Mixba'al Rev. Met. de Mat.
No. 1, Vol. VI, Junio de 2015, 23–39

# LÓGICAS $\mathfrak{M}$-FINITAS

KINRHA AGUIRRE DE LA LUZ

Resumen. Revisamos el concepto de conjuntos admisibles, destacamos algunas de sus propiedades más importantes y ofrecemos algunos ejemplos relevantes de estos conjuntos. Con ayuda de los conjuntos admisibles, definimos una familia de lógicas infinitarias, las llamadas lógicas $\mathfrak{M}$-finitas, donde $\mathfrak{M}$ hace referencia a un conjunto admisible fijo. Dichas lógicas tienen la posibilidad de aceptar un número infinito de conjunciones y disyunciones, lo que las hace más expresivas que la lógica de primer orden. Al mismo tiempo las lógicas $\mathfrak{M}$-finitas preservan algunas nociones de la lógica de primer orden, lo cual está expresado en el teorema de compacidad de Barwise, cuya demostración es el propósito del presente trabajo.

## 1. Introducción

La teoría de los conjuntos admisibles surge como una alternativa para generalizar la teoría de recursión clásica a ámbitos más grandes que los números naturales. Dicha teoría resulta más que aceptable, desde el punto de vista de la teoría de conjuntos, es decir, de los axiomas usuales de ZFE (los axiomas de la teoría de conjuntos más el axioma de elección), pues permite desarrollar, en conjuntos admisibles de altura ordinal $\alpha$, la llamada teoría de $\alpha$-recursión.

Por tal motivo, comenzamos con las nociones básicas de recursividad. Mismas que empleamos para establecer el concepto de admisibilidad, el cual acompañamos de algunas propiedades y ejemplos significativos. En seguida, aprovechando los conjuntos admisibles, proponemos una familia de lógicas, que involucran conjunciones y disyunciones, no necesariamente finitas, con ciertas características.

El permitir conjunciones y disyunciones infinitas en nuestro lenguaje nos da como resultado una ganancia significativa en el poder expresivo. Ahora, el precio por este poder, es que en general es difícil que las lógicas infinitarias sean compatibles con compacidad, una herramienta importantísima en la teoría de modelos. Pues, entre otras cosas, el teorema de compacidad, proporciona un método útil para la construcción de modelos de cualquier conjunto de enunciados que sea finito consistente. Suele decirse que un conjunto de fórmulas es finito satisfacible si cualquiera de sus subconjuntos finitos es satisfacible.

El siguiente ejemplo ilustra el hecho de que las lógicas infinitarias no siempre mantienen compacidad. Supongamos que tenemos una lógica que acepta un número infinito de conjunciones y disyunciones, si tomamos un lenguaje $\mathcal{L}$ que contenga una cantidad numerable de constantes $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots, c_\omega$ y hacemos a $\Sigma$ el conjunto de enunciados:

$$\forall x \bigvee_{n<\omega} (x = c_n), \quad c_\omega \neq c_0, \quad c_\omega \neq c_1 \ldots$$

Encontramos que cada subconjunto finito de $\Sigma$ tiene un modelo, pero $\Sigma$ no tiene modelo, por lo que no cumple el teorema de compacidad.

En el caso de las lógicas $\mathfrak{M}$-finitas, buena parte de estas carencias se remedian con el teorema de compacidad de Barwise que será el motivo principal del presente trabajo. Por esta razón, y el hecho de que cuentan con $\alpha$-recursión, las lógicas $\mathfrak{M}$-finitas, se tornan bastante atractivas, desde el punto de vista de la lógica y la teoría de conjuntos,

2010 *Mathematics Subject Classification.* 03C70.
*Palabras clave.* Estructuras admisibles, conjuntos admisibles, lógicas $\mathfrak{M}$-finitas, teorema Rasiowa-Sikorski, compacidad, teorema de compacidad de Barwise.

pues logran una ganancia en el poder expresivo sin perder del todo compacidad. Más aún, con la demostración del teorema de compacidad de Barwise se logra desarrollar en gran medida la teoría de modelos en conjuntos.

Es pertinente subrayar que los conjuntos admisibles suponen axiomas más débiles que los axiomas de ZFE. Sin embargo, nuestro marco de referencia sí supone todos los axiomas de ZFE.

## 2. Preliminares

Esta sección tiene el propósito de motivar una generalización de la teoría de recursión a dominios trasfinitos. Esta generalización sentará las bases para poder definir las estructuras admisibles. Además, definimos algunas nociones básicas que serán usadas repetidamente en lo que resta de este trabajo.

Usualmente el dominio de la teoría ordinaria de recursión es $\omega$, sin embargo el uso de la colección de conjuntos hereditarios finitos $H_\omega$ es una elegante manera de desarrollar dicha teoría, por lo que a continuación le dedicamos un breve análisis.

**Definición 1.** Decimos que un conjunto $x$ es transitivo si para todo $z \in x$, se cumple $z \subseteq x$. El que un conjunto $x$ sea transitivo lo denotamos por $\mathrm{Trans}(x)$. Formalmente $\mathrm{Trans}(x)$ denota a la fórmula $\forall z \in x(y \in z \to y \in x)$. Siempre que $x$ sea un conjunto podemos construir un supraconjunto transitivo (el más pequeño posible) que contine a $x$. Este supraconjunto es llamado la cerradura transitiva de $x$ ($\mathrm{CT}(x)$) y lo definimos de la siguiente manera:

$$\mathrm{CT}(x) = \bigcap\{z : x \subseteq z \wedge \mathrm{Trans}(z)\}.$$

Así $H_\omega = \{x : |\mathrm{CT}(x)| < \omega\}$ es la colección de conjuntos hereditariamente finitos. Sin embargo, podemos, también, definir $H_\omega$ de la siguiente manera:

$HF(0) = HF_0 = 0$

$HF(n+1) = HF_{n+1} = \{x | x \in Pot(HF(n)) \wedge |x| < \omega\}$

$H_\omega = HF(\omega) = HF_\omega = \bigcup_{n<\omega} HF_n$

Donde $Pot(HF_n)$ denota el conjunto potencia de $HF_n$, en general $Pot(x)$ es el conjunto potencia de $x$.

La prueba es por $\in$-inducción[1]. Para demostrar que $HF_\omega \subseteq H_\omega$ observemos que si $u$ es un conjunto finito, entonces $\mathrm{CT}(u)$ resulta ser, también, un conjunto finito. Pues, si $u \in HF_\omega$, $u \in HF_n$ para algún $n \in \omega$, es decir $u$ es finito. Asimismo, si $x \in u$, $x$ es un conjunto finito (pues $x \in HF_m$ con $m < n$), entonces, por hipótesis de inducción $x' = \mathrm{CT}(x)$ es finito y sabemos que $\mathrm{CT}(u) = \bigcup_{x' \in u} x'$, y por lo tanto $|\mathrm{CT}(u)| = |\bigcup_{x \in u} x'| < \omega$. Por otro lado, si $|\mathrm{CT}(x)| < \omega$, debido a que siempre que $x \subseteq \mathrm{CT}(x)$, se tiene que $|x| < \omega$, al igual que $|y| < \omega$ para toda $y \in x$. Probando de esta manera que $H_\omega \subseteq HF_\omega$. En definitiva $HF_\omega = H_\omega$.

Dada la importante relación que guarda la teoría de recursión con las fórmulas $\Delta_1$ es necesario incluir su definición, aunque sería conveniente, antes recordar el concepto de variable libre y cuantificador acotado.

Las variables libres de una fórmula $\varphi$ son aquellas que aparecen en $\varphi$ y no están cuantificadas, mientras que las variables que no son libres se llaman acotadas. Por ejemplo:

$\varphi \equiv \forall y R(x, y)$, $y$ es acotada y $x$ es libre.

$\varphi \equiv \forall x \forall y(R(x, y) \leftrightarrow R(y, x))$, no tiene variables libres.

La cuantificación acotada está relacionada con el hecho de suponer que nuestro lenguaje $\mathcal{L}$, contiene entre sus símbolos, el de pertenencia $\in$. Se acostumbra abreviar

[1]Esquema inductivo para $\in$: sea $\Phi(x, \vec{v})$ una fórmula de $LTC$ (el Lenguaje de la Teoría de Conjuntos). Entonces la siguiente afirmación es válida:

$$\forall x(\forall y \in x(\Phi(y, \vec{w}) \Rightarrow \Phi(x, \vec{w}))) \Rightarrow \forall x \Phi(x, \vec{w}).$$

Es decir, si para cualquier conjunto $x$ la validez de la propiedad $\Phi$ en $x$ se sigue de su validez en todos los conjuntos pertenecientes a $x$, entonces $\Phi$ se cumple, para todo conjunto.

las fórmulas de la forma $\forall x(x \in z \rightarrow \varphi(x))$ y $\exists x(x \in z \wedge \psi(x))$ con $\forall x \in z\varphi(x)$ y $\exists x\psi(x)$ respectivamente. Estas abreviaciones son conocidas como fórmulas con cuantificadores acotados.

Aclarada la noción de variable libre y cuantificadors acotados, nos disponemos a definir[2] las fórmulas $\Delta_1$, para tal fin usamos la jerarquía usual de fórmulas de Levy:

$\varphi$ es $\Pi_0$=$\Sigma_0$ si todos sus cuantificadores están acotados.

$\varphi$ es $\Sigma_{n+1}$ si es del tipo $\exists\vec{x}\psi$ donde $\psi$ es una $\Pi_n$-fórmula.

$\varphi$ es $\Pi_{n+1}$ si es del tipo $\forall\vec{x}\psi$ donde $\psi$ es una $\Sigma_n$-fórmula.

$\varphi$ es $\Delta_n$ si tanto $\varphi$ como $\neg\varphi$ son $\Sigma_n$.

Una fórmula es $\Sigma_n(\mathbb{M})$, si es $\Sigma_n$ y sus parámetros pertenecen a $\mathbb{M}$. De manera semejante definimos $\Pi_n(\mathbb{M})$ y $\Delta_n(\mathbb{M})$.

Por ejemplo, sea el lenguaje $\mathcal{L}_N = \langle <, \in, +, 0, 1\rangle$. Entonces:

$\forall x \in 1(x = 0)$, $\exists x \in 1(x = 0)$ y $(x = 0 \vee x = 1)$ son fórmulas $\Sigma_0$,

$\exists x(0 < x)$ y $\exists x\forall y \in 1(y < x)$ son fórmulas $\Sigma_1$,

$\forall x(x < x + 1)$ y $\forall x\exists y \in 1(y < x)$ son fórmulas $\Pi_1$ y

$\exists x\forall y(x < y)$ y $\exists x\exists y\forall z(((\neg(z = 0)) \rightarrow x < z) \wedge z < y)$ son fórmulas $\Sigma_2$.

**Definición 2.** La clase de $\Sigma$-fórmulas es la menor clase $Y$ que contiene a todas las fórmulas $\Delta_0$, es cerrada respecto conjunción, disyunción, cuantificación acotada y además satisface:

Si $\varphi \in Y$, también $\exists u\varphi \in Y$, para cualquier variable $u$.

Por ejemplo, la fórmula $\forall x \in a\exists b(\mathrm{Trans}(b) \wedge x \in b)$ es una $\Sigma$-fórmula. Vale la pena decir que este ejemplo nos ilustra que, en general, el conjunto de $\Sigma$-fórmulas difiere del conjunto de $\Sigma_1$-fórmulas. Sin embargo en presencia de ZFE, si $\psi$ es una $\Sigma$-fórmula siempre podemos encontrar una $\Sigma_1$-fórmula $\psi'$ tal que $\psi \leftrightarrow \psi'$. Esta es una de las propiedades que deseamos que nuestras estructuras admisibles conserven.

Decimos que una relación $R \subseteq H_\omega^n$ es recursiva enumerable (r.e. o "$H_\omega$-r.e.") si y sólo si $R$ es $\Sigma_1$-definible sobre $H_\omega$, es decir si existe una $\Sigma_1$-fórmula $\varphi$, con parámetros en $H_\omega^n$, tal que si $\vec{x} \in H_\omega^n$, entonces $R(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi(\vec{x})$. Análogamente, llamamos a $R$ recursiva (o $H_\omega$-recursiva) si y sólo si es $\Delta_1$-definible (es decir tanto $R$ como su complemento $\neg R$ son $\Sigma_1$-definibles). Si $R \subseteq \omega^n$, decimos que es r.e. si es la restricción de una relación $R'$ $H_\omega$-r.e. sobre $\omega$, análogamente definimos las relaciones $R \subseteq \omega^n$ recursivas.

Lo anterior sugiere una manera de relativizar el concepto de la teoría de recursión para dominios trasfinitos: sea $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{B}, \in, B_1, B_2, \ldots\rangle$ una estructura transitiva (es decir $\mathbb{B}$ es un conjunto transitivo), con una cantidad finita o infinita de predicados. Definimos:

$R \subseteq \mathbb{B}^n$ es $\mathfrak{B}$-r.e (respectivamente $\mathfrak{B}$-rec) si y sólo si $R$ es $\Sigma_1$ (respectivamente $\Delta_1$) definible sobre $\mathbb{B}$.

Se debe tener en cuenta que los elementos de $\omega$ y de $H_\omega$ son conjuntos finitos, por ello resulta muy importante el concepto de finito. Sin embargo nuestra estructura $\mathfrak{B}$ puede contener conjuntos infinitos, pues sólo hemos pedido que $\mathbb{B}$ sea transitiva. Si observamos con atención, y con especial atención al caso $H_\omega$, expresar que un conjunto $u$ sea finito, es equivalente a decir que $u \in H_\omega$, por lo que, relativizando:

$$u \text{ es } \mathfrak{B} - \text{finito si y sólo si } u \in \mathbb{B}.$$

Aclarados los conceptos de $\Sigma_n$-fórmula y $\mathfrak{B}$-finito, cuando $\mathfrak{B}$ es una estructura, nos disponemos a definir las estructuras admisibles.

## 3. Conjuntos Admisibles

El objetivo, de este apartado es presentar a las estrucuturas admisibles. Se pretende que la estructura $\mathfrak{M} = \langle \mathbb{M}, \in, A_1, A_2 \ldots\rangle$, que estamos por definir, cumpla con las siguientes propiedades básicas:

[2] A lo largo del trabajo utilizamos $\Sigma_n$-fórmulas para denotar las fórmulas que son de la forma $\Sigma_n$. Análogamente para las fórmulas $\Pi_n$ y $\Delta_n$.

**I.:** Si $A$ es recursivo y $u$ es $\mathfrak{M}$-finito, entonces $A \cap u$ es $\mathfrak{M}$-finito.

**II.:** Si $u$ es finito y $F : u \to N$ es recursiva, entonces la imagen de $u$ respecto a $F$ ($F''u$) es $\mathfrak{M}$-finita.

Este tipo de estructuras son llamadas estructuras admisibles y fueron caracterizadas por Kripke y Platek con la siguiente definición.

**Definición 3.** Una estructura transitiva $\mathfrak{M} = \langle \mathbb{M}, \in A_1, A_2, ... \rangle$ es admisible si cumple con los siguientes axiomas:

1. $\emptyset, \{x, y\}, \bigcup x$ pertenecen a $\mathbb{M}$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{M}$.
2. $\Sigma_0$-comprensión:
   $x \cap \{z | \varphi(z)\}$, es un conjunto, siempre que $\varphi$ sea una $\Sigma_0$-fórmula.
3. $\Sigma_0$-remplazo:
   $\forall x \exists y \varphi(x, y) \to \forall u \exists v \forall x \in u \exists y \in v \varphi(x, y)$, cuando $\varphi$ sea una $\Sigma_0$-fórmula.

En particular, un conjunto $A$ transitivo es admisible si $\langle A, \in \rangle$ es una estructura admisible.

Observemos que debido a la transitividad, $\mathfrak{M}$ cuenta además con los axiomas de extensionalidad y fundación[3]. Notemos también que en las estructuras admisibles, gracias a los axiomas de vacío, par y unión, siempre pueden definirse los números naturales. Recordemos que $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\} = \{0\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = 1 \cup \{1\}$, y en general $n + 1 = n \cup \{n\}$.

La definición de estructuras admisibles implica las propiedades básicas **I** y **II**, cosa que mostramos mediante los tres lemas siguientes.

Lema 4. *Sean $u \in \mathbb{M}$ y $R$ un conjunto definido mediante una $\Delta_1(\mathbb{M})$-fórmula, entonces $R \cap u \in \mathbb{M}$.*

*Demostración.* Sea $R$ un conjunto definido mediante una $\Delta_1(\mathbb{M})$-fórmula, entonces tanto $R(x)$ como $\neg R(x)$ son $\Sigma_1(\mathbb{M})$-definibles, es decir, si $x \in \mathbb{M}$, entonces $R(x) \leftrightarrow \exists y R_0(y, x)$ y $\neg R(x) \leftrightarrow \exists y R_1(y, x)$ con $R_0, R_1$ fórmulas $\Sigma_0(\mathbb{M})$.

Es claro que $\forall x \exists y (R_0(y, x) \vee R_1(y, x))$, y por lo tanto $\forall x \in u \exists y (R_0(y, x) \vee R_1(y, x))$, y debido a que $\mathfrak{M}$ es admisible, podemos utilizar $\Sigma_0$-remplazo, lo que nos garantiza que existe $v \in \mathbb{M}$ tal que:

$$\forall x \in u \exists y \in v (R_0(y, x) \vee R_1(y, x)).$$

En vista de que $(\exists y \in v R_1(y, x))$ es una $\Sigma_0$-fórmula, aplicando $\Sigma_0$-comprensión, obtenemos:

$$u \cap R = u \cap \{x | \exists y \in v R_0(y, x)\} \in \mathbb{M}.$$

□

Lema 5. *Sea $\mathfrak{M}$ una estructura admisible, entonces satisface:*

$$\forall x \in u \exists y_1 \dots \exists y_n \varphi(x, \vec{y}) \to \exists v \forall x \in u \exists y_1 \in v \dots \exists y_n \in v \varphi(x, \vec{y}),$$

*si $\varphi$ es una $\Sigma_0$-fórmula.*

*Demostración.* Supongamos $\forall x \in u \exists y_1 \dots \exists y_n \varphi(x, \vec{y})$. Debido a que $\mathfrak{M}$ admite el axioma de par podemos definir $w = \{y_1, \dots, y_n\}$ y por lo tanto se cumple $\forall x \exists w (x \in u \to \exists y_1 \dots \exists y_n \in w \varphi(x, \vec{y}))$ en $\mathfrak{M}$. Por $\Sigma_0$-remplazo, existe $v' \in \mathbb{M}$ tal que $\forall x \in u \exists w \in v' \exists y_1 \dots \exists y_n \in w \varphi(x, \vec{y})$. Para terminar, tomamos $v = \bigcup_{x \in u} v'$. □

Lema 6. *Sean $\mathfrak{M}$ una estructura admisible, $u \in \mathbb{M}$ y $u \subseteq dom(F)$, donde $F$ es $\Sigma_1(\mathbb{M})$-definible; entonces $F''u \in \mathbb{M}$, donde $F''u$ es la imagen de $u$ respecto a $F$.*

[3]Toda estructura transitiva es modelo del axioma de extensionalidad y del axioma de fundación.

*Demostración.* Sean $u \in \mathbb{M}$ y $F$ una función definida mediante una $\Sigma_1(\mathbb{M})$-fórmula. Por lo que, $y = F(x) \leftrightarrow \exists z F'(z, y, x)$ donde $F'$ es $\Sigma_0(\mathbb{M})$-fórmula. Usando el hecho de que $u \subseteq \mathrm{dom}(F)$, tenemos que $\forall x \in u \exists y(y = F(x))$, es decir $\forall x \in u \exists y(\exists z F'(z, y, x))$, por el lema anterior, existe $v$ tal que $\forall x \in u \exists y \in v \exists z \in v F'(z, x, y)$.

Finalmente, hacemos:

$$F''u = v \cap \{y | \exists x \in u \exists z \in v F'(z, y, x)\}.$$

Notemos que $F''u \in \mathbb{M}$, pues $\mathfrak{M}$ admite $\Sigma_0$-comprensión. □

Los lemas 1. y 3. nos advierten que en estructuras admisibles realmente se cumplen $\Delta_1$-comprensión y $\Sigma_1$-remplazo.

El siguiente teorema es uno de los objetivos de esta sección.

Teorema 7. *(Definición por $\Sigma$-recursión). Sean $G$ un símbolo de una $\Sigma$-función de paridad $n+2$, con $n \geq 0$ y $\mathfrak{M}$ una estructura admisible. Es posible definir un nuevo símbolo de $\Sigma$-función $F$, en $\mathfrak{M}$, tal que para toda $x_1, \ldots, x_n, y$:*

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) = G(x_1, \ldots, x_n, y, \{\langle z, F(x_1, \ldots, x_n, z)\rangle | z \in TC(y)\}).$$

*Demostración.* Primero vamos a probar que para toda $x_1, \ldots, x_n, y$ existe una $f$ tal que:

1. $f$ es una función $\wedge$ $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{TC}(y)$,
2. $\forall w \in \mathrm{dom}(f)(f(w) = F(x_1, \ldots, x_n, w))$ y
3. $F(x_1, \ldots, x_n, y) = G(x_1, \ldots, x_n, y, f)$.

Esto sugiere la fórmula para definir $F$. Para simplificar la notación, tomamos $n = 1$. Sea $P(x, y, z, f)$ el $\Sigma$-predicado dado por:

$$\forall a \in f \exists a_1 \in a \exists a_2 \in a(a_1 = \{y\} \wedge a_2 = \{y, z\} \wedge a = \{a_1, a_2\}) \wedge$$

$$\forall a \in f \forall b \in f(a_1 = b_1 \rightarrow a_2 = b_2)$$

$$\bigwedge \forall b \in f(b_1 \in \ \mathrm{TC}(y)) \wedge \forall x \in a \exists b \in f(b_1 = x)$$

$$\bigwedge \forall w \in \ \mathrm{TC}(y)(f(w) = G(x, w, f \upharpoonright \mathrm{TC}(w))) \wedge z = G(x, y, f)^4.$$

Dicho de manera más clara, $P(x, y, z, f)$ simboliza:

$$f \text{ es una función } \wedge \mathrm{dom}(f) = \mathrm{TC}(y)$$

$$\wedge \forall w \in \ \mathrm{TC}(y)(f(w) = G(x, w, f \upharpoonright \mathrm{TC}(w)))$$

$$\wedge z = G(x, y, f).$$

Afirmación (1):$\forall x \forall y \exists! z \exists f P(x, y, z, f)$. Donde el símbolo $\exists! z$ abrevia la expresión: existe un único $z^5$.

Para corroborar (1), es suficiente probar que para cualquier $x$:

**I.:** $\forall y \exists z \exists f P(x, y, z, f)$

**II.:** $(P(x, y, z, f) \wedge P(x, y, z', f')) \rightarrow (z = z' \wedge f = f')$.

[4]Para no alargar en demasía nuestra fórmula, $a_1$ y $b_1$ simbolizan las primeras coordenadas de $a$ y $b$, respectivante y formalmente escribimos esto, mediante la fórmula $\exists a_1 \exists a_2(a = \langle a_1, a_2\rangle)$. Análogamente $a_2$ y $b_2$ representan las segundas coordenadas.

[5]$\forall x \forall y \exists! z \exists f P(x, y, z, f) \equiv (\forall x \forall y \exists z \exists f P(x, y, z, f)) \wedge (\exists z' P(x, y, z', f) \rightarrow z = z'))$.

Primero probaremos (II), por inducción sobre $\mathrm{TC}(y)$; supongamos que para $w \in \mathrm{TC}(y)$ existen a lo más un $u$ y un $g$ tal que $P(x, w, u, g)$. Supongamos que $P(x, y, z, f) \wedge P(x, y, z', f')$, entonces por definición de $P$, tenemos $z = G(x, y, f)$ y $z' = G(x, y, f')$, así, basta probar que $f = f'$. Mas, $f$ y $f'$ son funciones con el mismo dominio, por tanto es suficiente probar $f(w) = f'(w)$ para toda $w \in \mathrm{TC}(y)$. Sin embargo, también de la definición se consigue:

(i) $P(x, y, z, f) \wedge w \in \mathrm{TC}(y) \rightarrow P(x, w, f(w), f \restriction \mathrm{TC}(w))$.

Es decir $P(x, w, f(w), f \restriction \mathrm{TC}(w))$ y $P(x, w, f'(w), f' \restriction \mathrm{TC}(w))$, y usando la hipótesis de inducción, tenemos $f(w) = f'(w)$.

La prueba de (I) será también por inducción, esto es, para demostrar que se cumple $\forall y \exists z \exists f P(x, y, z, f)$ supondremos

$$\forall w \in \mathrm{TC}(y) \exists z \exists f P(x, w, z, f).$$

Ahora, por (II), sabemos que existe una única pareja $u_w, g_w$ que satisface $P(x, w, u_w, g_w)$. En vista de que $\mathfrak{M}$ es admisible, podemos usar $\Sigma$- remplazo, para afirmar que la función:

$$f = \{\langle w, u_w \rangle | w \in \mathrm{TC}(y)\}$$

existe. En consecuencia, para probar $\forall y \exists z \exists f P(x, y, z, f)$, es suficiente probar $P(x, y, G(x, y, f), f)$ y esto, a su vez, se sigue de $\forall z \in TC(x)(f(z) = G(x, z, f \restriction \mathrm{TC}(z)))$. Considerando que $P(x, z, u_z, g_z)$, tenemos $f(z) = u_z = G(x, y, g_z)$. Así que lo que tenemos que mostrar es $f \restriction \mathrm{TC}(z) = g_z$. Si $w \in \mathrm{dom}(g_z) = \mathrm{TC}(z)$, (i) implica $P(x, w, g_z(w), g_z \restriction \mathrm{TC}(w))$. Como consecuencia de $P(x, y, z, f) \wedge P(x, y, z', f') \rightarrow z = z' \wedge f = f'$, sabemos que $g_z(w) = u_w = f(w)$ y por consiguiente $g_z = f \restriction \mathrm{TC}(w)$, como se buscaba, lo que prueba $\forall y \exists z \exists P(x, y, z, f)$.

Ahora, introducimos un símbolo de $\Sigma$-función $F$, el cual está definido por:

$F(x, y) = z \leftrightarrow \exists f P(x, y, z, f)$, donde $\exists f P(x, y, z, f)$ es una $\Sigma$-fórmula.

De modo que $F(x, y) = G(x, y, f)$ y $P(x, y, G(x, y, f), f)$.

Finalmente, sólo necesitamos probar que $f = \{\langle z, F(x, z)\rangle | z \in \mathrm{TC}(y)\}$. Empero, esto se cumple por construcción.

$\square$

Definimos $rk(x) = \sup\{rk(y) : y \in x\}$.

Nótese que el rango se puede definir, por recursión en cualquier admisible.

Proposición 8. *Sea $\mathfrak{M}$ una estructura admisible. Para cualquier $\Sigma_1$-fórmula $\varphi$ existe una $\Sigma_1$-fórmula $\psi$ tal que $\mathfrak{M} \vdash \forall x \in y \varphi \leftrightarrow \psi$* [6].

*Demostración.* Si $\varphi$ es, en particular, una $\Sigma_0$-fórmula, no hay nada que probar. De modo que, sea $\varphi \equiv \exists v \phi$, donde $\phi$ es una $\Sigma_0$-fórmula. Consiguientemente, lo que tenemos que probar es que $\forall x \in y \exists v \phi$ es equivalente a una $\Sigma_1$-fórmula $\psi$. Con miras a acotar la variable $v$ por un conjunto $u$, definimos la función:

$$f(x) = \begin{cases} \{z | \phi(x, z) \wedge z \text{ de rango mínimo}\} & \text{si } \exists z \phi(x, z) \\ \emptyset & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En efecto, $f(x) \in \mathbb{M}$ para toda $x \in \mathbb{M}$, pues $\phi$ es una $\Sigma_0$-fórmula, y $\mathfrak{M}$ admite $\Sigma_0$-comprensión. Sea $u = \bigcup_{x \in y} f(x)$, se tiene que:

$$\mathfrak{M} \vdash \forall x \in y \exists v \phi \leftrightarrow \exists u \forall x \in y \exists v \in u \phi$$

Naturalmente, $\psi = \exists u \forall x \in y \exists v \in u \phi$. $\square$

Es decir, según la proposición anterior, en estructuras admisibles cualquier $\Sigma$-fórmula es equivalente a una $\Sigma_1$-fórmula. Por tanto, los conjuntos admisibles admiten $\Sigma$-remplazo y $\Sigma$-recursión.

[6] Por $\mathfrak{M} \vdash \forall x \in y \varphi \leftrightarrow \psi$ entendemos, en un abuso de notación, que los axiomas de admisibilidad, vistos en la definición 2, prueban que $\forall x \in y \varphi \leftrightarrow \psi$ con $\psi$ una $\Sigma_1$-fórmula.

**Definición 9.** El ordinal o altura ordinal de un conjunto admisible $\mathbb{A}$, denotado por $o(\mathbb{A})$, es el menor ordinal que no pertenece a $\mathbb{A}$. Un ordinal $\alpha$ es admisible si $\alpha = o(\mathbb{A})$ para algún conjunto admisible $\mathbb{A}$.

Teorema 10. *$H_\omega$ es el menor conjunto admisible.*

*Demostración.*

**i):** Primero confirmemos que $H_\omega$ es un conjunto admisible.

- **a):** $H_\omega$ es transitivo: supongamos que $y \in x \in H_\omega$, por lo que $|\mathrm{CT}(x)| < \omega$, ahora como $y \in x$, tenemos que $\mathrm{CT}(y) \subseteq \mathrm{CT}(x)$, de donde $|\mathrm{CT}(y)| < \omega$, es decir $y \in H_\omega$.
- **b):** $\emptyset \in H_\omega$, pues $\emptyset$ es transitivo y $|\emptyset| < \omega$.
- **c):** Axioma de unión. Supongamos que $x \in H_\omega$, entonces $|x| < \omega$, por transitividad, tenemos $\cup x \subseteq \mathrm{CT}(x)$ de donde se sigue que $\mathrm{CT}(\cup x) \subseteq \mathrm{CT}(x)$, por tanto $|\mathrm{CT}(\cup x)| < \omega$, o sea $\cup x \in H_\omega$.
- **d):** Axioma de par. Sean $x, y \in H_\omega$, entonces existe un $n$ tal que tanto $x$ como $y$ pertenecen a $HF_n$, por lo que $\{x, y\} \in HF_{n+1}$, así que $\{x, y\} \in H_\omega$.
- **e):** Axioma de $\Sigma_0$-comprensión. Supongamos que $x \in H_\omega$ y $\varphi$ es una $\Sigma_0$-fórmula, como $\mathrm{CT}(x \cap \{z|\varphi(z)\}) \subseteq \mathrm{CT}(x)$, tenemos que $x \cap \{z|\varphi(z)\} \in H_\omega$.
- **f):** Axioma de $\Sigma_0$-remplazo. Supongamos que $\varphi$ es una $\Sigma_0$-fórmula tal que $\forall x \exists y \varphi(x, y)$. Sea $a \in H_\omega$, queremos ver que $\exists v \forall x \in u \exists y \in v \varphi(x, y)$. Como $a \in H_\omega$, es finito, tiene $k$ elementos: $x_1, \ldots, x_k$, y por hipótesis, para cada $x_i$ existe $y_i$ tal que $\varphi(x_i, y_i)$. Debido a que $y_1, \ldots, y_k \in H_\omega$, existe un $n$ tal que $y_1, \ldots, y_k \in HF_n$, por lo que $\{y_1, \ldots, y_k\} \in HF_{n+1}$, lo que implica que $\{y_1, \ldots, y_k\} \in H_\omega$. Así $v = \{y_1, \ldots, y_k\}$.

**ii):** A fin de probar que $H_\omega$ es el menor admisible, supondremos que $\mathbb{A}$ es un conjunto admisible y demostraremos por inducción sobre $n$ que cada $HF_n \subseteq \mathbb{A}$. Primeramente $HF_0 = \emptyset \subseteq \mathbb{A}$. Ahora supongamos que $a \in HF_{n+1}$, dicho de otra manera $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subseteq HF_n$ $(k \in \omega)$, y por hipótesis de inducción $a \subseteq \mathbb{A}$, pues $\forall a_i \in \mathbb{A} (\forall i < k)$. Debido a que entre los axiomas que admite $\mathbb{A}$ se encuentra el de par tenemos que $a \in \mathbb{A}$, de modo que $HF_{n+1} \subseteq \mathbb{A}$. Por lo tanto $H_\omega = \bigcup_{n \in \omega} HF_n \subseteq \mathbb{A}$.

□

Así $H_\omega$ es nuestro primer ejemplo de un conjunto admisible. El siguiente conjunto admisible que presentamos es una generalización de $H_\omega$. Sea $\kappa$ un cardinal infinito, definimos:

$$H(\kappa) = H_\kappa = \{a : |TC(a)| < \kappa\}.$$

Observemos que $H_\kappa$ es un conjunto según ZFE, pues $H_\kappa \subseteq V_\kappa$[7] y $V_\kappa$ ciertamente es un conjunto en ZFE. La demostración se basa en el hecho de que para cualquier conjunto $x$ y para cualquier ordinal $\alpha$, si $\alpha \leq rk(x)$, entonces $\alpha \subseteq rk[CT(x)]$. Por lo que, si $x \in H_\kappa$, entonces $|\mathrm{CT}(x)| < \kappa$, por lo que $\kappa \nsubseteq rk[\mathrm{CT}(x)]$, se tiene $rk(x) < \kappa$ y $x \in V_\kappa$.

Teorema 11. *Sea $\kappa$ regular, entonces $H_\kappa$ es admisible.*

*Demostración.*

**a):** $H_\kappa$ es transitivo: supongamos que $y \in x \in H_\kappa$, por lo que $|\mathrm{CT}(x)| < \kappa$, ahora como $y \in x$, tenemos que $\mathrm{CT}(y) \subseteq \mathrm{CT}(x)$, de donde $|\mathrm{CT}(y)| < \kappa$, es decir $y \in H_\kappa$.

**b):** $\emptyset \in H_\kappa$, pues $\emptyset$ es transitivo y $|\emptyset| < \kappa$.

[7]$V_\kappa$ se refiere a la jerearquía de von Neumann, definida recursivamente de la siguiente manera:

- $V_0 = \emptyset$
- $V_{\alpha+1} = Pot(V_\alpha)$
- $V_\delta = \cup_{\alpha<\delta} V_\delta$ para $\delta$ límite.

**c):** Axioma de unión. Supongamos que $x \in H_\kappa$, tenemos $\cup x \subseteq$CT$(x)$ de donde se sigue que CT$(\cup x) \subseteq$CT$(x)$, con lo cual nos aseguramos de que $\cup x \in H_\kappa$.

**d):** Axioma de par. Supongamos que $x$ y $y \in H_\kappa$, entonces $|CT(x)| < \kappa$ y $|CT(y)| < \kappa$, sabemos que $CT(\{x,y\}) \subseteq CT(x) \cup CT(y) \cup x \cup y$, por lo que $|CT(x,y)| < \kappa$.

**e):** Axioma de $\Sigma_0$-comprensión. Supongamos que $x \in H_\kappa$ y $\varphi$ es una $\Sigma_0$-fórmula, como CT$(x \cap \{z|\varphi(z)\}) \subseteq$CT$(x)$, tenemos que $x \cap \{z|\varphi(z)\} \in H_\kappa$.

**f):** Axioma de $\Sigma_0$-remplazo. Supongamos que $\varphi$ es una $\Sigma_0$-fórmula tal que $\forall x \exists y \varphi(x,y)$. Sea $u \in H_\kappa$, queremos ver que existe un $v \in H_\kappa$ que cumple $\forall x \in u \exists y \in v \varphi(x,y)$. Por hipótesis, para cada $x_i \in u$ existe $y_i \in H_\kappa$ tal que $\varphi(x_i,y_i)$, por lo que $|y_i| < \kappa \quad (\forall i \in \sigma)$. Para construir dicho $v$ fijamos un $y_i$ para cada $x_i$ tal que $\varphi(x_i,y_i)$, observemos que $|v| < \kappa$, debido a que $|u| = \sigma < \kappa$. Para terminar la demostración falta verificar que $|\mathrm{CT}(v)| < \kappa$. Notemos que $\mathrm{CT}(v) \subseteq \bigcup_{i\in\sigma}\mathrm{CT}(y_i) \bigcup v$, entonces $|\mathrm{CT}(v)| \leq |\bigcup_{i\in\sigma}\mathrm{CT}(y_i) \bigcup v| < \Sigma_{i\in\sigma}|\mathrm{CT}(y_i)| + |v| < \kappa$, pues $\kappa$ es regular.

□

Teorema 12. *Para todo cardinal infinito $\kappa$ el conjunto $H_\kappa$ es admisible.*

*Demostración.* Sólo falta demostrar el caso donde $\kappa$ es un cardinal singular. Los axiomas de par, unión, vacío y $\Sigma_0$-comprensión son análogos al caso donde $\kappa$ es regular, pues nótese que si $\kappa$ es singular, éste es el límite de una sucesión de cardinales sucesores (regulares). Probaremos, entonces, el axioma de $\Sigma_0$-remplazo. Supongamos que $\forall x \in a \exists y \varphi(x,y)$ es verdadero en $H_\kappa$. Sea $\kappa^+$ el siguiente cardinal mayor que $\kappa$, por lo tanto $a \in H_{\kappa^+}$ y $\forall x \in a \exists y \varphi(x,y)$ son verdaderos en $H_{\kappa^+}$. Tomemos $X =$CT$(a) \cup a$, dado que $a \in H_\kappa$, se sabe que $|X| < \kappa$. Por el teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski, podemos encontrar una subestructura elemental $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{B}, \in \rangle$ admisible tal que $X \subseteq \mathbb{B}$ (por lo tanto $a \in \mathbb{B}$) y $|\mathfrak{B}| < \kappa$, y al ser $\kappa^+$ un cardinal regular el teorema anterior nos asegura que $H_{\kappa^+}$ es admisible, y por consiguiente todas sus subestructuras son admisibles también. En particular $\mathfrak{B}$ es admisible, y lo por tanto, si $\forall x \in a \exists y \varphi(x,y,z)$ entonces usando $\Sigma_0$-remplazo en $\mathfrak{B}$, tenemos que existe $b \in \mathbb{B}$ tal que:

$$\forall x \in a \exists y \in b \varphi(x,y).$$

Ahora sólo falta asegurarnos de que $b \in H_\kappa$. Sin embargo $\mathbb{B} \subseteq H_\kappa$, y por ello CT$(b) < \kappa$, lo que quiere decir que $b \in H_\kappa$. □

El teorema anterior nos proporciona un método efectivo para encontrar diversas estructuras admisibles: si $\mathfrak{M}$ es admisible, también lo son sus subestructuras elementales.

Corolario 13. *Todo cardinal $\kappa$ es un ordinal admisible, esto se debe al hecho de que $H_\kappa \cap Or = \kappa$.*

□

En resumen, la teoría de los conjuntos admisibles es una subteoría de ZFE, la cual recupera muchos de sus aspectos más importantes. Uno de ellos está dado por el teorema de recursión visto en esta sección.

## Lógicas $\mathfrak{M}$-finitas

Lo que pretendemos en este apartado es definir una lógica infinitaria muy particular. Por una lógica infinitaria, intuitivamente, entendemos, que con los símbolos de nuestro lenguaje $\mathcal{L}$, a diferencia de la lógica clásica, podemos construir fórmulas que contengan una cantidad infinita de símbolos ya sean conjunciones, disyunciones, o cuantificadores, para su definición formal veáse [Barw75].

La teoría lógica que Jon Barwise desarrolló, para estructuras admisibles $\mathfrak{M}$, permite fórmulas con conjunciones y disyunciones $\mathfrak{M}$-finitas. Sin embargo, los predicados admiten sólo un número finito de argumentos y las fórmulas admiten sólo un número finito de cuantificadores.[8]

Empero, si queremos usar el concepto de $\mathfrak{M}$-finito, es necesario aritmetizar nuestro lenguaje y para este fin aprovechamos la estructura admisible. Lo que buscamos es identificar símbolos del lenguaje con objetos del universo $\mathbb{M}$, para decidir, de manera formal, que conjunciones y disyunciones aceptará la lógica que estamos por definir. Una típica aritmetización, para un lenguaje $\mathcal{L}$ con sus símbolos de constantes, funciones y relaciones, es la siguiente:

Predicados: $P^n_x = \langle 0, \langle n, x\rangle\rangle$ ($x \in M, 1 \leq n \leq \omega$, $P^n_x =$ el $x$-ésimo predicado y $n$ argumentos). Para fines prácticos se reservan los predicados $P^2_0$ y $P^2_1$ para la igualdad ($\dot{=}$) y la pertenencia ($\dot{\in}$) respectivamente.

Constantes: $C_x = \langle 1, x\rangle$ ($x \in M$).

Variables: $v_x = \langle 2, x\rangle$ ($x \in M$).

Es importante notar que el conjunto de variables debe ser $\mathfrak{M}$-infinito, de lo contrario una sóla fórmula podría agotar todas las variables.

El siguiente paso es asignarle un código a las fórmulas primitivas. Una fórmula primitiva es una fórmula que tiene la forma $t_1 = t_2$ o $R(t_1, \ldots, t_n)$, donde $R$ es un símbolo de $n$-relación y $t_1, \ldots, t_n$ son terminos, que en este caso, $t_1, \ldots, t_n$ pueden ser variables o constantes[9].

De esta manera, cada fórmula primitiva $P(t_1, \ldots, t_n)$ la identificamos con el código $\langle 3, \langle P, t_1, \ldots t_n\rangle\rangle$. Definidos los códigos para predicados, constantes, variables y fórmulas primitivas, podemos definir por recursión:

$\neg\varphi = \langle 4, \langle\varphi\rangle\rangle$,
$\varphi \vee \psi = \langle 5, \langle\varphi, \psi\rangle\rangle$,
$\varphi \wedge \psi = \langle 6, \langle\varphi, \psi\rangle\rangle$,
$\varphi \to \psi = \langle 7, \langle\varphi, \psi\rangle\rangle$,
$\varphi \leftrightarrow \psi = \langle 8, \langle\varphi, \psi\rangle\rangle$,
$\forall v\varphi = \langle 9, \langle v, \varphi, \rangle\rangle$,
$\exists v\varphi = \langle 10, \langle v, \varphi, \rangle\rangle$,
$\bigvee f = \langle 11, f\rangle$,
$\bigwedge f = \langle 12, f\rangle$.

Cabe señalar que cada código es un conjunto de $\mathfrak{M}$, pues, como ya hemos mencionado, en las estructuras admisibles se pueden construir todos los naturales, además de contar, en particular, con los axiomas de par y unión.

Ahora podemos definir al conjunto $\mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$ compuesto por las $\mathfrak{M}$-fórmulas como el menor conjunto, que contiene todas las fórmulas primitivas, es cerrado respecto a los conectivos $\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$, es decir:

- Si $\varphi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$, entonces $\neg\varphi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$.
- Si $\varphi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$ y $\psi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$, entonces $\varphi \vee \psi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$.
- Si $\varphi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$ y $\psi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$, entonces $\varphi \wedge \psi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$.
- Si $\varphi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$ y $\psi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$, entonces $\varphi \to \psi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$.
- Si $\varphi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$ y $\psi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$, entonces $\varphi \leftrightarrow \psi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$.
- Si $v$ es una variable y $\varphi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$, entonces $\forall v\varphi$, $\exists v\varphi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$.

y cumple:

- Si $f = \langle\varphi_i | i \in I\rangle \in M$ y $\varphi_i$ para $i \in I$, entonces:

$$\bigvee_{i \in I} \varphi_i =_{\mathrm{Df}} \bigvee f \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$$

y

[8]Toda $\mathfrak{M}$-lógica se puede ver como un fragmento de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ (véase [Barw75]), y aunque no son nesarios estos conceptos para el presente artículo, mencionamos el hecho de que el concepto de admisibilidad motivó la noción de fragmentos de $\mathcal{L}_{\infty\infty}$.

[9]Recuerde que los símbolos de $n$-función, siempre pueden ser vistos como símbolos de $n{+}1$-relación.

$$\bigwedge_{i\in I}\varphi_i =_{\mathrm{Df}} \bigwedge f \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}.$$

Verbigracia, si tomamos $\mathfrak{M} = H_\kappa$ con $\kappa$ un cardinal mayor que $\omega$, nuestro lenguaje admite conjunciones y disyunciones de "tamaño" $\alpha$ con $\alpha < \kappa$, es decir, nuestra teoría, no se restringe a conjunciones y disyunciones finitas (en el sentido usual).

Nuestra lógica $\mathfrak{M}$-finita tiene como axiomas todas las instancias de la lógica usual de predicados, y además para todo $u \in \mathbb{M}$:

$$\bigwedge_{i\in u}\varphi_i \to \varphi_i \quad \text{y} \quad \varphi_i \to \bigvee_{i\in u}\varphi_i.$$

Para toda $\psi, \varphi, \varphi_i \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$ y $u \in \mathbb{M}$, las reglas de inferencia son:

$$\frac{\varphi, \varphi\to\psi}{\psi} \quad \text{(modus ponens).}$$

$$\frac{\varphi\to\psi}{\varphi\to\forall x\psi}, \quad \frac{\psi\to\varphi}{\exists x\psi\to\varphi} \quad \text{para } x \notin \mathrm{Fr}(\varphi).$$

$$\frac{\varphi\to\psi_i \quad (i\in u)}{\varphi\to\bigwedge_{i\in u}\psi_i}, \quad \frac{\psi_i\to\varphi \quad (i\in u)}{\bigvee_{i\in u}\psi_i\to\varphi}.$$

Donde $\mathrm{Fr}(\psi)$ denota el conjunto $\{x|x \text{ es una variable libre de } \psi\}$, mismo que puede ser definido mediante $\Sigma_1$-fórmula.

Decimos que $\varphi$ es demostrable a partir de un conjunto de enunciados $A$ (en lo sucesivo sólo escribimos $\varphi$ es demostrable a partir de $A$), si $\varphi$ pertenece a un conjunto que contiene tanto a $A$, como a los axiomas, además de ser cerrado respecto las reglas de inferencia. Formalmente:

**Definición 14.** Por una prueba de $\varphi$ a partir de $A$ entendemos una sucesión de $\mathfrak{M}$-fórmulas $\langle p_i|i<\alpha\rangle$ tal que $\alpha \in On$ y para cada $i<\alpha$, si $\psi \in p_i$, entonces $\psi \in A$ o $\psi$ es un axioma o $\psi$ se sigue de $\bigcup_{h<i} p_h$ mediante una sola aplicación de alguna de las reglas de inferencia.

$p = \langle p_i|i<\alpha\rangle$ es una prueba de $\varphi$ si y sólo si $\varphi \in \bigcup_{i<\alpha} p_i$.

Subrayamos el hecho de que toda prueba $p$ de la definición anterior, gracias a la aritmetización del lenguaje, es subconjunto de $\mathbb{M}$. Sin embargo, no cualquier prueba $p$ pertenece a $\mathbb{M}$, es decir no podemos concluir de la definición de prueba que si $p$ es una prueba, entonces $p \in \mathbb{M}$. Lo que nos advierte de la existencia de pruebas $\mathfrak{M}$-infinitas.

$A \vdash \varphi$ simboliza que existe una prueba de $\varphi$ a partir de $A$. Una fórmula es demostrable si y sólo si tiene una prueba.

Si $A$ es un $\Sigma_1(\mathbb{M})$-conjunto de enunciados,[10] resulta que el conjunto

$$W = \{p \in M \mid p \text{ es una prueba a partir de } A\}$$

puede escribirse como una $\Sigma$-fórmula, usando recursión[11]:

$$p \in W \leftrightarrow (p = \langle p_i|i<\alpha\rangle \wedge (\forall k \in \alpha(\varphi \in p_k \longrightarrow$$

$$(A(\varphi)$$

$$\bigvee \exists u\forall i \in u\exists\psi_i(\varphi \leftrightarrow (\wedge_{i\in u}\psi_i \to \psi_i))$$

[10]Obsérvese, que el que $A$ sea un $\Sigma_1(\mathbb{M})$-conjunto de enunciados, no quiere decir que los enunciados de $A$ sean forzosamente $\Sigma_1(\mathbb{M})$-enunciados, sino que el conjunto $A$ puede ser descrito por una $\Sigma_1(\mathbb{M})$-fórmula.

[11]Como $A$ es un $\Sigma_1$-conjunto de enunciados, hay una $\Sigma_1$ fórmula que lo define, esa fórmula la denotamos justamente como $A(x)$, con la finalidad de no introducir más notación. Todas las instancias de la lógica de predicados se escriben similar al segundo disyunto, aquí no los escribimos para no complicar más esta fórmula. Recuerde que cada fórmula del $\mathfrak{M}$-lenguaje está representado por un elemento de $\mathbb{M}$, así, por ejemplo $A(\varphi)$, formalmente significa que existe $a \in \mathbb{M}$ tal que $a$ es el código de $\varphi$ y $A(a)$.

$$\bigvee \exists u \forall i \in u \exists \psi_i (\varphi \leftrightarrow (\psi_i \to \vee_{i\in u}\psi_i))$$

$$\bigvee \exists j < k \exists i < k(\psi \in p_j \wedge (\psi \to \varphi) \in p_i)$$

$$\bigvee \exists \psi_1 \exists \psi_2 \exists x (x \notin \mathrm{Fr}(\psi_1) \wedge (\varphi \leftrightarrow (\psi_1 \to \forall x \psi_2)) \to$$

$$\exists j < k((\psi_1 \to \psi_2) \in p_j))$$

$$\bigvee \exists \psi_1 \exists \psi_2 \exists x (x \notin \mathrm{Fr}(\psi_1) \wedge (\varphi \leftrightarrow (\exists x \psi_2 \to \psi_1)) \to$$

$$\exists j < k((\psi_2 \to \psi_1) \in p_j))$$

$$\bigvee \exists \psi \exists u \forall i \in u \exists \psi_i ((\varphi \leftrightarrow (\psi \to \wedge_{i\in u}\psi_i)) \to$$

$$\forall i \in u \exists j < k(\psi \to \psi_i \in p_j)$$

$$\bigvee \exists \psi \exists u \forall i \in u \exists \psi_i ((\varphi \leftrightarrow (\vee_{i\in u}\psi_i \to \psi)) \to$$

$$\exists i \in u \exists j < k(\psi_i \to \psi \in p_j))))).$$

Gracias a que $W$ resulta ser descrito por una $\Sigma_1$-fórmula, podemos establecer algunas analogías con la lógica de primer orden, entre ellas, y adelantando el final de este artículo, el teorema de compacidad de Barwise.

Lema 15. *Sea $A$ un $\Sigma_1(\mathbb{M})$-conjunto de enunciados, entonces $A \vdash \varphi$ si y sólo existe una prueba $\mathfrak{M}$-finita $p$ (es decir una prueba $p \in \mathbb{M}$) de $\varphi$ a partir de $A$.*

*Demostración.* ($\Leftarrow$) es trivial, pues una prueba $\mathfrak{M}$-finita de $\varphi$ a partir de $A$ es una prueba de $\varphi$ a partir de $A$.

$\Rightarrow$) Llamamos $X$ al conjunto de fórmulas $\varphi$ para las que existe un $p \in \mathbb{M}$, el cual prueba $\varphi$ a partir de $A$. Claramente $X \subseteq \{\varphi | A \vdash \varphi\}$, probaremos $\{\varphi | A \vdash \varphi\} \subseteq X$, de donde tendremos la igualdad, y así cada fórmula demostrable a partir de $A$ tendrá una prueba $\mathfrak{M}$-finita a partir de $A$.

Sabemos que cada enunciado de $A$ al igual que todos los axiomas, también, se encuentran en $X$, por lo que es suficiente mostrar que $X$ es cerrado respecto a las reglas de inferencia. Esto se muestra regla por regla.

Sea $P(p, \psi)$ la fórmula que afirma que $p$ es una prueba $\mathfrak{M}$-finita de $\psi$ a partir de $A$.

1. Si tanto $\varphi$ como $(\varphi \to \psi)$ pertenecen a $X$, queremos ver que $\psi \in X$. Por hipótesis tenemos $P(p, \varphi)$ y $P(q, \varphi \to \psi)$, con $p = \langle p_i | i < \alpha\rangle$ y $q = \langle q_i | i < \delta\rangle$. Intuitivamente, la prueba $p^*$ que estamos por definir está dada por la unión de las funciones $p, q$, y añadiendo al final la pareja ordenada $\langle \alpha + \delta, \psi\rangle$.

   Así, definimos una prueba $p^*$, de longitud $\alpha + \delta$, suponiendo que $\alpha < \delta$, por:

$$p^*(i) = \begin{cases} p_i & \text{para } i < \alpha \\ q_i & \text{para } i = \alpha + \gamma_i \text{ con } \gamma_i < \delta \\ \{\psi\} & \text{para } i = \alpha + \gamma. \end{cases}$$

   Por la construcción $p^* \in \mathbb{M}$ prueba $\psi$ a partir de $A$. Observe que fue necesario reordenar los índices de $q$, para poder definir $p^*$.

2. La demostración de las reglas de inferencia:

$$\frac{(\varphi \to \psi)}{\varphi \to \forall x \psi}$$

y

$$\frac{(\psi \to \varphi)}{\exists x\psi \to \varphi}$$

Es similar al caso anterior.

3. Sea $(\varphi \to \psi_i) \in X$ para toda $i \in u$ y $u \in \mathbb{M}$, queremos ver que $(\varphi \to \bigwedge_{i\in u} \psi_i) \in X$.

   Como para cada $i \in u$ existe una prueba $p_j = \langle p_{j_i} | i < \alpha_j\rangle$, podríamos pensar en realizar una unión similar al caso anterior, pues $u \in \mathbb{M}$. Sin embargo, a diferencia de 1, tenemos que asegurarnos de que la unión de las pruebas pertenezca a $\mathbb{M}$ y así poder usar el axioma de unión. Para este fin, necesitamos asegurar que existe un $w \in \mathbb{M}$ tal que $p_j \in w$ para toda $j \in u$.

   Sea $u \in \mathbb{M}$, por nuestra hipótesis, tenemos:

   **(i)** $\forall i \in u \exists p P(p, \varphi \to \psi_i)$.

   Hemos visto que la fórmula abreviada por $P(x, y)$ es $\Sigma_1(\mathbb{M})$, por lo que tenemos:

   $P(p, \psi) \leftrightarrow \exists z P'(z, p, \psi)$, donde $P'$ es $\Sigma_0$, entonces:

   **(ii)** $\forall i \in u \exists z \exists p P'(z, p, \varphi \to \psi_i)$.

   De lo cual se deduce que existe $v \in \mathbb{M}$ (ya que $\mathfrak{M}$ satisface $\Sigma_0$-comprensión) tal que:

   **(iii)** $\forall i \in u \exists z \in v \exists p \in v P'(z, p, \varphi \to \psi_i)$.

   Hacemos $w = \{p \in v | \exists i \in u \exists z \in v P'(z, p, \varphi \to \psi_i)\}$ $(w \in \mathbb{M})$, entonces:

   **(iv)** $\forall i \in u \exists p \in w P(p, \varphi \to \psi_i)$.

   Sea $\alpha \in \mathbb{M}$, $\alpha \geq$dom$(p)$ para todo $p \in w$. Definimos una prueba $p^*$ de longitud $\alpha + 1$ por:

$$p^*(i) = \begin{cases} \bigcup\{p_i | p \in w \wedge i \in \text{dom}(p)\} & \text{para } i < \alpha \\ \{\varphi \to \bigwedge_{i\in u} \psi_i\} & \text{para } i = \alpha. \end{cases}$$

   Por construcción, $p^* \in \mathbb{M}$ prueba $\varphi \to \bigwedge_{i\in u} \psi_i$ a partir de $A$.

4. El último caso donde $(\psi_i \to \varphi) \in X$ para $i \in u$ para probar que $\bigvee_{i\in u} \psi \to \varphi_i$ es análogo.

Por lo que $X = \{\varphi | A \vdash \phi\}$. □

Lema 16. *Sea $A$ un $\Sigma_1(\mathbb{M})$-conjunto de enunciados. Entonces $A \vdash \varphi$ si y sólo existe $u \in \mathbb{M}$, es decir $u$ es $\mathbb{M}$-finito, tal que $u \subseteq A$ y $u \vdash \varphi$.*

*Demostración.* Como en el lema anterior $(\Leftarrow)$ es trivial, por lo que sólo probaremos $(\Rightarrow)$.

Por el lema anterior existe $p \in \mathbb{M}$ una prueba de $\varphi$ a partir de $A$. Sea $u$ el conjunto de fórmulas $\psi$ tal que para alguna $i \in$dom$(p)$, $\psi \in p_i$, pero, $\psi$ no es un axioma, ni se sigue mediante una sola aplicación de $\cup_{n<i} p_n$ $(\in \mathbb{M})$, esto es $\psi \in A$. Entonces, $u \in \mathbb{M}$, además por construcción $p$ es una prueba de $\varphi$ a partir de $u$ $(u \vdash \varphi)$ y $u \subseteq A$. □

Es decir, si $A$ es un $\Sigma_1(\mathbb{M})$-conjunto de enunciados y $A$ prueba a $\psi$, entonces el lema 4. nos asegura que necesariamente existe una prueba $\mathfrak{M}$-finita de $\psi$ a partir de $A$, pero no sólo eso, sino que además, por el lema 5, para probar $\psi$ sólo necesitamos un subconjunto $\mathfrak{M}$-finito de $A$.

Para finalizar esta sección definimos la nociones semánticas usuales, haciendo énfasis en la interpretación de las “nuevas” conjunciones y disyunciones de nuestra $\mathfrak{M}$-lógica.

Por un modelo de $\mathcal{L}$ nos referimos a una estructura $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{A}, \langle t^{\mathfrak{A}} | t \in \mathbb{L}\rangle\rangle$ donde $t^{\mathfrak{A}} = P^{\mathfrak{A}} \subseteq \mathbb{A}^n$, si $t$ es un símbolo de $n$-relación, $t^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{A}} \in \mathbb{A}$, si $t$ es un símbolo de constante y $\mathbb{A} \neq \emptyset$. Una asignación de variables es una función $f$ :Vbl$\longrightarrow \mathbb{A}$ (donde Vbl corresponde al conjunto de todas las variables). La relación de satisfacción $\mathfrak{A} \models \varphi[f]$, significa que $\varphi$ es verdadera en $\mathfrak{A}$ y es definida de manera usual, añadiendo:

$\mathfrak{A} \models \bigwedge_{i\in u} \phi_i[f]$ si y sólo si $\forall i \in u$ $\mathfrak{A} \models \varphi[f]$ y

$\mathfrak{A} \models \bigvee_{i\in u} \phi_i[f]$ si y sólo si $\exists i \in u$ $\mathfrak{A} \models \varphi[f]$.

Sea $\varphi = \varphi(v_1, \ldots, v_n)$ una fórmula con variables libres $x_1, \ldots, x_n$, $\mathfrak{A} \models \varphi[v_1, \ldots, v_n]$ denota $\mathfrak{A} \models \varphi[f]$, donde $f(x_i) = v_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Cuando $\varphi$ es un enunciado sólo escribimos $\mathfrak{A} \models \varphi$, en caso de tener un conjunto de enunciados $A$, $\mathfrak{A} \models A$ significa $\mathfrak{A} \models \varphi$, para toda $\varphi \in A$.

## 4. Teorema de Compacidad de Barwise

La finalidad de este trabajo es establecer condiciones suficientes para garantizar "compacidad" en una clase particular de $\mathfrak{M}$-lógicas: la clase de $\mathfrak{A}$-lógicas con universo numerable. La primera tarea será relacionar la semántica con la sintáctica definida para nuestras $\mathfrak{M}$-lógicas. En otras palabras demostrar la correctud para $\mathfrak{M}$-lógicas, lo cual es conocido como el teorema de correctud de Barwise.[12] Correctud nos brinda la posibilidad de ocupar los resultados demostrados en la sección anterior (es conveniente observar que dichos resultados se han enunciado para conjuntos de enunciados $\Sigma_1$, lo cual se refleja en el enunciado de compacidad de Barwise). Empero, antes de demostrar tanto el teorema de correctud, como el de compacidad de Barwise es conveniente revisar el teorema Rasiowa-Sikorski, ya que brinda una poderosa herramienta para la prueba de dichos teoremas.

Con vistas a demostrar el teorema Rasiowa-Sikorski, establecemos las siguientes definiciones:

**Definición 17.** Un álgebra booleana es una estructura $\mathcal{K} = \langle \mathbb{K}, \oplus, \otimes, ^-, \mathbb{O}, \mathbb{I} \rangle$ tal que:

**i):** $\oplus$ y $\otimes$ son operaciones binarias sobre $\mathbb{K}$.
**ii):** $^-$ es una operación unitaria sobre $\mathbb{K}$.
**iii):** $\mathbb{O}$ y $\mathbb{I}$ son elementos distintos de $\mathbb{K}$.
**iv):** Para cualquier $a, b, c \in \mathbb{K}$ se satisfacen las siguientes propiedades:

$$\begin{array}{ll}
a \oplus a = a & a \otimes a = a \\
a \oplus b = b \oplus a & a \otimes b = b \otimes a \\
(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) & (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c) \\
a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c) & a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c) \\
a \oplus \bar{a} = \mathbb{I} & a \otimes \bar{a} = \mathbb{O} \\
a \oplus \mathbb{O} = a & a \otimes \mathbb{I} = a.
\end{array}$$

En particular, podemos describir el álgebra de Lindenbaum, la cual además de servir como ejemplo de un álgebra booleana, jugará un papel importantísimo en la demostración del Teorema de Correctud de Barwise.

Para definir el álgebra de Lindenbaum $\mathcal{L}_\Gamma = \langle S_\Gamma, \oplus, \otimes, ^-, \mathbb{O}, \mathbb{I} \rangle$, sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, $\Gamma$ un conjunto consistente de $\mathfrak{M}$-enunciados ($\Gamma$ bien puede ser un conjunto vacío de enunciados). Los elementos de $S_\Gamma$ son clases de equivalencia de enunciados $\Gamma$-equivalentes, es decir $s \in S_\Gamma$ si $s = [\varphi]_\Gamma = \{\psi | \Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi\}$, para alguna fórmula. Las operaciones $\oplus$, $\otimes$ y $^-$ las identificamos, respectivamente, con $\vee$, $\wedge$ y $\neg$:

$$\begin{aligned}
[\varphi] \oplus [\psi] &= [\varphi \vee \psi], \\
[\varphi] \otimes [\psi] &= [\varphi \wedge \psi], \\
\bar{[\varphi]} &= [\bar{\varphi}] = [\neg\varphi].
\end{aligned}$$

Finalmente $[\mathbb{O}] = [\bot]_\Gamma = [x \neq x]_\Gamma$ y $[\mathbb{I}] = [\top]_\Gamma = [x = x]_\Gamma$, donde $[\bot]_\Gamma$ es la clase de contradicciones y $[\top]_\Gamma$ es la clase de tautologías a partir de $\Gamma$. Notemos que para todo $\psi \in \Gamma$, $\psi \in [\top]_\Gamma$. Además, debido a que $\Gamma$ es consistente, $[\bot]_\Gamma \neq [\top]_\Gamma$.

Para cualquier álgebra booleana $\mathcal{A}$ se puede definir un orden parcial mediante la operación $\oplus$ como sigue:

$$a \leq b \Leftrightarrow a \oplus b = b.$$

[12]El teorema de correctud dice que si $A$ es un conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados y $A$ tiene un modelo, $\mathfrak{A} \models A$, entonces $A$ es consistente, es decir, a partir de $A$ no se puede demostrar ninguna contradicción.

En el álgebra de Lindenbaun, el orden está determinado por la implicación, es decir: $[\varphi] \leq_{\Gamma} [\psi]$ si y sólo si $\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)$. Esto se sigue de la equivalencia entre $\varphi \to \psi$ y $\neg\varphi \vee \psi$.

**Definición 18.** Para un álgebra booleana $\mathcal{K}$ un conjunto no vacío $U \subseteq \mathbb{K}$ es un filtro sobre $\mathcal{K}$ si y sólo si para todo $a, b \in \mathbb{K}$:

**i):** $\mathbb{O} \notin U$.
**ii):** Si $a \in U$ y $a \leq b$, entonces $b \in U$.
**iii):** Si $a \in U$ y $b \in U$, entonces $a \otimes b \in U$.

**Definición 19.** Para cualquier álgebra Booleana $\mathcal{K}$, un conjunto $B \subseteq \mathbb{K}$ tiene la propiedad de la intersección finita (PIF) si y sólo si para cualquier $a_0, ..., a_n \in B$, $a_0 \otimes \ldots \otimes a_n \neq \mathbb{O}$.

Si $B$ tiene la PIF, se sigue que:

$$F = \{b \in \mathbb{K} | \exists n \text{ y } \exists a_0, \ldots, a_n \text{ tal que } a_0 \otimes, \ldots, a_n \leq b\}$$

es un filtro sobre $\mathcal{F}$ que contiene a $B$. Un filtro máximo respecto a la inclusión es llamado un ultrafiltro. Como se espera, en un ultrafiltro $U$ siempre ocurre $a \in U$ o $\bar{a} \in U$, y en el caso particular del álgebra de Lindenbaum siempre $[\varphi] \in U$ o $[\neg\varphi] \in U$.

Lema 20. *Para cualquier álgebra Booleana $\mathcal{K}$, cualquier ultrafiltro $U$ sobre $\mathcal{K}$ y cualesquiera $a, b \in \mathbb{K}$ se tiene:*

$$a \oplus b \in U \Leftrightarrow a \in U \ \text{ o } b \in U.$$

*Demostración.* Primero, si $a \in U$, entonces, por definición, $a < a \oplus b$ y como $U$ es un filtro, tenemos que $a \oplus b \in U$.

Ahora, supongamos que $a \oplus b \in U$ y que tanto $a$ como $b$ no pertencen a $U$. Entonces $\bar{a} \in U$ y $\bar{b} \in U$ y por tanto $\bar{a} \otimes \bar{b} \in U$ (pues, en particular, $U$ es un filtro), sin embargo $\bar{a} \otimes \bar{b} = \overline{a \oplus b}$, así que $(a \oplus b) \otimes (\overline{a \oplus b}) = \mathbb{O} \in U$, lo cual es una contradicción, concluyendo de esta manera que $a \in U$ o $b \in U$. □

**Definición 21.** Para cualquier álgebra Booleana $\mathcal{K}$ y cualquier $C$ subconjunto de $\mathbb{K}$ si $c \in \mathbb{K}$ es la menor cota superior de $C$, escribimos $\Sigma C = c$ y llamamos a $c$ el supremo (o sup) de $c$. Observemos que en el caso de que $C$ sea finito, es decir $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ $\Sigma C$ es una abreviación de $c_1 \oplus c_2 \oplus \ldots \oplus c_n$. De manera análoga, escribimos $\prod D = d$, para denotar al ínfimo (o ínf) de $D$. Similarmente, si $D = \{d_1, d_2, \ldots d_m\}$, entonces $\prod D$ es una abreviación de $d_1 \otimes d_2 \ldots \otimes d_m$.

Decimos que el ultrafiltro $U$ preserva $\Sigma C = c$ si y sólo si:

$$c \in U \Leftrightarrow \text{ para algún } b \in C, b \in U.$$

Dado nuestro breve análisis sobre las álgebras booleanas, nos disponemos a enunciar y demostrar el teorema de Rasiowa-Sikorski.

Teorema 22. *(Rasiowa-Sikorski) Para cualquier álgebra Booleana $\mathcal{N}$ y cualquier conjunto numerable de supremos $\Sigma B_k = a_k$ $(k \in \omega)$, existe un ultrafiltro $U$ sobre $\mathcal{N}$ que los preserva a todos.*

*Demostración.* Definimos recursivamente elementos $b_k \in B_k$ de tal manera que para todo $k \in \omega$:

$$\prod_{j<k} (\bar{a}_j \oplus b_j) \neq \mathbb{O}.$$

De esto se sigue que: $B = \{\prod_{j<k} (\bar{a}_j \oplus b_j) | k \in \omega\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Si $U$ es un ultrafiltro que extiende a $B$, tenemos:

$$a_k \in U \Rightarrow b_k = \mathbb{O} \oplus (a_k \otimes b_k) = (a_k \otimes \bar{a}_k) \oplus (a_k \otimes b_k) = a_k \otimes (\bar{a}_k \oplus b_k) \in U,$$

como es deseado. Por otro lado, un filtro siempre contiene sus supremos. Es decir $U$, definido de la forma anterior, respeta supremos.

A continuación se define dicha sucesión por recursión. Dado $b_j$ para $j < k$ tal que $c_k = \prod_{j<k} \bar{a}_j \oplus b_j \neq \mathbb{O}$. Buscamos definir $b_k$. Supongamos que para todo $b \in B_k$, se tiene que $c_k \otimes (\bar{a}_k \oplus b) = \mathbb{O}$, no obstante que $a \oplus \sum B = \sum_{b\in B}(a \oplus b)$ y $a \otimes \prod B = \prod_{b \in B}(a \otimes b)$, cuando $\sum B$ y $\prod B$ existen, tenemos:

$$c_k = c_k \otimes \mathbb{I} = c_k \otimes (\bar{a}_k \oplus a_k) = c_k \otimes (\bar{a}_k \oplus \sum B_k) = c_k \otimes \sum_{b\in B_k} (\bar{a}_k \oplus b) =$$

$$\sum_{b \in B_k} c_k \otimes (\bar{a} \oplus b) = \mathbb{O},$$

contrario a la hipótesis de inducción, por lo que existe por lo menos un elemento $b_k$ en $B_k$ que cumple con lo requerido, concluyendo así la demostración. □

Demostrado el teorema de Rasiowa-Sikorski, estamos en condiciones de demostrar el teorema de correctud de Barwise, el cual es un paso importante para establecer las condiciones de la compacidad en las lógicas $\mathfrak{M}$-finitas.

Teorema 23. *(Correctud Barwise). Sean $\mathfrak{M}$ una estructura admisible numerable y $A$ un conjunto de enunciados en el $\mathfrak{M}$-lenguaje $\mathcal{L}$. Si $A$ es consistente en la lógica $\mathfrak{M}$-finita, entonces $A$ tiene un modelo $\mathfrak{A}$.*

*Demostración.* Primero extendemos el lenguaje $\mathcal{L}$ añadiendo un conjunto $\mathfrak{M}$-infinito $C$ de nuevas constantes, llamamos a este nuevo lenguaje $\mathcal{L}^*$. Hacemos: $[\varphi] = \{\psi | A \vdash \psi \leftrightarrow \varphi\}$, para todo $\mathcal{L}^*$-enunciado $\varphi$. Sea $\mathbb{B} = \{[\varphi] | \varphi \in$ es un enunciado de $\mathcal{L}^*\}$.

Definimos $\mathcal{B}$ como el álgebra de Lindenbaum de universo $\mathbb{B}$, más las siguentes operaciones. Para toda $c \in C$ y cualquier $u \in \mathbb{M}$:

$$\begin{array}{rlcl} 1. & \sum_{i\in u}[\varphi_i] & = & [\bigvee_{i\in u} \varphi_i] \\ 2. & \prod_{i\in u}[\varphi_i] & = & [\bigwedge_{i \in u} \varphi_i] \\ 3. & \sum[\varphi(c)] & = & [\exists v \varphi(v)] \\ 4. & \prod[\varphi(c)] & = & [\forall v \varphi(v)]. \end{array}$$

Observemos, que en nuestra álgebra de Lindenbaum, $[\varphi] \leq_A [\psi]$ si y sólo si $(A \vdash \varphi \to \psi)$.

Primero debemos verificar que estas operaciones están bien definidas. Sea $u \in \mathbb{M}$. En 1, tenemos que probar que $[\bigvee_{i\in u} \varphi_i]$ es el supremo de $[\varphi_i]$ $(i \in u)$, es decir debemos probar que $[\bigvee_{i\in u} \varphi_i]$ es la mínima cota superior de $\{[\varphi_i] | i \in u\}$. Para toda $i \in u$, $A \vdash \varphi_i \to \bigvee \varphi_i$, por lo que $[\bigvee \varphi_i]$ es una cota superior. Para ver que es la mínima, supongamos que existe $z \geq [\varphi_i]$ para toda $i \in u$. Debemos probar que $[\bigvee_{i\in u} \varphi_i] \leq z$, es decir que $A \vdash \bigvee_{i \in u} \varphi_i \to z$. Supongamos que $A \vdash \bigvee \varphi_i$, entonces existe por lo menos una $\varphi_{i_0}$ tal que $A \vdash \varphi_{i_0}$; tomamos esa fórmula para afirmar que $A \vdash \varphi_{i_0} \to z$, para concluir que $A \vdash \bigvee \varphi_i \to z$.

La prueba para establecer a $\bigwedge \varphi_i$ como ínfimo es análoga.

Verifiquemos ahora, que $\exists v \varphi(v)$ es el supremo de $\{[\varphi(c)] | c \in C\}$. Sea $\varphi(c)$ un $\mathcal{L}^*$-enunciado, entonces $\exists v\varphi(v)$ es cota superior de dicho conjunto, pues si $c \in C$ y $A \vdash \varphi(c)$, entonces $A \vdash \exists v \varphi(v)$ es decir $A \vdash \varphi(c) \to \exists v \varphi(v)$. Confirmemos que es la mínima cota: supongamos que $z$ es una cota superior de dicho conjunto, sabemos que $\varphi(c) \to \exists v \varphi(v)$ y $\varphi(c) \to z$, y supongamos que $A \vdash \exists v \varphi(v)$, en particular podemos elegir una constante $c_0$ que no aparezca en $\varphi(x)$ (esto lo podemos lograr debido a que $C$ es $\mathfrak{M}$-infinito), tal que $A \vdash \varphi(c_0)$, y por hipótesis $A \vdash \varphi(c_0) \to z$, por lo tanto $A \vdash \exists v \varphi(v) \to z$.

Similarmente establecemos que $[\forall v \varphi(v)]$ es ínfimo para el conjunto $\{\varphi(c) | c \in C\}$. Por lo que las operaciones anteriores están bien definidas.

Por el teorema de Rasiowa-Sikorski (podemos usuarlo gracias a que $\mathbb{M}$ es numerable) existe un ultrafiltro $U$ sobre $\mathbb{B}$ que respeta las operaciones anteriores. Definimos un modelo $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{A}, \langle t^{\mathfrak{A}} | t \in \mathcal{L} \rangle \rangle$ como sigue:

Para $c \in C$ hacemos $[c] = \{c' \in C | [c = c'] \in U\}$, así definimos $\mathbb{A} = \{[c] | c \in C\}$.

Si $t$ es una constante en $\mathcal{L}$, interpretamos a $t$ en $\mathfrak{A}$ como $t^{\mathfrak{A}} = [c]$, si y sólo si $[t = c] \in U$, lo cual está bien definido, pues si $t$ es una constante, la fórmula $\exists x(x = b)$ es una tautología, por lo que se encuentra en el ultrafiltro $U$, y debido a la construcción de $U$ existe $c \in C$ tal que $[t = c] \in U$.

Si $P \in \mathcal{L}$ es un $n$-predicado hacemos:

$$P^{\mathfrak{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) \leftrightarrow [P(c_1, \ldots, c_n)] \in U.$$

Sea $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ una $\mathcal{L}$-fórmula con a lo más $v_1, \ldots, v_n$ variables libres, por inducción, mostraremos que $\mathfrak{A} \models \varphi([c_1], \ldots, [c_n]) \leftrightarrow [\varphi(c_1, \ldots, c_n)] \in U$:

1. $\mathfrak{A} \models \neg\varphi([c_1], \ldots, [c_n]) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi([c_1], \ldots, [c_n])$, por hipótesis de inducción se tiene $[\varphi(c_1, \ldots, c_n)] \notin U$, y como $U$ es ultrafiltro entonces $[\neg\varphi(c_1, \ldots, c_n)] \in U$.
2. Sabemos que $\mathfrak{A} \models \varphi([c_1], \ldots, [c_n]) \vee \psi([c_1], \ldots, [c_n]) \Leftrightarrow (\mathfrak{A} \models \varphi([c_1], \ldots, [c_n])$ o $\mathfrak{A} \models \psi([c_1], \ldots, [c_n])) \Leftrightarrow ([\varphi(c_1, \ldots, c_n)] \in U$ o $[\psi(c_1, \ldots, c_n)] \in U)$. Sin embargo, por el lema 6, esto último ocurre si y sólo si $[\varphi(c_1, \ldots, c_n) \vee \psi(c_1, \ldots, c_n)] \in U$.
3. $\mathfrak{A} \models \exists v\varphi(v)$ si y sólo si $\exists c \in \mathbb{A}$ tal que $\models\varphi(c)$, por hipótesis de inducción $[\varphi(c)] \in U$, y esto ocurre si y sólo si $[\exists v\varphi(v)] \in U$ ya que $U$ respeta supremos.
4. Sea $u \in \mathbb{M}$ y supongamos que $\mathfrak{A} \models \bigvee_{i\in u} \varphi_i([c_1], \ldots, [c_n])$, lo cual sucede si y sólo si $\exists i_0 \in u$, $\mathfrak{A} \models \varphi_{i_0}([c_1], \ldots, [c_n])$, si y sólo si $[\varphi_{i_0}(c_1, \ldots, c_n)] \in U$, pues es nuestra hipótesis de inducción, y por construcción de $U$ (pues por el teorema de Rasiowa-Sikoski, $U$ respeta supremos y hemos probado que $\bigvee_{i\in u} \varphi_i([c_1], \ldots, [c_n])$ es el supremo de $\varphi_{i_0}([c_1], \ldots, [c_n])$), tenemos que $[\bigvee_{i\in u} \varphi_i(c_1, \ldots, c_n)] \in U$.

En particular tenemos que para cualquier $\mathcal{L}^*$-enunciado $\varphi$, $\mathfrak{A} \models \varphi$ si y sólo si $[\varphi] \in U$. Por lo que $\mathfrak{A} \models A$, ya que $\varphi \in U$ para todo $\varphi \in A$.

□

Con el teorema de correctud de Barwise hemos llegado a nuestra meta, pues el teorema de compacidad en lógicas $\mathfrak{M}$-finitas para conjuntos de enunciados $\Sigma_1$ es tan sólo una consecuencia del lema 5 y dicho teorema:

Corolario 24. *(Teorema de Compacidad de Barwise). Sea $\mathfrak{M}$ una estructura admisible y numerable. Sea $A$ un $\Sigma_1$-conjunto de enunciados del $\mathfrak{M}$-lenguaje. Si todo subconjunto $\mathfrak{M}$-finito de $A$ tiene modelo, entonces $A$ tiene modelo.*

*Demostración.* De acuerdo con el teorema de correctud de Barwise, debemos demostrar que $A$ es consistente. Supongamos que no, es decir que $A \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$, por el lema 5, existe $u \subseteq A$ y $\mathfrak{M}$-finito tal que $u \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$, sin embargo, por hipótesis $u$ es consistente, por lo que no puede derivar contradicciones. Entonces concluimos que $A$ es consistente. □

## Referencias

[1] J.Barwise, *Admissible Sets and Structures*, Springer–Verlag, 1975.
[2] M. Dickmann, *Large Infinitary Languages*, North–Holland, 1975.
[3] H. Keisler, *Model Theory for Infinitary Logic*, North–Holland, 1974.
[4] Peter G. Hinman, *Fundamentals of Mathematical Logic*, AK Peters, 2005.
[5] Ronald Jensen, *Subcomplete Forcing and L-Forcing*, `http://www.mathematik.hu-berlin.de/~raesch/org/jensen.html`, 2012.

*Dirección de la autora:*
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
e-mail: `kinrha@xanum.uam.mx`