of important consequences, e.g.

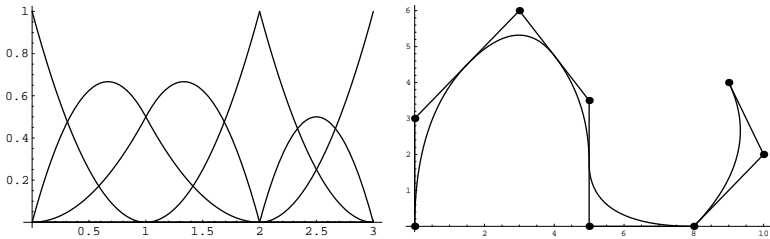


Figure 4: B-spline basis and B-spline curve.

- more possibilities while forming the curve by the help of knot vector — change of the parametrization, change of the degree and even reduction of the continuity,
- local modification scheme — change of position of one point does not affect whole curve but only some part, it can be easily seen from basis functions, e.g. for knot vector $T = \{0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3\}$ the basis functions are

$$\begin{aligned} & \left\{ (1-t)^2, (1-t)t + \frac{(2-t)t}{2}, \frac{t^2}{2}, 0, 0, 0 \right\}, \\ & \left\{ 0, \frac{(2-t)^2}{2}, (2-t)(-1+t) + \frac{(2-t)t}{2}, (-1+t)^2, 0, 0 \right\}, \\ & \left\{ 0, 0, 0, (3-t)^2, 2(3-t)(-2+t), (-2+t)^2 \right\} \end{aligned}$$

The zero basis function means that the corresponding control point has no effect on this part of the curve.

B-spline basis for the knot vector T is shown on Fig. 4 (left). It can be easily seen from the knot vector T that a corresponding curve will be of degree 2 with three parts and with the possible reduction of continuity by 1 in connection of second and third arcs of the curve. Example of a B-spline curve for knot vector $U = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$ is then shown on Fig. 4 (right). In connection with B-spline objects, the package contains functions `NBasis[]` for computation of a B-spline basis, `BSplineCurve[]` and `BSplineSurface[]` for computation of parametrizations and `Plot...[]` versions for visualization.

Generalization of B-spline objects to NURBS objects is then similar to obtaining the rational Bézier objects from Bézier objects. Weights are added to control points and corresponding projective coordinates of control points are obtained. Then the definition of NURBS curves and surfaces is similar to the definition of rational Bézier surfaces (2), only Bernstein polynomials are replaced by B-spline basis functions. It can be easily shown using the functions of

the package that both

$$\begin{aligned}
 CP_1 &= \left\{ \{1, 0, 1\}, \{1, 1, \frac{1}{2}\}, \{-1, 1, \frac{1}{2}\}, \{-1, 0, 1\}, \{-1, -1, \frac{1}{2}\}, \right. \\
 &\quad \left. \{1, -1, \frac{1}{2}\}, \{1, 0, 1\} \right\} \\
 U_1 &= \left\{ 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1 \right\}
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 CP_2 &= \left\{ \{1, 0, 1\}, \{0, 1, 0\}, \{-1, 0, 1\}, \{0, -1, 0\}, \{1, 0, 1\} \right\} \\
 U_2 &= \left\{ 0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1, 1 \right\}
 \end{aligned}$$

are NURBS representations of the unit circle centered at the origin. The package contains `NURBSCurve[]` and `NURBSSurface[]` functions for computation of parametrizations and `Plot...[]` versions for visualization.

Finally, the package also contains functions for basic planar and spatial transformations which can be used for demonstration of affine invariance of Bézier and B-spline objects and their rational variants and also the function for computation and visualization of surface of revolution — defining curve is given as a NURBS curve by a control polygon and a knot vector and the function `RevolutionSurface[]` returns the parametrization of all parts, the `Plot...[]` version returns the figure (see Fig. 3 (right)).

3 Conclusion

The paper briefly presented a new package for Mathematica software which is devoted to CAGD. Future work on the package will include implementation of Coons surfaces and probably some other objects often used in CAGD (swung, skinned, swept surfaces).

Acknowledgements

The author has been supported by the research project 1N04078 of Ministry of Education, Youth and Sports of Czech Republic.

References

- [1] L. Piegl, W. Tiller: *The NURBS Book*, Monographs in Visual Communications. Springer, Berlin, 1997

Zuzana Benáková

KŘIVKY NA PLOŠE KUŽELE

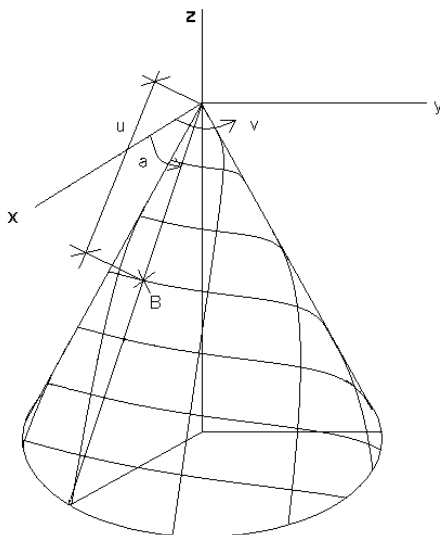
Abstrakt

Při technické realizaci zakřivených ploch se často setkáme s úlohou nahrazení plochy sítí křivek. Tyto křivky se dají nalézt několika způsoby. Jedním z nich je volba křivek v rozvinutí (týká se rozvinutelných ploch) a hledání jejich odpovídajícího tvaru po navinutí na plochu (zde byl zvolen kužel). Ke grafickému zpracování byl využit MATLAB.

Klíčová slova

Kužel, geodetiky

1 Odvození základních transformačních vztahů mezi souřadnicemi rozvinutí a souřadnicemi 3D zobrazení



Obrázek 1: kužel a jeho charakteristiky

$$x_B = u \cos v \cos \alpha$$

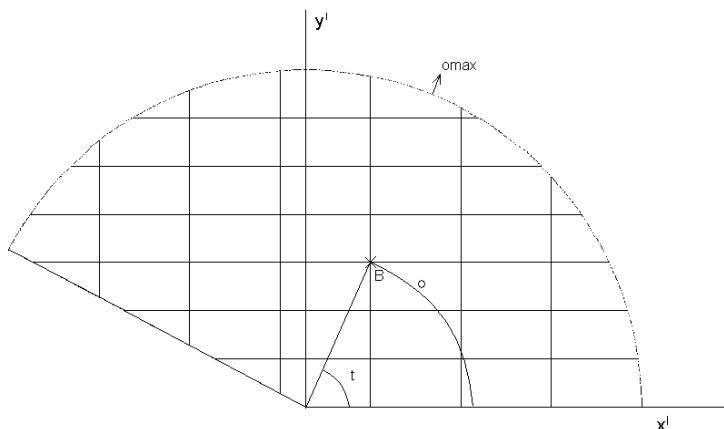
$$y_B = u \sin v \cos \alpha$$

$$z_B = u \sin \alpha$$

$\sin \alpha = \text{konstanta}$

$\cos \alpha = \text{konstanta}$

(úhel α určuje daný kužel)



Obrázek 2: rozvinutí kužele a jeho charakteristiky

$$u \cos \alpha v = u t$$

$$t = v \cos \alpha$$

$$x'_B = u \cos (v \cos \alpha)$$

$$y'_B = u \sin (v \cos \alpha)$$

Transformační vzorce:

$$v = \frac{\arctan \frac{y'}{x'}}{\cos \alpha} \quad u = \frac{x'}{\cos(\arctan \frac{y'}{x'})}$$

$$x = \frac{x'}{\cos(\arctan \frac{y'}{x'})} \cos \left(\frac{\arctan \frac{y'}{x'}}{\cos \alpha} \right) \cos \alpha$$

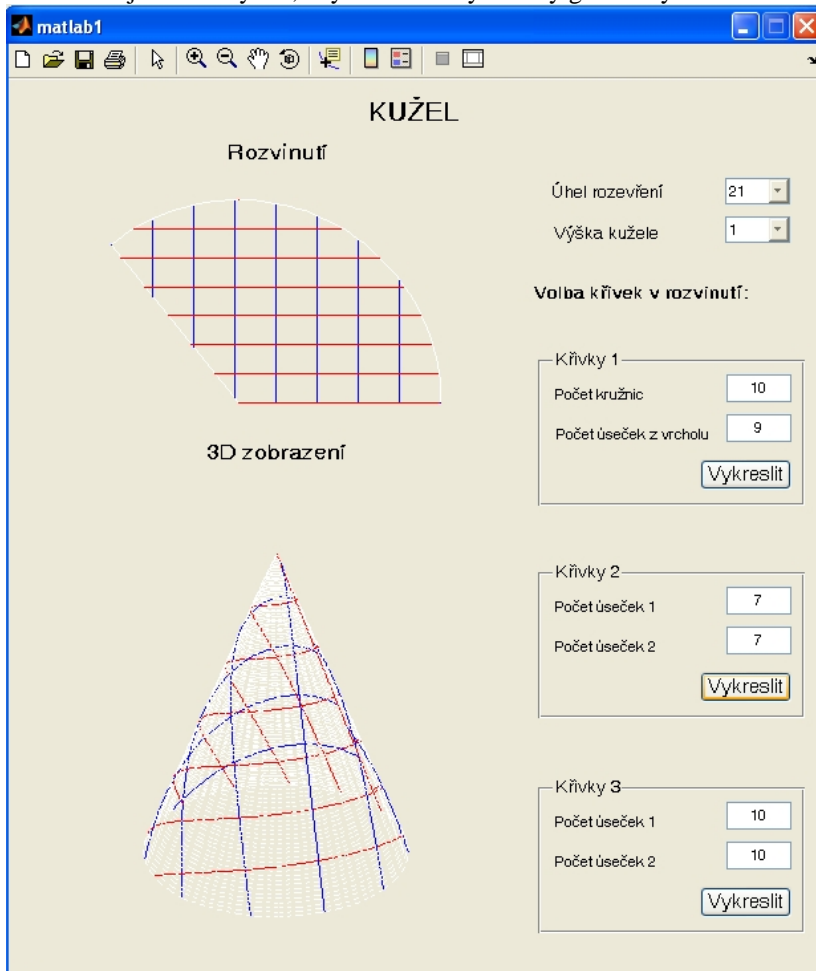
$$y = \frac{x'}{\cos(\arctan \frac{y'}{x'})} \sin \left(\frac{\arctan \frac{y'}{x'}}{\cos \alpha} \right) \cos \alpha$$

$$z = \frac{x'}{\cos(\arctan \frac{y'}{x'})} \sin \alpha$$

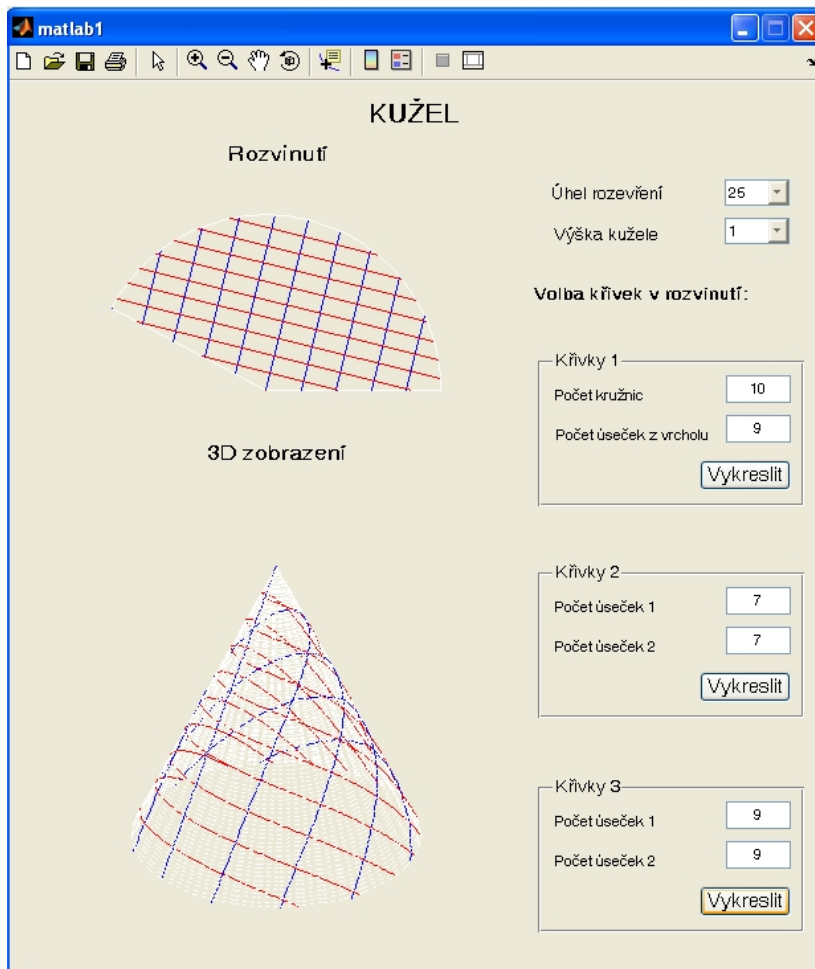
Podmínky jsou zřejmé.

2 Grafické zpracování v MATLABU

Ke grafickému zobrazení byl použit program MATLAB. Byl v něm vytvořen algoritmus, ve kterém lze zvolit tvar kužele (výška, úhel rozevření) a jeden ze tří typů rozvinutí (s možností volby počtu křivek). Následně je k danému rozvinutí vykreslen příslušný kužel. Křivky v rozvinutí jsou voleny tak, aby na kuželi vycházely geodetiky.



Obrázek 3: druhé rozvinutí – vykresleny křivky 2



Obrázek 4: třetí rozvinutí - vykresleny křivky 3

Literatura

- [1] D. Hanselman, B. Littlefield: *Mastering MATLAB 7*, Pearson Education, Upper Saddle River, NJ 07458, 2005

Michal Beneš

ANALYSIS OF SURFACES AT SMALL DEFORMATIONS

Abstract

The mathematical approach to the problem of infinitesimal deformations can be presented as a part of the global differential geometry. A necessary and sufficient condition for the existence of the second order infinitesimal bendings is determined.

Keywords

Infinitesimal deformations field, elliptic paraboloid, hyperbolic paraboloid, Hacar's surface

1 A Mathematical Definition of Infinitesimal Deformations

Let a regular surface S be given by the vector equation

$$S = \{\mathbf{R}; \mathbf{R} = \mathbf{r}(\xi_1, \xi_2), \quad (\xi_1, \xi_2) \in \Omega\}, \quad (1)$$

where Ω is an open subset of R^2 , $S : \Omega \rightarrow R^3$.

A bending of the surface S can be described as a process in where all the single points of the surface are displaced as if they were rigid bodies.

An infinitesimal deformation (bending) of the surface S is given by a vector field \mathbf{z} along \mathbf{r} defined on Ω tangent to a bending $\tilde{\mathbf{r}}$ at $t = 0$

$$\mathbf{z}(\xi_1, \xi_2) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial t}(\xi_1, \xi_2, t) |_{t=0}.$$

The surface S is included in the family of surfaces S_t ($S = S_0$), expressed by the equation

$$S_t : \quad \tilde{\mathbf{r}}(\xi_1, \xi_2, t) = \mathbf{r}(\xi_1, \xi_2) + t\mathbf{z}(\xi_1, \xi_2) \quad (2)$$

in a neighborhood of (ξ_1, ξ_2) is an immersion for sufficiently small t and

$$d\tilde{s}_t^2 = ds^2 + t^2(d\mathbf{z} \cdot d\mathbf{z}).$$

Since

$$\begin{aligned} d\tilde{s}_t^2 &= ds^2 + O(t^2), \\ d\tilde{\mathbf{r}} \cdot d\tilde{\mathbf{r}} &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} + O(t^2), \\ d\mathbf{z} \cdot d\mathbf{r} &= 0. \end{aligned}$$

The latter condition is valid if and only if the system of three partial differential equations hold

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \xi_2} = 0. \quad (3)$$

The existence of an infinitesimal deformations field \mathbf{z} is equivalent to the existence and uniqueness of a map \mathbf{y} such that

$$\mathbf{y} : \Omega \rightarrow R^3$$

and

$$d\mathbf{z} = \mathbf{y} \times d\mathbf{r}. \quad (4)$$

The rotation field for which the previous relation is valid is the vector field \mathbf{y} .

The infinitesimal deformations \mathbf{z} can be then expressed by a rotation field $\mathbf{y} : \Omega \rightarrow R^3$ and a translation field $\mathbf{s} : \Omega \rightarrow R^3$ and

$$\mathbf{z} = \mathbf{s} + \mathbf{y} \times \mathbf{r}. \quad (5)$$

Note that the last two equations together are equivalent to the relation

$$d\mathbf{s} = \mathbf{r} \times d\mathbf{y}. \quad (6)$$

If \mathbf{z} is a vector field along \mathbf{r} tangent to a bending through Euclidean motion, then \mathbf{z} is called a trivial infinitesimal deformations (bending) field. The surface is rigid if it allows only for trivial infinitesimal deformations field. The trivial deformation field has the form of

$$\mathbf{z} = \mathbf{a} \times \mathbf{r} + \mathbf{b}, \quad (7)$$

where \mathbf{a} and \mathbf{b} are constant vectors.

If the rotation vector field is constant then the respective infinitesimal bending is trivial and conversely a bending is trivial if the infinitesimal bendings are trivial at all t .

We only remark that the condition (4), respectively (5), is equivalent to the relation

$$d\mathbf{s} = \mathbf{r} \times d\mathbf{y}, \quad (8)$$

respectively

$$\mathbf{s} = \mathbf{z} + \mathbf{r} \times \mathbf{y}. \quad (9)$$

In particular, we have $d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{y} = 0$.

As (\mathbf{y}, \mathbf{s}) describes the screw displacement of each point under an infinitesimal deformation of the surface given by \mathbf{r} , (\mathbf{r}, \mathbf{z}) describes the screw displacement under an infinitesimal deformation of each point of the surface given by \mathbf{y} .

2 Analysis of the infinitesimal deformations field

The problem of finding all infinitesimal deformations of an immersion can be solved by establishing a partial differential equation. This partial differential equation is a linear homogeneous equation of second order and it is hyperbolic in the case negative Gaussian curvature and elliptic for positive Gaussian curvature. The solution of the partial differential equation, asymptotic directions giving the characteristics, might only lead to trivial infinitesimal deformations are tangent to Euclidean motions and the immersion is called infinitesimally rigid.

For \mathbf{z} as well as \mathbf{s} the following compatibility conditions must be fulfilled

$$\frac{\partial^2 \mathbf{z}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = \frac{\partial^2 \mathbf{z}}{\partial \xi_2 \partial \xi_1}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \xi_2 \partial \xi_1}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial \xi_2 \partial \xi_1}. \quad (10)$$

We have

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \xi_1} = \mathbf{z} \times \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi_1},$$

analogously for the second variable

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \xi_2} = \mathbf{z} \times \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi_2}.$$

Hence we have that the equation

$$\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial \xi_2 \partial \xi_1}$$

is fulfilled if and only if it holds

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1}.$$

The latter condition is valid if there exist functions $\alpha : \Omega \subset R^2 \rightarrow R$, $\beta : \Omega \subset R^2 \rightarrow R$, $\gamma : \Omega \subset R^2 \rightarrow R$ such that

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi_1} = \alpha \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} + \beta \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi_2} = \gamma \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} - \alpha \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2}. \quad (11)$$

Hence

$$d\mathbf{y} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi_2} d\xi_2 = \left(\alpha \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} + \beta \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \right) d\xi_1 + \left(\gamma \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} - \alpha \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \right) d\xi_2. \quad (12)$$

If

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\alpha \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} + \beta \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\gamma \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} - \alpha \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \right) \quad (13)$$

then (12) is the total differential of the vector function \mathbf{y} , by integrating we get the field $\mathbf{y}(\xi_1, \xi_2)$.

It can be proved, that if the following partial differential equations are fulfilled

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \gamma}{\partial \xi_1} = \Gamma_{11}^1 \gamma - 2\Gamma_{12}^1 \alpha - \Gamma_{22}^1 \beta, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \beta}{\partial \xi_2} = \Gamma_{11}^2 \gamma - 2\Gamma_{12}^2 \alpha - \Gamma_{22}^2 \beta, \quad (15)$$

$$\gamma b_{11} - 2\alpha b_{12} - \beta b_{22} = 0, \quad (16)$$

where b_{ij} be the coefficients of the second fundamental form and Γ_{jk}^i denotes the Christoffel's symbol of the surface, then (13) holds.

$$d\mathbf{z} = \left(\mathbf{y} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \right) d\xi_1 + \left(\mathbf{y} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \right) d\xi_2 \quad (17)$$

is the total differential, we get the field $\mathbf{z}(\xi_1, \xi_2)$ by integration.

3 Infinitesimal deformations of elliptic paraboloid

We consider the vector equation of hyperbolic paraboloid

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, \xi_2, -\xi_1^2 - \xi_2^2 + 1) \quad (18)$$

ANALYSIS OF SURFACES AT SMALL DEFORMATIONS

For this surface we have:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \frac{4\xi_1}{1 + 4\xi_1^2 + 4\xi_2^2}, \quad \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = \frac{4\xi_2}{1 + 4\xi_1^2 + 4\xi_2^2},$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0,$$

$$b_{11} = b_{22} = \frac{-2}{\sqrt{1 + 4\xi_1^2 + 4\xi_2^2}}, \quad b_{12} = 0.$$

From (14), (15) and (16) we have $\beta = \gamma$ and

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \gamma}{\partial \xi_1} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \beta}{\partial \xi_2} = 0. \quad (20)$$

For \mathbf{y}_{ξ_1} , respectively \mathbf{y}_{ξ_2} we get

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi_1} = \alpha \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} + \beta \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} = (\alpha, \beta, -2\alpha\xi_1 - 2\beta\xi_2),$$

respectively

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi_2} = \gamma \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} - \alpha \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} = (\gamma, -\alpha, -2\gamma\xi_1 + 2\alpha\xi_2).$$

Hence it follows

$$d\mathbf{y} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi_2} d\xi_2 = (\alpha, \beta, -2\alpha\xi_1 - 2\beta\xi_2) d\xi_1 + (\gamma, -\alpha, -2\gamma\xi_1 + 2\alpha\xi_2) d\xi_2.$$

By integrating, we get the rotation field of hyperbolic paraboloid in the form

$$\mathbf{y}(\xi_1, \xi_2) = (y_1(\xi_1, \xi_2), y_2(\xi_1, \xi_2), y_3(\xi_1, \xi_2)).$$

Now we determine the infinitesimal deformations field of elliptic paraboloid. It appears, that

$$\begin{aligned} d\mathbf{z} = \mathbf{y} \times d\mathbf{r} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ y_1(\xi_1, \xi_2) & y_2(\xi_1, \xi_2) & y_3(\xi_1, \xi_2) \\ d\xi_1 & d\xi_2 & -2\xi_1 d\xi_1 - 2\xi_2 d\xi_2 \end{vmatrix} = \\ &= (-2y_2(\xi_1, \xi_2)\xi_1, y_3(\xi_1, \xi_2) + 2y_1(\xi_1, \xi_2)\xi_1, -y_2(\xi_1, \xi_2)) d\xi_1 + \\ &\quad + (-2y_2(\xi_1, \xi_2)\xi_2 - y_3(\xi_1, \xi_2), 2y_1(\xi_1, \xi_2)\xi_2, y_1(\xi_1, \xi_2)) d\xi_2. \end{aligned}$$

By integrating, we get the infinitesimal deformations field of elliptic paraboloid

$$\mathbf{z}(\xi_1, \xi_2) = (z_1(\xi_1, \xi_2), z_2(\xi_1, \xi_2), z_3(\xi_1, \xi_2)).$$

4 Infinitesimal deformations of hyperbolic paraboloid

We consider the vector equation of hyperbolic paraboloid

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, \xi_2, \xi_1 \cdot \xi_2). \quad (21)$$

For this surface we have:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{\xi_2}{1 + \xi_1^2 + \xi_2^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{\xi_1}{1 + \xi_1^2 + \xi_2^2}, \quad (22)$$

$$b_{11} = b_{22} = 0, \quad b_{12} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2 + \xi_2^2}}. \quad (23)$$

From (14), (15) and (16) we have

$$\alpha = 0, \quad \beta = \phi(\xi_1), \quad \gamma = \psi(\xi_2), \quad (24)$$

where $\phi(\xi_1)$, $\psi(\xi_2)$ are arbitrary functions.

For \mathbf{y}_{ξ_1} , respectively \mathbf{y}_{ξ_2} we get

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi_1} = \alpha \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} + \beta \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} = \phi(\xi_1)(0, 1, \xi_1) = (0, \phi(\xi_1), \xi_1 \phi(\xi_1)),$$

respectively

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi_2} = \gamma \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} - \alpha \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} = \psi(\xi_2)(1, 0, \xi_2) = (\psi(\xi_2), 0, \xi_2 \psi(\xi_2)).$$

Hence it follows

$$d\mathbf{y} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi_2} d\xi_2 = (0, \phi(\xi_1), \xi_1 \phi(\xi_1)) d\xi_1 + (\psi(\xi_2), 0, \xi_2 \psi(\xi_2)) d\xi_2.$$

By integrating, we get the rotation field of hyperbolic paraboloid in the form

$\mathbf{y}(\xi_1, \xi_2) = (y_1(\xi_1, \xi_2), y_2(\xi_1, \xi_2), y_3(\xi_1, \xi_2))$. Now we can determine the infinitesimal deformation field of hyperbolic paraboloid. It appears, that

$$\begin{aligned} d\mathbf{z} = \mathbf{y} \times d\mathbf{r} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ y_1(\xi_1, \xi_2) & y_2(\xi_1, \xi_2) & y_3(\xi_1, \xi_2) \\ d\xi_1 & d\xi_2 & \xi_2 d\xi_1 + \xi_1 d\xi_2 \end{vmatrix} = \\ &= (y_2(\xi_1, \xi_2)\xi_2, y_3(\xi_1, \xi_2) - y_1(\xi_1, \xi_2)\xi_2, -y_2(\xi_1, \xi_2)) d\xi_1 + \\ &\quad + (y_2(\xi_1, \xi_2)\xi_1 - y_3(\xi_1, \xi_2), -y_1(\xi_1, \xi_2)\xi_1, y_1(\xi_1, \xi_2)) d\xi_2. \end{aligned}$$

By integrating, we get $\mathbf{z}(\xi_1, \xi_2) = (z_1(\xi_1, \xi_2), z_2(\xi_1, \xi_2), z_3(\xi_1, \xi_2))$.

5 Infinitesimal deformations of Hacar's surface

In the last case, let us consider the vector equation of Hacar's surface in the form

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, \xi_2, (1 - \xi_1^2)(1 + \xi_2^2)). \quad (25)$$

For this surface we have:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{4\xi_1(1 + \xi_2^2)^2}{1 + 4(1 + \xi_1^2\xi_2^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{-4\xi_2(1 + \xi_2^2)(1 - \xi_1^2)}{1 + 4(1 + \xi_1^2\xi_2^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2)}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{-4\xi_1(1 - \xi_1^2)(1 + \xi_2^2)}{1 + 4(1 + \xi_1^2\xi_2^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{4\xi_2(1 - \xi_1^2)^2}{1 + 4(1 + \xi_1^2\xi_2^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2)}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{8\xi_1^2\xi_2(1 + \xi_2^2)}{1 + 4(1 + \xi_1^2\xi_2^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{-8\xi_1\xi_2^2(1 - \xi_1^2)}{1 + 4(1 + \xi_1^2\xi_2^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2)}, \\ b_{11} &= \frac{-2(1 + \xi_2^2)}{\sqrt{1 + 4(1 + \xi_1^2\xi_2^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2)}}, & b_{12} &= \frac{-4\xi_1\xi_2}{\sqrt{1 + 4(1 + \xi_1^2\xi_2^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2)}}, \\ b_{22} &= \frac{2(1 - \xi_1^2)}{\sqrt{1 + 4(1 + \xi_1^2\xi_2^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2)}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Substituting to (14), (15) and (16) we get the following system of partial differential equation

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \gamma}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \beta}{\partial \xi_2} = 0, \quad (28)$$

$$-2\gamma(1 + \xi_2^2) - 8\alpha\xi_1\xi_2 - 2\beta(1 - \xi_1^2) = 0. \quad (29)$$

The general solution of (28) we can write in the form

$$\alpha(\xi_1, \xi_2) = \int \left(\int \phi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 \right) d\xi_2 - \int \psi(\xi_1) d\xi_1 + \int \Theta_1(\xi_2) d\xi_2, \quad (30)$$

$$\beta(\xi_1, \xi_2) = \int \left(\int -\phi(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 \right) d\xi_2 + \xi_2\psi_1(\xi_1) + \psi_2(\xi_2), \quad (31)$$

$$\gamma(\xi_1, \xi_2) = \int \left(\int \phi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 \right) d\xi_1 + \xi_1\Theta_1(\xi_2) + \Theta_2(\xi_2), \quad (32)$$

where $\phi, \psi_1, \psi_2, \Theta_1, \Theta_2$ are arbitrary functions, for which is (29) satisfied.

For \mathbf{y}_{ξ_1} , respectively \mathbf{y}_{ξ_2} we get

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi_1} = \alpha \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} + \beta \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2}, \text{ resp. } \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi_2} = \gamma \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} - \alpha \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2}.$$

Hence

$$d\mathbf{y} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi_2} d\xi_2.$$

By integrating, we get the rotation field in the form

$\mathbf{y}(\xi_1, \xi_2) = (y_1(\xi_1, \xi_2), y_2(\xi_1, \xi_2), y_3(\xi_1, \xi_2))$. As in the latter cases we can determine the infinitesimal deformations field $\mathbf{z}(\xi_1, \xi_2) = (z_1(\xi_1, \xi_2), z_2(\xi_1, \xi_2), z_3(\xi_1, \xi_2))$.

References

- [1] S. Hannappel: *Discrete Jonas Surfaces*, PhD. thesis, Institut für mathematik, TU Berlin, d83, 2001.
- [2] L. Velimirović, G. Radivojević, D. Kostić: *Analysis of hyperbolic paraboloids at small deformation*, Facta Universitatis, Architecture and Civil Engineering, Vol. 1, N^o 5, 1998 pp. 627-636.
- [3] Z. Soyucok: *Infinitesimal deformations of surfaces and the stressdistribution on some membranes under constant inner pressure*, Int. J. Engng Sci. Vol. 34, No. 9, pp. 993-1004, 1996.
- [4] L. Velimirović: *Analysis of bending of surfaces using program package MATHEMATICA*, Facta Universitatis, Architecture and Civil Engineering, Vol. 2, N^o 1, 1999 pp. 15-21.

Milan Bořík, Vojtěch Honzík

OPEN SOURCE GIS – FUNKCE V PROSTŘEDÍ POSTGIS, TVORBA VLASTNÍCH FUNKCÍ A GRAFICKÝCH VÝSTUPŮ

Abstrakt

Open source GIS (geografický informační systém) znamená volně dostupný a šiřitelný software rovněž s přístupným zdrojovým kódem. Konkrétně náš příspěvek je zaměřen na objektový databázový systém PostGIS, jež umožňuje prostorové funkce nad databázemi. V tomto prostředí můžeme také naprogramovat své vlastní funkce (např. nejbližší soused) pomocí jazyka pl/pgSQL [4]. Na závěr jsou uvedeny grafické výstupy.

Klíčová slova

Geografický informační systém, open source, databázový systém, relační a objektový model dat, PostGIS, souřadnicové systémy u nás

1 Open source software

Open source software nevyvíjí žádná společnost, ale naopak se programátoři kontaktují prostřednictvím internetu a vyměňují si navzájem názory. Někteří napíší program a uloží ho na místo, odkud si ho může kdokoliv stáhnout. Jiní programátoři se připojí a provedou změny. Jakmile je program dostatečně funkční, ohlásí programátoři dostupnost programu ostatním uživatelům internetu. Ti najdou chyby a chybějící funkce a ohlásí je zpět programátorům, kteří obratem program vylepší.

Nesporné výhody u open source programů jsou např. v tom, že není vyžadována struktura programátorů jako v komerční firmě, tudíž ani žádné režijní výdaje ani ekonomická omezení. Dále je usnadněna odezva uživatelů a je umožněno testování programu velkým počtem uživatelů v krátkém časovém období. A v neposlední řadě je možné rychle distribuovat uživatelům vylepšení programu.

2 Databázový systém (SŘBD)

Databázový systém obsahuje data a nástroje, pomocí nichž data vytváříme, aktualizujeme, vyhledáváme a rušíme. Pro správný chod databázového

systemu je nutné zachovat fyzickou nezávislost dat (oddělit způsob uložení dat od nástrojů práce s nimi) a vyřešit problém s nekonzistencí dat, tj. dostatečně data aktualizovat a dodržet jejich referenční integritu.

Od 80. let minulého století se používají hlavně relační databáze. V současné době se vyskytují nově i objektové modely dat jako např. PostGIS [6] (viz další kapitola), ale ty vycházejí vlastně z relačního modelu dat. Jediným prostředkem pro práci s relačními databázovými systémy je jazyk SQL (structured query language), pomocí něhož získáváme, editujeme, ukládáme a rušíme požadovaná data. Základní součástí relačního modelu dat jsou tabulky. Relace [3] – libovolná podmnožina kartézského součinu – může být trvalá (tabulka), odvozená (pohled na trvalou relaci) anebo dočasná (v paměti pouze při spojování tabulek).

V geografických informačních systémech je nutné vytvoření tzv. prostorové tabulky. Jinými slovy tabulky s daty, která jsou vztažena k předem definovanému souřadnicovému systému a mezi nimiž jsou vytvořeny tzv. topologické vztahy. V opačném případě by se jednalo pouze o obyčejný informační systém. Tuto prostorovou tabulku můžeme nejjednodušeji vytvořit v prostředí PostGIS přidáním sloupce s „geometrií“ pomocí funkce `AddGeometryColumn` do každé obyčejné „neprostorové“ tabulky.

3 PostGIS

Volně šiřitelný objektový databázový systém PostGIS je nadstavbou nad relačním SŘBD PostgreSQL [4]. Pokud chceme na svém počítači PostGIS nainstalovat, musíme mít nainstalovánu v lepším případě i nejnovější verzi PostgreSQL. Řada uživatelů PostgreSQL je již zvyklá na relační datový model, tudíž i objektový SŘBD PostGIS vychází z principu ovládní pomocí tabulek. Narozdíl od jazyka SQL, jež je tzv. neprocedurální, PostGIS je ovládán již procedurálním jazykem pl/pgSQL, který nám umožňuje naprogramovat si vlastní funkce. O tom pojednává podkapitola 3.3.

Norma OpenGIS „Simple Feature Specification for SQL“ [5] definuje standardní typy GIS objektů, funkce pro manipulaci s objekty a tabulky s „metadaty“. Druhy geometrických objektů jsou: point a multipoint, line a multiline, polygon a multipolygon a geometry collection.

3.1 Metadata

Tabulky s metadaty souvisí s již zmíněnými prostorovými tabulkami a s 3D objekty. Jedná se o tabulku nazvanou `GEOMETRY_COLUMNS`, v níž je uložena geometrie, dimenze a souřadnicový systém. A druhá tabulka se

jmenuje `SPATIAL_REF_SYS`, jež obsahuje definované souřadnicové systémy, jednotlivá kartografická zobrazení a informace pro manipulace se souřadnicovými systémy [1], [2]. Pomocí připojených metadat můžeme zobrazovat data z více souřadnicových systémů najednou. Kartografická zobrazení a transformace jsou řešena pomocí knihovny PROJ [8] přechodem přes referenční plochu, za kterou byl zvolen elipsoid WGS-84.

3.2 Transformace a kartografická zobrazení

V tabulce `SPATIAL_REF_SYS` jsme museli definovat souřadnicové systémy S-42 a S-JTSK [2] na základě jejich kartografických zobrazení ve formátu užitým v knihovně PROJ [8] a dále zadat sedm prvků Helmertovy transformace mezi Besselovým a Krassovského elipsoidem a elipsoidem WGS-84, jež pro území České republiky stanovila kampaň DOPNUL [1]. Pomocí následujícího databázového dotazu jsme ověřili přesnost jednotlivých transformací a kartografických zobrazení konkrétně pro systém S-42:

```
select
  transform(wgs84.the_geom,200002) as transformovane,
  s42.the_geom as puvodni,
  distance(transform(wgs84.the_geom,200002),s42.the_geom)
from wgs84, s42
where s42.id_bodu = wgs84.id_bodu;
```

a systém S-JTSK:

```
select
  transform(wgs84.the_geom,200001) as transformovane,
  sjtsk.the_geom as puvodni,
  distance(transform(wgs84.the_geom,200001),sjtsk.the_geom)
from sjtsk, wgs84
where wgs84.id_bodu = sjtsk.id_bodu;
```

Výsledkem obou dotazů jsou poměrně velké tabulky (z důvodu nedostatku místa je zde neuvádíme), z nichž je patrná dostatečná přesnost pro účely GIS. V našem případě se souřadnice bodů kampaně DOPNUL v obou souř. systémech liší o deset centimetrů.

3.3 3D funkce, tvorba vlastních funkcí

V databázovém systému PostGIS nad PostgreSQL je k dispozici velké množství funkcí pro manipulaci s objekty: `Distance`, `Intersects`, `Contains`, `Within`, `Transform` a řada dalších. V současné době tento databázový systém podporuje i 4D souřadnice.

Dále ukážeme možnost si naprogramovat v jazyce pl/pgSQL vlastní funkce. Volání funkce může přijímat buď „žádný“, jeden nebo více argumentů, ale vrací vždy pouze jednu hodnotu. Typickým příkladem může být funkce `nejblizsi_soused`, jež určí nejbližší letiště pro jeden zadaný ID (identifikátor) letiště:

```
CREATE OR REPLACE FUNCTION "public"."nejblizsi_soused"
(bigint) RETURNS bigint AS'
DECLARE
    id_letiste alias for $1;
    vysledek record;
    id_souseda bigint;
BEGIN
    SELECT into vysledek b.letiste_id as aaa FROM letiste as
a, letiste as b
    WHERE
        a.letiste_id = id_letiste and
        a.letiste_id <> b.letiste_id
    order by distance(a.the_geom,b.the_geom) asc
    limit 1;
    id_souseda=vysledek.aaa;
    return id_souseda;
END;
'LANGUAGE 'plpgsql' VOLATILE CALLED ON NULL INPUT SECURITY
INVOKER;
```

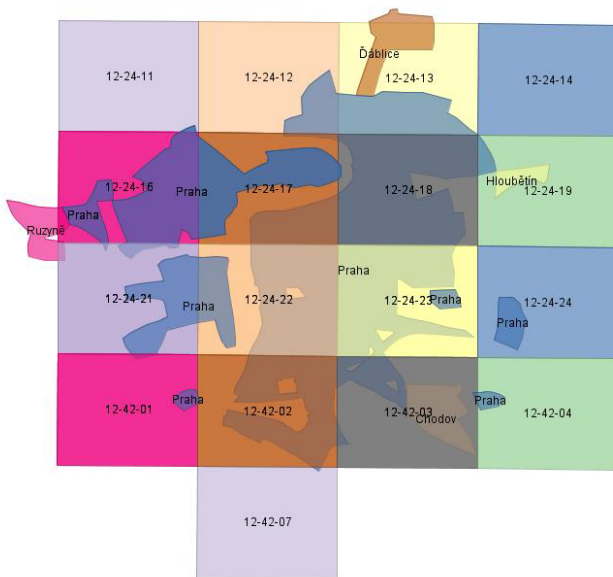
4 Grafické výstupy na závěr

Data uložená v systému PostGIS lze následně využít v celé řadě software (Jump, UMN Mapserver [7], aj.). Na obrázcích 1 až 3 předvádíme ukázkou grafických výstupů ve volně šiřitelném software JUMP. Konkrétně obrázek 1 ukazuje příklad využití topologických vazeb mezi jednotlivými objekty – v daném případě se jedná o okresy a funkci `Touches`. Obrázek 2 představuje spojení dvou různých „geometrií“, a to multipolygonů kladu mapových listů ZM 10 a multipolygonů sídel v ČR a jejich vzájemnému průsečíku pomocí funkce `Intersects`. Na obrázku 3 je znázorněno spojení multipolygonů OBCE s multiliniemi SILNICE díky funkci `Contains`. Je vidět, že PostGIS umí pracovat navzájem s různými typy objektů.

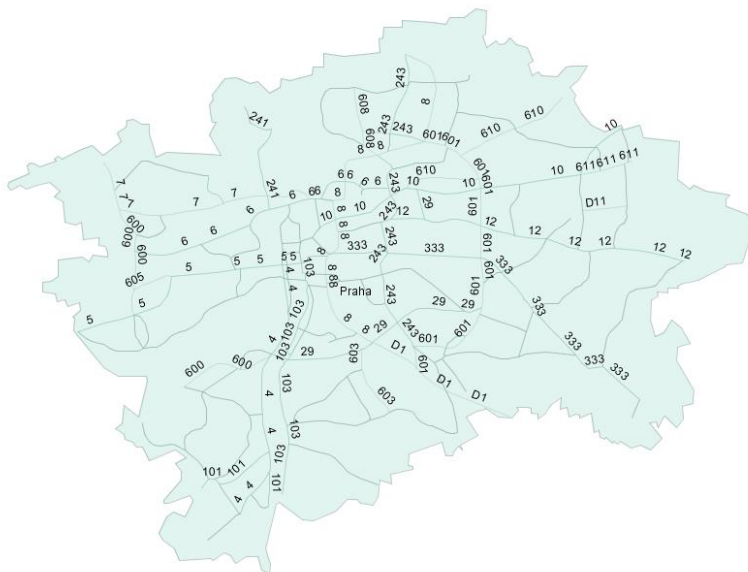
Další mapové výstupy (kartogramy) předvedené na konferenci se týkaly např. znázornění letišť od daného sídla (velikost symbolu a popisu byla úměrná vzdálenosti od sídla), vybraných „top“ obcí dle rozlohy a počtu obyvatel, polygonů, které obsahují „díry“ a dále různých kladů topografických a základních map pro daný bod, linii či polygon.



Obrázek 1: Okresy sousedící s okresem Most



Obrázek 2: Klad listů Základní mapy 1:10 000 pro Prahu



Obrázek 3: Silnice uvnitř Prahy

Poděkování

Tento příspěvek byl řešen v rámci projektu u Grantové agentury České republiky registrovaném pod číslem 205/03/D155 s názvem Nástroj pro zobrazování prostorových dat v prostředí internetu/intranetu.

Literatura

- [1] Z. Hrdina: *Transformace souřadnic ze systému WGS-84 do systému S-JTSK*, ČVUT v Praze, 1997.
- [2] Kolektiv autorů: *Geodetické referenční systémy v České republice*, VÚGTK a VZÚ Praha, 1998.
- [3] M. Šimůnek: *SQL kompletní kapesní průvodce*, GRADA Publishing, 1999.
- [4] B. Momjian: *PostgreSQL. Praktický průvodce*, Computer Press Brno, 2003.
- [5] *Open GIS Consortium Inc.* <http://www.opengis.org>
- [6] *PostGIS* <http://postgis.refraction.net>
- [7] *UMN MapServer* <http://mapserver.gis.umn.edu>
- [8] *Popis úpravy systému PROJ* <http://mpa.itc.it/radim/jtsk/>

Jaromír Dobrý

GENERALIZATION OF LAGUERRE GEOMETRY

Abstract

The article deals with the problem of building fundamentals of Laguerre geometry using Minkowski sum. The space of Laguerre's oriented spheres is shown as a result of an effort to get space that forms a group with Minkowski sum. If we start with a set of closed balls in inner product space, we get a space with behaviour identical to classical oriented sphere space. This way we show that Laguerre sphere geometry is a particular example of more general kind of geometry based on operation of Minkowski sum.

Keywords

Laguerre geometry, oriented sphere, oriented contact, closed ball, Minkowski sum, Klein geometry, transformation, group, linear space

1 Building the space

Definition 1 Consider a linear space \mathbf{V} over the field \mathbb{R} , $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathbf{V}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$. The set $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \{x + y : x \in \mathbf{A}, y \in \mathbf{B}\}$ we call Minkowski sum of \mathbf{A} and \mathbf{B} , $\lambda \cdot \mathbf{A} = \{\lambda x : x \in \mathbf{A}\}$ we call λ -multiple of \mathbf{A} .

Example 1 Let \mathbf{X} be an inner product space over the field \mathbb{R} , denote by \mathfrak{B} the set of all closed balls in \mathbf{X} . Then $(\mathfrak{B}, +)$ is a monoid with the cancellation property, i.e. $+$ is closed on \mathfrak{B} , commutative, associative, $(\mathfrak{B}, +)$ has the identity element $\{o\}$ and the cancellation property. For non-negative real numbers both $+$, \cdot distribution laws hold, $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$ for any $\mathbf{A} \in \mathfrak{B}$, but inverse elements to $+$ don't generally exist. The non-existence of inverse elements is the only reason why $(\mathfrak{B}, +, \cdot)$ is not a linear space.

□

Example 2 Let's consider the set of all non-negative real numbers \mathbb{R}_0^+ and operations $+, \cdot$ upon it. Then $(\mathbb{R}_0^+, +)$ is a monoid with the cancellation property. Both $+, \cdot$ distribution laws hold, $1 \cdot x = x$ for any $x \in \mathbb{R}_0^+$ and inverse elements don't generally exist. The non-existence of inverse elements to $+$ is the only reason why $(\mathbb{R}_0^+, +, \cdot)$ is not a linear space similarly to set of closed balls in inner product space.

□

These two examples have introduced structures that have very similar properties and the same problem of non-existence of inverse elements to $+$. For real numbers the solution is well-known. Let's follow this well-known construction of negative numbers as equivalence classes upon the set of pairs and define some kind of negative sets.

Definition 2 Let $\mathcal{P}(\mathbf{V})$ denotes the set of all subsets of the linear space \mathbf{V} . Denote by \mathfrak{M} any subset of $\mathcal{P}(\mathbf{V})$ for which following conditions are satisfied:

- (M1) $\exists \mathbf{A} \in \mathfrak{M}, \mathbf{A} \neq \emptyset$
- (M2) $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{M} : \mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathfrak{M}$
- (M3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}_0^+, \mathbf{A} \in \mathfrak{M} : \lambda \mathbf{A} \in \mathfrak{M}$
- (M4) $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathfrak{M} : \mathbf{A} + \mathbf{C} = \mathbf{B} + \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B}$
- (M5) $\forall \lambda, \alpha \in \mathbb{R}_0^+, \mathbf{A} \in \mathfrak{M} : (\lambda + \alpha)\mathbf{A} = \lambda \mathbf{A} + \alpha \mathbf{A}$
- (M6) $\forall \mathbf{A} \in \mathfrak{M}, x \in \mathbf{V} : \mathbf{A} + x \in \mathfrak{M}$
- (M7) $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{M} : \exists \mathbf{C} \in \mathfrak{M}, o \in \mathbf{C} : \mathbf{A} \subset \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{C} = \mathbf{B}$

Remark 1 An example of the set \mathfrak{M} may be the set \mathfrak{B} of all closed balls. In general, $(\mathfrak{M}, +)$ is a monoid with the cancellation property, For non-negative real numbers both $+, \cdot$ distribution laws hold, for all $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}$: $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$ and as in previous examples inverse elements don't generally exist. The non-existence of inverse elements is the only reason why $(\mathfrak{M}, +, \cdot)$ is not a linear space.

Definition 3 Let the set \mathfrak{M} satisfies (M1)-(M7). We define the binary relation \sim upon the set \mathfrak{M}^2 :

$$[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] \sim [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2] \Leftrightarrow \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_2 = \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_1$$

Lemma 1 *Relation \sim is equivalence.*

Proof: The proof is straightforward. The cancellation property of $+$ is necessary to prove transitivity. ■

Definition 4 *Let $\mathcal{V}(\mathfrak{M})$ denotes the set of all equivalence classes of the relation \sim . We define*

$$[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] + [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2] = [\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1, \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2],$$

$$\lambda \cdot [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] = \begin{cases} [\lambda \cdot \mathbf{A}_1, \lambda \cdot \mathbf{A}_2] & \text{for } \lambda \geq 0, \\ [(-\lambda) \cdot \mathbf{A}_2, (-\lambda) \cdot \mathbf{A}_1] & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Remark 2 It is necessary to prove that the previous definition is correct. The proof is straightforward and the cancellation property of $(\mathfrak{M}, +)$ and both distribution laws are essential.

Theorem 1 *$(\mathcal{V}(\mathfrak{M}), +, \cdot)$ is a linear space over \mathbb{R} .*

Proof: Straightforward. ■

2 Structure of the space

Theorem 2 *Consider a mapping $\varphi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{V}(\mathfrak{M})$, $\varphi(\mathbf{A}) = [\mathbf{A}, \{o\}]$. Then φ is injective homomorphism of $(\mathfrak{M}, +, \cdot)$ into $(\mathcal{V}(\mathfrak{M}), +, \cdot)$.*

Definition 5 *The homomorphism φ defined above will be called natural homomorphism of $(\mathfrak{M}, +, \cdot)$ into $(\mathcal{V}(\mathfrak{M}), +, \cdot)$.*

The existence of the natural homomorphism φ allows us to identify elements of \mathfrak{M} with corresponding elements of $\mathcal{V}(\mathfrak{M})$. These elements will be called *non-negative (or positive) sets*, the other elements will be called *negative sets*.

Theorem 3 *Consider a mapping $\vartheta: \mathbf{V} \rightarrow \mathcal{V}(\mathfrak{M})$, $\vartheta(x) = [\{x\}, \{o\}]$. Then ϑ is injective homomorphism of $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ into $(\mathcal{V}(\mathfrak{M}), +, \cdot)$.*

Definition 6 *The homomorphism ϑ defined above will be called natural homomorphism of $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ into $(\mathcal{V}(\mathfrak{M}), +, \cdot)$.*

The existence of the natural homomorphism ϑ allows us to identify elements of \mathbf{V} with corresponding elements of $\mathcal{V}(\mathfrak{M})$. Images in ϑ of points in \mathbf{V} will be called *points in $\mathcal{V}(\mathfrak{M})$* . For the structure of the space $\mathcal{V}(\mathfrak{M})$ see fig. 1.

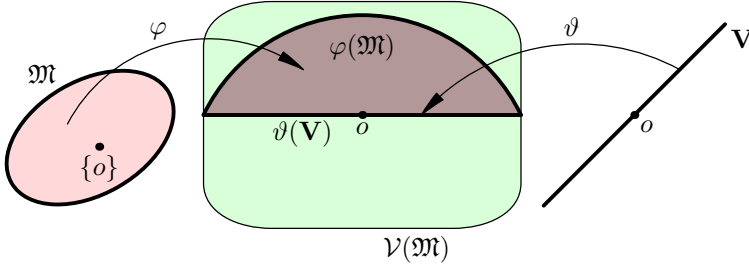


Figure 1: Structure of the space $\mathcal{V}(\mathfrak{M})$

3 Generalized subset relation

Now let's consider structure (\mathfrak{M}, \subset) as the partially ordered set. We may expect homomorphism φ converts the relation \subset to some newly defined partial order relation \preceq .

Definition 7 Define the binary relation \preceq upon the set $\mathcal{V}(\mathfrak{M})$:

$$[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] \preceq [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2] \Leftrightarrow \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_2 \subset \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_1$$

If for $A, B \in \mathcal{V}(\mathfrak{M})$ holds $A \preceq B$ we say that A is contained in B .

Remark 3 It is necessary to prove that the previous definition is correct. (M4) and (M7) are necessary.

Theorem 4 Relation \preceq is a partial order relation, i.e. it is reflexive, antisymmetrical and transitive.

Following theorem allows us to consider relation \preceq as a generalized subset relation.

Theorem 5 Consider the natural homomorphism φ of $(\mathfrak{M}, +, \cdot)$ into $(\mathcal{V}(\mathfrak{M}), +, \cdot)$. Then $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ if and only if $\varphi(\mathbf{A}) \preceq \varphi(\mathbf{B})$. It means that φ is an isomorphism of $(\mathfrak{M}, +, \cdot, \subset)$ onto $(\varphi(\mathfrak{M}), +, \cdot, \preceq)$.

4 Example – Oriented ball space

In this section, we show a particular example of our geometry. If we start with set of all closed balls in inner product space we get space identical to classical oriented sphere space.

Definition 8 Consider set $\mathfrak{B} = \{B(x, r) : x \in \mathbf{X}, r \in \mathbb{R}_0^+\}$ of all closed balls in \mathbf{X} , where \mathbf{X} is the inner product space. Partial ordered linear space $(\mathcal{V}(\mathfrak{B}), +, \cdot, \preceq)$ will be called oriented ball space.

Now, it's time to show relationship between oriented ball space and oriented sphere space. This relationship is obvious for non-negative balls. Denote by $\mathcal{S}(x, r)$ classical Laguerre's oriented sphere where $x \in \mathbf{V}$ denotes center of the sphere and $r \in \mathbb{R}$ denotes oriented radius, and by \mathfrak{S} the set of all oriented spheres in \mathbf{V} .

Definition 9 Let's define the mapping $\mathcal{B}: \mathbf{V} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{V}(\mathfrak{B})$:

$$\mathcal{B}(x, r) = \begin{cases} [B(x, r), \{o\}] & \text{if } r \geq 0 \\ [\{x\}, B(o, -r)] & \text{otherwise} \end{cases}$$

The element $\mathcal{B}(x, r) \in \mathcal{V}(\mathfrak{B})$ will be called oriented ball with center x and oriented radius r .

Definition 10 Define indefinite inner product upon the space $\mathcal{V}(\mathfrak{B})$:

$$\left\langle \mathcal{B}(x_1, r_1), \mathcal{B}(x_2, r_2) \right\rangle_{PE} = \langle x_1, x_2 \rangle - r_1 r_2$$

Remark 4 The indefinite inner product from the previous definition is obviously indefinite inner product.

Theorem 6 Consider mapping $\alpha: \mathfrak{S} \rightarrow \mathcal{V}(\mathfrak{B})$, $\alpha(\mathcal{S}(x, r)) = \mathcal{B}(x, r)$. Then α is the isomorphism of $(\mathfrak{S}, +, \cdot)$ onto $(\mathcal{V}(\mathfrak{B}), +, \cdot)$ and also isometry in corresponding indefinite inner product spaces.

Proof: Obvious. ■

Remark 5 The geometrical meaning of these two spaces is nearly the same and there is one-to-one "identical" mapping of each space to another that maps a sphere to ball with the same center and oriented radius. We may identify these two spaces.

5 Klein Geometry

Definition 11 Let's consider a space $\mathcal{V}(\mathfrak{M})$ and denote by $\mathfrak{L}(\mathcal{V}(\mathfrak{M}))$ a group of all affine transformations of the space $\mathcal{V}(\mathfrak{M})$ preserving the partial order relation \preceq . Then we define a geometry

$$G = \left(\mathcal{V}(\mathfrak{M}), \mathfrak{L}(\mathcal{V}(\mathfrak{M})) \right)$$

It is obvious from above that a particular example of this new kind of geometry is similar to Laguerre geometry, given the set \mathfrak{B} of all closed balls as the set \mathfrak{M} . Accurately, we may say that every Laguerre transformation (considered as similarity in indefinite inner product space) can be written as the transformation preserving \preceq or composed mapping of transformation preserving \preceq and a transformation that maps every oriented ball $\mathcal{B}(x, r)$ to $\mathcal{B}(x, -r)$.

6 Summary

This new approach to Laguerre geometry may allow us to use today's latest methods of this geometry in more general spaces to solve more general kind of problems. The result may be faster algorithm to solve the problem where another way is used today, easier proof of a theorem or maybe a way to solve some of the open problems.

Future work will be concentrated on a study of the system of conditions in definition 2, on a study of the spaces of the form $\mathcal{V}(\mathfrak{M})$, formulation of new theorems and on a study of well known problems of CAGD and application of this new geometry to solve them.

References

- [1] Bognár J.: *Indefinite Inner Product Spaces*, Springer-Verlag (1974)
- [2] Lávička M.: *KMA/G1 Geometrie 1*, lecture notes, University of West Bohemia, Plzeň 2004
- [3] Lávička M.: *KMA/G2 Geometrie 2*, lecture notes, University of West Bohemia, Plzeň 2004
- [4] Pottmann H., Peternell M.: *Applications of Laguerre geometry in CAGD*, Computer Aided Geometric Design 15 (1998), 165-186.
- [5] Peternell M., Pottmann H.: *A Laguerre geometric approach to rational offsets*, Computer Aided Geometric Design 15 (1998), 223-249.

Henryk Gliński

CORRECTION OF RADIAL DISTORTION IN PHOTOGRAPHS

Abstract

The paper presents a proposal of radial distortion correction method in photographs. At the first stage, based on specially prepared pattern, the location of the photo center is determined. Then, based on the photographs of another pattern, the coefficients of the multinomial correcting the radial distortion are determined, with the use of projective geometry.

Keywords

Radial distortion, photography, computer graphics, projective geometry.

1 Radial distortion

Radial distortion is a typical geometric deformation of photographic pictures caused by photographic camera lenses, the wide angle lenses in particular. The deformation consists in the fact that straight lines are imaged in the pictures as curved ones (Photo 1 and 4). Radial distortion grows along with the distance from the center of distortion, generally the principal point of the photograph and is particularly visible near the photograph's border.

Radial distortion may be removed by appropriate transformation of the photographs, upon converting it into the digital form. Radial distortion is mainly described by the equation:

$$r_d = r(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + \dots),$$

where r_d is the distance of the distorted point from the distortion center, r is the real distance and k_1, k_2, \dots are the coefficients of the even grade polynomial.

The principal issue is obviously to settle the location of distortion center and polynomial coefficients. Normally they are determined based on the photographs of well-known and appropriately selected pattern, in general the various types of orthogonal grids. Then upon measurement of selected points in the photographs and carrying out relevant calculations, the locations of the distortion center and distortion coefficients are fixed approximately. The simultaneous determination of the distortion center and

distortion coefficients requires fairly complex calculations. In the author's opinion, it is purposeful to separate the elements and determine the distortion center first on the basis of the photographs of a specially prepared pattern and then, on the basis of the photographs of another pattern, the distortion coefficients.

2 Distortion center determination

The method suggested by the author is based on the remark that the straight lines passing through the distortion center are not deformed. Thus, if a bundle of parallel straight lines is photographed, then the one with least deformed picture shall pass nearest the distortion center.

3 Practical determination of the distortion center

A pattern consisting of 25 straight lines, each 200 cm long and 0.5 cm distance between each line, was prepared and printed. The pattern was placed along the diagonal. In total, 20 photographs were taken – 10 along each diagonal. From each photograph recorded in the RAW format, only the luminance component (green) was used, in order to avoid the chromatic distortion. Then, using the generally known algorithms, the pictures of the straight lines were recognized by converting them into sequences of points.

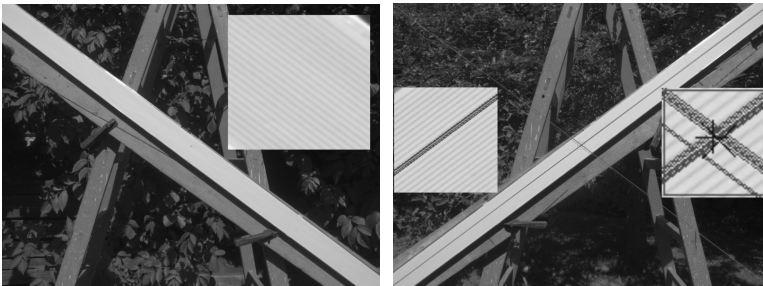


Figure 1. The pattern for determination of the distortion center

For each sequence of points the correlation coefficient was calculated and the equation coefficients of the straight line approximating a given sequence of points. A sequence of points with the highest correlation coefficient was selected from each photograph. Photograph 2 presents the location of the straight lines approximating the selected sequences. Based on the statistical calculations, considering the correlation coefficients, an

approximate location of the distortion center was determined (marked with a black cross " + " in figure 1- right).

4 Determination of distortion coefficients

If we take a photograph of any flat pattern, located outside the plane perpendicular to the lens axis, then its image on the photograph will be the combination of the central projection and radial distortion.

Let us assume that the photographed pattern creates a series of collinear points $A, 1, 2, 3, \dots, O$ and B . Let us also assume that the standard was photographed so that the O' point (the image of the point O) is in the distortion center and the images of A and B points are located in equal distance from the distortion center. Distortion for points A' and B' is identical, to simplify things, we may assume that it is equal to 0. The central projection is a projection transformation for a series of collinear points, it is determined through giving three points. Thus, knowing the location of points A', O' and B' we may determine the real, without distortion, location of points $1', 2', 3', \dots$ in the photograph.

5 Practical determination of distortion coefficients

A pattern created by squares with 0,5 cm side was prepared and printed, making a grid – 180 cm long and 8 cm wide (Figure 2). The grid was photographed several times so that the picture of the longer lines of the pattern was placed along the photograph's diagonal. Each photograph was rotated around the distortion center so that the adjacent (in relation to the distortion center) longer lines of the pattern were parallel to the longer side of the photograph. Then a horizontal straight line was drawn through the distortion center, then, with the use of appropriate graphic procedures, the intersection points between the straight lines and the shorter lines of the grid were determined and their distances from the distortion center were calculated. The picture where one of the points was located near the distortion center and two other – almost at the same distance from the distortion center – was selected for the further calculations. The selected points correspond to points A', O' and B' , respectively, of chapter ..., the other to points $1', 2', 3', \dots$. Then, using the properties of the projection transformation, the real distances of points $1', 2', 3', \dots$, (points $1'', 2'', 3'', \dots$) from the distortion center were calculated. In the end, using the Maple software, the approximation of the $(A', A'), (1', 1''), (2', 2''), (3', 3''), \dots$, (O', O') and (B', B') point sequence was made with the appropriate grade

polynomial. The coefficients thus obtained were used in the procedure removing the photograph radial distortion deformation.

One should note that in the zoom lenses distortion coefficients vary along with the focal length, they should be determined for several focal lengths separately.

All the photographs included in this paper were taken by the author with Minolta Konica Dimage A2 digital camera with the focal length 28 mm.

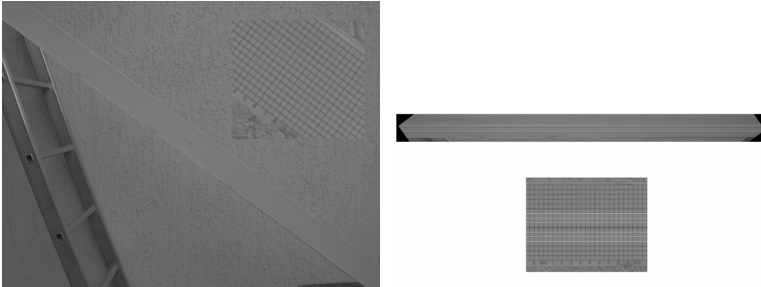


Figure2: The pattern for determination of distortion coefficients



Figure 3: The photograph without and with radial distortion correction

References

- [1] J. Perš, S. Kovacić: *Nonparametric, Model-Based Radial Lens Distortion Correction Using Tilted Camera Assumption* <http://vision.fe.uni-lj.si/docs/janezp/pers-wwk2002.pdf>
- [2] T.Niemman: *PTLens*, <http://epaperpress.com/ptlens/>

Roman Hašek

VYUŽITÍ PROGRAMU DERIVE PŘI VÝUCE ANALYTICKÉ GEOMETRIE

Abstrakt

V CAS programu Derive je možno provádět symbolické i numerické výpočty a kreslit dvourozměrné i třírozměrné grafy. Algebraická a grafická složka jsou v něm unikátně propojeny tak, že program umožňuje bezprostřední grafickou reprezentaci většiny zobrazitelných formulí. Na několika příkladech je ukázáno, jak lze těchto možností programu využít při výuce analytické geometrie.

Klíčová slova

analytická geometrie, počítačový algebraický systém, výuka.

1 Úvod

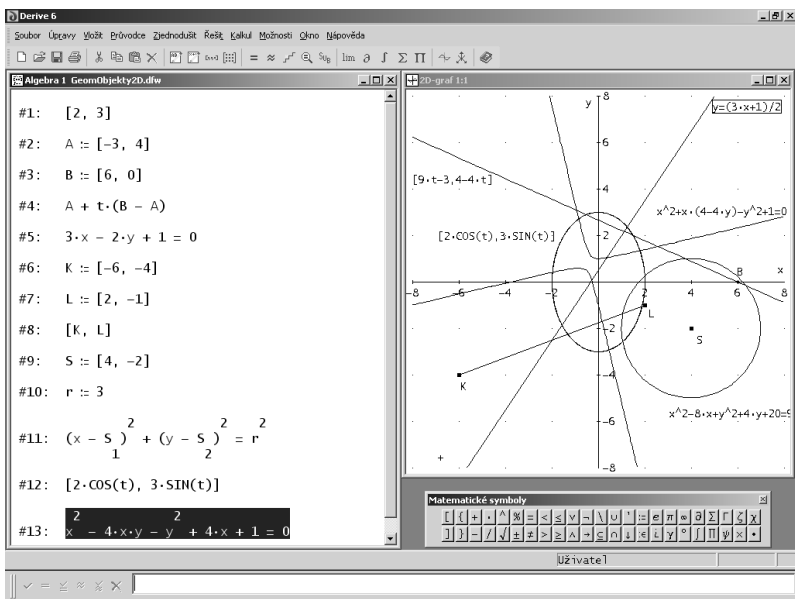
Při výuce analytické metody popisu a zkoumání vlastností roviny a třírozměrného prostoru se samozřejmě obracíme k názorné představě těchto vlastností. Někdy je však obtížné, v případě studenta, si takovou představu vytvořit, nebo, v případě učitele, ji navodit. Toto je chvíle pro použití různých pomůcek - obrázků, fyzických modelů, odkazů do světa, jenž nás obklopuje apod. Takovou pomůckou se může stát i vhodně zvolený a použitý počítačový program. Jeho výhodou by měla být variabilita grafického prostředí, umožňující snadno měnit parametry úlohy a tak zkoumat všechny možné případy, spolu s nabídkou dalších funkcí, které umožňují hned uplatnit analytickou metodu. Z tohoto hlediska mně zaujal program typu CAS (computer algebra system) Derive 6.1. Program je produktem firmy Texas Instruments. Používá se na řadě středních i vysokých škol v USA a v Evropě a od roku 2005 je k dispozici jeho česká lokalizace.

V článku jsou uvedeny čtyři příklady možného využití programu Derive ve výuce analytické geometrie.

2 Derive ve výuce analytické geometrii


V Derive je možno provádět symbolické i numerické výpočty a kreslit dvourozměrné a třírozměrné grafy. Jednoduché propojení algebraických a grafických funkcí umožňuje bezprostřední grafickou reprezentaci většiny zobrazitelných formulí. Program nabízí velké množství matematických funkcí i možnost programovat funkce vlastní. Rozhraní programu (viz Obr. 1) nám umožňuje přímo, bez znalosti příkazů, provádět grafické funkce a většinu základních výpočtů na úrovni střední školy a úvodních vysokoškolských kurzů. Přesto pokrývá rozhraní jen malou část funkcí programu. Ostatní funkce zadáváme přes příkazový řádek, jak je obvyklé u programů tohoto typu.

2.1 Reprezentace 2D a 3D objektů



Obrázek 1: Reprezentace geometrických útvarů v rovině

Program pracuje se třemi typy oken. Pro symbolické a numerické výpočty a psaní programů okno „Algebra“ (Obr. 1), pro dvourozměrné

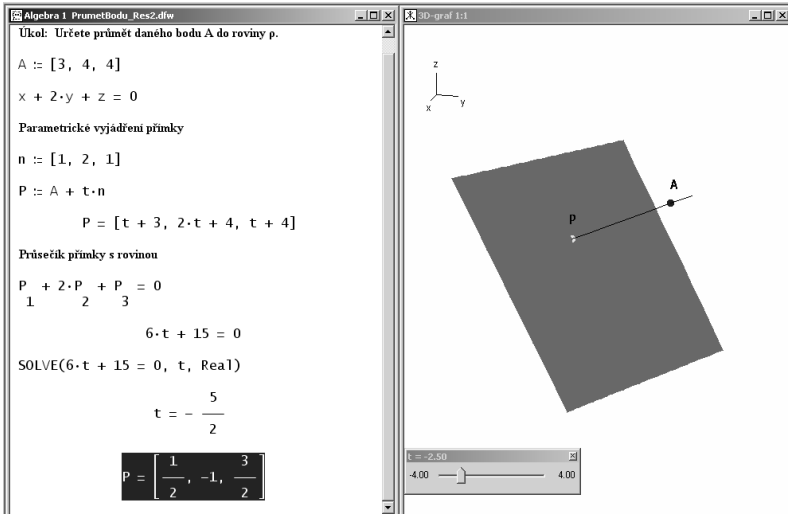
grafy okno „2D-graf“ (Obr. 1) a pro třírozměrné grafy okno „3D-graf“ (Obr. 2). Zadání geometrického útvaru je minimálně zatíženo syntaktickými pravidly programu a zhruba odpovídá běžnému zápisu. Na Obr. 1 je uveden zápis a zobrazení některých rovinných útvarů. V okně Algebra vidíme na řádce #1 zadání bodu, na ř. #4 parametrické vyjádření přímky, určené body A a B , na ř. #5 obecnou rovnici přímky a na ř. #8 vyjádření úsečky KL . Následuje středová rovnice kružnice, parametrické vyjádření elipsy a algebraická rovnice hyperboly. Znázornění v okně 2D-graf získáme zvýrazněním výrazu (viz ř. #13) a kliknutím na ikonu . U 3D objektů postupujeme analogicky.

2.2 Příklady využití programu

Ilustrace výkladu

Ilustrujeme metodu výpočtu kolmého průmětu bodu do roviny. Výhodou užití počítače je možnost měnit parametry úlohy. Student tak má v ruce nástroj, s nímž může provádět vlastní výzkum.

Úkol: Určete průmět bodu $A = [3, 4, 4]$ do roviny $\rho : x + 2y + z = 0$.



Algebra 1 PrumetBodu_Res2.dfw

Úkol: Určete průmět daného bodu A do roviny ρ .

$A := [3, 4, 4]$

$x + 2 \cdot y + z = 0$

Parametrické vyjádření přímky

$n := [1, 2, 1]$

$P := A + t \cdot n$

$P = [t + 3, 2 \cdot t + 4, t + 4]$

Průsečík přímky s rovinou

$P_1 + 2 \cdot P_2 + P_3 = 0$

$6 \cdot t + 15 = 0$

$\text{SOLVE}(6 \cdot t + 15 = 0, t, \text{Real})$

$t = -\frac{5}{2}$

$P = \left[\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2} \right]$

3D-graf 1:1

3D view showing a coordinate system with axes x, y, z. A shaded plane is shown, and a point A is marked. A perpendicular line segment connects point A to its projection P on the plane.

Slider: $t = -2.50$ (range -4.00 to 4.00)

Obrázek 2: Průmět bodu do roviny

K řešení úlohy (viz Obr. 2) se dopracujeme cestou postupného odhalování vztahů. Nejprve zapíšeme parametrické vyjádření přímky jdoucí bodem A kolmo k dané rovině. Přímku zobrazíme. Potom pomocí nástroje „Posuvník“ zkoumáme, pro jakou hodnotu parametru t je bod P této přímky zároveň bodem roviny. Výsledky výzkumu potvrdíme, nebo vyvrátíme, řešením příslušné rovnice s neznámou t .

Důkaz vlastnosti

Poznatky z analytické geometrie spolu se symbolickými možnostmi programu využijeme k důkazu známé vlastnosti.

Úkol: Dokažte, že osy stran trojúhelníka se protínají v jednom bodě.

Trojúhelník vhodně umístíme vzhledem k souřadnicové soustavě:

$$A := [0, 0]$$

$$B := [k, 0]$$

$$C := [1, m]$$

Definujeme funkce, potřebné pro vyjádření os (viz [1]):

$$\text{StredUs}(A, B) := \frac{A + B}{2}$$

$$\text{KolmiceVBode}(n, B) := n \cdot (B - [x, y]) = 0$$

$$\text{OsaUs}(A, B) := \text{KolmiceVBode}(B - A, \text{StredUs}(A, B))$$

$$vA := \text{OsaUs}(B, C)$$

$$vB := \text{OsaUs}(A, C)$$

$$vC := \text{OsaUs}(A, B)$$

Řešením dvou soustav ověříme existenci společného bodu těchto os:

$$\text{SOLVE}([vA, vB], [x, y])$$

$$\left[x = \frac{k}{2} \wedge y = -\frac{k \cdot 1 - 1 - m^2}{2 \cdot m} \right]$$

$$\text{SOLVE}([vA, vC], [x, y])$$

$$\left[x = \frac{k}{2} \wedge y = -\frac{k \cdot 1 - 1 - m^2}{2 \cdot m} \right]$$

Tvorba vlastních funkcí

Řešení náročnějšího projektu, s využitím vlastnoručně vytvořených funkcí, může být použito pro získání, upevnění i kontrolu znalostí.

Úkol: Definujte funkce, jejichž hodnotami budou rovnice kružnice opsané a vepsané trojúhelníku danému vrcholy. Tyto kružnice zobrazte pro konkrétní trojúhelník.

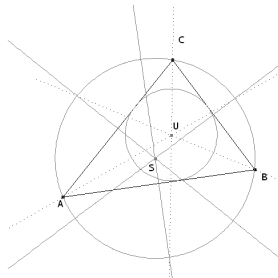
Požadované funkce definujeme pomocí dílčích funkcí. Užijeme všechny z řešení předchozího příkladu a k nim přidáme ještě podobné funkce pro určení osy úhlu, obecné rovnice přímky dané dvěma body a vzdálenost bodu od přímky. Řešením úlohy jsou potom funkce:

```

KrOpsana(A, B, C) :=
  Prog
  sA := OsaUs(B, C)
  sB := OsaUs(A, C)
  sC := OsaUs(A, B)
  S := (SOLUTIONS(sA = sB, [x, y]))I1
  r0 := ABS(S - A)
  (x - S1I)^2 + (y - S12)^2 - r0^2 = 0

KrVepsana(A, B, C) :=
  Prog
  uA := OsaUh1u(B, A, C)
  uB := OsaUh1u(A, B, C)
  uC := OsaUh1u(A, C, B)
  pU := (SOLUTIONS(SUBST(uA, t, k) = SUBST(uB, t, 1), [k, 1]))I1
  U := SUBST(uA, t, pU1I)
  rV := VzdBp(U, ObRoVP(A, B))
  (x - U1I)^2 + (y - U12)^2 - rV^2 = 0
    
```

Zobrazení hodnot funkcí pro konkrétní trojúhelník je na Obr. 3.



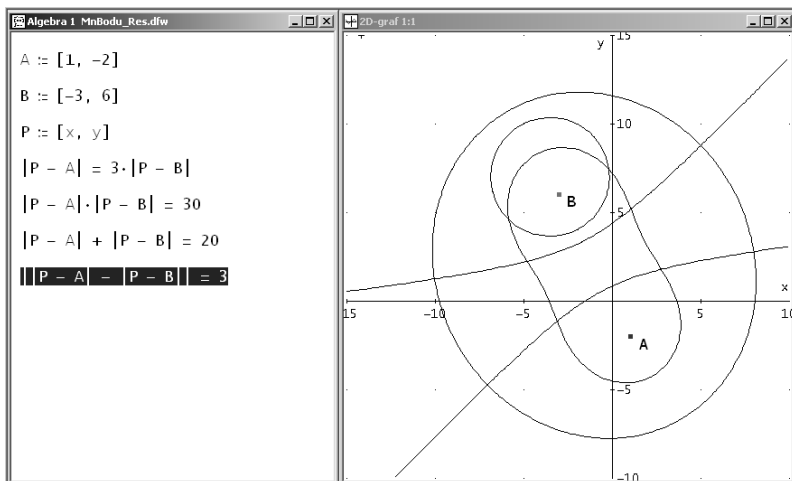
Obrázek 3: Kružnice opsaná a vepsaná trojúhelníku

Vlastnoručně vytvořené funkce si můžeme nahrát do zvláštního souboru a používat je i později, stejně jako vlastní funkce programu.

Program jako nástroj zkoumání

Zvědavý jedinec má nutkání zjistit, co se stane, když trochu pozměníme zadání nějaké úlohy. Program je ideálním nástrojem takového zkoumání.

Úkol: Určete množinu všech bodů roviny, které mají od bodu A [1;-2] třikrát větší vzdálenost než od bodu B [-3;6].



Obrázek 4: Definice některých rovinných křivek

3 Závěr

Pokusil jsem se zde ukázat některé výsledky svého bádání nad otázkou, zda lze smysluplně využít CAS ve výuce geometrie. Zájemcům rád poskytnu kompletní řešení zde uvedených i dalších příkladů.

Literatura

- [1] Kutzler, B., Kokol-Voljc, V.: *Derive 6, Pokročilá matematika pro vaše PC, překlad příručky programu, České Budějovice, 2004.*
- [2] Vossler, D. L.: *Exploring Analytic Geometry with Mathematica, Academic Press, London, UK, 2000.*

Oldřich Hykš

LINEAR PERSPECTIVE IN PAINTING – A TOOL SUPPORTING GEOMETRIC EDUCATION

Abstract

The paper discusses a motivation for geometric education of students of technical universities and secondary schools, as well as other interested persons. It presents a study material which combines the exposition of basic principles and methods of geometric representations with commentaries and pictorial documentation of the historical development. This approach is based on the analogy between particular phases of perspective knowledge in the history and the gradual development of student's knowledge, which facilitates the study.

Keywords

Linear perspective, painting

1 Introduction

The objective of the contribution is to present a study material *Birth and Applications of Linear Perspective in Painting* [3] which represents a complement to standard lessons on geometry at technical universities and secondary schools. Its principal aim is to motivate students – coming usually without any previous knowledge of geometric projections – for some effort to understand and master the basic principles of linear perspective and methods of its practical applications. At present, in the days of attractive graphical computer programs, many students consider the study of these topics to be purposeless and it is necessary to persuade them of the sense of geometric education and the importance of the knowledge they earn there. For this purpose, the excursion into the history of painting is a convenient tool that can help students to become aware of the importance of geometric methods and of possible consequences of ignorance in this field.

Concurrently, the material was created as an alternative to many of present publications devoted to linear perspective that are usually attractive, contain large colour reproductions, but follow the way of entertaining the reader rather than tasking his mind with a “useless” theory. It tries to remain attractive to motivate a today reader withal teaching him the necessary

foundations and simple methods that enable him the elementary perspective imagery and encourage him to study further. The material is therefore convenient for a wider audience, too, from painters to anyone who just wants to understand the art of painting.

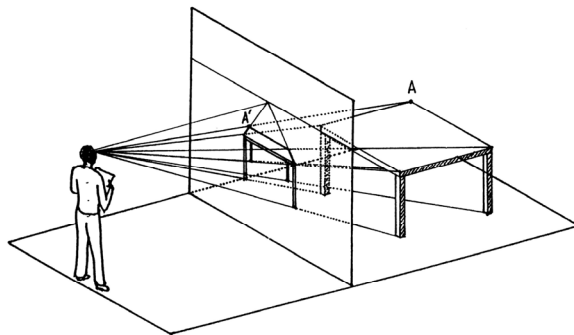
The way based on a historical exposition was chosen. Not only helps this approach to attract and keep the attention of the reader, the development of the society and an individual have many parallels. Particular phases of perspective knowledge in the history correspond to a gradual development of knowledge of a student – and this fact facilitates the study. Particular theoretical pieces of knowledge are put into the historical context, so that the student is gradually getting acquainted with the theory of linear perspective, but his attention is being maintained all the time by a more interesting topic of the development of perspective in painting. After the study of the text, the reader shall not only be familiarized with the history of perspective representations, he shall also understand its basic principles and be able to draw simple perspective pictures.

2 Approach to Motivation and Exposition of Linear Perspective

As it was mentioned above, the approach is based on the analogy between particular phases of the knowledge of the society and the gradual development of the knowledge of a student. The exposition therefore starts with the prehistory and antiquity. In this context it is convenient to emphasize that perspective as a geometric representation that is closest to the perception of the space by the eye and that is today understood by a “common” viewer to be the necessary foundation of painting, is only one of many components of a graphic expression – and not the component that must be used. In most epochs and civilizations, other demands and needs were in the forefront, rather than the realistic depiction of the space. The expression of persons, relations among them and the space in which they are placed can be carried out not only in a realistic way but also in a symbolic or stylized way.

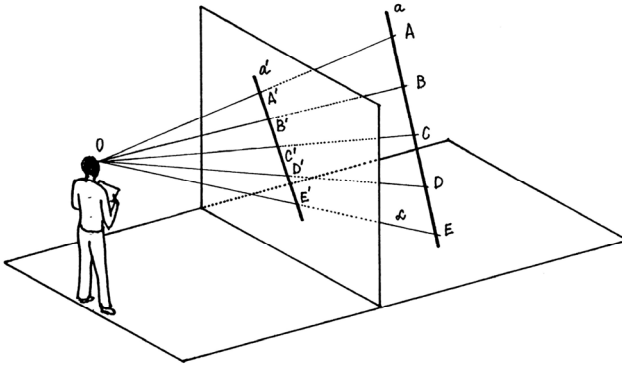
The birth of linear perspective itself is connected to the renaissance epoch. On the basis of an analogy with the historical development, students are motivated for a transition from an intuitive depiction of a reality to an exact representation based on geometric constructions. They are lead to this transition step by step, by the force of the analysis of paintings from various periods of time: from Ambrogio de Bondone (1266 – 1337) called Giotto and his disciple and admirer Ambrogio Lorenzetti (1280 – 1348), up to Filippo Brunelleschi (1377 – 1446) and his continuators.

Giotto's paintings were still based on an intuition and observations, rather than geometric constructions. For our purposes they represent an outstanding stimulus for a discussion of imperfections from the point of view of realistic depiction¹ and the possibilities of their elimination. Lorenzetti's paintings were also based on an intuition; nevertheless, by the investigation of his famous painting *Annunciation*, students can discover that all convergence lines have a common vanishing point and they can think about its correctness and the reasons of its convincing effect. This point therefore represents a natural place for the first geometric "intermezzo" explaining the foundations of linear perspective. This explanation starts with the basic principles of the visual sense. Then it is sufficient to imagine that a transparent plane is placed between an eye and the object that we want to represent. The projection ray intersects this plane in one point; provided this point is given the same color and light, it causes the same perception in the eye as the original point of the object. Doing the same with the whole beam of projection rays, we obtain the image in the picture plane that causes the same perception in an eye as the observation of the original three-dimensional object.

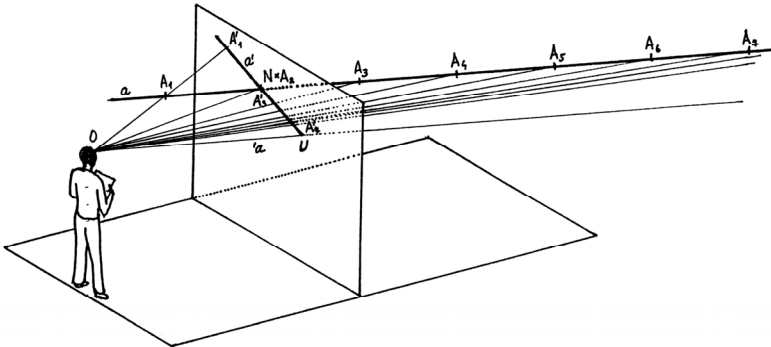


Now the usual notation for the ground plane, picture plane, horizon line, principal distance, etc., is introduced. On the basis of the projection plane α , it is shown that the image of a line a is again a line or a point (when it runs through the centre of projection), which simplifies the constructions: it is sufficient to find the images of two points of the line to obtain its whole image.

¹ For example, in the painting *Exorcism of the Demons*, parallel lines on houses are sometimes represented as parallels, sometimes as intersecting lines converging or even diverging towards a distance; in the painting *Bishop's Dream*, the images of parallel lines of a ceiling intersect in one point, as well as the images of parallel lines of the floor, but these points are different.

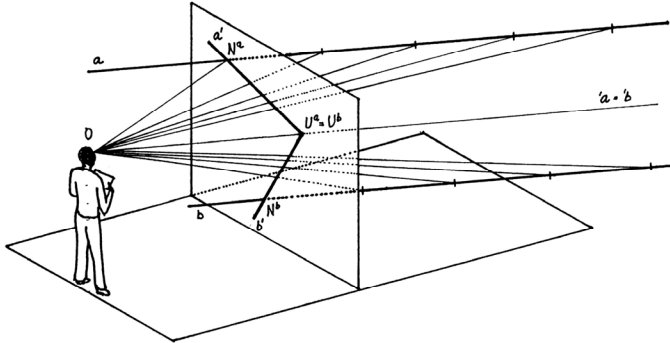


The choice of the *trace point* N of the line as one of these two points is clear. The choice of the second point is illustrated by the following figure.



The exposition proceeds as follows: »Imagine a successive projection of the sequence of points A_1, A_2, \dots of the line a that move away from the trace point behind the picture plane. Their spacing is constant, but the distance between two successive images is decreasing and the images converge to one point. The angle between the line a and the projection lines of particular points is decreasing. When we imagine that the point A_i of the line moves away ad infinitum, its projection line becomes parallel to the line a , running through the centre of projection O . This line is called *direction line* of the line a and it is denoted by the symbol ' a '. The intersection of the picture plane with the projection line of this infinitely distant point is called *vanishing point* and it is denoted by U .

On the basis of trace and vanishing points we can construct a projection of any line in the space. Specially, we can construct the projection of a line b parallel to a :



Their trace points are different, $N^a \neq N^b$, but their vanishing points are equal, $N^a \equiv N^b$, since this is the trace point of their common direction line running through the centre O . Thus we come to the conclusion that the projections of parallel lines are the intersecting lines running through one common vanishing point. We can therefore confirm the correctness of Lorenzetti's construction.«

The next important step that students have to do on their way to perspective projection and that must have been done in the history, too, is to find the methods of concrete constructions of perspective projections. Thus we come to Filippo Brunelleschi, who is usually considered to be the discoverer of linear perspective, and to his plans of the cupola of the duomo in Florence where the system of top, front and side views was used. Students are acquainted with the way how Brunelleschi could construct the correct perspective projection of the cupola from these three views.

Then the readers are led throughout the further development to the discovery of direct methods, their improvements and finally to their routine mastering. Here a substantial drawback shall be pointed out, too, namely the fact that the impression of the perspective picture is natural for the viewer standing at one concrete station point only, which is seldom satisfied. A viewer usually walks along a wider canvas, investigating details that are then necessarily distorted. In this context, Leonardo da Vinci touched so-called non-linear perspective at a theoretical level, other authors adjusted their paintings by braking perspective rules around margins to achieve a more natural impression, the limits for an "allowed" view angle were gradually determined.

The historical excursion continues with the paintings where the perspective rules were broken to achieve special artistic impressions, students are acquainted with the styles that abandoned perspective and supplanted it with other tools, as well as with the styles that used perspective for creation of various "playthings" and absurdities. Particular art movements are

discussed together with their approach to the use of perspective. Readers can therefore reach their own opinion of the importance of mastering perspective rules.

3 Conclusion

For descriptive geometry teaching itself, the most important outcome of the discussed material is mastering the methods of perspective constructions, above all the intersection and grid methods. For the last-mentioned one, a computer program was created, which enables students to create and print grids for arbitrary views and hence motivates them for their own creative activities.

With respect to the broad range of the topic and limited extent of this contribution, it was possible to provide only a small illustration of the possible approach to linear perspective teaching. May the kind reader understand it as an invitation to a more detailed look inside the text [2] and its prospective use. Based on the extensive pictorial material from prehistory over the renaissance epoch up to the 20th century, it leads the students to the field of perspective projection, acquaints them with the most widely used construction methods and broadens their historical and cultural horizons.

References

- [1] Coleová, A.: *Perspektiva*, Perfekt, Bratislava 1995.
- [2] Hykš, O.: *Zrod a užití lineární perspektivy v malířství*, Prague 2004 [http://euler.fd.cvut.cz/predmety/geometrie/lp_malirstvi/].
- [3] Hykš, O.: *Zrod a užití lineární perspektivy v malířství – motivace výuky geometrie*, in: *Proceedings of the conference Presentation of Mathematics '05*, Liberec, 2005, 8 pp. [to appear].
- [4] Kadeřávek, F.: *Perspektiva*, Jan Štenc, Prague 1922.
- [5] Kadeřávek, F.; Kepr, B.: *Prostorová perspektiva a reliéfy*, ČSAV, Prague 1954.
- [6] Kadeřávek, F.: *Úvod do dějin rýsování a zobrazovacích nauk*, ibid.
- [7] Parramón, J. M.: *Perspektiva pro výtvarníky*, Svojtka a Vašut, Prague 1955.
- [8] Šarounová, A.: *Geometrie a malířství*, in: *proceedings Historie matematiky I*, JČMF, Brno 1994, pp. 191–213.

Petr Kahánek, Alexej Kolcun

BRESENHAM'S REGULAR MESH DEFORMATION AND ANGLE CRITERIA

Abstract

In this paper, we investigate local deformations of structured meshes with respect to minmax angle and maxmin angle criteria. We introduce an effective algorithm to perform the predefined deformation (straight line) and we introduce a theorem according to which the generated triangulation is optimal with respect to both minmax and maxmin.

Keywords

Computational geometry, triangulations, structured meshes, minmax angle criterion

1 Introduction

In many areas of research, mathematical models of various real-world objects are used. By mathematical model, we often mean some system of partial differential equations (PDE) that have to be solved before any conclusion can be done. Generally, it is very difficult to solve a differential equation exactly; it is therefore common to use some numerical technique.

One of the most widely used tools in this area is undoubtedly finite element method (FEM). Its simplest case is based on triangular elements with linear interpolation of the solution.

To obtain a "good numerical solution", i.e. "as close to the exact solution as possible", one needs to generate a "good triangulation". In this paper, we will consider two criterions to distinguish between "good" and "bad" triangulations: minmax angle criterion and maxmin angle criterion. However, it will be shown that the minmax approach is more suitable for linear interpolation purposes (see chap. 2) [2],[3].

We will focus on a special type of triangulations, called structured triangulations or simply structured meshes (chap.3).

The main goals of this paper are to introduce simple and effective technique of structured mesh deformation and to introduce a theorem that will evaluate quality of the resulting triangulation.

2 Triangulations

Let S be a finite set of points in the Euclidean plane. A **triangulation** of S is a maximally connected straight line plane graph whose vertices are the points of S . By maximality, each face is a triangle except for the exterior face which is the complement of the convex hull of S [1].

2.1 Delaunay triangulations

Triangulation of a set of points S is a Delaunay triangulation, if and only if the circumcircle of any triangle does not contain any other points of S in its interior.

It is Delaunay triangulation that is usually used when a triangulation is needed. It can be generated very effectively, in time $O(n \log n)$ for expected case, where n is the number of points to be triangulated. Moreover, a Delaunay triangulation maximizes the minimal angle. It even performs better than that: it lexicographically maximizes an angle vector $V = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3t})$, $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{3t}$, where t is the number of triangles. [4]

A Delaunay triangulation is dual to another fundamental structure of computational geometry, Voronoi diagram. At this point, we will use Voronoi diagram to show the problem we are forced to deal with when using our mesh for interpolation purposes.

When the values are interpolated from the vertices to the interior area, it is suitable to have triangles of approximately equilateral shape. Triangulation of a set of points S is a Delaunay triangulation, if and only if the circumcircle of any triangle does not contain any other points of S in its interior.

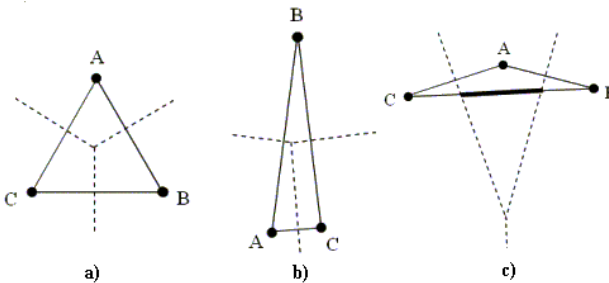


Figure 1: Voronoi diagrams for a) equilateral triangle, b) triangle with a "very sharp" angle, c) an obtuse-angle triangle

See Figure 1. On the left (a), we can see a triangle that is just perfect for interpolation - all its vertices "have the same influence" over the triangle.

For a triangle with one “very sharp” angle (b), the situation is not that good, but at least it is consistent in the following meaning: each vertex should affect primarily those points inside the triangle which are its close neighbours. Now, lets take a look at what happens when an obtuse angle appears (c).

One can see that vertex A **does not** affect big part of line BC, although it is much closer to it than any of vertices B and C. This may cause big interpolation errors. So we will want to avoid "big" angles [2].

Unfortunately, although a Delaunay triangulation can help us a little in this aspect , it is generally not the one that minimizes the maximal angle. An example that illustrates this is on the Figure 2.

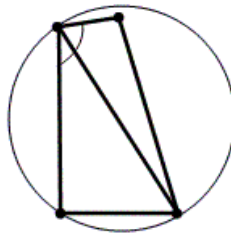


Figure 2: Minmax triangulation that is not Delaunay.

The diagonal divides the largest angle, producing a minmax triangulation. But there also is a triangle, which fails Delaunay criterion, because its circumcircle is not empty.

2.2 Minmax angle triangulations

Minmax angle triangulation is the one that minimizes the minimal angle over all possible triangulations. It is therefore the one we would like to use for linear interpolation.

The bad news is that the best known algorithm for minmax triangulation needs time $O(n^2 \log n)$ in the worst case [1]. However, for some special cases, a Delaunay triangulation satisfies minmax criterion. We will use this observation later.

3 Structured meshes

Let us have a regular, orthogonal grid (its elements are identical squares). Now, lets deform the grid so that it respect the given geometry. The result

of this deformation is a structured mesh. It is obvious (and important) that it is topologically equivalent to the original grid.

Structured triangulation is a structured mesh, whose elements (quadrilaterals) were triangulated, i.e. for every element, one of the two possible diagonals was chosen.

There is one great advantage of a structured mesh – we can obtain very efficient form of the incidence matrix of structured mesh. The incidence matrix of nodes plays a significant role for most kinds of simulations. It depends on the manner of node indexing. Fig.4 shows incidence matrix of the regular grid, where nodes are indexed a) randomly, b) in the “spiral way from the boundary to the interior” c) in the “natural way – row by row”. We can see that the last method gives us the best form of the incidence matrix, where all nonzero elements are concentrated in the regular structure near the main diagonal. As a result, use of a structured mesh allows us to solve much larger problems (in terms of number of points), because effective methods for storage and manipulations with incidence matrix are offered in this case [2, 3].

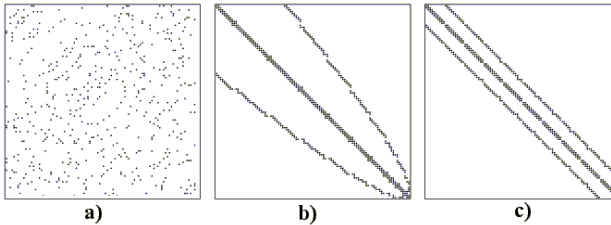


Figure 3: Incidence matrices for different indexing of nodes

On the other hand, there is a disadvantage, too: structured meshes are not suitable for refinement. However, the technique of nested meshes can solve this problem (Multigrid methods which use this idea are used for PDE solving) [3].

4 Structured triangulations with defined geometry

Before any calculations can be done, it is necessary to deform the mesh so that it respects the geometry inherent to the given problem. In general, such geometry can be very complicated; it is, however, a common task to model some basic shapes, i.e. curves in 2D, surfaces in 3D. Here, we will deal with the simplest curve type in two dimensions, line segment.

Start in I_1
 Until we have reached I_2
 Find indices x, y of the next node (via
 Bresenham)
 Move it so that it lies on the line
 If both x and y have changed (in Bresenham)
 Force corresponding diagonal

Algorithm 1: Local mesh deformation

There are different ways of mesh deformation [2, 3]. Usually, mesh generators use some kind of parametrization; they, in fact, divide the mesh into several smaller meshes, which are "glued" together with the modelled boundary.

Let us suppose that we have a line segment, whose ends are fixed in nodes of the original (not yet deformed) mesh, say I_1 and I_2 . For the process of deformation, we will use an adaptation of the well-known Bresenham's algorithm. We will use it to find out which nodes should be moved during deformation. See Algorithm 1.

It is important to say that we move nodes only in direction of **one axis** (x or y). This is determined by slope α of the given line: for $0 \leq \alpha \leq \pi/4$, we will move the nodes only vertically, for $\pi/4 < \alpha \leq \pi/2$ horizontally.

After the deformation is done, we have to triangulate our mesh. But since we are in 2D, this is trivial - there are just two possible diagonals in each element. We will use the minmax criterion to choose one. The whole process of generating the required triangulation is illustrated on the Figure 4.

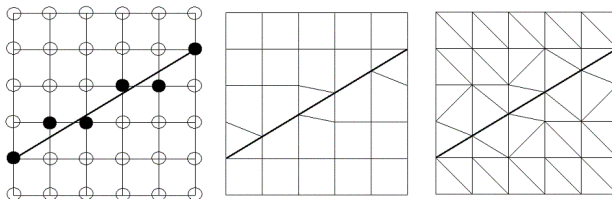


Figure 4: Mesh deformation (line segment modelling).

Now we would like to know whether our algorithm produces "nice" meshes in terms of angle criteria mentioned above. It shows that it does, since we can introduce this pleasing theorem:

Theorem. *Generated triangulation is optimal with respect to both minmax and maxmin angle criteria.*

Unfortunately, we don't have enough space to present the proof. It can be, however, found in [2].

By trivial observation, we can see that the theorem holds for the original (undeformed) grid - a square is an example of a quadrilateral, for which minmax and maxmin diagonal does not differ. The theorem also gives us an idea that with use of specific transformations, this relationship remains preserved. And what's more, the whole process is straightforward and easy to implement.

We can even weaken our assumption that the ends of the line are fixed in the nodes of the original mesh: for $0 \leq \alpha \leq \pi/4$, the ends can be allowed to change their y-coordinate (x-coordinate for $\pi/4 < \alpha \leq \pi/2$, respectively).

If we abandon the assumption completely, a little annoyance may occur, see Figure 5. The grey element obviously does not satisfy the minmax criterion. However, even with this possibility, our approach is worth fighting for: there at most two problematic places for one line segment (one by each end node) and the worst angle cannot be greater than $2\pi/3$.

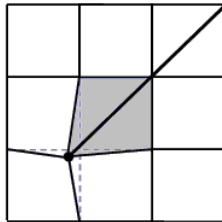


Figure 5: A possible problem when the assumption of fixed ends is abandoned.

5 Applications

As we mentioned before, there is a need of several meshes during FEM preprocessing, which vary in density a lot. However, their other attributes should be more or less the same: all of them should respect given geometry and all of them should fulfill certain quality criteria

Widely used parametric approach, in general, generates well-shaped triangles. But there is also a disadvantage: the generated triangulation is not homogenous in terms of density (and hence size of elements), see Figure 6.

This is not suitable for generating coarse meshes, since their elements should be approximately equally sized - a good reason to use local deformations. Our algorithm even produces minmax optimal triangulation, so there's no need to involve unstructured mesh.

In Table 1, we present results of experiments. We modelled line segments with three different slopes (5, 25 and 40 degrees) on a regular mesh of 10x10 nodes.

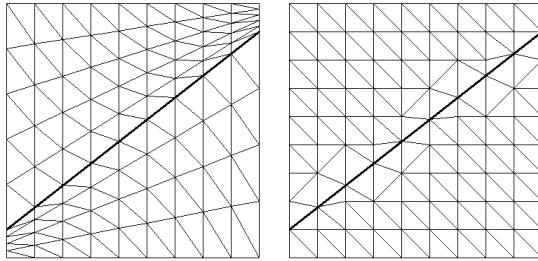


Figure 6: Parametrization vs. local deformations

We can see that for the 40 degrees case (which is also on Fig.14), parametric approach generates quite bad triangles.

Table 1: Experiments

<i>Loc. def. / Param.</i>	5°	25°	40°
Max	90.0 / 90.0	90.0 / 90.0	103.0 / 113.0
Min	29.1 / 38.7	29.1 / 26.6	25.3 / 9.0
avg. max	85.9 / 86.8	79.3 / 78.1	83.0 / 80.4
avg. min	39.8 / 43.2	43.6 / 43.0	43.4 / 38.2

6 Conclusion

We showed that certain kind of mesh deformation produces triangulations optimal with respect to both minmax angle and maxmin angle criteria. We also implemented algorithm for line segment modelling.

In the future, we would like to continue in our efforts to investigate local deformations of regular meshes.

- 1) A question arises whether it is possible to preserve good properties of the resulting triangulation when predefined geometry doesn't touch the diagonals of grid cells.
- 2) Generalization of our approach to model more complex shapes is interesting.
- 3) Generalization of our approach to 3D is important.

7 References

- [1] Edelsbrunner H., Tan T. S., Waupotitsch: An $O(n^2 \log n)$ time algorithm for the minmax angle triangulation, *SIAM J. Scientific & Statistical Computing*, 13 (4), 994-1008, 1992
- [2] Kahánek, P.: Strategie minmax a maxmin v pravidelných sítích, Diploma thesis, The University of Ostrava, 2004 (In Czech)
- [3] Kolcun, A: Preprocessing pre aplikáciu MKP v ulohach geomechaniky, disertation thesis, Institute of Geonics, AS CR, 1999 (In Slovak)
- [4] Kolingerová, I: Rovinne triangulace, habilitation thesis, University of West Bohemia, Pilsen, Czech Republic, 1999 (In Czech)

Mária Kmet'ová

DYNAMICKÉ GEOMETRICKÉ PROGRAMY VO VYUČOVANÍ BÉZIEROVÝCH KRIVIEK

Abstrakt

Príspevok pojednáva o možnosti využitia dynamického geometrického programu Euklides v skúmaní vlastností Bézierových kriviek. Sleduje sa hodograf Bézierovej krivky s inflexným bodom, bodom vratu a hodografy kriviek pri G1 a G2 spojitosti.

Kľúčové slová

Dynamický geometrický program, de Casteljauov algoritmus, Bézierova krivka, hodograf krivky

1 Úvod

Dynamické geometrické programy sa už osvedčili vo vyučovaní a výskume geometrie v rôznych oblastiach. Môžeme nimi skúmať geometrické miesta bodov, sledovať pohyb bodu pri pohybe iného bodu viazaného nejakým vzťahom k sledovanému bodu, uskutočňovať rôzne konštrukcie, podľa výsledkov vytvárať hypotézy a podobne. V tomto článku ukážeme ako dynamické geometrické programy uľahčujú vytváranie predstavy o niektorých krivkách (často vyššieho stupňa) používaných v počítačovej geometrii.

Z ponuky dynamických geometrických programov sme vybrali program Euklides, ale rovnako dobre použiteľný by bol aj iný podobný, jednoducho ovládateľný a ľahko dostupný program.

2 Skúmanie vlastností kriviek pomocou programu Euklides

Východiskom pre viaceré druhy aproximačných kriviek používaných v počítačovej geometrii sú Bézierove krivky.

Definícia. Nech sú dané body V_1, V_2, \dots, V_n . Parametrická krivka vyjadrená

vzťahom $X(t) = \sum_{i=0}^n V_i B_i^n(t)$, kde $t \in \langle 0, 1 \rangle$, $i = 0, 1, \dots, n$ a $B_i^n(t)$ sú

Bernsteinove polynómy n -tého stupňa, sa nazývajú Bézierova krivka n -tého stupňa. Body V_i sa nazývajú riadiacimi bodmi Bézierovej krivky.

Vidíme, že táto definícia nám podstatu Bézierových kriviek na prvý pohľad veľmi nepribližuje. Viac sa o nich dozvieme z algoritmu ich konštrukcie, tzv. de Casteljauovho algoritmu.

De Casteljauov algoritmus: Nech sú dané riadiace body Bézierovej krivky V_1, V_2, \dots, V_n a parameter $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Skonstruujeme postupne body V_i^r , $r=1, 2, \dots, n$, $i = 0, 1, \dots, n-r$, dané rekurzívnym predpisom

$$V_i^r(t) = (1-t)V_i^{r-1} + tV_{i+1}^{r-1},$$

kde $V_i^0 = V_i$ pre $i = 0, 1, \dots, n$.

Body $V_0^n(t)$ sú bodmi Bézierovej krivky n -tého stupňa daného v predchádzajúcej definícii. (Dôkaz pozri napr. v [1].)

3 Vykreslenie Bézierovej krivky na základe de Casteljauovho algoritmu

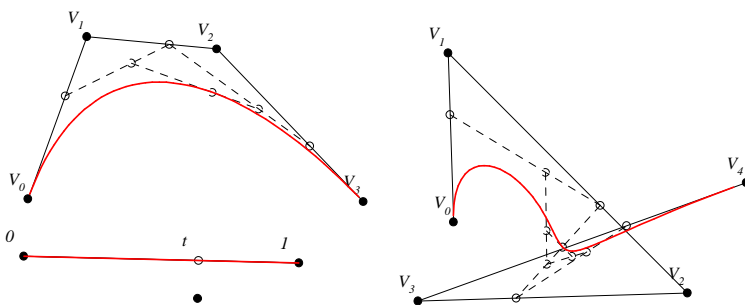
Ako z daného algoritmu vidíme, krivka je daná svojimi riadiacimi vrcholmi a jej tvar závisí iba od umiestnenia týchto bodov. Výhodou programu Euklides v tejto súvislosti je nezávislosť voľby základných prvkov od súradnicovej sústavy a možnosť skoro neobmedzenej zmeny polohy týchto prvkov. Znamená to, že po vytvorení jednej krivky napr. štvrtého stupňa, zmenou polohy jej riadiacich vrcholov môžeme skúmať všetky možné krivky štvrtého stupňa.

Vykreslenie krivky pomocou de Casteljauovho algoritmu

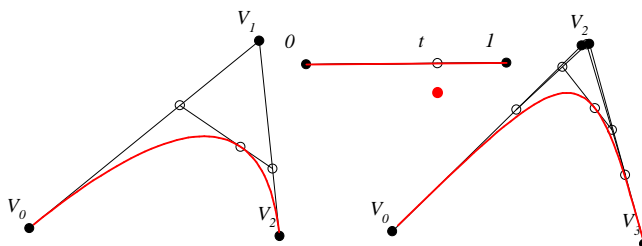
1. Voľba riadiacich vrcholov.
2. Určenie úsečky pre zmenu parametra $t \in \langle 0, 1 \rangle$ s pohyblivým deliacim bodom.
3. Rozdelenie úsečiek $V_i V_{i+1}$ v pomere danom deliacim bodom.
4. Opakovanie predchádzajúceho kroku pre úsečky $V_i^r V_{i+1}^r$, kým nedostaneme výsledný bod de Casteljauovho algoritmu.
5. Vykreslenie dráhy bodu krivky pre všetky parametre $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

Na obrázku 1 je Bézierova krivka 3. a 4. stupňa s rôzne umiestnenými riadiacimi vrcholmi.

Programom Euklides môžeme ľahko ilustrovat' aj vplyv viacnásobného riadiaceho bodu na tvar krivky tak, že dva riadiace body posunieme do jedného bodu. Na obrázku 2 môžeme porovnať Bézierovu krivku druhého a tretieho stupňa, ktorej dva prostredné riadiace body sú totožné.



Obrázok 1



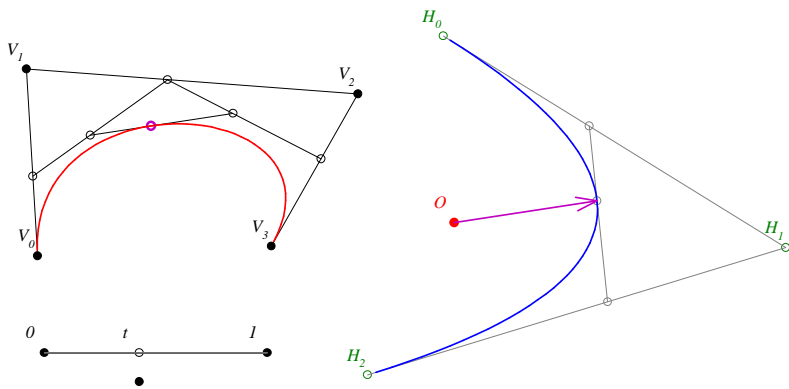
Obrázok 2

4 Hodograf krivky

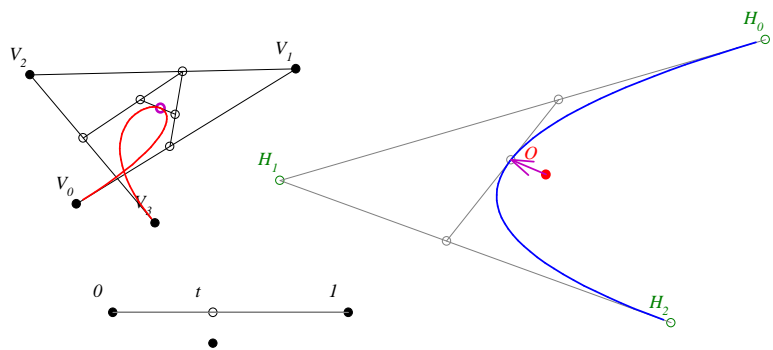
Veľmi zaujímavé je skúmanie tvaru krivky pomocou jej hodografu, ktorá vyjadruje zmenu smeru dotyčníc krivky. Na obrázkoch 3 až 5 sme znázornili smer dotyčnice krivky v bode patriacom k parametru t vyznačenou šípkou. Hodograf Bézierovej krivky sa dá zostrojiť ako Bézierova krivka daná riadiacimi bodmi H_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$, ktoré dostaneme ako koncové body vektorov umiestnených do počiatku O súradnicovej sústavy tak, aby platilo [2]:

$$H_i - O = V_{i+1} - V_i.$$

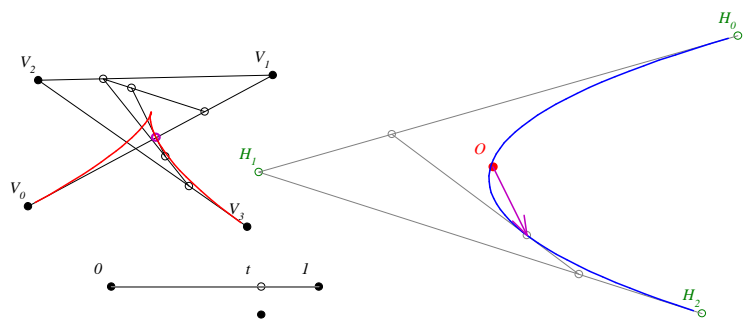
Z konštrukcie je jasné, že hodograf krivky bude mať o stupeň menej, ako samotná krivka. Na obrázku 3 je znázornená krivka a jej hodograf, a ďalej tieto krivky po niekoľkých podstatných zmenách. Po zmene riadiacich vrcholov: na obrázku 3a je krivka so slučkou a jej hodograf, na obrázku 3b je krivka s bodom vratu a jej hodograf a na obrázku 3c sa nachádza krivka s inflexným bodom a jej hodograf.



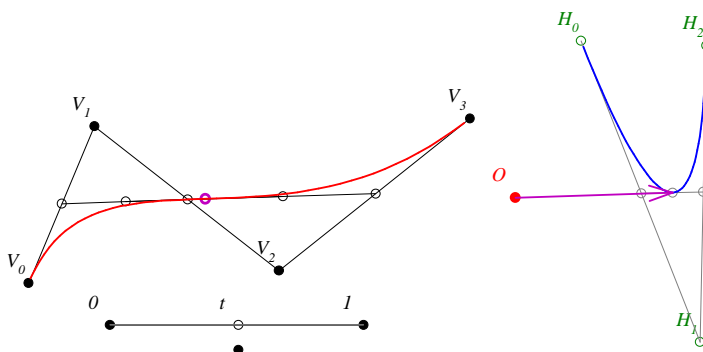
Obrázok 3



Obrázok 3a



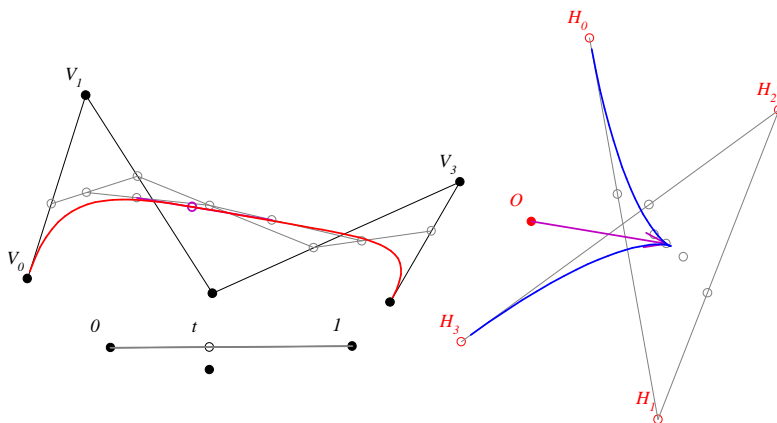
Obrázok 3b



Obrázok 3c

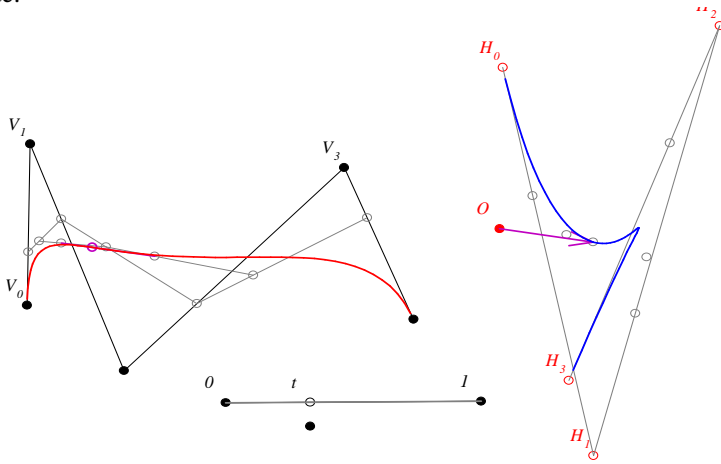
Môžeme si všimnúť, že hodograf krivky s bodom vratu prechádza počiatkom súradnicovej sústavy, čo znamená, že v bode vratu dotykový vektor krivky zmizne (je nulový). Hodograf krivky s inflexným bodom v bode prislúchajúcom parametru t má lokálny extrém v bode zodpovedajúcom parametru t .

Hodograf krivky s tzv. plochým bodom je krivka s bodom vratu (Obrázok 4).



Obrázok 4

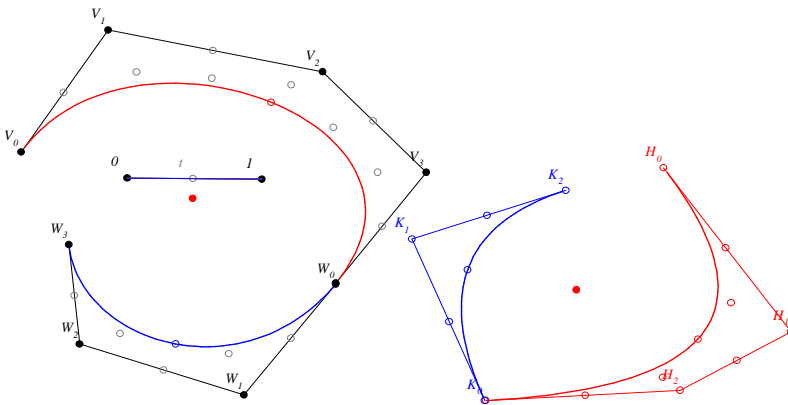
Na obrázku 5 je krivka s jedným inflexným a jedným plochým bodom, vyznačený je inflexný bod a na hodografe smer dotýčnice v inflexnom bode.



Obrázok 5

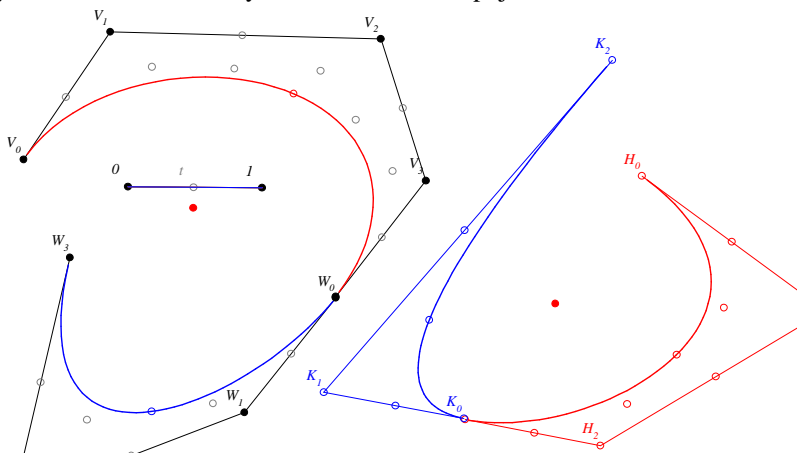
5 Spájanie Bézierových kriviek

V geometrickom modelovaní má dôležitú úlohu spájanie kriviek. Základ splajnových kriviek tvoria Bézierove krivky. Pri ich spájaní rozlišujeme rôzne stupne geometrickej spojitosti.



Obrázok 6

Triviálna je G^0 spojitosť, čo znamená, že koncový bod prvej krivky je totožný s počiatočným bodom druhej krivky. G^1 spojitosť je už skutočná hladkosť spojenia kriviek, znamená, že krivky v bode spoju majú spoločnú dotyčnicu. G^2 spojitosť znamená nielen spoločnú dotyčnicu, ale aj rovnako rýchlu zmenu smeru dotyčnice v okolí bodu spoju.



Obrázok 7

Na porovnanie G^1 a G^2 spojivosti môžeme využiť hodografy krivky. Na obrázku 6 sú znázornené Bézierove krivky štvrtého a tretieho stupňa dané radiaciami vrcholmi V_0, V_1, V_2, V_3, V_4 resp. W_0, W_1, W_2, W_3 a ich hodografy dané radiaciami vrcholmi H_0, H_1, H_2, H_3 resp. K_0, K_1, K_2 .

Pre G^0 spojitosť stačí ak $V_4=W_0$. Pre G^1 spojitosť podmienka spoločnej dotyčnice znamená, že body $V_3, V_4=W_0, W_1$ sú kolineárne. Na obrázku 6 sú krivky G^1 spojité a $|V_3V_4|=|W_0W_1|$, preto hodografy kriviek sú G^0 spojité.

Zmenou radiacích vrcholov V_2 a W_2 (pri nezmenenej polohe $V_3, V_4=W_0$ a W_1) môžeme dosiahnuť, aby hodografy kriviek boli G^1 spojité (t.j. body $H_2, H_3=K_0, K_1$ boli kolineárne) a teda príslušné krivky G^2 spojité (Obrázok 7). Program Euklides takto umožní sledovať vznik G^2 spojivosti kriviek z G^1 spojivosti zmenou jedného radiaceho vrcholu na obidvoch susedných krivkách. Ilustrujeme tým vlastnosť, že prvý radiaci vrchol po spoločnom vrchole kriviek má vplyv na G^1 spojitosť, a potom ďalší (druhý susedný) radiaci vrchol vplýva na G^2 spojitosť.

6 Záver

Program Euklides nám pomáha sledovať krivky v pohybe. Využitím de Casteljauovho algoritmu názorne môžeme ilustrovať rôzne vlastnosti kriviek. Hodografy kriviek zostrojujeme tiež podľa de Casteljauovho algoritmu. Pomocou hodografov môžeme sledovať podstatné zmeny tvaru kriviek a tiež vhodne ilustrovať a zviditeľniť rozdiel medzi G^1 a G^2 spojitou bez zložitejších výpočtov.

Pod'akovanie

Tento článok vznikol za podpory grantu KEGA 3/2321/04 s názvom Nové postupy vo vyučovaní stereometrie na základných a stredných školách s akcentom na rozvoj priestorovej predstavivosti.

Literatúra

- [1] Cohen, E., Riesenfeld, R.F., Elber, G.: *Geometric Modeling with Splines*, A K Peters, 2001
- [2] Farin, G.E., Hansford, D.: *The Essentials of CAGD*, A K Peters, 2000
- [3] Juhász, I.: *Számítógépi geometria és grafika*, Miskolc, 1995
- [4] www.euklides.hu

Milada Kočandrlová

ELIPSOID HOMOTETICKÝ K REFERENČNÍMU ELIPSOIDU

Abstrakt

V bistatické altimetrii se ze znalosti polohy dvou satelitů S_1 , S_2 a délky $2a$ signálu vyslaného z jednoho na druhý satelit hledá bod P odrazu signálu na zemském tělese. Ze všech bodů dané vlastnosti zvolíme ten, který je nejbližší středu Země a sestrojíme jím elipsoid homotetický k referenčním elipsoidům.

Klíčová slova

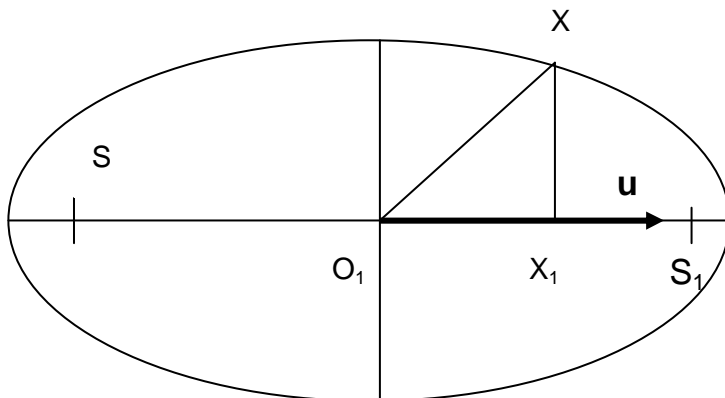
Bistatická altimetrie, referenční elipsoid, střed křivosti.

1 Úvod

Na elipsoidu odrazných bodů, označíme ho Q_1 , hledáme bod P , ve kterém se ho vně dotýká elipsoid homotetický s referenčním elipsoidem Q_0 .

2 Elipsoid odrazných bodů

Elipsoid Q_1 vyjádříme v geocentrické soustavě souřadnic. Jeho střed je bod $O_1 = (S_1 + S_2)/2$. Jednotkový vektor osy elipsoidu označíme $\mathbf{u} = (S_1 - S_2)/2e$.



Pro body X elipsy, jejíž rotací vzniká elipsoid Q_1 , platí

$$|O_1 X_1| = \mathbf{u}(X - O_1), \quad (1)$$

$$|XX_1|^2 = |O_1 X|^2 - |O_1 X_1|^2. \quad (2)$$

Středová rovnice této elipsy potom je

$$\frac{|O_1 X_1|^2}{a^2} + \frac{|XX_1|^2}{b^2} = 1. \quad (3)$$

Dosazením (1) a (2) do rovnice (3) postupně dostáváme rovnici (4) elipsoidu Q_1

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{u}(X - O_1))^2}{a^2} + \frac{(X - O_1)^2 - (\mathbf{u}(X - O_1))^2}{b^2} &= 1, \\ \frac{(X - O_1)^2}{b^2} + (\mathbf{u}(X - O_1))^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) &= 1, \\ (X - O_1)^2 - \frac{e^2}{a^2} (\mathbf{u}(X - O_1))^2 - b^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Rozepsáním do souřadnic má rovnice elipsoidu tvar

$$\begin{aligned} x_1^2 \left(1 - \frac{e^2 u_1^2}{a^2} \right) + x_2^2 \left(1 - \frac{e^2 u_2^2}{a^2} \right) + x_3^2 \left(1 - \frac{e^2 u_3^2}{a^2} \right) - \\ - 2x_1 x_2 \frac{e^2 u_1 u_2}{a^2} - 2x_1 x_3 \frac{e^2 u_1 u_3}{a^2} - 2x_2 x_3 \frac{e^2 u_2 u_3}{a^2} + \\ + 2x_1 \left(\frac{e^2}{a^2} u_1 (\mathbf{u} \mathbf{o}_1) - o_1 \right) + 2x_2 \left(\frac{e^2}{a^2} u_2 (\mathbf{u} \mathbf{o}_1) - o_2 \right) + \\ + 2x_3 \left(\frac{e^2}{a^2} u_3 (\mathbf{u} \mathbf{o}_1) - o_3 \right) + \mathbf{o}_1^2 - b^2 - \frac{e^2}{a^2} (\mathbf{u} \mathbf{o}_1)^2 = 0, \end{aligned}$$

kde jsme označili $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vektor osy elipsoidu Q_1 a $\mathbf{o}_1 = (o_1, o_2, o_3)$ radius vektor jejího středu O_1 .

Označíme-li ještě $\varepsilon = e/a$, matice elipsoidu je

$$F = \begin{pmatrix} \mathbf{o}_1^2 - b^2 - \varepsilon^2(\mathbf{u}\mathbf{o}_1)^2 & u_1\varepsilon^2(\mathbf{u}\mathbf{o}_1) - o_1 & u_2\varepsilon^2(\mathbf{u}\mathbf{o}_1) - o_2 & u_3\varepsilon^2(\mathbf{u}\mathbf{o}_1) - o_3 \\ u_1\varepsilon^2(\mathbf{u}\mathbf{o}_1) - o_1 & 1 - u_1^2\varepsilon^2 & -u_1u_2\varepsilon^2 & -u_1u_3\varepsilon^2 \\ u_2\varepsilon^2(\mathbf{u}\mathbf{o}_1) - o_2 & -u_1u_2\varepsilon^2 & 1 - u_2^2\varepsilon^2 & -u_2u_3\varepsilon^2 \\ u_3\varepsilon^2(\mathbf{u}\mathbf{o}_1) - o_3 & -u_1u_3\varepsilon^2 & -u_2u_3\varepsilon^2 & 1 - u_3^2\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

3 Afinita referenčního elipsoidu

Afinita, která převádí referenční elipsoid Q_0 , s poloosami a_0, b_0 , na sféru, bude mít vyjádření

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z/q, \quad (5)$$

kde jsme označili $q = b_0/a_0$.

V této afinitě je obrazem rotačního elipsoidu Q_1 nerotační elipsoid, označíme ho Q'_1 . Jestliže $f_{ij}, i, j = 0, \dots, 3$, jsou prvky matice F , potom

$$F' = \begin{pmatrix} f_{00} & f_{01} & f_{02} & qf_{03} \\ f_{01} & f_{11} & f_{12} & qf_{13} \\ f_{02} & f_{12} & f_{22} & qf_{23} \\ qf_{03} & qf_{13} & qf_{23} & q^2 f_{33} \end{pmatrix}$$

je matice elipsoidu Q'_1 . Tím je řešená úloha transformována na úlohu najít na daném elipsoidu Q'_1 bod, který je nejbližší středu referenčního elipsoidu, tedy i afinní sféry.

4 Minimální vzdálenost bodu od elipsoidu

Označíme O_0 , resp. O'_1 střed referenčního elipsoidu Q_0 , resp. elipsoidu Q'_1 . Úsečka $O_0O'_1$ protíná elipsoid Q'_1 v bodě P' . V bodě P' zvolíme normálovou rovinu elipsoidu Q'_1 , která obsahuje bod O_0 , jednotkový normálový vektor \mathbf{n} a jednotkový tečný vektor \mathbf{t} elipsoidu Q'_1 v bodě P' . Přitom normálový vektor orientujeme dovnitř elipsoidu.

V bodě P' určíme střed normálové křivosti elipsoidu O'_1 ve směru tečného vektoru. Tento střed přebírá úlohu bodu O'_1 , tj. určíme průsečík P' nové úsečky $O_0O'_1$ s elipsoidem Q'_1 . Tak sestojíme posloupnost průsečíků P' s elipsoidem Q'_1 , která konverguje k bodu elipsoidu Q'_1 o nejmenší vzdálenosti od středu referenčního elipsoidu Q_0 .

Podmínku cyklu lze volit obvyklým způsobem – počet iterací, vzdálenost bodu P' ve dvou po sobě jdoucích iteracích apod. Ukazuje se, že plně stačí deset iterací.

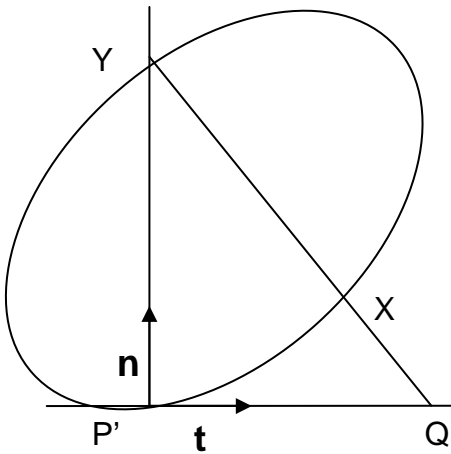
5 Střed křivosti normálového řezu elipsoidu

Střed normálové křivosti elipsoidu Q'_1 v bodě P' je středem křivosti jeho normálového řezu. Abychom tento řez analyticky popsali, zvolíme v normálové rovině kartézskou soustavu souřadnic $\langle P, \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle$. Rovnice elipsy řezu v příslušných homogenních souřadnicích bude

$$(x_0, x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (6)$$

kde $a_{00} = 0$. Rovnice její tečny v počátku je

$$a_{01}x_1 + a_{02}x_2 = 0.$$



Odtud plyne $a_{01} = 0$. Rovnice (6) v kartézských souřadnicích nyní je

$$a_{11}x^2 + 2a_{02}xy + a_{22}y^2 = 0. \quad (7)$$

ELIPSOID HOMOTETICKÝ K REFERENČNÍMU ELIPSOIDU

Pro některé výpočty v algoritmu je vhodné parametrické vyjádření elipsy (7). Budeme ji parametrizovat svazkem přímek o středu v bodě Y , tj. průsečík s osou y , bod $Y = [0, -2a_{02}/a_{22}]$.

Druhým bodem těchto přímek bude jejich průsečík s osou x , označíme ho $Q = [t, 0]$. Potom parametrické vyjádření svazku přímek je

$$X = Y + \alpha(Q - Y) = \left[\alpha, \frac{2a_{02}}{a_{22}}(\alpha - 1) \right]. \quad (8)$$

Bod X z rovnice (8) dosadíme do rovnice (7) elipsy a vypočítáme parametr α

$$\alpha = \frac{4a_{02}(a_{12}t + a_{02})}{a_{11}a_{22}t^2 + 4a_{02}a_{12}t + 4a_{02}^2}.$$

Potom dosazením do (8) dostáváme hledanou parametrizaci elipsy

$$X = \left[\frac{4a_{02}(a_{12}t + a_{02})t}{a_{11}a_{22}t^2 + 4a_{02}a_{12}t + 4a_{02}^2}, \frac{-2a_{02}a_{11}t^2}{a_{11}a_{22}t^2 + 4a_{02}a_{12}t + 4a_{02}^2} \right]. \quad (9)$$

Pro křivost k křivky, dané explicitní rovnicí $y = y(x)$, platí známý vzorec

$$k = \frac{y''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}.$$

Obě derivace vypočítáme z implicitní rovnice (7) elipsy. Je

$$0 = a_{11}x + a_{02}y' + a_{12}y + a_{12}xy' + a_{22}yy',$$

$$0 = a_{11} + a_{02}y'' + 2a_{12}y' + a_{12}xy'' + a_{22}y'^2 + a_{22}yy''.$$

Odtud derivace v bodě P' jsou

$$y' = 0, \quad y'' = -\frac{a_{11}}{a_{02}}.$$

Potom hledaná křivost je $k = y''$ a odpovídající poloměr křivosti její převrácená hodnota, tj.

$$r = \frac{a_{02}}{a_{11}}.$$

Střed křivosti elipsy v bodě P' je $S = P' + r\mathbf{n}$.

6 Homotetický elipsoid

K bodu P' elipsoidu Q'_1 v inverzní afinitě k afinitě (5) určíme obraz P na elipsoidu Q_1 . Pro různé geodetické výpočty se používají různé referenční elipsoidy, v současné době je jich aspoň padesát. Elipsoid procházející odrazným bodem P určíme stejnolehlostí o středu O_0 . Koefficient této stejnolehlosti je dán dvojicí bodů P, P_0 , kde P_0 je průsečík polopřímky O_0P s referenčním elipsoidem Q_0 .

7 Závěr

Toto je jedno z komplexních matematických řešení problému bistatické altimetrie. Další lze najít v [1], [2].

Literatura

- [1] Kočandrllová M.: *Singulární kvadriky v modelu GPS-altimetrie*, Sborník 24. konference GCG, VŠB-TU Ostrava, 2004, str. 76-9
- [2] Kočandrllová M.: *Středy normálových křivostí elipsoidu v modelu bistatické altimetrie*, Proceedings of Symposium on Computer Geometry, v.14, SSGG, Kočovce, 2005, str. 37-41

Jiří Kosinka

APPROXIMATING MEDIAL AXIS TRANSFORMS OF PLANAR DOMAINS

Abstract

Curves in Minkowski 3-space are very well suited to describe the medial axis transform (MAT) of a planar domain. We will focus on an approximation of the MAT by Minkowski Pythagorean hodograph (MPH) curves, as they correspond to domains, where both the boundaries and their offsets admit rational parameterizations [5].

Keywords

Hermite interpolation, Pythagorean hodograph curves, Minkowski space.

1 Introduction and preliminaries

Pythagorean hodograph (PH) curves (see [2]) form a special subclass of polynomial parametric curves. They have a piecewise polynomial arc length function and planar PH curves admit exact rational parameterizations of their offsets. These curves may be utilized for solving various difficult problems in applications, e.g. in CAD and CAM systems.

Curves in three-dimensional Minkowski space can be used to represent the medial axis transform (MAT) of a planar domain. Among them, Minkowski Pythagorean hodograph (MPH) curves correspond to planar domains, where both the boundaries and their offset (parallel) curves admit rational parametric representations [5].

The present paper is devoted to the G^1 Hermite interpolation of a space-like analytic curve considered as an MAT by MPH cubics, which seems to be a promising method for this construction ([1], [4]).

In the following subsections we recall and summarize some basic concepts and results concerning Minkowski space, medial axis transform and MPH curves (refer to the publications listed at the end of this paper for further details).

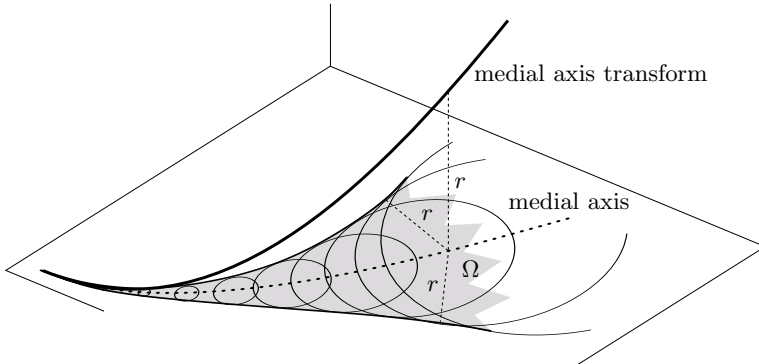


Figure 1: Medial axis transform of a planar domain.

1.1 Minkowski space

The three-dimensional Minkowski space $\mathbb{R}^{2,1}$ is a real vector space with an indefinite inner product given by $G = \text{diag}(1, 1, -1)$. The inner product of two vectors $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^\top$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^\top$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2,1}$ is defined as $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^\top G \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3$. The three axes spanned by the vectors $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^\top$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^\top$ and $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^\top$ will be denoted as the x -, y - and r -axis, respectively.

The square norm of \mathbf{u} is defined by $\|\mathbf{u}\|^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$. Motivated by the theory of relativity we distinguish three so-called ‘causal characters’ of vectors. A vector \mathbf{u} is said to be space-like if $\|\mathbf{u}\|^2 > 0$, time-like if $\|\mathbf{u}\|^2 < 0$, and light-like if $\|\mathbf{u}\|^2 = 0$.

A linear transform $L : \mathbb{R}^{2,1} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ is called a Lorentz transform if it maintains the Minkowski inner product, i.e. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle L\mathbf{u}, L\mathbf{v} \rangle$ for all $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2,1}$. The group of all Lorentz transforms $\mathcal{L} = O(2, 1)$ is called the Lorentz group.

1.2 MPH curves and the MAT

Recall that a polynomial curve in Euclidean space is said to be a Pythagorean hodograph (PH) curve (cf. [3]), if the norm of its first derivative (or hodograph) is a (possibly piecewise) polynomial. Following [5], MPH curves are defined similarly, but with respect to the norm induced by the Minkowski inner product. More precisely, a polynomial curve $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{2,1}$, $\mathbf{c} = (x, y, r)^\top$ is called an MPH curve if $x'^2 + y'^2 - r'^2 = \sigma^2$ for some polynomial σ .

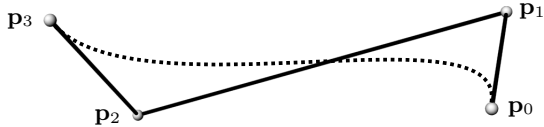


Figure 2: MPH cubic interpolant in Bézier form.

Consider a domain $\Omega \in \mathbb{R}^2$ (see Fig. 1). The medial axis (MA) of Ω is the locus of all the centers of maximal disks touching the boundary $\partial\Omega$ in at least two points, which are inscribed into the domain Ω . Let $(x(t), y(t))^\top$ be a parametrization of the medial axis of Ω and let $r(t)$ be a radius function, which specifies the radii of the maximal disks with centers at $(x(t), y(t))$. The corresponding part of the medial axis transform (MAT) is then a spatial curve $(x(t), y(t), r(t))^\top$.

On the other hand, given a segment of the MAT, we can recover the original domain by forming the union of the MAT disks. Its boundary $\partial\Omega$ is obtained as the envelope of the medial axis circles. Moreover, δ -offsets of $\partial\Omega$ may be computed in the same way by lifting the MAT to $(x(t), y(t), r(t) \pm \delta)^\top$.

Remark 1 As observed in [1] and [5], if the medial axis transform (MAT) of a planar domain is an MPH curve, then the coordinate functions of the corresponding boundary curves and their offsets are rational.

A curve segment $\mathbf{c}(t) \in \mathbb{R}^{2,1}$, $t \in [a, b]$ is called space-, time- or light-like if its tangent vector $\mathbf{c}'(t)$, $t \in [a, b]$ is space-, time- or light-like, respectively (see [6]).

2 G^1 Hermite interpolation by MPH cubics

Due to the space limitations, we present only an outline of the G^1 interpolation problem along with obtained results.

2.1 Solvability

Let us consider an MPH cubic $\mathbf{g}(t)$ in Bézier form

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{p}_0 (1 - t)^3 + \mathbf{p}_1 3t(1 - t)^2 + \mathbf{p}_2 3t^2(1 - t) + \mathbf{p}_3 t^3, \quad t \in [0, 1],$$



Figure 3: Asymptotic analysis of the existence of interpolants.

which is to interpolate two given points $\mathbf{q}_0 = \mathbf{p}_0$ and $\mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_3$, and the associated space-like unit tangent directions \mathbf{t}_0 and \mathbf{t}_1 , see Fig. 2. It turns out that this interpolation problem leads to two quadratic equations, which yield up to four distinct MPH cubic interpolants.

In order to analyze the solvability of the problem, we shall simplify the given input data without loss of generality as far as possible. First, we move the starting point \mathbf{p}_0 of the curve $\mathbf{g}(t)$ to the origin, while the endpoint \mathbf{p}_3 remains arbitrary. Then we apply Lorenz transforms to map the input data to one out of five canonical positions depending on the causal characters of the sum and difference of \mathbf{t}_0 and \mathbf{t}_1 . In order to obtain solutions, the endpoint \mathbf{q}_1 has to lie inside certain quadratic cone, which depends solely on the input Hermite data. A thorough discussion of the number of interpolants is given in [4].

2.2 Asymptotic analysis

Consider a space-like curve segment $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s)$ with $s \in [0, S_{max}]$ in Minkowski space. The coordinate functions are assumed to be analytic. For a given step-size h , we generate points and tangents at the points $s = ih$, $i = 0, 1, 2, \dots$ and apply the G^1 Hermite interpolation procedure by MPH cubics to the pairs of adjacent points and tangents, cf. Fig. 3. With the help of Taylor expansions we analyze the existence and the behavior of the solutions for decreasing step-size $h \rightarrow 0$.

If the principal normal vector of \mathbf{p} is space-like or time-like, the G^1 interpolation has four solutions, provided that the step-size $h > 0$ is sufficiently small. Exactly one among them matches the orientation of the given tangent vectors. This solution has the approximation order four. The approximation order reduces to two at isolated Minkowski inflections, i.e. when the principal normal vector of \mathbf{p} is light-like for $s = 0$.

2.3 Example

We apply the G^1 Hermite interpolation scheme to the curve segment $\mathbf{c}(t) = (0.7e^t, 2.7 \ln(1+t), \sin t)^\top$, $t \in [0, 1]$. All four interpolants are shown in Fig. 4 along with the rational approximations of the original domain boundary $\partial\Omega$. In this case, the second interpolant is the best one.

3 Conclusion

In this paper we described the conditions for the existence and the number of MPH cubic interpolants. Moreover, we presented an approach to the approximate conversion of a space-like analytic curve (medial axis transform) into an MPH cubic spline. The approximation order is generally equal to four, but it reduces to two at isolated Minkowski inflections.

Acknowledgements

The author would like to thank the Austrian Science fund for supporting this research through project P17387-N12.

References

- [1] H. I. Choi, Ch. Y. Han, H. P. Moon, K. H. Roh & N. S. Wee: *Medial axis transform and offset curves by Minkowski Pythagorean hodograph curves*, Computer-Aided Design, 31, 1999, pp. 59–72.
- [2] R. T. Farouki: *Pythagorean-hodograph curves*, Handbook of Computer Aided Geometric Design (J. Hoschek, G. Farin & M.-S. Kim, eds.), Elsevier, 2002, 405–427.
- [3] R. T. Farouki & T. Sakkalis: *Pythagorean hodographs*, IBM Journal of Research and Development, 34, 1990, pp. 736–752.
- [4] J. Kosinka & B. Jüttler: *G^1 Hermite Interpolation by Minkowski Pythagorean Hodograph Cubics*, submitted to CAGD.
- [5] H. P. Moon: *Minkowski Pythagorean hodographs*, 1999, Computer Aided Geometric Design, 16, 739–753.
- [6] J. Walrave: *Curves and surfaces in Minkowski space*, Doctoral thesis, K. U. Leuven, Fac. of Science, Leuven, 1995.

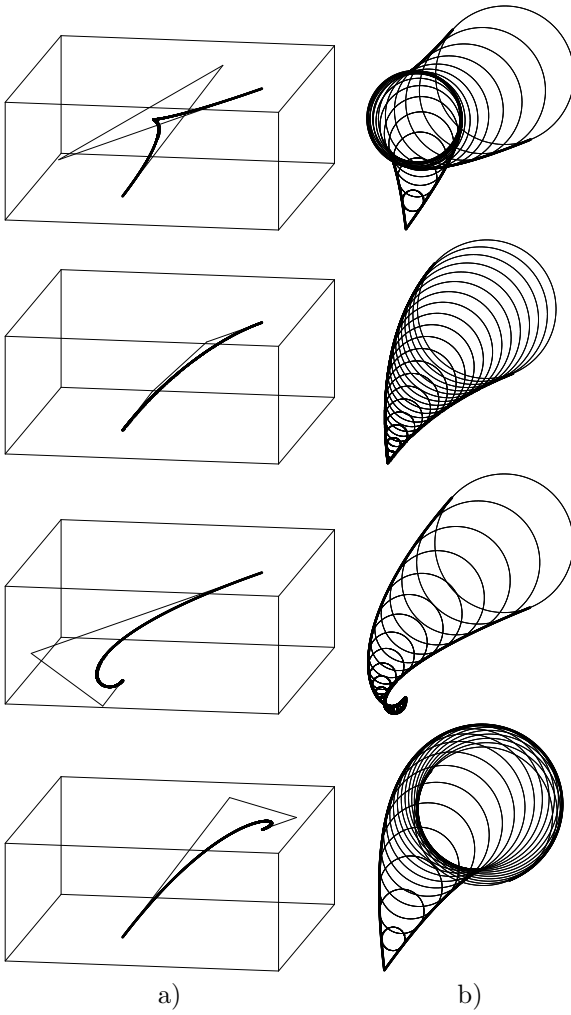


Figure 4: a) Four interpolants to the given medial axis transform, b) corresponding circles and their rational envelopes.

Iva Křivková

POUŽITÍ PROGRAMU GEOMETRICA 02

Abstrakt

Geometrica je rozšířením programu Mathematica a slouží k snadnější práci s geometrickými objekty (bod, přímka, rovina, plocha). Příspěvek se zabývá možnostmi, přínosy a limity tohoto programu při řešení úloh středoškolské i vysokoškolské geometrie.

Klíčová slova

Geometrica, Mathematica, vizualizace, analytická geometrie

1 Grafické možnosti programu Mathematica

Snaha o geometrické a grafické využití širokých možností softwaru Mathematica není novinkou. Již i starší verze umožňovaly různými způsoby prezentovat grafiku. Základní grafická primitiva, se kterými bylo možné pracovat, byla např. Point, Line, Polygon, Circle, či Disk. Vlastní kresba pak byla realizována především příkazy Plot, ParametricPlot, Plot3D a ParametricPlot3D s možnostmi výběru doplňujících podmínek, např. Frame, Box, Axes, Tickness. Zobrazení se provádělo v trojúhelníkové perspektivě s možností volby středu promítání. Částečně bylo také možné použít osvětlení. Tento nástroj byl sice poněkud těžkopádný, ale jak dokázaly mnohé semestrální práce, studenti byli schopni dosáhnout pěkných výsledků. Každou geometrickou konstrukci nad rámec základních příkazů však bylo nutné naprogramovat samostatně.

2 Objekty modulu Geometrica a práce s nimi

Geometrica je rozšířením programu Mathematica, které má zjednodušit práci s geometrickými objekty. Základní grafická primitiva ani způsob práce se nemění, ale nabízí se možnost pracovat s řadou hotových speciálních příkazů, které práci usnadní.

Především se nabízí výběr, zda chceme pracovat s objekty zadanými „euklidovskými“ nebo „kartézskými“. To se odlišuje písmeny E a C u příslušného příkazu (např. ELine, CLine), ale program provádí automaticky konverzi na zadání v kartézských souřadnicích. Speciální objekty, které bez použití softwaru Geometrica bylo nutné naprogramovat, jsou:

- body (např. BrianchonPoint, CenterOfGravity, Circumcenter, Orthcenter, Pole)
- přímky (např. Altitudes, Asymptotes, Bisector, ConicAxes, Diagonals, Directrix, Medians, Normals, Polar)
- roviny (např. Bisector a Plane)
- kuželosečky a kvadriky (např. CConic, Conic, Quadric, ECircle, Sphere, Ellipse, Parabola, Paraboloid)
- křivky a plochy (např. Bezier, Cubic, Cone, Cylinder, SolidOfRevolution)
- lomené čáry, mnohoúhelníky a mnohostěny (např. Isosceles, Diamond, Cube, PlatonicSolid, Pyramid).

Se zadanými objekty je možné provádět transformace nejen shodné nebo afinní, ale také např. kruhovou inverzi. Rovněž můžeme získat údaje o délkách, vzdálenostech, úhlech nebo plošných obsazích. Vzhledem k numeric-ky prováděným reprezentacím euklidovských konstrukcí jsou užitečné příkazy testovací (např. Coplanar, TangentQ, ParallelQ).

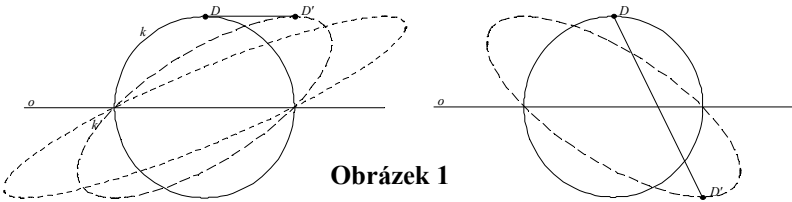
3 Řešení úloh se softwarem Geometrica

Dříve než v rámci práce s programem Mathematica použijeme modul Geometrica 02, je nutné provést příkaz `<<Geometrica`Geometrica02``.

Částí středoškolského kurzu matematiky, kde je vizualizace pojmů rozhodně užitečná, je analytická geometrie. Za souřadnicemi bodů či rovnicemi přímek často studenti nevidí jejich grafickou podobu. Geometrica může být v tomto směru dobrým nástrojem. Nejjednodušším použitím je sledování vlivu změny parametrů v obecné rovnici přímky, kdy je výhodné použít příkazy StoryBoard nebo Movie. Stejným způsobem je možné pracovat s afinitou v rovině i v prostoru, kde podle zkušeností se studenty 1. ročníku FSv ČVUT je propojení stránky analytické a grafické prakticky nulové.

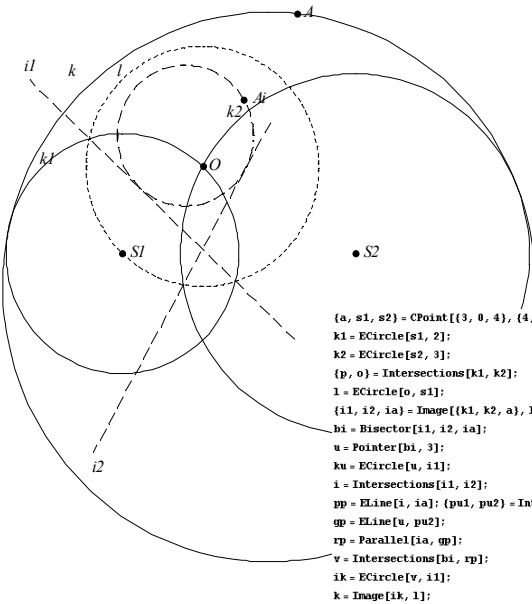
Dalším námětem pro použití programu Geometrica je hledání involutorní afinity. Osová afinita je zadána rovnicemi $x' = x + y$, $y' = y$. V levé části obr. 1 jsou zachyceny kružnice k , její obraz k' v této afinitě, osa o a dvojice bodů D a D' , které jsou vzorem a obrazem. Pokud zobrazíme elipsu k' v této afinitě ještě jednou, získáme další elipsu k'' . Úkolem je modifikovat rovnice afinity tak, aby elipsa k'' splynula s původní kružnicí k . V pravé části obr. 1 je zachycena situace pro afinitu $x' = x + y$, $y' = -y$, která tento požadavek splňuje. Úvahy by pak pro studenta měly směřovat k odhalení nutnosti, aby střed úsečky DD' ležel na ose afinity o (testovací příkaz OfQ), a k zavedení pojmu charakteristika afinity. Program Geometrica umožňuje snadno získat metrické údaje o délkách úseček, velikostech úhlů a plošných

obsazích (příkazy Distance, Angle a Area), je možné hledat kromě involucí také zobrazení shodná, konformní nebo ekviafínní.



Obrázek 1

Jako ukázkou použití programu Geometrica při řešení čistě konstrukční úlohy uvedme jednu z Apolloniových úloh. Máme sestavit alespoň jednu kružnici, která se dotýká zadaných kružnic k_1, k_2 a prochází bodem A . Na obr. 2 je kromě grafického výstupu řešení tohoto příkladu posloupnost příkazů, které k němu vedou. Geometrica poskytuje možnost získat obraz objektu v kruhové inverzi (Image), která je jedna z mála nelineárních transformací, se kterými se studenti mohou setkat. Proto její konstrukční využití může být pro studenty zajímavé.



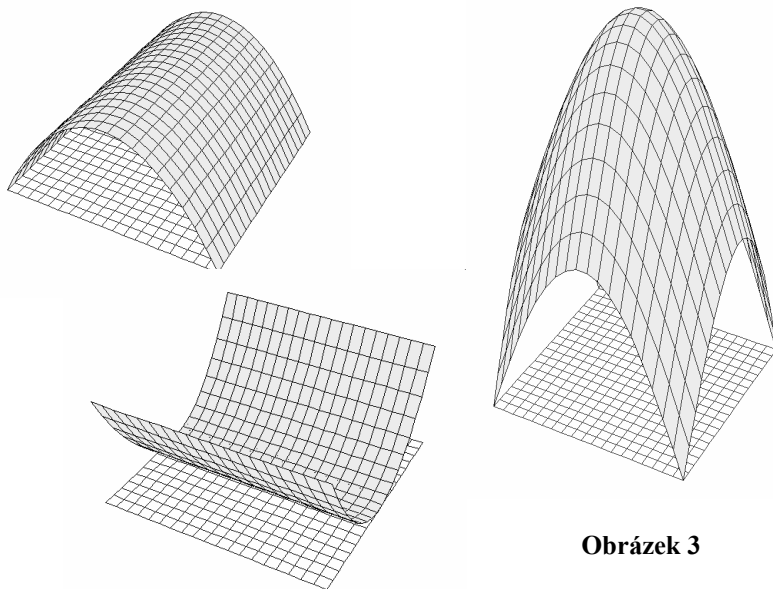
```
(a, s1, s2) = CPoint[{3, 0, 4}, {4, 0, 0}];
k1 = ECircle[s1, 2];
k2 = ECircle[s2, 3];
{p, o} = Intersections[k1, k2];
l = ECircle[o, s1];
{i1, i2, ia} = Image[{k1, k2, a}, l];
bi = Bisector[i1, i2, ia];
u = Pointer[bi, 3];
ku = ECircle[u, i1];
i = Intersections[i1, i2];
pp = ELine[i, ia]; {pu1, pu2} = Intersections[ku, pp];
gp = ELine[u, pu2];
rp = Parallel[ia, gp];
v = Intersections[bi, rp];
ik = ECircle[v, i1];
k = Image[ik, l];
leg = Legend[{"R", "R1", "S1", "S2", "k1", "k2", "k", "k'", "i1", "i2",
"0", "1"}, {a, ia, s1, s2, k1, k2, k, i1, i2, o, l}, Offset -> {1, 0}];
Draw[leg, a, ia, s1, s2, k1, k2, o, k, AbsoluteDashing[{3, 3}],
l, AbsoluteDashing[{10, 5}], i1, i2, ik];
```

Obrázek 2

V trojrozměrném euklidovském prostoru se objekty zobrazují příkazem Draw3D. Je-li rovina zadána obecnou rovnicí, zobrazuje se z ní část, která je symetrická podle kolmého průmětu počátku soustavy souřadnic do této roviny. Pokud chceme zobrazovanou část změnit, je nejkratší cestou použití příkazu PlaneOrigin, kdy se pak vykreslí část roviny kolem kolmého průmětu libovolného zvoleného bodu. Chceme-li, aby zadané objekty byly zobrazeny s uplatněním viditelnosti, je možné např. použít příkaz Paint.

Výhodnost snadné vizualizace v trojrozměrném prostoru pomocí programu Geometrica můžeme dokumentovat na formování plochy nad čtvercovým půdorysem. Pokud použijeme příkaz Paraxial, lze pracovat se širokou nabídkou použitelných funkcí programu Mathematica. Zadáme-li parametricky plochu Ω , pak příkazem Paraxial $[\Omega, f]$ získáme plochu, která je tvořena body ve vzdálenosti f od plochy Ω , přitom f je funkce dvou proměnných. Na obr. 3 je čtvercový půdorys modifikován funkcemi

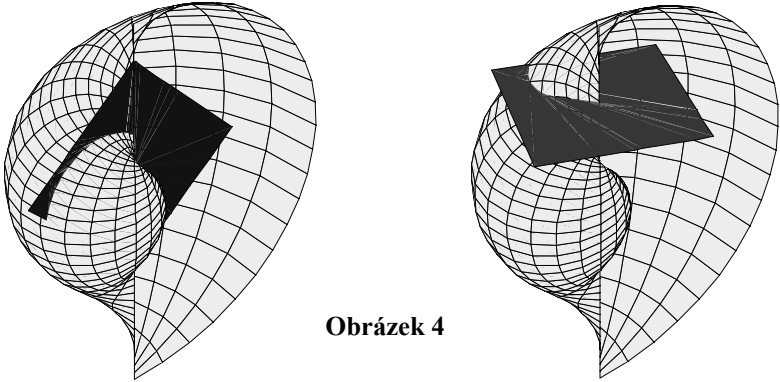
$$f = -2(t_1 - 0.5)^2 + 0.5, \quad f = 2(t_2 - 0.5)^2 \quad \text{a} \quad f = \sin \pi t_1 + \sin \pi t_2.$$



Obrázek 3

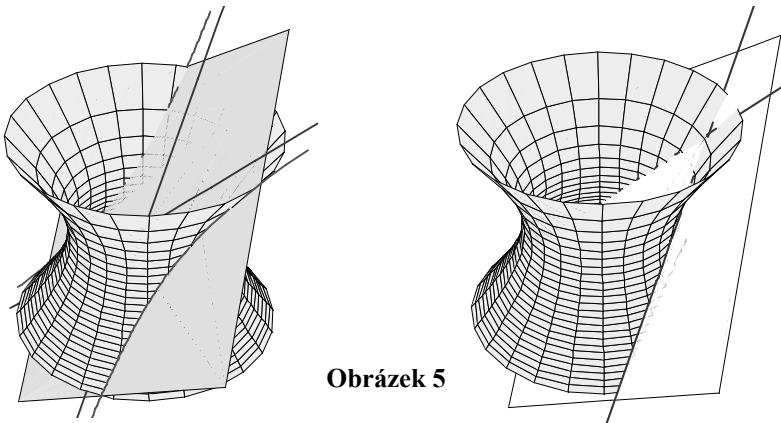
V situaci, kdy výchozí plochou je část roviny, se výhodnost příkazu Paraxial plně neprojeví, stejného efektu bychom docílili příkazem ParametricPlot3D, ale výchozí plocha Ω může být libovolná a lze získat velmi zajímavé výsledky. Na obr. 4 je např. použita jako výchozí kulová plocha,

modifikující funkce je $f = t_1 - t_2$. Výsledná plocha má dosti komplikovaný tvar a pro lepší představu o něm jsou doplněny řezy rovinami.



Obrázek 4

Chceme-li s programem Geometrica studovat kuželosečky a kvadriky, nemusíme se omezit jen na grafický výstup, ale přejít od euklidovského určení k analytickému popisu. Např. v obr. 5 je zadán jednodílný rotační hyperboloid $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ a dvě roviny řezu s obecnými rovnicemi $x + y - z = 0$ a $x + y - z - 1 = 0$. Roviny lze ovšem zadat i trojicí nekomplanárních bodů nebo jinou euklidovskou konstrukcí. Použijeme-li příkaz Intersections, můžeme nejen rozhodnout, zda řezem je elipsa, hyperbola či např. dvojice různoběžek, ale získat i jejich analytické vyjádření. S průnikovou křivkou je možné dále pracovat, u hyperbolického řezu získat asymptoty, střed, osy, ohniska, řídící přímku (vykresleny jsou pouze



Obrázek 5

asymptoty). V tomto směru je Geometrica vybavena dostatečným aparátem. Bohužel chybí možnost práce s projektivními transformacemi.

Postup od kuželosečky v trojrozměrném prostoru k planimetrickým konstrukcím není složitý, komplikovanější je zadat kuželosečku v obecné rovině. K tomu slouží příkaz `CConic[c,p]`, kde c je kuželosečka a p zvolená rovina. Pokud je rovnice roviny p $z = 0$, výsledek příkazu tentýž jako `To3D[c]`, jde-li o rovinu $z = d$, provede se posunutí, ale pokud se jedná o jinou rovinu, je kuželosečka získána otočením do roviny p kolem průsečnice s rovinou $z = 0$. Pokud se nejedná o některou ze souřadnicových rovin, je tento postup zadávání dosti náročný. Chybí možnost zadat kuželosečku v obecné rovině např. středem, hlavním vrcholem a délkou vedlejší poloosy.

4 Přínosy a nevýhody programu Geometrica

Rozhodnutí, jaký grafický software bude neúčelnější pro výuku, je závislé na cíli, který si klademe. Chceme-li získat rychle a snadno obrázky jednoduchých geometrických objektů, není Geometrica tím nejlepším krokem. Pokud ale chceme vizualizovat analytickou geometrii v rovině i prostoru, může být tento nástroj velmi účelný. Je možné zapojit všechny části programu Mathematica. Náповěda je zpracována podrobně. Největší přínos je v možnosti pracovat se symbolickými objekty. Spojení analytické geometrie s vizuální stránkou zvyšuje názornost, algebraické pojmy nezůstávají odtržené od jejich geometrické interpretace. Navíc chceme-li získat pomocí programu Geometrica grafický výstup, je nutné přesně promyslet posloupnost příkazů. I to lze označit z výchovného hlediska za přínos. Pokud požadovaný výstup má směřovat spíše k technickému výkresu, pak podpora CAD funkcí není příliš bohatá. Pracná je změna typu čáry, popis objektů je nutné často upravovat příkazem `Offset`. S grafikou je jen málo možné manipulovat myší. To jsou ovšem jen technické připomínky. V oblasti obsahové by bylo vhodné doplnit projektivní transformace, obzvláště proto, že část zabývající se kuželosečkami je zpracována do velké šíře. Totéž platí o zmíněném zadávání kuželosečky v obecné rovině. Jinak totiž základní středoškolské učivo program Geometrica 02 nejen dostatečně pokrývá, ale i přesahuje.

Literatura

- [1] J. Černý: *Konstruktivní geometrie. Křivky a plochy se softwarem Mathematica*, Vydavatelství ČVUT, Praha, 1999.
- [2] Geometrica 02, uživatelský manuál, Video Atelier, 1997-2003.

Karolína Kundrátová

NURBS REPREZENTACE KŘIVEK V MAPLE

Abstrakt

Parametrizace křivek jako NURBS (tj. neuniformní racionální B-spliny) patří k moderním postupům geometrického modelování. V příspěvku je uveden obecný výpočet takovéto reprezentace křivek pomocí matematického programu Maple.

Klíčová slova

NURBS křivka, Maple.

1 Úvod

Jedním ze základních úkolů, které jsou řešeny v geometrickém modelování, je otázka, jak množinou bodů v rovině či prostoru proložit křivku vhodného tvaru. Víme, že takové křivky můžeme rozdělit do dvou skupin: na ty, které procházejí danými body (interpolační křivky), a ty, které sledují tvar lomené čáry spojující řídicí body, tzv. řídicí polygon (aproximační křivky). Existuje mnoho metod, jak interpolaci či aproximaci provést. Článek se zabývá aproximací pomocí NURBS.

NURBS je velmi používaným termínem moderní počítačové geometrie. Uvedme ve stručnosti, co zkratka znamená. NURBS jsou neuniformní racionální B-spliny. B-spliny jsou segmentované křivky složené z oblouků známých Bézierových křivek a splňující podmínky C^2 spojitosti. Racionální B-spliny se od polynomiálních křivek liší v tom, že každému řídicímu bodu je přiřazen parametr vypovídající o jeho vlivu na tvar křivky. Parametru říkáme váha a nabývá nezáporných reálných hodnot. Čím větší je váha jednoho bodu oproti váhám ostatních bodů, tím větší vliv má bod na tvar křivky (tím více je křivka „přitahována“ k tomuto bodu). Racionální B-spliny jsou parametrizovány pomocí racionálních funkcí. O neuniformních racionálních B-splinech hovoříme, když vzdálenosti mezi body, ve kterých dojde k napojení segmentů (těmto bodům říkáme uzly; posloupnosti, kterou tvoří, pak uzlový vektor), nejsou stejné. Vzdáleností uzlů zde

myslíme rozdíl hodnot parametru u NURBS křivky $C(u)$ v uzlech. Když jsou vzdálenosti uzlů stejné, jedná se o uniformní racionální B-spliny.

V článku je prezentován výpočet NURBS křivky podle její definice pomocí matematického programu Maple. Tento výpočet byl sestaven pro potřeby dalšího zkoumání NURBS křivek a byl využit při výuce na FSI ČVUT v Praze v rámci volitelného semináře Geometrie pro CAD (viz <http://marian.fsik.cvut.cz/~linkeova> pod odkazem Geometrie pro CAD).

2 NURBS křivky

V dalším textu se budu odvolávat na definici uzlů a uzlového vektoru (1), definici B-spline bázových funkcí (2) a NURBS křivky (3), které jsou zařazeny v části 2 článku [1]. Zájemcům o problematiku doporučuji knihu [2] nebo didakticky vhodně zpracované internetové přednášky [3]. Přechodem mezi NURBS reprezentací a tradičními parametrizacemi křivek (Fergusonova kubika, Bézierova křivka, Coonsova kubika) se zabývá článek [1].

2.1 Výpočet NURBS křivek pomocí Maple

K tomu, abychom mohli zkoumat vlastnosti NURBS křivek a s křivkami dále pracovat, jsme sestavili výpočet v matematickém programu Maple. Použili jsme verzi Maple 8.00, viz [4]. Studenti výše zmíněného semináře měli za úkol ručně spočítat NURBS křivky druhého a třetího stupně určené čtyřmi řídicími body. Nejtěžší pro ně bylo vyrovnat se s tím, že bázové funkce i samotné křivky jsou jinak definované na různých intervalech uzlového vektoru. V Maplu si s tímto faktem poradíme použitím příkazu *piecewise* (viz níže).

Následující výpočet je sestaven pro rovinnou NURBS křivku C stupně p určenou $n + 1$ řídicími body $P[i]$, kde $i = 0, \dots, n$. Každému bodu $P[i]$ je přiřazena váha $w[i]$. Uzlový vektor je označen U a ve výpočtu je uniformní.

Parametry, které můžeme měnit, jsou: počet řídicích bodů $n + 1$, poloha a váhy řídicích bodů $P[i]$, stupeň křivky p a uzlový vektor U . Vliv změny těchto tvarovacích parametrů na tvar křivky si ukážeme níže v části 2.2. Pro výpočet prostorové NURBS křivky můžeme použít stejný program, provedeme-li drobnou úpravu, a sice přidáme-li třetí souřadnice řídicích bodů a přeindexujeme pole s váhami bodů.

NURBS REPREZENTACE KŘÍVEK V MAPLE

Index koncového řídicího bodu je označen n ; počet řídicích bodů je $n+1$.

```
> n:=4:
```

Řídicí body křivky jsou $P[i]$; $i=\{0, 1, \dots, n\}$, přičemž první dvě složky vektoru jsou souřadnice (pracujeme v rovině), třetí složka je váha.

```
> P[0]:=([0,0,1]):
> P[1]:=([1,3,1]): P[2]:=([3,1,12]): P[3]:=([4,5,1]):
> P[4]:=([6,-1,1]):
```

Váhy bodů přepíšeme do pole w , kde $w[i]$ je váha bodu $P[i]$.

```
> for i from 0 to n do
>   w[i]:=P[i][3]
> od:
```

p je stupeň křivky.

```
> p:=2:
```

$nops_U$ je počet složek uzlového vektoru.

```
> nops_U:=n+p+2:
```

Výpočet uzlů tak, aby uzlový vektor byl uniformní – stejně dlouhé intervaly – a křivka interpolovala krajní řídicí body – z teorie NURBSů víme, že uzlový vektor musí mít prvních $p+1$ složek rovných 0 a posledních $p+1$ složek rovných 1.

```
> for i from 1 to p+1 do
>   U[i]:=0
> od:
> for i from p+2 to n+1 do
>   U[i]:=U[i-1]+1/(n-p+1)
> od:
> for i from n+2 to nops_U do
>   U[i]:=1
> od:
```

Přeindexování uzlů tak, aby první uzel měl index 0 - nové pole uzlů nazvané uu .

```
> for i from 1 to nops_U do   uu[i-1]:=U[i]
> od:
```

Nulté báze funkce $N[i,0]$ dle definice 2; je třeba definovat segmentovaně (jiný předpis pro různé intervaly).

```
> for i from 0 to nops_U-2 do
>   if (uu[i+1]-uu[i]<>0) then
>     if i<>n
>       then N[i,0]:=simplify(piecewise(u>=uu[i]
>         and u<uu[i+1],1,0)):
>     else N[i,0]:=simplify(piecewise(u>=uu[i] and
>       u<=uu[i+1],1,0)):
>     fi:
>   else N[i,0]:=0
>   fi
> od:
```

Bázové funkce $N[i,s]$ stupně prvního až p -tého dle definice 2.

```
> for s from 1 to p do
>   for i from 0 to nops_U-2-p do
>     if (uu[i+s]-uu[i]=0)
>       then a[i,s]:=0
>       else a[i,s]:=(u-uu[i])/(uu[i+s]-uu[i])*N[i,s-1]
>     fi;
>     if (uu[i+s+1]-uu[i+1]=0)
>       then b[i,s]:=0
>       else b[i,s]:=(uu[i+s+1]-u)/(uu[i+s+1]-uu[i+1])
>         *N[i+1,s-1]
>     fi;
>     N[i,s]:=simplify(a[i,s]+b[i,s])
>   od
> od;
```

Racionální bázové funkce $R[i,p]$ stupně p dle definice 3.

```
> for i from 0 to n do
>   R[i,p]:=simplify(N[i,p]*w[i]/(sum('N[j,p]*w[j]',
>     'j'=0..n)))
> od;
```

NURBS křivka C dle definice 3.

```
> for k from 1 to 2 do
>   C[k]:=simplify(sum('R[i,p]*P[i][k]', 'i'=0..n))
> od;
```

$$C_1 = \begin{cases} \frac{3u(4+99u)}{99u^2+2} & u < \frac{1}{3} \\ \frac{603u^2-612u+100}{198u^2-198u+31} & u < \frac{2}{3} \\ \frac{12(27u^2-52u+26)}{99u^2-198u+101} & u \leq 1 \\ \text{undefined} & 1 < u \end{cases} \quad C_2 = \begin{cases} \frac{9u(4+3u)}{99u^2+2} & u < \frac{1}{3} \\ \frac{144u^2-150u+19}{198u^2-198u+31} & u < \frac{2}{3} \\ -\frac{45u^2-18u-25}{99u^2-198u+101} & u \leq 1 \\ \text{undefined} & 1 < u \end{cases}$$

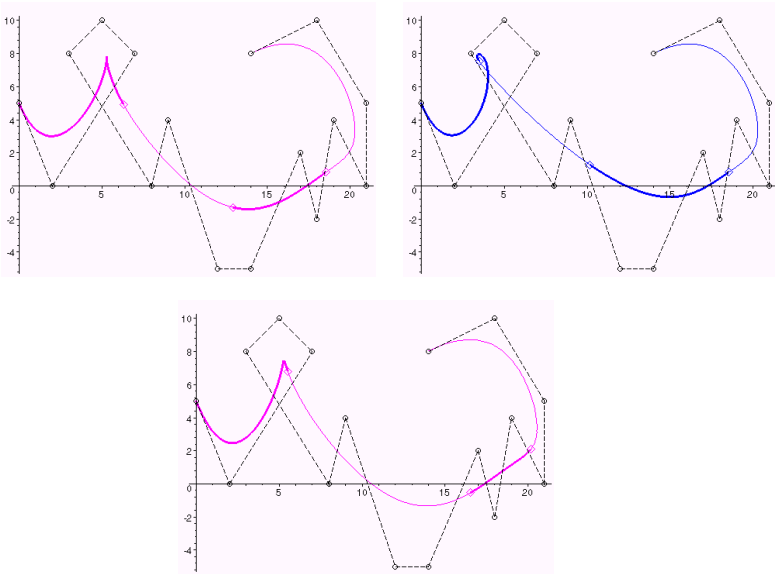
Zde je třeba upřesnit, že program Maple nabízí práci s knihovnou `CurveFitting`, která obsahuje příkazy pro výpočet křivek určených množinou řídicích bodů. Samotné NURBS křivky pomocí příkazů knihovny počítat nemůžeme, ale např. výpočet, který jsme právě komentovali, ovšem pro stejné váhy všech řídicích bodů (tj. výpočet B-spline křivky), můžeme provést pomocí příkazu `BSplineCurve`, jehož skladbu ukazují následující řádky (parametry byly zvoleny stejně jako ve výpočtu uvedeném výše):

```
> with(CurveFitting):
> simplify(BSplineCurve([0,1,3,4,6],[0,3,1,5,-1],
> u,order=3,knots=[0,0,0,1/3,2/3,1,1,1]));
```

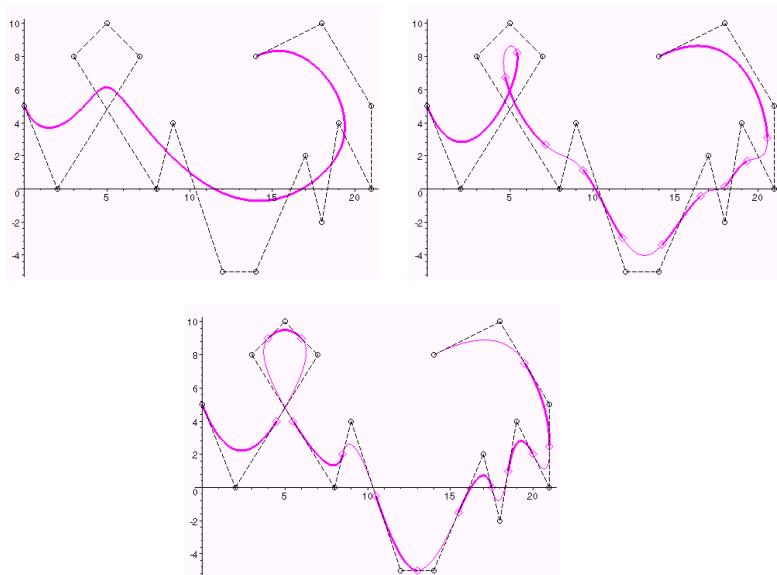
Pro potřeby výuky a hlubší pochopení celého problému je ale vlastní výpočet, ve kterém je názorně užitá definice NURBS křivek, vhodnější.

2.2 Příklady NURBS křivek

K tomu, abychom mohli vhodně demonstrovat vliv změny volitelných parametrů (váha bodu, stupeň křivky, uzlový vektor) na tvar NURBS křivky, jsme zvolili křivku určenou 16 řídicími body. Z důvodu nedostatku místa nebudeme uvádět matematické reprezentace jednotlivých křivek, ale uvedeme jejich grafy. Hodnoty parametrů jednotlivých křivek jsou upřesněny pod každým obrázkem.



Obr. 1: Křivky 12. stupně. Odleva: $w_i = 1$, uniformní U . $w_4 = 20$, ostatní $w_i = 1$, uniformní U . $w_i = 1$, neuniformní $U = \{0, \dots, 0, \underbrace{\frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{7}{8}, 1, \dots, 1}_{13 \times}\}$



Obr. 2: Křivky s $w_i = 1$ a uniformním U . Změna stupně p (odleva): $p = 15$, $p = 5$, $p = 2$. Čím nižší stupeň křivky, tím věrněji křivka sleduje řídicí polygon.

Poděkování

Článek vznikl za podpory projektu CTU 0513112: NURBS reprezentace křivek a ploch v MAPLE.

Literatura

- [1] I. Linkeová: *Speciální případy NURBS reprezentace*, Sborník konference CGC 2005, Janov, 2005.
- [2] L. Piegl, W. Tiller: *The NURBS Book*, Springer, Londýn, 1995.
- [3] Ch.-K. Shene: www.cs.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES
- [4] *Maple 8.00 – help programu Maple.*

Miroslav Lávička

PROJECTIVE MODEL OF MÖBIUS GEOMETRY AND ITS APPLICATION IN CAGD

Abstract

Describing Möbius geometry as a subgeometry of the projective geometry (where Möbius hyperspheres are considered as intersections of hyperplanes with n -sphere $\Sigma \subset \mathbb{P}_{n+1}$) enables us to solve some specific problems of geometric modelling. With the help of pentaspherical coordinates, it relates some special curves and surfaces in \mathbb{P}_4 to special surfaces often used in geometric design. The practical use is demonstrated.

Keywords

Möbius geometry, extended stereographic projection, pentaspherical coordinates, 1-parameter family of spheres/planes, joining surfaces, cyclides.

1 Introduction

The elementar objects in projective geometry are *points* and *hyperplanes* with *incidence* as their basic relation. Thus, surfaces in 3-dimensional projective space can be considered as sets of points as well as envelopes of planes. French mathematician JEAN GASTON DARBOUX (1842–1917) chose in his famous book *Leçons sur la théorie général des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal* a different approach — he described some special surfaces as envelopes of spheres. And this is the basic idea from which the concept of sphere geometries arises because several geometric methods and properties are taken in much easier and more accessible way when not points and sets of points but spheres and sets of spheres are considered as elementary objects.

Classical sphere geometries are *Laguerre geometry* [8] dealing with oriented hyperspheres and *Möbius geometry* [1], [3], [4] which is the main subject of this short contribution. Via special projections, both mentioned geometries can be considered as special cases of more general so called *Lie geometry* — more details in [7]. The central aim

of this article is to figure some applications of Möbius geometry on chosen problems of geometric modelling (Computer Aided Geometric Design, CAGD) and through this to show that classical geometries still survive and in addition, they bring remarkable new results and algorithms.

2 Projective model of Möbius geometry

Möbius geometry is a classical sphere geometry called after famous German mathematician AUGUST FERDINAND MÖBIUS (1790–1868). According to FELIX KLEIN and its *Erlangen programme* (1872), the content of Möbius geometry is the study of those properties which are invariant under Möbius transformations of *Möbius space* \mathbb{M}_n (where $\mathbb{M}_n = \mathbb{E}_n \cup \{\infty\}$ is the conformal closure of the Euclidean space \mathbb{E}_n completed with the *ideal point* ∞ lying on every hyperplane but outside every hypersphere — both Euclidean hyperspheres and hyperplanes completed with ∞ are called *Möbius hyperspheres*). Then, *Möbius transformations* are such bijections that preserve non-oriented Möbius hyperspheres in \mathbb{M}_n . All Möbius transformations in \mathbb{M}_n form a group which is generated by inversions, i.e. reflections in hyperspheres (thus, Euclidean geometry can be obtained as a subgeometry of Möbius geometry when restricted to reflections in hyperplanes). Just introduced model is called a *standard* or *classical model*. In this article, we will work with further model.

Let n -dimensional Euclidean space is immersed into Euclidean space \mathbb{E}_{n+1} as the hyperplane $x_{n+1} = 0$ and let \mathbb{P}_{n+1} denote the projective extension of \mathbb{E}_{n+1} equipped with homogenous coordinates $(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})^T \in \mathbb{R}^{n+2}$. We consider the unit n -sphere $\Sigma \subset \mathbb{P}_{n+1}$ described by the equation

$$\Sigma : -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{E}_M \cdot \mathbf{x} = 0, \quad (1)$$

where $\mathbf{E}_M = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ and an indefinite bilinear form

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_M = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{E}_M \cdot \mathbf{y} = -x_0y_0 + x_1y_1 + \dots + x_{n+1}y_{n+1} \quad (2)$$

is called *M-scalar product*. Hence, the hypersphere Σ is described by the equation $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_M = 0$, similarly we denote $\Sigma^+ : \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_M > 0$ (the exterior of Σ) and $\Sigma^- : \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_M < 0$ (the interior of Σ). Thus $\mathbb{P}_{n+1} = \Sigma^- \cup \Sigma \cup \Sigma^+$.

If we apply so called *extended stereographic projection* with respect to n -sphere Σ and *northpole* $\mathbf{n} = (1, 0, \dots, 0, 1)^T$ we get one-to-one correspondence between points in \mathbb{P}_{n+1} and Möbius hyperspheres in \mathbb{M}_n .

What kind of mapping is the extended stereographic projection Ψ ? Shortly said, Ψ is a combination of the polarity $\Pi : \mathbb{P}_{n+1} \rightarrow \mathbb{P}_{n+1}^*$ induced by n -sphere Σ (an arbitrary point $\mathbf{s} \in \mathbb{P}_{n+1}$ is mapped onto its polar hyperplane $\Pi(\mathbf{s}) \in \mathbb{P}_{n+1}^*$ where \mathbb{P}_{n+1}^* denotes a dual space to \mathbb{P}_{n+1}) and the standard stereographic projection $\sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}_n = \mathbb{E}_n \cup \{\infty\}$ (the intersection of $\Pi(\mathbf{s})$ with Σ is then mapped onto the Möbius hypersphere \mathcal{S} of \mathbb{M}_n) — the principle is seen in Fig. 1. This model is called a *projective model*.

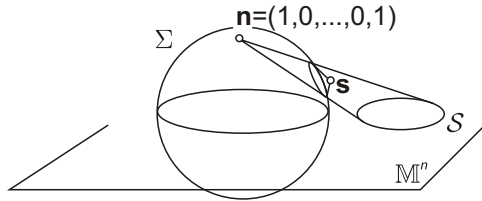


Figure 1: Extended stereographic projection $\Psi : \mathbf{s} \mapsto \mathcal{S}$.

We can easily derive the analytic expression of the extended stereographic projection Ψ . Let $\mathbf{s} = (s_0, s_1, \dots, s_{n+1})^T \in \mathbb{P}_{n+1}$ then

- (i) if $s_0 = s_{n+1}$ (i.e. $\mathbf{s} \in \nu : x_0 - x_{n+1} = 0$, where ν is the tangent hyperplane of Σ at the northpole \mathbf{n} — so called *north hyperplane*) then

$$\Psi(\mathbf{s}) : -s_0 + s_1x_1 + s_2x_2 + \dots + s_nx_n = 0 \quad (3)$$

which is a hyperplane in \mathbb{M}_n ;

- (ii) if $s_0 \neq s_{n+1}$ (i.e. $\mathbf{s} \notin \nu$) then $\Psi(\mathbf{s})$ is a hypersphere $\mathcal{S}(\mathbf{m}, r) \subset \mathbb{M}_n$ with midpoint \mathbf{m} and radius r where

$$\mathbf{m} = \frac{1}{s_0 - s_{n+1}} \cdot (s_1, \dots, s_n)^T, \quad r^2 = \frac{-s_0^2 + s_1^2 + \dots + s_{n+1}^2}{(s_0 - s_{n+1})^2} \quad (4)$$

or with the help of M-scalar product (2)

$$\mathbf{m} = \frac{-1}{\langle \mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle_M} \cdot (s_1, \dots, s_n)^T, \quad r^2 = \frac{\langle \mathbf{s}, \mathbf{s} \rangle_M}{(\langle \mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle_M)^2}. \quad (5)$$

From (5) it is seen that points $\mathbf{x} \in \mathbb{P}_{n+1}$ fulfilling the condition $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_M > 0$ (points lying in Σ^+) are mapped onto *real hyperspheres*,

if $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_M < 0$ (points lying in Σ^-) then images are *imaginary hyperspheres* and points for which $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_M = 0$ (points lying on Σ) are mapped onto points of \mathbb{M}_n .

Furthermore, we also consider the *inverse stereographic projection* $\Phi = \Psi^{-1}: \mathbb{M}_n \rightarrow \mathbb{P}_{n+1}$ and we can easily derive

- (a) a hypersphere \mathcal{S} with midpoint $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)^T$ and radius r is mapped onto the point

$$\Phi(\mathcal{S}) = (m_1^2 + \dots + m_n^2 - r^2 + 1, 2m_1, 2m_2, \dots, \dots, 2m_n, m_1^2 + \dots + m_n^2 - r^2 - 1)^T \notin \nu; \quad (6)$$

- (b) a hyperplane $\mathcal{H}: h_0 + h_1x_1 + \dots + h_nx_n = 0$ is mapped onto the point

$$\Phi(\mathcal{H}) = (-h_0, h_1, \dots, h_n, -h_0)^T \in \nu. \quad (7)$$

The homogenous coordinates $(s_0, s_1, \dots, s_{n+1})^T \in \mathbb{R}^{n+2}$ uniquely representing Möbius hyperspheres of \mathbb{M}_n in projective space \mathbb{P}_{n+1} are called *n-spherical coordinates*; for $n = 2, 3$ we speak about *tetracyclic* or *pentaspherical coordinates*.

3 Surfaces of special classes

Let $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ or $(x_1, x_2, x_3)^T$ denote nonhomogenous coordinates in $\mathbb{M}_3 = \mathbb{E}_3 \cup \{\infty\}$ and $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)^T$ are pentaspherical coordinates in \mathbb{P}_4 . Furthermore, we know from previous section that “the world of real spheres” is in the projective model the exterior Σ^+ and “the world of planes” is the north 3-plane ν (especially northpole $\mathbf{n} = (1, 0, 0, 0, 1)$ is the image of the ideal hyperplane).

Of course, in any sphere geometry, there is more emphasis laid on spheres rather than planes — i.e. these geometries are very useful and applicable in a very straightforward way for geometric objects derived from spheres, e.g. for canal surfaces. So called *canal surfaces* are defined as the envelopes of one parameter sets of spheres

$$\mathcal{S}(t) : (\mathbf{x} - \mathbf{m}(t))^2 - r(t)^2 = 0,$$

where the condition for the existence of the real envelope of moving spheres sounds $\dot{\mathbf{m}}_t^2 - \dot{r}_t^2 \geq 0$.

Applying (6) we get a representation of the 1-parameter family of spheres in the projective model and through this also a representation

of its envelope (i.e. of some canal surface) by the curve $\mathcal{S}^\Phi(t)$ lying in $\Sigma^+ \subset \mathbb{P}_4$ with the parametric expression

$$\mathcal{S}^\Phi(t): \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} m_1(t)^2 + m_2(t)^2 + m_3(t)^2 - r(t)^2 + 1 \\ 2m_1(t) \\ 2m_2(t) \\ 2m_3(t) \\ m_1(t)^2 + m_2(t)^2 + m_3(t)^2 - r(t)^2 - 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

If it is more emphasis laid on planes rather than spheres we can also use the introduced projective model but we have to restrict our consideration only on the north tangent plane ν . Then it is easily seen that general non-developable surface which can be considered as two parameter set of its tangent planes

$$\mathcal{H}(u, v) : h_0(u, v) + \mathbf{h}(u, v)^T \cdot \mathbf{x} = 0$$

is corresponding to the 2D-surface in ν

$$\mathcal{H}(u, v)^\Phi : [-h_0(u, v), h_1(u, v), h_2(u, v), h_3(u, v), -h_0(u, v)]^T; \quad (9)$$

analogously, a developable surface considered as one parameter set of its tangent planes

$$\mathcal{H}(t) : h_0(t) + \mathbf{h}(t)^T \cdot \mathbf{x} = 0 \quad (10)$$

corresponds to the curve lying in ν

$$\mathcal{H}(t)^\Phi : [-h_0(t), h_1(t), h_2(t), h_3(t), -h_0(t)]^T. \quad (11)$$

Thus, any curve $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t) \subset \mathbb{P}_4$ represents one parameter family of Möbius spheres. However, it must be emphasized that surfaces from \mathbb{M}_3 can have more curve representation in \mathbb{P}_4 (see e.g. *cylinder* or *cone* which are both canal and developable surfaces, i.e. one corresponding curve is lying in ν and another one is not lying in ν).

First, we will consider a line as the simplest curve. Any line ℓ can be counted as the linear family of points so if we do a translation via the mapping Ψ we get a linear family of Möbius spheres which is nothing else than a *(linear) pencil of Möbius spheres*. As we know there are three cases — all spheres belonging to the pencil can have common real circle, point (circle with zero radius), or imaginary circle — more details in [6]. Mentioned circle \mathcal{C} is called *carrying circle* and

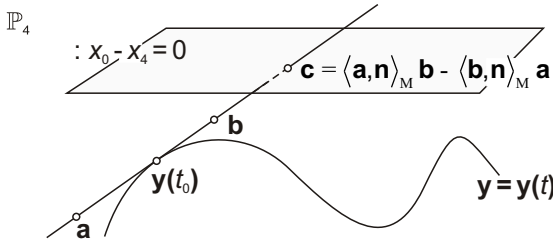


Figure 2: Lines in \mathbb{P}_4 corresponding to pencils of Möbius spheres in \mathbb{M}_3

it is easily seen that this circle is real (or zero, or imaginary) if and only if the line ℓ does not intersect Σ (or is tangent to Σ , or intersect Σ in two different points). Moreover, the intersection point \mathbf{c} of the line ℓ and the north-plane ν corresponds to the *radical plane* of pencil in which the carrying circle is lying. Choosing two points \mathbf{a} , \mathbf{b} on the line ℓ we can easily count not only the intersection point $\mathbf{c} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle_M \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle_M \mathbf{a}$, where $\mathbf{n} = (1, 0, 0, 0, 1)^T$, but also the radius ϱ of carrying circle \mathcal{C} with the help of M-scalar product, namely

$$\varrho^2 = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle_M \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle_M - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_M^2}{\langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle_M^2} \quad (12)$$

From above expression it is also immediately seen the condition for two tangent spheres $\Psi(\mathbf{a})$, $\Psi(\mathbf{b})$, namely $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle_M \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle_M - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_M^2 = 0$. Hence, if we define for every surface $\mathcal{P} \subset \mathbb{M}_3$ an *isotropic hypersurface* $\Gamma(\mathcal{P}) \subset \mathbb{P}_4$ consisting of all points corresponding to Möbius spheres tangent to \mathcal{P} then for the case of sphere $\mathcal{S}_a = \Psi(\mathbf{a})$

$$\Gamma(\mathcal{S}_a) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle_M \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_M - \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle_M^2 = 0. \quad (13)$$

which is nothing else than hypercone in \mathbb{P}_4 with vertex \mathbf{a} and tangent to Σ . Thus, if we are looking for the family of all spheres tangent to given two spheres $\mathcal{S}_a = \Psi(\mathbf{a})$, $\mathcal{S}_b = \Psi(\mathbf{b})$ then we have to consider corresponding 2D-surface $\Gamma(\mathcal{S}_a) \cap \Gamma(\mathcal{S}_b)$. Similarly for three spheres $\mathcal{S}_a = \Psi(\mathbf{a})$, $\mathcal{S}_b = \Psi(\mathbf{b})$, $\mathcal{S}_c = \Psi(\mathbf{c})$ and corresponding curve $\Gamma(\mathcal{S}_a) \cap \Gamma(\mathcal{S}_b) \cap \Gamma(\mathcal{S}_c)$ which can be after some simplifications described as the plane section of one 3-cone tangent to Σ (i.e. the intersection curve is a conic) — proof in [1]. And because so called *Dupin cyclides* (a class of special canal surfaces, due to their geometric properties often used in CAGD) are defined as envelopes of all spheres touching three given spheres we have got the correspondence between Dupin cyclides in \mathbb{M}_3 and special conic sections in \mathbb{P}_4 .

4 Modelling via projective model

Now, we will consider a smooth curve $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ of degree $n > 1$ which corresponds to some canal surface. Let $\mathbf{y}(t_0) \notin \nu$ is a point on it counted twice as 2 infinitesimally neighboring points — their connection is a tangent ℓ of the curve. Via Ψ we get two infinitesimally neighboring spheres whose intersection is the carrying circle of the pencil which represents the *composing circle* of the envelope. Thus, we have found the correspondence between tangents of the curve in $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ and composing circles of the envelope of the set of spheres represented by the curve $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ (similarly for developable surfaces and carrying lines of pencils of planes).

Finally, we can apply above introduced considerations on one concrete example. Let be given given two two canal surfaces, we consider at both of them circular contacts (i.e. a pair of sphere and composing circle on it). Our goal is to construct a joining piecewise canal surface tangent to given surfaces along given circles. The original problem can be reformulated via Φ into problem of construction of a piecewise rational curve (image of piecewise canal surface) that is tangent to pairs of lines at given points (images of two circular contacts).

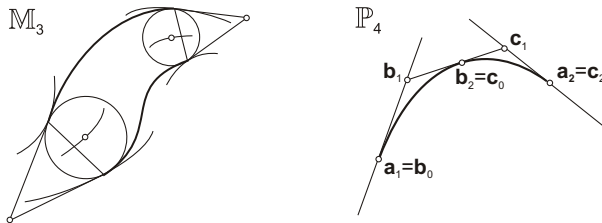


Figure 3: Joining surfaces in standard and projective model

In Fig. 3 we can see two G^1 -connected curves which interpolate given data; after backward translation via Ψ we get piecewise canal surface that is G^1 at the joins. Of course, the natural question is which curves are useful for this operation. The problematic is discussed in many details e.g. in [1], [2], [5] — if $\mathbf{y}(t)$ is a conic section then the corresponding canal surface is a general cyclide and if $\mathbf{y}(t)$ is a plane section of a hypercone tangent to Σ (i.e. a special conic section) then the corresponding canal surface is a Dupin cyclide as it was discussed in the previous section.

5 Conclusion

In this short contribution some applications of the projective model of Möbius geometry were discussed. The main idea is to transfer given problem into 4-dimensional space of pentaspherical coordinates and there to manipulate it. Future work will be oriented on the application of rational extended stereographic projection and its inverse (both are rational mappings) on construction of rational parametrizations of special canal surfaces, eventually on construction of rational blending surfaces.

Acknowledgements

The author of this article has been supported by the Research Plan MSM 4977751301.

References

- [1] Paluszny, M., Boehm, W.: *General cyclides*. Computer Aided Geometric Design 15 (1998), 699-710.
- [2] Mendez, E., Müller, A., Paluszny, M.: *Tubelike joints: A classical geometry perspective*. Applied Numerical Mathematics 40 (2002), 33-38.
- [3] Benz, W.: *Möbius sphere geometry in inner product spaces*. Aequationes Mathematicae 66 (2003), 284-320.
- [4] Pottmann, H., Leopoldseder, S.: *Geometries for CAGD*. In: Farin, G., Hoschek, J., Kim, M.S., eds.: *Handbook of Computer Aided Geometric Design*, Elsevier 2002.
- [5] Mendez, E., Müller, A., Paluszny, M.: *Three views of Dupin cyclides and blending of cones*. Applied Numerical Mathematics 40 (2002), 39-47.
- [6] Langevin, R.: *Sets of spheres and applications*. Sao Paulo 2004.
- [7] Cecil, T.E.: *Lie Sphere Geometry: With Applications to Submanifolds*. Springer, Berlin 1992.
- [8] Lávička, M.: *Surfaces od Special Classes throuh Laguerre Geometry*. In: Proceedings of 'Geometry and Computer Graphics 2004', Praděd–Jeseníky (2004), 130-134.

Pavel Leischner

KRITÉRIA TĚTIVOVÉHO ČTYŘÚHELNÍKU

Abstrakt

Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je tětívový, právě tehdy, když platí $|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|$ (ptolemaiovské kritérium). Jiná, s touto větou ekvivalentní podmínka pro tětívový čtyřúhelník je: $|AB| \cdot |BC| \cdot |CA| + |AC| \cdot |CD| \cdot |DA| = |BC| \cdot |CD| \cdot |DB| + |AB| \cdot |BD| \cdot |DA|$.

Klíčová slova

Elementární geometrie, kritéria, tětívový čtyřúhelník.

1 Úvod

Jako kritérium tětívového čtyřúhelníku se všeobecně označuje věta, jež je důsledkem vlastností obvodových úhlů: *Konvexní čtyřúhelník je tětívový právě tehdy, když jsou si rovny součty velikostí jeho protilehlých vnitřních úhlů.* Nutnou a postačující podmínku pro to, aby byl konvexní čtyřúhelník $ABCD$ tětívový, můžeme také vyjádřit pomocí délek stran a úhlopříček čtyřúhelníku. Uvedeme dvě taková kritéria a jejich méně známé důkazy postavené jen na středoškolské matematice. Druhé z nich je podle některých pramenů, viz například [8] a [9], považováno za nové. Vztah z této věty byl však znám již v minulých stoletích.

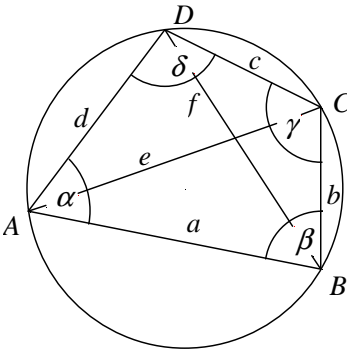
2 Ptolemaiovské kritérium

Koncem roku 150 n.l. sepsal Klaudius Ptolemaios slavné dílo *Almagest*, v němž shrnul veškeré tehdy známé astronomické poznatky. Uvedl zde i podrobné tabulky, které přiřazovaly obloukům kružnice délky jejich tětív, což lze dnes interpretovat jako tabulky funkce sinus. Základní hodnoty délek tětív, které odpovídaly obvodovým úhlům velikostí $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 72^\circ, \dots$ stanovil pomocí Pythagorovy věty z pravidelných vepsaných n -úhelníků. K výpočtu dalších hodnot užíval důsledky tvrzení známého dnes jako Ptolemaiova věta: *V tětívovém konvexním čtyřúhelníku je součet součinů délek protilehlých stran roven součinu délek úhlopříček.* Poměrně často uváděný Ptolemaiův důkaz této věty je možno obrátit (viz například [2]), a tak platí:

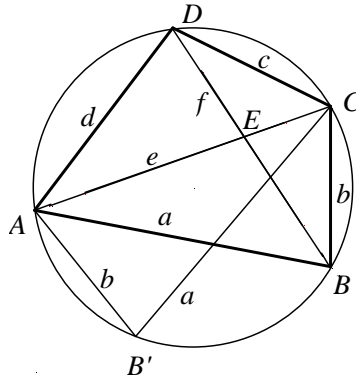
Věta 1 (ptolemaiovské kritérium)

Konvexní čtyřúhelník ABCD je tětívový právě tehdy, když při označení podle obr. 1 platí:

$$ac + bd = ef. \tag{1}$$



Obr. 1: Tětívový čtyřúhelník



Obr. 2 : K důkazu věty 1

Důkaz: Předpokládejme nejprve, že je čtyřúhelník ABCD tětívový, označme E průsečík jeho úhlopříček, B' bod symetrický s bodem B podle osy úsečky AC (obr.2) a položme $\varphi = |\angle AEB|$. Trojúhelníky ACB a CAB' jsou shodné a platí:

$$|\angle B'AD| = |\angle B'AC| + |\angle CAD| = |\angle ACB| + |\angle CBD|.$$

Odtud a z trojúhelníku BCE, resp. ze čtyřúhelníku AB'CD plyne:

$$\varphi = |\angle AEB| = |\angle ECB| + |\angle CBE| = |\angle B'AD|. \tag{2}$$

Tětívový čtyřúhelník AB'CD má stejný obsah jako ABCD a vzhledem ke (2) platí: $\sin|\angle B'AD| = \sin|\angle B'CD| = \sin \varphi$. Dvojnásobným vyjádřením tohoto obsahu máme

$$S = S_{AB'D} + S_{B'CD} = \frac{1}{2}(bd + ac) \sin \varphi = S_{ABCD} = \frac{1}{2} ef \sin \varphi \text{ a odtud i vztah (1).}$$

K důkazu obráceného směru zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby $A = (0, 0)$ a $B = (a, 0)$. Souřadnice zbývajících bodů označme takto: $C = (x_1, y_1)$, $D = (x_2, y_2)$. Podmínku (1) přepíšeme do tvaru

$$a \cdot \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)((x_2 - a)^2 + y_2^2)} - \sqrt{(x_2^2 + y_2^2)((x_1 - a)^2 + y_1^2)}.$$

Po umocnění a úpravě dostaneme:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)((x_1 - a)^2 + y_1^2)((x_2 - a)^2 + y_2^2)} = \\ & = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - a(x_2(x_1^2 + y_1^2) + x_1(x_2^2 + y_2^2)) + a^2(x_1x_2 + y_1y_2). \end{aligned}$$

Po dalším umocnění a úpravě můžeme vztah přepsat do tvaru rovnice

$$a^2(P + Qa + Ra^2) = 0, \quad (3)$$

v níž

$$\begin{aligned} P &= (y_1(x_2^2 + y_2^2) - y_2(x_1^2 + y_1^2))^2, \\ Q &= 2(y_1(x_2^2 + y_2^2) - y_2(x_1^2 + y_1^2))(x_1y_2 - x_2y_1), \\ R &= (x_1y_2 - x_2y_1)^2. \end{aligned}$$

Když si uvědomíme, že čísla a, y_1, y_2 jsou různá od nuly a výraz v závorce rovnice (3) představuje úplný čtverec, můžeme rovnici upravit na tvar:

$$\frac{x_1^2 + y_1^2 - ax_1}{2y_1} = \frac{x_2^2 + y_2^2 - ax_2}{2y_2}.$$

Platí tedy i vztah

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{x_1^2 + y_1^2 - ax_1}{2y_1} \right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{x_2^2 + y_2^2 - ax_2}{2y_2} \right),$$

který představuje shodnost středů kružnic opsaných trojúhelníkům ABC a ABD . Čtyřúhelník $ABCD$ je tedy tětivový a tím je věta 1 dokázána.

Poznámka: První část důkazu je méně uváděnou modifikací Ptolemeiova důkazu, při níž se místo podobnosti trojúhelníků využívají obsahy. Druhá část byla převzata z článku [3]. Náročnější postup nás odměnil symetrií algebraických výrazů a pěkným výsledkem. Na větu 1 můžeme pohlížet jako na důsledek známé nerovnosti, kterou Ptolemaios zřejmě neznal:

Věta 2 (Ptolemaiova nerovnost)

Pro každé čtyři body A, B, C, D dané roviny platí:

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| \geq |AC| \cdot |BD|, \quad (4)$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když body leží na přímce nebo kružnici tak, že body A, C oddělují body B, D .

3 Sadovovo kritérium

V roce 2003 publikoval S. Sadov [5], [8], [9] následující, údajně nové kritérium:

Věta 3 (Sadovovo kritérium)

Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je tětiový právě tehdy, když při označení podle obr. 1 platí:

$$abe + ecd = bcf + fda. \quad (5)$$

Před vlastním důkazem věty poznamenejme, že Sadov nezvolil šťastnou cestu při důkazu, že je (5) postačující. Jeho práce má rozsah 28 stran a v úvodu se píše: „*Tato podmínka nebyla navzdory své jednoduchosti dosud uveřejněna a jeví se neočekávaně těžko dokazatelná. Jako pomocných metod jsme použili počítačovou algebru a nelineární analýzu.*“

K tomu je záhodno uvést, že vztah (5) je znám již dlouho jako metrický vztah pro tětiový konvexní čtyřúhelník. Uvádí jej například Hadamard v proslulé Elementární geometrii, jejíž první vydání vyšlo koncem devatenáctého století. Před druhou světovou válkou se vztah (6) dokonce vyučoval na našich středních školách. Na tomto místě snad nelze vynechat odstavec z Vojtěchovy učebnice [7]:

„Také úhlopříčky čtyřúhelníka tětiového vyjádříme výhradně stranami: z rovnic

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta, \quad e^2 = c^2 + d^2 + 2cd \cos \beta$$

vyloučíme $\cos \beta$ (první vynásobíme cd , druhou ab , a sečteme); dostaneme

$$e = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}.$$

A obdobným postupem

$$f = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}.$$

KRITÉRIA TĚTIVOVÉHO ČTYŘÚHELNÍKU

Z těchto vzorců plynou také výrazy pro součin a podíl úhlopříček:

$$ef = ac + bd \quad (\text{Ptolemaiova věta})$$

a

$$\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd}. \quad (6)$$

Je zajímavé, že v témže roce jako Sadov, jen o něco dříve, uvedli Rashid a Ajibade obě kritéria v článku [4] s důkazy, které využívaly jen středoškolskou matematiku. Následující důkaz je snad ještě jednodušší:

Důkaz věty 3: Nechť je čtyřúhelník $ABCD$ vepsán do kružnice poloměru r . Pak jeho obsah můžeme vyjádřit jako součet obsahů trojúhelníků ABD a BCD nebo jako součet obsahů trojúhelníků ABC a ACD . Z rovnosti

$$\frac{adf}{4r} + \frac{bcf}{4r} = \frac{abe}{4r} + \frac{cde}{4r}$$

obou součtů plyne vztah (6).

Předpokládejme dále, že platí (6), a zvolme libovolně, ale pevně délky a , b , c , d stran konvexního čtyřúhelníku $ABCD$, velikost β považujeme za nezávisle proměnnou. Pak je pravá strana vztahu (6) konstantní a podíl e/f představuje spojitou funkci proměnné β na intervalu (β_1, β_2) . Z kosinových vět pro trojúhelník ABC a ACD plyne, že s rostoucím β roste e a tedy i δ . Přitom zřejmě α , γ a f klesají. Je tedy e/f rostoucí a spojitá funkce. Nejvýše pro jednu hodnotu β může platit (6). Stačí ukázat, že vždy existuje takové $\beta_i \in (\beta_1, \beta_2)$, pro něž je čtyřúhelník $ABCD$ tětívový. Snadno lze ověřit, že pro $\beta = \beta_1$ se čtyřúhelník zvrhne buď v trojúhelník ABD nebo v trojúhelník BCD nebo v úsečku BD s vnitřními body A a C . V každém z těchto limitních případů však bude $\alpha + \gamma > \pi$ a $\beta + \delta < \pi$.

Analogicky pro $\beta = \beta_2$ je $\alpha + \gamma < \pi$ a $\beta + \delta > \pi$. Existuje tedy β_i na intervalu (β_1, β_2) , pro něž platí $\alpha + \gamma = \beta_i + \delta$ a čtyřúhelník $ABCD$ je tětívový.

Literatura

- [1] Engel A.: *Problem-Solving Strategies*, IEEE Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg, 1997, ISBN 0-387-98219-1
- [2] Janeček F.: *Vlastnosti těživového čtyřúhelníka*, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 44 (1965/66), č.5, str. 244-247.
- [3] Pech P.: *Ptolemaiova nerovnost*, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 71 (1993/94), č.4, str. 166-168.
- [4] Rashid M.A., Ajibade A.O.: *Two conditions for a quadrilateral to be cyclic expressed in terms of the lengths of its sides*. Int.J.Math.Educ.Sci.Technol., 2003, Vol. 34, No 5, 739--742.
- [5] Sadov S.: *O neobchodimom i dostatočnom uslovii vpisannosti četyrechugolnika v okružnost'*, Rosijskaja akademija nauk ordena Lenina, Institut prikladnoj matematiki imeni M. V. Keldyša, Moskva 2003, arXiv:math.GM/04v1 8 Oct 2004.
- [6] Sekanina M., Boček L., Kočandrle M., Šedivý J.: *Geometrie II*, SPN Praha 1988.
- [7] Vojtěch J.: *Geometrie pro VI. třídu reálek*, páté vydání, JČMF, Prometheus, Praha 1935.
- [8] <http://arxiv.org/abs/math/040234>
- [9] <http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/mamari/ml/sadov.html>

Ivana Linkeová

SPECIÁLNÍ PŘÍPADY NURBS REPREZENTACE

Abstrakt

Příspěvek prezentuje B-spline křivku a Coonsovu, Bézierovu a Fergusonovu kubiku jako speciální případy NURBS reprezentace a uvádí jejich vzájemné vztahy a souvislosti.

Klíčová slova

NURBS, B-spline, Coonsova kubika, Bézierova kubika, Fergusonova kubika

1 Úvod

Standardním základem CAD/CAM systémů, se kterými student strojní fakulty přijde do styku již v průběhu studia i ve své odborné praxi, je v současné době NURBS reprezentace křivek a ploch. Pro efektivní využití tohoto vysoce výkonného nástroje je nutné pochopit jeho teoretický princip a rozumět zákonitostem, kterými se řídí modifikace tvaru vytvořeného modelu. Tento článek, ve kterém jsou uvedeny a na konkrétním příkladu demonstrovány vzájemné vztahy mezi NURBS, B-spline, Coonsovou, Bézierovou a Fergusonovou reprezentací, si klade za cíl objasnit souvislosti mezi modely pro mnohé uživatele CAD/CAM systémů známými (Fergusonova, Bézierova a Coonsova kubika) a těmi, které obecně nejsou pokládány za jednoduché (B-spline a NURBS křivka) [2,3].

2 NURBS reprezentace křivek

Tvar NURBS křivky $C(u)$, $a \leq u \leq b$ lze modifikovat čtyřmi různými tvarovacími parametry, které je zároveň třeba zadat jako vstupní data při jejím výpočtu. Jsou to: (1) série řídicích bodů (řídicí polygon) $\{P_i\}$, $i = 0, \dots, n$ v rovině nebo v prostoru; (2) stupeň křivky p , který může být nejvýše roven n ; (3) nezáporné váhy $\{w_i\}$, $i = 0, \dots, n$ jednotlivých řídicích bodů a (4) uzly $\{u_i\}$, $i = 0, \dots, m$, které tvoří uzlový vektor U . Uveďme nyní několik potřebných definic a vlastností NURBS reprezentace.

Definice 1: Nechť U je neklesající posloupnost $(m + 1)$ reálných čísel $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_m$. Potom čísla u_i , $i = 0, \dots, m$ nazýváme uzly a množinu U nazýváme uzlovým vektorem.

Je-li hodnota výrazu $u_{i+1} - u_i$ konstantní pro všechna $i = 0, 1, \dots, m - 1$, označujeme uzlový vektor jako *uniformní*, v ostatních případech hovoříme o *neuniformním* uzlovém vektoru.

Definice 2: B-spline báze funkce $N_{i,p}(u)$, $a \leq u \leq b$ stupně p jsou na uzlovém vektoru $U = \{u_i\}$, $i = 0, \dots, m$ definovány rekurzivním předpisem:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad (1)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u).$$

Definice 3: Nechť je dáno $(n + 1)$ řídicích bodů $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$, kde každému bodu je přiřazena nezáporná váha w_i , $i = 0, \dots, n$, a uzlový vektor $U = \{u_i\}$, $i = 0, \dots, m$. Potom NURBS křivka $\mathbf{C}(u)$, $a \leq u \leq b$ stupně p je definovaná předpisem

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) \mathbf{P}_i, \quad (2)$$

kde

$$R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u) w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(u) w_j} \quad (3)$$

jsou racionální báze funkce. Součet všech racionálních báze funkcí pro libovolnou hodnotu parametru u je roven jedné. Na každém intervalu uzlového vektoru je nejvýše $p + 1$ racionálních báze funkcí nenulových.

Počet intervalů uzlového vektoru m , nejvyšší index série řídicích bodů n a stupeň křivky p musí splňovat rovnost: $m = n + p + 1$.

V závislosti na uzlovém vektoru rozlišujeme tři druhy NURBS křivek: (1) *ukotvenou (clamped)*, tj. interpolující koncové body řídicího polygonu, kdy první a poslední uzel má násobnost $p + 1$; (2) *otevřenou (open)*, kde je definičním oborem pouze interval $[u_p, u_{m-p}]$ a (3) *uzavřenou (closed)*, u které se počáteční a koncové řídicí body cyklicky opakují.

3 Speciální případy NURBS reprezentace křivek

Nejprve uvedeme parametrické vyjádření B-spline křivky a Coonsovy, Bézierovy a Fergusonovy kubiky vycházející z definice NURBS křivky. Vzájemné souvislosti budeme demonstrovat na příkladu s konkrétním zadáním (viz Příklad).

Věta 1: Necht' jsou váhy w_i , $i = 0, \dots, n$ ve všech řídicích bodech rovny nezáporné konstantě různé od nuly. Potom B-spline křivka $C(u)$ $a \leq u \leq b$ stupně p má parametrické vyjádření:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i, \quad (4)$$

kde $N_{i,p}(u)$ jsou B-spline bázové funkce dle (1).

Věta 2: Necht' jsou dány řídicí body $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$; váhy w_i , $i = 0, 1, 2, 3$ rovny nezáporné konstantě různé od nuly; uniformní uzlový vektor $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ a stupeň $p = 3$. Potom výsledná otevřená NURBS křivka v intervalu $0 \leq u \leq 1$ vypočtená dle (2) je Coonsova kubika:

$$C(u) = \sum_{i=0}^3 C_i(u) \mathbf{P}_i. \quad (5)$$

kde $C_i(u)$ jsou známé Coonsovy polynomy.

Poznámka: Konkrétní hodnoty uzlů jsou zvoleny s ohledem na Coonsovu, Bézierovu a Fergusonovu kubiku tak, aby definičním oborem výsledné otevřené NURBS křivky, a tím i zmíněných kubik, byl interval $u \in [0, 1]$.

Věta 3: Jsou-li splněny předpoklady Věty 2, je výsledná NURBS křivka v intervalu $0 \leq u \leq 1$ vypočtená dle (2) Bézierova kubika:

$$C(u) = \sum_{i=0}^3 B_{i,n}(u) \mathbf{V}_i, \quad (6)$$

kde $B_{i,n}(u)$ jsou Bernsteinovy polynomy třetího stupně a \mathbf{V}_i jsou vrcholy řídicího polygonu Bézierovy kubiky. Vztah mezi $\{\mathbf{P}_i\}$ a $\{\mathbf{V}_i\}$ je následující:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= \mathbf{P}_2 + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_2) - \mathbf{P}_1 \right]; & \mathbf{V}_1 &= \mathbf{P}_1 + \frac{1}{3} (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1); \\ \mathbf{V}_2 &= \mathbf{P}_1 + \frac{2}{3} (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1); & \mathbf{V}_3 &= \mathbf{P}_2 + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_3) - \mathbf{P}_2 \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Věta 4: Jsou-li splněny předpoklady Věty 2, je výsledná NURBS křivka v intervalu $0 \leq u \leq 1$ vypočtená dle (2) Fergusonova kubika:

$$C(u) = \mathbf{V}_0 F_0(u) + \mathbf{V}_3 F_1(u) + \mathbf{V}'_0 F_2(u) + \mathbf{V}'_3 F_3(u), \quad (8)$$

kde $F_i(u)$ jsou Fergusonovy polynomy a \mathbf{V}_0 , resp. \mathbf{V}_3 je počáteční, resp. koncový bod Fergusonovy kubiky; \mathbf{V}'_0 , resp. \mathbf{V}'_3 je tečný vektor v počátečním, resp. v koncovém bodě Fergusonovy kubiky:

$$\mathbf{V}'_0 = 3(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0); \quad \mathbf{V}'_3 = 3(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2). \quad (9)$$

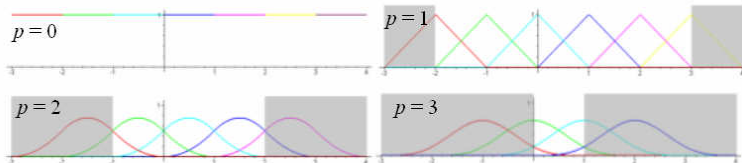
Vrcholy $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ jsou dány vztahem (7).

4 Příklad

Uvažujme čtyři řídicí body $\mathbf{P}_0 = [-3,0]$, $\mathbf{P}_1 = [-3,6]$, $\mathbf{P}_2 = [3,6]$, $\mathbf{P}_3 = [3,0]$, $U = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $p = 3$ a

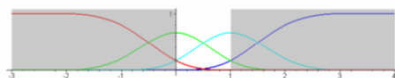
jednotkové váhy. Při výpočtu NURBS křivky (2) je třeba vypočítat B-spline
 bázeové funkce (Obr. 1), a poté racionální bázeové funkce (Obr. 2).

$N_{i,p}$	[-3, -2)	[-2, -1)	[-1, 0)	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4]
$N_{0,0}$	1	0	0	0	0	0	0
$N_{1,0}$	0	1	0	0	0	0	0
$N_{2,0}$	0	0	1	0	0	0	0
$N_{3,0}$	0	0	0	1	0	0	0
$N_{4,0}$	0	0	0	0	1	0	0
$N_{5,0}$	0	0	0	0	0	1	0
$N_{6,0}$	0	0	0	0	0	0	1
$N_{0,1}$	$u+3$	$-u-1$	0	0	0	0	0
$N_{1,1}$	0	$u+2$	$-u$	0	0	0	0
$N_{2,1}$	0	0	$u+1$	$-u+1$	0	0	0
$N_{3,1}$	0	0	0	u	$-u+2$	0	0
$N_{4,1}$	0	0	0	0	$u-1$	$-u+3$	0
$N_{5,1}$	0	0	0	0	0	$u-2$	$-u+4$
$N_{0,2}$	$\frac{1}{2}(u+3)^2$	$-u^2-3u-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}u^2$	0	0	0	0
$N_{1,2}$	0	$\frac{1}{2}(u+2)^2$	$-u^2-u+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(u-1)^2$	0	0	0
$N_{2,2}$	0	0	$\frac{1}{2}(u+1)^2$	$-u^2-u+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(u-2)^2$	0	0
$N_{3,2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}u^2$	$-u^2+3u-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}(u-3)^2$	0
$N_{4,2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}(u-1)^2$	$-u^2+5u-\frac{11}{2}$	$\frac{1}{2}(u-4)^2$
$N_{0,3}$	$\frac{1}{6}(u+3)^3$	$-\frac{1}{2}u^3-\frac{3}{2}u^2-\frac{7}{2}u-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}u^3+\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}u+\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}(1-u)^3$	0	0	0
$N_{1,3}$	0	$\frac{1}{6}(u+2)^3$	$-\frac{1}{2}u^3-u^2+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}u^3-u^2+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}(2-u)^3$	0	0
$N_{2,3}$	0	0	$\frac{1}{6}(u+1)^3$	$-\frac{1}{2}u^3+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}u+\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}u^3-\frac{3}{2}u^2+\frac{7}{2}u-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}(3-u)^3$	0
$N_{3,3}$	0	0	0	$\frac{1}{6}u^3$	$-\frac{1}{2}u^3+2u^2-2u+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}u^3-4u^2+10u-\frac{22}{3}$	$\frac{1}{6}(4-u)^3$



Obrázek 1: B-spline bázeové funkce

$R_{i,p}$	[-3, -2)	[-2, -1)	[-1, 0)	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4]
$R_{0,3}$	1	$\frac{3u^3+15u^2+21u+5}{2u^3+9u^2+9u-3}$	$\frac{3u^3+3u^2-3u+1}{u^3+6}$	$\frac{1}{6}(1-u)^3$	0	0	0
$R_{1,3}$	0	$\frac{-(u+2)^3}{2u^3+9u^2+9u-3}$	$\frac{-3u^3+6u^2-4}{u^3+6}$	$\frac{1}{2}u^3-u^2+\frac{2}{3}$	$\frac{(u-2)^3}{u^3-3u^2+3u-7}$	0	0
$R_{2,3}$	0	0	$\frac{(u+1)^3}{u^3+6}$	$-\frac{1}{2}u^3+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}u+\frac{1}{6}$	$\frac{-3u^3+15u^2-21u+5}{u^3-3u^2+3u-7}$	$\frac{-(u-3)^3}{2u^3-15u^2+33u-17}$	0
$R_{3,3}$	0	0	0	$\frac{1}{6}u^3$	$\frac{3u^3+12u^2+12u-4}{u^3-3u^2+3u-7}$	$\frac{3u^3-24u^2+60u-44}{2u^3-15u^2+33u-17}$	1



Obrázek 2: Racionální bázeové funkce

Povšimněme si několika významných skutečností. Vzhledem k zadanému uzlovému vektoru se jedná o segmentovanou otevřenou křivku, jejímž definičním oborem je pouze interval, na kterém je zajištěna plná podpora

SPECIÁLNÍ PŘÍPADY NURBS REPREZENTACE

bázových funkcí, tj. na kterém je právě $p + 1$ bázových funkcí nenulových. Šedou barvou jsou v Obr. 1 a 2 vyznačeny ty intervaly uzlového vektoru, na nichž plná podpora bázových funkcí zajištěna není. Definičním oborem křivky je pouze interval $[u_p, u_{m-p}] = [u_3, u_4] = [0, 1]$.

Parametrické vyjádření NURBS křivky vypočtené dle (2) je následující:

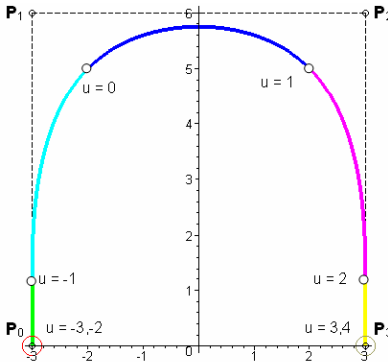
$C(u)$	[-3, -2)	[-2, -1)	[-1, 0)	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4]
$x(u)$	-3	-3	$\frac{3u^3+6u^2+6u-4}{u^3+6}$	$-2u^3+3u^2+3u-2$	$\frac{3(-u^3+9u^2+21u-9)}{u^3-3u^2+3u-7}$	3	3
$y(u)$	0	$\frac{-6(u+2)^2}{2u^3+9u^2+9u-3}$	$\frac{6(-2u^3-3u^2+3u+5)}{u^3+6}$	$-3u^2+3u+5$	$\frac{6(-2u^3+9u^2-9u-3)}{u^3-3u^2+3u-7}$	$\frac{-6(u-3)^2}{2u^3-15u^2+33u-17}$	0

Na Obr. 3 je křivka nakreslena včetně okrajových částí odpovídajících intervalům $[-3,0)$ a $(1,4]$, které procházejí koncovými body řídicího polygonu, protože $R_{0,3}(-3) = R_{3,3}(4) = 1$ a $R_{1,3}(-3) = R_{2,3}(4) = 0$. Interpolaci koncových bodů nelze zaměňovat s vlastností ukotvené křivky, u které je tohoto jevu dosaženo $p + 1$ násobností počátečního a koncového uzlu, viz Příklad v [1].

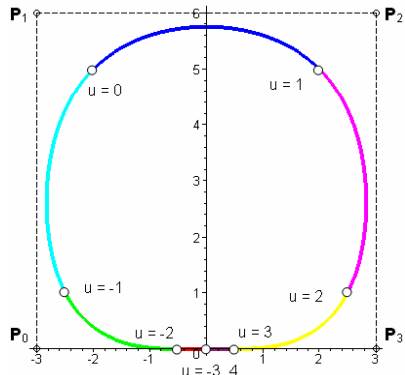
Parametrické vyjádření B-spline křivky vypočtené dle (4) je následující:

$C(u)$	[-3, -2)	[-2, -1)	[-1, 0)	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4]
$x(u)$	$-\frac{1}{2}(u+3)^3$	$u^3 + \frac{9}{2}u^2 + \frac{9}{2}u - \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}u^3 + 3u^2 + 3u - 2$	$-2u^3 + 3u^2 + 3u - 2$	$\frac{1}{2}u^3 - \frac{9}{2}u^2 + \frac{21}{2}u - \frac{9}{2}$	$u^3 - \frac{15}{2}u^2 + \frac{33}{2}u - \frac{17}{2}$	$\frac{1}{2}(4-u)^3$
$y(u)$	0	$(u+2)^3$	$-2u^3 + 3u^2 + 3u + 5$	$-3u^2 + 3u + 5$	$-2u^3 - 9u^2 + 9u + 3$	$(3-u)^3$	0

Definičním oborem otevřené B-spline křivky (Obr. 4) je interval $[u_p, u_{m-p}] = [0, 1]$, ostatní části otevřené B-spline křivky jsou ignorovány.



Obrázek 3:
Otevřená NURBS křivka

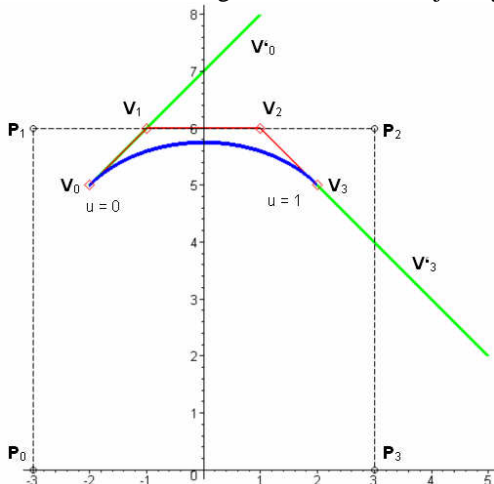


Obrázek 4:
Otevřená B-spline křivka

Je vidět, že NURBS i B-spline křivka se shodují na intervalu $[0, 1]$, ignorované části křivek se liší. Na rozdíl od NURBS křivky, B-spline křivka prochází bodem o souřadnicích $[0, 0]$, protože všechny B-spline bázové

funkce jsou pro u_0 a u_m nulové. Tato skutečnost platí pro otevřenou B-spline křivku obecně, nezáleží ani na volbě řídicího polygonu, ani na volbě uzlového vektoru.

Snadno nahlédneme, že na intervalu $u \in [0, 1]$ jsou racionální i B-spline báze funkce 3. stupně rovny Coonsovým polynomům, z čehož plyne, že úsek křivky příslušející tomuto intervalu je Coonsova kubika. Souvislost mezi Coonsovou, Bézierovou a Fergusonovou kubikou je zřejmá z Obr. 5.



Obrázek 5

Souvislost mezi Coonsovou, Bézierovou a Fergusonovou kubikou

Poděkování

Tento článek vznikl za podpory projektu CTU 0513112: NURBS reprezentace křivek a ploch v MAPLE.

Literatura

- [1] Kundráťová, K.: *NURBS reprezentace křivek v MAPLE*, CGG'05, Janov, 2005.
- [2] Fisher, J. – Lowther, J. – Shene, Ch. K.: *If You Know B-Splines Well, You Also Know NURBS!* SIGCSE'04, Virginia, 2004.
- [3] Lowther, J. – Shene, Ch. K.: *Teaching B-splines Is Not Difficult!* SIGCSE'03, Nevada, 2003.
- [4] Shene, Ch. K.: <http://www.cs.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES>
- [5] Piegl, L. – Tiller, W.: *The NURBS Book*, Springer, Londýn, 1995.

Dalibor Martišek

POČÍTAČOVÁ GRAFIKA JAKO MOTIVACE STUDIA MATEMATIKY

Abstrakt

Príspevek se zabývá úlohou počítačové grafiky při motivaci studia matematiky na vysokých školách technických. Poměrně hezké grafické výstupy lze totiž dosáhnout relativně jednoduchými programátorskými technikami podloženými znalostmi, které studenti získají v základním kurzu matematiky.

Klíčová slova

Motivace výuky, programování, lineární transformace, grupa, izomorfismus, polodie, promítání, optické jevy, iterační proces

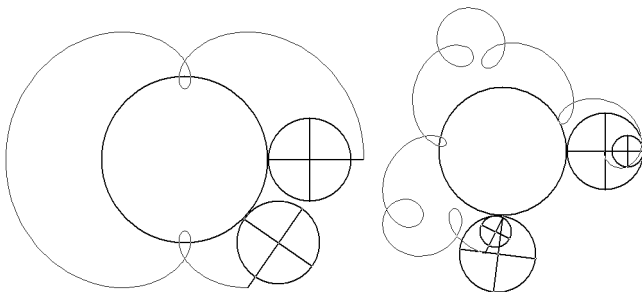
Je všeobecně známo, že motivace výuky je velmi důležitá. Ve vyučování matematice v prvním ročníku vysokých škol technických to platí dvojnásob. Matematika zde totiž tvoří podstatnou část studia. V té době toho studenti o svém oboru vědí většinou velmi málo a o potřebě matematiky v něm ještě méně. Jsou nuceni studovat matematiku „na úvěr“ a doufat, že se jim to později vyplatí.

Kromě základního kurzu matematiky vyučuji i počítačovou grafiku ve druhém semestru základního studia a ve třetím semestru oboru Matematické inženýrství. Ze svých zkušeností s touto výukou si troufám tvrdit, že vedle technických motivací učiva se dnes nabízí využít počítače již v základním kursu matematiky, a to nejen k prezentaci možností profesionálního matematického software (Maple, MathCAD atd.). Je sice hezké, že takový software dnes „ovládá“ celý základní kurs vysokoškolské matematiky (umí pracovat s maticemi, řešit soustavy rovnic, derivovat, integrovat atd.) – to ale od studia spíše odrazuje (proč mám pracně počítat nějaké Fourierovy řady, když mně výsledek daleko rychleji a správně vyplivne počítač?).

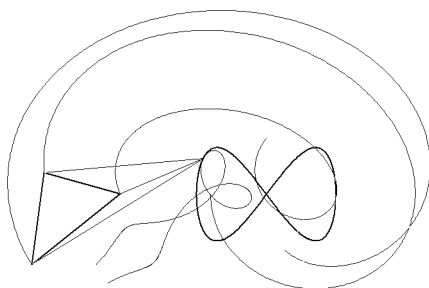
Podle mého názoru spočívá těžiště práce s počítačem ve výuce matematiky někde jinde. Mnohé partie matematiky lze například využít k „pohledům do kuchyně“ CAD systémů či různých photoshopů, o nichž již studenti nejen vědí, ale často v nich již i pracují. Většinou se domnívají, že ke zpracovávání grafických informací tak, jak je realizováno v těchto

systemech, je potřeba „velice složitá matematika“ a obdivují „neuvěřitelně hlavy“ autorů těchto systémů. Jsou pak velmi překvapeni, že většina manipulací s geometrickými útvary je založena na poznacích, které získali v základním kursu lineární algebry a analytické geometrie v prvním semestru. Mnozí z nich pak ochotně dohánějí nejen své nedostatky v programování, ale pracně se upomínají např. na elementární poznatky analytické geometrie, které se před pár měsíci učili jen na zkoušku s tím, že je okamžitě mohou opět zapomenout.

Základem zobrazování rovinných útvarů je lineární transformace uživatelské souřadné soustavy do soustavy světové. Manipulace s rovinnými útvary pak spočívají v aplikacích geometrických transformací reprezentovaných příslušnými maticemi. Lze vyjít z elementárních matic posunutí, osových symetrií a afinít podle souřadných os, rotací a stejnohlostí se středem v počátku. Obecnější transformace (valivé pohyby, pohyby ojníc apod.) lze získat složením vhodných transformací a jejich matice díky izomorfismu příslušných grup násobením matic několika základních transformací.



Obrázek 1 : Modelování valivých pohybů pomocí skládání lineárních transformací.

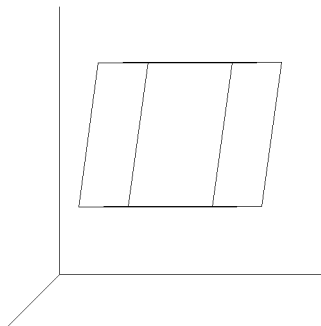


Obrázek 2 : Kinematická konstrukce pevné a hybné polodie

Posluchačům, kteří jsou zběhlejší v programování, nežiní příliš potíže naprogramovat tyto transformace do zajímavých cyklů a prostorové geometrické úvary jim „ožijí“ - začnou se na monitoru pohybovat. Mnohé z těchto výsledků (viz obr. 1 a 2) jsou pak následně používány při přednáškách a cvičeních v předmětu Konstruktivní geometrie, který vyučujeme v 1. semestru.

Při zobrazování prostorových útvarů pak narážíme na matematické problémy na každém kroku. Začínáme s kosoúhlým promítáním na rovinu. Jeho zobrazovací rovnice jsou velmi jednoduché. Při zobrazování řady křivek a ploch (šroubovice, elipsoidy, anuloidy...) je třeba nejen znát parametrické rovnice těchto konkrétních křivek a ploch, ale studenti mají zároveň příležitost k hlubšímu pochopení parametrických rovnic vůbec.

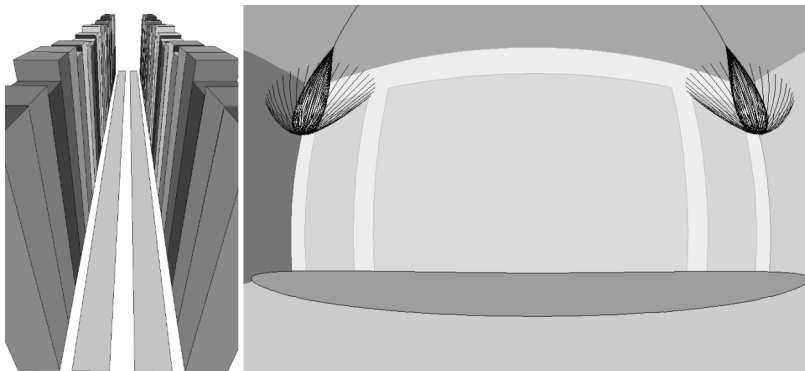
Podobně jako v rovině, tak i v prostoru můžeme naprogramovat nejrůznější transformace včetně jednoduchých animací. Při těchto animačních pokusech pak sami posluchači zjistí, že kosoúhlé promítání není pro tyto účely nejvhodnější (viz např. obr. 3). Stojí pak před otázkou, jaké promítání zvolit, aby se průměty co nejvíce přibližovaly reálným vjemům prostorových útvarů.



Obrázek 3 : Rotace krychle ve volném rovnoběžném promítání

Zrakový vjem vzniká jako středový průmět prostorového útvaru na kulovou plochu sítnice oka. Při výuce samozřejmě nezačínáme tímto poměrně obtížným zobrazením, ale i při značném zjednodušení (pravoúhlé event. středové promítání rovinu) je třeba ve studijní skupině opět prášit řadu geometrických poznatků. Je třeba odvodit rovnici promítací roviny ze směrových úhlů jejího normálového vektoru, na tuto rovinu promítnout prostorovou souřadnou soustavu a tento průmět transformovat do rovinné uživatelské, souřadné soustavy. Poměrně zdoluhavý výpočet a jeho naprogramování se však vyplatí, neboť s takto získanými průměty můžeme „věrohodně“ manipulovat.

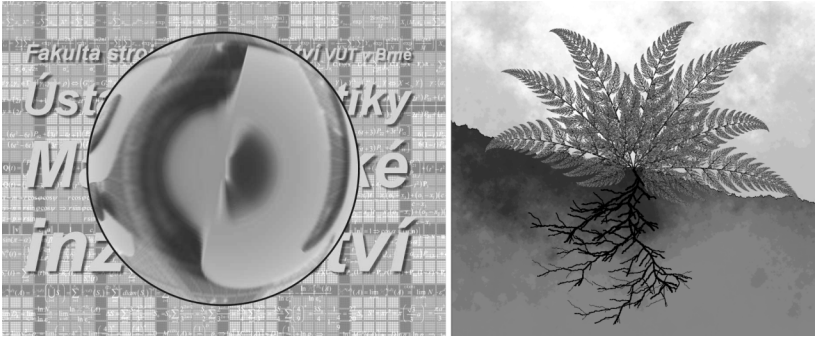
Zvládneme-li pravoúhlé promítání na rovinu, můžeme se pustit do promítání středového. Kromě výše uvedených úloh musíme tedy určit souřadnice středu promítání, dále rovnici každé promítací přímky a průmět jako její průsečík s průmětnou. Odměnou jsou pak velmi hezké obrázky prostorových útvarů v lineární perspektivě. Odtud je pak již jen krůček k promítání na kulovou event. válcovou plochu. Místo průsečíku přímky s rovinou hledáme její průsečík s kulovou resp. válcovou plochou, v proceduře určující tento průsečík je třeba změnit pouze jeden jediný vzoreček. Nejedná se již o lineární transformaci, obrazem úsečky není úsečka. Nestačí tedy zobrazit krajní body, ale pomocí parametrické rovnice úsečky i dostatečný počet vnitřních bodů. Průměty prostorových objektů pak vypadají tak, jak je známe z fotografií pořízených širokoúhlým objektivem: místo úseček máme kruhové resp. eliptické oblouky, zakřivené více či méně podle toho, jakou zvolíme vzdálenost středu promítání (viz obr. 4).



Obrázek 4 : Ukázky středového promítání na rovinu a na kulovou plochu

Zobrazování prostorových útvarů s viditelností vyžaduje další znalosti. Viditelnost lze řešit například pomocí z-bufferu, či uspořádáním segmentů plochy podle klesající vzdálenosti od pozorovatele. Později sestrojované bližší segmenty tak překreslují dříve sestrojenou scénu a viditelnost je tak vyřešena sama přirozeným způsobem. V každém případě je však třeba zvládnout určování vzdáleností v prostoru, chceme-li rub a líc plochy barvit jinou barvou, musíme strany ploch rozpoznávat vektorovým součinem. Je třeba určovat úhel normály segmentu s promítacím paprskem (zabráníme tak haváriím programu při vybarvování segmentů, naprosto nezbytné je to

v případě, chceme-li plochy osvětlit či stínovat). Lze se zabývat modelováním optických jevů, modelovat konvergenční procesy metodami fraktální geometrie a mnoha dalšími zajímavými problémy (viz obr. 5).



Obrázek 5 : Modelování optických vad spojné čočky a studium iteračních procesů

Uvedme alespoň jeden konkrétní příklad, jak počítačová grafika poskytuje nové pohledy na tradiční matematické metody. Uvažujme iterační proces

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= g(x_i, y_i)\end{aligned}$$

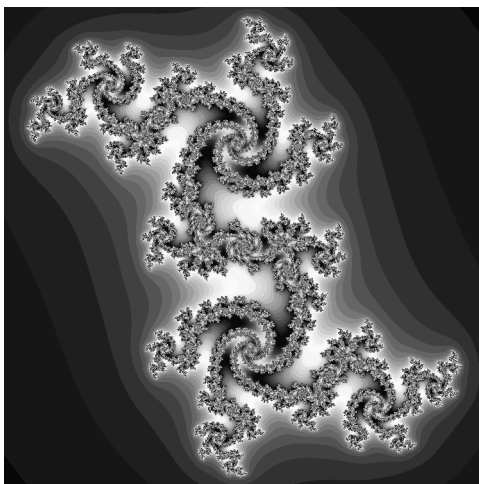
Tento proces bude konvergovat v případě, když alespoň jedna z norem matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

je menší, než jedna. V numerické matematice se většinou spokojíme s konstatováním, že ověření této podmínky pro daný konkrétní iterační proces je „obtížné“. Výpočetní technika nám však umožní daleko víc. Vezměme jako příklad soustavu

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i^2 - y_i^2 + c_1 \\ y_{i+1} &= -2x_i y_i + c_2\end{aligned}$$

(což je jednoduchá soustava, řešitelná poměrně snadno analyticky). Uvažujme startovací body z obdélníka $[x_0; y_0] \in \langle a; b \rangle \times \langle c; d \rangle$ a sledujme konvergenci resp. divergenci procesu. Příslušný bod obarvíme barvou podle rychlosti divergence. Na obr. 6 vidíme výstup pro $c_1 = 0.23296$; $c_2 = 0.55031$; $a = c = -1.5$; $b = d = 1.5$. Studium iteračních procesů klasickými metodami je i u těch nejjednodušších případů zcela nemožné.



Obrázek 6 : Iterační proces soustavy dvou nelineárních rovnic

Domnívám se, že práce s počítačem by dnes měla být samozřejmostí. Posluchači by se měli do počítačové učebny dostat i v základním kursu matematiky, a to několikrát za semestr. Tvořivé uplatnění teoretických poznatků, vědomí, že je mohu použít v zajímavém programu, který si mohu sám napsat, a radost z toho, že mně takový program hezky funguje, to jsou nenahraditelné impulsy k dalšímu teoretickému studiu.

Literatura

- [1] Martišek, D.: *Matematické principy grafických systémů*, Littera, Brno, 2002
- [2] Martišek, D.: *Softwarové modelování lomu světla*, in Sborník XV kolokvia o řízení osvojovacího procesu, Vyškov, 2004
- [3] Martišek, D.: *Softwarové modelování odrazu světla*, Pedagogický software, České Budějovice - sborník přednášek a programů, 2004

Katarína Mészárosová

KRÁSA A FRAKTÁLNA GEOMETRIA

Abstrakt

Krátke zamyslenie na tému krása v exaktných vedách. Úloha pedagóga pri sprostredkovaní pocitov radosti a krásy. Fraktálna geometria a jej paralely v ľudovom indickom umení.

Kľúčové slová

Fraktálna geometria, Lindenmayerove systémy, kolam.

Motto: Rozdiel medzi typom myslenia vedca exaktných vied a obrazným myslením umelca vôbec nie je taký veľký, ako si to niekedy ľudia predstavujú.

Kapica¹

1 Prieniky vedy a umenia

1.1 Úvod

Všeobecne je vžitý názor, že vo vede je rozhodujúce len racionálne myslenie. V skutočnosti sa na vedeckej práci zúčastňujú všetky iracionálne zložky človeka. Spomeňme len niektoré: intuícia, tvorivosť, emócie.

Medzi najsilnejšie emócie, ktoré prežíva vedec pri svojej práci, určite patrí radosť z tvorby a radosť z poznania spojená so silným zážitkom krásy. Vedecký experiment, alebo vedecká teória je opakovateľná pre každého, kto je schopný ju pochopiť. Pri tom môže tento človek sprostredkované prežívať pocity, ktoré mal objaviteľ teórie. Podobne umelecké dielo sprostredkúva emócie a myšlienky jeho tvorcu, ale je k tomu potrebná istá schopnosť prijímateľa, jeho citová pripravenosť.

Úlohou pedagóga prírodovedných predmetov je odovzdávať študentom dedičstvo vedeckého poznania. Majstrovstvom pedagóga je schopnosť sprostredkovať študentom radosť z poznania, objavovania a prežívania krásy, ktorú poskytuje logika vedy.

„Racionálne poznanie a racionálna činnosť tvoria hlavnú časť vedeckého výskumu, ale nie sú preň všetkým. Racionálna časť výskumu by bola v podstate zbytočná, keby ju nedoplňovala intuícia, ktorá obdarúva

¹ Zdroj:[Kůrková,1989]

vedcov novým nazeraním a tvorivosťou. ... Zdá sa, že počas relaxácie po sústredenej intelektuálnej činnosti preberá vedenie intuitívne myslenie a to dokáže vyprodukovať nečakané osvetľujúce vnuknutie, ktoré do vedeckého výskumu vnáša toľko radosti a potešenia.“[Capra,1992 str.22-25]

Myslenie vedca obsahuje prvky intuície a podvedomia a naopak myseľ umelca je ovplyvnená súčasným stavom vedy a poznania.

Z podvedomia pramení intuícia nevyhnutná tak pre vedu, ako aj pre umenie. Racionálnu zložku našej mysle nemožno úplne oddeliť od jej iracionálnej časti. Ak by sme to urobili, možno veda by sa vyvíjala ďalej, možno umelci by ďalej tvorili, ale ľudia by neboli šťastní.

1.2 Krása v exaktných vedách²

Snáď každý, kto si zvolil svoju životnú cestu spojenú s vedou, nachádza v nej radosť. Ale ostatní ľudia často pokladajú vedcov za podivných suchárov.

„Veľmi sa rozšírila slepota k estetickému zložku matematiky. Spôsobuje dojem, že matematika je suchá ako trúd, vzrušujúca ako čítanie telefónneho zoznamu, a vzdialená ako zákonodarstvo pätnásteho storočia. Kto však jej estetickú zložku docení, tomu celý predmet nádherne ožije a zažiarí ako snáď žiadny iný výtvor ľudského ducha.“ (Davis, Hersch)

Prvé dotyky s matematikou sprostredkuje deťom škola. Ak už v detstve získajú záporný vzťah k matematike, tak len veľmi ťažko si ho neskôr dokážu zmeniť. Tu je úloha učiteľa často rozhodujúca.

Otázkou krásy v exaktných vedách sa zaoberá fyzik Weinberg vo svojej knihe Snění o finální teorii: „I keď je ťažké definovať matematickú krásu vo vedách, za jej nevyhnutné prvky sú považované jednoduchosť a nevyhnutnosť. ... Krása, ktorú nachádzame vo fyzikálnych teóriách sa veľmi podobá krásu niektorých umeleckých diel, v ktorých by sme nechceli zmeniť jedinú notu. ... jediný ťah štetca, či jediný verš.“

Feynman spojoval dokonca krásu s pravdou: „Pravdu môžeme rozoznať podľa jej krásy a jednoduchosti ... dôležitou vlastnosťou prírody je jednoduchosť – a preto je krásna.“

Fraktálna geometria ako matematický nástroj na popísanie prírodných štruktúr poskytuje príležitosť zoznámiť sa s matematikou z jej estetickými stránkami a dotknúť sa jej krásy.

² Všetky citácie v tejto kapitole sú zo zdroja: [Baran, 2002; str.90-92]

1.3 Krása geometrie

Geometria neopakovateľným spôsobom spája v sebe krásu logiky, ktorú má spoločnú so svojou sestrou matematikou, a možnosť grafického znázornenia, ktoré poskytuje priamy vizuálny vnem evokujúci pocit krásna. „Presvedčenie že geometria tkvie v prírode a nie je len súčasťou systému, ktorý používame na opísanie prírody, má pôvod v gréckom myslení. ... Geometria sa považovala za dokonalú kombináciu logiky a krásy, a preto sa verilo že má božský pôvod. Z toho pochádza Platónov výrok: 'Boh je geometer.'“ [Capra, 1996 str. 127]

Fraktálna geometria predstavuje nový pohľad na geometriu. Benoit Mandelbrot (narodený 1924) zistil viaceré spoločné rysy štruktúr prírody, spoločnosti i matematických objektov a výsledky spracoval v knihe *The Fractal Geometry of Nature* (1982). Jednou z hlavných charakteristík každého fraktálneho objektu je jeho fraktálna dimenzia. Veľmi významné je, že na rozdiel od obvyklých dimenzií, ktoré sú celočíselné, môže byť fraktálna dimenzia zlomok alebo dokonca aj iracionálne číslo. Sila tohto pojmu spočíva v tom, že je mierou členitosti množiny. Mandelbrot si všimol, že v prírode sa vyskytujú takmer výlučne objekty s takouto charakteristikou. Fakt, že väčšina ľudí vníma fraktály ako krásne, je zrejme spôsobená tým, že práve prírodné objekty prijímame ako prirodzené, a teda aj krásne. Tento praveký vzťah s prírodou je základom našej emočnej pripravenosti pociťovať fraktálne štruktúry ako krásne.

Možnosť vizualizácie fraktálov pomocou počítačov umožnila vnímať ich krásu aj pre tých, ktorí ju nevnímajú v matematickom vyjadrení a spojením oboch týchto prístupov znásobiť záujem o ne nielen medzi matematikmi. Fraktálna geometria inšpirovala mnohých umelcov.(obr.1)



Obrázok 1a: Jay Jacobson



Obrázok 1b: Alice Kelley

„Fraktálnej geometrii sa podarilo vystihnúť iný druh krásy, než je dokonalá krása ideálnych útvarov klasickej geometrie. Krása fraktálov spočíva v krehkej harmónii medzi pravidelnosťou a náhodnosťou. V tejto harmónii spočíva aj krása prírody.“ [Kúrková, 1989]

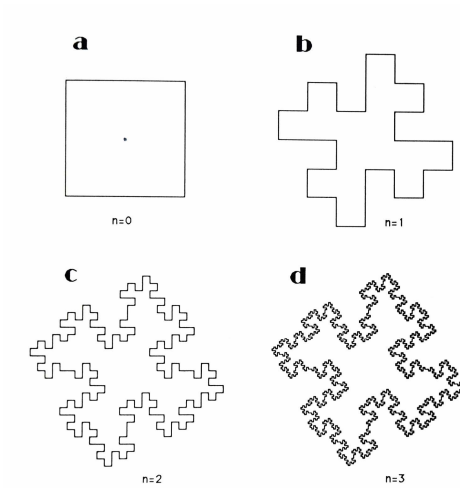
2 Fraktály a Lindenmayerove systémy

2.1 Lindenmayerove systémy a ich grafická interpretácia

Roku 1968 biológ Aristid Lindenmayer vynášiel a popísal postup plánovaného rastu pomocou mechanizmu, ktorý bol neskôr pomenovaný L-systém. Ten bol rozpracovaný matematikom Alvy Ray Smithom, ktorý ho používal na zobrazovanie rastlín a nazýval ich graftály. Premyslaw Prusinkiewicz začal detailne študovať pravidlá, ktorými sa riadi proces rastu, vetvenia, tvorby pupencov, listov a kvetov.

Jednou z možností grafického zobrazenia L-systémov je tzv. korytnačia grafika. Jednotlivé symboly reťazca sa pri tom chápu ako príkazy pre riadenie pohybu kresliaceho zariadenia tzv. korytnačky. Väčšina systémov používa nasledujúci základný súbor príkazov:

- F korytnačka sa posunie vpred o krok dĺžky d a nakreslí úsečku.
- f korytnačka sa posunie vpred o krok dĺžky d ale nekreslí úsečku
- + korytnačka sa na mieste otočí doprava o uhol δ
- korytnačka sa na mieste otočí doprava o uhol δ



Obrázok 2: Kvadratický Kochov ostrov

Na obrázku 2 sú vykreslené prvé štyri iterácie fraktálu známeho pod menom kvadratický Kochov ostrov.

Vychádzame z axiómu

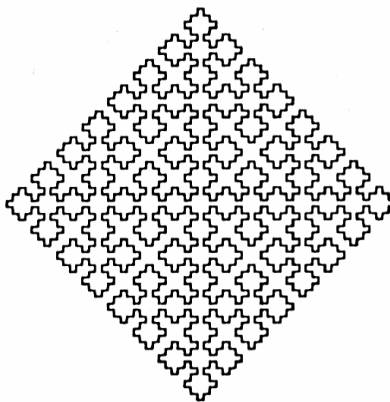
$$\omega: F + F + F + F,$$

(jeho zobrazením je štvorec.)

Prepisovacie pravidlo má tvar

$$p: F \rightarrow F + F - F - FF + F + F - F,$$

(každý symbol F je nahradený daným reťazcom). Uhol δ má veľkosť 90°



Obrázok 3: Sierpinskeho krivka

Analogicky je pomocou L-systému vyjadrený „klasický“ fraktál vytvorený v roku 1912 Waclawom Sierpińskym. Je to krivka, ktorá v nekonečnej iterácii vyplní celú plochu štvorca. (Na obr. 3 je štvrtá iterácia)

$$\delta = 90^\circ \quad \omega: F + XF + F + XF$$

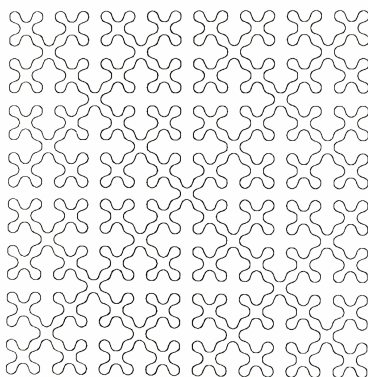
$$p: X \rightarrow XF - F + F - XF + F + XF - F + F - X$$

(symbol X nie je graficky interpretovaný).

2.2 L-systémy a ľudové umenie³

V dedinách v južnej Indii, ženy dekorujú svoje domy tradičným spôsobom nazývaným *kolam*. Toto umenie má dávny pôvod starý až 5000 rokov. Vyskytujú sa dekoratívne motívy veľkosti 3m x 3m s celkovou dĺžkou línie až stovky metrov.

Prvé formálne modely na popis *kolamových* vzorov navrhli G. Siromoney, R. Siromoney a K. Krithivasan. Neskôr sa touto témou zaoberali Prusinkiewicz a Krithivasan a použili na ich generovanie L-systémy.



Obrázok 4: Snake kolam

Na obrázku 4 je *kolamový* motív nazývaný snake (had). Môžeme ho rozdeliť na dve zhodné časti, súmerné podľa diagonály.

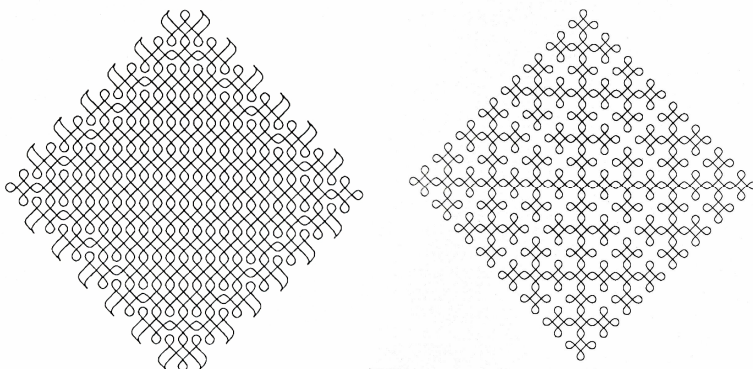
L- systém generujúci túto krivku má tvar:

$$\omega: F + XF + F + XF \quad \delta = 90^\circ$$

$$p: X \rightarrow XF - F - F + XF + F + XF - F - F + X$$

Všimnime si podobnosť medzi týmto kolamom a Sierpinskeho krivkou. Je fascinujúce objavovať fraktálne krivky v ľudovom umení!

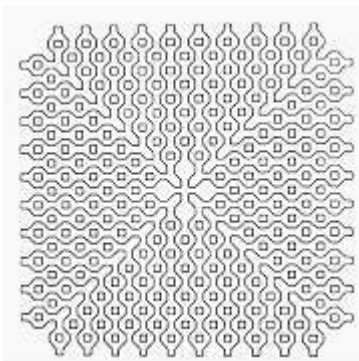
³ Zdroj:[Prusinkiewicz, Hanan; 1989 ; str.69- 78]



Obrázok 5: Ďalšie príklady kolamov:

a) Scissors

b) Anklets of Krishna



Obrázok 6: Kolam nazývaný Kooja

Záver

Príklad indického ľudového umenia a jeho interpretácia pomocou L-systémov sú úžasným príkladom dokumentujúcim jednotu medzi zdanlivo diametrálne odlišným prístupom umelca a vedca. Je naozaj až zarážajúce, keď si uvedomíme, že dvaja úplne odlišní ľudia, vyrastajúci v úplne inom svete, vzdialení od seba nie len tisícky kilometrov ale aj tisícky rokov, dospeli k takmer totožnému geometrickému tvaru. Mnohým súčasníkom sa zdá rozdiel medzi svetom matematiky a „bežným“ životom rovnako vzdialený. Zmenšovať túto priepasť medzi nimi, je úlohou aj nás pedagógov na každom stupni vzdelávania. Je našou povinnosťou nie len vzdelávať ale aj vychovávať. A práve na príjemné pocity nám akosi v dnešnej pretechnizovanej dobe ostáva stále menej času. Určite medzi ne patrí aj

pocit krásna a radosti z vlastnej tvorivosti. Napriek všetkým prekážkam (najmä nedostatok času) by sme sa mali snažiť sprostredkovať svojim študentom dobrodružstvo objavovania. Jednou z krásnych tém, ktorá sa k tomu priamo núka je fraktálna geometria a jej aplikácie.

Pod'akovanie

Príspevok bol vypracovaný v rámci riešenia grantového projektu VEGA 1/1034/04

Literatura

- [1] V. Baran: *Jaderná energetika a další problémy moderní civilizace*, Nakladatelství akademie věd ČR, Praha 2002
- [2] F. Capra: *TAO fyziky*, Gardenia, Bratislava 1992
- [3] V. Kůrková: *Fraktální geometrie*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, ročník 34 (1989) č.5
- [4] L. Kvasz: *Geometrické aspekty zobrazovania priestoru v maliarstve*, Slovenský časopis pre geometriu a grafiku
- [5] Prusienkiewicz, J. Hanan: *Lindenmayer systéme, fractals and Plants*, Springer- Verlag New York 1989
- [6] www.fractalism.com;
- [7] www.fractalus.com

Martin Němec

GEOMETRIE V TESTOVÁNÍ A AUTOMATICKÉM VYHODNOCOVÁNÍ

Abstrakt

Príspevek se zabývá některými návrhy a metodami, pro rozšíření možnosti testování a automatického vyhodnocování nestandardních otázek a úloh. Popisuje konkrétní příklady, kterými se zabýváme v rámci rozšíření možnosti LMS Barborka. V příspěvku jsou popsány tři základní moduly. Vytvářené moduly jsou navrženy tak aby rozšířily možnosti pro testování a automatické vyhodnocování.

Klíčová slova

Aplety, java, XML, testování, automatické vyhodnocování, vektorová grafika

1 Úvod

Základní způsoby vzdělávání jsou v dnešní době doplňovány novými formami, využívajícími nové technologie. Stejně tak je potřeba rozšiřovat možnosti pro testování a automatické vyhodnocování. Proto v rámci LMS Barborka vytváříme moduly, které by měly rozšířit tyto testovací možnosti. Pod slovem „testování“ není myšleno pouze zkoušení, kdy student dostane známku nebo body podle správnosti řešení, ale také to, kdy si student může sám otestovat své vlastní znalosti a zjistit tak jak danému tématu porozuměl.

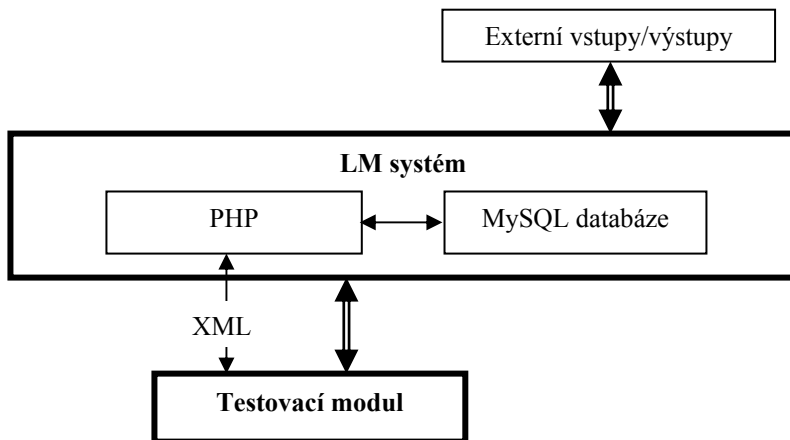
V minulém roce bylo na naší fakultě pomocí LMS Barborka vyzkoušeno přes 800 studentů. Byly to předměty jako Matematická Logika (628 testů) nebo Teorie Zpracování Dat (679 testů). Jednalo se o testy tvořené variantními otázkami, kdy studenti vybírali z možností a, b, c, V rámci převádění některých dalších předmětů bylo potřeba umožnit i jiné typy testování, podle požadavků daných předmětu.

2 Testovací moduly

Základními požadavky na testovací moduly je použití na internetu a samozřejmě co největší možnost rozšiřitelnosti, proto jsou testovací moduly vytvářené jako Java Aplety. Dalším požadavkem je zvolení vhodného formátu pro předávání a ukládání dat, pro tyto účely byl zvolen formát XML. Všechna zadání a každý jednotlivý test je v tomto formátu uložen

do databáze, popřípadě vyexportován a je umožněno si jakýkoli test kdykoli zpětně podle potřeby otevřít.

Základní schéma připojení testovacích modulů k LMS je zobrazena na obrázku 1. Je zde zobrazen LMS systém, skládající se z PHP skriptů a MySQL databáze a připojeného testovacího modulu.



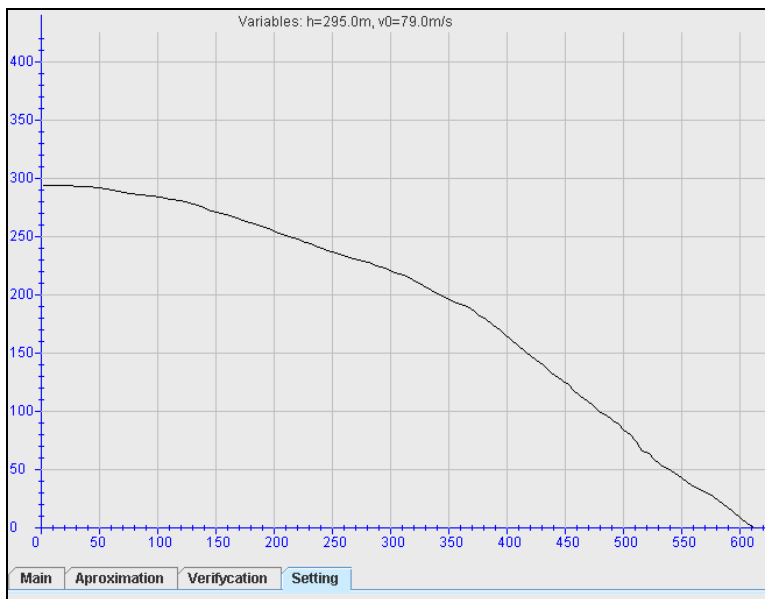
Obrázek 1: Schéma LMS a testovacího modulu

Vzhledem k rozlišným požadavkům na testovací moduly jsou aktuálně rozděleny do třech částí, podle obsahu testování, na testovací modul funkcí, testovací modul objektů a testovací modul schémat. Testovací moduly mohou v závislosti na zadání a rozsahu generovat vstupní hodnoty. Díky tomuto můžou mít testování studenti rozlišné zadání. Jednotlivé moduly dovolují také automaticky vyhodnocovat bodově nebo procentuálně správnost výsledku.

2.1 Modul funkcí

Prvním z testovacích modulů je modul funkcí. Je určen pro testování zejména úloh založených na načrtnutí průběhu funkce. Student má možnost načrtnout výslednou funkci, která je aproximována a její průběh je porovnán se správným výsledkem. Testovacími kritérii v tomto případě může být podobnost zadané funkce se vzorem, dále pak délka, průběh, směr, důležité body apod.

Pro náhodné generování vstupních proměnných je potřeba při vytváření zadání vhodně nadefinovat rozsahy, aby nedošlo k případu, že student dostane nespílitelné zadání.



Obrázek 2: Modul pro testování funkcí

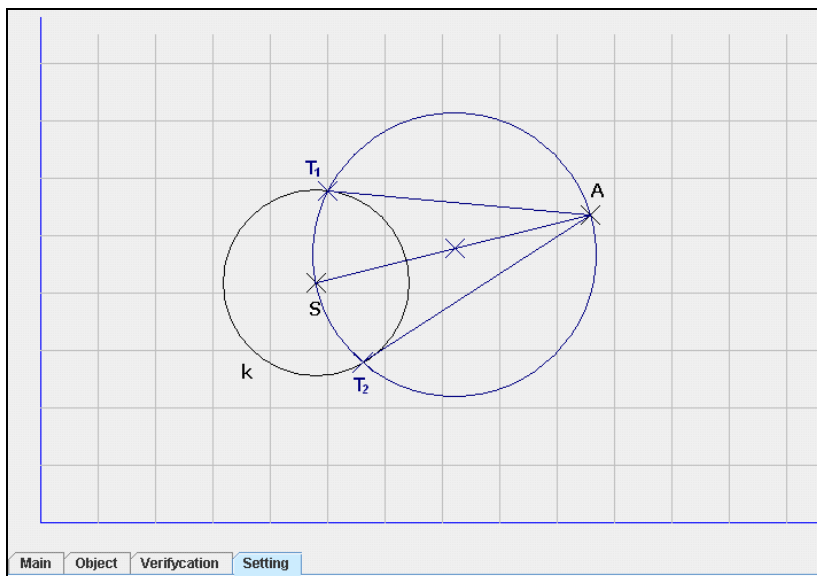
Na obrázku 2. je ukázka testování vodorovného vrhu, student dostane vygenerované zadání a jeho úkolem je v tomto případě načrtnout křivku vodorovného vrhu. Načrtnutá křivka je pak porovnána se zadáním a vyhodnocena.

Tento modul by měl být používán zejména pro různé průběhy funkcí, fyzikální, chemické, elektrické průběhy, události a jevy.

2.2 Modul objektů

Druhým vytvářeným modulem je modul objektů. Tento modul umožňuje používat základní objekty (bod, úsečka, tečna, kružnice, atd.), díky kterým můžeme umožnit studentům tvořit určité postupy a geometrické konstrukce. Tento modul je tedy vhodný pro konstrukční úlohy založené na poloze a rozmístění základních objektů.

Dodatečně lze definovat další složitější objekty skládající se z jednotlivých elementárních objektů. V tomto modulu je složitější vyhodnocování, neboť některá ze zadání, zvláště u geometrických konstrukcí může mít více správných postupů nebo řešení.



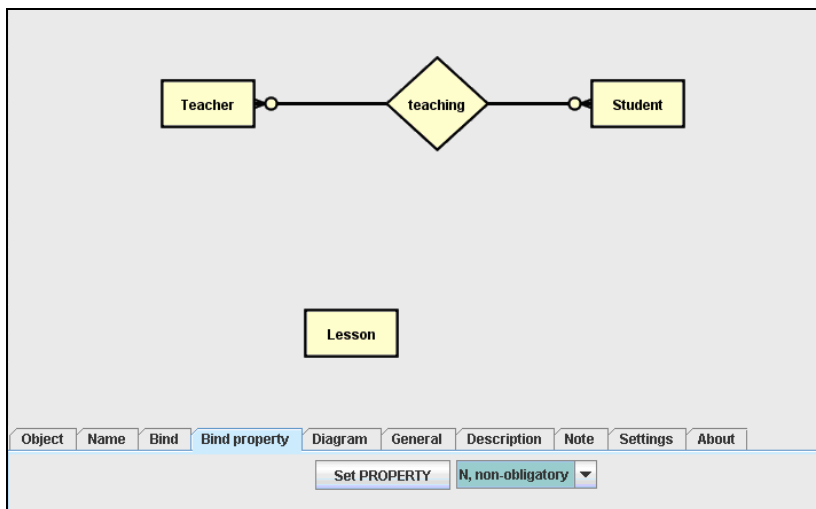
Obrázek 3: Modul pro testování objektů

Na obrázku 3. je příklad zadání „konstrukce tečen kružnice k procházející bodem A “, student musí správnou volbou objektů (úsečka, kružnice, apod.) sestavit správnou konstrukci podle zadání. V tomto případě musí správným způsobem a postupem zkonstruovat obě tečny ke kružnici k procházející bodem A .

2.3 Modul schémat

Poslední ze zmiňovaných modulů je modul schémat. Tento modul je určen pro testování založených na úlohy založené na topologii a vlastnostech objektů. Student má k dispozici vybrané objekty, kterým může přiřazovat vlastnosti. Výsledné schéma se následně vyhodnotí a přidělí se mu bodové nebo procentuální ohodnocení.

V tomto případě vidíme na obrázku 4. ukázkou při testování ER diagramu (Entity Relationship Diagrams), student má k dispozici potřebné typy objektů, které může libovolně rozmisťovat po ploše. Těmto objektům může student nastavovat jejich atributy a vlastnosti. Dále může mezi jednotlivými objekty nastavit vazbu a také její vlastnosti.



Obrázek 4: Modul pro testování schémat

Potřebné v tomto případě je definování správných objektů, vztahů a jejich vlastností. V tomto případě je obtížnější generování zadání neboť je většinou textového charakteru. Pro odlišení je možné například přidat objekty které do zadaného schématu nepatří.

Vyhodnocení celého schématu je nezávislé na umístění objektů na ploše. Vyhodnocují se pouze nastavené vlastnosti a vztahy.

3 Závěr

Aktuálně jsou na VŠB-TU Ostrava realizovány experimentální úlohy, řešící jednotlivé části popsaných problematik a možností týkající se jednotlivých modulů jejich testovacích možností a schopností automaticky vyhodnocovat jednotlivé výsledky.

Naší snahou je rozšířit možnosti testování a to nejen za účelem hodnocení studentů, ale zejména umožnit studentům samostatně si otestovat své vlastní znalosti.

Literatura

- [1] J. Ziv, A. Lempel: *Compression of individual sequences via variable-rate coding*, IEEE transac. on Information Theory, Vol. IT-24, No.5., 1978, pp.530-536 – format GCG_Refer
- [2] FRANCIS S. HILL, Jr.: *Computer Graphics, 1990*. New York : Macmillian Publishing Company, a division of Macmillian, Inc. ISBN 0-02-354860-6
- [3] POWELL, M. J. D.: *Approximation theory and methods*. Cambridge University Press 1981, ISBN 0-521-22472
- [4] M. Němec: *Technická podpora v distanční výuce*, ICTE 2004 University of Ostrava:, ISBN 80-7042-993-3
- [5] M. Němec.: *Tvorba multimediálních prostředků pro předmět deskriptivní geometrie.*, VŠB-TU Ostrava:, VŠB-TU Ostrava, 2004, VŠB-TU Ostrava, ISBN 80-248-0581-2
- [6] M. Němec.,R. Fasuga: *Nástroje pro testování speciálních úloh – složitá schémata, grafické úlohy a metody jejich automatického vyhodnocení*, Ostrava:, University of Ostrava, 2005, ISBN 80-7368-081-5

Stanislav Olivík

POROVNÁNÍ DVOU METOD HLEDÁNÍ ODRAZNÉHO BODU NA POVRCHU ELIPSOIDU

Abstrakt

Úlohou GPS altimetre je nalezení odrazného bodu signálu vyslaného z jednoho satelitu a přijatého druhým satelitem. Příspěvek porovnává dvě iterační metody hledání odrazného bodu GPS altimetrie na povrchu elipsoidu.

Klíčová slova

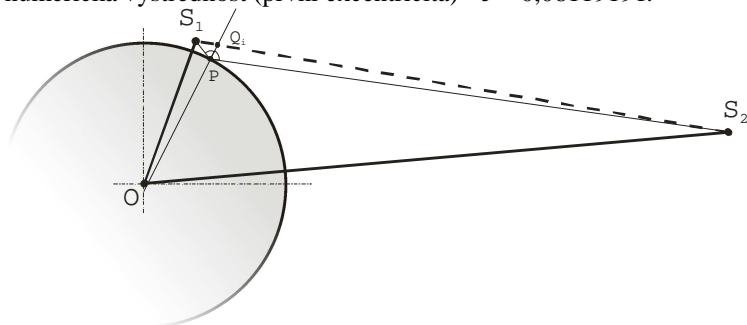
Altimetrie, GPS, GPS altimetrie, rotační elipsoid.

1 Popis problému

Jsou dány pravoúhlé geocentrické souřadnice dvou družic na oběžných drahách kolem Země a parametry referenčního elipsoidu nahrazujícího zemské těleso. Naším úkolem je nalezení bodu na ploše referenčního elipsoidu, kde se odrazí paprsek vyslaný jednou družicí a přijatý druhou družicí.

Referenční elipsoid nahrazuje skutečné zemské těleso. V tomto případě používáme rotační zploštělý elipsoid WGS84, jehož parametry jsou následující:

hlavní poloosa $a = 6378137$ m
numerická výstřednost (první excentricita) $e = 0,08119191$.



Obrázek 1: Schematické znázornění poloh družic a elipsoidu a přibližné polohy odrazného bodu.

2 Hledání odrazného bodu

Řešení, která jsou zde prezentována jsou geometrická a numerická. Předpokládáme přímočaré šíření signálu při zanedbání fyzikálních podmínek reálného prostředí. Tedy zanedbání vlivu družicové aberace, zakřivení dráhy paprsku vlivem jeho průchodu atmosférou a další vlivy. Dále předpokládáme platnost zákona odrazu.

Jelikož jsme zanedbali všechny fyzikální vlivy na dráhu signálu, můžeme výslednou dráhu odraženého signálu popsat jako lomenou čáru. Je to lomená čára definovaná polohami obou družic a odrazným bodem. Tato dráha leží v jedné rovině společně s normálou referenčního elipsoidu v odrazném bodě. Při hledání odrazného bodu tedy můžeme volit body ze spojnice pozic družic S_1 a S_2 , tyto body kolmo promítnout na povrch elipsoidu a poté testovat, zda je promítnutý bod bodem odrazným.

Elipsoid uvažujeme jako pevné těleso, jímž neproniká radiový signál. V tomto případě se signál může odrážet pouze od té části povrchu elipsoidu, která leží uvnitř dotykové kuželové plochy elipsoidu blíže jejímu vrcholu. Tímto vrcholem je satelit vysílající signál. Stejnou část elipsoidu budeme uvažovat i pro určování normál k povrchu elipsoidu, které prochází mezilehlými body Q_i na spojnici vysílače a přijímače. Vzhledem k tomu existuje jediná normála elipsoidu procházející bodem Q_i .

Souřadnice průniku této normály a povrchu elipsoidu můžeme získat tak, že určíme zeměpisnou šířku a délku mezilehlého bodu Q_i . Pro tyto zeměpisné souřadnice vypočteme příčný poloměr křivosti N pro použitý referenční elipsoid a tuto trojici souřadnic převedeme zpět do výchozí kartézské soustavy souřadnic. Tím získáme souřadnice bodu P_i . Příčný poloměr křivosti je zde poloměr křivosti normálového řezu elipsoidu, ve směru poledníku, v bodě určeném vypočtenými zeměpisnými souřadnicemi.

2.1 Převodní vztahy mezi soustavami souřadnic

Pro odvození převodních vztahů z kartézských souřadnic $[X, Y, Z]$ do geodetických zeměpisných souřadnic $[\varphi, \lambda]$ a příčného poloměru křivosti N vycházíme ze vztahů v [2]

$$X = N \cos \varphi \cos \lambda$$

$$Y = N \cos \varphi \sin \lambda$$

$$Z = N(1 - e^2) \sin \varphi$$

Pro zpětný převod do kartézské soustavy souřadnic jsem v [5] a [6] použil vztahy

$$\lambda = \arctan Y/X$$

$$\varphi = \arctan \frac{Z \sin \lambda}{Y(1 - e^2)}$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}},$$

čímž bych dostal úhly φ a λ pouze v intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ Pro zeměpisnou šířku φ je toto rozmezí dostačující. V případě zeměpisné délky λ jsem při konkrétní implementaci algoritmu v programu Matlab využil jeho interní funkce *atan2*, která určuje úhly v plném rozsahu. Jinak bych musel úhel λ určovat z rovností

$$\cos \lambda = \frac{X \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{a^2(1 - e^2) - Z^2}}$$

$$\sin \lambda = \frac{Y \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{a^2(1 - e^2) - Z^2}}.$$

Další postup se liší podle metody.

2.2 Metoda půlení úsečky

Mezilehlé body počítáme ze vztahů

$$Q_i = S_1 + q_i(S_2 - S_1)$$

$$q_i = q_{i-1} \pm 1/i^2, \quad i = 2, \dots, n.$$

Podle vztahů ve 2.1 jsou body Q_i promítnuty na povrch elipsoidu a je vypočítán příčný poloměr křivosti. Zpětným převodem do kartézských souřadnic je získán bod P_i .

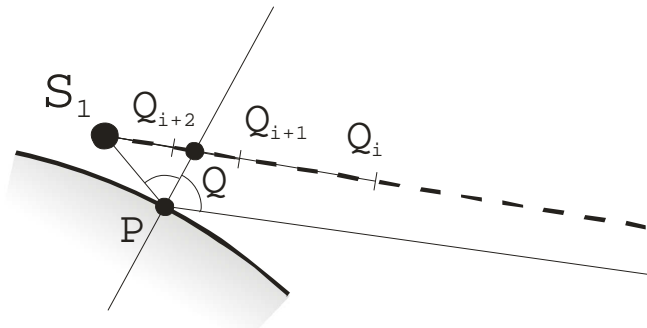
Dále počítáme rozdíl úhlů $S_1P_iQ_i$ a $S_2P_iQ_i$. Pokud je úhel $S_1P_iQ_i$ větší než úhel $S_2P_iQ_i$, volíme

$$q_i = q_{i-1} + 1/i^2,$$

jinak volíme

$$q_i = q_{i-1} - 1/i^2.$$

Podle je rozdíl rozdíl úhlů $S_1P_iQ_i$ a $S_2P_iQ_i$ menší než 10^{-9} rad, prohlásíme bod P_i za odrazný bod.



Obrázek 2: Schematické znázornění metody půlení úsečky.

2.3 Metoda postupného přibližování

Mezilehlé body se počítají ze vztahů

$$Q_i = S_1 + q_i(S_2 - S_1)$$

$$q_i = q_{i-1} \pm dq_i, \quad dq_i = \frac{hq_i \sin \frac{d\alpha}{2}}{\sin \tau} \left| S_1 S_2 \right|,$$

kde hq_i je výška bodu Q_i nad povrchem, $d\alpha$ je rozdíl úhlů $S_1 P_i Q_i$ a $S_2 P_i Q_i$ a τ je úhel mezi vektory $S_1 S_2$ a $P_i Q_{i+1}$.

Pro první mezilehlý bod Q_1 je

$$q_1 = h_1 / h_2,$$

kde h_1, h_2 jsou výšky družic S_1, S_2 nad povrchem elipsoidu.

Podle vztahů ve 2.1 promítneme bod Q_i na povrch elipsoidu a vypočítáme příčný poloměr křivosti N . Zpětným převodem do kartézských souřadnic získáme bod P_i .

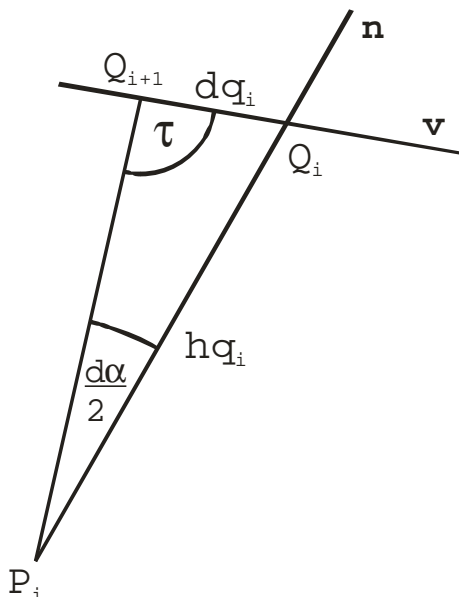
V dalším kroku vypočítáme rozdíl úhlů $S_1 P_i Q_i$ a $S_2 P_i Q_i$. Pokud je úhel $S_1 P_i Q_i$ větší než úhel $S_2 P_i Q_i$, volíme

$$q_i = q_{i-1} + dq_i$$

jinak volíme

$$q_i = q_{i-1} - dq_i.$$

Pokud je rozdíl úhlů $S_1 P_i Q_i$ a $S_2 P_i Q_i$ menší než 10^{-9} rad, prohlásíme bod P_i za odrazný bod.



Obrázek 3: Poloha bodů Q_i a Q_{i+1} . Vektor v na obrázku odpovídá vektoru $S_1 S_2$ v textu.

3 Příklad – numerické ověření

Číselné zadání je převzato z [1]

- souřadnice družic
 - $S_1 = [1704270,88; 1037760,88; -6532029,43]$ m
 - $S_2 = [13438722,08; 7201125,22; -21772472,43]$ m
- parametry referenčního elipsoidu
 - $a = 6378137$ m
 - $e = 0,08119191$

Pro tato zadaná data vychází odrazný bod o zeměpisných souřadnicích

$$\varphi = -71^{\circ}34'58,378''$$

$$\lambda = 30^{\circ}50'28,018''$$

Po přepočtu do kartézské soustavy souřadnic jsme dostali bod o souřadnicích

$$X = 1735271,845$$

$$Y = 1036118,116$$

$$Z = -6029484,018$$

Poččetně bylo ověřeno, že tento bod leží na ploše elipsoidu.

Metoda popsaná v oddílu 2.2, nazvaná „Metoda pŕlení úsečky“, dokonvergovala k výsledku po 33 krocích, rozdíl mezi úhly $S_1P_{33}Q_{33}$ a $S_2P_{33}Q_{33}$ činí $1,46 \cdot 10^{-10}$ rad.

Metoda popsaná v oddílu 2.3, nazvaná „Metoda postupného pŕbližování“, dokonvergovala k výsledku po 9 krocích, rozdíl mezi úhly $S_1P_9Q_9$ a $S_2P_9Q_9$ činí $-5,82 \cdot 10^{-10}$ rad.

Poděkování

Tento článek vznikl za podpory grantu FRVŠ G1 392

Literatura

- [1] Teichmann J.: *GPS Altimetrie: Bistatická GPS altimetrie projektu CHAMP*, semestrální práce z předmětu Geodynamika, Technische Universitaet Dresden, Institut fuer Planetare Geodesie, 2000
- [2] Baranová M.: Multimediální texty k předmětu Matematická kartografie 1 [online], URL: http://hobbes.fav.zcu.cz/gis/studium/mk1/multimedialni_texty/
- [3] Kočandrlová, M.: *Geometrický model úlohy GPS-altimetrie*, Sborník 27. konference VŠTEZ, JČMF, 2002, str. 110-113
- [4] Wagner, C., Klokočník, J.: *Reflection Altimetry for oceanography and geodesy*, presented at 2001: An Ocean Odyssey, IAPSO-IABO Symp.: Gravity, Geoid and Ocean Circulation as Inferred from Altimetry, Mar del Plata, Argentina
- [5] Olivík, S.: *Odrazný bod GPS altimetrie na ploše elipsoidu*, Sborník Semináře aplikované matematiky, Praha, 2005 [in review]
- [6] Olivík, S.: *Odrazný bod bistatické altimetrie na ploše elipsoidu*, Sborník Semináře Matematika na vysokých školách, pobočka JČMF v Praze a ČVUT v Praze, 2005, ISBN 80-01-03269-8, str. 155-156

Anna Porazilová

THE SHORTEST PATH

Abstract

This paper describes the shortest path problem, its classification and the best known algorithms. A new algorithm for the shortest path problem is introduced and its acceleration suggested.

Key words

the shortest path, geodesic, discrete geodesic, triangulation

1 Introduction

Shortest path problems are among the fundamental problems studied in computational geometry and other areas including graph algorithms, geographical information systems (GIS), network optimization and robotics. The shortest path problem has several versions.

The geodesic shortest path problem: Given two points s and t on the surface of a polyhedron, find the shortest path on the surface from s to t . The other problem is called *the Euclidean shortest path problem* and is looking for the shortest path among the obstacles in 3D space. Whereas finding the Euclidean shortest path is NP-hard, the geodesic shortest path may be found in polynomial time. This article will concentrate on the geodesic shortest path problem.

The shortest path problem can be next categorized by the distance measure used (Euclidean, weighted), purpose (*single source shortest path problem*: the shortest path between two points or *all pairs shortest path problem*: the shortest paths between one point and all triangle vertices) and computation (*exactly, approximative*). Let ε be a real number in $(0,1)$, the path is called an $(1+\varepsilon)$ - *approximation* of the exactly shortest path between two points if its cost is at most $1+\varepsilon$ times the cost of the shortest path. In this paper the relative error R of the approximative shortest path p is the ratio between the shortest distance of the path from the final point and the length of the path:
$$R = \frac{d(p,t)}{\text{lenght}(p)}.$$

Table 1 shows the best previous results of geodesic shortest path problems. Most of the algorithms use front propagation or some other kind of Dijkstra’s-like algorithm. In 1987 Mitchell, Mount and Papadimitriou [5] introduced the Continuous Dijkstra technique, which simulates the continuous propagation of a wavefront of points equidistant from s across the surface, updating the wavefront at discrete events. It is obvious that the shortest path problem is an actual problem.

Surface	Approx. Ratio	Time Complexity	Reference
Convex	1	$O(n^3 \log n)$	Sharir and Schorr (1986) [7]
Non-convex	1	$O(n^2 \log n)$	Mitchell et al. (1987) [5]
Non-convex	1	$O(n^2)$	Chen and Han (1996) [1]
Non-convex	1	$O(n \log^2 n)$	Kapoor (1999) [2]
Convex	2	$O(n)$	Hershberger and Suri (1995)
Convex	$1+\epsilon$	$O(n \log(1/\epsilon) + 1/\epsilon^2)$	Agarwal et al. (1997)
Convex	$1+\epsilon$	$O(n + \frac{\log n}{\epsilon^{1.5}} + \frac{1}{\epsilon^3})$	Har-Peled (1999)
Convex	$1+\epsilon$	$O(\frac{n}{\sqrt{\epsilon}} + \frac{1}{\epsilon^4})$	Agarwal et al. (2002)
Convex	$1+\epsilon$	$O(\frac{\sqrt{n}}{\epsilon^{1.25}} + f(\epsilon^{-1.25}))$	Chazelle et al. (2003)
Non-convex	$1+\epsilon$	$O(n^2 \log n + \frac{n}{\epsilon} \log \frac{1}{\epsilon} \log \frac{n}{\epsilon})$	Har-Peled (1999)
Non-convex	$7(1+\epsilon)$	$O(n^{\frac{5}{3}} \log^{\frac{5}{3}} n)$	Varadarajan and Agarwal (2000)
Non-convex	$15(1+\epsilon)$	$O(n^{\frac{8}{5}} \log^{\frac{8}{5}} n)$	Varadarajan and Agarwal (2000)

Table 1. Overview of the best algorithms for the shortest path problem

2 Computing shortest path by force of geodesic

Geodesic curves generalize the concept of straight lines for smooth surfaces and play an important role in computational geometry and GIS systems. In 2.1 a geodesic and a discrete geodesic are described. The former algorithm for geodesic computation is introduced in 2.2 and adjusted to the shortest path computation in 2.3. In 2.4 the acceleration for shortest path computation is suggested.

2.1 Geodesic curves

The well-known definition of geodesic is that a geodesic vanish the geodesic curvature. On the smooth surfaces a geodesic is the locally shortest curve.

Proposition 1 The following properties are equivalent:

1. γ is a geodesic.
2. γ is the locally shortest curve.
3. γ'' is parallel to the surface normal.
4. γ has vanishing geodesic curvature $\kappa_g = 0$

Item 2 tells that the shortest smooth curve joining two points s and t is a geodesic. The converse is not true in general. Nevertheless, the property of being shortest is desirable for curves in many applications and it is perhaps the characterization of geodesic curve more used in practice.

When trying to generalize geodesics to discrete surfaces we encounter some obstacles. It is not possible in general to find a set of curves over discrete surfaces for which all items of proposition 1 are valid.

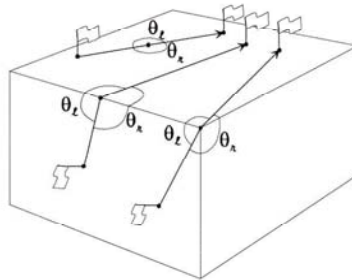


Figure 1. Right and left angles (θ_r and θ_l resp.) in a curve.

There are two different generalizations of geodesic curves to a discrete surface, both of them are called *discrete geodesics* [4]. The *shortest geodesics* are the locally shortest curves on the surface. The *straightest geodesics* satisfy the item 4 of proposition 1. The *discrete geodesic curvature* is a generalization of the geodesic curvature. Let θ be the sum of incident angles at a point P of a curve γ on the surface and θ_r and θ_l the

respective sum of right and left angles (see figure 1), the discrete geodesic curvature is defined as

$$\kappa_g(P) = \frac{2\pi}{\Theta} \left(\frac{\Theta}{2} - \Theta_r \right).$$

Choosing θ_l instead of θ_r , changes the sign of κ_g . The straightest geodesic is a curve with zero discrete geodesic curvature at each point. In other words, straightest geodesics always have $\theta_l = \theta_r$ at every point.

2.2 Geodesic computation

In 2004 in my diploma thesis [6] I implemented a geometrical algorithm for geodesic computation, which was described by Hotz and Hagen in 2000 [3]. The algorithm works on a triangulated surface, and given a start point and an initial direction computes the straightest geodesic. When encountering a vertex or an edge, the next part of discrete geodesic leads in such direction so that the left and right angles are equal (see fig. 2).

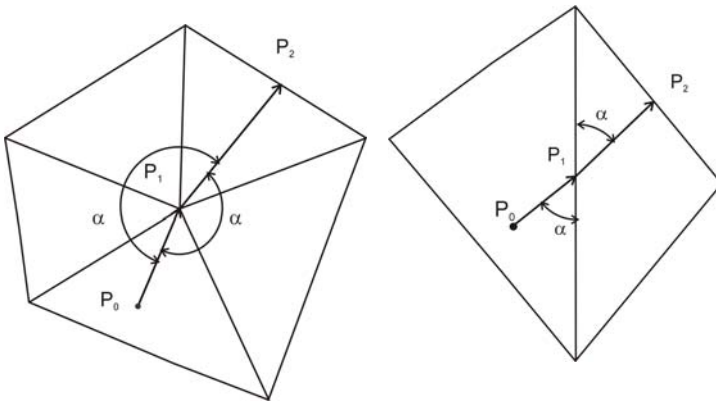


Figure 2. Discrete geodesic computation

2.3 Algorithm for the shortest path

Ing. Zábranský adjusted the above-mentioned algorithm for the shortest path problem in his thesis in June 2005 [8]. He defined the shortest path problem as the boundary-value problem: Given two points s and t , find the discrete geodesic λ which satisfies:

$$\begin{aligned} \lambda(0) &= s \\ \lambda(\text{length}(\lambda_{st})) &= t \\ \lambda'(0) &= \mathbf{v} \\ \text{length}(\lambda_{st}) &= \min \end{aligned}$$

The problem consists in how to find the initially direction for path to pass through the final point. The algorithm of Mr. Zábanský chooses the initial direction randomly and runs iteratively. After c. 500 iterations, it chooses the curve that approximates best the shortest path between s and t . The relative error is about 0.01 after 200 iterations.

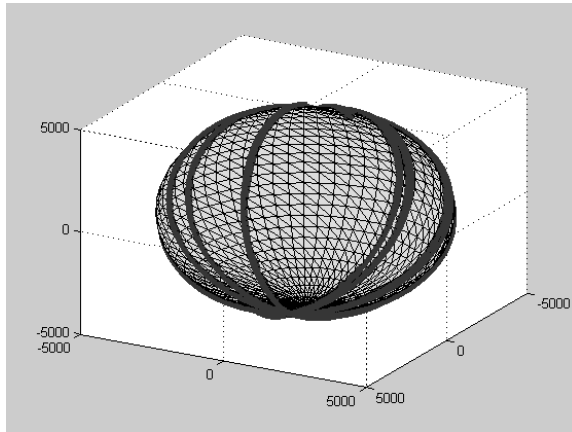


Figure 3. Demonstration of Zábanský's algorithm for 15 iterations.

3 My proposal for acceleration of the algorithm

The algorithm of Mr. Zábanský does not work very effectively. I suggested and implemented a modified algorithm that works much more accurately and faster. In 3.1 the modified algorithm is introduced and in 3.2. the results are presented.

3.1 The modified algorithm

In contrast to Mr. Zábanský I chose the initial vector \mathbf{v} as the difference of the points t and s : $\mathbf{v} = t - s$. In the next iterations the vector is changed by a small angle to the both sides from \mathbf{v} . The shortest path is found sooner and is more accurately than in the algorithm of Mr. Zábanský.

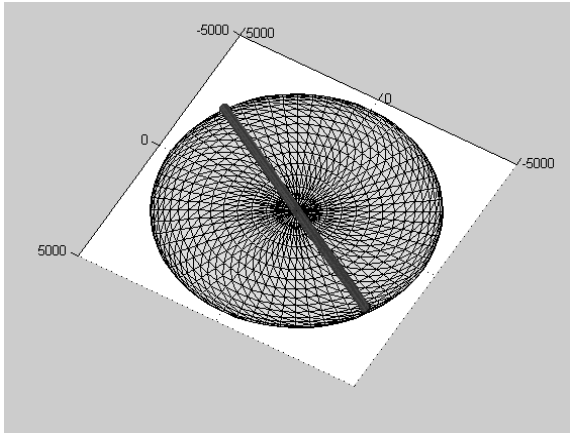


Figure 4a. Demonstration of the modified algorithm for 10 iterations.

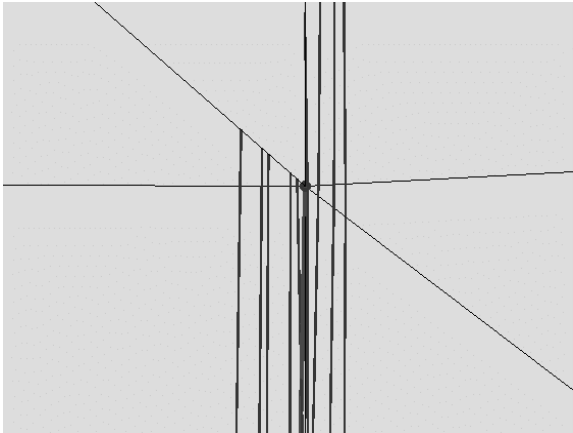


Figure 4b. Demonstration of the modified algorithm for 10 iterations - zoom

3.2 Results

I tested the algorithms on two surfaces: a sphere (3480 triangles) and a non-convex model of terrain (1225 triangles). The algorithm works

precisely over the sphere. The demonstration for 10 iterations is displayed at the figure 4. The relative error is less than 0.0001 after 50 iterations.

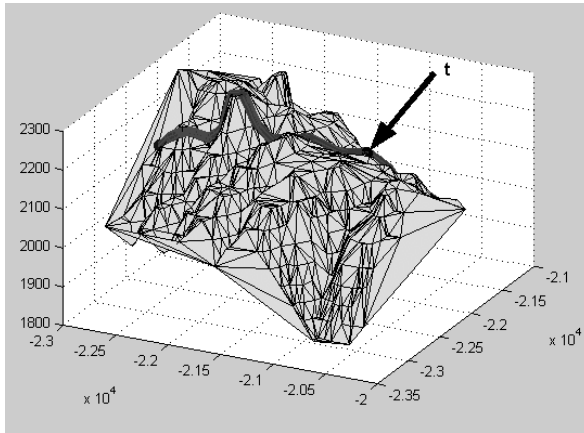


Figure 5a. Demonstration of the modified algorithm on a non-convex surface. The algorithms works precisely.

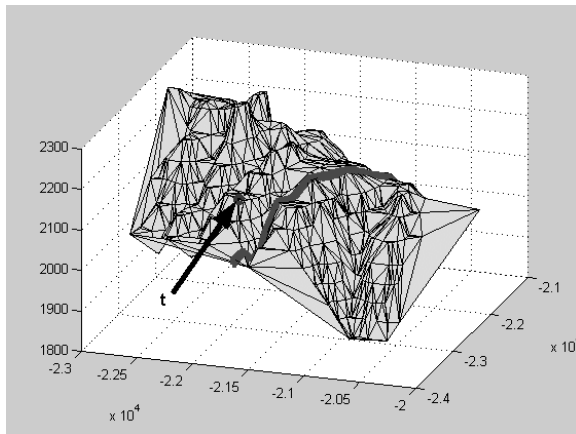


Figure 5b. Demonstration of the modified algorithm on a non-convex surface. Right: The relative error is 0.14

The algorithm does not work too accurately on the non-convex model in some cases. There is an example where the shortest path was found

precisely (figure 5a) and an example where the found shortest path distinguishes too much from the exactly shortest path (figure 5b).

4 Conclusion and future work

The time-complexity of algorithm is $O(kn)$, where k is the number of chosen directions and n the number of triangles. In comparison with the other algorithms this algorithm is simple and fast. The main disadvantage of this algorithm is that the path does not pass through the second point t exactly.

In the future work I want to improve the algorithm for non-convex surfaces. By interconnecting this algorithm with the algorithm of unfolding I hope to eliminate the main disadvantage: the shortest path should pass the second point exactly.

References

- [1] J. Chen, Y. Han: Shortest paths on a polyhedron. *Int. J. Computat. Geom. Appl.* 6, 1996, s.127-144.
- [2] S. Kapoor: Efficient computation of geodesic shortest paths. *Proceedings of 31st ACM Symposium on Theory of Computing. ACM*, New York, 1999, s. 770-779.
- [3] Kumar, Ravi et al.: Geodesic curve computations on surfaces. *Computer Aided Geometric Design*. May 2003, 20, 2, s. 119-133.
- [4] D. Martínek, L. Velho, P. C. Carvalho: Geodesic paths on triangular meshes. *Proceedings of the XVII Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing IEEE*, 2004.
- [5] J. S. B. Mitchell, D. M. Mount, and C. H. Papadimitriou: The discrete geodesic problem. *SIAM J. Comput.* 16, 1987, s. 647-668.
- [6] A. Porazilová: *Metody dekompozice geometrických objektů, Diplomová práce*. Západočeská univerzita, Plzeň, 2004.
- [7] M. Sharir, A. Schorr: On shortest paths in polyhedral spaces. *SIAM J. Comput.* 15, 1986, s. 193-215.
- [8] J. Záborský: *Triangulace povrchů a úlohy na nich, Diplomová práce*. Západočeská univerzita, Plzeň, 2004.

Lenka Pospíšilová

OBÁLKY ROVINNÝCH KŘIVEK S PROGRAMEM MAPLE

Abstrakt

V následujícím textu naznačíme, jakým způsobem je možné využít Maple při výuce diferenciální geometrie křivek. V příspěvku se zaměříme na téma obálek rovinných křivek. Uvedený programový kód byl odzkoušen pro verzi Maple 9.5.

Klíčová slova

rovinná křivka, obálka rovinných křivek, Maple.

1 Úvod

Kurz diferenciální geometrie křivek patří k tradičním předmětům vyučovaným na matematických katedrách. Vzhledem k neustálému vývoji výpočetní techniky a její dostupnosti na vysokých školách se nabízí jisté propojení klasické výuky s výukou v počítačové učebně. Je však třeba důsledně dbát, aby studenti pro každý výpočet provedený s pomocí počítače zvážili jeho správnost. Zavedení výpočetní techniky do výuky diferenciální geometrie navíc nemá nahradit schopnost studentů vypočítat příklad metodou "tužka - papír". Význam počítačové podpory výuky spočívá v usnadnění technicky zdlouhavých výpočtů a tím také k větším možnostem experimentování. Dále má nepostradatelný význam z hlediska grafického znázornění, které může pomoci lepšímu pochopení problematiky. Nutnost hledání algoritmyzace při využívání matematického softwaru pak rozvíjí určitý druh logického myšlení.

2 Obálka rovinných křivek

Způsob řešení příkladů na výpočet obálky rovinných křivek během výuky na počítačové učebně naznačíme při řešení dvou úloh. První úloha vychází ze soustavy rovinných křivek, která je daná rovnicí $F(x, y, c) = 0$. Tento typ úlohy je vzhledem k rozličnému průběhu

výpočtu přijatelnější řešit postupnými příkazy. Jinak je třeba si uvědomit, že rovnice soustavy křivek je často v zadání příkladu skryta. Studenti musí použít vlastní úvahu, aby rovnici soustavy vyjádřili. Tohle je ve výuce důležitý moment, který poukazuje na nutnost neustále aktivního přístupu při řešení úloh s počítačem.

Druhá úloha naopak poukazuje na situaci, kdy se jistá zobecnění pomocí uživatelské procedury přímo nabízí. Tento druh abstrakce způsobuje studentům problémy, přesto je přínosné, aby se s ním seznámili a naučili se ho používat.

2.1 Obálka soustavy rovinných křivek zadané rovnicí $F(x, y, c) = 0$.

Uvažujme například obálku soustavy kružnic

$$F(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - \frac{t^2}{4} = 0,$$

přičemž $t \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Nadefinujeme si nejdříve rovnici soustavy kružnic, její parciální derivaci podle parametru soustavy a charakteristickou množinu:

```
> restart:with(plots):
> F:=(x-t)^2+y^2-t^2/4=0:
> dF:=diff(F,t):
> sol:=allvalues(solve({F,dF},{x,y}));
```

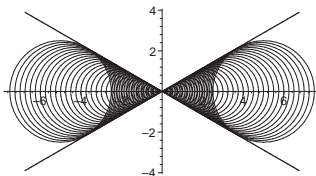
$$sol := \left\{ x = \frac{3t}{4}, y = \frac{\sqrt{3}t}{4} \right\}, \left\{ x = \frac{3t}{4}, y = -\frac{\sqrt{3}t}{4} \right\}$$

Máme dvě řešení, která přiřadíme pomocí příkazu `assign` do proměnných `e1` a `e2`. Vždy je následně nutné použít příkaz `unassign` pro uvolnění přiřazených proměnných! Vykreslení obálky zahrnuje proměnná `ENV`:

```
> assign(sol[1]):
> env1:=unapply([x,y],t):unassign('x','y'):
> assign(sol[2]):
> env2:=unapply([x,y],t):unassign('x','y'):
> ENV:=plot([env1(t)[1],env1(t)[2],t=-9..9],
>           [env2(t)[1],env2(t)[2],t=-9..9]),
>           thickness=3,color=red):
```

Vykreslíme obálku společně s několika kružnicemi zadané soustavy. V Maplu je příhodnější zobrazovat křivky určené parametrickými rovnicemi a ne implicitně. Proto v jednodušších případech převedeme implicitní zadání na parametrické a pak teprve objekt vykreslíme. Soustava kružnic parametricky:

```
> f:=(s,t)->[t+t/2*cos(s),t/2*sin(s)]:
> SYS:=seq(plot([f(s,t/6)[1],f(s,t/6)[2],s=0..2*Pi],
>             color=grey),t=-30..30):
> display({SYS,ENV},scaling=constrained);
```



2.2 Obálka normál rovinné křivky

Obálka normál (evoluta) rovinné křivky odpovídá množině středů oskulačních kružnic. Hledání těchto středů se v Maplu implementuje snažším způsobem nežli výpočet obálky normál. Navíc umožňuje demonstrovat studentům tvorbu a použití uživatelské procedury. Pro střed oskulační kružnice křivky dané parametrizací

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t))$$

v bodě $f(t_0)$ platí:

$$x = f_1(t_0) - \frac{f_2'(t_0)(f_1'(t_0)^2 + f_2'(t_0)^2)}{f_1'(t_0)f_2''(t_0) - f_2'(t_0)f_1''(t_0)}$$

$$y = f_2(t_0) + \frac{f_1'(t_0)(f_1'(t_0)^2 + f_2'(t_0)^2)}{f_1'(t_0)f_2''(t_0) - f_2'(t_0)f_1''(t_0)}$$

Vytvoříme proceduru `evolute`, jejímž vstupním parametrem bude křivka. Lokální proměnná `r_osc` reprezentuje spojnicí středu oskulační kružnice s bodem dotyku, lokální proměnné `df`, `ddf`, `dfdf`, `dfddf` představují po řadě $f'(t)$, $f''(t)$, $f_1'^2 + f_2'^2$, $\begin{vmatrix} f_1' & f_2' \\ f_1'' & f_2'' \end{vmatrix}$:

```
> restart:with(plots):
```

```

> evolute:=proc(f)
>   local df,ddf,dfdf,dfddf,r_osc;
>   df:=diff(f(t),t);
>   ddf:=diff(f(t),t$2);
>   dfdf:=df[1]*df[1]+df[2]*df[2];
>   dfddf:=df[1]*ddf[2]-df[2]*ddf[1];
>   r_osc:=t->[-df[2]*dfdf/dfddf,df[1]*dfdf/dfddf];
>   simplify(evalm(f(t)+r_osc(t)));
> end:

```

Evoluta cykloidy:

```

> cycloid:=t->[r*(t-sin(t)),r*(1-cos(t))]:
> evolute(cycloid);

```

$$[(\sin(t) + t)r, r(-1 + \cos(t))]$$

Následující kód implementuje proceduru `plot_evolute` zobrazující normály křivky. Obálkou těchto normál je hledaná evoluta, která je patrná i bez jejího vlastního znázornění. Procedura má za vstupní parametry křivku `f`, interval vykreslení (t_1, t_2) a číslo `k` udávající počet vykreslovaných normál `N_PLOT`:

```

> plot_evolute:=proc(f,t1,t2,k)
>   local df,ddf,dfdf,dfddf,r_osc,n_par,N_PLOT,F_PLOT;
>   df:=diff(f(t),t);
>   ddf:=diff(f(t),t$2);
>   dfdf:=df[1]*df[1]+df[2]*df[2];
>   dfddf:=df[1]*ddf[2]-df[2]*ddf[1];
>   r_osc:=t->[-df[2]*dfdf/dfddf,df[1]*dfdf/dfddf];
>   n_par:=evalm(f(t)+s*r_osc(t));
>   N_PLOT:=seq(plot([n_par[1],n_par[2],s=-1..1],
>                   color=blue),t=seq(t1+(t2-t1)*i/k,i=0..k)):
>   F_PLOT:=plot([f(t)[1],f(t)[2],t=t1..t2],
>                thickness=3,color=red):
>   display({N_PLOT,F_PLOT},scaling=constrained);
> end:

```

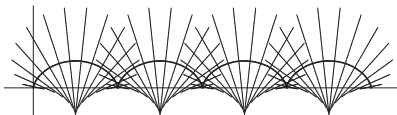
Obálka normál cykloidy:

```

> r:=1:
> plot_evolute(cycloid,0.1,8*Pi,60);

```


OBÁLKY ROVINNÝCH KŘÍVEK S PROGRAMEM MAPLE



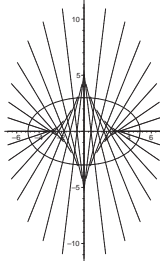
Obálka normál elipsy:

```
> ellipse:=t->[a*cos(t),b*sin(t)];
```

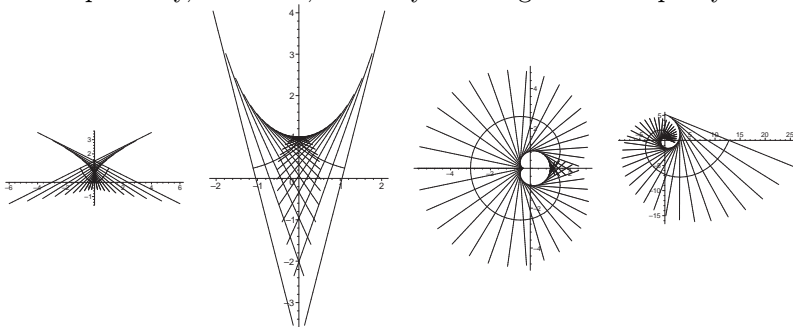
```
> evolute(ellipse);
```

$$\left[\frac{\cos(t)^3(-b^2 + a^2)}{a}, -\frac{\sin(t)^3(-b^2 + a^2)}{b} \right]$$

```
> a:=5:b:=3:plot_evolute(ellipse,0,2*Pi,32);
```

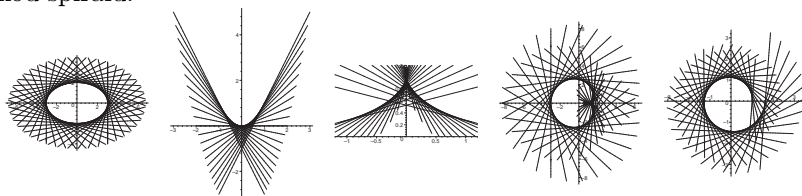


Uvedené procedury můžeme vyzkoušet např. také při hledání obálky normál paraboly, traktrixu, srdcovky nebo logaritmické spirály:



Obdobným způsobem jako při vykreslování obálky normál můžeme vykreslit obálku tečen. Získané obrázky dokládají studentům tvrzení uváděné na přednáškách, že křivka bez inflexních bodů je obálkou svých tečen.

Soustava tečen pro elipsu, parabolu, traktrix, srdcovku a logaritmickou spirálu:



3 Závěr

Problematika obálek rovinných křivek posloužila k nástinu výuky, která proběhla v akademickém roce 2004/2005 na Katedře matematiky PřF MU v Brně v rámci kursů diferenciální geometrie křivek a diferenciální geometrie ploch. Cvičení k těmto předmětům probíhala na počítačové učebně v rozsahu 2 hodin týdně. V rámci těchto cvičení byl zachován klasický styl výuky a poté byl doplněn výukou ve spolupráci s programem Maple. Tímto způsobem vedená výuka měla od studentů pozitivní odezvu, při které jsem se setkala se dvěma opačnými jevy; kdy výpočetní technika přiblížila studentům svět diferenciální geometrie a stejně tak počítačová řešení příkladů v diferenciální geometrii přiblížila některým studentům svět výpočetní techniky.

Literatura

- [1] K. Rektorys: *Přehled užití matematiky I.*, Prometheus, Praha, 2003
- [2] V. Rovenski: *Geometry of Curves and Surfaces with MAPLE*, Birkhäuser, Boston, 2000

Radka Pospíšilová

KRITICKÉ KONFIGURACE PRO VÝPOČET GEOMETRIE KAMERY

Abstrakt

Príspevek popisuje situace, kdy není možné provést rekonstrukci prostorové scény a autokalibraci kamery z jednotlivých projekcí nebo kdy nelze rozhodnout, která z několika možných rekonstrukcí je správná. Dále pak rozebírá způsoby jak tyto problémy řešit.

Klíčová slova

rekonstrukce scény, kalibrace kamery

1 Úvod

V případě, kdy se neznámá kamera volně pohybuje okolo scény a máme k dispozici dostatečně mnoho (alespoň několik málo desítek) fotografií, je možné spočítat prostorové souřadnice pozorovaného objektu a rekonstruovat jeho povrch. To je možné provést plně automaticky (tedy bez jakýchkoli zásahů uživatele) a není ani nutné znát parametry kamery nebo scény.

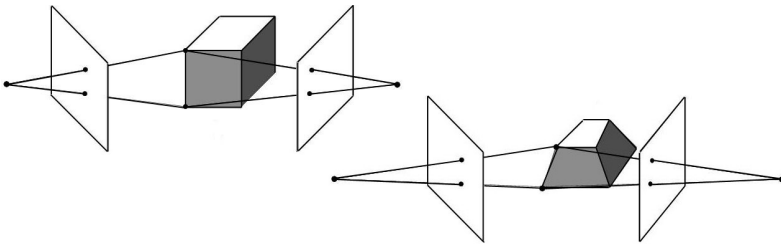
Často se ale stává, že rekonstrukci ani autokalibraci (výpočet vnitřních parametrů kamery) není možné provést nebo je výsledek nepřesný. Problémy také vznikají, pokud existuje více než jedno přípustné řešení. Pak není možné rozhodnout, která z přípustných rekonstrukcí je správná.

2 Rekonstrukce scény

Jestliže máme k dispozici dostatečné množství fotografií scény a nalezneme na nich korespondující body (projekce téhož 3D bodu na různých fotografiích), můžeme pak z promítnutých bodů spočítat pozici bodu v 3D prostoru. Je tedy možné bez dalších informací o scéně nebo kameře získat rekonstrukci povrchu snímaného objektu. Bližší informace možno nalézt např. v [1], [2].

Pro získání 3D souřadnic scény je nutné znát nebo spočítat souřadnice kamery (pozice a orientace) a její geometrii. Geometrií kamery se rozumí její vnitřní parametry – tj. ohnisková vzdálenost (vzdálenost průmětny a středu projekce), hlavní bod (místo, kde optická osa protíná průmětnu), poměr šířky a výšky pixelů a míra skosení pixelů (u reálných kamer jsou pixely kolmé nebo téměř kolmé, proto se tato hodnota často zanedbává a skosení se předpokládá nulové).

Jestliže při výpočtu bodů v prostoru jsou známy vnitřní parametry kamery, pak získáme přímo rekonstrukci v metrickém prostoru. To znamená, že rekonstrukce je určena jednoznačně až na měřítko – absolutní velikosti scény není možné zjistit. V případě, že geometrii kamery není možné spočítat, bude výsledná rekonstrukce určena pouze v projektivním prostoru. To znamená jednoznačně až na libovolnou projektivní transformaci. Pokud jsou známy vnitřní parametry kamery, pak je možné z projektivního modelu získat model metrický. A naopak pokud máme metrický model scény, snadno spočítáme vnitřní parametry kamery.



Obrázek 1: Dvě možné rekonstrukce krychle, při neznámé ohniskové vzdálenosti kamery.

Problémy při rekonstrukci

Přestože teoreticky k rekonstrukci scény a autokalibraci stačí pouze soubor fotografií, často se stává, že rekonstrukci scény ani výpočet geometrie kamery nelze provést, nebo je výsledek velmi nepřesný. Problémy také vznikají, pokud existuje několik možných řešení a není možné rozhodnout, které z nich je správné. To může být způsobeno několika faktory:

Velké posunutí nebo rotace kamery mezi pohledy

K problémům často dochází, pokud je příliš velké posunutí či rotace kamery mezi pohledy a také málo dostupných fotografií scény. V tomto případě při výpočtu získáme poměrně přesně geometrii kamery a také přesnou pozici některých bodů v prostoru. Pokud ale není rekonstruovaný objekt "dostatečně konvexní", nezískáme souřadnice bodů a ploch, které jsou vidět jen jednou kamerou nebo vůbec, takže výsledný 3D model scény bude dost "děravý". Nezbyvá než výsledek alespoň trochu vizuálně vylepšit a interpolací doplnit chybějící místa.

Nemožnost rozpoznat korespondující body

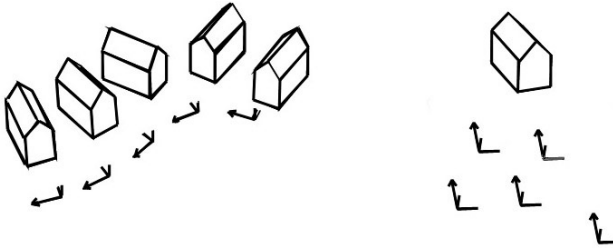
Pokud nelze rozpoznat korespondující body (přímky, křivky) v obrazech, pak není možné spočítat vztah mezi fotografiemi a pohyb kamery při snímání scény. K tomu dochází především pokud scéna neobsahuje žádné význačné body (rohy, hrany, ...). Někdy je naopak těchto bodů dostatek, ale jsou si všechny vzájemně podobné. Po rotaci a posunutí kamery pak nejde rozpoznat, které body jsou korespondující. Příkladem takové scény může být například nějaká rostlinka – jak poznat, který list je který?

Nedostatečně obecný pohyb kamery

Dalším problémem může být nedostatečně obecný pohyb kamery. V těchto případech nelze získat metrickou rekonstrukci a tedy ani vnitřní parametry kamery. Scén, které jsou pak přípustné pro daný soubor fotografií, může být několik nebo i nekonečně mnoho. Příkladem pohybu kamery, kdy není možné provést metrickou rekonstrukci a automatickou kalibraci je například čistě rotační pohyb, pouhé posunutí bez rotace nebo pohyb po ploše, kde osy rotace jsou kolmé na plochu (planární pohyb). Těchto sekvencí pohybu, kdy není možné jednoznačně rozhodnout, která projektivní rekonstrukce je správná, je celá řada. V těchto případech je pak nutné využít specializovaných algoritmů a dalších doplňkových znalostí.

Řešení nepřesných a nejednoznačných situací

Řešením problémů popsaných v předchozích dvou odstavcích může být určitá pomocná informace o kameře, scéně nebo pohybu kamery. Jestliže známe nastavení kamery při snímání scény, můžeme toho při



Obrázek 2: Ukázka sekvencí, kdy není možné provést jednoznačnou rekonstrukci. Šipky označují optické osy jednotlivých pohledů. Na obrázku je zobrazen planární pohyb a posunutí kamery bez rotace

autokalibraci kamery využít. Každá informace o hodnotě nějakého parametru kamery (hlavní bod, poměr stran pixelů) nebo o tom, že daný parametr byl konstantní na několika snímcích, výrazně usnadní a zpřesní výslednou rekonstrukci. Užitečnou informací o scéně, může být fakt, že se jedná o scénu symetrickou, že obsahuje pravé úhly, rovnoběžné přímky, nebo je známa přesná pozice několika bodů v prostoru.

Pokud při rekonstrukci scény uvažujeme, že na snímcích je např. architektonický objekt nebo vnitřní prostory budov, můžeme využít informace, že by scéna měla mít kolmé a rovnoběžné stěny. Stěny a průřečníky stěn je pak možné identifikovat, a to buď s pomocí uživatele nebo vhodného algoritmu. Důležitou roli mohou hrát i rohy (tedy průřečníky tří vzájemně kolmých stěn), protože je možné spočítat orientaci a pozici kamery vůči nim a také vzdálenost kamery a rohu (až na měřítko) [3].

Literatura

- [1] R. Hartley, A. Zisserman: *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, ISBN: 0521540518, 2003
- [2] M. Pollefeys: *Self-calibration and metric 3D reconstruction from uncalibrated image sequences*, PhD. thesis, K.U. Leuven, 1999
- [3] B. Hu, C. Brown: *Interactive Indoor Scene Reconstruction From Image Mosaics Using Cuboid Structure*, Technical report, Computer Science Department, University of Rochester, 2002

Jana Procházková

DERIVATIVE OF B-SPLINE FUNCTION

Abstract

Derivatives are very important in computation in engineering practice on graphics structures. B-spline functions are defined recursive, so direct computation is very difficult. In this article is shown the proof of formula for simpler direct computation of derivatives and its application for derivatives of NURBS curves.

Keywords

derivative, B-spline, NURBS

1 Definition of B-spline curve

Definition 1.1. Let $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ be a knot vector. *B-spline function* of k degree is defined as

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t \in \langle t_i, t_{i+1} \rangle \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

$$N_i^k(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_i^{k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(t), \quad (2)$$

where $0 \leq i \leq n - k - 1, 1 \leq k \leq n - 1, \frac{0}{0} := 0$

Definition 1.2. Let P_0, P_1, \dots, P_m ($P_i \in \mathbf{R}^d$) be $m+1$ control points, $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots, t_{m+n+1})$ knot vector. *B-spline curve* of n degree for control points P_i and knot vector \mathbf{t} is defined as

$$C(t) = \sum_{i=0}^m P_i N_i^n(t) \quad (3)$$

where N_i^k are base B-spline functions from definition 1.1

2 Derivative of B-spline function

Theorem 2.1. *We have B-spline curve defined in 1.2, its first derivative can be evaluated as*

$$C(t)' = \sum_{i=0}^m N_i^n(t)' P_i, \quad (4)$$

where

$$N_i^n(t)' = \frac{n}{t_{i+n} - t_i} N_i^{n-1}(t) - \frac{n}{t_{i+n+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(t) \quad (5)$$

Proof: The proof will be done by complete induction to n .

1. $n = 0$

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t \in \langle t_i, t_{i+1} \rangle \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

The derivative is equal to zero in all cases obviously.

The term is equal to zero after substitution $n = 0$ in an equation 5 too.

The theorem is valid for $n = 0$.

2. Let us suppose, that the formula is valid for

$$k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

We are searching formula for $N_i^{n+1}(t)'$, according to B-spline function definition. We have

$$N_i^{n+1}(t)' = \left(\frac{t - t_i}{t_{i+n+1} - t_i} N_i^n(t) + \frac{t_{i+n+2} - t}{t_{i+n+2} - t_{i+1}} N_{i+1}^n(t) \right)' \quad (6)$$

This formula we derive like sum of two products

$$\begin{aligned} N_i^{n+1}(t)' &= \frac{t - t_i}{t_{i+n+1} - t_i} N_i^n(t)' + \frac{1}{t_{i+n+1} - t_i} N_i^n(t) \\ &+ \frac{t_{i+n+2} - t}{t_{i+n+2} - t_{i+1}} N_{i+1}^n(t)' - \frac{1}{t_{i+n+2} - t_{i+1}} N_{i+1}^n(t) \end{aligned} \quad (7)$$

according to premise we know derivatives of degree n

$$N_{i+1}^n(t)' = \frac{n}{t_{i+n+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(t) - \frac{n}{t_{i+n+2} - t_{i+2}} N_{i+2}^{n-1}(t)$$

$$N_i^n(t)' = \frac{n}{t_{i+n} - t_i} N_i^{n-1}(t) - \frac{n}{t_{i+n+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(t)$$

which we substitute to equation 7

$$\begin{aligned}
 N_i^{n+1}(t)' &= \frac{t - t_i}{t_{i+n+1} - t_i} \left(\frac{n}{t_{i+n} - t_i} N_i^{n-1}(t) - \frac{n}{t_{i+n+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(t) \right) \\
 &+ \frac{t_{i+n+2} - t}{t_{i+n+2} - t_{i+1}} \frac{n}{t_{i+n+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(t) \\
 &- \frac{t_{i+n+2} - t}{t_{i+n+2} - t_{i+1}} \frac{n}{t_{i+n+2} - t_{i+2}} N_{i+2}^{n-1}(t) \\
 &+ \frac{1}{t_{i+n+1} - t_i} N_i^n(t) - \frac{1}{t_{i+n+2} - t_{i+1}} N_{i+1}^n(t) \tag{8}
 \end{aligned}$$

This equation must be modified to desirable form:

$$N_i^{n+1}(t)' = \frac{n+1}{t_{i+n+1} - t_i} N_i^n(t) - \frac{n+1}{t_{i+n+2} - t_{i+1}} N_{i+1}^n(t) \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 N_i^{n+1}(t)' &= \frac{n}{t_{i+n+1} - t_i} N_i^n(t) + \frac{1}{t_{i+n+1} - t_i} N_{i+1}^n(t) \\
 &- \frac{n}{t_{i+n+2} - t_{i+1}} N_{i+1}^n(t) - \frac{1}{t_{i+n+2} - t_{i+1}} N_{i+1}^n(t)
 \end{aligned}$$

by decomposition of the first and the third member of previous formula

$$N_i^{n+1}(t)' = \frac{1}{t_{i+n+1} - t_i} N_i^n(t) - \frac{1}{t_{i+n+2} - t_{i+1}} N_{i+1}^n(t) \tag{10}$$

$$+ \frac{n}{t_{i+n+1} - t_i} \left(\frac{t - t_i}{t_{i+n} - t_i} N_i^{n-1}(t) \right) \tag{11}$$

$$+ \frac{n}{t_{i+n+1} - t_i} \left(\frac{t_{i+n+1} - t}{t_{i+n+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(t) \right) \tag{12}$$

$$- \frac{n}{t_{i+n+2} - t_{i+1}} \left(\frac{t - t_{i+1}}{t_{i+n+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(t) \right) \tag{13}$$

$$- \frac{n}{t_{i+n+2} - t_{i+1}} \left(\frac{t_{i+n+2} - t}{t_{i+n+2} - t_{i+2}} N_{i+2}^{n-1}(t) \right) \tag{14}$$

now we continue with equation 8

$$N_i^{n+1}(t)' = \frac{t - t_i}{t_{i+n+1} - t_i} \left(\frac{n}{t_{i+n} - t_i} N_i^{n-1}(t) \right) \quad (15)$$

$$- \frac{t - t_i}{t_{i+n+1} - t_i} \left(\frac{n}{t_{i+n+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(t) \right) \quad (16)$$

$$+ \frac{t_{i+n+2} - t}{t_{i+n+2} - t_{i+1}} \left(\frac{n}{t_{i+n+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(t) \right) \quad (17)$$

$$- \frac{t_{i+n+2} - t}{t_{i+n+2} - t_{i+1}} \left(\frac{n}{t_{i+n+2} - t_{i+2}} N_{i+2}^{n-1}(t) \right) \quad (18)$$

$$+ \frac{1}{t_{i+n+1} - t_i} N_i^n(t) - \frac{1}{t_{i+n+2} - t_{i+1}} N_{i+1}^n(t) \quad (19)$$

When we compare both expressions, we can see, that parts 10 and 19, 11 and 15, 14 and 18 are identical. The equality is not evident for expressions 12, 13 a 16, 17. We have to form the parts 16, 17. They have common product nN_{i+1}^{n-1} , we exclude it for following expressions:

$$- \frac{t - t_i}{(t_{i+n+1} - t_i)(t_{i+n+1} - t_{i+1})} + \frac{t_{i+n+2} - t}{(t_{i+n+2} - t_{i+1})(t_{i+n+1} - t_{i+1})}$$

We find common denominator

$$\frac{-tt_{i+n+2} + tt_{i+1} + t_it_{i+n+2} - t_it_{i+1} + t_{i+n+2}t_{i+n+1} - t_it_{i+n+2} - tt_{i+n+1} + tt_i}{(t_{i+n+1} - t_i)(t_{i+n+1} - t_{i+1})(t_{i+n+2} - t_{i+1})}$$

The product t_it_{i+n+2} is subtracted and we make special step - in the numerator we add and subtract $t_{i+1}t_{i+n+1}$. Then we get

$$\frac{(t_{i+n+2} - t_{i+1})(t_{i+n+1} - t) + (t_{i+n+1} - t_i)(t_{i+1} - t)}{(t_{i+n+1} - t_i)(t_{i+n+1} - t_{i+1})(t_{i+n+2} - t_{i+1})}$$

We divide the formula into two fractions

$$\frac{t_{i+n+1} - t}{(t_{i+n+1} - t_i)(t_{i+n+1} - t_{i+1})} - \frac{t - t_{i+1}}{(t_{i+n+1} - t_{i+1})(t_{i+n+2} - t_{i+1})}$$

After appending the common part nN_{i+1}^{n-1} we get

$$\frac{n(t_{i+n+1} - t)}{(t_{i+n+1} - t_i)(t_{i+n+1} - t_{i+1})} N_{i+1}^{n-1} - \frac{n(t - t_{i+1})}{(t_{i+n+1} - t_{i+1})(t_{i+n+2} - t_{i+1})} N_{i+1}^{n-1}$$

these summands are equal to parts 12, 13. We show the equality of the formulas 6 a 9 and the theorem is proven.

DERIVATIVE OF B-SPLINE FUNCTION

t	Numerical derivative		Analytic derivative	
	<i>dx</i>	<i>dy</i>	<i>dx</i>	<i>dy</i>
0	5.9701	-5.9104	6	-6
0.1	4.9201	-2.8804	4.92	-2.88
0.2	4.0801	-0.7204	4.08	-0.72
0.3	3.4801	0.4796	3.48	0.48
0.4	3.1201	0.7196	3.12	0.72
0.5	3.001	0.000	3	0
0.6	3.1201	-0.7196	3.12	-0.72
0.7	3.4801	-0.4796	3.48	-0.48
0.8	4.0801	0.7204	4.08	0.72
0.9	4.9201	2.8804	4.92	2.88
0.9999	5.9695	5.908616	5.9988	5.9964

Table 1: Values comparison of numeric and analytic derivative

2.1 Practical use

NURBS curves are a generalization of B-spline curves only, that is why the use of this formula is quite simple. I used it in my work for the companies Fem Consulting¹, Dlubal Software² and PC Progress. There are values of numerical derivative and values computed using the proven formula in tabular 1 .

3 Conclusion

There is a lot of literature about programming a drawing NURBS curves. The derivatives of NURBS curves are not available in literature therefore I discuss this problem in my article.

Their importance in technical practice is enormous - physical calculating, building industry, etc. Tabular 1 shows, that computation with this formula is more exact. The improvement is in two decimal places. This analytic method is better for its accuracy.

¹<http://www.fem.cz>

²<http://www.dlubal.com>

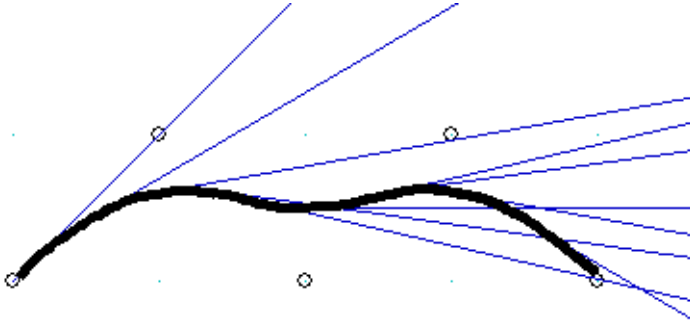


Figure 1: Tangent lines constructed using tabular values

References

- [1] C.-K. Shene, *Derivatives of a B-spline Curve*, Department of Computer Science, Michigan Technological University, <http://www.cs.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/spline/B-spline/bspline-deriv.html>
- [2] Foley, van Dam, Feiner, Hughes, Addison, Wesley, *Computer Graphics*, USA, ISBN 0-201-84840-6
- [3] Žára, Beneš, Sochor, Felkel, *Moderní počítačová grafika*, Computer Press, Brno, ISBN 80-251-0454-0

Marie Provazníková

NAKRYTÍ GRUP $SO(3)$ A $SO(4)$ SPINOROVÝMI GRUPAMI

Abstrakt

Příspěvek se zabývá jednou z oblastí, kde je možné využít algebry s dělením, konkrétně kvaterniony. Je uvedeno nakrytí grupy $SO(3)$ třírozměrnou sférou, dále nakrytí grupy $SO(4)$.

Klíčová slova

Univerzální nakrytí, kvaternion, spinorová grupa.

1 Úvod

Definice. Zobrazení p nazýváme *univerzální nakrytí* prostoru X , jestliže ke každému bodu $\tilde{x} \in \tilde{X}$ existuje otevřené okolí \tilde{U} takové, že $U = p(\tilde{U})$ je otevřené okolí bodu $x = p(\tilde{x}) \in X$ a zobrazení

$$p/\tilde{U} : \tilde{U} \rightarrow U$$

je homeomorfismus.

Příklad univerzálního nakrytí je nakrytí kružnice X šroubovicí \tilde{X} . Zobrazení p je zde ortogonální promítání do roviny kružnice, na každý bod x kružnice se zobrazí nekonečně mnoho bodů šroubovice, vzory tvoří fibr $p^{-1}(x)$. Proto jde o korespondenci " $\infty - 1$ ".

V případě, že prostor X je topologická grupa, vždy existuje univerzální nakrytí

$$p : \tilde{X} \rightarrow X$$

a platí, že \tilde{X} je rovněž grupa a $\pi_1(X) \cong \ker p$.

Tedy

$$1 \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \tilde{X} \longrightarrow X \longrightarrow 1$$

je krátká exaktní posloupnost.

Nechť $SO(n)$ značí grupu všech automorfismů vektorového prostoru \mathbb{R}^n zachovávajících skalární součin a orientaci. Je to tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ grupa všech matic A , pro které platí $A^T \cdot A = E_n$ a jejichž determinant $\det A = +1$.

$SO(n)$ je topologická grupa, existuje tedy její univerzální nakrytí

$$\begin{aligned} p: \widetilde{SO(n)} &\longrightarrow SO(n). \\ \pi_1(SO(n)) &= \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\} \\ \pi_1(\widetilde{SO(n)}) &= 1 \end{aligned}$$

Grupu $\widetilde{SO(n)}$ značíme $Spin(n)$ a nazýváme *spinorová grupa*.

2 Nakrytí grup $SO(3)$ a $SO(4)$

2.1 Nakrytí grupy $SO(3)$

Těleso kvaternionů \mathbb{H} můžeme chápat jako 4-rozměrný reálný vektorový prostor se skalárním součinem, tedy čtyřrozměrný euklidovský prostor ($\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$). Pro $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, $q_1, q_2 \neq 0$ je zobrazení

$$x \mapsto q_1 x q_2, \quad \text{pro } x \in \mathbb{H}$$

podobnost v euklidovském prostoru s koeficientem podobnosti $|q_1| \cdot |q_2|$, a pro $|q_1| \cdot |q_2| = 1$ jde o shodnost. Jestliže toto zobrazení zachovává prvek $x = 1$, tedy platí

$$q_1 \cdot q_2 = 1 \Rightarrow q_2 = q_1^{-1},$$

pak zachovává také trojrozměrný prostor kolmý k 1

$$\{xi + yj + zk\} \cong \mathbb{R}^3.$$

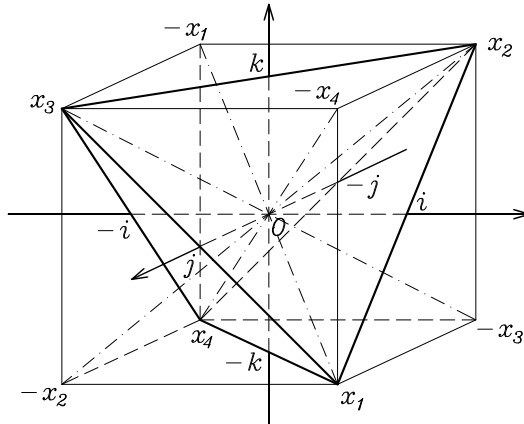
Tato shodnost $[q] : x \mapsto qxq^{-1}$ geometricky odpovídá otočení kolem přímky.

Pak $SO(3)$ značí grupu všech automorfismů vektorového prostoru \mathbb{H} zachovávajících skalární součin, orientaci a jednotku 1, tj. grupu všech přímých shodností. Každý prvek $SO(3)$ má tvar $x \mapsto qxq^{-1}$ pro nějaký kvaternion $q \in \mathbb{H}$, a jde o rotaci kolem přímky. Tato korespondence mezi kvaterniony a rotacemi je "∞ - 1", poněvadž každý násobek daného kvaternionu q určí stejnou rotaci

$$a \in \mathbb{R}, a \neq 0 : (aq)x(a^{-1}q^{-1}) = qxq^{-1}.$$

Můžeme proto požadovat, aby $|q| = 1$. Množina všech jednotkových kvaternionů je třírozměrná sféra

$$S^3 = \{q \in \mathbb{H}; |q| = 1\}.$$



Zobrazení

$$p : S^3 \longrightarrow SO(3)$$

$$p(q)x = qxq^{-1},$$

které každému jednotkovému kvaternionu přiřadí příslušnou rotaci, je dvojnásobné nakrytí $SO(3)$, neboť

$$\ker p = \{-1, 1\}$$

$$\pi_1(SO(3)) = \{-1, 1\}$$

$$S^3 = Spin(3).$$

2.2 Příklad

Otočení v prostoru kolem přímky $x_1, -x_1$ o úhel $\frac{2}{3}\pi$ (viz. obrázek).

$$x_2 \mapsto x_3 \quad \text{tedy} \quad i+j+k \mapsto i-j-k$$

$$x_3 \mapsto x_4 \quad i-j-k \mapsto -i-j-k$$

$$x_4 \mapsto x_2 \quad -i-j-k \mapsto i+j+k$$

Vhodnější je ale použít:

$$i \mapsto -k$$

$$j \mapsto i$$

$$k \mapsto -j$$

Dostáváme 3 rovnice pro q :

Marie Provazníková

$$\begin{array}{ll}qiq^{-1} = -k & q \in \mathbb{H} \\qjq^{-1} = i & q = a + bi + cj + dk, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \\kqk^{-1} = -j & |q| = 1\end{array}$$

Dosazením za q :

$$\begin{array}{l}(a + bi + cj + dk) i (a - bi - cj - dk) = -k \\(a + bi + cj + dk) j (a - bi - cj - dk) = i \\(a + bi + cj + dk) k (a - bi - cj - dk) = -j\end{array}$$

roznásobením a úpravou

$$\begin{array}{l}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)i + (2ad + 2bc)j + (2bd - 2ac)k = -k \\(2bc - 2ad)i + (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)j + (2ab + 2cd)k = i \\(2ac + 2bd)i + (2cd - 2ab)j + (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)k = -j.\end{array}$$

Porovnáním koeficientů dostáváme:

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 0 \quad (1) \quad 2bc - 2ad = 1 \quad (4)$$

$$2ad + 2bc = 0 \quad (2) \quad a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0 \quad (5)$$

$$2bd - 2ac = -1 \quad (3) \quad 2ab + 2cd = 0 \quad (6)$$

$$2ac + 2bd = 0 \quad (7)$$

$$2cd - 2ab = -1 \quad (8)$$

$$a^2 - b^2 - c^2 + d^2 = 0 \quad (9)$$

Z rovnic (1), (5) a (9):

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^2 \implies |a| = |b| = |c| = |d|.$$

Z ostatních rovnic:

$$ac = -bd = \frac{1}{4}, \quad ad = -bc = -\frac{1}{4}, \quad ab = -cd = \frac{1}{4},$$

proto

$$q_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j - \frac{1}{2}k, \quad q_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k$$

2.3 Nakrytí grupy $SO(4)$

Nechť $SO(4)$ značí grupu všech automorfismů vektorového prostoru \mathbb{H} zachovávajících skalární součin a orientaci. Budeme definovat epimorfismus:

$$p : S^3 \times S^3 \rightarrow SO(4).$$

Je-li $(a, b) \in S^3 \times S^3$, tj. jsou-li a a b dva jednotkové kvaterniony, definujeme

$$p(a, b)x = ax\bar{b} \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{H}.$$

Zřejmě

$$\begin{aligned} p((a_1, b_1)(a_2, b_2))x &= p(a_1a_2, b_1b_2)x = a_1a_2x\overline{b_1b_2} = a_1a_2x\bar{b}_2\bar{b}_1 = \\ &= a_1(a_2x\bar{b}_2)\bar{b}_1 = p(a_1, b_1)(p(a_2, b_2)x), \end{aligned}$$

čímž jsme dokázali, že

$$p((a_1, b_1)(a_2, b_2)) = p(a_1, b_1)f(a_2, b_2)$$

tj. že p je homomorfismus grup.

Nyní je třeba dokázat, že p je epimorfismus. K tomu si stačí uvědomit, že každý prvek z $SO(n)$ je složením konečného počtu souměrností podle nadrovin, v našem případě nejvýše čtyř, musí jich být též sudý počet:

$$x \mapsto q_n q_{n-1} \cdots q_1 \cdot x \cdot \bar{q}_1 \cdots \bar{q}_n \quad \text{pro } q_1, \dots, q_n \in S^3.$$

Stačí tedy ukázat, že každá souměrnost podle nadroviny v \mathbb{H} je obrazem nějakého prvku z $S^3 \times S^3$. Každá souměrnost podle nadroviny ve čtyřrozměrném euklidovském prostoru má tvar

$$x \mapsto -qx\bar{q} \quad \text{pro } q \in S^3.$$

Toto zobrazení můžeme považovat za obraz prvku $[-q, q] \in S^3 \times S^3$. Nejde sice o prvek grupy $SO(4)$, neboť jde o nepřímou shodnost, determinant zobrazení je roven -1 , složením sudého počtu souměrností ale dostáváme prvek $SO(4)$.

Dále je třeba dokázat, že jádro epimorfismu p obsahuje pouze dva prvky a to $(1, 1)$ a $(-1, -1)$. Prvek (a, b) patří do jádra, jestliže

$$\begin{aligned} ax\bar{b} &= x \quad \text{pro každé } x \\ axb^{-1} &= x \\ ax &= xb \quad \Rightarrow a = b = 1 \text{ nebo } a = b = -1 \end{aligned}$$

Potom máme dokázáno, že $p : S^3 \times S^3 \rightarrow SO(4)$ je dvojnásobné nakrytí grupy $SO(4)$ neboť

$$\ker p = \{-1, 1\}$$

$$\pi_1(SO(4)) = \{-1, 1\}$$

$$S^3 \times S^3 = Spin(4).$$

3 Závěr

Každá přímá shodnost ve třírozměrném či čtyřrozměrném prostoru jde vyjádřit pomocí násobení kvaterniony, ve 3D jako zobrazení $x \mapsto qx\bar{q}$, ve 4D jako zobrazení $x \mapsto ax\bar{b}$. Nemusíme tedy použít maticové rovnice $X' = AX + B$, které pro zápis shodnosti používáme obvykle, což může být výhodné například při počítačovém zpracování izometrií.

Literatura

- [1] John C. Baez. The Octonions. *Bulletin of the American Mathematical Society*. **39**: 145-205, 2002.
- [2] John H. Conway, Derek A Smith. *On quaternions and octonions: their geometry, arithmetic, and symmetry*. A K Peters, Natick, Massachusetts (Canada), 2003. ISBN 1-56881-134-9.
- [3] Jiří Vanžura. Osobní sdělení. 26. 9. 2004.

Jana Přívratská

ČERNOBÍLÁ SYMETRIE OBDÉLNÍKOVÉ DESKY

Abstrakt

V článku je prezentováno 31 typů symetrie černobílých ornamentů na obdélníkové desce. K jejich popisu jsou použity černobílé bodové vrstvé grupy symetrie.

Klíčová slova

symetrie, antisymetrie, černobílé grupy, vrstvé grupy

1 Úvod

Obdélníkové desky (okenní tabule, šály, ...) reprezentují omezenou část vrstvy v třírozměrném prostoru.

Ke klasifikaci vzorů použitých na jejich povrchu lze využít bodové vrstvé grupy symetrie. Lze rozlišit celkem 16 různých typů vzorů [1].

Tento počet se zvýší, vezmeme-li za další dekorativní prvek i negeometrickou vlastnost, např. změnu barvy. Velmi působivé vzory dostáváme při střídání dvou barev, např. černé a bílé. V tomto případě lze ke klasifikaci vzorů využít dvojbarevné (magnetické) vrstvé grupy symetrie (= černobílé vrstvé grupy symetrie).

2 Černobílé vrstvé grupy symetrie

2.1 Antisymetrie

Uvažujme grupy, ve kterých se vedle prostorových souřadnic vyskytuje další proměnná, např. právě změna barvy (nebo ve fyzice čas, hodnota spinu, ...). Toto zobecnění symetrie [2] se nazývá antisymetrie nebo barevná symetrie.

Nechť čtvrtá, antisymetrická, proměnná nabývá pouze dvou diskrétních hodnot. Operace $1'$, ($(1')^2 = 1$), která mění pouze hodnotu této čtvrté proměnné, se nazývá operace anti-identity (1 označuje identitu). Kombinace anti-identity s klasickou geometrickou operací

ponechává nedotčenou geometrickou operaci, působí pouze na dodatečnou čtvrtou proměnnou. Např. kombinací $21' = 2'$ vznikne antisymetrická operace rotace o 180° doprovázená změnou barvy z bílé na černou (a naopak). Grupy obsahující alespoň jednu antisymetrickou operaci se nazývají černobílé grupy symetrie.

2.2 Vrstvové grupy

Pro účely souřadnicového značení vrstvových grup použijeme kartézský souřadnicový systém $\langle O; x, y, z \rangle$, kde O je střed desky, osy x, y jsou rovnoběžné se stranami obdélníkové desky a osa z je kolmá k rovině desky.

Pro značení operací symetrie použijeme následující symboly:

1 - identita

$\bar{1}$ - prostorová inverze

$2_x, 2_y, 2_z$ - rotace kolem osy x, y, z o 180°

m_x, m_y, m_z - rovinná souměrnost s rovinou souměrnosti kolmou k ose x, y, z

Existují dva typy operací symetrie, vůči nimž je vrstva invariantní [3].

- Operace, které přemísťují body jedné povrchové plochy vrstvy do ekvivalentních poloh na téže ploše, tj. operace, které nemění orientaci vektoru normály k ploše. Pro obdélníkovou desku to jsou následující operace:

1, 2_z , m_x , m_y

- Operace, které přemísťují body jedné povrchové plochy vrstvy (z "lícové plochy") do ekvivalentních poloh na opačné povrchové ploše (do "rubové plochy") a naopak; tyto operace mění orientaci vnější normály k ploše. V textu budou vyznačeny podtržítkem [3, 4]. Pro obdélníkovou desku to jsou následující operace:

$\bar{1}$, $\underline{2}_x$, $\underline{2}_y$, \underline{m}_z

3 Antisymetrie obdélníkové vrstvy

Následující tabulka uvádí nejen kompletní výčet 31 dvojbarevných vrstvových grup symetrie, ale i 16 klasických (geometrických "jednobarevných") vrstvových grup. Grupy jsou rozděleny do tří krystalografických soustav.

ČERNOBÍLÁ SYMETRIE OBDÉLNÍKOVÉ DESKY

soustava	klasická vrstvá grupa	černobílá vrstvá grupa
triklinická	1	$\bar{1}'$
	$\bar{1}$	$\bar{1}'$
monoklinická	2_z	$2'_z$
	$\underline{2}_x$	$\underline{2}'_x$
	$\underline{2}_y$	$\underline{2}'_y$
	\underline{m}_z	\underline{m}'_z
	m_x	m'_x
	m_y	m'_y
	$2_z/\underline{m}_z$	$2'_z/\underline{m}'_z$
		$2_z/\underline{m}'_z$
		$2'_z/\underline{m}'_z$
	$\underline{2}_x/m_x$	$\underline{2}'_x/m'_x$
		$\underline{2}_x/m'_x$
		$\underline{2}'_x/m'_x$
$\underline{2}_y/m_y$	$\underline{2}'_y/m'_y$	
	$\underline{2}_y/m'_y$	
	$\underline{2}'_y/m'_y$	
ortorombická	$\underline{2}_x \underline{2}_y \underline{2}_z$	$\underline{2}'_x \underline{2}'_y \underline{2}'_z$
		$\underline{2}_x \underline{2}_y \underline{2}'_z$
		$\underline{2}_x \underline{2}'_y \underline{2}'_z$
	$m_x m_y \underline{2}_z$	$m'_x m'_y \underline{2}'_z$
		$m'_x m_y \underline{2}'_z$
		$m_x m'_y \underline{2}'_z$
	$\underline{2}_x m_y \underline{m}_z$	$\underline{2}_x m'_y \underline{m}'_z$
		$\underline{2}'_x m_y \underline{m}'_z$
		$\underline{2}_x m'_y \underline{m}'_z$
	$\underline{m}_x \underline{2}_y \underline{m}_z$	$\underline{m}'_x \underline{2}'_y \underline{m}'_z$
		$\underline{m}_x \underline{2}'_y \underline{m}'_z$
		$\underline{m}'_x \underline{2}'_y \underline{m}'_z$
$\underline{2}_x/m_x \underline{2}_y/m_y \underline{2}_z/\underline{m}_z$	$\underline{2}_x/m'_x \underline{2}'_y/m'_y \underline{2}'_z/\underline{m}'_z$	
	$\underline{2}'_x/m_x \underline{2}'_y/m'_y \underline{2}'_z/\underline{m}'_z$	
	$\underline{2}'_x/m'_x \underline{2}'_y/m'_y \underline{2}'_z/\underline{m}'_z$	

Z 16 klasických vrstevových grup je 5 izomorfních s rovinnými bodovými grupami:

$$1, 2_z, m_x, m_y, m_x m_y 2_z$$

Z 31 černobílých vrstevových grup je 6 izomorfních s rovinnými černobílými bodovými grupami:

$$2'_z, m'_x, m'_y, m'_x m'_y 2'_z, m'_x m_y 2'_z, m_x m'_y 2'_z$$

4 Závěr

S problematikou popisu symetrie se nesetkáváme jen v geometrii, resp. designu. S grupovým popisem symetrie reálných objektů se zabývá také krystalografie, studium tenzorových vlastností pevných látek apod.

Fyzikální značení operací i prvků symetrie, které bylo použito v tomto článku, se liší od označení používaného v geometrii, což poněkud znesnadňuje přechod mezi oběma oblastmi.

Dvojbarevná symetrie černobílé obdélníkové desky je jednoduchou ukázkou využití "fyzikálních" grup symetrie v geometrii.

Poděkování

Článek vznikl za podpory *PuC FLEX, s.r.ö.*

Literatura

- [1] J. Přívratská: *Symmetry of Some Window Ornaments, ICPM'05, TUL, Liberec 2005, pp.197-202*
- [2] A. V. Shubnikov, V. A. Kopcik: *Symmetry in science and art, Plenum Press, New York 1974*
- [3] International Tables for Crystallography, *Vol.E Subperiodic Groups, Kluwer Press, Dordrecht 2002*
- [4] V. Janovec: *Ferroelectrics*, **35**, 1976, 105-110

Adam Rużyczka

SPATIAL IMAGINATION AMONG STUDENTS COMMENCING THE COURSE OF DESCRIPTIVE GEOMETRY AT TECHNICAL STUDIES IN 2003 AND 2004

Abstract

In 2003 and 2004, we started a research project on the geometrical predisposition of students of the Faculty of Environmental Engineering and Land Surveying at the Agricultural University of Cracow. For both the studies of Land Surveying and Cartography the entrance examination in mathematics has been cancelled, while for Environmental Engineering studies there is now no compulsory mathematics examination at all.

During those years, students of Land Surveying and Cartography, Higher Education Professional College of Nowy Sącz, joined the research group.

Each of about 700 students answered 10 simple questions within the field of geometry, which allowed, within boundaries of possible means, evaluation especially of spatial (three-dimensional) imagination, although equally essential was knowledge pertaining to the basic problems of geometry. The students were allowed to execute auxiliary drawings.

As a result, differences concerning levels in spatial imagination between groups of participants were found.

Keywords

Spatial imagination, descriptive geometry

1 Introduction

In 2003 and 2004, we started a research project on the geometrical predisposition of students of the Faculty of Environmental Engineering and Land Surveying at the Agricultural University of Cracow. For both the studies of Land Surveying and Cartography the entrance examination in mathematics has been cancelled, while for Environmental Engineering studies there is now no compulsory mathematics examination at all.

During those years, students of Land Surveying and Cartography, Higher Education Professional College of Nowy Sącz, joined the research group.

Below there are some exemplary questions included in the TEST ON SPATIAL ABILITIES.

1. How many various length segments one may draw between various vertices of a cube (the same length segments are considered to be one segment)?
2. An intersection of a cube with a plane may be a square. When does this case occur?
3. A sphere with radius R and a plane have 2 common points. What is the shape of a line of intersection and what is the special dimension of this line of intersection. Please give the name of this special case's shape.
4. Taking into account the property, that a sphere has the largest ratio between its volume and surface if compared to the other 3D solids, please choose the solid with the largest volume among: a sphere with diameter $D = 8$ cm, a cube with a side length = 8 cm or a cylinder of revolution with the base's diameter $d = 8$ cm and height $h = 8$ cm. What solid can be circumscribed or inscribed into another solid?
5. If a cone of revolution with the base of radius R and height h is intersected with a plane perpendicular to its axis of revolution a $\frac{1}{4}$ height h , then what shape will we get and what dimensions in reference to the base circle will it be?
6. How many faces (maximum) one may see from an optionally chosen viewpoint?
7. How many squares one may create using various vertices of cube?
8. How many cubes one can insert into a cube of a side-length equal to triple-length of the searched cubes?
9. If 4 points neither lie on a single straight line nor make a plane – what geometrical shape do they create?
10. An intersection of a cylinder with the base of diameter D and height h may be a rectangle. When does this case occur and what are the dimensions of this rectangle?

2. Results of the research

Results of the study were presented in a table form. In order to allow better presentation of observed tendencies the results were also presented as figures.

SPATIAL IMAGINATION AMONG STUDENTS COMMENCING ...

Table 1: The number of correct answers among the students

	Land Surveying and Cartography (Cracow)	Land Surveying and Cartography (Nowy Sącz)	Environmental Engineering (Cracow)	In general
The number of subjects	227	90	386	703
Arithmetic mean	5,96	4,86	3,81	4,64
Standard deviation	2,02	2,75	1,95	2,23
Median	6	4,5	4	4

Table 2: Relevance levels for variations between particular groups (according to the t Student s test)

	Land Surveying and Cartography (Cracow)	Land Surveying and Cartography (Nowy Sącz)	Environmental Engineering (Cracow)
Land Surveying and Cartography (Cracow)		0,000	0,000
Land Surveying and Cartography (Nowy Sącz)	0,000		0,000
Environmental Engineering – (Cracow)	0,000	0,000	

Tables 1 and 2 show that there were significant differences between students' groups ($\alpha \leq 0,001$) as far as spatial imagination was concerned. Land Surveying students from Cracow received the highest results, and Environmental Engineering students received the lowest results. The curves on the graph confirm that tendency (figure 1).

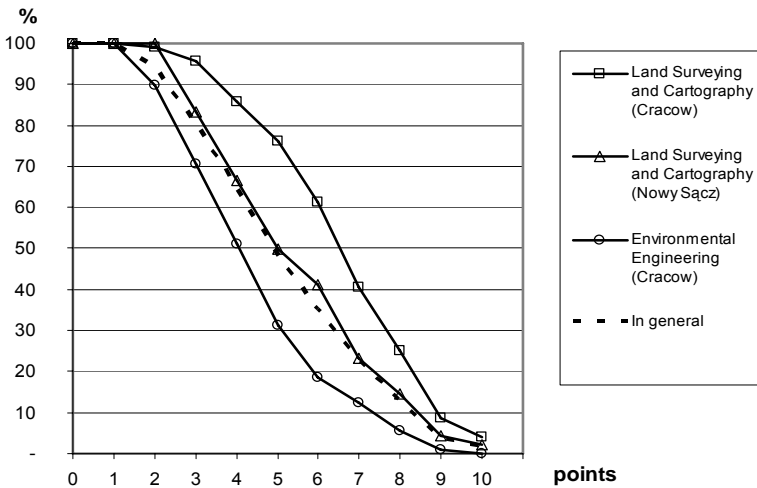


Figure 1: Percentual proportion of persons from particular scoring no fewer than the specified numbers of points

Table 3: The number of correct answers among the students takes into consideration sex

	Land Surveying and Cartography (Cracow)		Land Surveying and Cartography (Nowy Sącz)		Environmental Engineering (Cracow)		In general	
	Men	Women	Men	Women	Men	Women	Men	Women
The number of subjects	119	108	47	43	194	192	360	343
Arithmetic mean	6,17	5,74	5,00	4,70	3,95	3,66	4,82	4,44
Standard deviation	1,93	2,20	2,18	2,18	2,00	1,90	2,21	2,24
Median	6	6	5	4	4	3	5	4

SPATIAL IMAGINATION AMONG STUDENTS COMMENCING ...

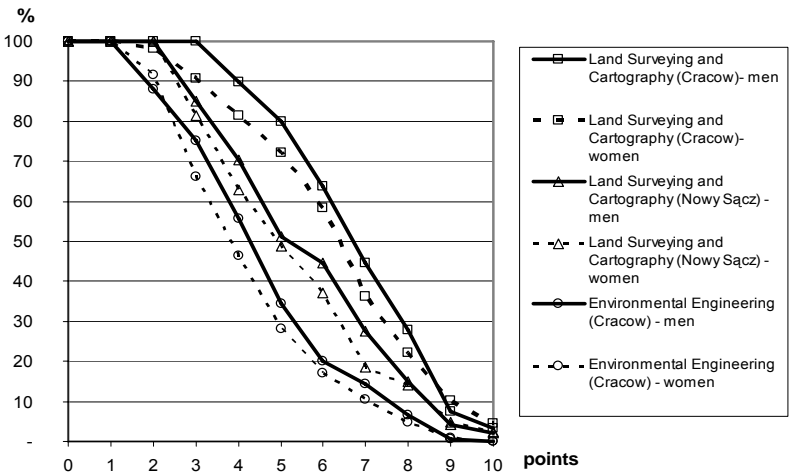


Figure 2: Percental proportion of persons take into consideration sex scoring no fewer than the specified numbers of points

Table 4: Relevance levels for variations between particular groups (according to the t Student s test) take into consideration sex

		Women			
		Land Surveying and Cartography (Cracow)	Land Surveying and Cartography (Nowy Sącz)	Environmental Engineering (Cracow)	In general
Men	Land Surveying and Cartography (Cracow)	0,058			
	Land Surveying and Cartography (Nowy Sącz)		0,256		
	Environmental Engineering (Cracow)			0,067	
	In general				0,012

Table 3 presents comparison of the results between male and female groups. It shows that male students had higher scores than female students of the same faculty. However statistical analysis, presented in table 4, confirmed significance of these differences only when whole population of male and female students were compared.

The curves on the figure 2 seem to prove it, though female students received the highest scores (10 points) more often.

3. Conclusion

1. Significant differences ($\alpha \leq 0.001$) between mean scores in spatial imagination evaluation (based on 0-10 point scale) were observed. At the Agricultural University of Cracow, Land Surveying students and Environmental Engineering students received the highest (5.96) and the lowest (3.81) mean results, respectively.
2. When all faculties were concerned, female students presented lower mean scores in spatial imagination evaluation than males. However, statistical significance ($\alpha \leq 0.05$) was confirmed after results for each gender and whole population of students were taken into account.
3. Attention should be paid to the fact that more female than male students received the highest score (10 points).

References

- [1] C. Leopold, R. Górska, S.A. Sorby: *International Experiences in Developing the Spatial Visualization Abilities of Engineering Students*. Journal for Geometry and Graphics Volume 5, 2001, No. 1, 81-91.
- [2] A. Rużyczka: *Spatial imagination among students commencing the course of descriptive geometry in a technical studies*. Journal for Geometry and Graphics Volume 7 (2003) Vien No. 2, s.247-252
- [3] A. Rużyczka: *The relationship between students spatial imagination, commencing the course of descriptive geometry in the 2002, and their final exams results*. „Sbornik 23. Konferencje o geometrii a počítačové grafice” Hojsova Straž-Brcalnik 8-12—11.09.2003 st 169-174.
- [4] T. Saito, K. Shiina, K. Suzuki, T. Jingu: *Spatial Ability Evaluated by a Mental Cutting Test*. Proc 7th ICECGDG, Cracow, Poland, 1996, pp. 569-573.

Ivo Serba

MOZAIKY GEOMETRICKOU SUBSTITUCÍ

Abstrakt

Příspěvek je věnován speciálnímu typu hierarchických mozaik, konstruovaných geometrickou substitucí vzoru.

Klíčová slova

Mozaiky, hierarchické mozaiky, geometrická substitute.

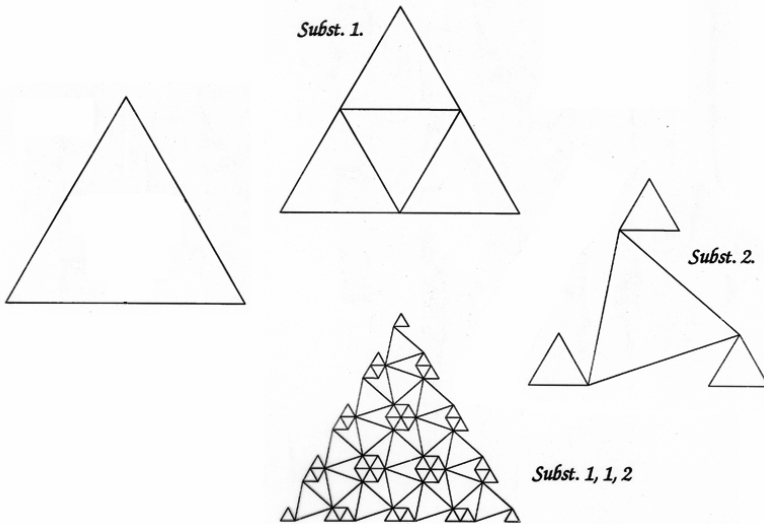
Pojem substitute je v matematice dostatečně známý. Geometrická substitute, o které předkládaný příspěvek pojednává, respektuje rámec zavedeného pojmu. Geometrickou substitucí budeme rozumět nahrazení geometrických objektů jinými geometrickými objekty.

Pokud je n -úhelník nahrazován m -úhelníky a $n = m$, budeme v soulase s [5] substituci nazývat **klonování**. Pokud $n < m$, nazveme substituci **mutace**.

Protože se předpokládá, že substituent bude geometricky jednodušší objekt, bývá někdy v literatuře označován jako objekt primitivní (prvotní) – **primitiv**.

Obecně by primitivem mohl být n -stěn. Pro náš výklad se omezíme na rovinu a v ní vystačíme s jediným objektem - trojúhelníkem, případně s několika trojúhelníky „svázanými“ uvnitř substituovaného trojúhelníku.

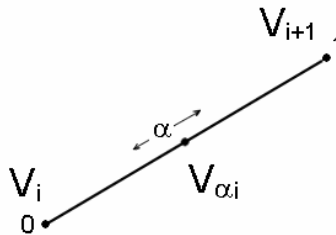
Konstrukce mozaiky je založena na posloupnosti aplikací dílčích substitucí. Princip geometrické substitute ilustruje obrázek 1., kde je rovnostranný trojúhelník postupně substituován dvěma substitučními pravidly (primitivy). První pravidlo je aplikováno dvakrát a pak teprve následuje pravidlo druhé.



Obr. 1. Princip geometrické substituce

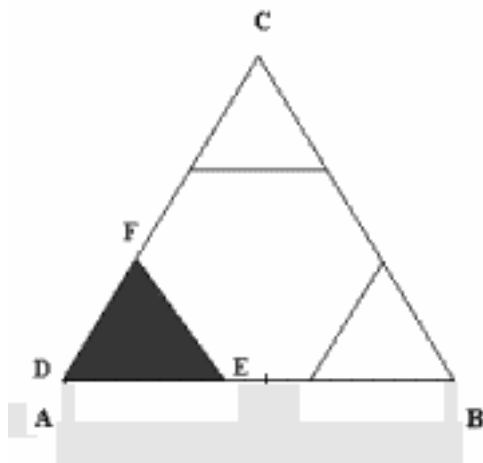
Příklad z obrázku 1. implikuje potřebné instrumentárium počítačové geometrie i grafiky. Je zřejmé, že půjde především o algoritmy transformace objektů (trojúhelníků) v rovině a o manipulace se seznamy vrcholů. V každém substitučním kroku budou souřadnice nových vrcholů odvozeny ze souřadnic vrcholů substituovaného objektu podle aplikovaného substitučního pravidla (primitiva). Pro tento účel vytvoříme v programu pomocné funkce.

První funkci nazvěme **hranová funkce EV**. Tato funkce definuje nový vrchol na hraně (straně). Poloha vrcholu $V_{\alpha i}$ na hraně spojující vrcholy V_i a V_{i+1} je řízena skalárním parametrem α , jak je naznačeno na obrázku 2.



Obr. 2: Hranová funkce $V_{\alpha i} = EV(V_i, V_{i+1}, \alpha)$

Hranovou funkcí jsme vyřešili problém definování vrcholů vnitřních trojúhelníků. Zbývá spojit příslušné vrcholy a vytvořit polygony, v našem případě trojúhelníky. Tento úkol zabezpečí v programu další **funkce vpoly**. Pro vysvětlení použijme příklad podle obrázku 3. a vytvořme vyznačený trojúhelník.



Obr. 3: Použití hranové funkce k definici vyznačeného trojúhelníka

Vstup: souřadnice vrcholů A,B,C, které tvoří substituovaný trojúhelník

Výstup: souřadnice vrcholů D,E,F, jednoho z trojúhelníků v primitiva

Zavedme v trojúhelníku orientaci hran (stran) a označme vrcholy A,B,C pomocí indexů V_1, V_2, V_3 . Funkce vpoly konstruuje stejné rohové trojúhelníky (stejně α).

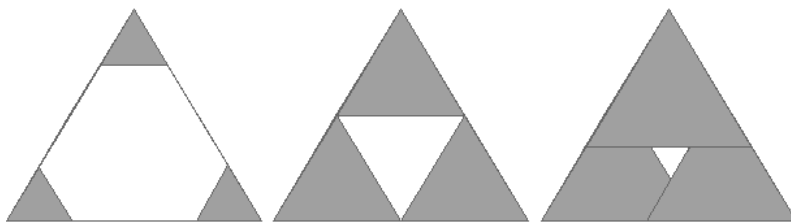
$$\text{vpoly}(V_1, \text{EV}(V_1, V_2, \alpha), \text{EV}(V_1, V_3, \alpha))$$

$$\text{vpoly}(V_2, \text{EV}(V_2, V_3, \alpha), \text{EV}(V_2, V_1, \alpha))$$

$$\text{vpoly}(V_3, \text{EV}(V_3, V_1, \alpha), \text{EV}(V_3, V_2, \alpha))$$

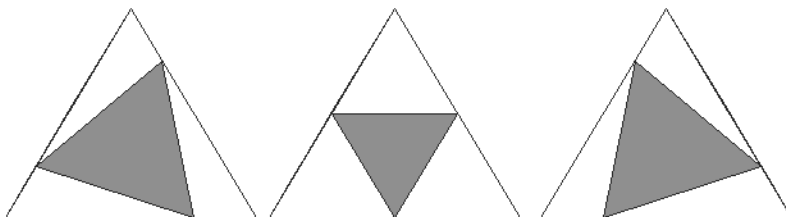
Ze zápisu vidíme, že vrcholy tvoří kruhově vázanou posloupnost. Proto další pomocná **funkce vloop** postupně navýší indexy vrcholů a zopakuje úlohu ve všech vrcholech substituovaného objektu. Obrázky 4. a 5. ukazují použití vytvořených funkcí při zápisu dvou substitučních pravidel - primitivů, výplně rohů trojúhelníka a vepsání trojúhelníka.

výplň rohů = vloopy (vpoly(V_i , $EV(V_i, V_{i+1}, \alpha)$, $EV(V_i, V_{i-1}, \alpha)$))



Obr. 4: Primitiv výplň rohů pro $\alpha = 0.25, 0.5, 0.75$

vepsání = vpoly ($EV(V_i, V_{i+1}, \alpha), EV(V_{i+1}, V_{i-1}, \alpha), EV(V_{i-1}, V_i, \alpha)$)

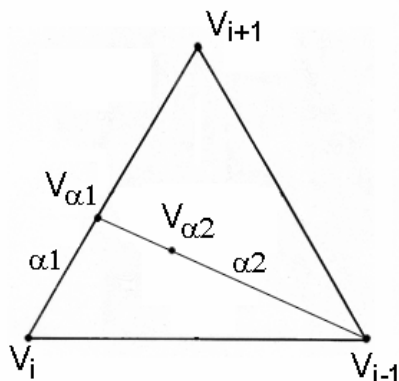


Obr. 5: Primitiv vepsání pro $\alpha = 0.25, 0.5, 0.75$

Nyní máme základní programové moduly pro budoucí editor a generátor primitivů, který zajistí programově efektivní klonování trojúhelníků. Tento postup lze dále rozvinout a substituce obohatit. Pokud umožníme konstrukci trojúhelníkového primitiva ve vrstvách, které následně sloučíme, a bude-li barva hran i výplně trojúhelníků stejná, pak trojúhelníky splynou a vytvoří libovolný substituční m-úhelník a substituce se podle naší terminologie stane mutací. Při aplikaci takto definovaných mutačních pravidel na trojúhelníkovou síť vznikne opět trojúhelníková síť, na kterou můžeme dále aplikovat pravidla libovolného typu. Získali jsme tak výtvarně velmi silný nástroj. Další zlepšení konstrukce oproti přístupu Glassnera [5] zajistí **kombinovaná hranová funkce EC**, která dovolí definici souřadnic vrcholu kdekoliv uvnitř substituovaného objektu.

Funkce EC je vlastně dvojitou aplikací funkce EV.

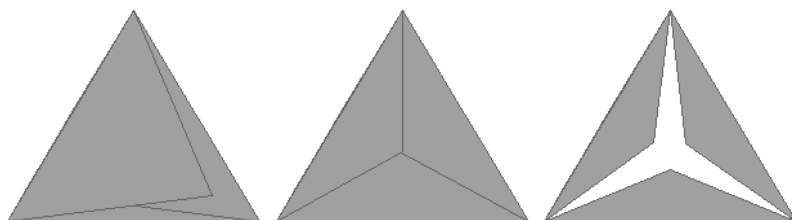
$$V_{\alpha 2} = EC(V_{i-1}, EV(V_i, V_{i+1}, \alpha_1), \alpha_2).$$



Obr. 6. Kombinovaná hranová funkce EC.

Použití kombinované funkce EC v primitivu hvězda:

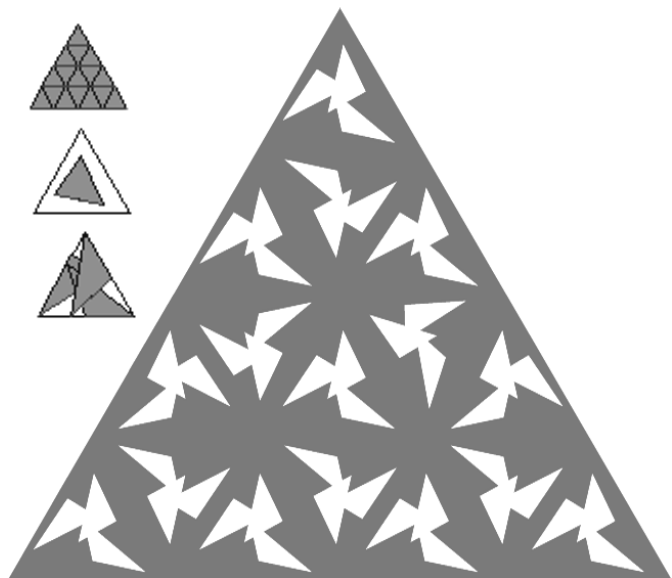
hvězda = vloop(vpoly($V_i, V_{i+1}, EC(V_{i-1}, EV(V_i, V_{i+1}, 1/2), \alpha))$))



Obr. 7: Primitiv hvězda pro $\alpha = 0.25, 0.66, 0.75$

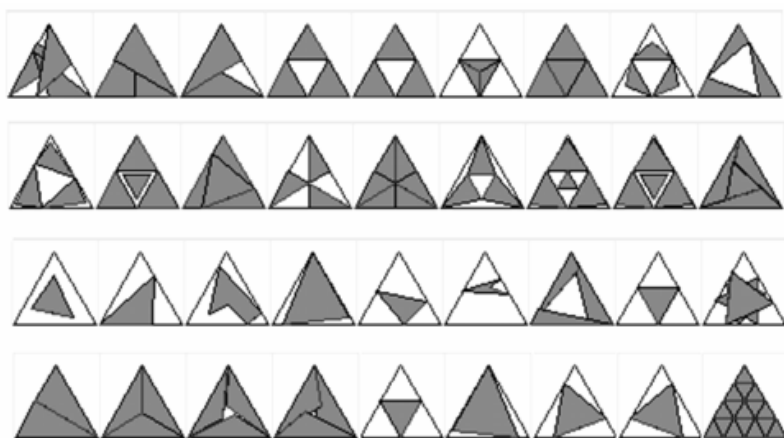
Hlavním posláním programu je interakční návrh primitivů a jejich mapování.

Výtvarné možnosti editoru jsou dány bohatstvím připraveného souboru primitivů. Zbylé moduly programu odpovídají standardnímu grafickému editoru.

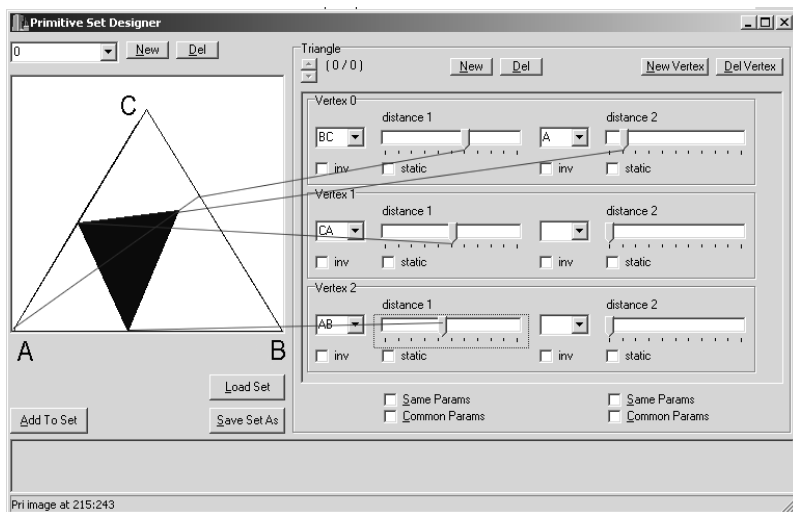


Obr. 7. Příklad tří substitucí

Na obr. 8.a 9. je soubor primitivů a jedno z programových oken René Novotného [7].

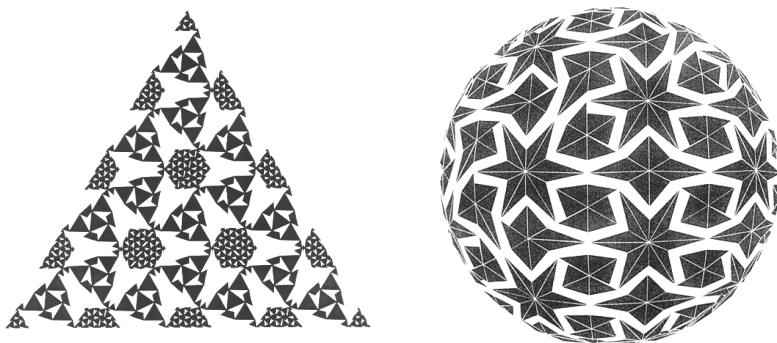


Obr. 8. Sestava vstupních primitivů



Obr. 9. Okno pro návrh primitiva

Ke geometrickým substitucím se autor vrací již několik let. Na téma editorů a generátorů grafických substitucí vedl několik prací. Poslední z nich je součástí programového zabezpečení cvičení v předmětu Výtvarná informatika. Na posledním obrázku 10. je ilustrováno mapování mozaiky na rovinu a na kouli.



Obr. 10. Mozaika v rovině a na kouli.

Literatura

- [1] Cline, M.: Recursive shapes. Internet, listopad 2000.
<http://24.113.158.62/cline/RecursiveShapes>
- [2] Firebugh, M.: Objects of fractional dimension. Internet, prosinec 2000.
<http://www.uwp.edu/academic/computer.science/morris.csci/CS.320/Week.11/Ch11a.www/Ch11a.html>
- [3] Foukal, P.: Grafické substituce, Dipl. práce FEI VUT v Brně, 1994 (ved. autor).
- [4] Horák, M.: Generátor ornamentů s využitím geometrických substitucí, Diplomová práce FEI VUT v Brně, 2000 (ved. J. Matůš).
- [5] Glassner, A.S.: Geometric Substitution: A Tutorial, IEEE Computer Graphics & Appl. January 1992, pp 22 – 36.
- [6] Kurlander, D., Bier, E. A.: Graphical Search and Replace, Computer Graphics (Proc. Siggraph), Vol. 22. No.4, Aug. 1988, pp. 113 – 120.
- [7] Novotný, R.: Generátor geometrických substitucí, Diplomová práce FEI VUT v Brně, 2001 (ved. autor).
- [8] Sequin, C, H, et al.: Procedural Generation of Geometrics Objects, Report No. UCB/CSD 89/511, Comp. Sci. Div. University of California, Berkeley, June 1989.

Tomáš Staudek

CINEMA 4D : ZKUŠENOSTI S 3D MODELOVÁNÍM VE VÝUCE POČÍTAČOVÉ GRAFIKY

Abstrakt

Článek shrnuje zkušenosti s výukou prostorového modelování a animace na Fakultě informatiky MU v Brně, včetně syllabu cvičení z počítačové grafiky věnovaných modelování v programu CINEMA 4D.

Klíčová slova

Počítačová grafika, modelování, animace, vizualizace.

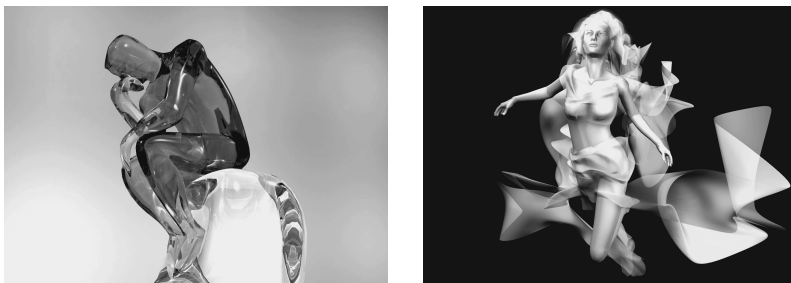
1 Výuka počítačové grafiky na FI MU

Počítačová grafika dlouhodobě působí na lidské vnímání a zpracování vizuální informace. Moderní počítačová grafika nabízí pestré zobrazovací možnosti pro průmyslový design, architekturu, umění, filmový i zábavní průmysl. Vykreslení jistým stylem či technikou nazýváme *vizualizací*. Společenská objednávka si nejvíc žádá realisticky ztvárněnou vizualizaci. Je tedy nutné znát vlastnosti chování objektů, které budeme zobrazovat „jak je oko vidí“. S dnešními nástroji pro modelování a animaci bývá vytvoření fotorealistické prostorové scény víceméně rutinní úlohou.

Na Fakultě informatiky Masarykovy university je počítačová grafika náplní více přednášek a seminářů. Předmět bakalářského cyklu *Základy počítačové grafiky* je vstupním kurzem, seznamujícím studenty s elementárními grafickými algoritmy — ořezáváním, vyplňováním, promítáním, viditelností, lokálním a globálním osvětlením. Část přednášek se týká modelování grafických primitiv a vizualizace scény metodou sledování paprsku. Praktické zkušenosti s 3D modelováním získávají studenti na cvičeních, která zakončují realistickou

vizualizací prostorové scény včetně její animace pomocí programů Rhinoceros nebo CINEMA 4D.

Podrobnější exkurzí do světa současné počítačové grafiky je magisterská přednáška *Počítačová grafika*. Tematicky se specializuje mj. na metody reprezentace a vyhledávání objektů v prostorové scéně, tvorbu 2D a 3D textur a pokročilé vizualizační algoritmy. Kreativní počítačovou grafikou se zabývá předmět *Výtvarná informatika*, přibližující metody a trendy ve výtvarném umění podporovaném počítačem. Dvojice přednášek *Výtvarná anatomie* a *Architektonický prostor* obohacuje zkušenosti studentů s 3D modelováním o znalost anatomie člověka a tělesných i architektonických proporčních kánonů. Kromě Rhinocera a CINEMA 4D jsou k vizualizaci prostorových scén používány rovněž programy 3D Studio Max a Maya.

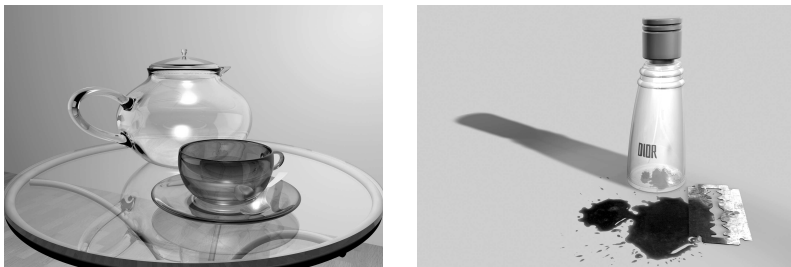


Obrázek 1: Autoři ukázky (a) Vít Kovalčík, (b) Andrea Salová.

2 Proč učíme CINEMU 4D ?

CINEMA 4D potvrdila pozici na grafické scéně během několika posledních ročníků konference SIGGRAPH.¹ Stále více příspěvků do přehlídky nejlepších počítačových animací *SIGGRAPH Electronic Theater* bylo vytvořeno pomocí tohoto nástroje, nabízejícího uživatelům integrované prostředí pro modelování, vizualizaci a animaci ve 3D prostoru. Program vyniká rychlou učicí křivkou; během šesti lekcí jsou studenti schopni vytvořit model netriviálního objektu, pokrytý jej realistickými texturami, nasvítit a „rozhýbat“ v krátké animaci.

¹ <http://www.siggraph.org/>



Obrázek 2: Autoři ukázky (a) Marián Lipovský, (b) Adam Hrubý.

Otevřená modulární architektura umožňuje rozšiřovat funkcionalitu programu podle konkrétních potřeb. Součástí programu je objektově orientovaný jazyk pro náročnější ovládání scény. Tvorba specifických modulů je vhodným zadáním bakalářských a diplomových projektů [2]. Pro výuku principů prostorového modelování je postačující zdarma šířený program ve starší verzi [1] včetně české lokalizace. K dispozici je rovněž elektronická učebnice modelování v CINEMĚ4D [3].

3 Skladba cvičení

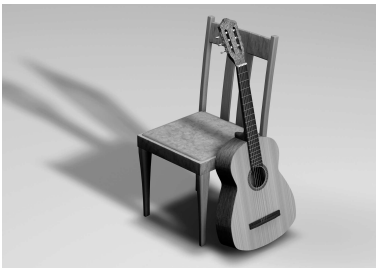
Vyučovaná látka je rozvržena do šesti dvouhodinových lekcí; přibližně stejný čas je vyhrazen individuálním domácím úlohám. Cílem úvodní lekce je seznámit studenty s modelováním základních grafických primitiv pomocí parametrických generátorů křivek a povrchů.

- Generátory křivek
 - Interpolační algoritmy (kubika, Akima, Bézier, B-spline)
 - Matematické modelování (vizualizace průběhu časové nebo prostorové funkce)
 - Vektorizace křivek z rastrového obrazu
 - Speciální křivky (šablony n -úhelníků, profilů, periodických funkcí, spirál)
- Generátory povrchů
 - Objektová reprezentace prostorových těles

- Matematické modelování
(vizualizace průběhu časové nebo prostorové funkce)
- Modelování povrchů z rastrového obrazu
- Speciální tělesa
(platónská tělesa, generátory fraktálních povrchů)

Druhá lekce je věnována modelování povrchů z křivek pomocí generátorů typu NURBS a možnostem řízeného rozmístění těles ve scéně.

- Generátory povrchů NURBS
 - Základní operace
(protlačení křivky, vytažení profilu podél trajektorie, vytažení povrchu přes profily, rotace křivky kolem osy)
 - Bézierovy povrchy
(volná deformace plátu v síti řídicích bodů)
 - HyperNURBS
(řízená segmentace povrchu, vyhlazení povrchových zlomů)
 - Povrchy typu *metaball*
- Poziční operátory
 - Zrcadlová a rotační symetrie, klonování, rozmístění podél křivek, booleovské operátory



Obrázek 3: Autoři ukázky (a) Jiří Chmelík, (b) Matěj Kasper.

Ve třetí lekci se studenti naučí preciznímu tvarování detailů. Po „modelovací“ trojici cvičení jsou schopni vytvořit 3D scénu podle skutečnosti.

- Tvarové modelování
 - Obrábění a deformace (ohnutí, zkroucení, exploze, tříštění, tavení aj.)
 - Matematické obrábění (tvarová deformace zadaná časovou nebo prostorovou funkcí)
- Polygonální modelování
 - Převod parametrického tělesa na povrch složený z polygonů
 - Základní operace nad polygony (nastavení pozice, prořezání, přemostění, zvrásnění, vyhlazení)



Obrázek 4: Autoři ukázky (a) Pavel Laštůvka, (b) Lukáš Gregor.

Druhá polovina programu cvičení představuje techniky vizualizace a animace scény. Čtvrtá lekce se věnuje práci s texturami, realistickému osvětlení interiéru a exteriéru a nastavení virtuálních kamer ve scéně.

- Materiály
 - Textury (statické materiály) a shadery (textury počítané při vizualizaci, animované textury)
 - Tvorba realistických materiálů (stínování, povrchové deformace, průhlednost, zrcadlení, svítivost, světelné odrazy)
- Vizualizace scény
 - Světla fixní a zaměřená (viditelná, vzdálená, všesměrová, směrová, zářivková)

- Stíny (měkké, ostré, plošné)
- Kamery fixní a zaměřené (perspektiva, ohnisková vzdálenost, clona, hloubka ostrosti)

V posledních dvou lekcích jsou studenti seznámeni s animačními technikami v rozsahu odpovídajícím požadavkům na závěrečný projekt.

- Základní animační techniky
 - Animace klíčovými snímky (záznam scény v diskrétním čase, interpolace mezi klíčovými snímky)
 - Parametrická animace (spojité řízení pohybu)
- Speciální animační techniky
 - Animace kloubových systémů (dopředná a inverzní kinematika)
 - Tvarová deformace, *morphing*
 - Částicový systém (gravitace, tření, turbulence...)
 - Ozvučení scény

Účelem cvičení je zdokonalit prostorovou představivost studentů, kteří vesměs nemají předchozí zkušenosti s modelováním 3D scény, naučit je základům realistického modelování a animace, a zejména je motivovat k dalšímu tvůrčímu experimentování s počítačovou grafikou. Že se jedná o splnitelný cíl dosvědčují obrazové ukázky studentských prací doprovázející tento článek.

Literatura

- [1] Instalace programu CINEMA4D CE v. 6. Příloha CD časopisu CHIP č. 11/2003, ISSN 1210-0684.
- [2] Jiří Chmelík: *Implementace filtru pro nefotorealistické zobrazení 3D scény*. Bakalářská práce, FI MU Brno, 2004.
- [3] Pavel Schneider: *Elektronická učebnice prostorového modelování v programu CINEMA4D*. Bakalářská práce, FI MU Brno, 2005.

Zbyněk Šír

HERMITE INTERPOLATION BY PLANAR BIARCS

Abstract

G^1 Hermite interpolation by planar biarcs is shortly outlined. A geometrical interpretation of the main characterization property of the biarc interpolants leads directly to a new interpolation method. This method is tested on several examples and is compared to the standard approaches.

Keywords

Biarc, Hermite interpolation, G-code, CNC manufacturing

1 Introduction

It is very important in the Computer Numerically Controlled (CNC) manufacturing, to control precisely the speed of the tool along its path. Also offsets of the curve are exploited in the CNC machining, since in many cases some part of the machine must move at a given constant distance from the manufactured shape. For this reason the curves with simple (analytically expressible) arc-length function (implying simple offsets) are very suitable for CNC manufacturing. The traditional approach is to use curves composed of linear and circular segments, for which the arc-length function can be easily expressed. The industrial description of such circular splices is called G-code.

Several techniques for generating suitable G-code curves were developed. Among them the biarc interpolation is one of the main techniques - see e.g. [1, 2, 3]. In this paper we present a new interpolation method (section 2) which we test on examples and compare with standard methods (section 3).

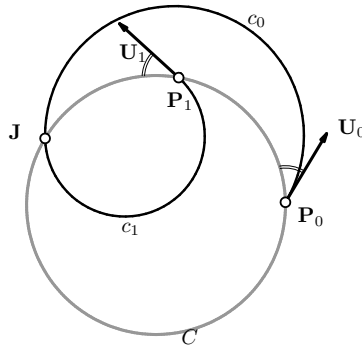
2 G^1 Hermite interpolation by biarcs

Suppose that two circular arcs c_0, c_1 are given in the plane. We say, that they form a *biarc interpolating given oriented G^1 data* (i.e. end points $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$ and unit tangent vectors $\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1$) if and only if the two

circular arcs share one common end point \mathbf{J} called *joint* and satisfy the following properties: The arc c_0 has end points \mathbf{P}_0 , \mathbf{J} and \mathbf{U}_0 is tangent to c_0 and points toward the interior of this arc. The arc c_1 has end points \mathbf{J} and \mathbf{P}_1 and \mathbf{U}_1 is tangent to c_1 and points toward the exterior of this arc. The two arcs have a common tangent vector at \mathbf{P} , pointing toward the exterior of c_0 and toward the interior of c_1 . This means that an interpolating biarc represents a G^1 smooth path from the data $\mathbf{P}_0, \mathbf{U}_0$ to the data $\mathbf{P}_1, \mathbf{U}_1$.

It is a known fact [2] that there is one dimensional parametric system of interpolating biarcs to general planar data and that the locus of all possible joints \mathbf{J} is a circle passing through \mathbf{P}_0 and \mathbf{P}_1 . A simple geometric proof of the following characterization theorem can be found in [4].

Proposition 1 Consider the family of biarcs interpolating given oriented G^1 data $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1$. Then the locus of all possible joints \mathbf{J} is the circle C passing through the points $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$ and having the same oriented angles with the vectors \mathbf{U}_0 and \mathbf{U}_1 .



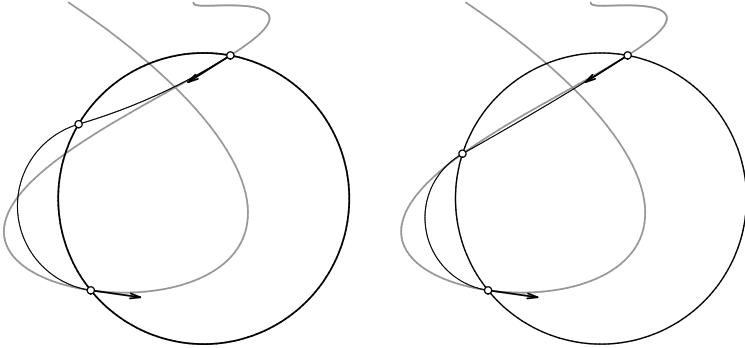
Note, that for any data there is precisely one such circle C (possibly degenerated into a line). It represents the unique rotation transforming the data $\mathbf{P}_0, \mathbf{U}_0$ to the data $\mathbf{P}_1, \mathbf{U}_1$.

Various biarc interpolation schemes were proposed which are distinguished by the choice of the joint \mathbf{J} . The two most important are the "equal chord" biarc and the "parallel tangent" biarc. The former is constructed so that the two segments $\mathbf{P}_0\mathbf{J}$ and $\mathbf{J}\mathbf{P}_1$ has the same length and the latter so that the tangent at the point \mathbf{J} is parallel to the segment $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$.

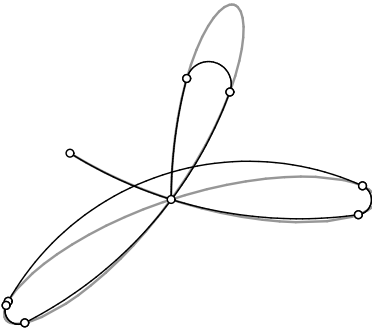
We propose a new choice of the joint \mathbf{J} which is based on the following simple observation. Suppose, that the G^1 data are taken from a C^1 continuous curve - see the next figure. Then by the construction of the circle C the two boundary vectors are both pointing outside or inside the circle C . The curve therefore intersects the circle C in at least one more intermediate point, which we take as the joint \mathbf{J} .

3 Examples and comparison

As a first example we consider G^1 data taken from a continuous curve (grey line). On both figures the characteristic circle C is shown together with the interpolating biarc constructed by the classical "equal chord" method (left figure) and by our new method (right figure).



As a next example we convert a parametric curve (grey line) which we convert into biarc spline using the "equal chord" method and the new method. In both cases we interpolate data taken from 2, 4, ...128 segments of the curve. The figure shows the curve together with its arc conversion (using the new method) based on 4 biarc segments. In the table the conversion errors for both methods are shown.



Parts	Error	
	Eq. ch. m.	New m.
2	1.51	1.37
4	$3.35 \cdot 10^{-1}$	$2.97 \cdot 10^{-1}$
8	$3.52 \cdot 10^{-2}$	$2.14 \cdot 10^{-2}$
16	$1.47 \cdot 10^{-2}$	$1.35 \cdot 10^{-2}$
32	$9.80 \cdot 10^{-4}$	$5.14 \cdot 10^{-4}$
64	$1.12 \cdot 10^{-4}$	$6.82 \cdot 10^{-5}$
128	$1.04 \cdot 10^{-5}$	$8.64 \cdot 10^{-6}$

These two examples shows general quality of the new method, which we have observed on many other data. Due to the additional point \mathbf{J} taken from the curve, it typically produces biarcs which are closer to the original curve.

In addition to the higher precision, the new method has following advantages comparing to standard methods:

- This biarc conversion is in fact an *arc conversion*. All the end points of the arcs lie on the curve and it is therefore clear, which arc matches which part of the curve. This makes it very easy to evaluate the distance between the arc-spline and the curve.
- The construction reproduce arc-splines, i.e. it has the *arc-splines precision*.
- The construction is invariant under the group of Möbius transformations.

4 Conclusion

The proposed method can be used for conversion of (piecewise) C^1 continuous splines into arc splines and can thus find interesting applications in the context of CNC manufacturing. In our future researches we want to investigate the space biarc approximation and compare the biarc interpolation schemes to the interpolation by Pythagorean Hodograph curves.

Acknowledgment

The research was supported through grant P17387-N12 of the Austrian Science Fund (FWF).

References

- [1] D.S. Meek and D. J. Walton, Approximating smooth planar curves by arc splines, *J. Comput. Appl. Math.*, 59(1995) pp. 221–231.
- [2] A. W. Nutbourne and R. R. Martin, *Differential geometry applied to curve and surface design*, Vol. 1, Foundations. Ellis Horwood Ltd., Chichester; Halsted Press, New York, 1988.
- [3] J. F. Poliakoff, Y.-K. Wong and P. D. Thomas, An analysis of biarc algorithms for 2-D curves. in *Mathematical methods for curves and surfaces II* (Lillehammer, 1997), Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN, 1998, pp. 401–408.
- [4] Z. Šír, R. Feichtinger and B. Jüttler, Approximating offsets using biarc splines and Pythagorean Hodograph splines, in preparation.

Jiří Šrubař

VLASTNOSTI TROJÚHELNÍKA A JEJICH ANALOGIE PRO ČTYŘSTĚN

Abstrakt

Některé vlastnosti trojúhelníka mají své obdoby i pro přirozenou prostorovou analogii trojúhelníka – čtyřstěn. V příspěvku jsou výpočetně odvozeny některé takové analogie a jejich modifikace.

Klíčová slova

Kružnice devíti bodů, Eulerova přímka, Lemoinův bod, Longchampův bod, prostorové zobecnění.

1 Úvod

Ve svém příspěvku na 24. konferenci o geometrii a počítačové grafice (viz [1]) jsem se věnoval prostorovým zobecněním některých vlastností trojúhelníka pro čtyřstěn. Kromě zřejmých analogií (jako je např. těžiště) byly v příspěvku odvozeny např. podmínky pro existenci ortocentra. V tomto příspěvku ukážeme některá další jednoduchá prostorová zobecnění vlastností trojúhelníka a nakonec je složíme v zobecnění vlastností složitějších.

2 Těžiště, ortocentrum

Na úvod připomeneme vlastnosti dvou důležitých bodů spjatých s trojúhelníkem i jeho prostorovou analogií – čtyřstěnem.

Je zřejmé, že každý čtyřstěn má své těžiště. Ovšem je poměrně snadné zapomenout na to, že pro těžiště čtyřstěnu platí vztah

$$\frac{|T_\alpha T|}{|TA|} = \frac{|T_\beta T|}{|TB|} = \frac{|T_\gamma T|}{|TC|} = \frac{|T_\delta T|}{|TD|} = \frac{1}{3},$$

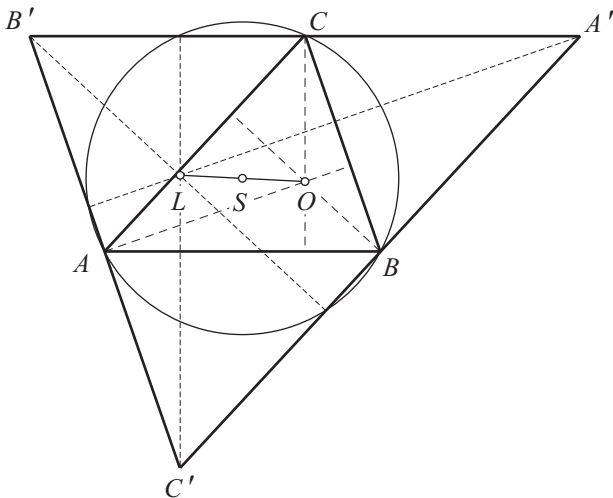
kde A, B, C, D jsou vrcholy, $T_\alpha, T_\beta, T_\gamma, T_\delta$ jsou těžiště protějších stěn a T je těžiště čtyřstěnu.

Je také zřejmé, že ne každý čtyřstěn má ortocentrum – společný průsečík výšek. Ortocentrum čtyřstěnu existuje právě tehdy, když každé dvě protější hrany čtyřstěnu leží na kolmých přímkách (lze i ukázat, že pokud dva páry protějších hran leží na kolmých přímkách, má stejnou vlastnost i zbývající dvojice).

3 Longchampův bod

Longchampův bod L trojúhelníka je definován jako bod středově souměrný s ortocentrem O podle středu S kružnice trojúhelníku opsané (viz obr. 1). Longchampův bod je zároveň ortocentrem trojúhelníka $A'B'C'$ přidruženého k trojúhelníku ABC (strany trojúhelníka ABC jsou středními příčkami trojúhelníka $A'B'C'$). O dalších vlastnostech Longchampova bodu viz např. [3]

Také ke čtyřstěnu $ABCD$ můžeme sestrojít přidružený čtyřstěn $A'B'C'D'$ – vrcholy A, B, C, D budou těžiště stěn čtyřstěnu $A'B'C'D'$ a oba čtyřstěny si budou odpovídat ve stejnolehlosti se středem ve společném těžišti T s koeficientem stejnolehlosti 3. Protože si tyto dva čtyřstěny odpovídají ve stejnolehlosti platí, že $A'B'C'D'$ má ortocentrum (L) právě tehdy, když $ABCD$ má ortocentrum (O).



Obrázek 1: Longchampův bod trojúhelníka

Pro čtyřstěn (s ortocentrem) lze také definovat bod L jako bod souměrný s ortocentrem podle středu kulové plochy opsané. Početně lze poté snadno ověřit, že takový bod L je také ortocentrem čtyřstěnu přidruženého.

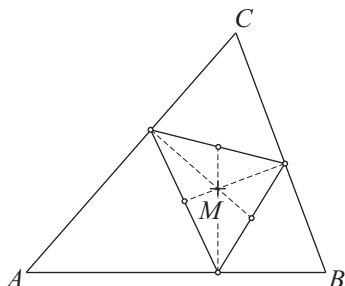
4 Lemoinův bod

Lemoinův bod lze definovat více způsoby. Z početního hlediska je nejvýhodnější definice pomocí vzdáleností: Lemoinův bod M trojúhelníka ABC je takový bod, pro který je

$$\text{vzd}^2(M, a) + \text{vzd}^2(M, b) + \text{vzd}^2(M, c)$$

minimální (a, b, c jsou přímky, na kterých leží strany trojúhelníka).

Pěknou geometrickou vlastností Lemoinova bodu je např. to, že je těžištěm svého úpatnicového trojúhelníka (viz obr 2).



Obrázek 2: Lemoinův bod

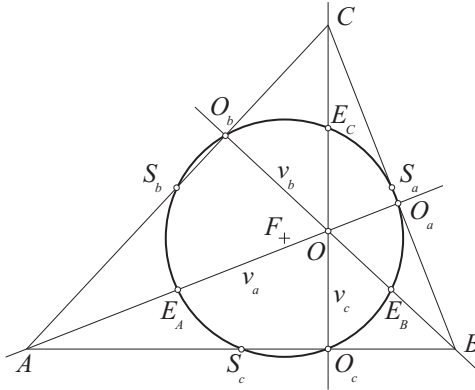
Lemoinův bod pro čtyřstěn můžeme definovat obdobně jako u trojúhelníka. Bude to bod, pro nějž je součet čtverců vzdáleností od rovin stěn čtyřstěnu minimální. Metodami matematické analýzy lze poměrně snadno ukázat, že takový bod existuje a je právě jeden.

Zachována zůstane i ona hezká geometrická vlastnost – také Lemoinův bod čtyřstěnu je těžištěm svého úpatnicového čtyřstěnu.

5 Kružnice devíti bodů

Dalším slavným pojmem spojeným s trojúhelníkem je tzv. kružnice devíti bodů (jinak také Feuerbachova kružnice). Je to kružnice pro-

cházející středy stran, patami výšek daného trojúhelníka a dále tzv. Eulerovými body – středy úseček spojujících vrcholy trojúhelníka s jeho ortocentrem (viz obr. 3).



Obrázek 3: Kružnice devíti bodů

Prostorová analogie Feuerbachovy kružnice již není prostým převedením do prostoru – tedy není to kulová plocha procházející patami výšek, těžišti stěn a středy úseček spojujících vrcholy s ortocentrem. Pokud se omezíme na čtyřstěny s ortocentrem, pak existuje sféra, která prochází těžišti stěn a patami výšek. Tato sféra ale neprochází Eulerovými body. Zde musíme (podobně jako u těžiště) přistoupit ke změně – průsečíky úseček spojujících vrcholy s ortocentrem čtyřstěnu neleží totiž ve středu těchto úseček, ale dělí je v poměru 2:1.

Tedy za prostorovou analogii kružnice devíti bodů pro čtyřstěn $ABCD$ s ortocentrem O budeme považovat "kulovou plochu dvanácti bodů", která prochází těžišti stěn, patami výšek a dále body F_A , F_B , F_C a F_D , které leží na úsečkách spojujících vrcholy s ortocentrem, a které vyhovují podmínce:

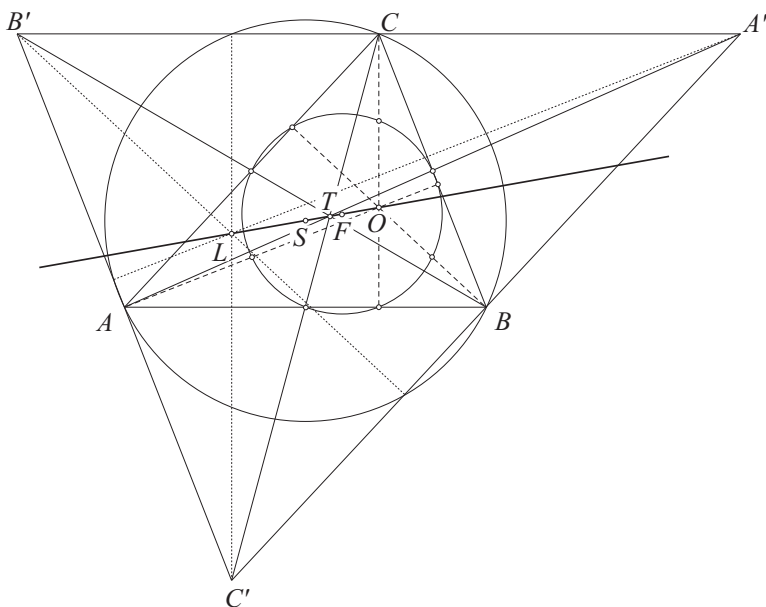
$$\frac{|AF_A|}{|F_AO|} = \frac{|BF_B|}{|F_BO|} = \frac{|CF_C|}{|F_CO|} = \frac{|DF_D|}{|F_DH|} = \frac{2}{1}.$$

Střed této kulové plochy (stejně jako střed Feuerbachovy kružnice) budeme značit F .

6 Eulerova přímka

Na Eulerově přímce nerovnostranného trojúhelníka ABC leží jeho těžiště T , střed kružnice opsané S , ortocentrum O , střed kružnice devíti bodů F a Longchampův bod L a to v pořadí O, F, T, S, L (viz obr. 4). Dále platí pro vzdálenosti těchto bodů:

$$|LS| = |OS|, \quad |TS| = \frac{1}{3}|OS|, \quad |FT| = \frac{1}{6}|OS|.$$



Obrázek 4: Eulerova přímka trojúhelníka

Analogie všech těchto bodů pro čtyřstěn známe, proto bude jistě zajímavé zjistit, zda i pro Eulerovu přímku existuje prostorová obdoba.

V části věnované Longchampovu bodu jsme již zjistili, že body L, S a O opravdu leží na jedné přímce a pro jejich vzdálenosti platí vztah obdobný rovinnému případu. Podobně lze také zjistit, že na této přímce leží i zbývající dva body a pro jejich vzdálenosti platí:

$$|LS| = |OS|, \quad |TS| = \frac{1}{2}|OS|, \quad |FT| = \frac{1}{6}|OS|. \quad (1)$$

Tedy pokud je $ABCD$ nepravidelný čtyřstěn s ortocentrem, potom jeho těžiště T , střed kulové plochy opsané S , ortocentrum O , střed kulové plochy dvanácti bodů F a Longchampův bod L leží na jediné přímce a to v pořadí O, F, T, S, L . Pro jejich vzdálenosti platí vztahy (1).

7 Závěr

Odvodili jsme prostorové analogie některých jednoduchých vlastností trojúhelníka a s jejich pomocí jsme byli schopni ukázat také zobecnění dvou složitějších vlastností – kružnice devíti bodů a Eulerovy přímky. Přestože je odvození některých jednodušších zobecnění záležitostí středoškolské matematiky a geometrie (zejména stereometrie), neobešli jsme se většinou bez použití matematického softwaru.

Literatura

- [1] J. Šrubař: *Prostorová zobecnění vlastností trojúhelníka*, sborník příspěvků 24. konference o geometrii a počítačové grafice. VŠB-TU, Ostrava, 2004
- [2] J. Švrček, J. Vanžura: *Geometrie trojúhelníka*, STNL, Praha, 1988
- [3] E. W. Weisstein: *de Longchamps Point*,
From MathWorld—A Wolfram Web Resource
[<http://mathworld.wolfram.com/deLongchampsPoint.html>]

Diana Šteflová

NĚKTERÉ METODY FOTOGRAMMETRIE

Abstrakt

Definice fotogrammetrie, její význam v dnešní době. Rozdíly mezi digitální a klasickou fotogrammetrií, její výhody a nevýhody.

Klíčová slova

Fotogrammetrie, snímek, digitální fotoaparát.

1 Úvod

Definice *fotogrammetrie*: Geodetický obor zabývající se rekonstrukcí tvaru, rozměru a polohy předmětů zobrazených na snímcích. Základem fotogrammetrie jako měřičské a mapovací techniky je skutečnost, že fotografický snímek vyhotovený za určitých podmínek je exaktním perspektivním zobrazením (centrální projekcí) fotografovaného předmětu. Jednoznačné geometrické vztahy, které byly v čase expozice mezi předmětem a jeho snímkem, je možné rekonstruovat na základě geometrických veličin, zobrazených na snímku, a tak je možné nahradit měření předmětu (území) měřením na jeho snímku (v tom je také hlavní rozdíl mezi geodézií a fotogrammetrií). Pomocí této metody se tvoří mapy, plány, profily a jiná grafická zobrazení fotografovaných předmětů (území) ve formě analogové (mapa) nebo digitální.

Výhodou fotogrammetrie je značná efektivnost a univerzálnost ve vazbě k rozsahu poskytovaných informací. Náklady při vyhodnocení u fotogrammetrických metod jsou několikrát menší než u klasických zeměměřičských metod. Nosným médiem je fotografie. Právě fotografický obraz je ideální pro pozdější uchování k účelům dokumentace. Po dlouhou dobu bylo využíváno "klasické" fotografie, tedy přenosu obrazu na světlocitlivou vrstvu (vynález fotografie 1839). S rozvojem informačních technologií a digitálních záznamů (od 80. let 20. století) však začala své uplatnění nacházet fotografie digitální.

2 Digitální fotografování

Fotogrammetrické zpracování snímků se po praktické stránce částečně liší také tím, zda se provádí na počítači či ručně. V současné době je již počítačové zpracování téměř samozřejmostí, je tedy bezesporu výhodnější fotografie určené pro fotogrammetrické účely pořizovat digitální cestou. Tento způsob fotografování má mnoho výhod, jako např.: snímky lze libovolně upravovat, lze zakreslovat fotogrammetrické měření přímo do snímku (nemusí se přelepovat apod.) bez rizika poškození fotografie, snímek může být k dispozici bezprostředně po vyfotografování, odpadá riziko zkeslení snímku z důvodu např. pokrčeného filmu, snadná a bezpečná archivace (obvykle na CD), minimální provozní náklady, snadné šíření a prezentace snímků, kvalitnější fotografie bez znalosti fotografování a bez rizika nepodařených snímků, zkušený fotograf má více možností zasahovat do vzniku budoucí fotografie, je jednodušší, levnější a rychlejší udělat z digitální fotografie papírovou než-li naopak.

Avšak mohou nastat i situace, kdy nemáme k dispozici digitální fotografii např. snímek objektů, které již v současné době mají jinou podobu. Pak existují dvě možnosti fotogrammetrického zpracování. Buď ruční a nebo snímek převést do digitální podoby skenováním nebo ve studiích fotolab, kde vyvolané fotografie uloží na CD-ROM. Ruční zpracování je velice pracné, zdlouhavé a může dojít k poškození fotografie. Po převedení do digitální podoby je již zpracování snímku snazší, avšak skenování je opět zdlouhavým procesem a obvykle dochází ke zhoršení kvality původního snímku.

Digitální fotografie má však i své stinné stránky. V některých případech je výhodnější mít připravenou "papírovou" verzi fotogrammetrického zpracování např. když společnost, pro kterou bylo toto zpracování připraveno nemá dostupnou techniku nebo software pro přenesení digitální podoby. Tento problém pak lze vyřešit tiskem, při kterém však opět mohou nastat problémy se snížením kvality snímku.

Digitální fotoaparáty zaznamenávají za poslední roky nebývalý rozvoj a pro společnosti zabývající se fotogrammetrií, ale i pro profesionální fotografy či laickou veřejnost, jsou již téměř samozřejmostí. Je tedy logickým vyústěním i snaha výrobců o zkvalitňování těchto přístrojů. Roste rozlišení snímačů, zrychlují se použité procesory a zdokonalují se vestavěné programy. Zdá se, že jediné, co zatím digitální fotoaparáty "postrádají" je bezdrátové spojení s PC. V současné době je

sice využitelný přenos pomocí infračervených paprsků nebo pomocí mobilní sítě GSM, avšak obě metody jsou zdlouhavé a mohou narušit kvalitu přenášených snímků. Z uvedených důvodů je do budoucna trendem ve vývoji digitálních fotoaparátů dopilovat tento nedostatek.

2.1 3x3 pravidla

Dříve než začneme rekonstruovat snímek, je logicky nutnou podmínkou tento snímek pořídit. Zmínila bych ještě stručně jednoduchá pravidla, která je třeba dodržovat při pořizování fotografií určených k rekonstrukci. Sestavil pan Waldhäusl a nazval je „3x3 pravidla“, protože jsou rozdělena na tři základní pravidla a každé pravidlo je ještě rozděleno do tří částí.

Tři *základní pravidla* pro pořizování fotografií objektů určených k rekonstrukci jsou:

1. geometrická,
2. fotografická,
3. organizační.

Geometrická pravidla:

1. Příprava snímku pro další zpracování: Na fotografii vyznačíme dva známé body, které mají dostatečně velkou vzdálenost nebo k objektu připojíme měřičskou lať.
2. Celkové fotografické pokrytí: Zahrneme do snímku i části okolí (plošné pokrytí).
3. Vyfotíme „kolmé pokrytí“ pro prostorovou rekonstrukci.

Fotografická pravidla:

1. Vnitřní geometrie fotoaparátu musí zůstat konstantní pro všechny fotografie. (Nepoužíváme zoom!). Archivovatelným dokumentem jsou jen originální negativy tj. neořezáváme film, u digitálního fotoaparátu neupravujeme počítačově fotografie.
2. Zvolíme nejvhodnější část dne, kvůli odpovídající ostrosti fotografií.
3. Vybereme nejstabilnější a největší formát snímku.

Organizační pravidla:

1. Uděláme si odpovídající náčrtek: Půdorys a bokorys z každé strany (v měřítku 1:100 až 1:500). K objektu si poznamenejme majitele, adresu, označíme směr na sever, stanoviště (všechna) fotoaparátu při pořizování snímků, také na kterém filmu se daný snímek nachází a číslo negativu a označíme osu snímku (změříme úhel, který svírá rovina fotky s osou).
2. Napíšeme příslušnou dokumentaci: V dokumentaci musí být uveden objekt, jeho majitel, adresa, datum vyhotovení, typ (a optika) fotoaparátu, nastavení ohniska a vzdálenosti, údaje o kalibrování fotoaparátu (je-li k dispozici), popis místa, objektu, historie, použitou literaturu. Dále uvedeme odborníky, návrháře, architekty, kteří na úpravách objektu pracují, všechna povolení, závazné dohody apod.
3. Nezapomínejme na konečnou kontrolu všech poznamenaných informací.

Poděkování

Tento článek vznikl za podpory RNDr. Lenky Juklové, Ph.D.

Literatura

- [1] D. Šteflová: *Užití fotogrammetrie v praxi*, diplomová práce, Olomouc, 2005
- [2] <http://www.univie.ac.at/Luftbildarchiv/wgv/3x3.htm>

Vladimír Tichý

VÍCENÁSOBNÁ KRUHOVÁ INVERZE

Abstrakt

Mějme v rovině n kružnic k_1 až k_n . Nechť K_i označuje kruhovou inverzi vzhledem ke kružnici k_i ($i = 1$ až n). V článku se zkoumá složené zobrazení $K = K_n \dots K_1$ se zvláštním zřetelem na hledání fraktálních struktur.

Klíčová slova

Kruhová inverze, iterace, bazén konvergence.

Kruhová inverze

Mějme dánu Möbiovu rovinu, tedy euclidovskou rovinu rozšířenou o jeden nevlastní bod $\{\infty\}$. Není nutno ji nijak označovat, protože vše, o čem bude řeč, se odehrává v téže Möbiově rovině. Libovolná kruhová inverze (rozuměno: v této rovině) je pak bijekcí celé roviny na sebe.

Poznámka

k článku Daniely Richtárikové a Zuzany Zámožíkové „Kružnicová inverzia v iteračnom systéme“, který vyšel ve sborníku konference SCG '2004, strany 106-112.

Autorky zde používají kruhové inverze ke generování fraktálů, přičemž tyto transformace jsou užity paralelně. To například pro tři kruhové inverze znamená, že vezmeme libovolný bod A , k němu ve všech inverzích (obecně ve všech transformacích, protože dále v článku jsou kruhové inverze směřovány i s jinými transformacemi) najdeme body A_1 , A_2 a A_3 , a opakujeme. V n -tém kroku iteračního procesu tak dostaneme 3^n bodů, které nakonec pro $n \rightarrow \infty$ tvoří body atraktivní (fraktální) množiny. To vše samozřejmě i s nalézáním pevných bodů a náhodným výběrem transformace.

Iterační proces tedy postupuje tak, jako například ve známém multilineárním zobrazení (Hutchinsonův operátor). Vzhledem k této analogii bych jejich transformaci pojmenoval jako *multi-inverzi*, případně (při použití i jiných zobrazení než kruhová inverze) jako *multi-transformaci*.

Definice a označení

Pokud kruhové inverze použijeme sériově, je obrazem roviny opět celá rovina, neboť kruhové inverze jsou bijektivní. Nemůžeme tedy fraktály generovat jako v multi-transformaci ze zvoleného (jednoho či několika) bodů, ale musíme se zaměřit na jiné aspekty. Z toho důvodu jsem pro sériové složení transformací použil pro potřeby tohoto článku název *násobná inverze (fold-inversion)*, případně konkrétněji *n-násobná inverze*.

Máme dānu řadu kružnic k_1, k_2, \dots, k_n , a jim odpovídající transformace kruhové inverze K_1, K_2, \dots, K_n . Bez újmy na obecnosti můžeme zvolit kružnici k_1 jako jednotkovou a střed kružnice k_2 na souřadné ose X . Postupně tedy mějme:

$$k_1: \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$k_2: \quad (x - d)^2 + y^2 = r^2$$

$$k_3: \quad (x - m)^2 + (y - n)^2 = s^2$$

k_4 a další jsou v obecné poloze jako k_3 .

n-násobnou inverzí K budeme rozumět složené zobrazení $K = K_n \dots K_1$, takže obrazem bodu A je bod $K(A) = K_n(\dots K_2(K_1(A)) \dots)$. Platí rekurentní definice $K^m(A) = K(K^{m-1}(A))$. Definitoricky $K^0(A) = A$. Bod $K^m(A)$ nazveme m -tou iterací bodu A .

Orbitem bodu A se rozumí (nekonečná) posloupnost bodů $K^m(A)$ pro $m = 0, 1, 2, \dots$.

Bazén je množina bodů, které se chovají stejným způsobem vzhledem k nějaké sledované vlastnosti. Ve všech příkladech uvedených dále jsou různé bazény rozlišeny různými barvami.

Kde hledat fraktály

Nejperspektivnější cestou je sledování bazénů a hlavně jejich hranic. Dále jsou uvedeny možné sledovatelné vlastnosti.

Konvergence. Body konvergující k témuž bodu náleží do téhož bazénu konvergence. Orbit může také konvergovat k bodu $\{\infty\}$, nebo divergovat. V příkladech se rozlišují případy, kterým směrem je poslední iterace vzdálena od předposlední, zda kladným či záporným ve směru obou souřadných os (4 různé směry).

Periodicita. Zkoumá se, kolikátá iterace se přiblíží k původnímu bodu, což lze považovat za přibližnou periodicitu (tedy vlastně za přibližný numerický výpočet periodických bodů). Musí být zadána přesnost, se kterou budeme dva body považovat za totožné. Body se stejnou nalezenou periodicitou zařadíme do téhož bazénu.

Preperiodicita. Analogicky k periodicitě, jen náročnější výpočet.

Vzdálenost k -té iterace od počátečního bodu, nebo vzdálenost posledních dvou iterací $K^{k-1}(A)$ a $K^k(A)$, případně vzdálenost k -té iterace od čehokoliv jiného. Do jednoho bazénu pak zařadíme body, pro něž je měřena vzdálenost v určitém intervalu.

Region, kde skončí k -tá iterace bodu. Například uvnitř/vně kružnice k_i , ve kterém kvadrantu, případně kombinace těchto případů. V příkladech se rozlišuje do jakého kvadrantu se k -tá iterace dostala, a zda padla do vnitřku či vnějšku kružnice k_1 (tedy 8 barev), přičemž je-li ještě ve vnitřku kružnice k_2 jsou barvy zesvětleny, a je-li ve vnitřku kružnice k_3 tak ztmaveny.

Přes svoji zdánlivou různorodost jsou všechny předchozí návrhy postaveny na základním znaku chaosu, totiž na rozbíhavosti trajektorií. K tomu lze ještě přidat bližší zkoumání orbitů a výpočet Ljapunovových exponentů.

2-násobná inverze

Mějme dány kružnice k_1 a k_2 . Označme

$$E = d^2 - r^2 + 1 \qquad Q = x^2 + y^2 \qquad R = x^2 - y^2$$

Rovnice kruhových inverzí jsou

$$K_1[x, y] = \left[\frac{x}{Q}, \frac{y}{Q} \right] \qquad K_2 = \left[d + \frac{r^2 \cdot (x-d)}{(x-d)^2 + y^2}, \frac{r^2 \cdot y}{(x-d)^2 + y^2} \right]$$

a jejich složení

$$K[x, y] = K_2(K_1[x, y]) = \left[d + \frac{r^2 \cdot (x-dQ)}{d^2Q+1-2xd}, \frac{r^2 \cdot y}{d^2Q+1-2xd} \right]$$

Mohou nastat tři případy:

1) Kružnice jsou soustředné. Pro $r < 1$ jde o zmenšení, pro $r = 1$ o identitu, pro $r > 1$ o zvětšení. Z našeho hlediska nezajímavé.

2) Kružnice nemají společný reálný průsečík a nejsou soustředné, jedna leží uvnitř druhé nebo jsou vně sebe. Transformace má dva pevné body

$$\left[\frac{E \pm \sqrt{E^2 - 4d^2}}{2d}, 0 \right].$$

Jeden z nich je repelentní, druhý atraktivní. Všechny orbity konvergují k atraktivnímu pevnému bodu.

3) Kružnice mají společný dotykový bod. Jde v podstatě o případ 2, ale oba pevné body splynou do jednoho.

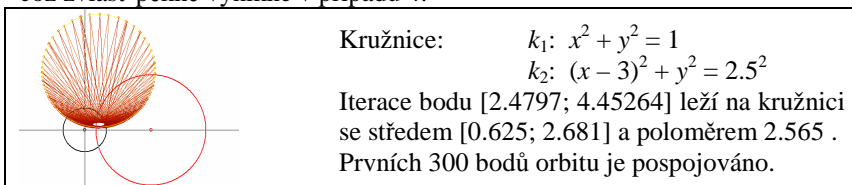
4) Kružnice mají právě dva různé reálné průsečíky. Transformace má

dva pevné body $\left[\frac{E}{2d}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{E}{2d}\right)^2} \right]$ (průsečíky obou kružnic).

Případy 2 až 4 shrňme pod společné pojmenování *obecná 2-násobná inverze*. Těmto nedegenerovaným případům je totiž společné, že orbit bodu $[x, y]$ se pohybuje po kružnici (nazvěme ji orbitovou kružnicí) se středem a poloměrem

$$\left[\frac{E}{2d}, \frac{dQ - Ex + d}{2dy} \right] \quad \frac{\sqrt{E^2Q - 2Edx(Q+1) + d^2(Q^2 + 1 + 2R)}}{2d \cdot |y|}$$

což zvlášť pěkně vynikne v případě 4:



3-násobná inverze

K předchozím dvěma kružnicím přidáme k_3 . Rovnice pro inverzi K_3 je

$$K_3[x, y] = \left[m + \frac{s^2 \cdot (x - m)}{(x - m)^2 + (y - n)^2}, n + \frac{s^2 \cdot (y - n)}{(x - m)^2 + (y - n)^2} \right]$$

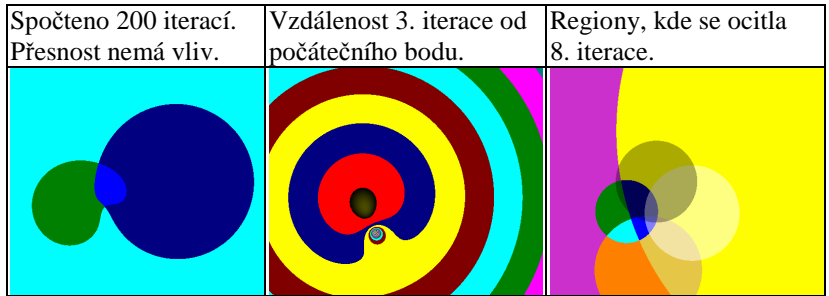
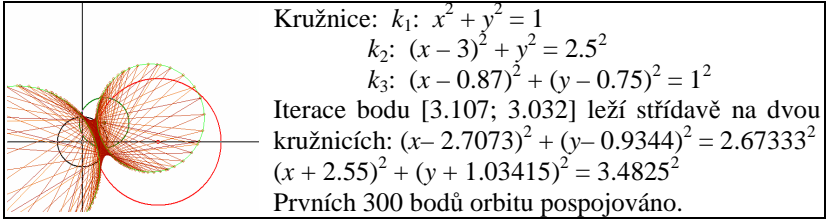
Označíme-li $E = d^2 - r^2 + 1$, $Q = x^2 + y^2$, $S = d^2 Q + 1 - 2xd$, $T = r^2(x - dQ)$, pak složením $K_3(K_2(K_1[x, y]))$ všech tří inverzí dostaneme

$$K[x, y] = \left[m + \frac{s^2 S \cdot (dS + T - mS)}{(dS + T - mS)^2 + (r^2 y - nS)^2}, n + \frac{s^2 S \cdot (r^2 y - nS)}{(dS + T - mS)^2 + (r^2 y - nS)^2} \right]$$

Máme tři vnitřky kružnic k_1 , k_2 a k_3 . Pokud jsou pro tyto tři vnitřky realizovány všechny možné průniky (8 disjunktních oblastí), pak orbit libovolného bodu A (kromě pevných bodů) diverguje, přičemž jednotlivé iterace se pohybují střídavě po dvou orbitových kružnicích. Liché iterace na jedné, sudé iterace na druhé. Pokud některá z průnikových oblastí neexistuje, konvergují orbity k atraktivnímu pevnému bodu.

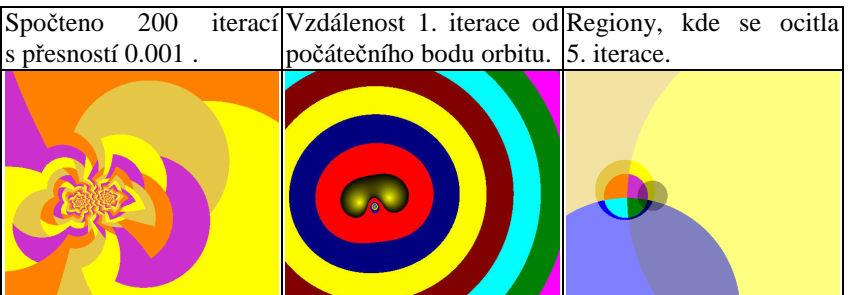
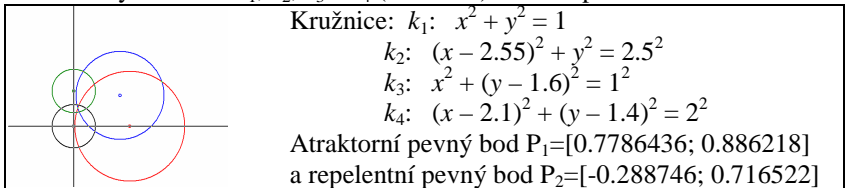
VÍCENÁSOBNÁ KRUHOVÁ INVERZE

Pokud se orbitové kružnice (či přímka a kružnice) protínají, pak jsou to atraktivní a repelentní pevný bod. Výpočet těchto kružnic je numerický. Obě kružnice mohou i splynout. V okolí repelentního pevného bodu může situace vypadat chaoticky, ale nevytváří se zde fraktál.



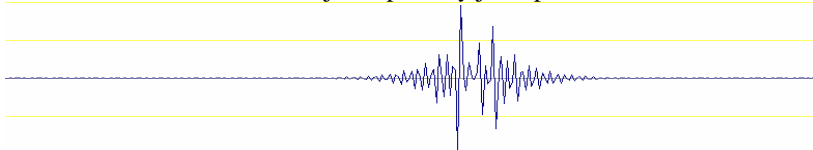
4-násobná inverze

Máme dány kružnice k_1, k_2, k_3 a k_4 (viz dříve) a k nim příslušné inverze.



V tomto konkrétním zadání je okolí bodu $P_3=[0.25200195; 0.5844846]$ v první iteraci zobrazeno na okolí bodu (viz prostřední obrázek), takže zde vzniká dojem chaosu. Ve skutečnosti jde jen o numerickou nedostatečnost počítače.

Průběh x -ové souřadnice prvních 300 iterací bodu P_2 vypadá následovně. Souřadnice bodu jsou spočteny jen s přesností na 8 cifer.



Orbit se nejdříve pomalu odpoutá od repelentního pevného bodu a později konverguje k atraktivnímu pevnému bodu. Průběh nemá fraktální charakter.

Ljapunovovy exponenty

Měří se jimi rozbíhavost trajektorií, čili chaotičnost orbitů. Při spočtení metodou stálé distance (pro body s ohraničenými orbity) dávají pro tři výše uvedené příklady hodnoty buď 0 (cyklus) nebo malá záporná čísla (tedy žádný chaos). Pokud zvolíme řídicí kružnice tak, aby orbity konvergovaly rychle, budou Ljapunovovy exponenty ještě menší (např. pro kružnice s poloměrem 1 v bodech $[0,0]$, $[4,0]$, $[0,4]$ a $[4,4]$ jsou kolem $-12,5$).

Závěr

Při aplikaci n -násobné kruhové inverze fraktální struktury nenajdeme. Obraz je většinou složen z bazénů ohraničených kruhovými oblouky, případně je obraz ještě uniformnější.

Některé náznaky fraktálních struktur v obrázcích jsou způsobeny například tím, že blízké okolí středu kruhové inverze má být zobrazeno na okolí bodu , což v počítači nelze. Takovéto oblasti většinou neobstojí při zvýšení počtu iterací, zvětšení, či zvýšení přesnosti výpočtu.

Zájemce odkazují na webové stránky autora: <http://nb.vse.cz/~tichy/>.

Literatura

Žádná speciální literatura nebyla použita. Autorovi není znám žádný článek na toto téma, kromě již zmíněného v úvodní poznámce, který ale jde zcela jiným směrem.

Světлана Tomiczková

AREA OF THE MINKOWSKI SUM OF TWO CONVEX SETS**Abstract**

This paper deals with the area of the Minkowski sum of two convex polygons and the area of the Minkowski sum of two convex sets bounded by closed curves.

Keywords

Minkowski sum, area.

1 Introduction

The Minkowski sum of two point sets \mathcal{A} and \mathcal{B} can be defined as $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \bigcup_{b \in \mathcal{B}} \mathcal{A}^b$ or $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \{\mathbf{a} + \mathbf{b} \mid \mathbf{a} \in \mathcal{A} \wedge \mathbf{b} \in \mathcal{B}\}$.

We will find the rule for the computation of the area of the Minkowski sum of two convex sets.

2 Area of the Minkowski sum of two convex polygons

Theorem 1: (see fig. 1) Let \mathcal{A} and \mathcal{B} be convex polygons and $O = [0, 0]$ an inner point of the polygon \mathcal{B} and $\mathcal{C} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$. Then the area $S(\mathcal{C})$ of the polygon \mathcal{C} is

$$S(\mathcal{C}) = S(\mathcal{A}) + S(\mathcal{B}) + \sum_{i=1}^n |a_i| |v_i|,$$

where $S(\mathcal{A}), S(\mathcal{B})$ are areas of the polygons \mathcal{A}, \mathcal{B} , a_i is the edge of the polygon \mathcal{A} , n_i is the outer normal vector of a_i and v_i is the distance of the extreme point in direction n_i on the polygon \mathcal{B} from the straight line which is parallel with a_i and goes through the point $O = [0, 0]$.

Proof: (see fig. 2) Let A_1, \dots, A_n be the vertices of the polygon \mathcal{A} and B_1, \dots, B_m the vertices of the polygon \mathcal{B} . We denote the

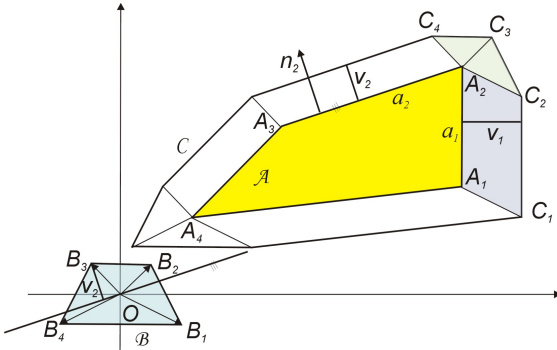


Figure 1: Area of the Minkowski sum of two convex polygons 1

position vectors of B_1, \dots, B_m as $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ the edges of polygon \mathcal{A} for $i = 1, \dots, n$ ($A_{n+1} = A_1$) as $a_i = A_iA_{i+1}$ and the edges of polygon \mathcal{B} for $j = 1, \dots, m$ ($B_{m+1} = B_1$) as $b_j = B_jB_{j+1}$.

If \mathcal{A} and \mathcal{B} do not have parallel edges, then the number of edges of the Minkowski sum $\mathcal{C} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ is $m + n$ (m, n are the numbers of edges of the polygons \mathcal{A} and \mathcal{B}). Each edge of the polygon \mathcal{C} is parallel and equivalent to the edge of \mathcal{A} or \mathcal{B} .

If any edge of \mathcal{A} is parallel to the edge of \mathcal{B} , then the edge of \mathcal{C} can be parallel to both these edges and its length is the sum of the lengths of these two edges. This situation can be converted to the previous case by the addition of an auxiliary vertex which divides this edge into two parts whose lengths are equivalent to the lengths of the edges of the polygons \mathcal{A} and \mathcal{B} .

We denote the vertices of the polygon \mathcal{C} as C_1, \dots, C_{m+n} and its edges as $c_k^i = C_kC_{k+1}$ or $c_k^j = C_kC_{k+1}$. The superscript denotes to which edge of the polygon \mathcal{A} or \mathcal{B} the edge of \mathcal{C} is parallel, i.e. $c_k^i = C_kC_{k+1}$ ($i = 1, \dots, n$) is parallel to the edge a_i of the polygon \mathcal{A} and $c_k^j = C_kC_{k+1}$ ($j = 1, \dots, m$) is parallel to the edge b_j of the polygon \mathcal{B} .

We can divide the area of the polygon \mathcal{C} into two parts. The area of \mathcal{A} fills the first part of \mathcal{C} ($\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ because $[0, 0] \in \mathcal{B}$). The triangles and parallelograms which we create in the following way fill the second

follows:

1. Both edges c_k^i and c_{k+1}^{i+1} are parallel to the edges of the polygon \mathcal{A} and the parallelograms R_i and R_{i+1} have a common edge.
2. The edge c_k^i is parallel to the edge of edge of the polygon \mathcal{A} and c_{k+1}^j is parallel to the edge of edge of the polygon \mathcal{B} (or $c_k^j \parallel b_j$ and $c_{k+1}^i \parallel a_i$). Then the parallelogram and the triangle have a common edge.
3. Both edges c_k^j and c_{k+1}^{j+1} are parallel to the edges of the polygon \mathcal{B} and then the triangles T_j and T_{j+1} have a common edge.

As the polygon \mathcal{C} is convex, the triangles and parallelograms do not overlap.

We can express the area of the polygon \mathcal{C} as the sum of the areas of the polygons \mathcal{A} and \mathcal{B} and the areas of the parallelograms R_i . Thus $S(\mathcal{C}) = S(\mathcal{A}) + S(\mathcal{B}) + \sum_{i=1}^n |a_i||v_i|$. ■

Remark: Since $\mathcal{A}^s \oplus \mathcal{B}^t = (\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})^{s+t}$, the relation for the computation of the area of Minkowski sum holds for arbitrarily placed polygons.

2.1 Area of the Minkovski sum of two convex sets bounded by closed curves

Theorem 2: (see fig. 3) Let \mathcal{A}, \mathcal{B} be the convex, bounded and closed sets in E_2 and $\mathcal{C} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$.

Let the curve $C_1(t) = (x_1(t), y_1(t)), t \in I$ be the boundary of the set \mathcal{A} and the curve $C_2(s) = (x_2(s), y_2(s)), s \in J$ be the boundary of the set \mathcal{B} and let the transformation $s(t) : I \rightarrow J$ of the parametr s be such that $(dx_1(t), dy_1(t)) = k(dx_2(s(t)), dy_2(s(t))), t \in I$ and $k > 0$. Then the area $S(\mathcal{C})$ of the set \mathcal{C} is

$$S(\mathcal{C}) = S(\mathcal{A}) + S(\mathcal{B}) + \int_I \|(x_2(s(t)), y_2(s(t)), 0) \times (dx_1(t), dy_1(t), 0)\| dt. \tag{1}$$

Proof: We know that an extreme point in direction \mathbf{d} on the set $\mathcal{C} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ is the sum of the extreme points in direction \mathbf{d} on the sets \mathcal{A} and \mathcal{B} (see [1]).

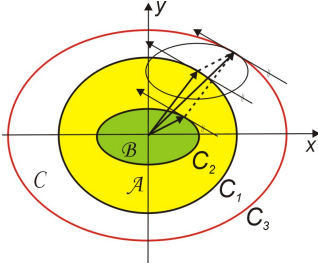


Figure 3: Area of the Minkowski sum of two convex sets bounded by closed curves

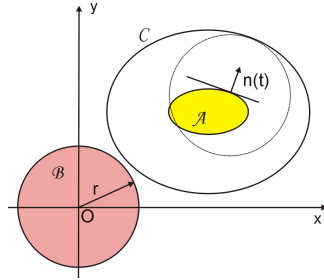


Figure 4: Area of the Minkowski sum where one set is bounded by a circle

For convex sets each point on the boundary is also an extreme point. This means that we obtain points on the boundary of the set \mathcal{C} as the sum of the points in which $C_1(t)$ and $C_2(s)$ have the same unit outer normal vectors.

If we find the parametrization of the curve $C_2(s)$ such that $I \rightarrow J$ and
 $(dx_1(t), dy_1(t)) = k(dx_2(s(t)), dy_2(s(t))), t \in I = \langle a, b \rangle$ and $k > 0$
 then boundary C_3 of the set \mathcal{C} is $C_3(t) = (x_1(t) + x_2(s(t)), y_1(t) + y_2(s(t)))$ (see [3]).

From the Green theorem it follows that the area of the face $S(\mathcal{C})$ whose boundary is the closed curve C_3 is

$$\begin{aligned} S(\mathcal{C}) &= \oint_{C_3} x \, dy = \int_I (x_1(t) + x_2(s(t)) \, d(y_1(t) + y_2(s(t)))) = \\ &= \int_I x_1(t) \, d(y_1(t)) + \int_I x_2(s(t)) \, d(y_2(s(t))) + \int_I (x_2(s(t)) \, d(y_1(t)) + \\ &x_1(t) \, d(y_2(s(t)))) = \\ &= S(\mathcal{A}) + S(\mathcal{B}) + \int_I (x_2(s(t)) \, d(y_1(t)) + x_1(t) \, d(y_2(s(t))))). \end{aligned}$$

With the help of per partes we obtain

$$\int_I x_1(t) \, d(y_2(s(t))) = [x_1(t)y_2(s(t))]_a^b - \int_I x_1(t)y_2(s(t)) \, dt.$$

The curve $C_3(t)$ is bounded so $[x_1(t)y_2(s(t))]_a^b = 0$ and therefore

$$\begin{aligned} & \int_I [x_2(s(t)) d(y_1(t)) + x_1(t) d(y_2(s(t)))] = \\ & = \int_I [x_2(s(t)) d(y_1(t)) - dx_1(t)(y_2(s(t)))] = \\ & = \int_I \|(x_2(s(t)), y_2(s(t)), 0) \times (dx_1(t), dy_1(t), 0)\| dt . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Example: (see fig. 4) Let the boundary of the set \mathcal{B} be a circle of the radius r with the the centre in $O = [0, 0]$. For the curve C_3 (boundary of the set \mathcal{C}) it holds that $C_3(t) = C_1(t) + C_2(s(t)) = C_1(t) + rn(t)$, where $n(t)$ is the unit outer normal vector of the curve $C_1(t)$ thus

$$n(t) = \left(\frac{dy_1(t)}{\sqrt{dx_1^2(t) + dy_1^2(t)}}, \frac{-dx_1(t)}{\sqrt{dx_1^2(t) + dy_1^2(t)}} \right).$$

After substitution to expression (1) we obtain

$$S(\mathcal{C}) = S(\mathcal{A}) + S(\mathcal{B}) + \int_I \sqrt{dx_1^2(t) + dy_1^2(t)} = S(\mathcal{A}) + S(\mathcal{B}) + r d(C_1),$$

where $d(C_1)$ is the length of the curve C_1 .

3 Conclusion

In this paper we have presented rules for computation of the area of the Minkowski sum of two convex sets. The estimate for the non convex sets is a problem for the future research.

Acknowledgements

The author has been supported by the Research Plan MSM 4977751301.

References

- [1] de Berg, Mark; van Kreveld, Marc; Overmars, Mark; Schwarzkopf, Otfried: *Computational geometry. Algorithms and applications*. Berlin: Springer Verlag 1997. ISBN 3-540-65620-0
- [2] Tomiczková, S.: *Minkowského operace a jejich aplikace*. Text ke sttn závěrečné zkoušce, 2004.
- [3] Lee, I. K.; Kim, M. S.; Elber, G.: *The Minkowski Sum of 2D Curved Objects*. Proceedings of Israel-Korea Bi-National Conference on New Themes in Computerized Geometrical Modeling, pp. 155-164, Tel-Aviv Univ., 1998.

Margita Vajsáblová

ZOBRAZENIA NA KUŽĽOVÚ PLOCHU POUŽITÉ NA ÚZEMÍ ČR A SR

Abstrakt

Cieľom príspevku je popis geometrických vlastností kužeľových zobrazení používaných na území bývalého Československa, konkrétne Křovákovo a Lambertovo konformného kužeľového zobrazenia, ich porovnanie na území SR a vhodnosť použitia s ohľadom na tvar územia. Objektom analýzy sú tiež loxodrómy, ako krivky s konštantným azimutom a vlastnosti ich obrazu v týchto zobrazeniach.

Kľúčové slová

Kužeľové zobrazenie, zemepisné súradnice, kartografické súradnice, konformné zobrazenie, dĺžkové skreslenie, loxodróma.

1 Poznámky z histórie

Geometrické základy zobrazenia zemského povrchu (referenčnej plochy Zeme) na kužeľovú plochu boli položené gréckym matematikom a kartografom Ptolemaiom (90 – 168 n.l.), ktorého dielo významne ovplyvnilo ďalší vývoj kartografie.

Matematik a geometer Johannes Lambert (1728-1777) je považovaný za zakladateľa kartografie ako vednej disciplíny. Okrem iných zobrazení navrhol kužeľové zobrazenie v normálnej polohe, teda na súosú kužeľovú plochu, ktoré je konformné. Použitie sečnej kužeľovej plochy zabezpečí dve neskreslené rovnobežky a relatívne malé dĺžkové skreslenia medzi nimi.

Na našom území bolo kužeľové zobrazenie používané až po vzniku ČSR, kedy Ministerstvo financií vypísalo požiadavku na nový geodetický súradnicový systém, teda aj na kartografické zobrazenie územia republiky. Boli prijaté dva návrhy. Vojenské zložky prijali systém navrhnutý plukovníkom Dr. Benešom z vojenského zemepisného ústavu, ktorého zobrazenie má rovnaký geometrický princíp ako Lambertovo zobrazenie.

V civilných zložkách je od r. 1937 dodnes Československá jednotná trigonometrická sieť katastrálna zobrazená v dvojito konformnom kužeľovom zobrazení vo všeobecnej polohe s dvoma neskreslenými kartografickými rovnobežkami, ktoré navrhol Ing. Křovák. Územie bývalého Československa malo pozdĺžny tvar v okolí kružnice guľovej plochy, ktorá nie je zemepisnou rovnobežkou, ale tzv. kartografickou.

Křovák zostrojil kartografické rovnobežky ohraničujúce územie Československa, s amplitúdou rovnobežkového pásu $2^{\circ}31' \cong 280 \text{ km}$, ktorá je takmer o stupeň menšia ako amplitúda zemepisných rovnobežiek u Benešovho zobrazenia, teda má aj menšie maximálne dĺžkové skreslenie.

2 Charakteristika kuželových zobrazení

2.1 Všeobecné poznámky

Jednoduché kuželové zobrazenie je zobrazením na kuželovú plochu rozvinutú do roviny, poludníky sa zobrazujú do častí tvoriacich priamok, rovnobežky a póly do rovnobežkových kružníc, v rozvinutí do oblúkov sústredných kružníc so stredom vo vrchole V kuželovej plochy.

Obraz prvkov referenčného rotačného elipsoidu vyjadrujeme v polárnych súradniciach $[\rho, \varepsilon]$ so začiatkom V a pravouhlou súradnicovou sústavou $[x, y]$, kde x je totožná s priamkou, na ktorej leží obraz tzv. základného poludníka a y sa dotýka obrazu tzv. základnej rovnobežky s polomerom ρ_0 . Obrazy poludníkov so zemepisnou šírkou λ zvierajú so základným poludníkom uhol $\varepsilon = n\lambda$, kde $n \in \langle 0, 1 \rangle$ a rovná sa sínusu uhla tvoriacich priamok kuželovej plochy s jej osou, čo vyplýva z výpočtu uhla rozvinutia kuželovej plochy. Polomery ρ obrazov rovnobežkových kružníc sú funkciou ich zemepisnej šírky φ .

Konštanty kuželového zobrazenia n a ρ_0 sú určované z požiadaviek skreslení a z geometrického hľadiska zo vzájomnej polohy referenčnej plochy a kuželovej plochy. Pri požiadavke, aby bola neskreslená jedna rovnobežka, je kuželová plocha dotyková, pri požiadavke na dve neskreslené rovnobežky sa volí sečná kuželová plocha.

2.2 Lambertovo konformné kuželové zobrazenie

Pri konformných zobrazeniach, kedy sa neskresľujú uhly, dĺžkové skreslenie v bode nie je závislé od smeru. Z rovnakého skreslenia rovnobežiek a poludníkov sú potom odvodené zobrazovacie rovnice Lambertovho kuželového zobrazenia, ako je uvedené v [Srška, 1986]. V konformných kuželových zobrazeniach sa pól zobrazuje do bodu, opačný pól sa zobrazuje do kružnice s nekonečne veľkým polomerom.

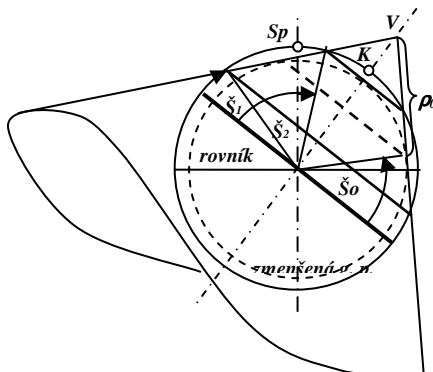
2.3 Křovákovo zobrazenie

Transformáciu bodov Besselovho referenčného rotačného elipsoidu do roviny je v Křovákovom zobrazení možné rozdeliť do štyroch základných

krokov. Zobrazovacie rovnice a hodnoty parametrov všetkých krokov sú uvedené v [Daniš –Val’ko, 1980, Hojovec, 1987, Srnka, 1986]. Popíšeme stručne geometrický princíp jednotlivých krokov. V prvom kroku transformácie je Besselov elipsoid zobrazený Gaussovým konformným zobrazením na guľovú plochu (tzv. Gaussovu).

Vzhľadom na všeobecnú polohu Křovákovo je druhým krokom otočenie zemepisnej sférickej súradnicovej sústavy, čím sa zemepisný pól P_S zobrazí do tzv. kartografického pólu K_P .

Treťou fázou Křovákovo zobrazenia je výpočet polárnych súradníc v rovine rozvinutej kužeľovej plochy z kartografických súradníc, a to konformne vo všeobecnej polohe, teda os kužeľovej plochy pretína guľovú plochu v kartografickom póle (obr. 1). Pri dotykovej ploche v základnej kartografickej rovnobežke $78^{\circ}30'$ dosiahol Křovák na krajných rovnobežkách skreslenie $+24 \text{ cm/km}$. Voľbou kužeľovej plochy, ktorá sa dotýka zmenšenej guľovej plochy (polomer vynásobený koeficientom 0,9999) zmenšil skreslenie na 14 cm/km . Dôvodom je, že z geometrického hľadiska kužeľová plocha pretína referenčnú guľovú plochu v dvoch kartografických rovnobežkách, a tým sa lepšie primyká k rovnobežkovému pásu ohraničujúcemu naše územie.



Obrázok 1: Vzájomná poloha guľovej a kužeľovej plochy v Křovákovo zobrazení

Záverečným krokom je transformácia polárnych súradníc zobrazených bodov do pravouhlých rovinných súradníc x, y . Územie bývalého Československa leží v jednom kvadrante vzhľadom na súradnicové osi. Obrazom zemepisnej siete v Křovákovo zobrazení sú krivky vyššieho rádu, avšak na našom území je prakticky možné zobrazovať aj zemepisné poludníky ako zväzok priamok a rovnobežky ako sústredné kružnice.

3 Použitie kuželových zobrazení

V súčasnosti sú v Křovákovom zobrazení základné mapy veľkých a stredných mierok a všetky tematické mapy z nich odvodené na území bývalého Československa.

Lambertovo konformné kuželové zobrazenie je používané na niektorých účelových mapách, napr. na leteckých. Podľa medzinárodných smerníc AIP sú pre letové mapy predpísané dve zobrazenia, a to Mercatorovo valcové zobrazenie v rovníkovej polohe a Lambertovo kuželové zobrazenie [Kubasák, 2005]. Pre leteckú mapu SR boli zvolené neskreslené rovnobežky $48^{\circ}00'$ a $49^{\circ}20'$, použitý je trojosí elipsoid WGS-84.

Konformné kuželové zobrazenie Lambertovo v normálnej polohe je používané aj v štátnych mapových dielach niektorých európskych štátoch a v 60% štátov USA. Vo Francúzsku je používaný Clarkov elipsoid, územie Francúzska je rozdelené na 3 rovnobežkové pásy a Korziku. Mapové dielo Belgicka je tiež v konformnom kuželovom zobrazení Lambertovom, v pólovej polohe s 2 neskreslenými rovnobežkami. Celé územie Belgicka je zobrazené z Hayfordovho elipsoidu na jednu kuželovú plochu.

4 Analýza kuželových zobrazení na území SR

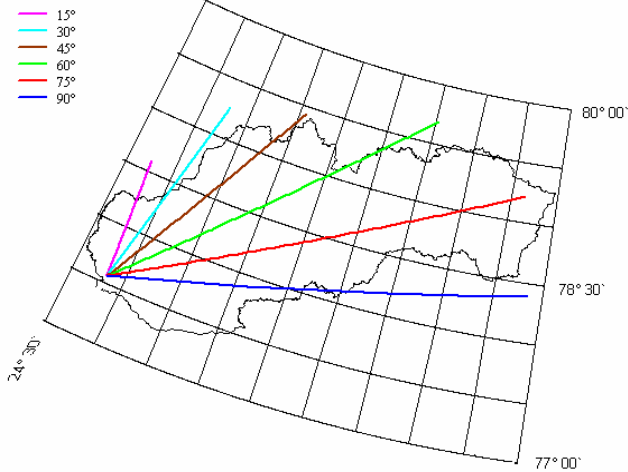
Táto kapitola článku je venovaná analýze Křovákovho a Lambertovho kuželového zobrazenia územia Slovenska, tiež vlastnostiam obrazu loxodrómu, ako kriviek s konštantným azimutom.

Na obr. 2 sú v Křovákovom zobrazení obrazy štátne hranice SR a loxodrómy vychádzajúce z Bratislavy pod rôznymi azimutmi uvedenými v legende, a to na intervaloch kartografickej šírky a dĺžky pre územie Slovenska. Na obr. 3 je obraz zemepisnej siete a rovnaká sieť loxodrómu v Lambertovom konformnom kuželovom zobrazení s neskreslenou rovnobežkou $U_0 = 48^{\circ}30'$. Vzhľadom na konformnosť oboch popísaných zobrazení pre obraz loxodrómu platí, že sú to krivky, ktorých azimut je neskreslený. V Lambertovom zobrazení je to krivka zvierajúca konštantný uhol so zemepisnými poludníkmi, teda so zväzkom priamok. V Křovákovom kuželovom zobrazení je obrazom loxodrómy krivka zvierajúca konštantný uhol s krivkami, ktoré sú obrazom zemepisných poludníkov. So zväzkom priamok, ktoré sú obrazom kartografických poludníkov, nezvíera obraz loxodrómy konštantné uhly.

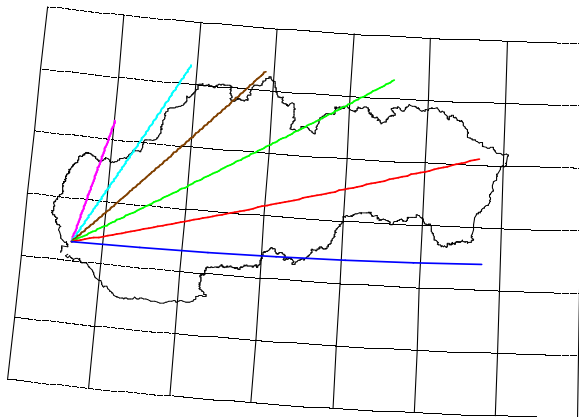
Křovákovo a Lambertovo zobrazenie zachováva uhly, preto sme analyzovali skreslenia azimutu loxodrómu na území Slovenska v Ptolemaiovom ekvidištančnom zobrazení (zachováva dĺžku poludníkov). Graf týchto skreslení je znázornený na obr. 4. Loxodrómy prechádzajúce bodom $P [48^{\circ}45', 19^{\circ}]$ majú rôzny rozsah zemepisnej dĺžky na našom

ZOBRAZENIA NA KUŽEĽOVÚ PLOCHU POUŽITÉ NA ÚZEMÍ ...

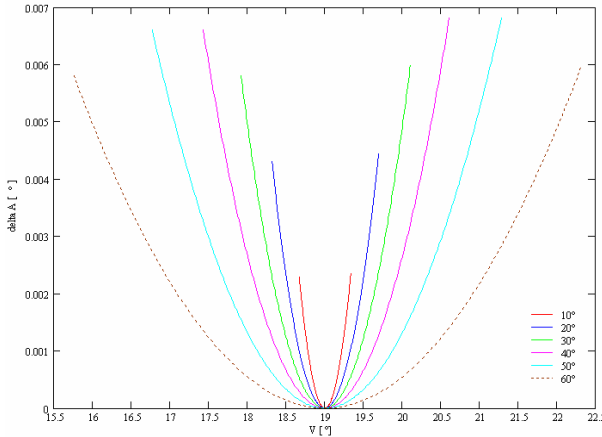
území, a to v závislosti od veľkosti azimutu. Z analýzy skreslenia loxodrómy v Ptolemaiovom ekvidištanchom zobrazení pre územie Slovenska možno dospieť k záveru, že najmenšie maximálne skreslenia dosahujú azimuty loxodrómy s malou hodnotou azimutu (konkrétne skreslenie pre azimut 10° je $7,92''$), najväčšie loxodrómy s azimutom $40^\circ - 50^\circ$ (konkrétne skreslenie pre azimut 40° je takmer $24,48''$).



Obrázok 2: Obráz kartografickej siete a loxodróm s počiatkom v Bratislave s uvedenými azimutmi v Křovákovom zobrazení



Obrázok 3: Obráz kartografickej siete a loxodróm s počiatkom v Bratislave s uvedenými azimutmi v Lambertovom zobrazení



Obrázok 4: Graf skreslení azimutu loxodróm na území SR v Ptolemaiovom ekvidištancnom kuželovom zobrazení v závislosti od zemepisnej dĺžky

5 Záver

Amplitúda kartografických rovnobežiek Křovákovo zobrazenia na území Slovenska je približne $2^{\circ} 20'$ a amplitúda zemepisných rovnobežiek na území Slovenska je približne $1^{\circ} 52'$. Z toho vyplýva, že aj maximálne dĺžkové skreslenie je v Lambertovom kuželovom zobrazení v normálnej polohe menšie, ako v Křovákovom. Záverom možno konštatovať, že vzhľadom na tvar územia je použitie konformného kuželového zobrazenia v normálnej polohe vyhovujúce nielen pre účelové a tematické mapy, ale aj pre mapy veľkých a stredných mierok štátneho mapového diela SR.

Pod'akovanie

Tento článok vznikol za podpory grantovej výskumnej úlohy VEGA č. 1/1034/04..

Literatúra

- [1] Daniš, M., Vaľko, J.: *Matematická kartografia, praktická časť, tabuľky, nomogramy*, Edičné stredisko SVŠT, Bratislava, 1980.
- [2] Hojovec, V. a kol.: *Kartografie*, GKP, Praha, 1987.
- [3] Kubasák, T.: *Uhlové skreslenia loxodrómy v kuželových zobrazeniach*, Diplomová práca, SvF STU, Bratislava, 2005.
- [4] Srnka, E.: *Matematická kartografie*, VAAZ, Brno, 1986.

Jiří Vaníček

POČÍTAČ JAKO NOSITEL ZMĚN VE ŠKOLSKÉM GEOMETRICKÉM KURIKULU

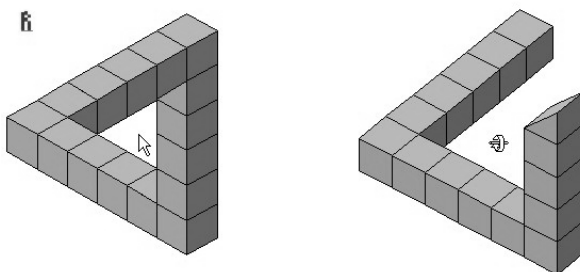
Abstrakt

Článek se zabývá aktuální situací a problémům spojeným se zaváděním počítače jako běžné pomůcky pro výuku geometrie na českých základních a středních školách. Představuje některé nové typy úloh a výukových aktivit, které počítač přinesl do školské geometrie. Shrnuje dosavadní výsledky procesu zavádění výpočetní techniky do výuky, kterého byl autor přítomen, včetně školení učitelů v rámci ministerského programu Informační gramotnost SIPVZ a pokouší se ukázat další směr k realizaci tohoto cíle.

Klíčová slova

Vyučování, počítačem podporovaná výuka geometrie, SIPVZ, Informační gramotnost, modul P-MAT

1 Úvod



Obrázek 1: Populární příklad nemožného tělesa, jeho interaktivní počítačová simulace. Zdroj [1]

1.1 Výuka na VŠ vyžaduje předem připravené studenty

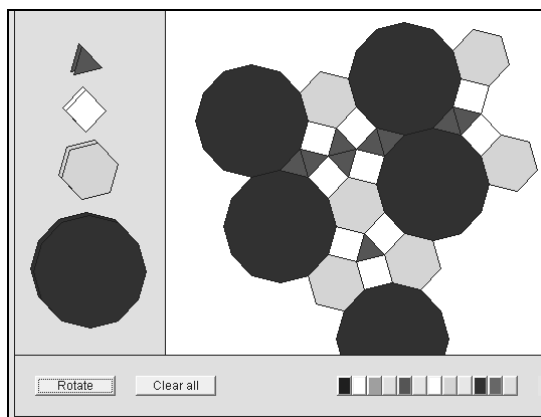
Jestliže můžeme čas od času slyšet nářky nad stavem, rozsahem a pojetím školské geometrie na středních a základních školách, jež se často omezuje na zvládnutí vzorců, výpočetních postupů a techniky rýsování, pak konstatujeme, že oblast využití počítače pro podporu výuky geometrie je ještě daleko více zanedbaná. Přitom stejně, jako očekává vysoká škola

technického směru od svého studenta určitou úroveň geometrických schopností a staví na ní, mohla by očekávat jistou úroveň použití počítače jako učební pomůcky pro učení se geometrii či počítačové grafice. Stejně tak jako vysoké školy, existuje řada profesí, pro jejichž finální profesní přípravu by obecný základ z oblasti počítačem podporované výuky geometrie daný obecným školstvím byl velkým přínosem.

Nejde zde totiž pouze o mechanické zvládnutí ovládání těchto programů, stejně jako v tradiční geometrii nejde o bezchybné a přesné rýsování. Chápeme-li geometrii jako tu součást matematiky, která rozvíjí představy o prostoru a tvarech, má zde právě vizuální představa, možnost nahlédnout na situaci z různých stran, za různých vstupních podmínek, při změně zadání úlohy velký didaktický přínos.

Počítačové modely těles, konstrukcí apod. nemohou vždy nahradit modely reálné, trojrozměrné. Zase obrácené platí, že tyto modely nemohou vždy demonstrovat pohyb a dynamiku nebo „nemožná“ tělesa a situace, která podněcují fantazii a zájem dětí. Obojí tedy mají svůj přínos pro rozvoj geometrického myšlení.

Frontální práce u počítače pochopitelně přináší obecné pedagogické a psychologické výhody, jako je bezprostřední zpětná vazba, diskrétnost této zpětné vazby, změna role učitele v poradce, orientace výuky na žáka (učitel není centrem výuky, k němuž se vše upíná), vizualizace problematiky a individualizace výuky (učitel je k dispozici žákům, kteří aktuálně potřebují pomoc nebo konzultaci). Neměli bychom zapomenout ani na obecně motivační funkci samotného počítače pro žáky a studenty.



Obrázek 2: Experimentální prostředí pro vyplňování roviny pravidelnými mnohoúhelníky. Zdroj [1]

2 Počítačové geometrické úlohy

Prostředí dynamické geometrie jako základní typ matematického výukového software nepřináší zdaleka pouze rychlé a přesné rýsování nebo přehledné znázorňování geometrických situací pro řešení klasických geometrických úloh, řešitelných pomocí kružítka a pravítka na papíře (pak by patrně nasazení počítače ve výuce neobstálo před otázkami vysokých nákladů na pořízení takové pomůcky a s tím spojené efektivity výuky). Tento software umožňuje zabývat se i jinými úlohami a především jinými výukovými postupy:

- manipulací s hotovou geometrickou konstrukcí diskutovat řešení úlohy
- manipulací s interaktivním geometrickým modelem objevovat geometrické zákonitosti (tzv. znovuobjevení některé poučky má daleko hlubší pedagogický efekt než pouhé její sdělení)
- ověřovat hypotézy pomocí geometrických modelů
- možnost experimentovat

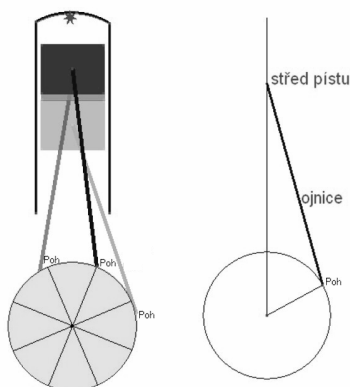
Některé typy geometrických úloh umocní svůj efekt, jsou-li zasazeny do počítačového prostředí a mohou se stát řádnou součástí výuky. Mezi netradiční úlohy lze řadit

- úlohy s dynamikou (pohyb nějakého objektu má podstatný vliv na vzhled do situace nebo na objev řešení úlohy)
- množiny objektů dané vlastnosti (mají blízko k úlohám s dynamikou) [7]
- modelování algebr. operací a vztahů (např. výrazů s proměnnou) [4]
- geometrické modelování mechanických zařízení [6]

Komentář k obrázku vpravo:

Základní úloha dynamické geometrie, velmi snadno převoditelná na úlohu o množinách bodů (cílem je najít bod reprezentující střed pístu; ten bude mít správné „chování“ tehdy, když délka ojnice bude neměnná).

Objev středu pístu jako průsečíku svislé polopřímky a kružnice pevného poloměru se středem v bodě *Poh* (na obrázku nenakreslené) se podle provedených pozorování podaří menší části posluchačů kurzů z řad učitelů matematiky. Zdroj [3]



Obrázek 3: Geometrický model pohybujícího se pístu ve spalovacím motoru, provedený v Cabri (viz komentář vlevo).

Vzhledem k nasazení počítače do výuky dojde ke změně školského kurikula, a to tím intenzivněji, čím více bude školská matematika vnímána jako hledání vzorových schémat, matematizace reálných situací a interpretace matematických modelů v reálném světě [5]. Některá témata výuky geometrie mohou být díky použití počítače redukována, jiná naopak vzniknou (např. dynamická geometrie).

Některá témata mohou být přesunuta do nižších ročníků. Například seznámení se s kuželosečkami a studium jejich chování lze realizovat podstatně dříve, než žáci získají potřebný matematický aparát k výpočtům (podobně jako je tomu dnes u základních geometrických útvarů).

3 Příprava učitelů na použití počítače ve výuce geometrie

I učitel, který nikdy nepoužil počítač, by měl znát, co počítače dosáhnou a jaké existují možnosti nasazení počítače ve výuce mimo jiné proto, aby změnil svůj pohled na smysl výuky geometrie a uzpůsobil tomu svoji výuku. Pro ilustraci, ono je velice těžké lpět např. na drilovém pamětném počítání v době všeobecné dosažitelnosti kalkulátorů, který drtivá většina lidí nosí při sobě; i když význam pro trénování paměti a používání algoritmů zde jistě najdeme, ztrácí se smysluplnost takového počínání v očích dítěte a škola se ocitá mimo kontakt s běžným životem.

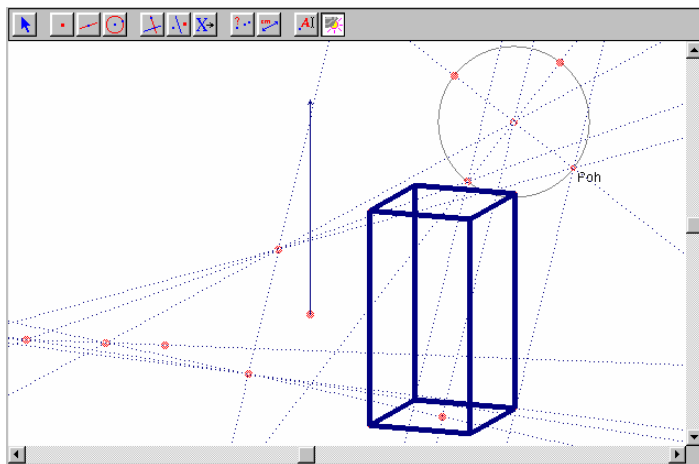
Na druhou stranu pro učitele není snadné zvládnout přechod na nový styl výuky, neboť organizace vyučování a role učitele je velice odlišná od běžné praxe klasické výuky geometrie v běžné učebně.

Fakt, že základní bolestí jakýchkoliv změn ve školství je tendence většiny učitelů k zakonzervování daného stavu, vedl k poznání, že proces zavádění počítačů do výuky geometrie na školách se nemůže obejít bez masivní a ministerstvem podporované přípravy učitelů matematiky na školách.

3.1 Příprava

Na konci minulého desetiletí probíhal na vysokých školách základní výzkum problematiky, což lze dokumentovat prvními vypisovanými granty, pedagogickými články v odborném tisku na toto téma, provedením české lokalizace didaktického software, zahrnutí počítačem podporované výuky do didaktické složky přípravy budoucích učitelů matematiky na některých pedagogických fakultách, jakož i realizovaná školení ovládnání některých výukových programů (např. v rámci Teachers Training with Technology) a izolované pokusy o výuku na jednotlivých školách. Tyto aktivity se

prakticky nedotkly základního a středního školství, protože školení se účastnila malá menšina většinou aktivních učitelů. ale řekněme vybavila výzkumné skupiny vizí a připravila půdu pro následnou penetraci do škol.



Obrázek 4: Otočný kvádr jako dynamická úloha na osovou afinitu. Otočných modelů těles lze na Internetu snadno najít, v Cabri si je student může vytvořit sám. Zdroj [2]

3.2 Školení učitelů

Od roku 2002 začalo MŠMT realizovat v rámci Státní informační politiky ve vzdělávání program Informační gramotnost, zaměřený na masové proškolení učitelů v ovládnutí výpočetní techniky, v jehož důsledku by se učitelé dozvěděli, jak používat počítače v jednotlivých předmětech. Ve chvíli, kdy vznikl požadavek ministerstva na vysoké školy, aby programově a náplní zabezpečily takový systém školení pro učitele matematiky, bylo připraveno dostatek výukových a metodických materiálů a byl dostatek zkušeností s realizací takové výuky.

Spoluprací vysokých škol připravujících budoucí učitele vznikl v roce 2003 školicí modul „ICT ve výuce matematiky“, jehož významnou a co do objemu dominující součástí je část geometrická, realizovaná na software dynamické geometrie (např. Cabri, umožňující rychlé a přesné rýsování) a mikrosvětů (např. Logo, umožňující trénink vytváření geometrických obrazců pomocí slovních příkazů). [8]

Tým garanta, kterým je Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity, si dal za úkol připravit školení, které i když je součástí státní informační

politiky a má zvyšovat především informační gramotnost, by bylo více orientováno na matematiku a její výuku a méně na samotné ovládní počítačových aplikací. Protože jde o objemem o nepříliš rozsáhlé školení, pracující převážně s učiteli, kteří nejsou v práci s výpočetní technikou sběhlí, si neklade za cíl naučit učitele učit pomocí počítače. Je to spíše základní školení, které ukáže možnosti, nabídne určitý způsob práce a poskytne první praktické zkušenosti. Na tento kurz mohou navazovat školení konkrétních aplikací, která lze provádět v rámci DVU.

Byl vytvořen obsah školení, napsány výukové a metodické materiály, byla vytvořena síť školících středisek po celé ČR a byli kvalitně proškoleni lektori, kteří provádějí školení. Pro podporu školení byl vybudován webový portál P-MAT [2], zahrnující též portál pro výuku geometrie pomocí Cabri [3], který obsahuje kromě informací o školení a učebních materiálů online podporu a e-mailovou konferenci pro podporu výuky pomocí počítače.

3.3 Současný stav

V současné době tedy probíhají základní 30hodinová školení učitelů na různých místech republiky a předpokládáme, že do konce příštího roku, kdy projekt končí, bude značná část učitelů matematiky proškolená o používání počítače ve výuce. protože školy mají na tento typ školení zvlášť vyčleněny finance, množství finálního počtu proškolených učitelů závisí na jejich zájmu (učitelé si mohou vybírat např. mezi školením matematickým a školením o použití digitálních fotoaparátů) a také na chování vedení každé školy.

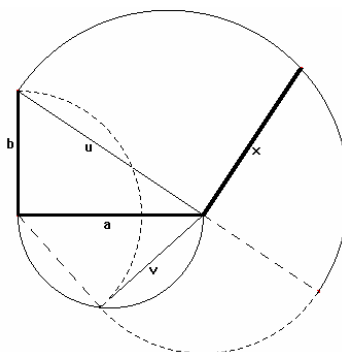
Více informací o přesném obsahu školení, možnostech proškolení, možnosti stát se lektorem modulu najdou zájemci na webových stránkách portálu [2].

Komentář k obrázku vpravo:

Substitucí $u = \sqrt{a^2 + b^2}$, $v = \sqrt{a^2 - b^2}$ převedeme úlohu na $x = \sqrt{uv}$, tedy na „dvě Pythagorovy věty a jednu Eukleidovu“.

Podobné úlohy: jsou dány dvě úsečky délek a , b . Sestroj úsečku délky a, b , aritmetického průměru a , b , harmonického průměru a , b ...

Zdroj [4]



Obrázek 5: Geometrizační výrazu

$x = \sqrt[4]{a^4 - b^4}$, pohyblivý model v Cabri. (viz komentář vlevo).

4 Až skončí školení ...

4.1 Software

V školeních P-MAT se opakovaně stává, že někteří učitelé, kteří končí kurz, odchází trochu rozladěni, protože nadšeni novými možnostmi by chtěli ihned začít ve škole zkoušet používat např. program Cabri, ovšem software na školách nemají a musí jej koupit, tedy vyčlenit na něj finance z rozpočtu školy. Ministerstvo přispívá školám do rozpočtu na nákup výukového software, ovšem učitelé matematiky se vesměs před školením o výukový software nezajímali. Bohužel státní politika, patrně v obavách z korupce při přijímání státních zakázek, upustila od nákupu multilicencí, nelze tedy školám centrálně pomoci. Učitel často musí sám sehnat peníze a sám realizovat nákup, což jej může demotivovat. Můžeme závidět situaci slovenským učitelům, kteří mají multilicence na všechny čtyři základní typy software, používané v našich kurzech, zakoupené ministerstvem školství a k dispozici zdarma pro školní použití (na druhou stranu nemají proškolené učitele, takže nakoupený software někde zahálí).

4.2 Učebnice

Jsmo přesvědčeni, že pokud se aktivity spojené s využitím počítače neobjeví v učebnicích matematiky, bude výuka s počítačem chápána jako něco nadstandardního, a bude realizována opět pouze učiteli – nadšenci. Hlavním úkolem současné doby je tedy vytvoření učebnice.

V současné době patrně půjde o učebnici, která bude doplňovat klasickou výuku geometrie. Měla by:

- obsahovat aktivity, úlohy vhodné pro vybrané pasáže geometrie na ZŠ a SŠ
- obsahovat také témata, která nejsou tradiční, a aktivity, které jsou nově počítačem umožněny
- být sama o sobě interaktivní (část materiálů ve webové formě, bez nutného použití aplikace)
- poskytovat zadání úloh ve formě souborů, lehce kopírovatelných a spustitelných v dané aplikaci
- opustit představu „učebnice vysvětluje, co které tlačítko umí“ – tím by se dostala na úroveň uživatelské příručky a opakovala by stejnou chybu, které se před 5-10 lety dopouštěly učebnice informatiky.

Při tvorbě takové učebnice patrně nebude stačit pouhé „objevování“, co ze současného geometrického kurikula lze „nasadit“ na výuku s počítačem,

tedy které úlohy klasické geometrie tužky a kružítko lze převést do počítače. Nevíme přitom, zda již máme dostatek zkušeností, abychom mohli nabídnout učitelům nové druhy aktivit v konkrétních úlohách, rozvíjejících žáka. Zde nelze než spoléhat na zkušenosti učitelů ze škol, kteří nové postupy vyzkouší.

Teprve se zkušenostmi z používání takovéto učebnice a z realizace jejího kurikula bude možné nabídnout přebudování tradiční výuky geometrie, v jejíž části bude počítač běžně používán jako užitečný pracovní nástroj. Teprve poté bude moci vytvářet komplexní učebnice geometrie a zohledňovat nové trendy, které počítač jako kognitivní technologie do výuky přinese.

Název příspěvku přeneste do záhlaví 3. strany dokumentu. Je nutné jej upravit zkrácením, pokud jeho délka přesahuje 1 řádek.

Literatura

- [1] *Wisweb*, webová podpora výuky matematiky, Freudenthalův institut, Univerzita Utrecht, Nizozemí, www.wisweb.nl, září 2005
- [2] *P-MAT*, internetový portál modulu „ICT ve výuce matematiky“ projektu Informační gramotnost SIPVZ, Jihočeská univerzita, www.pf.jcu.cz/p-mat, září 2005
- [3] *Cabri-web*, portál pro podporu výuky geometrie pomocí počítače, Jihočeská univerzita, www.pf.jcu.cz/cabri, září 2005
- [4] Vaníček, J.: *Počítačem podporovaná výuka geometrie*, doktorská disertační práce, Praha: Univerzita Karlova, 2002.
- [5] Kutzler, B.: *The algebraic calculator as a pedagogical tool for teaching mathematics*, In: proceedings of 2nd Mediterranean Conference on Mathematics Education, Nicosia, 2000
- [6] Laborde, C.: *Geometry as a modelling tool for simple mechanisms*, In: Geometry for the world, Texas Instruments Incorporated 1996
- [7] Vrba, A.: *Oživlá geometrie*. Matematika - fyzika - informatika, Vol. 10 No. 3,4, 2000
- [8] Vaníček, J.: *The module P-MAT: how to teach math using computer*, In: Proceedings of Information and Communication Technology in Education '04, Rožnov pod Radhoštěm, 2004

Jana Vecková

PLOCHA SE ČTVERCOVÝM PŮDORYSEM URČENÁ HRANIČNÍ KŘIVKOU

Abstrakt

Práce představuje algoritmus pro vyplnění zadaného křivočarého čtyřúhelníku nad obdélníkem plochou. Plocha je reprezentována polygonem ze dvou sítí lomených čar, konstruovaným s podmínkou, aby hraniční lomené čáry interpolovaly zadanou hranici.

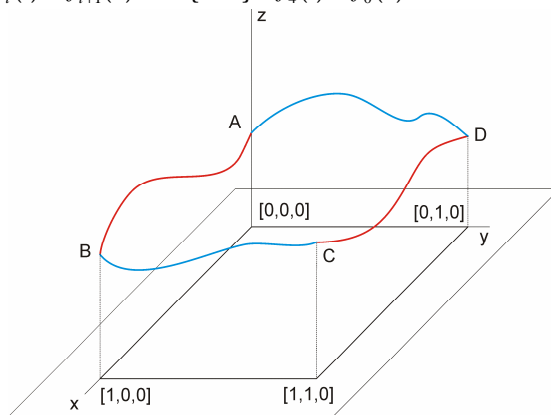
Klíčová slova

Hraniční křivka, plocha.

1 Výchozí zadání problému

Existuje celá řada postupů, která řeší zadaný problém, viz [2]. Naší snahou bude najít efektivní, rychlý algoritmus, který bude vytvářet plochu se zadaným krajem, plocha nebude vázána žádnými dodatečnými podmínkami, např. podmínkami na zadaném kraji. Budeme vytvářet interpolační polygon daný sítí bodů a jejich vhodných spojnic.

Předpokládáme, že hranice je tvořena čtyřmi hladkými rovinnými křivkami $f_i(t)$, $i \in \{1,2,3,4\}$, $t \in \langle 0,1 \rangle$. Její pravouhlý průmět do roviny xy je hranice jednotkového čtverce, Obrázek 1. Dohromady tvoří uzavřenou křivku, tj. $f_i(1) = f_{i+1}(0)$, $i \in \{1,2,3\}$, $f_4(1) = f_0(0)$.



Obrázek 1: Zadání úlohy

2 Algoritmus navrhovaného řešení

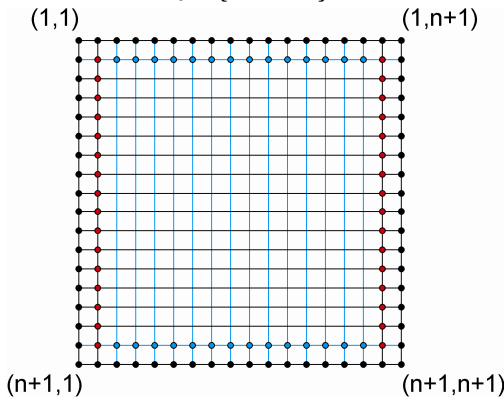
Nejprve rozdělíme každou stranu půdorysu hranice na n stejných dílů. Čtverec je rozdělen pravidelnou mřížkou. Body dělení vytvoří na hraničních křivkách vepsané lomené čáry. z -ové souřadnice vrcholů lomených čar označíme m_{ij} , můžeme je zapsat do matice $M = (m_{ij})$ typu $(n+1, n+1)$, obrázek 2. V prvním kroku algoritmu vypočteme z -ové souřadnice v bodech čtverce mřížky, který je nejbližší zadané hranici. Použijeme vzorce:

$$m_{i,2} = \left[\frac{m_{i,n+1} + (n-1)m_{i,1}}{n} + \frac{(i-1)m_{n+1,2} + (n-i+1)m_{1,2}}{n} \right] / 2, \quad i \in \{2, \dots, n\},$$

$$m_{i,n} = \left[\frac{(n-1)m_{i,n+1} + m_{i,1}}{n} + \frac{(i-1)m_{n+1,n} + (n-i+1)m_{1,n}}{n} \right] / 2, \quad i \in \{2, \dots, n\},$$

$$m_{2,j} = \left[\frac{m_{n+1,j} + (n-1)m_{1,j}}{n} + \frac{(j-1)m_{2,n+1} + (n-j+1)m_{2,1}}{n} \right] / 2, \\ j \in \{3, \dots, n-1\},$$

$$m_{n,j} = \left[\frac{(n-1)m_{n+1,j} + m_{1,j}}{n} + \frac{(j-1)m_{2,n+1} + (n-j+1)m_{2,1}}{n} \right] / 2, \\ j \in \{3, \dots, n-1\}.$$

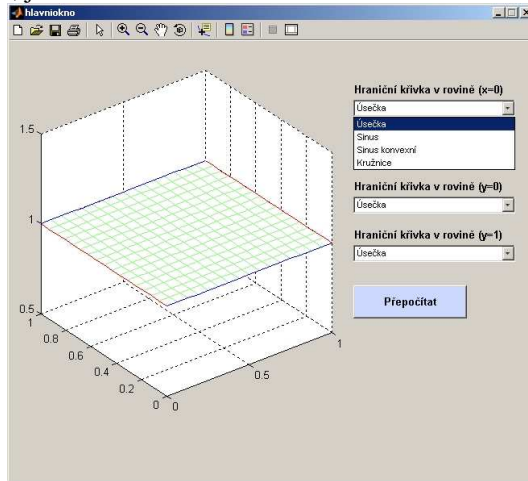


Obrázek 2: Výpočet bodů matice

Další kroky jsou analogické. Algoritmus můžeme zobecnit na případ, kdy půdorysem hranice je obdélník.

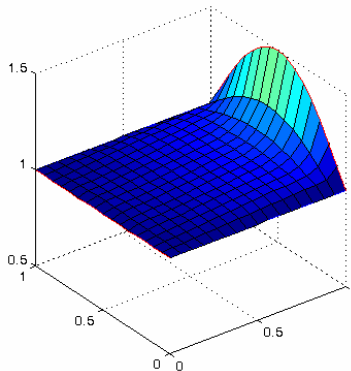
3 Příklady

Pro demonstraci jsme vybrali software Matlab, kde je možné vytvořit pro modelování jistým způsobem přátelské prostředí, obrázek 3. Pro jednoduchost vybíráme jako hraniční křivky úsečky a vhodné oblouky sinusoidy. V obrázku 3 vidíme, že triviálním případem, kdy hranicí jsou strany čtverec, je rovina.

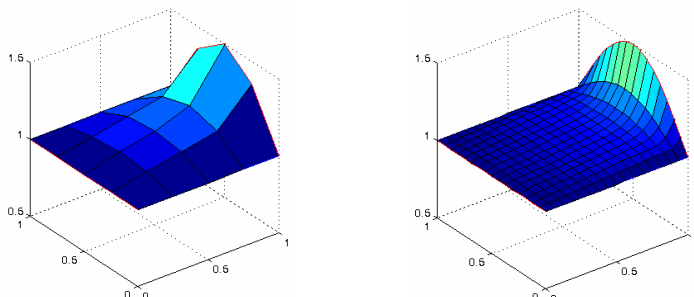


Obrázek 3: Ukázka menu v MATLABu

Obrázek 4 ukazuje případ, kdy jednou z hraničních křivek je sinusoida, zbývající čtyři jsou úsečky. Zjemňující se dělení mění tvar plochy, obrázek 5. Plocha se stále více přimyká k hraničním křivkám a “uprostřed” obdélníku se zplošťuje.

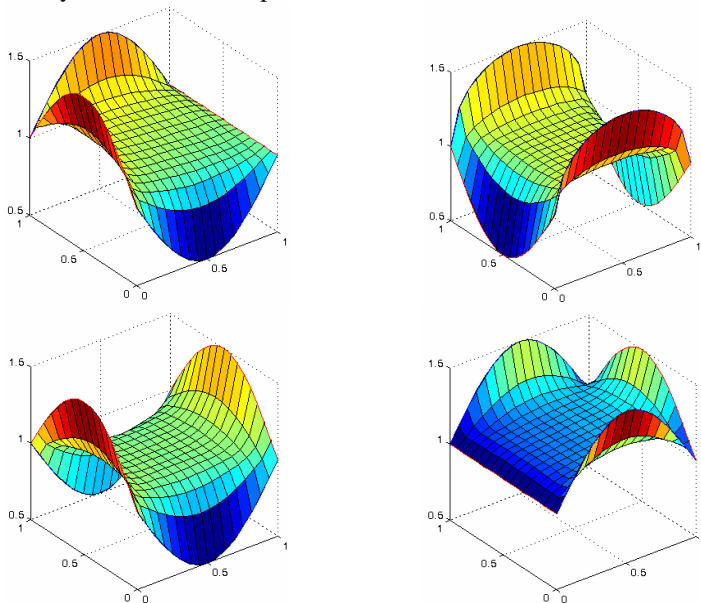


Obrázek 4: Hranice přímého sinového konoidu



Obrázek 5: Porovnání tvarů ploch při zjemnění

Ukázky několika dalších příkladů vidíme na obrázku 6.



Obrázek 6: Jiné příklady plochy

Literatura:

- [1] J. Vecková: *Plocha se čtvercovým půdorysem určená hraničními křivkami*, Sborník 13. studentské konference v Černicích, 2005.
- [2] D. Marsh: *Applied Geometry for Computer Graphics and CAD*, Springer, 1999.

Daniela Velichová

DVOJOSOVÉ ROTAČNÉ PLOCHY II

Abstrakt

Príspevok stručne pojednáva o špeciálnej triede plôch, ktoré možno generovať euklidovskou metrickou transformáciou zloženou z dvoch otáčaní okolo dvoch rôznych osí. Klasifikácia pomocou určitej vzájomnej polohy osí rotácie a typu riadiaceho útvaru umožňuje špecifikovať špeciálne typy dvojsových rotačných plôch.. Uvedené sú príklady špeciálnych typov plôch reprezentujúcich špecifické podtriedy – plochy sférického a Eulerovho typu, ich vektorové rovnice a niektoré vlastnosti. Plochy sú zobrazené v prostredí MAPLE.

Kľúčové slová

Dvojsová rotácia, klasifikácia plôch sférického a Eulerovho typu

1 Úvod

Dvojsová rotačná plocha vznikne dvojsovým rotačným pohybom, určeným maticou $T(v) = (a_{ij}(v))$, pre $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $v \in R$, riadiacej čiary k danej vektorovou rovnicou $r(u) = (x(u), y(u), z(u), 1)$, $u \in R$.

Vektorová rovnica plochy definovaná na oblasti $\Omega \subset R^2$ je súčinom

$$p(u, v) = r(u) \cdot T(v) = \left(\sum_{i=1}^4 x(u)a_{i1}(v), \sum_{i=1}^4 y(u)a_{i2}(v), \sum_{i=1}^4 z(u)a_{i3}(v), 1 \right)$$

Nech ${}^1o, {}^2o$ sú osi dvoch rotácií. Rozlišujeme tri základné typy dvojsových rotačných plôch v závislosti od vzájomnej polohy osí rotácií:

- I. ${}^1o \parallel {}^2o$, plochy cykloidného typu
- II. ${}^1o \times {}^2o$, plochy sférického typu
- III. ${}^1o / {}^2o$, plochy Eulerovho typu.

Podľa typu riadiacej čiary (priamka, kružnica) môžeme rozdeliť plochy do skupín (priamkové, cyklické), ktoré sa dajú ďalej kategorizovať podľa vzájomnej polohy riadiaceho útvaru a osí rotácie. Plochy cykloidného typu sú charakterizované a ďalej klasifikované v [1], predmetom tohto článku sú plochy sférického a Eulerovho typu.

2 Dvojsovové rotačné plochy sférického typu

Dvojsovová rotácia určená rôznobežnými osami $^1o \times ^2o$ je sférickým pohybom. Umiestnime os 1o do súradnicovej osi z , os 2o do súradnicovej osi y . Parametrické rovnice dvojsovej rotačnej plochy sférického typu definovanej na oblasti $\Omega \subset R^2$, ktorej ríadiacou čiarou je krivka daná rovnicou $\mathbf{r}(u) = (x(u), y(u), z(u), 1)$, $u \in R$ sú pre $(u, v) \in \Omega$ v tvare

$$x(u, v) = x(u)\cos^2 2\pi v - y(u)\sin 2\pi v \cos 2\pi v + z(u)\sin 2\pi v$$

$$y(u, v) = x(u)\sin 2\pi v + y(u)\cos 2\pi v$$

$$z(u, v) = -x(u)\sin 2\pi v \cos 2\pi v + y(u)\sin^2 2\pi v + z(u)\cos 2\pi v$$

Špeciálne dvojsovové rotačné plochy sférického typu získame umiestnením ríadiacej priamky k do špeciálnej polohy vzhľadom na osi rotácie.

Skupina IIA2 - Priamkové plochy kónické

Riadiaca priamka k je rôznobežná s oboma osami rotácie. Nech:

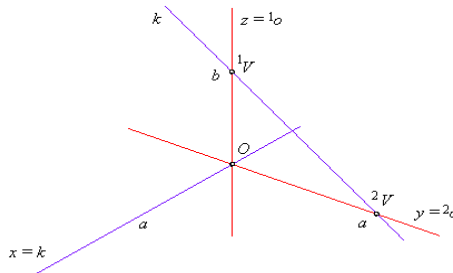
a) k leží v osi x , pretína obe osi v ich spoločnom bode O , plocha neobsahuje kružnice, má tri roviny súmernosti;°

b) k leží v rovine yz

$$k \cap ^1o = ^1V = (0, 0, b, 1)$$

$$k \cap ^2o = ^2V = (0, a, 0, 1)$$

plocha obsahuje jedinú kružnicu, dráhu pohybu bodu 1V a má jedinú rovinu súmernosti.



Parametrické rovnice plôch pre $(u, v) \in [0, 1]^2$ sú

$$x(u, v) = a\cos^2 2\pi v$$

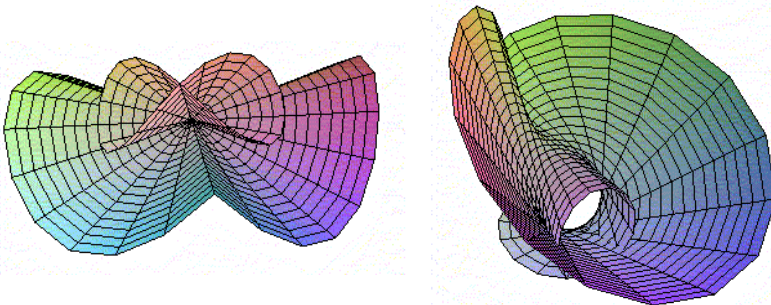
$$x(u, v) = -a\sin 2\pi v \cos 2\pi v + b(1-u)\sin 2\pi v$$

$$y(u, v) = a\sin 2\pi v$$

$$y(u, v) = a\cos 2\pi v$$

$$z(u, v) = -a\sin 2\pi v \cos 2\pi v$$

$$z(u, v) = a\sin^2 2\pi v + b(1-u)\cos 2\pi v$$



Obrázok 1: Dvojsovové rotačné plochy sférického typu -priamkové kónické

Skupina IIA3 – priamkové plochy hyperbolické

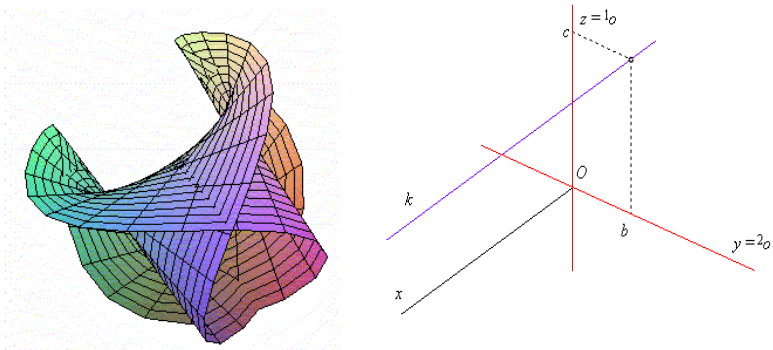
Riadiaca priamka k je mimobežná s oboma osami rotácie, a nech je rovnobežná so súradnicovou osou x .

Parametrické rovnice plôch (obr. 2) pre $(u, v) \in [0, 1]^2$ sú

$$x(u, v) = aucos^2 2\pi v + bsin^2 2\pi v \cos 2\pi v + csin 2\pi v$$

$$y(u, v) = ausin 2\pi v + bcos 2\pi v$$

$$z(u, v) = -ausin^2 2\pi v \cos 2\pi v + bsin^2 2\pi v + ccos 2\pi v$$



Obrázok 2: Dvojosová rotačná plocha sférického typu-priamková hyperbolická

Skupina IIA4 - Priamkové plochy zložené – 1 (obr. 3)

Riadiaca priamka k je rovnobežná s jednou osou rotácie a pretína druhú os.

Nech k leží v rovine v rovine yz a nech:

a) k je rovnobežná s 1o

$$|^1o k| = a,$$

$$k \cap ^2o = ^2V = (0, a, 0, 1)$$

plocha neobsahuje kružnice, má 2 roviny súmernosti;

b) k je rovnobežná s 2o

$$|^2o k| = a,$$

$$k \cap ^1o = ^1V = (0, 0, a, 1)$$

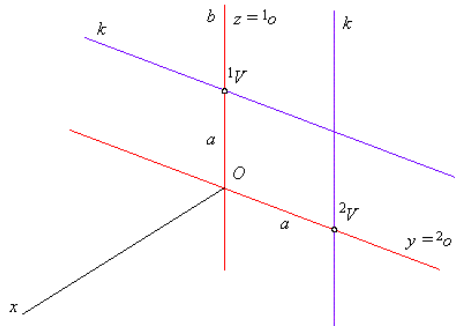
plocha obsahuje jediná kružnicu, dráhu pohybu bodu 1V , má jednu rovinu súmernosti.

k je rovnobežná s 1o , pretína 2o

$$x(u, v) = -asin 2\pi v \cos 2\pi v + bsin 2\pi v$$

$$y(u, v) = acos 2\pi v$$

$$z(u, v) = asin^2 2\pi v + bucos 2\pi v$$

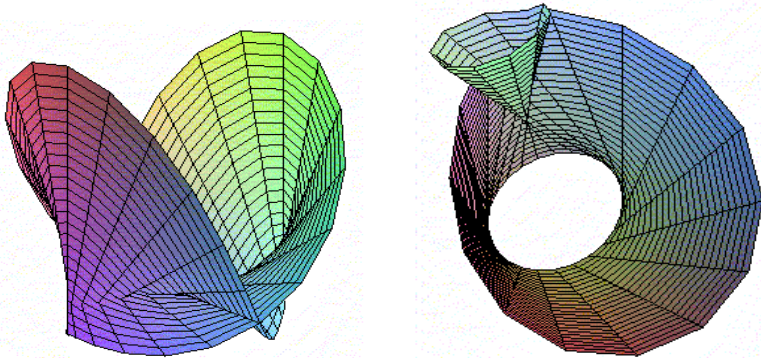


k pretína 1o , je rovnobežná s 2o

$$x(u, v) = -busin 2\pi v \cos 2\pi v + asin 2\pi v$$

$$y(u, v) = bucos 2\pi v$$

$$z(u, v) = busin^2 2\pi v - acos 2\pi v$$



Obrázok 3: Dvojosové rotačné plochy sférického typu -priamkové zložené - 1

Skupina IIA4 - Priamkové plochy zložené – 2 (Obr. 4)

Riadiaca priamka k je rovnobežná s jednou osou rotácie a mimobežná s druhou osou. Nech priamka k pretína os x ,

$$k \cap x = V = (a, 0, 0, 1)$$

a nech:

a) k je rovnobežná s 1o

$$|{}^1o k| = a,$$

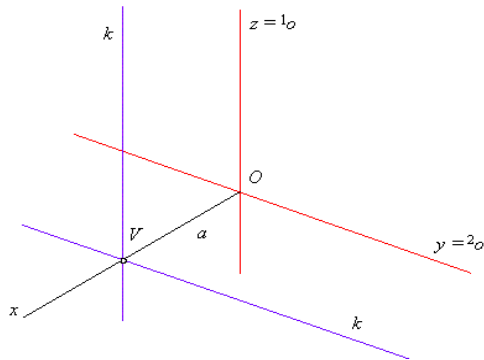
plocha má jedinú rovinu súmernosti;

b) k je rovnobežná s 2o

$$|{}^2o k| = a,$$

plocha má 2 roviny súmernosti.

Plochy neobsahujú žiadnu kružnicu.



k je rovnobežná s 1o , mimobežná s 2o

$$x(u, v) = a \cos^2 2\pi v + b \sin 2\pi v$$

$$y(u, v) = a \sin 2\pi v$$

$$z(u, v) = -a \sin 2\pi v \cos 2\pi v + b \cos 2\pi v$$

k je mimobežná s 1o , rovnobežná s 2o

$$x(u, v) = a \cos^2 2\pi v - b \sin 2\pi v \cos 2\pi v$$

$$y(u, v) = a \sin 2\pi v + b \cos 2\pi v$$

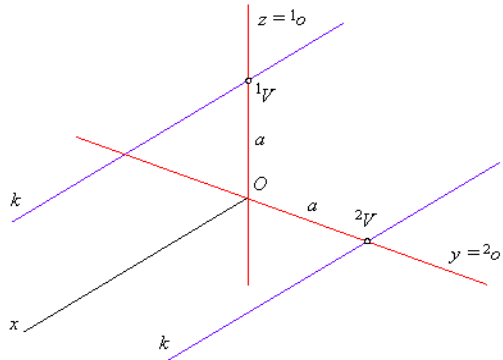
$$z(u, v) = -a \sin 2\pi v \cos 2\pi v + b \sin^2 2\pi v$$

Skupina IIA4 - Priamkové plochy zložené – 3 (Obr. 5)

Riadiaca priamka k je rôznobežná s jednou osou rotácie a mimobežná s druhou osou. Nech je k je rovnobežná s osou x , a nech:

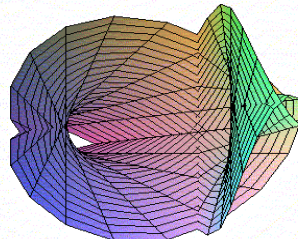
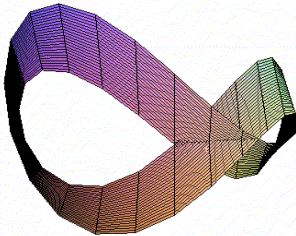
DVOJOSOVÉ ROTAČNÉ PLOCHY II

- a) k je rôznobežná s 1o
 a mimobežná s 2o ,
 $k \cap ^1o = ^1V = (0, 0, a, 1)$
 plocha obsahuje jedinú
 kružnicu, trajektóriu
 pohybu bodu 1V a má
 dve roviny súmernosti;
 b) k je rôznobežná s 2o
 a mimobežná s 1o
 $k \cap ^2o = ^2V = (0, a, 0, 1)$
 plocha neobsahuje
 kružnice, má jedinú
 rovinu súmernosti.

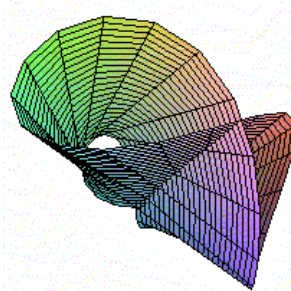
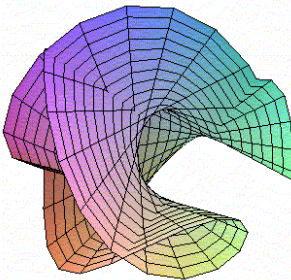


k pretína 1o , je mimobežná s 2o
 $x(u, v) = b \cos^2 2\pi v + a \sin 2\pi v$
 $y(u, v) = b \sin 2\pi v$
 $z(u, v) = -b \sin 2\pi v \cos 2\pi v + a \cos 2\pi v$

k je mimobežná s 1o , pretína 2o
 $x(u, v) = b \cos^2 2\pi v - a \sin 2\pi v \cos 2\pi v$
 $y(u, v) = b \sin 2\pi v + a \cos 2\pi v$
 $z(u, v) = -b \sin 2\pi v \cos 2\pi v + a \sin^2 2\pi v$



Obrázok 4: Dvojsové rotačné plochy sférického typu -priamkové zložené - 2



Obrázok 5: Dvojsové rotačné plochy sférického typu -priamkové zložené - 3

Skupina IB1 - Cyklické plochy toroidálne

Riadiaca kružnica $k(S, r)$ leží v rovine osí otáčania, v súradnicovej rovine yz , pričom jej vektorová rovnica je $\mathbf{r}(u) = (0, a + r\cos 2\pi u, r\sin 2\pi u, 1)$, $u \in [0, 1]$.

Parametrické rovnice plochy (obr. 6a.) na oblasti $[0, 1]^2$ majú tvar

$$x(u, v) = -(a + r\cos 2\pi u)\sin 2\pi v \cos 2\pi v + r\sin 2\pi u \sin 2\pi v$$

$$y(u, v) = (a + r\cos 2\pi u)\cos 2\pi v$$

$$z(u, v) = (a + r\cos 2\pi u)\sin^2 2\pi v + r\sin 2\pi u \cos 2\pi v$$

Skupina IIB2 – Cyklické plochy všeobecné

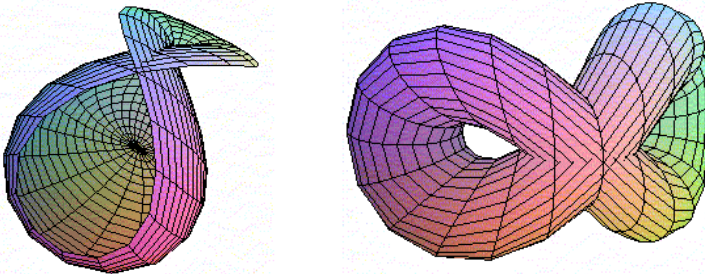
Riadiaca kružnica $k(S, r)$ leží v súradnicovej rovine xy , pričom jej vektorová rovnica je $\mathbf{r}(u) = (a + r\cos 2\pi u, r\sin 2\pi u, 0, 1)$, $u \in [0, 1]$.

Parametrické rovnice plochy (obr. 6b.) na oblasti $[0, 1]^2$ majú tvar

$$x(u, v) = (a + r\cos 2\pi u)\cos^2 2\pi v - r\sin 2\pi u \sin 2\pi v \cos 2\pi v$$

$$y(u, v) = (a + r\cos 2\pi u)\sin 2\pi v + r\sin 2\pi u \cos 2\pi v$$

$$z(u, v) = -(a + r\cos 2\pi u)\sin 2\pi v \cos 2\pi v + r\sin 2\pi u \sin^2 2\pi v$$



Obrázok 6: Cyklická plocha: a) toroidálna b) všeobecná

3 Dvojosové rotačné plochy Eulerovho typu

Dvojosová rotácia určená mimobežnými osami $^1o / ^2o$ je všeobecnou Eulerovou rotáciou. Umiestnime os 1o do súradnicovej osi z , os 2o do priamky rovnobežnej so súradnicovou osou x .

Parametrické rovnice dvojosovej rotačnej plochy Eulerovho typu na oblasti $\Omega \subset R^2$ majú tvar

$$x(u, v) = x(u)\cos 2\pi v - y(u)\sin 2\pi v$$

$$y(u, v) = x(u)\sin 2\pi v \cos 2\pi v + y(u)\cos^2 2\pi v - z(u)\sin 2\pi v + d(1 - \cos 2\pi v)$$

$$z(u, v) = x(u)\sin^2 2\pi v + y(u)\sin 2\pi v \cos 2\pi v + z(u)\cos 2\pi v - d\sin 2\pi v$$

Skupina IIIA2 – Priamkové plochy kónické

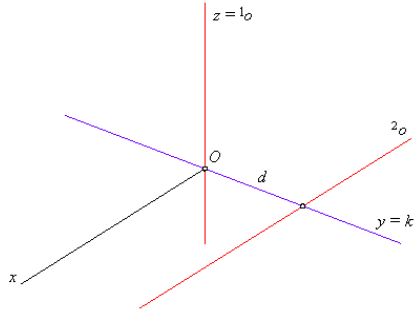
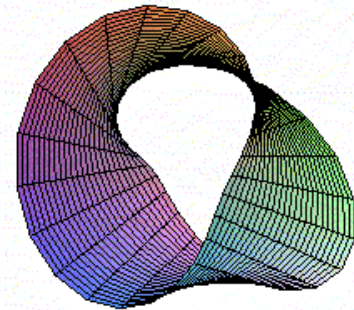
Riadiaca priamka k je rôznobežná s oboma osami rotácie (je priečkou mimobežiek $^1o / ^2o$), nech leží v osi y .

Plocha je typu Möbiovoho listu (obr. 7) a jej parametrické rovnice majú na $[0, 1]^2$ tvar

$$x(u, v) = -a \sin 2\pi v$$

$$y(u, v) = a \cos^2 2\pi v + d(1 - \cos 2\pi v)$$

$$z(u, v) = a \sin 2\pi v \cos 2\pi v - d \sin 2\pi v$$



Obrázok 7: Dvojosová rotačná plocha Eulerovho typu -priamková kónická

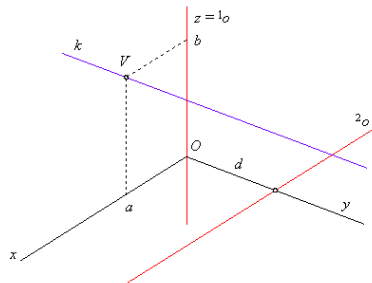
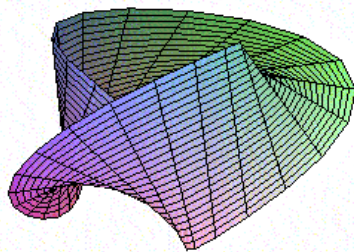
Skupina IIIA3 – priamkové plochy hyperbolické

Riadiaca priamka k je mimobežná s oboma osami rotácie a nech je rovnobežná s osou y . Parametrické rovnice plochy (obr. 8) majú na oblasti $[0, 1]^2$ tvar

$$x(u, v) = a \cos 2\pi v - c \sin 2\pi v$$

$$y(u, v) = a \sin 2\pi v \cos 2\pi v + c \cos^2 2\pi v - b \sin 2\pi v + d(1 - \cos 2\pi v)$$

$$z(u, v) = a \sin^2 2\pi v + c \sin 2\pi v \cos 2\pi v + b \cos 2\pi v - d \sin 2\pi v$$



Obrázok 8: Dvojosová rotačná plocha Eulerovho typu -priamková hyperbolická

Skupina IIIB2 – Cyklické plochy všeobecné

a) Riadiaca kružnica $k(S, r)$ leží v súradnicovej rovine xz , a jej rovica je

$$\mathbf{r}(u) = (a + r \cos 2\pi u, 0, r \sin 2\pi u, 1) \text{ pre } u \in [0, 1].$$

Parametrické rovnice plochy (obr. 9 vľavo) majú na oblasti $[0, 1]^2$ tvar

$$x(u, v) = (a + r \cos 2\pi u) \cos 2\pi v$$

$$y(u, v) = (a + r \cos 2\pi u) \sin 2\pi v \cos 2\pi v - r \sin 2\pi u \sin 2\pi v + d(1 - \cos 2\pi v)$$

$$z(u, v) = (a + r \cos 2\pi u) \sin^2 2\pi v + r \sin 2\pi u \cos 2\pi v - d \sin 2\pi v$$

b) Riadiaca kružnica $k(S, r)$ leží v súradnicovej rovine xy , pričom jej rovnica je $\mathbf{r}(u) = (r \cos 2\pi u, a + r \sin 2\pi u, 0, 1)$ pre $u \in [0, 1]$.

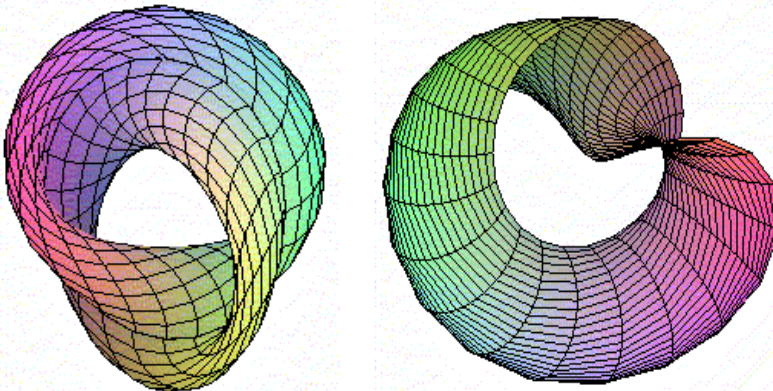
Parametrické rovnice plochy (obr. 9 vpravo) majú na oblasti $[0, 1]^2$ tvar

$$x(u, v) = r \cos 2\pi u \cos 2\pi v - (a + r \sin 2\pi u) \sin 2\pi v$$

$$y(u, v) = r \cos 2\pi u \sin 2\pi v \cos 2\pi v + (a + r \sin 2\pi u) \cos^2 2\pi v + d(1 - \cos 2\pi v)$$

$$z(u, v) = r \cos 2\pi u \sin^2 2\pi v + (a + r \sin 2\pi u) \sin 2\pi v \cos 2\pi v - d \sin 2\pi v$$

Počet kružnicových trajektórií - parametrických v -kriviek oboch plôch závisí od počtu spoločných bodov riadiacej kružnice k a osi rotácie l_0 .



Obrázok 9: Dvojosové rotačné plochy Eulerovho typu-cyklické

Literatúra

- [1] D. Velichová: *Dvojosové rotačné plochy*, Sborník 24. Konferencie o geometrii a počítačové grafice, TU Ostrava, Barborka 2004, ČR, ISBN 80-248-0581-2, str. 230 – 235.
- [2] D. Velichová: *Euler angles*, Proceedings of the 3rd International Conference on Applied Mathematics APLIMAT 2004, Sjf STU Bratislava 2004, SR, SBN 80-227-1995-1, pp. 191-198.
- [3] D. Velichová: *Two-axial surfaces of revolution*, Proceedings of the 8th International Scientific Conference Mechanical Engineering 2004, Sjf STU, Bratislava 2004, SR, CD, ISBN 80-227-2105-0, str. S2-60 - S2-65.

Šárka Voráčová

COMPUTATIONAL GEOMETRY WITH MAPLE

Abstract

The paper presents some elementary methods for computational geometry and their further studies of the running time complexity and their dependence on the various input size parameters. The goal is to demonstrate the utilization of Maple package in to the Computational geometry. Pedagogical benefits can be found in the large number of Maple programs, some of which are analogous to C++ programs, including those for convex hulls of a point set in small dimension, planar polygonal partitioning and triangulations.

Keywords

Convex Hull, Triangulation, Computational algorithms

1 Introduction

Computational geometry is concerned with the design and analysis of algorithms for geometric problems. Algorithms arise in many practical areas such as computer graphics, robotics and engineering design. The basic techniques used in computational geometry are: polygon triangulation, convex hulls, Voronoi diagrams, arrangements, geometric searching and motion planning.

Actually, there exist several software packages which are of general interest to the discrete and computational geometry community [9]. Majority of these softwares are distributed as source code written in C, Java or C++ [7, 2], but there are also available the packages supporting the algorithms of computational geometry.

However Computer Algebra Systems Maple and Mathematica only offer 2-dimensional convex hulls, the higher dimensional convex hulls and other basic tasks can be computed via free Maple package Convex [5]. Matlab uses Qhull [6] for their computational geometry functions: `convhulln`, `delaunayn`, `griddata3`, `voronoin`. Qhull computes very fast arbitrary-dimensional convex hull. It uses floating-point arithmetic with many parameters for tolerancing. There are

also available a number of free Matlab package for mesh generating, and linear optimization[8].

2 Data Representation

Geometric algorithms involve the manipulation of objects, which are not handled at the machine language level, so we must organize the complex objects by means of the simpler data types directly representable by the computer. The most common complex objects encountered in the design of geometric algorithms are sets and lists (ordered sequences). Data structures used in Computational Geometry are well describe in [3]. Let S be a set represented in a data structure and A is an arbitrary element.

```
> S:={A,B,C,D};
```

The fundamental operations occurring in set manipulation are adding A to the set S , removing A from S and test for membership in a set. These tasks in Maple covered by functions:

```
>S:={op(S),A};
>S:=(subsop(i=NULL),S);
>member(A,S)
```

2.1 Data Structure

However, the nature of geometric problems has led to the development of specific data structures, for programming in Maple it is convenient to use simply lists of coordinates of vertices or simplified the doubly-connected edge lists (DCEL).

The most easiest way to represent edges and polygons is by using an lists or sets. All points are represented by lists of the appropriate number of coordinates. These representation are attractive for code clarity. For example, triangle is given by the list of vertices ordered in the counterclockwise manner. It is efficient to distinguish between the right and reverse side of the polygon. The structure of loops and index increments are somewhat clearer with lists than with arrays and standard quad-edge data structure.

```
> F[1]:=[[0,0,0],[0,1,0],[0,0,1]];
```


DCEL is suited to represent a connected planar graph embedded in the plane. Edge is given by its nodes and with information about incident edges and faces.

```
>A[1]:=[0,0]:A[2]:=[0,2]:A[3]:=[1,3]:A[4]:=[2,2]: ...
>e[1]:=[A[1],A[2],0,1,10,5]:e[2]:=[A[2],A[3],0,2,1,3]: ...
```

By using the for loops to iterate over the coordinates we can transform the DCEL to the simple ordered list of faces and draw the two-dimensional polygons $F[i]$.

```
> for i to nops(F) do
>   F[i]:={}:
>   for j to nops(e) do
>     if list_e[j][3]=i or list_e[j][4]=i then
>       F[i]:={op(F[i]),list_e[j][1],list_e[j][2]}end if:
>     end do:
>   end do:
> listF:=[seq(convert(F[i],list),i=1..5)];
>plots[polygonplot](listF);
```

2.2 Arithmetics

We will represent the coordinates with integer rather than with floating point numbers wherever possible. This will permit us to avoid the issue of floating-point round-off error and allow us to write code that is verifiably correct within a range of coordinate values. Maple performs the arithmetic computation in the floating-point environment. For arithmetic operations if one of the operands is a floating-point number then floating-point arithmetics takes place automatically. The global name `digits` which has 10 as its default, determines the number of digits in the significant which Maple uses when calculating with floating-point number.

3 Maple programming language

Writing a Maple program can be very simple. It may only involve putting a command `proc()` and `end proc` around a sequence of commands. We can write useful Maple programs in a few hours, rather than a few weeks that it often takes with other languages. This

efficiency is partly due to the fact that Maple is interactive. This interaction makes it easier to test and correct programs. Coding in Maple does not require expert programming skills. We can use special commands which allow us to perform complicated tasks with a single command instead of pages of code.

4 Example - Algorithms for 2-dimensional Convex Hull

A computing a convex hull is a vehicle for the solution of a number of unrelated questions in computational geometry, such as pattern recognition, image processing.

Many convex hull algorithms are known, it's behavior depends greatly on the specific combinatorial properties of the polytope on which it is working. However, there is currently no algorithm for computing the convex hull which is polynomial in the combined input and output size, unless the dimension is considered constant. Maple and Mathematica only offer 2-dimensional convex hulls. Higher dimensional convex hulls can be computed via the Maple package convex.

We will show the program code in Maple with the simple algorithm - Graham's scan. The nature of Graham's scan algorithm is revealed by the following theorems: Consecutive vertices of a convex polygon occur in sorted angular order about any interior point (Figure. 1).

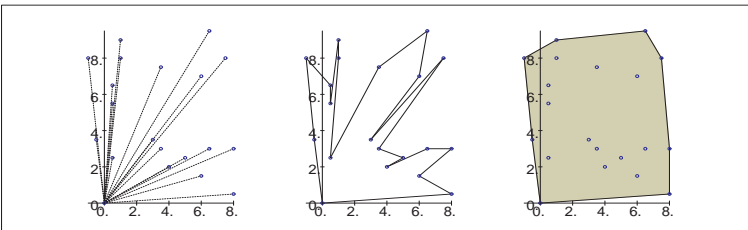


Figure 1: GrahamScan

First we find the rightmost lowest point and trivially transformed the coordinates of the others so that this point is at the origin.

```
>origin:=X[1]:
```

```

> for i from 2 to nops(X) do
>   if X[i][2]<=origin[2] then origin:=X[i]:end if:
> end do;
> for i from 1 to nops(X) do
>   Xnew[i]:=X[i]-origin:
> end do;
    
```

We now sort the n points by polar angle and the distance from the origin.

```

> angle:=(x,y)->evalb(x[1]*y[2]-y[1]*x[2]>0);
> Q:=sort([seq(Q,i=1..nops(Q))],angle);}
    
```

The essence of Graham algorithm is a single scan around the ordered points, during which the internal points are eliminated. Computation of the signed area of triangle given by vertices X, Y, Z .

```

> signArea:=proc(X::list,Y::list,Z::list)
>   linalg[det](array(1..3,1..3,[X[1],X[2],1],[Y[1],Y[2],1],
>     [Z[1],Z[2],1]));
> end:}\
    
```

Suppose, that the list of points is ordered by polar angle. We repeatedly examine triples of consecutive points in counterclockwise order to determine whether or not they define a reflex angle.

```

> convhull:=proc(X::{list,set})
>   local S,i,t,P;
>   P:=trans(X);
>   S[1]:=P[1];S[2]:=P[2];t:=2;i:=3;
>   while i<=nops(P) do
>     if signArea(S[t-1],S[t],P[i])>0 then
>       t:=t+1; S[t]:=P[i]; i:=i+1;
>     else t:=t-1;
>     end if;
>   end do:
>   [seq(S[i],i=1..t)];
> end:}
    
```

5 Conclusion

Maple programming language is designed for the development of mathematical subroutines and custom applications. The syntax is similar to that of C, or Fortran. If you have used any of these languages, you can easily take advantage of the programming capabilities of Maple. Maple can generate code that is compatible with programming language C, so we could develop a mathematical model using Maple and then use Maple to generate C code corresponding to the model. It is possible to call routines written in C by using Maple's external calling facility.

References

- [1] F. P. Preparata, M. Shamos: *Computational Geometry, an Introduction*, Springer-Verlag, New York, 1985
- [2] J. O'Rourke: *Computational Geometry in C, second edition*, Cambridge University Press, 1998
- [3] A.V. Aho, J.E. Hopcroft, J.D. Ullman: *Data Structures and Algorithms*, Addison-Wesley 1983
- [4] J.E. Goodman, J. O'Rourke: *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, Chapman and Hall/CRC, 2004
- [5] M. Franz: Convex - a Maple package for convex geometry, version 1.1, 2004, available at <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/franz/convex/>
- [6] *Quickhull* algorithm for computing the convex hulls, Delaunay triangulations and Voronoi diagrams, 2004, available at <http://www.qhull.org>
- [7] J.R. Schewchuk: *Triangle* C program for two-dimensional mesh generation and construction of Delaunay triangulations, constrained Delaunay triangulations, and Voronoi diagrams, 2004, available at <http://www.cs.cmu.edu/quake/triangle.html>
- [8] S.A. Mitchell: Computational Geometry Triangulation, mesh generation in Matlab, available at <http://endo.sandia.gov/samitch/csstuff/csguide.html>
- [9] N. Amenta: Directory of Computational geometry Software, available at <http://www.geom.umn.edu/software/cglist/welcome.html>

Edita Vranková

ON TWO APPROACHES FOR CONSTRUCTION OF DIRECT ALTERNATE LAYOUT FOR STAMPING

Abstract

In the presented paper we study two approaches for making of direct alternate layout for stamping from geometrical point of view, which are used above all in engineering in sheet metal forming for production of cutting pieces. There are solving non-total dense and (total) dense two-periodical placements of rectangular and mutually congruent axial polygons along a line.

Keywords

Cutting plan, direct alternate layout for stamping, congruent rectangular and axial polygons, non-total and total dense two-periodical placement.

1 Introduction

Not only in engineering, but also in clothing and shoe industry are solving tasks which lead in principle to interactive or automatic placements of plane geometric figures without overlapping into some plane domain when only translations of figures are allowed. An important part of technological preparation of procedures is the construction of (optimal) *cutting plan* [1], [2]. Above all in engineering practice (automobile industry - sheet metal forming) is often solved *direct alternate layout for stamping* [2]. Geometrically speaking, it is a periodical placement of union of two congruent rectangular axial polygons [9] symmetric by some point lying at the axis of the strip along a line. We called it *two-periodical placement of rectangular axial polygons along a line*.

An useful theoretical tool for solving such tasks can be the set $D(M,N)$ of *dense placements* for moving polygon M and fixed polygon N . During placement of polygons it is necessary to provide the non-overlapping of any two different polygons. Two polygons M, N are *overlapping* if they have a common interior point ($\text{int}M \cap \text{int}N \neq \emptyset$). Among all placements of polygons are important their dense placements from optimization viewpoint. The polygons M, N are *dense placed* if there is a common boundary point ($\partial M \cap \partial N \neq \emptyset$) and if the polygons M, N are not overlapping

$(\text{int}M \cap \text{int}N = \emptyset)$. The **overlapping** of two arbitrary polygons $M(x)$ and N or its **dense placements** can be expressed geometrically by the following sets

$$O(M,N) = \{x \in E_2; M(x) \text{ overlaps } N, \text{ i.e. } \text{int}M(x) \cap \text{int}N \neq \emptyset\},$$

$$D(M,N) = \{x \in E_2; M(x), N \text{ are densely placed, i.e. } \partial M(x) \cap \partial N \neq \emptyset \text{ and } \text{int}M(x) \cap \text{int}N = \emptyset\},$$

where $M(x)$ is the translated position of polygon $M=M(o)$ to the (reference) point x and the point o (*origin*) is a fixed point in the plane E_2 [7]. Some constructions of the set $D(M,N)$ are described e.g. in [3], [6], [7]. We suppose that the origin o is an interior point of the polygon M .

2 Two-periodical placement of rectangular polygons along a line

Among the simplest tasks of the periodical placements belong placements of mutually congruent polygons ($M=N$). In this case is the set $D(M,M)$ symmetrical by origin o [7]. If every two neighboring translated polygons M_i and M_{i+1} ($i \in \mathbb{Z}$) are dense placed in strip, then we obtain dense periodical placement of polygon M along a line [9].

Definition 1. A periodical placement of union $U=M \cup M'(x)$ non-overlapping polygons M and $M'(x)$ along a line given by vector \mathbf{u} , where $M'=s_o(M)$ is the image of M by the central symmetry s_o (with symmetry center o) and $M'(x)$ is the translated position of M' to the point x [7] we call *two-periodical placement of polygon M along a line* with basis \mathbf{u} (Fig. 1) and we denote it by $U\mathbf{u}$ or $MM'\mathbf{u}$.

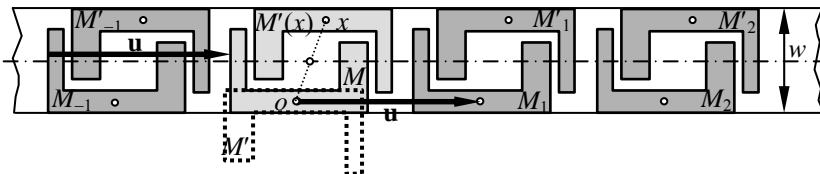


Fig. 1: Two-periodical placement $U\mathbf{u}$ of polygon M with along a line

Analogically by [9], [10], two-periodical placement of a polygon M is the system

$$U\mathbf{u} = MM'\mathbf{u} = \{U_i = U + i\mathbf{u}; i \in \mathbb{Z}\}.$$

of non-overlapping figures U_i which are copies of the figure $U=M \cup M'(x)$ under translations given by the vectors $i\mathbf{u}$ for all integers $i \in \mathbb{Z}$ (see Fig. 1). The polygons $M, M'(x)$ are called *the generators* of the two-periodical placement $MM'\mathbf{u}$. The basis \mathbf{u} defines for plane strip (with width w) a *translation in strip*. It is obvious that $M=M(o)=M_0$ and $U_i=M_i \cup M'_i(x)$.

For the two-periodical placement $MM'u$ of an (axial) polygon M along a line with basis u is needed to make the set of type $D(M,M)$, and the set of type $D(M',M)$, too [12].

From simple properties of translations and central symmetries it results that a central symmetry s_p by point p transforms every periodical placement Mu with basis u along a line to the periodical placement $s_p(Mu)=s_p(M)u$ along a line with the same basis u [11].

Definiton 2 ([5] or [11], Def 1). If the polygon M and its copy $s_p(M)$ by central symmetry s_p are not overlapping, then we call the union $Mu \cup s_p(Mu)$ of periodical placements Mu and $s_p(Mu)$ as a *periodical placement of polygon M along a line with symmetries* and we denote it by Mup . Vector u is called *basis*, the point p *symmetry point* and the line incident with the point p and parallel to the vector u is called *axis (of strip)* of periodical placement of the polygon M along a line with symmetries (Fig. 2).

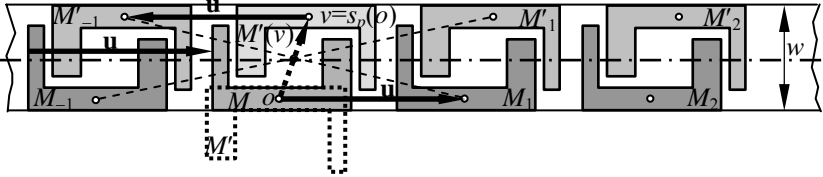


Fig. 2: Periodical placement of polygon M along a line with symmetries

In the placement Mup vector $v=s_p(o)-o=v-o$ determines translation such that polygon $s_p(M) = M'(v)$ is a copy of the polygon M' . The polygons which occur in the placement Mup can be expressed in the form $M_i=M+iu$ or $M'_i=M'+iu+v$ for all $i \in \mathbb{Z}$. The polygons $M, M'(v)$ we call the *generators of the two-periodical placement*.

In the next two sections we show two approaches for making of **dense** two-periodical placement of rectangular polygon along a line. There are geometrical models of two ways for creation direct alternate layout for stamping, which are used in engineering for production of cutting pieces.

3 A non-total dense two-periodical placement of rectangular polygons along a line

The first approach used in engineering practice consists in following: in the first place it is cut-out a pair of cutting pieces symmetric by some point lying at the strip axis using **two blades** ([1], [2]) and then are cut-out repeatedly another pairs of congruent pieces from the strip metal (during its

translations). This way is geometrically modeled by creation of non-total dense two-periodical placement of a polygon along a line.

Definition 3. Two-periodical placement of the polygon M along a line such that periodical placement $MM'u=Uu$ of union $M \cup M'(x)=U$ along a line is dense and the polygons $M, M'(x)$ are densely placed, too we call *non-total* or *non-complete* (see [12], Def. 2) *dense two-periodical placement of polygon M along a line with basis u* (Fig. 3).

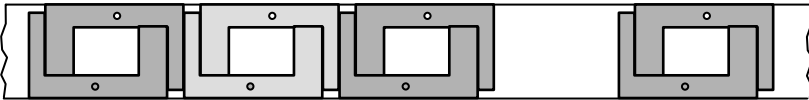


Fig. 3: A non-total dense two-periodical placement of polygon M

A **non-total dense** two-periodical placement $MM'u = Uu$ fulfils these conditions (Fig. 4):

- The polygons M a $M'(v)$ are densely placed, that is $v \in D(M',M)$.
- The polygons U^* a $U^*(u)$ are densely placed, that is $u \in D(U^*,U^*)$,

where U^* is the (rectangular) polygon, which is determined by external boundary of the union $M \cup M'(v)$. We obtain the basis $u=u-p$ of non-total dense two-periodical placement by determining point u . This point is one of intersection points of the half-line pr with the set $D(U^*,U^*)$ [10], where r is an arbitrary vector collinear with the strip axis (Fig. 4) and the point p (lying on strip axis) is the center of the line segment ov . It is evident that $U^*=U^*(p)$.

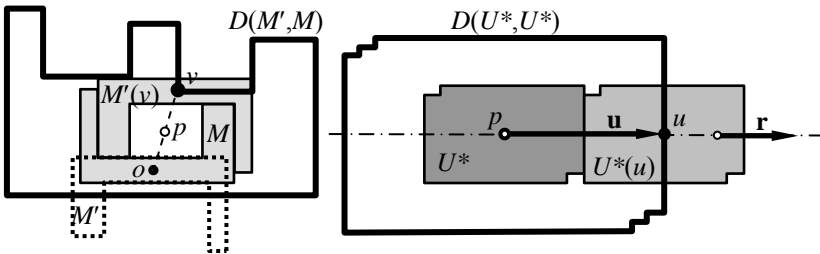


Fig. 4: To algorithm for construction of non-total dense placement

The enter date for algorithm are the polygon M and point o . The **steps of the algorithm** can be described briefly as follows:

1. Construct the set $D(M',M)$.
2. Take one point from vertices of the set $D(M',M)$ and construct figure $M \cup M'(v)$ and the (rectangular) polygon U^* .

3. Create the set $D(U^*, U^*)$ and select of vector \mathbf{r} parallel to the strip axis.
4. Determine the intersection and take of point $u \in pr \cap D(U^*, U^*)$ and put $\mathbf{u} = u - p$.

With respect to geometrical structure [7] of the set $D(M, N)$ it can hold for the point v according to [8] the following:

- a) Point v is a vertex of a **non-convex** interior angle (with size 270°) of the rectangular polygon bounded by *the main part* of the set $D(M', M)$.
- b) The point v is a vertex of a **convex** interior angle of some rectangular polygon bounded by *a simple closed broken line* contained in the set $D(M', M)$ and different from the main part of $D(M', M)$.
- c) The point v is an end-point of *a simple non-closed broken lines* (including *line segments*) contained in the set $D(M', M)$.
- d) The point v is *an isolated point* of the set $D(M', M)$.

Complexity of this algorithm depends on the complexity of the constructions of the sets $D(M', M)$ and $D(U^*, U^*)$ and on the complexity of the determining of the intersection $pr \cap D(U^*, U^*)$. We expect that an optimal non-total dense two-periodical placement we obtain for a point from one of the eventualities a) - d).

4 A total dense two-periodical placement of rectangular polygons along a line

The second approach which is most often used in engineering practice consists in the following: in the first place are cut-out repeatedly congruent cutting pieces in the one line of the metal strip (during its translation) using only **one blade** and then are cut-out the pieces in the second line using the same blade after the rotation of the metal strip by 180° .

Definition 4. Two-periodical placement $MM\mathbf{u} = U\mathbf{u}$ of the polygon M along a line such that periodical placement $M\mathbf{u}$ of the polygon M along a line with the basis \mathbf{u} is dense and periodical placement $M'(x)\mathbf{u}$ of the polygon $M'(x)$ along a line with the basis \mathbf{u} is dense and the polygons $M, M'(x)$ are densely placed, too we call *total* (or *complete*) *dense two-periodical placement of polygon M along a line* with basis \mathbf{u} (Fig. 5).

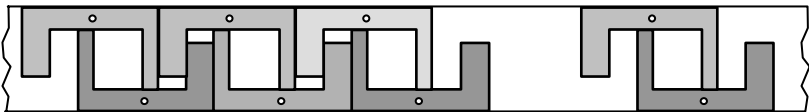


Fig. 5: A total dense two-periodical placement of polygon M along a line

2. Determine and take of point $u \in o\mathbf{r} \cap D(M, M)$ and put vector $\mathbf{u} = u - o$.
3. Construct the sets $D(M', M)$ and $D(M', M(u))$.
4. Compute the intersection $I(\mathbf{u}) = D(M', M) \cap D(M', M(u))$.
5. Take one point from the set $I(\mathbf{u})$ and put vector $\mathbf{v} = v - o$.
6. The two polygons $M, M'(v)$ generate the two-periodical placement $U\mathbf{u}$.

R e m a r k. The set $D(M', M(u))$ is congruent to the set $D(M', M)$ and it is a copy of the set $D(M', M)$ under translation given by the vector \mathbf{u} . Dense two-periodical placement $MM'\mathbf{u} = U\mathbf{u}$ can be made as the set all copies of the union $U = M \cup M'(v)$ under all translations $i\mathbf{u}$ for $i \in \mathbb{Z}$.

Complexity of this algorithm depends again on the complexity of the constructions $D(M, M)$ and $D(M', M)$ and on the complexity of the determining of the intersection $o\mathbf{r} \cap D(M, M)$ and $I(\mathbf{u})$. It can be expected that we obtain the optimal (total) dense two-periodical placement either for some regular point from the set $I_R(\mathbf{u})$ or for some point from the set $I(\mathbf{u})$.

5 Conclusions

For the current stage of production in many branches of industry it is typical the robotization and automation not only of the whole production process, but also in process technological preparation of procedures, too. One of technological preparation is creation of (optimal) cutting planes. These problems are very current at present times above all from minimizing of production costs viewpoint, especially in connection with important development of the automobile industry in Slovakia.

The two presented constructions for dense two-periodical placement of rectangular polygon M along a line resulted from theoretical research with respect to applications in engineering in the sheet metal cutting process (the production of rectangular cutting pieces) - in solving (optimal) direct alternate layout for stamping. We will study and publish the criterions and conditions of optimization for both described ways in future.

The reviewed cutting plans are used often in engineering practice, especially in production of rectangular pieces with smaller dimensions and for bigger series. The tools with bigger number blades have shortest utility, the rotation of strip impedes for a change operate of tool [2]. A choice on procedure for mentioned direct alternate layout depends consequently on concrete demands of production, material and technological conditions.

Acknowledgement

The research was supported by the grant VEGA No 1/2006/05.

References

- [1] Bílik, J., Ulík, A., Vranková, E.: *Theoretical and Technological Aspects of Production Cutting Plans* (in Slovak). In: The International Conference Tools 2004, Kočovce 2004. SJF STU Bratislava, 2004, p. 40-43.
- [2] Blaščik, F., Kmec, J.: *Automation of Technological Workplaces in Forming* (in Slovak). ALFA, Bratislava 1989.
- [3] Božek, M.: *On Dense Placements of Polygons*. In: Proc. of the 10th Spring School on Computer graphics and its Applications. UK Bratislava, 1994, p. 233-239.
- [4] Božek, M.: *On Periodical Placements of Polygons*. In: Proc. of Symposium on Comp. Geom. SCG'2002, Kočovce, vol.11, STU Bratislava, 2002, p. 233-239.
- [5] Božek, M.: *On Periodical Placements with Symmetries*. In: Proc. of Symposium on Comp. Geom. SCG'2003, Kočovce, vol.12, STU Bratislava, 2003, , p. 9-13.
- [6] Božek, M.: *On Drawings-up of Polygons*. In: Proc. of Symposium on Comp. Geom. SCG'2004, Kočovce, vol.13, STU Bratislava, 2004, p. 16-20.
- [7] Vranková, E.: *Construction of the Set of Dense Placements of Two Polygons Using central Symmetry Via Union method* (in Slovak). Ph.D. Thesis, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Comenius University, Bratislava, 2000.
- [8] Vranková, E.: *Proposal of Automatic Solution of Cutting Plan Using Theory of Dense Placement* (in Slovak). In: Proceed. of the 7th Scientific Conference with International Participation. Faculty of Civil Engineering Košice, 2002, p. 99-104.
- [9] Vranková, E.: *An Introduction to Periodical Placements of Polygons along a Line*. In: The2st International Conference on Applied Mathematics and Informatics at Universities 2002. MtF STU Trnava, STU Bratislava, 2002, p. 101-105.
- [10] Vranková, E.: *On Periodical Placement of Rectangular Polygons along a Line Segment* (in Slovak). In: Proceed. of 22th Conference GEOMETRY AND COMPUTER GRAPHICS, Dolní Lomná. VŠB TU Ostrava a JČMF, 2002, p.155-160.
- [11] Vranková, E.: *An Introduction to Two-periodical Placements of Polygons along a Line* (in Slovak). In: 3rd International Conference APLIMAT 2004, Part II. Sjf STU Bratislava 2004, p.1003-1009.
- [12] Vranková, E.: *On Two-periodical Placements of Rectangular Polygons along a Line Segment*. In: 4rd International Conference Aplimat 2005, Part II. Sjf STU Bratislava, 2005, p. 397-405.

Radek Výrut

VÝPOČET MINKOWSKÉHO SUMY VE 2D A 3D

Abstrakt

Tento článek obsahuje postupy pro výpočet Minkowského sumy dvou množin v rovině a pro výpočet Minkowského sumy konvexních mnohostěnů a množin ohraničených nerovností $f(X) \geq 0$ v prostoru.

Klíčová slova

Minkowského suma, výpočet

1 Úvod

Definice 1.1 *Nechť A a B jsou dvě bodové množiny v E^n . Minkowského suma množin A a B je bodová množina*

$$\bigcup_{b \in B} A^b,$$

kde A^b je množina A posunutá o vektor b , tedy množina: $A^b = \{a + b \mid a \in A\}$. Minkowského sumu množin A a B značíme $A \oplus B$.

Minkowského sumu množin A a B lze též ekvivalentně určit jako: $A \oplus B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

Další vlastnosti Minkowského sumy včetně důkazů a výčtu aplikací lze najít v [5].

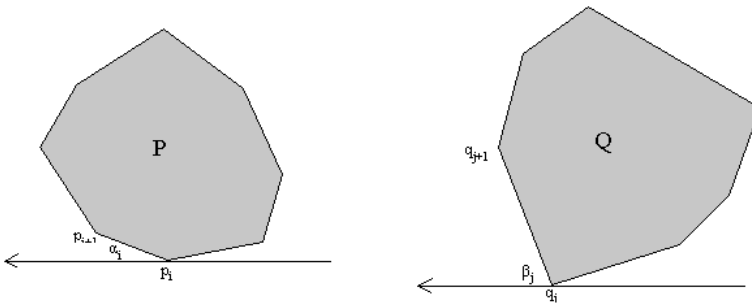
2 Výpočet Minkowského sumy v rovině

První postup využívá uzavřenosti Minkowského sumy na konvexních množinách. Výslednou Minkowského sumu určíme jako konvexní obal množiny bodů, které vzniknou sečtením všech vrcholů jednoho mnohoúhelníka se všemi vrcholy druhého.

Další postup využívá skutečnosti, že hranici Minkowského sumy dvou konvexních mnohoúhelníků tvoří jen úsečky rovnoběžné s hranicemi sčítaných mnohoúhelníků. Hlavní problém tedy spočívá v nalezení pořadí těchto hran. Princip popisuje následující algoritmus:

Algoritmus 1 *P a Q jsou dva konvexní mnohoúhelníky, které mají m (resp. n) vrcholů. Vrcholy $P \oplus Q$ jsou součty vrcholů P a Q .*

1. Zvolíme směr a určíme maximální vrchol mnohoúhelníka P v tomto směru (vrchol, který je nejdále od počátku v daném směru) a označíme jej $p(1)$, dále označíme ve směru hodinových ručiček vrcholy $p(2) \dots p(m)$. Vrcholy mnohoúhelníka Q označíme stejným způsobem $q(1) \dots q(n)$.
2. Vrcholy $P \oplus Q$ označíme $z(i)$.
3. $z(1) = p(1) + q(1)$.
4. Necht' $z(k) = p(i) + q(j)$, pak následující vrchol $z(k+1)$ určíme takto:
 - (a) Zkonstruujeme dvě rovnoběžné přímky a a b body $p(i)$ a $q(j)$. Označíme $\alpha(i)$ úhel mezi přímkou a a hranou $p(i)p(i+1)$, $\beta(j)$, pak úhel mezi b a hranou $q(j)q(j+1)$. Konstrukci přímek a a b a úhlů α_i a β_j znázorňuje obrázek 1.



Obrázek 1: Rovinný algoritmus výpočtu $P \oplus Q$

VÝPOČET MINKOWSKÉHO SUMY VE 2D A 3D

$$(b) z(k+1) = \begin{cases} p(i+1) + q(j) & \text{pokud } \alpha(i) < \beta(j) \\ p(i) + q(j+1) & \text{pokud } \alpha(i) > \beta(j) \\ p(i+1) + q(j+1) & \text{pokud } \alpha(i) = \beta(j) \end{cases}$$

5. Opakujme krok 4 pokud jsme nepoužili všechny vrcholy z P a Q .

Výpočet Minkowského sumy množin, které jsou konvexní, ale nejsou mnohoúhelníky se může řešit dvěma postupy. První spočívá v aproximaci dané konvexní množiny konvexním mnohoúhelníkem (např. kružnici aproximujeme pravidelným n -úhelníkem). Chyba výsledku je zde přímoúměrná chybě aproximace původní množiny mnohoúhelníkem. A na tyto množiny aplikujeme některý z předchozích postupů pro výpočet Minkowského sumy.

Druhá možnost je popsána v [3]. Tento postup je určen pro dvě jednoduše souvislé množiny ohraničené hraniční křivkou. Pro výpočet Minkowského sumy se využívá konvoluce těchto hraničních křivek, ze které se odstraní smyčky. Konvoluční křivku zde definují následujícím způsobem: Necht' jsou C_1 a C_2 dvě rovinné křivky jejich konvoluční křivka, označovaná $C_1 \star C_2$, je definována aplikováním vektorového součtu jen na páry bodů, které mají stejný směr tečny. Tedy: $C_1 \star C_2 = \{a + b \mid a \in C_1, b \in C_2, T_1 \parallel T_2\}$, kde T_i tečný vektor příslušné křivky v daném bodě.

Tuto druhou možnost lze tedy použít i pro množiny, které nejsou konvexní, ale splňují podmínku, že jsou jednoduše souvislé a ohraničené křivkou.

Poslední postup je určen pro množiny, které jsou popsány nerovnostmi $f(X) \geq 0$. Necht' $G_3 = G_1 \oplus G_2$, dále necht' G_1 je dáno nerovnostmi $f_1(X) \geq 0$ a G_2 nerovnostmi $f_2(X) \geq 0$, kde $X \in \mathbf{R}^2$. Naším cílem je nalezení $f_3(X) \geq 0$, která popisuje množinu G_3 . Postup hledání $f_3(X)$ lze zapsat v následujících bodech:

1. G_1 a G_2 reprezentujeme v různých prostorech, G_1 v \mathbf{R}_1^2 se souřadnicovými osami x_1, y_1 a G_2 v \mathbf{R}_2^2 se souřadnicovými osami x_2, y_2 .
2. Určíme množinu $G_3^{\perp} = G_1 \times G_2$, tedy $G_3^{\perp} \subset \mathbf{R}^4 = \mathbf{R}_1^2 \times \mathbf{R}_2^2$.
3. \mathbf{R}_0^2 má souřadnicové osy x_0, y_0 . Definujeme zobrazení $\mathcal{T} : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^2$ pravidlem, je-li $X_1 \in \mathbf{R}_1^2$ a $X_2 \in \mathbf{R}_2^2$, tedy $X_1 = (x_1, y_1)$ a $X_2 = (x_2, y_2)$ pak $\mathcal{T}(X_1, X_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
4. Obraz G_3^{\perp} v zobrazení \mathcal{T} je $G_1 \oplus G_2$.

Nyní si podrobněji popíšeme postup v bodě **3**.

Víme, že $G_3^{\downarrow} = G_1 \times G_2 = (G_1 \times \mathbf{R}_2^2) \cup (\mathbf{R}_1^2 \times G_2)$. Jelikož G_1 je definováno pomocí $f_1(X)$, tak $G_1 \times \mathbf{R}_2^2$ je definováno pomocí $F_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = f(x_1, y_1)$, obdobně je $\mathbf{R}_1^2 \times G_2$ definováno vztahem $F_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = f(x_2, y_2)$. G_3^{\downarrow} lze tedy určit pomocí $F_3 = F_1 + F_2 - \sqrt{F_1^2 - F_2^2}$. F_3 je nezáporné právě tehdy, jsou-li $F_1 \geq 0$ i $F_2 \geq 0$, tedy F_3 popisuje G_3^{\downarrow} . Nyní známe F_3 popisující G_3^{\downarrow} a pomocí ní odvodíme funkci f_3 popisující G_3 . Víme, že $G_3 = \mathcal{T}(G_3^{\downarrow})$, bod X_0 náleží G_3 tehdy a jen tehdy, když vzor $\mathcal{T}^{-1}(X_0)$ bodu X_0 v zobrazení \mathcal{T} patří do G_3^{\downarrow} . Funkční hodnota funkce F_3 je pro body z množiny G_3^{\downarrow} nezáporná, pak bod X_0 leží v G_3 tehdy a jen tehdy pokud je

$$\max\{F_3(X_1, X_2) : \mathcal{T}(X_1, X_2) = X_0\} \geq 0,$$

funkci f_3 lze získat následujícím předpisem

$$f_3 = \max\{F_3(X_1, X_2) : \mathcal{T}(X_1, X_2) = X_0\}.$$

Nechť $X_0 = \mathcal{T}(X_1; X_2)$, $X_0 = (x_0, y_0)$, $X_1 = (x_1, y_1)$ a $X_2 = (x_2, y_2)$ pak vzhledem k definici zobrazení \mathcal{T} platí $x_2 = x_0 - x_1$ a $y_2 = y_0 - y_1$. Definujme funkci \bar{F}_3 na $\mathbf{R}^4 = \mathbf{R}_0^2 \times \mathbf{R}_1^2$ pravidlem $\bar{F}_3(x_0, y_0, x_1, y_1) = F_3(x_1, y_1, x_0 - x_1, y_0 - y_1)$. Využijeme-li definovaného vztahu, můžeme přepsat formulaci funkce f_3 do následující podoby

$$f_3 = \max\{\bar{F}_3(x_0, y_0, x_1, y_1) : (x_1, y_1) \in \mathbf{R}_1^2\}.$$

Nutnou podmínkou pro existenci maxima funkce je nulovost jejich parciálních derivací. Funkci f_3 získáme řešením soustavy

$$\frac{\partial \bar{F}_3}{\partial x_1}(x_0, y_0, x_1, y_1) = 0$$

$$\frac{\partial \bar{F}_3}{\partial y_1}(x_0, y_0, x_1, y_1) = 0$$

Tímto postupem získáme funkci $f_3(X)$, která popisuje $G_3 = G_1 \oplus G_2$.

Minkowského sumu rovinných množin, na které nelze uplatnit některý z předchozích postupů, řešíme dekompozicí těchto množin na sjednocení disjunktních konvexních množin. Jelikož Minkowského suma sjednocení je sjednocení dílčích Minkowského sum, umíme jednotlivé dílčí sumy určit některým z předešlých způsobů a výslednou Minkowského sumu určíme jako jejich sjednocení.

3 Výpočet Minkowského sumy v prostoru

Stejně jako v rovině můžeme využít uzavřenosti Minkowského sumy na konvexních množinách. Výslednou Minkowského sumu určíme jako konvexní obal množiny bodů, které vzniknou sečtením všech vrcholů jednoho mnohostěnu se všemi vrcholy druhého.

Bohužel v prostoru narozdíl od roviny neplatí, že hranice Minkowského sumy tvoří jen vhodně "poskládané" hranice sčítaných množin, z tohoto důvodu zde neexistuje analogie algoritmu popsaného v rovinném případě.

Další možnosti pro konvexní mnohostěny jsou postupy využívající tzv. *slope diagram*, které jsou popsány v [5].

Pro množiny, které jsou popsány nerovností $f(X) \geq 0$ lze použít postup ukázaný pro rovinné množiny s tím rozdílem, že množiny zobrazujeme v prostoru \mathbf{R}^3 a na závěr nemáme soustavu dvou rovnic, ale tří rovnic, ještě se provede parciální derivace podle z_1 .

Výpočet Minkowského sumy nekonvexních množin v prostoru řešíme jako v rovině dekompozicí na sjednocení konvexních množin, pro které umíme vypočítat Minkowského sumu.

4 Závěr

V článku byly popsány postupy pro výpočet Minkowského sumy v rovině a prostoru. Hlavní uplatnění Minkowského sumy jsou úlohy plánování pohybu robota, plnění kontejneru, tvorba stříhových plánů a mnoho dalších.

Literatura

- [1] H. Bekker, J. B. T. M. Roerdink: *An Efficient Algorithm to Calculate the Minkowski Sum of Convex 3D Polyhedra*. <http://www.cs.rug.nl/~roe/publications/-ccs3.html>, Groningen, 1999.
- [2] E. Flato, D. Halperin, P. K. Agarwal: *Polygon Decomposition for Efficient Construction of Minkowski Sum*. <http://www.math.ac.il/~flato>, 1999.

- [3] I. K. Lee, M. S. Kim, G. Elber: *The Minkowski Sum of 2D Curved Objects*. Israel-Korea Bi-National Conference on New Themes in Computerized Geometrical Moddeling, 1998, s. 155–164, únor 1998, Tel-Aviv Univ., 1998
- [4] A. Pasko, O. Okunev, V. Savchenko: *Minkowski sums of point sets defined by inequalities*.
- [5] R. Výrut *Minkowského suma a její aplikace*. Diplomová práce, Katedra matematiky, FAV, ZČU, 2002
- [6] Y. Wu, J. J. Shah, J. K. Davidson: *Improvements to algorithms for computing the Minkowski sum of 3-polytopes*. J CAD 35 (2003), s.1181-1192.

Lucie Zrůstová

HISTORIE DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE NA VUT V BRNĚ

Abstrakt

Příspěvek se zabývá historií výuky deskriptivní geometrie na Vysokém učení technickém. Deskriptivní geometrie byla jedním z prvních předmětů, které se na VUT učily. V příspěvku jsou srovnány počty hodin a náplň tohoto předmětu od založení VUT až do současnosti.

Klíčová slova

Deskriptivní geometrie, historie, VUT.

1 Deskriptivní geometrie na VUT do 2. světové války

Vysoké učení technické v Brně bylo založeno v roce 1899. Deskriptivní geometrie byla jedním z prvních předmětů, které se na technice učily. Po dlouhou dobu byla i povinným předmětem státní zkoušky pro obory inženýrské a pozemní stavitelství a pro obor stavby strojů. Jako řádní studenti byli přijímáni maturanti z reálných škol. Gymnazisté museli před přijetím složit zkoušku z rýsování a kreslení od ruky. Náplň této zkoušky byla následující:

a) *Sestrojení útvarů roviny, zvláště trojúhelníka, čtyřúhelníka a pravidelného mnohoúhelníka. Provádění důležitějších úkolů z nauky o kruhu, elipse, hyperbole, parabole, zvláště pokud se týká sestrojování kuželoseček a přímků tečných k nim za určitými výjimkami.*

b) *Zobrazování útvarů prostoru dle ortogonálního promítání (základy deskriptivní geometrie). Zobrazení bodu, přímky a roviny, rovinného mnohoúhelníku a kružnice v rovinách nakloněných k průmětně. Grafické řešení nejjednodušších úloh o vzájemné poloze bodu, přímky a roviny. Zobrazení hranolů, jehlanů, jejich proniků s přímkami a rovinami, jakož i vzájemného jejich průseku. Sítě. Upotřebení vytknutých úkolů k sestrojování vlastního a vrženého stínu v případech jednoduchých.*

Deskriptivní geometrii měli jako povinný předmět studenti prvního ročníku. Náplň předmětu závisela z velké části na profesorovi. Prvním profesorem deskriptivní geometrie byl od školního roku 1900/01 Jan Sobotka.

Náplň **deskriptivní geometrie** byla: *Promítání ortogonální, klinogonální a centrální. Axonometrie. Konstruktivní teorie technicky důležitých křivek a ploch.* V zimním semestru měli studenti 4 hodiny přednášek a 6 hodin cvičení, v letním semestru bylo přednášek i cvičení po 6 hodinách. V roce 1904 byl Jan Sobotka jmenován řádným profesorem matematiky na české univerzitě v Praze a na VUT tedy zůstalo neobsazeno profesorské místo. Deskriptivní geometrii suploval několik měsíců vládní rada Vincenc Jarolímek.

V roce 1905 byl jmenován profesorem Bedřich Procházka. S jeho příchodem se mění i náplň – přibyla např. *geometrie kinematická* nebo *estrojování světelných intenzit*. Hodinová dotace 6/6, 6/4.

Od roku 1906 se předmět jmenuje **Deskriptivní geometrie spojená s geometrií polohy**. Náplň tohoto předmětu je stejná jako v minulém roce, v letním semestru je nyní 6 hodin cvičení a přibylo **projektivní geometrie**.

V roce 1908 odchází prof. Procházka do Prahy na českou techniku. Deskriptivní geometrii supluje Miloslav Pelíšek, který je v únoru 1909 jmenován řádným profesorem. V roce 1911 je z deskriptivní geometrie vyřazena **geometrie kinematická**, která se učí jako nepovinný předmět. Hodinová dotace je nyní 4/4 po oba semestry.

V roce 1926 odchází prof. Pelíšek na odpočinek a deskriptivní geometrii učí Jiří Klapka (asistent na stoličce matematiky). Mimořádným profesorem se v roce 1928 stává Josef Klíma (řádný 1931).

Od roku 1928 je pro všechny specializace společná část **Deskriptivní geometrie** (hodinová dotace 4/4 po oba semestry):

Středové promítání se základy projektivní geometrie. Kótované promítání. Kolmá a šikmá axonometrie. Plochy 2. stupně rotační a obecné. Plochy obecné, křivky na těchto plochách a jejich křivosti. Rotační a šroubové plochy, jejich řezy a proniky.

Studenti stavebního inženýrství a architektury mají navíc: *Výhody při obvyklém osvětlení, zvláště ploch rotačních. Řešení střech. Lineární perspektiva. Obecná teorie zborčených ploch a aplikace na zborčené plochy vyskytující se ve stavebnictví. Topografické plochy.*

Studenti strojího a elektrotechnického inženýrství mají ještě: *Základy kinematické geometrie v rovině a v prostoru. Zborčené plochy obecné a užití na Plückerův konoid a zborčené plochy kinematicky vytvořené, obzvláště šroubové. Základní úlohy o plochách topografických.*

V roce 1935 byla k **deskriptivní geometrii** v letním semestru připojena pro obory inženýrského stavitelství a architektury 1 hodina *Stereotomie: Pravidla stereotomického dělení. Zdi, pilíře, křídla, klenby a schody.*

Od roku 1939/40 dochází k dělení **Deskriptivní geometrie** podle oborů:

a) obory inženýrského stavitelství, zeměměřičské inženýrství a architektura: *Středové promítání a základy projektivní geometrie. Lineární perspektiva a konstruktivní fotogrammetrie. Reliéf. Kótované promítání. Řešení střech. Kolmá a šikmá axonometrie. Plochy druhého stupně rotační a obecné. Plochy obecně, křivky na nich a jejich křivosti. Rotační plochy. Výhody technického osvětlení, zvláště při plochách rotačních. Zborčené a šroubové plochy vyskytující se ve stavebnictví. Topografické plochy. Kartografická zobrazení, zvláště projekce. Hodinová dotace 4/4, v létě byla pro obory inženýrského stavitelství a architektury přidána 1 hodina stereotomie.*

b) obory strojní a elektrotechnické inženýrství: *Základy projektivní a kinematické geometrie. Kolmé promítání. Kolmá a šikmá axonometrie. Plochy druhého stupně, zvláště rotační. Křivost křivek na ploše. Rotační a šroubové plochy. Řezy a proniky. V zimním semestru 5/3, v letním semestru 0/3.*

2 Brněnská technika v poválečném období

V letech 1939 - 1945 byly české vysoké školy uzavřeny. Po válce byla technika obnovena v celém svém předválečném rozsahu.

V roce 1948/49 měl obor strojního a elektrotechnického inženýrství v zimním semestru **deskriptivní geometrii** s náplní: *Afinní geometrie. Pravoúhlá a kosoúhlá axonometrie. Základy projektivní geometrie. Plochy 2. stupně. Křivost křivek a ploch. Rotační a šroubové plochy, řezy, proniky. Kinematická geometrie. Teorie ozubení.*

Ostatní obory mají společný základ **Deskriptivní geometrie**:

Zimní semestr: *Afinní geometrie. Kótované promítání. Axonometrie pravoúhlá i kosoúhlá. Středové promítání.* Letní semestr: *Projektivní geometrie. Konstruktivní fotogrammetrie. Plochy 2. stupně, rotační i obecné. Křivost křivek a ploch, některé zvláštní plochy technicky důležité. Plochy topografické. Kartografická zobrazení.*

Inženýrské stavitelství má navíc v zimním semestru *teoretické řešení střech, technické osvětlení (zejména rotačních ploch), v letním rozvinutelné, zborčené, šroubové a jiné plochy důležité v praxi.*

V následující tabulce jsou uvedeny hodinové dotace v jednotlivých oborech:

Školní rok	Archi- tektura	Strojní inž.	Elektr. inž.	Inženýrské stavitelství		Geodeti	
	Zima	Zima	Zima	Zima	Léto	Zima	Léto
1948/49	3/3	4/4	3/2	4/3	2/3	3/3	3/3
1949/50	4/3	4/3	4/2	3/3	4/3	4/3	2/3
1950/51	2/2	2/2	2/2	3/0	2/0	3/3	2/2

V roce 1951 byla založena Vojenská technická akademie v Brně. Původně se nepočítalo s udržením civilní techniky. Nakonec se z techniky stala Vysoká škola stavitelská.

V roce 1956 bylo obnoveno VUT s fakultami inženýrského stavitelství, architektury a pozemního stavitelství, a energetiky.

2.1 Deskriptivní geometrie na fakultě elektrotechnické

Fakulta energetiky byla v roce 1959 rozdělena na fakultu strojní a elektrotechnickou.

Počty hodin deskriptivní geometrie na fakultě elektrotechnické:

Školní rok	Zimní semestr	Letní semestr	2. rok, zimní sem.
1960/61	4/2	2/2	-
1961/62	4/2	2/2	-
1962/63	3/2	3/2	-
1963/64	3/2	3/2	-
1964/65	4/4	2/2	-
1965/66	4/4	2/2	2/1 (*)

(*) - pouze pro obor slaboproudá elektrotechnika.

Od roku 1966/67 má předmět název **Geometrie**.

2.2 Deskriptivní geometrie na fakultě stavební

V roce 1960 byly sloučeny fakulty inženýrského stavitelství, architektury a pozemního stavitelství do nové fakulty stavební.

Počty hodin **deskriptivní geometrie** (společná část pro všechny obory):

Školní rok	1. rok		2. rok
	Zimní semestr	Letní semestr	Zimní semestr
1960/61	5/3	4/2	-
1961/62	6/4	3/3	-
1962/63	6/4	3/3	2/2
1963/64	6/4	3/3	1/2
1964/65 (*)	3/4	3/3	1/1
1965/66	3/4	3/3	-
1966/67 (**)	3/4	3/3	-

(*) Obor architektury a urbanismu má **deskriptivní geometrii** pouze v prvním roce v rozsahu 3/3 v zimním semestru a 3/3 v semestru letním.

(**) Obor architektury a urbanismu má o jednu hodinu přednášek v letním semestru méně.

DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE NA VUT V BRNĚ

V následující tabulce jsou uvedeny počty hodin deskriptivní geometrie v jednotlivých oborech. Je vidět, že postupně dochází ke snižování hodinové dotace deskriptivní geometrie:

Šk. Rok	Architekti		Pozemní stavitelství		Prům. výroba staveb. dílců		Dopravní stavby		Vodní stavby	
	Z	L	Z	L	Z	L	Z	L	Z	L
1968/69	3/4	2/2	3/4	3/3	2/2	3/3	3/2	3/4	3/3	2/2
1969/70	3/4	2/2	3/4	3/3	2/2	3/3	3/3	3/3	3/3	2/2
1970/71	3/4	2/2	3/4	3/3	2/2	3/3	3/3	3/3	3/3	2/2
1971/72	2/3	2/2	3/3	3/3	2/2	2/2	3/3	3/3	3/3	2/2
1972-77	2/3	2/2	3/3	3/3	2/2	2/2	2/2	2/2	2/2	2/2
1977-80	-	-	2/2	2/1	2/2	-	2/1	2/1	2/3	-
1980/81	-	-	2/2	2/1	2/2	-	2/2	-	2/2	-
1981-83	-	-	2/2	2/1	2/2	-	2/2	-	2/2	-
1983-86	-	-	2/2	-	2/1	-	2/1	-	2/2	-
1986-90	-	-	2/2	-	2/1	-	2/2	-	2/2	-

V letech 1991 – 2004 (s výjimkou let 1998 – 2001) měly všechny obory společnou **deskriptivní geometrii**:

Zimní semestr (2/2): *Afinita a kolineace. Kuželosečky. Mongeovo promítání. Axonometrie. Šroubovice a šroubové plochy. Rozvinutelné, přechodové a rotační plochy (řezy, proniky).*

Letní semestr (0/2): *Lineární perspektiva. Kosoúhlé promítání. Zborcené plochy.*

V letech 1998 – 01 se deskriptivní geometrie učila pouze v zimním semestru v rozsahu 3/3, ale se stejnou náplní, kde se navíc objevilo i *teoretické řešení střech a topografické plochy.*

Od roku 2004/05 přešla fakulta stavební na nový systém bakalářského a magisterského studia. To kromě jiného přineslo i snížení hodin deskriptivní geometrie. **Deskriptivní geometrie** se nyní učí pouze v letním semestru v rozsahu 2/2.

2.3 Deskriptivní geometrie na fakultě architektury

V roce 1976 byla založena fakulta architektury. Počty hodin deskriptivní geometrie klesají od 7 za rok, po současný stav 2/2 v letním semestru.

2.4 Deskriptivní geometrie na fakultě strojní

Fakulta strojní vznikla v roce 1959 rozdělením fakulty energetické.

Počty hodin deskriptivní geometrie na fakultě strojní:

Školní rok	Zimní semestr	Letní semestr	2.rok, zimní sem.
1959/60	3/4	2/2	-
1960/61	4/2	2/2	-
1961/62	4/2	2/2	2/2
1962/63	3/2	3/2	2/2
1963/64	4/2	2/2	2/2
1964/65	4/3	3/3	2/2
1965 – 67	3/3	3/2	-
Deskriptivní geometrie a analytická geometrie			
1968 – 71	4/4	4/3	-
Deskriptivní geometrie			
1971 – 77	4/4	4/3	-
Konstruktivní geometrie (**)			
1977/78	2/2	1/2	-
1978 – 90	3/3	-	
1991 – 96	2/4	-	-

(*) - *Základní geometrické pojmy. Mongeova projekce a axonometrie. Křivky, plochy a jejich obecné vlastnosti. Rotační plochy, šroubovice a šroubové plochy. Rozvinutelné plochy.*

Od roku 1996 se předmět jmenuje **Úvod do konstruktivní geometrie** (2/2 v zimním semestru).

2.5 Deskriptivní geometrie na fakultě technologické

Fakulta technologická vznikla v roce 1969 z detašovaného pracoviště v tehdejší Gottwaldově. Pouze v roce 1966 se deskriptivní geometrie učila v obou semestrech (3/2), od roku 1967 pak jen v zimním semestru. V letech 1980 – 90 se předmět jmenuje **konstruktivní geometrie** (2/2). Od roku 1991 se už samostatná deskriptivní geometrie neučí.

Literatura

- [1] O. Franěk: *Dějiny České vysoké školy technické v Brně. Díl 1, do roku 1945*, VUT, Brno, 1969.
- [2] O. Franěk: *Dějiny České vysoké školy technické v Brně. Díl 2*, VUT, Brno, 1975.
- [3] Emil Müller: *Der Unterricht in der Darstellenden Geometrie an den Technischen Hochschulen*, K.k Hof- und Staatsdruckerei, Vídeň, 1911.
- [4] Archiv VUT.

Mária Zvariková, Zuzana Juščáková

GENDER DIFFERENCES IN TESTS OF SPACE ABILITIES

Abstract

The paper gives information about verification of construct validity of Spatial Skills Test composed by our team. Differences in test results were analysed on a sample of 901 students of secondary schools and universities in the Czech and Slovak Republics. The verified differences between the two sexes correspond to the data quoted in literature on this topic. Males achieved better results using methods proposed by our team.

Keywords

Spatial skills, Spatial intelligence, Sex differences

1 Introduction

Creating a new psychodiagnostic method - Spatial Skills Test (TPS) - requires verifying its construct validity. Seven aspects of construct validity are quoted [1], one of which is the analysis of individual differences in test results (e.g. depending on sex, age, etc.). This paper gives information about verification of individual differences depending on sex. The validity of the proposition of better male results in spatial skills tests was verified on the basis of data from secondary school students and university students in the Czech and Slovak Republics. This data was obtained by means of our test as well as by standardized psychodiagnostic methods.

Differences between males and females in cognitive abilities are generally discussed by lay public, especially the differences in motory skills, perception or observation and verbal skills, where females show better results, and differences in spatial skills and mathematical skills, where males show better results. Also psychologists state that males and females differ in specific cognitive skills [2].

Although the differences between sexes in test results are globally diminishing, there are consistent differences in visual-spatial relations. Males show better performance in spatial skills tests, especially when the tasks have a time limit and require application of geometrical properties of space, such as mental rotation of objects (i.e. tests measuring the ability of mental rotation of three - dimensional geometrical shapes). On

the other hand, females show better results in tasks like recalling the distribution of objects in space. On the basis of the above we have expected different performances of males and females in tests of spatial imagination [3,4,5,6].

2 Method

2.1 Set of data

Stratification of the analysed sample was based on data of students accepted at Slovak universities (apart from technical study branches), faculties of natural sciences and pedagogical faculties (apart from social sciences). The data was acquired from 901 students of secondary schools and universities in the Czech and Slovak Republics. The average age of males was 19.71, the average age of females 20.02.

	<i>SECONDARY SCHOOLS</i>			<i>UNIVERSITIES</i>			TOTAL	
	CR	SR	TOTAL	CR	SR	TOTAL		
<i>MALES</i>	103	44	147	165	267	432	579	64,3%
<i>FEMALES</i>	21	30	51	39	232	271	322	35,7%
TOTAL	124	74	198	204	499	703	901	100%

Tab 1 *Structure of respondents*

2.2 Tools

Analysis of Intelligence Structures, Subtest Cube Recognition (ISA-RK)

The tested person must decide whether any of the seven three-dimensional cubes is identical with the given cube. The seven cubes are illustrated in different perspectives (or points of view) from the first one and therefore the tested persons must rotate them in their imagination, or at least they must rotate around them. *Maximum number of points (gross score - GS) in the short version of the test we have used is 12.*

Orientalional Test of Cognitive Skills, Subtest Cube Selection (OTRS-VK)

The tested person must determine the number of cubes (in a limited space) which have an opening and are not damaged. This number must be written down. The cubes with an opening are marked by a cross in the front and this symbol applies to all the cubes in a row. The damaged cubes are marked by

GENDER DIFFERENCES IN TESTS OF SPACE ABILITIES

a cross at the top or on the sides and this symbol applies to all the cubes in a row and/or in a column. *Maximum number of points is 20.*

Spatial Skills Test (TPS 2) - experimental version

Subtest 1 - Mutual Position: The tested person draws a mental line and an geometrical area from two or three points. The skeleton of this spatial situation is a cube, a tetrahedron or an octahedron. The task of the tested person is to fix their mutual position by choosing the one option which illustrates a different relationship than the other three options. *Maximum number of points is 10.*

Subtest 2 - A Snake in a Cube: The tested person draws an axonometry of a snake twisting in a cube from the three given orthogonal illustrations. *Maximum number of points is 10.*

Subtest 3 - Two Parts of a Cube: The task includes choosing one of four cubes with a missing sector which forms a perfect cube with a given sector. *Maximum number of points is 10.*

2.3 Procedure

The measurements were carried out in the academic year 2004/2005 in groups during seminars with an informed consent of the participants.

The requirement of a standard uniform approach was fulfilled in assigning tasks, registering results, evaluation and interpretation of results. The results were processed by methods of descriptive and inductive statistics, statistical software Statgraphics was used.

3 Results

3.1 Characteristics of the Set of Data

Characteristics	Sex	ISA-RK	OTRS VK	TPS2			
				subt. 1	subt. 2	subt. 3	Total
arithmetical average	M	6.58	13.04	4.46	5.4	6.96	16.83
	F	5.17	10.5	3.24	2.73	5.01	10.98
standard deviation	M	3.23	4.01	2.44	3.14	2.13	6.32
	F	2.91	4.28	2.19	2.62	2.22	5.62

Tab 2 *Numerical characteristics of the set of data - males and females - level of performance (GS - number of points) in spatial skills tests*

3.2 Comparison of Sets of Data

	ISA-RK	OTRS-VK	TPS 2			
			subt. 1	subt. 2	subt. 3	Total
MALES	6.58	13.04	4.46	5.4	6.96	16.83
FEMALES	5.17	10.5	3.24	2.73	5.01	10.98
F-test	1.23	0.87	1.24	1.44	0.99	1.26
t-test	6.71*	8.90*	7.74*	13.73*	13.02*	14.36*

Tab. 3 *Difference between the level of performance (arithmetical average GS) of set of data of males and females.*

* statistically relevant difference for the level $\alpha = 0.05$

The difference between the compared arithmetical averages of the gross score of all males and females is statistically relevant, it is significant (5%) in all the tools used to measure the level of spatial imagination to the advantage of males.

	ISA-RK	OTRS-VK	TPS 2			
			subtest 1	subtest 2	subtest 3	Total
MALES	6.58	13.04	4.46	5.4	6.96	16.83
FEMALES	5.17	10.5	3.24	2.73	5.01	10.98
r^s	0,21*	0.28*	0.38*	0.25*	0.4*	0.4*

Tab 4 *The measure of correlation between sex and level of performanc*

* statistically relevant difference for the level $\alpha=0,05$

The correlation between the performance in spatial skills tests and the sex is statistically relevant, 5 % significant in all the tools of measurement. It is a slight correlation, the highest measure of correlation was observed in TPS2 ($r^s = 0.4$).

4 Conclusion

Verifying tool validity is a never ending process. The observed differences in performance of males and females support the general assumption that males score higher in spatial skills tests. We can therefore consider the construct validity of the experimental tool TPS2 to be confirmed (from the aspect of analysis of individual differences in test results depending on sex).

It is important to remember that these are average differences and that the measure of differences between subgroups is usually small in

GENDER DIFFERENCES IN TESTS OF SPACE ABILITIES

comparison with variability in groups. This means that some females score higher than most males and some males score lower than most females. Another aspect to consider is that correlation quotient is influenced by the measure of variability of the test score. Generally speaking, the more homogeneous the tested group, the more narrow the range of the score and the lower the correlation. This applies particularly to the group of university students where the factor of selection plays a role in the progressive decrease of correlation between the score in spatial skills tests and the sex.

More factors influence spatial orientational abilities [7]. External factors include geographical and social environment and culture. Another important factor is the intrauterine influence of sexual hormones on the development of the brain structures (including the dominance of hemispheres). The sexual hormones directly influence the development of the nervous substrate which supports spatial skills. Their indirect influence follows from preference of activities which are connected with spatial imagination and which develop spatial imagination. Preference of these activities at an early age can also be influenced by parents' encouraging the engagement in a particular activity associated with the particular sex.

Predominance of men or women in certain professions is not just a result of the influence of socialization and environment but it has deeper genetic roots. The differences between sexes in cognitive models which can be easily observed are real and biologically determined. They are a result of the selection process. Real life of course confronts us with complex tasks which require combining our varied abilities and so the observed differences in partial abilities are erased. In this sense we can speak about the equality of sexes.

Acknowledgements

The paper was written with the financial support of VEGA 1/1407/04 grant.

References

- [1] Cronbach, L. J., Meehl, P. E.: *Construct Validity in Psychological Tests*. Psychology Bulletin, 52, 1955, 281 – 296.
- [2] Atkinson, R. L., Atkinson, R. C., Smith, E. E., Bem, D. J., Hoeksema, S. N.: *Psychologie*. Praha, Victoria Publishing 1995.
- [3] Doreen Kimura: *Női agy, férfi agy*. Kairosz Kiadó, Budapest, 2003, 296 oldal (rec. In: Magyar Pszichológiai Szemle, 2004/4, s.605-607)
- [4] Masters, M. S., Sanders, B.: *Is the Gender Difference in Mental Rotation Disappearing?* Behavior Genetics, 23, 1993, 7, s.337 – 341.
- [5] Voyer, D., Voyer, S., Braden, M. P.: *Magnitude of sex differences in spatial abilities: A meta-analysis and consideration of variables*. Psychological Bulletin 117, 1995, 6, 250 – 270.
- [6] Górska, R.- Piekarski, L.: *MRT – A MEASURE OF STUDENTS VISUALIZATION ABILITIES AT THE CRACOW UNIVERSITY OF TECHNOLOGY*, Proceedings 7th ICECGDG, Volume 2, Cracow, 1996, ISBN 83-904805-5-7, pp.556
- [7] Laznibatová, J., Ostatníková, D., Dohnányiová, M., Pastor, K.: *Skúmanie vzťahov medzi priestorovou predstavivosťou a hladinou testosterónu u nadaných detí*. Československá psychologie 2001/XLV/3, s.193 – 207.

Antonina Žaba

BARTHOLOMEW STROBEL'S DRAWING COMPARED TO PETER KRUEGER'S PUBLICATION

Abstract

Bartholomew STROBEL (1591-1650), within his artistic heritage, left a drawing entitled *The Allegory On Liberated Arts At The Time Of The Thirty-Years' War*. It presents, inter alia, an interesting geometric motif. The researchers presenting their opinions on the said motif reached no agreement whether this is a substantial geometric structure or a symbolic reference to geometry. The authoress of this paper established that the elements composing the described geometric motif were published before STROBEL's drawing, including without limitation the work *Tetraginismvs circvli per lineas: quem Nicolavs Raimarvs fyndamento svo astronomicotranscursim inferuit, expeditiori structvra et evidentiori demonstratione productus* by Peter KRUEGER (1580-1639).

Keywords

Baroque, Silesian art, geometric drawing.

1 Introduction

The time of thirty years' war (1618-1648) was long perceived as time unfriendly to the development of science and art. Recently, more comprehensive research was started in Poland over the artists of the time and the works then created. Bartholomew STROBEL [8], a Baroque painter born in Wrocław enjoys large interest of the researchers. Despite being a Lutheran, he worked as a court painter of Emperor Matthias II Habsburg (1557-1619). Later, due to the growing religious oppressions, he left Silesia and became the court painter of King Ladislaus IV Vasa (1595-1648). Few works of the artist were preserved. The persons dealing in geometry shall probably become interested in *The Allegory On Liberated Arts At The Time Of The Thirty-Years' War* [1636] (fig. 1).

An attempt to find a structure corresponding to the motif of the drawing discussed was made by Jan HARASIMOWICZ¹. He made a thorough research on the works by Johannes KEPLER (1571-1630). However, he did not find such structure [5/p.118].



Figure 1: The drawing-pen picture *The Allegory On The Liberal Arts At The Time Of The Thirty-Years' War* (1636) (B. STROBEL - The collection of The Kornik Library of The Polish Academy of Sciences).

2 Peter KRUEGER'S Publication

The authoress of this paper, inspired by the research, considered that the search should be focused on the circles related to Gdańskie Gimnazjum Akademickie (Gdańsk Grammar School - established in 1580). Two arguments opted for it. The drawing was made in Gdańsk and was dedicated to a disciple of this Lutheran School, whereas STROBEL himself lived in

¹ Compare with [7/p.90].

Gdańsk. Numerous interesting figures were related to the Gdańsk school². One of them was a master of philosophy, mathematician, astronomer, town surveyor - Peter KRUEGER³. In the years 1607-1639 he worked at Gdańskie Gimnazjum as a professor of mathematics and poetry. KRUEGER maintained correspondence with Johannes KEPLER, Jan BROŻEK, Philip MUELLER, Martin HORTENSIUS, and his studies were visited by numerous famous people (e.g. Ludwig KEPLER son of Johannes). Polish king Sigismund III Vasa (1566-1632) conferred him a privilege in 1623. It forbid the free reprinting of one of KRUEGER's books on pain of high monetary penalty.

The publications of the versatile and very active scholar were highly valued. They comprised the issues of mathematics, astronomy, physics, geography, chronology and calendariography. Presently many of them are in the Library of the Jagiellonian University in Krakow. In one of the works of 1607 *Tetragonismus circuli per lineas: quem Nicolavs Raimarvs ...*, there is a drawing (fig.2) presenting a structure similar to the straight-line drawn part of the motif (in STROBEL on the right). It precedes the quadrature of circle by KRUEGER⁴. It may have been used in other works.

The other curvilinear element (in STROBEL on the left), is not present in KRUEGER's work. However, in the drawing presenting the circle quadrature structures he applied "the golden cut". It seems that STROBEL did the same. A small hand drawing does not allow for explicit evidence to the thesis. We will assume, however, that this is the case and both diagrams are related to the quadrature of circle $\pi = 3,147447733$ (see fig.3).

3 Conclusion

The intriguing drawing made by STROBEL during the thirty years' war time awaits a more complete interpretation. The key issue here is the explanation of the geometric motif. In the authoress' opinion, the preliminary search results included herein are not sufficient for such interpretation. The search should also comprise the publications in the scope of examining proportions in art. Similar structures (re.: the curvilinear

²Inter alia: Johannes HEVELIUS the astronomer (disciple and co-researcher of KRUEGER), Martin OPITZ and Andreas GRYPHUS the poets.

³The information on KRUEGER developed basing on [1] and [2].

⁴Stanisław Pułdowski (1597-1645) criticized the quadrature of KRUEGER. The criticism was not published [3/p.724]

THEOR. V. PROP. XII.

Triangula æquiangula seu similia habent latera circum æquales angulos proportionalia, & contrà. 4. VI. Eucl.

Quia sc. anguli BAC & DAE , utiq; ADE & ABC ex thesi sunt æquales: Ideo si AB ad AD ita applicetur ut AC in AE cadat, reliqua latera BC & DE necessarîo erunt parallela per 9. hujus.

Atq; ita in triangulo ADE recta BC parallela basi DE per 2. VI. Eucl. crura AD & AE secat proportionaliter, ut sit velut AD ad AB , sic AE ad AC . Ducta porrò per B recta BF parallela basi AE , secabit eadem crus reliquum DE proportionaliter in F , ut sit velut AD ad AB , sic ED ad EF : velut AB ad BD , sic EF sive CB ad ED . Atq; ita, cum EF & CB æquantur, eris etiam

ut AB ad BD , sic AC ad CE , &

ut AB ad BD , sic BC ad DE , &

ut AC ad AE , sic BC ad DE . Erunt itaq; in universum triangulorum æquiangulorum latera circa æquales angulos proportionalia.

THEOR. VI. PROP. XIII.

In triangulo rectangulo perpendicularis ex angulo recto in basin facit triangula similia inter se & toti. 8. VI. Eucl.

ut in

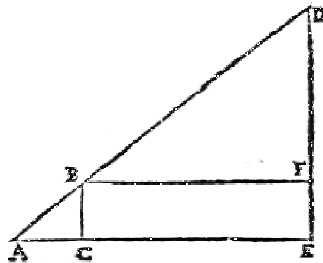


Figure 2: Drawing from *Tetraginismus circvli per lineas: quem Nicolavs Raimarvs ...* (1607), P. KRUEGER.

BARTHOLOMEW STROBEL'S DRAWING COMPARED TO...

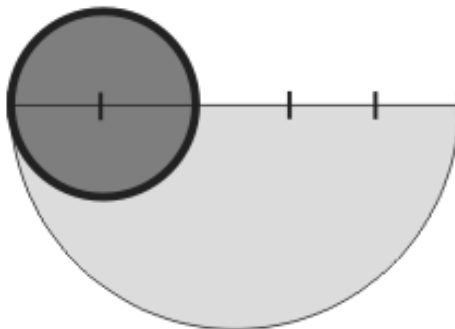
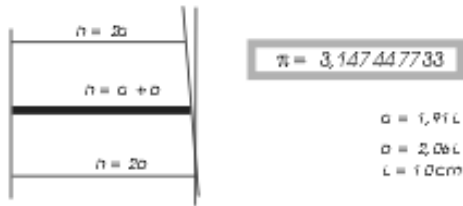
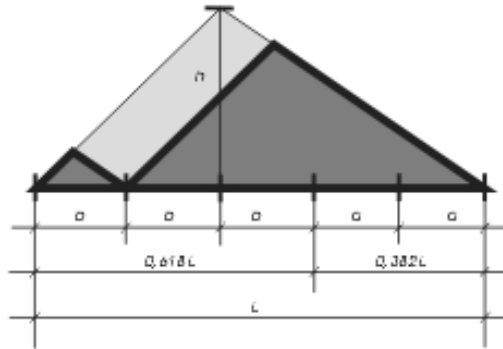


Figure 3: Comparison of selected fields of the surface from STROBEL's geometric motif.

element) are included without limitations in the work by Jeronimo Prado VILLALPANDO SJ *De postrema Ezechielis prophetae visione* (1596-1604).

References

- [1] CZERNIAKOWSKA, Małgorzata: *Piotr Krueger (1580-1639) - gdański matematyk i astronom, nauczyciel Jana Heweliusza*, [in:] "Rocznik Gdański", t. XLVII, 1987, z.1, p. 197-230.
- [2] CZERNIAKOWSKA, M.: *Piotr Krueger (1580-1639) - nauczyciel i współpracownik naukowy Jana Heweliusza*, [in:] "Kwartalnik Historii Nauki i Techniki" 1987 nr 2, p. 369-386.
- [3] DIANNI J., WACHUŁKA A.: *Tysiąc lat polskiej myśli matematycznej*, PZWS, Warszawa 1963.
- [4] DIANNI J.: *Zagadnienie kwadratury koła w polskiej literaturze matematycznej*, [in:], „Kwartalnik Historii Nauki” I z.4, Warszawa 1956.
- [5] HARASIMOWICZ J.: *Problem „Prawa natury” w malarstwie czasów wojnytrzydziestoletniej*, [in:] KOZIEŁ A., LEJMAN B. (red): *Willmann i inni. Malarstwo, rysunek i grafika na Śląsku i w krajach ościennych w XVII i XVIII wieku*, Wrocław 2002.
- [6] KRUEGER, Piotr (CRUGERUS, Petrus M.): *Tetraginismvs circvli per lineas: quem Nicolavs Raimarvs fyndamento svo astronomicotranscursim inferuit, expeditiori structvra et evidentiori demonstratione productus*, Michael Latzenberger, Lipsiae 1607.
- [7] OSZCZANOWSKI P., GROMADZKI J.: *Theatrum Vitea et Morika, rysunek i malarstwo książkowe na Śląsku w latach ok. 1550 – ok. 1650*, kat. wystawy. Muzeum Historycznego we Wrocławiu, 9 II – 18 III 1996 Wrocław 1995.
- [8] TYLICKI J.: *Bartłomiej Strobel malarz epoki wojny trzydziestoletniej*, Toruń 2002.

Antonina Žaba

ILLUSIONISTIC-ARCHITECTURAL VAULT PAINTINGS AS ANAMORPHIC PICTURES

Abstract

The paper includes discussion on the explicit classification of the illusionistic-architectural paintings called quadratures within the group of anamorphic pictures. The problems arise, inter alia, due to the lack of precise geometric definition of anamorphic transformation.

Keywords

Baroque, vault painting, anamorphic.

1 Introduction

In the works on the history of arts, architecture and historical monument preservation concerning the illusionistic-architectural paintings called quadratures, the relationship between such paintings and anamorphs is noted. There is no explicit statement therein that quadratures are anamorphs. An interdisciplinary discussion on the subject, attended by geometricians would definitely allow to them achieve a common standpoint in the matter. From the geometric point of view, however, the question is not explicit, either. A solution of the issue satisfactory for the above mentioned specialists is not simple. In the authoress' opinion, the problem is in the complexity of the artistic phenomena of quadratures and anamorphs.

2 Quadratures and anamorphs

After Ingrid SJÖSTRÖM [8/p.80] we assume that quadratures are only the paintings placed on the horizontal partitions of architectural interiors where the height of the architectural elements presented is equal to that of a full floor.

Anamorph (less frequently called anamorph) is a picture obtained through geometrical transformations called anamorphoses. This group includes various transformations. Some of them are practically applied in engineering. For our considerations, restricted to the area related to art, it is significant that some anamorphs have some specific characteristics. Shakespeare already in "RICHARD II" wrote:

"There are paintings in which you see nothing looking at them straight,

but look slantwise and you'll see some shapes"(retranslation – mine [JKH]).

In mannerism and baroque, anamorphs used to be called "*odd perspectives*"[4/p.204].

This popular definition indicates the different character of anamorphs (or more precisely, anamorphous perspectives) compared to the "normal" perspectives. Perspective is the geometric method of building the images of existing or designed objects (the central projection method) as well as the images drawn up with the said method. The normality or oddness criterion refers to the result, effect of action, i.e. the picture, not the method. If a perspective picture corresponds to what is created in human eye then such picture is considered normal. Let us have a closer look on three identical vertically standing columns (fig.1).

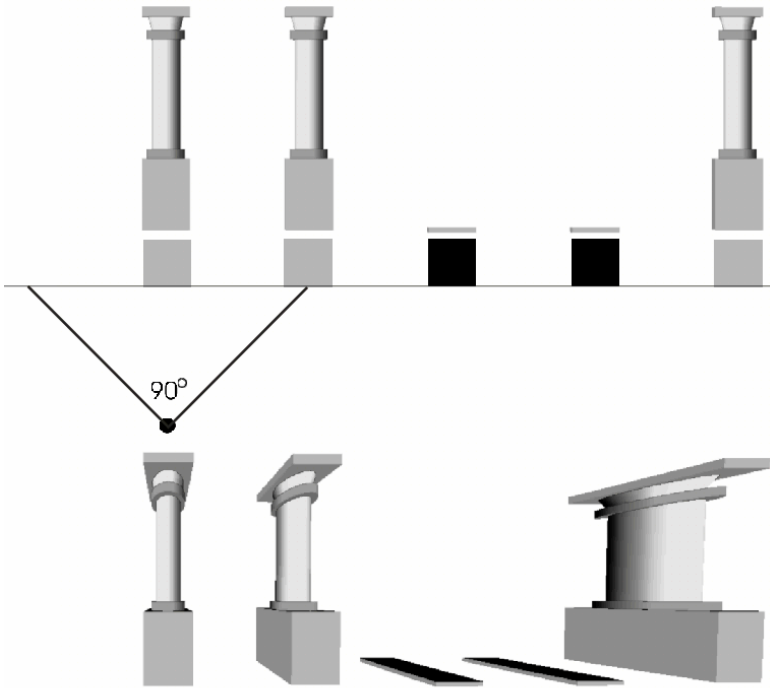


Figure 1: View end perspective of three columns.

The columns, although identical and constructed under the same principles, their pictures significantly differ from one another. The picture of the column on the right side will certainly be considered odd, while the one on the left - normal. The picture of the central column may raise certain

doubts, but does not surprise us. We see that the odd picture arises in the area within the angle of view larger than the right angle. The perspective is often called lateral. Probably not everyone would acknowledge the odd column's picture an anamorph. This is because it is commonly considered that an anamorph must be a „puzzle of art”, with solution only possible when the observer finds the appropriate point of the picture observation¹. Looking at fig. 1 from any point we have no doubt that all the three pictures are those of columns. Then we may acknowledge that the picture of the column on the right, although odd, is not an anamorph. Similar is the case of a quadrature. From any point in an architectonic interior we easily recognize the specific architectural elements painted on the vault (columns, beams). However, only then the observer's eye is near the place the perspective² picture was constructed, the tall, vertical architectural elements presented in the picture will seem vertical. Some researchers think that a conditions necessary for the existence of an anamorph phenomenon is „*forcing double perception*” [6/p.193]. An anamorph should be displayed in such a way that at first the observer would see a mysterious shape, then, moving slowly in relation to it, he would reach the point in which the solution – „the proper shape” would appear. From the geometric point of view the point is in finding the projection center.

In case of quadratures, a point called *punto stabile* was marked on the floor. This is the position the observer should assume to that his eyes will be close to the projection center. This is where we are illusioned that the columns painted are vertical.

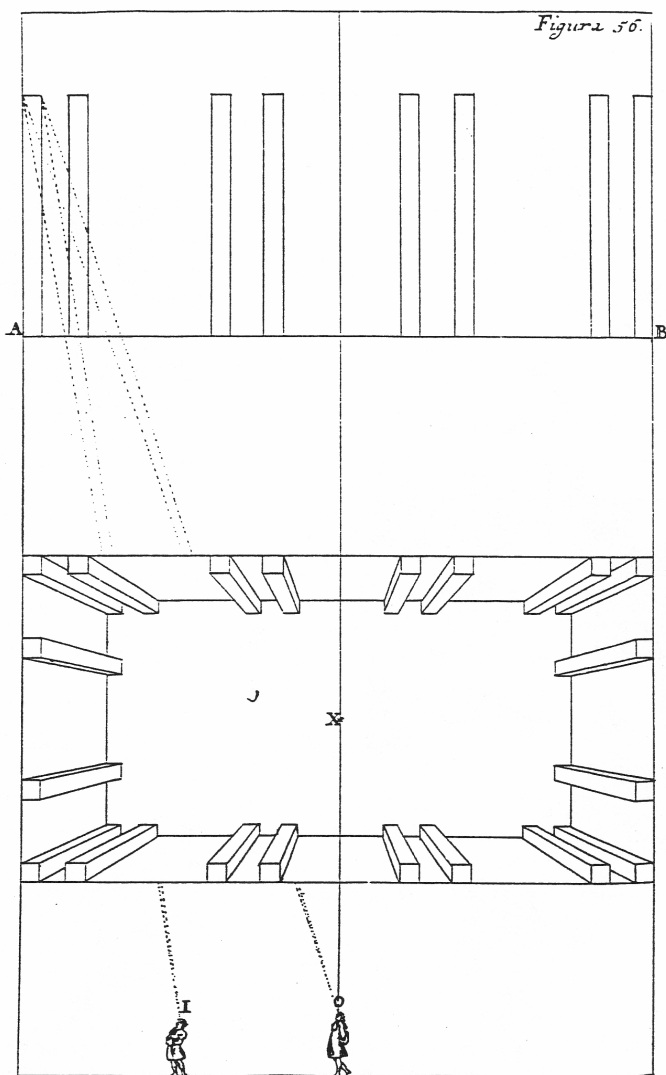
Andrea POZZO (1642-1709), master and popularizer of the architectural illusionism, did not analyze quadratures as anamorphs in his paper *Perspectiva pictorum et architectorum...* . However the proportions of an interior he suggests when planning the painting of a quadrature allow for the maintenance of the angle of view below the right angle (fig.2, 3).

Some domes constitute a particular case.

The angle of view is clearly larger here than the right angle. Then there will be deformations of the picture as shown in fig. 1 (on the right). Let us remind however that in our considerations we recognized the type of deformation insufficient to call such picture an anamorph.

¹ The considerations in this paper do not refer to reflexive anamorphs, i.e. ones to be read with the use of mirror only or ones read with the use of lenses (see [2]).

² Corresponding to the projection's center.



**Figure 2: Drawing 56 from *Perspectiva pictorum et architectorum ...*
Andea POZZO's thesis**

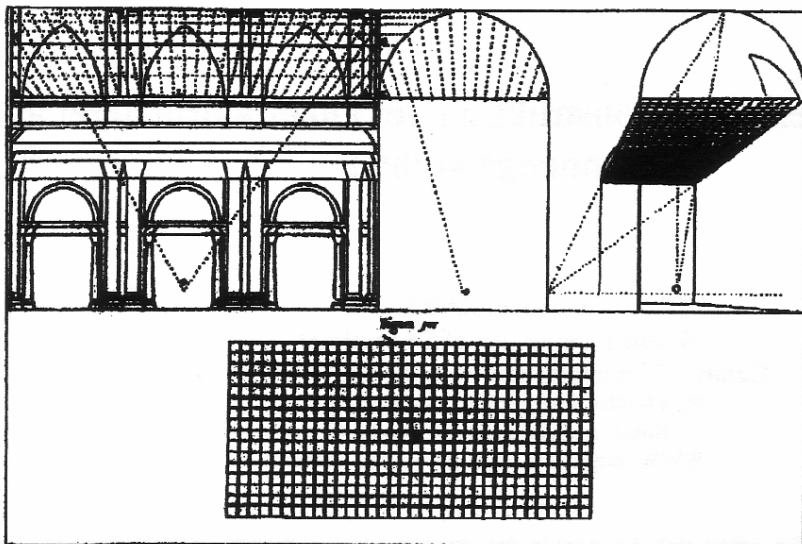


Figure 3: Drawing 100 from *Perspectiva pictorum et architectorum* ...
Andrea POZZO's thesis



Figure 4: Cupola in S. Ignazio Church, Rome, A. POZZO

In S. Ignazio Church, Rome, POZZO made a picture of such dome (fig.4). He was criticized both by POZZO (see [3/p.40]), and our contemporaries [5]. The picture was painted on canvass and hung on the crossing between the aisle and the transept. In the flat picture there are, no “column deformations” characteristic for the vault quadratures. The observer involved in the game of “distorting and straightening of columns” is here out of the question.

3 Conclusion

In the Lexicon, apart from the general description of anamorphs, there is information that in addition to flat anamorphs there are ones on cones, cylinders, spheres. Vaults are most frequently fragments of cylindrical surfaces. This is an additional argument confirming the thesis that vault quadratures are anamorphs.

References

- [1] BOGALECKI, P.: „Winne tu chyba optyczne złudzenie...” *Szekspir – prawda – anamorfozy*, „Antropos?”, Uniwersytet Śląski 2005.
- [2] BALTRUSAITIS J.: *Anamorphic Art*, CHADWYCK-HEALEY LTD, Cambridge 1977.
- [3] COLE A.: *Perspektywa*, Wyd. Dolnośląskie, Wrocław 1993
- [4] FOLGA-JANUSZEWSKA D.: *Wprowadzenie do zagadnień przedpozzowskiej perspektywy iluzjonistycznych malowideł ściennych*, [in:] „Biuletyn Historii Sztuki“ nr 2/1981.
- [5] GARCIA-SALGADO, T.: *Anamorphic Perspective & Illusory Architecture*, [in: Internet].
- [6] MARKOWSKI, M. P.: *Pragnienie obecności: filozofia reprezentowania od Paltona do Kartezjusza*, Gdańsk 1999.
- [7] POZZO A.: *Perspectiva pictorum et architectorum*. Rome, 1693-1700.
- [8] SJÖSTRÖM I.: *Quadratura. Studies in Italian Ceiling Painting, Acta Universitatis Stockholmiensis, Studies in the History of Art.*, XXX, 1978.

SEZNAM ÚČASTNÍKŮ

LIST OF PARTICIPANTS

Eva Baranová

Technická univerzita v Košiciach
Stavebná fakulta
Vysokoškolská 4, 04200Košice
Slovenská republika
eva.baranova@tuke.sk

Michael Bartoň

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta strojní
Technická 4, 166 07 Praha 6
michael.barton@centrum.cz

Bohumír Bastl

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd, Katedra matematiky
Univerzitní 22, 306 14 Plzeň
bastl@kma.zcu.cz

Zdeňka Bednářová

Gymnázium Ch. Dopplera
Zborovská 45, 150 00 Praha 5
zdenka_bednarova@centrum.cz

Zuzana Benáková

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta stavební
Thákurova 7, 166 29 Praha 6
benakovaz@mat.fsv.cvut.cz

Michal Beneš

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta stavební
Thákurova 7, 166 29 Praha 6
benes@mat.fsv.cvut.cz

List of Participants

Květoslava Borecká

Vysoké učení technické v Brně
Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky
Technická 2896/2, 616 69 Brno
borecka@um.fme.vutbr.cz

Milan Bořík

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta stavební
Thákurova 7, 166 29 Praha 6
borikm@mat.fsv.cvut.cz

Jaroslav Černý

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta stavební
Thákurova 7, 166 29 Praha 6
cerny@mat.fsv.cvut.cz

Jaromír Dobrý

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd, Katedra matematiky
Univerzitní 22, 306 14 Plzeň
dobry@kma.zcu.cz

Milan Doležal

Vysoká škola báňská Technická univerzita Ostrava
Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
tř. 17. listopadu 15, 708 33 Ostrava-Poruba
milan.dolezal@vsb.cz

Jiří Doležal

Vysoká škola báňská Technická univerzita Ostrava
Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
tř. 17. listopadu 15, 708 33 Ostrava-Poruba
jiri.dolezal@vsb.cz

Milena Foglarová

Univerzita Pardubice
Dopravní fakulta Jana Pernera
Hybernská 5, 110 00 Praha 1
milena.foglarova@upce.cz

Šárka Gergelitsová

Gymnázium Benešov
Husova 470, 256 01 Benešov
sarka@gbn.cz

Henryk Gliński

Silesian University of Technology
Institute of Mathematics
Kaszubska 23, 44-100 Gliwice
Polska republika
hglinski@zeus.polsl.gliwice.pl

Roman Hašek

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Jeronýmova 10, 371 15 České Budějovice
hasek@pf.jcu.cz

Oldřich Hykš

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta dopravní
Na Florenci 25, 110 00 Praha 1
hyks@mokropsy.com

Zuzana Juščáková

Technická univerzita v Košiciach
Stavebná fakulta, Katedra deskriptívne geometrie
Letná 9, Košice
Slovenská republika
zuzana.juscakova@tuke.sk

List of Participants

Adolf Karger

Univerzita Karlova
Matematicko-fyzikální fakulta
Sokolovská 83, 186 00 Praha 8
karger@karlin.mff.cuni.cz

Marie Kargerová

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta strojní
Karlovo nám. 13, 121 35 Praha 2
karg@fsik.cvut.cz

Hana Kašparová

Gymnázium
Žižkova 162, 280 31 Kolín
Hana.Kasparova@quick.cz

Mária Kmet'ová

Univerzita Konštantína filozofa v Nitre
Fakulta prírodných vied
Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
Slovenská republika
mkmnetova@ukf.sk

Milan Kočandrlle

Univerzita Karlova
Matematicko-fyzikální fakulta
Sokolovská 83, 186 00 Praha 8
Milan.Kocandrlle@mff.cuni.cz

Milada Kočandrlová

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta stavební
Thákurova 7, 166 29 Praha 6
kocandrlova@mat.fsv.cvut.cz

Alexej Kolcun

Akademie věd České republiky
Ústav geoniky
Studentská 1768, 708 00 Ostrava-Poruba
kolcun@ugn.cas.cz

Ivan Kolomazník

Vysoká škola báňská Technická univerzita Ostrava
tř. 17. listopadu 15, 708 33 Ostrava-Poruba
ivan.kolomaznik@vsb.cz

Jiří Kosinka

Johannes Kepler University
Institute of Applied Geometry
Altenberger Str. 69, A-4040 Linz
Austria
jiri.kosinka@jku.at

Anna Kovářová

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta stavební
Thákurova 7, 166 29 Praha 6
kovarova@mat.fsv.cvut.cz

Iva Křivková

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta stavební
Thákurova 7, 166 29 Praha 6
krivkova@mat.fsv.cvut.cz

Karolína Kundrátová

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta strojní
Karlovo nám. 13, 121 35 Praha 2
kundratova@atlas.cz

List of Participants

František Kuřina

Univerzita Hradec Králové
Rokitanského 62 500 03 Hradec Králové
frantisek.kurina@uhk.cz

Miroslav Lávička

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd, Katedra matematiky
Univerzitní 22, 306 14 Plzeň
lavicka@kma.zcu.cz

Pavel Leischner

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Jeronýmova 10, 371 15 České Budějovice
leischne@pf.jcu.cz

Ivana Linkeová

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta strojní
Karlovo nám. 13, 121 35 Praha 2
linkeova@fsik.cvut.cz

Kamil Maleček

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta stavební
Thákurova 7, 166 29 Praha 6
malecek@mat.fsv.cvut.cz

Eva Maňásková

Gymnázium Ladislava Jaroše
Palackého 524, 769 01 Holešov
manaskova@gymhol.cz

Dagmar Mannheimová

Gymnázium
Komenského 713, 739 61 Třinec
dagmar.mannheimova@gymtri.cz

Dalibor Martišek

Vysoké učení technické v Brně
Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky
Technická 2896/2, 616 69 Brno
martisek@fme.vutbr.cz

Katarína Mészárosová

Slovenská technická univerzita v Bratislave
Stavebná fakulta
Radlinského 11, 813 68 Bratislava 1
Slovenská republika
katarina@math.sk

Jan Mizerovský

SPŠ sdělovací techniky
Panská 3, 110 00 Praha 1
mizerovsky@panska.cz

Martin Němec

Vysoká škola báňská Technická univerzita Ostrava
tř. 17. listopadu 15, 708 33 Ostrava-Poruba
martin.nemec@vsb.cz

Stanislav Olivík

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta stavební
Thákurova 7, 166 29 Praha 6
olivik@mat.fsv.cvut.cz

List of Participants

Pavel Pech

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Jeronýmova 10, 371 15 České Budějovice
pech@pf.jcu.cz

Karel Pivoňka

Institut Jana Pernera, o.p.s.
Hybernská 5, 110 00 Praha 1
karel.pivonka@upce.cz

Jiří Poláček

Vysoká škola báňská Technická univerzita Ostrava
Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
tř. 17. listopadu 15, 708 33 Ostrava-Poruba
jiri.polacek@vsb.cz

Eva Pomykalová

Gymnázium
Lesní čtvrť 1364, 761 37 Zlín
pomykal@sendme.cz

Anna Porazilová

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd, Katedra matematiky
Univerzitní 22, 306 14 Plzeň
aporazil@kma.zcu.cz

Lenka Pospíšilová

Masarykova univerzita v Brně
Přírodovědecká fakulta, Katedra matematiky
Janáčkovo nám. 2a, 602 00 Brno
pospisl@math.muni.cz

Radka Pospíšilová

Masarykova univerzita v Brně
Fakulta informatiky
Botanická 68a, 602 00 Brno
xpospis5@fi.muni.cz

Jana Procházková

Vysoké učení technické v Brně
Fakulta strojního inženýrství
Technická 2896/2, 616 69 Brno
prochazkovajana@centrum.cz

Marie Provazníková

Mendelova zemědělská a lesnická univerzita v Brně
Zemědělská 3, 613 00 Brno
provazn@math.muni.cz

Jana Přívratská

Technická univerzita v Liberci
Hálkova 6, 461 17 Liberec 1
jana.privratska@vslib.cz

Adam Ružyczka

Agricultural University of Cracow
Al. Mickiewicza 21, 31-120 Krakow
Polska republika
rmruzycz@cyf-kr.edu.pl

Vladimír Sedlář

Slezská univerzita v Opavě
Matematický ústav
Na Rybníčku 1, 746 01 Opava
Vladimir.Sedlar@math.slu.cz

List of Participants

Ivo Serba

Masarykova univerzita v Brně
Fakulta informatiky
Botanická 68a, 602 00 Brno
serba@fi.muni.cz

Hellmuth Stachel

Vienna University of Technology
Wiedner Hauptstr. 8-10/113, A-1040 Wien
Austria
stachel@dmg.tuwien.ac.at

Eva Stanová

Technická univerzita v Košiciach
Stavebná fakulta
Vysokoškolská 4, 042 01 Košice
Slovenská republika
eva.stanova@tuke.sk

Tomáš Staudek

Masarykova univerzita v Brně
Fakulta informatiky
Botanická 68a, 602 00 Brno
toms@fi.muni.cz

Arnošt Šarman

Vysoká škola báňská Technická univerzita Ostrava
Katedra informatiky
tř. 17. listopadu 15, 708 33 Ostrava-Poruba
arnost.sarman@vsb.cz

Zbyněk Šír

Johannes Kepler University
Altenberger Str. 69, A-4040 Linz
Austria
zbynek.sir@jku.at

Jaroslav Škrabálek

Masarykova univerzita v Brně
Fakulta informatiky
Botanická 68a, 602 00 Brno
jaroslav.skrabalek@gmail.com

Jiří Šrubař

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta architektury
Thákurova 7, 166 29 Praha 6
jiri.srubar@seznam.cz

Diana Šteflová

Univerzita Palackého v Olomouci
tř. Svobody 26, 771 46 Olomouc
Diana.S@email.cz

Vladimír Tichý

Vysoká škola ekonomická
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3
tichy@vse.cz

Světlana Tomiczková

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd, Katedra matematiky
Univerzitní 22, 306 14 Plzeň
svetlana@kma.zcu.cz

Věra Tůmová

SPŠ sdělovací techniky
Panská 3, 110 00 Praha 1
tumova@panska.cz

List of Participants

Margita Vajsáblová

Slovenská technická univerzita v Bratislave
Stavebná fakulta
Radlinského 11, 813 68 Bratislava 1
Slovenská republika
gitka@math.sk

Jiří Vaníček

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Jeronýmova 10, 371 15 České Budějovice
vanicek@pf.jcu.cz

Jana Vecková

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta stavební
Thákurova 7, 166 29 Praha 6
veckova@mat.fsv.cvut.cz

Daniela Velichová

Slovenská technická univerzita v Bratislave
Strojnícka fakulta
Nám. slobody 17, 812 31 Bratislava
Slovenská republika
daniela.velichova@stuba.sk

Šárka Voráčová

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta dopravní
Na Florenci 25, 110 00 Praha 1
voracova@fd.cvut.cz

Edita Vranková

Trnavská univerzita v Trnave
Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a informatiky
Priemyslená 4, 918 43 Trnava
Slovenská republika
evrankov@truni.sk

Radek Výrut

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd, Katedra matematiky
Univerzitní 22, 306 14 Plzeň
rvyrut@kma.zcu.cz

Gunter Weiss

Technische Universität Dresden
Institut für Geometrie
D - 01062 Dresden
Deutschland
weiss@math.tu-dresden.de

Antonina Żaba

Silesian University of Technology
Faculty of Civil Engineering
ul.Akademicka 5, 44-100 Gliwice
Polska republika
azaba@zeus.polsl.gliwice.pl

Lucie Zrůstová

Vysoké učení technické v Brně
Fakulta stavební, Ústav matematiky a deskriptivní geometrie
Žižkova 17, 602 00 Brno
zrustova.l@fce.vutbr.cz

List of Participants

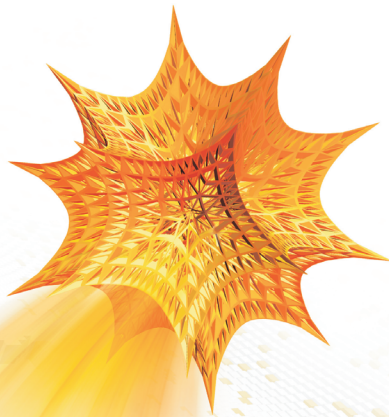
Mária Zvariková

Technická univerzita v Košiciach
Katedra spoločenských vied
Letná 9, Košice
Slovenská republika
maria.zvarikova@tuke.sk

Vlasta Zvoníčková

Mendelova zemědělská a lesnická univerzita v Brně
Zemědělská 1, 613 00 Brno
Zvon@mendelu.cz

Introducing 64-bit & multicore technical computing



JUST
RELEASED

MATHEMATICA[®] 5.2

New in Mathematica 5.2—

- All-platform support for 64-bit addressing
- Multicore support on major platforms
- Multithreaded numerical linear algebra
- 64-bit-enhanced arbitrary-precision numerics
- Vector-based performance enhancements
- Bundled notebook indexing for desktop search
- SSH support for secure remote kernels

New in Mathematica 5.1 and 5.0—

- Optimized numerical linear algebra
- Industrial-strength string manipulation
- Event handling in differential equations
- Fully integrated piecewise functions
- Integrated support for assumptions
- Support for quantifiers and quantifier elimination
- Large-scale linear programming
- Advanced methods for solving differential equations
- Solvers for differential algebraic equations
- Built-in universal database connectivity
- Integrated web services support
- Graphical user interface development tool
- Support for more than 50 import/export formats
- Highly optimized binary data I/O

A Selection of Mathematica Features—

Numeric computation: full support for arbitrary and machine precision • hundreds of mathematical functions fully implemented for all parameters • fast sparse and dense matrix operations • solvers for equations and differential equations • finite and infinite sums and products • integral transforms • global optimization • linear programming • automatic or manual algorithm selection • precision control

Symbolic computation: expanding • simplification • factoring • solvers for equations, differential equations, difference equations, and inequalities • sums • products • differentiation • integration • limits • power series • integral transforms • algebraic and semi-algebraic domains

Statistics and data analysis: descriptive statistics of uni- and multivariate data • generalized linear and nonlinear fitting • multidimensional interpolation • convolution • correlation • regression • ANOVA • confidence intervals • distributions • hypothesis testing • statistical plots

Programming: multiparadigm symbolic programming language • support for procedural, functional, list-based, rule-based, and object-oriented programming • advanced pattern matching • just-in-time compilation • platform-independent implementation

Discrete mathematics: combinatorics • graph theory • computational geometry • number theory • Diophantine equations

Graphics: over 50 2D and 3D plot types • graphics language • animations • sound generation

Connectivity: .NET, Java, and C/C++ APIs • import and export filters for over 40 data and image formats • XML support • symbolic language XML

Publishing: full technical document system for presentation, print, and the web • interactive typesetting and graphics • sound • outlining • one-step export to TeX, LaTeX, XML, MathML, HTML, and XHTML

Platforms: Windows, Macintosh, Linux, other Unix platforms • web and grid versions available

User interface: WYSIWYG notebook interface • programmable buttons and palettes • presentation environment with slide show • fully interactive help

WOLFRAMRESEARCH

Test Mathematica 5.2 on your computer today with our free trial download at www.wolfram.com/m52trial

© 2005 Wolfram Research, Inc. Mathematica is a registered trademark of Wolfram Research, Inc. All other trademarks are the property of their respective owners. Mathematica is not associated with Mathematica Policy Research, Inc. or MathTech, Inc.

ELKAN, spol. s r.o.

Výhradní distributor pro Českou republiku a Slovenskou republiku
V Tuňích 12, 120 00 Praha 2

Tel.: +420 224 999 100

fax: +420 224 999 101

www.elkan.cz
vzak@elkan.cz

Název:	Sborník 25. konference o geometrii a počítačové grafice
Vydavatel:	Jednota českých matematiků a fyziků
Editor:	Stanislav Olivík
Náklad:	150 ks
Vydání:	1.
Počet stran:	350
Tisk:	Vydavatelství ČVUT v Praze
ISBN	80-7015-013-0
Evidenční číslo publikace	57-533-05

Neprodejné.

Praha 2005