UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN LUIS

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales

Departamento de Matemática

Comportamiento asintótico de problemas de diseño óptimo para modelos locales y no locales

Tesis de Doctorado

Juan Francisco Spedaletti

Director: Julián Fernández Bonder

Junio, 2016

Índice general

Agradecimientos

Quiero agradecer a:

- el CONICET por haberme financiado todos estos años, sin este apoyo financiero hubiera sido sin duda imposible realizar mis estudios de posgrado.
- Al Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de San Luis y a las personas con las que trabaje en las distintas materias por las que atraveso este doctorado por haberme siempre permitido (y entendido) ausentarme cuando así lo necesite de mis tareas docentes, y poder viajar Buenos Aires a completar esta tesis. Fueron muy comprensibles conmigo.
- Al Instituto de Matemática Aplicada San Luis (IMASL) por darme un lugar de trabajo y haberme aceptado.
- A mis compañeros de oficina del IMASL: Juan Pablo primero y Jorge después por tener que bancarse la musica de mi computadora...
- Al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires y al Instituto de Investigaciones Matemáticas Luis Santaló por haberme siempre dado un lugar de trabajo cada vez que estuve en Buenos Aires (a pesar de los problemas de espacio que tienen), por haberme tratado bien, por haberme integrado y sobre todo por haberme brindado de esa beneficiosa atmósfera de estudio y discusión matemática que tan bien me hizo, espero seguir siempre en contacto.
- A mi mamá por estar siempre ahí, por entenderme y bancarme. Sos lo mas importante que tengo en mi vida, te quiero mucho.
- A mi tía Mhyrta por estar cada vez que te necesitamos, pocas veces conocí una persona tan generosa como vos en esta vida, te quiero mucho.
- A Julián por haberme dirigido, haberme tenido paciencia y descubrir en el a una de las mejores personas que yo conoci en este ambiente (como matemático y como ser humano), desde el primer día que llegue a Buenos Aires estuvo a mi lado.
- A todas las personas que hicieron (de forma directa o indirecta) que yo llegara hasta acá.

Comportamiento asintótico de problemas de diseño óptimo para modelos locales y no locales.

(Resumen)

Estudiaremos problemas de diseño óptimo asociados a operadores locales y no locales analizando, en cada caso, el comportamiento asintótico.

En relación al caso local, estudiaremos un problema asociado al primer autovalor de Steklov no lineal. Consideramos para esto un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y una ventana $\Gamma \subset \partial\Omega$. Asociado a esto se define el primer autovalor de Steklov no lineal a la cantidad

$$\lambda(\Gamma) := \text{ínf} \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^p + |v|^p \, dx}{\int_{\partial\Omega} |v|^p \, dS},$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas las funciones en el espacio $W^{1,p}(\Omega)$ que se anulan sobre el conjunto Γ.

El problema de diseño óptimo considerado es el siguiente: dado $\alpha \in (0,1)$, buscar $\Gamma^* \subset \partial\Omega$ con $|\Gamma^*|_{n-1} = \alpha|\partial\Omega|_{n-1}$ que verifique

$$\lambda(\Gamma^*) = \text{ínf}\, \lambda(\Gamma)$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las ventanas $\Gamma \subset \partial\Omega$ que verifican $|\Gamma|_{n-1} = \alpha|\partial\Omega|_{n-1}$. Si existe un conjunto $\Gamma^* \subset \partial\Omega$ en donde el ínfimo se logra, es llamado *ventana óptima*. Demostramos para este problema existencia de ventana óptima, propiedades de esta y existencia de la autofunción asociada.

Luego nos ocupamos de la dependencia de la ventana óptima respecto de perturbaciones del dominio Ω. Desarrollamos en esta tesis la teoría de la dependencia de la ventana óptima y del autovalor cuando el dominio es perturbado períodicamente y singularmente. El principal resultado para este caso es la convergencia a un problema límite homogeneizado.

En el contexto no local, si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio abierto, conexo y acotado, y $0 < s < 1 < p < \infty$ analizamos el problema de diseño óptimo de la mejor constante asociada a la desigualdad de Poincaré en el espacio $W^{s,p}(\Omega)$. Para $A \subset \Omega$, conjunto medible, definimos la cantidad $\lambda_s(A)$ como

$$\lambda_s(A) = \operatorname{ínf} \frac{\frac{1}{2}\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dx\,dy}{\int_\Omega |v|^p\,dx},$$

donde el ínfimo se toma sobre las funciones $v \in W^{s,p}(\Omega)$ que se anulan casi en todo punto de A. A partir de la mejor constante de Poincaré podemos describir el problema de diseño óptimo asociado, para $\alpha \in (0,1)$, este problema será

$$\Lambda_s(\alpha) = \operatorname{ínf} \lambda_s(A)$$

donde el ínfimo se toma sobre los conjuntos medibles $A \subset \Omega$ que cumplen $|A| = \alpha|\partial\Omega|$, este es el llamado *problema del obstáculo fuerte*. Si existe un conjunto A_s en donde este ínfimo se alcanza, decimos que es un conjunto óptimo para $\Lambda_s(\alpha)$. Mostramos la existencia de conjunto óptimo dando algunas propiedades de la constante óptima. Luego describiendo una versión del principio del mínimo para operadores no locales caracterizamos el obstáculo como el conjunto de puntos en donde se anula el extremal.

En el sentido de este contexto no local, asociado al problema del obstáculo fuerte tenemos el llamado *problema del obstáculo débil*. Teniendo en cuenta una variante de la desigualdad de Poincaré podemos definir la siguiente constante óptima

$$\lambda_s(\sigma,\phi) = \operatorname{ínf} \frac{\frac{1}{2}\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dx\,dy + \sigma\int_\Omega v\phi\,dx}{\int_\Omega |v|^p\,dx},$$

donde $\sigma > 0$ y $\phi \in L^\infty(\Omega)$ donde el ínfimo se toma sobre el espacio $W^{s,p}(\Omega)$. Sea $\alpha \in (0,1)$, consideramos la siguiente clase de conjuntos $\mathcal{B}_\alpha = \{\phi \in L^\infty(\Omega) \colon 0 \le \phi \le 1, \int_\Omega \phi\,dx = \alpha|\Omega|\}$ y definimos

$$\Lambda_s(\sigma,\alpha) = \operatorname*{ínf}_{\phi\in\mathcal{B}_\alpha} \lambda_s(\sigma,\phi),$$

este es el problema del obstáculo débil. Demostramos propiedades acerca de la constante $\Lambda_s(\sigma,\alpha)$ que define este problema, existencia de extremal y existencia de una configuración óptima.

Establecemos luego una conexión entre estos dos problemas probando que $\Lambda_s(\sigma,\alpha) \to \Lambda_s(\alpha)$ cuando $\sigma \to \infty$.

En cuanto al parámetro s, encontramos que reescalando adecuadamente la constante $\Lambda_s(\alpha)$ existe una conexión entre el problema óptimo no local y cierto problema de optimización que involucra al operador $p-$laplaciano Δ_p, en efecto demostramos que $(1-s)\Lambda_s(\alpha) \to \Lambda(\alpha)$, si $s \uparrow 1$, donde $\Lambda(\alpha)$ es cierto problema óptimo asociado al operador Δ_p, la herramienta clave que nos permite concluir estos resultados será, como veremos, el concepto de $\Gamma-$convergencia.

Por último, a partir del resultado de comportamiento asintótico antes descripto concluiremos la convergencia de los obstáculos A_s al obstáculo asociado a un problema que involucra al operador Δ_p, mas precisamente probamos que $\chi_{A_s} \to \chi_A$ si $s \uparrow 1$, donde A es la solución óptima del problema local $\Lambda(\alpha)$.

Capítulo 1

Introducción

En esta tesis hemos estudiado algunos problemas de diseño relacionados con la optimización de ciertos extremales de ecuaciones diferenciales e íntegro diferenciales.

A modo general el problema de diseño óptimo puede plantearse como sigue: dada una región del espacio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se le asocia una cierta función de energía $J(\Omega)$, y lo que se busca es hallar dentro de una clase de dominios $\mathcal{A}$ aquel que minimize $J(\Omega)$. Es decir, se busca $\Omega^\star \in \mathcal{A}$ tal que

$$J(\Omega^\star) \leq J(\Omega), \quad \forall \Omega \in \mathcal{A}.$$

En general, estas funciones de energía son calculadas mediante la integral asociada a una función de estado que es la que resuelve una cierta ecuación en derivadas parciales (EDP) sobre el conjunto Ω. Es decir,

$$J(\Omega) = \int j(x, u_\Omega(x), \nabla u_\Omega(x))\, dx,$$

donde la función $u_\Omega(x)$ es la solución de

$$F(x, u_\Omega(x), \nabla u_\Omega(x)) = 0 \text{ en } \Omega$$

más condiciones de contorno asociadas. Para una descripción detallada de este tipo de problemas ver por ejemplo [30].

Dentro de esta familia de problemas, quizás el más clásico es el que minimiza el primer autovalor de el operador Δ en la clase de dominios de medida constante.

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, se define

$$\lambda_1(\Omega) = \operatorname{ínf} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx}{\int_\Omega v^2\, dx},$$

donde el ínfimo es tomado sobre las funciones $v \in C^1_c(\Omega)$. Y luego $J(\Omega) = \lambda_1(\Omega)$. Se busca minimizar $J(\Omega)$ en la clase

$$\mathcal{A} = \{\Omega \subset \mathbb{R}^n : |\Omega| = a\}.$$

Este problema fue resuelto de manera independiente por G. Faber y E. Krahn en [20, 31] donde prueban que este problema se minimiza en la bola.

A partir de este resultado, han habido diversas extensiones y generalizaciones en las direcciones más diversas. Resulta imposible dar una lista completa de referencias de estos problemas. A modo de ejemplo el lector puede dirigirse a [29, 30].

En esta tesis nos enfocamos en tres problemas de optimización.

1. *Problema de Steklov no lineal con obstáculo*

2. *Problema del* $(-\Delta_{p,\Omega})^s$*-regional con obstáculo fuerte*

3. *Problema del* $(-\Delta_{p,\Omega})^s$*-regional con obstáculo débil*

El primero de esos problemas consiste en minimizar el primer autovalor de un problema tipo-Steklov no lineal donde la autofunción puede anularse en un conjunto de medida dada sobre la frontera del dominio. Más precisamente, dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto regular y $\Gamma \subset \partial\Omega$ una *ventana*, el funcional asociado es

$$\lambda(\Gamma) = \int_\Omega |\nabla u_\Gamma|^p + |u_\Gamma|^p \, dx,$$

donde u_Γ es la solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u_\Gamma + |u_\Gamma|^{p-2} u_\Gamma = 0 & \text{en } \Omega \\ u_\Gamma \geq 0 & \text{en } \overline{\Omega} \\ |\nabla u_\Gamma|^{p-2} \frac{\partial u_\Gamma}{\partial n} = \lambda |u_\Gamma|^{p-2} u_\Gamma & \text{en } \partial\Omega \setminus \Gamma \\ u_\Gamma = 0 & \text{en } \Gamma \\ \int_{\partial\Omega} |u_\Gamma|^p \, dS = 1. \end{cases}$$

Este problema, especialmente en el caso $p = 2$ aparece en problemas de optimización de cargas a través de la frontera. El mismo fue descrito y estudiado en [11]. El problema de optimización asociado al funcional $\lambda(\Gamma)$ fue estudiado en [16] cuando la ventana Γ pertenece a la clase de ventanas de medida fija,

$$\mathcal{A} = \{\Gamma \subset \partial\Omega \colon |\Gamma|_{n-1} = \alpha\}.$$

En dicho trabajo se estudió la existencia de una ventana óptima y algunas propiedades de la misma. En esta tesis, para este problema estudiamos la dependencia de esa ventana óptima cuando el dominio ambiente Ω es perturbado singularmente.

Por otro lado, en los últimos años se ha experimentado un auge en el campo de los problemas no locales y de las ecuaciones integro-diferenciales debido a novedosas aplicaciones tales como problemas de obstáculo, optimización, finanzas, transición de fases, materiales estratificados, dislocación de cristales, membranas semipermeables y propagación de llamas, superficies mínimas, problemas elípticos con datos de medida, y muchos otros problemas, como así también al avance matemático de las soluciones de estos problemas, principalmente en la teoría de regularidad a partir del célebre artículo de Caffarelli-Silvestre (ver [9]).

Sin embargo, problemas de diseño óptimo para estas ecuaciones no han sido abordados en la actualidad. En [15] se estudia la optimización del primer autovalor de un problema de

Dirichlet para el $p-$laplaciano fraccionario más un potencial, respecto a dicho potencial, pero manteniendo el dominio es fijo.

Más precisamente, dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se define el $p-$laplaciano fraccionario regional como

$$(-\Delta_{p,\Omega})^s u(x) = \text{p.v.} \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+sp}} \, dy,$$

y asociado a este operador, consideramos los siguientes funcionales

$$\lambda_s(A) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u_A(x) - u_A(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} \, dx \, dy, \tag{1.1}$$

donde para cada $A \subset \Omega$, u_A es la solución del problema

$$\begin{cases} (-\Delta_{p,\Omega})^s u_A = \lambda |u_A|^{p-2} u_A & \text{en } \Omega \setminus A \\ u_A = 0 & \text{en } A \\ u_A \geq 0 \\ \int_\Omega |u_A|^p \, dx = 1 \end{cases}$$

y

$$\lambda_s(\sigma, \phi) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u_{\sigma,\phi} z(x) - u_{\sigma,\phi} z(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} \, dxdy + \sigma \int_\Omega \phi |u_{\sigma,\phi}|^p \, dx, \tag{1.2}$$

donde para cada $\sigma > 0$ y $\phi \in L^\infty(\Omega)$, $\phi \geq 0$, $u_{\sigma,\phi}$ es la solución de

$$\begin{cases} (-\Delta_{p,\Omega})^s u_{\sigma,\phi} + \sigma\phi |u_{\sigma,\phi}|^{p-2} u_{\sigma,\phi} = \lambda |u_{\sigma,\phi}|^{p-2} u_{\sigma,\phi} & \text{en } \Omega \setminus A \\ u_{\sigma,\phi} \geq 0 \\ \int_\Omega |u_{\sigma,\phi}|^p \, dx = 1. \end{cases}$$

Asociado a la constante $\lambda_s(A)$, tenemos asociado el siguiente problema óptimo: dado $\alpha \in (0, 1)$, definimos

$$\Lambda_s(\alpha) := \text{ínf}\{\lambda_s(A) \colon A \subset \Omega, |A| = \alpha|\Omega|\}, \tag{1.3}$$

este es el llamado *problema del obstáculo fuerte*.

También, asociado a la constante $\lambda_s(\sigma, \phi)$ esta asociado el siguiente problema óptimo

$$\Lambda_s(\sigma, \alpha) := \text{ínf}\{\lambda_s(\sigma, \phi) \colon \phi \in \mathcal{B}_\alpha\}, \tag{1.4}$$

donde el ínfimo es tomado sobre la clase $\mathcal{B}_\alpha = \{\phi \in L^\infty(\Omega), 0 \leq \phi \leq 1, \int_\Omega \phi \, dx = \alpha|\Omega|\}$.

Para el segundo y tercer problema, probamos la existencia de una configuración óptima para $\Lambda_s(\alpha)$ y $\Lambda_s(\sigma, \alpha)$ respectivamente. Luego, estudiamos el comportamiento de las constantes $\Lambda_s(\alpha)$ cuando $s \uparrow 1$ y de las constantes $\Lambda_s(\sigma, \alpha)$ cuando $\sigma \to \infty$ como así también de las configuraciones óptimas asociadas. Finalmente, establecemos la conexión entre ambos problemas cuando $s \uparrow 1$.

Los resultados originales de esta tesis han dado lugar a dos publicaciones. La primera de ellas ha aparecido en la revista *'Control Optimisation and Calculus of Variations'* (ver [26]). La segunda de ellas ha sido enviada a publicar, y una copia de este trabajo puede ser encontrado en [27].

Esta tesis esta organizada de la siguiente manera: en el Capítulo 2 damos una introducción de los espacios de Sobolev clásicos y fraccionarios. Ningún resultado de este capítulo es original, hemos decidido incluir las demostraciones de la mayoría de los resultados para que la tesis sea lo mas autocontenida posible.

En el Capítulo 3 introducimos los problemas de autovalores que estudiaremos a lo largo de esta tesis.

En los Capítulos 4 y 5 se concentran los resultados originales de esta Tesis:

En el Capítulo 4 probamos la existencia de las configuraciones óptimas asociadas a cada uno de los problemas.

El Capítulo 5 se dedica a estudiar el comportamiento asintótico de estos problemas en distintos contextos.

Para el problema (1) se estudia su comportamiento cuando el dominio Ω es perturbado singularmente.

Para el problema (2) se estudia como este aproxima a (1) cuando $s \uparrow 1$, y finalmente vemos como el problema (3) aproxima a (2) cuando el obstáculo suave es penalizado.

Al final de la tesis, se incluyén dos apéndices con algunos resultados teóricos que son usados en las demostraciones.

Capítulo 2

Espacios de Sobolev

En este capítulo presentamos los espacios de Sobolev clásicos y fraccionarios que son los espacios sobre los cuales trabajaremos mas adelante.

Comenzaremos el capítulo describiendo los espacios de Lebesgue destacando los ejemplos particulares de estos que serán utilizados. Luego daremos el concepto de derivada débil de una función que será necesario para introducir los espacios de Sobolev clásicos dando también algunas propiedades útiles. Describiremos detalladamente la regularidad necesaria que vamos a asumir sobre los dominios con los cuales trabajaremos. Al final de la primera parte del capítulo enunciamos dos importantes teoremas de trazas que serán necesarios más adelante.

En la segunda mitad de este capítulo presentaremos los espacios de Sobolev fraccionarios $W^{s,p}(\Omega)$, mostrando algunas propiedades de estos y las inmersiones compactas asociadas a estos espacios que vamos a utilizar.

2.1. Espacios de Lebesgue

Damos en esta sección la definición de los espacios de Lebesgue, para una lectura mas cuidadosa acerca de estos espacios el lector puede referirse a [19].

Sea (E, Σ, μ) un espacio de medida. Para cada $1 \leq p < \infty$ se definen los espacios de Lebesgue $L^p(E)$ como

$$L^p(E) = L^p_\mu(E) := \left\{ f \colon E \to \bar{\mathbb{R}},\ \mu - \text{medibles} :\ \int_E |f|^p \, d\mu < \infty \right\}.$$

Cuando $p = \infty$ se define $L^\infty(E)$ como

$$L^\infty(E) = L^\infty_\mu(E) := \left\{ f \colon E \to \bar{\mathbb{R}},\ \mu - \text{medibles} \colon \exists M > 0 \text{ tal que } |f(x)| \leq M,\ \mu - \text{c.t.} x \in E \right\}.$$

En estos espacios se define la norma

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p_\mu(E)} = \begin{cases} \left(\int_E |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \text{ínf}\{M > 0 \colon |f(x)| \leq M,\ \mu - \text{c.t.p.} x \in E\} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Con esta norma, los espacios $(L^p(E), \|\cdot\|_p)$ resultan ser espacios de Banach. Más aún, si $1 \le p < \infty$ estos espacios son separables y si $1 < p < \infty$ son reflexivos. Ver [8] para un estudio exhaustivo de estos espacios.

Dado $1 \le p \le \infty$ se define el exponente conjugado de Lebesgue de p, p', al número tal que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

donde se usa que $\frac{1}{\infty} = 0$. En el caso $1 < p < \infty$ es inmediata la expresión $p' = \frac{p}{p-1}$.

Es bien sabido, ver [8], que para $1 \le p < \infty$, el espacio dual de $L^p(E)$ se representa por $L^{p'}(E)$. Esto significa que el operador $\Phi_p \colon L^{p'}(E) \to [L^p(E)]'$ dado por

$$\langle \Phi_p(f), g \rangle = \int_E fg\, d\mu,$$

resulta ser una isometría biyectiva.

En esta tesis haremos uso extensivo de estos espacios, en particular cuando $1 < p < \infty$ que es el caso en que los mismos resultan ser espacios de Banach, separables y reflexivos.

En particular nos interesan dos ejemplos concretos de espacios de medida:

Ejemplo 2.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y consideramos (Ω, Σ, dx) donde Σ es la $\sigma-$álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue de Ω y dx es la medida de Lebesgue.

En los espacios de Lebesgue L^p resulta útil definir la convergencia *local*. Para esto introducimos la siguiente notación.

Definición 2.2. Sean $V, U \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que el conjunto V esta *fuertemente incluido* en el conjunto U y lo denotamos como $V \subset\subset U$ si $\overline{V} \subset U$ y $\overline{V}$ es compacto.

Con esta notación damos la definición de convergencia local.

Definición 2.3. Sean $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset L^p(U)$ y $f \in L^p(U)$. Decimos que $f_m \to f$ en $L^p_{\text{loc}}(U)$ si $f_m \to f$ en $L^p(V)$ para todo $V \subset\subset U$.

Ejemplo 2.4. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Consideramos luego el espacio de medida $(\partial\Omega, \mathcal{B}, dS)$, donde $\mathcal{B}$ es la $\sigma-$álgebra de Borel, de los subconjuntos de $\partial\Omega$ y $dS = d\mathcal{H}^{n-1}\lfloor\partial\Omega$ donde $\mathcal{H}^{n-1}$ denota la medida $(n-1)-$dimensional de Hausdorff.

Supongamos ahora que el dominio Ω es un conjunto de clase C^1 (ver definición 2.26). Para $x_0 \in \partial\Omega$ arbitrario existe una función $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y $r > 0$ tal que

$$\Omega \cap B_r(x_0) = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_n > \gamma(x')\}$$

y

$$\partial\Omega \cap B_r(x_0) = \{x', x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_n = \gamma(x')\},$$

donde $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Si $f \in L^1(\partial\Omega)$ y $sop(f) \subset B_r(x_0)$, entonces la integral de superficie (ver [19]) de f es

$$\int_{\partial\Omega} f\, dS = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x', \gamma(x'))\sqrt{1 + \nabla\gamma(x')}\, dx'.$$

Si $f = \chi_{B_r(x_0)}$, entonces

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega \cap B_r(x_0)) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sqrt{1 + \nabla\gamma(x')}\, dx'.$$

Recordamos a continuación la desigualdad de interpolación (ver por ejemplo [18]) que nos será útil mas adelante.

Teorema 2.5 (Desigualdad de interpolación)**.** *Sea (E, Σ, μ) un espacio de medida, $u \in L^p(d\mu) \cap L^q(d\mu)$ con $1 \le p < q < \infty$ y r es tal que $p \le r < q$, entonces*

$$\|u\|_{L^r(d\mu)} \le \|u\|^{\alpha}_{L^p(d\mu)} \|u\|^{1-\alpha}_{L^q(d\mu)}$$

donde $0 < \alpha \le 1$ y $\alpha = p(q - r)/r(q - p)$.

Demostración. Se cumple que $1/q < 1/r \le 1/p$, por lo tanto existe $0 < \alpha \le 1$ tal que $1/r = (1 - \alpha)1/q + \alpha 1/p$, considerando $p_1 = q/(r(1 - \alpha))$ y $p_2 = p/(r\alpha)$ se tiene que $1/p_1 + 1/p_2 = 1$. Aplicando desigualdad de Hölder tenemos que

$$\int_E |u|^r\, d\mu = \int_E |u|^{r(1-\alpha)}|u|^{r\alpha}\, d\mu \le \left\{\int_E |u|^q\, d\mu\right\}^{r(1-\alpha)/q} \left\{\int_E |u|^p\, d\mu\right\}^{r\alpha/p}. \tag{2.1}$$

Elevando a la $1/r$ a ambos lados en (2.1) queda

$$\|u\|_{L^r(d\mu)} \le \|u\|^{1-\alpha}_{L^q(d\mu)} \|u\|^{\alpha}_{L^p(d\mu)}.$$

Por otro lado despejando α en $1/r = (1 - \alpha)(1/q) + \alpha(1/p)$ queda $\alpha = p(q - r)/r(q - p)$. De esta forma $\alpha > 0$. □

Presentamos ahora, sin demostración, la siguiente versión del teorema de compacidad de Kolmogorov-Riesz-Fréchet (ver [8]), que usaremos para obtener resultados de compacidad en los teoremas de inmersión que presentaremos mas adelante.

Antes de enunciar este teorema será necesaria la siguiente notación.

Notación 2.6. Si $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, escribiremos la translación de la función u por el vector $h \in \mathbb{R}^n$ como $(\tau_h u)(x) = u(x + h)$.

También precisamos unas definiciones.

Definición 2.7. Sea X un espacio métrico y $V \subset X$. Decimos que V es precompacto si $\overline{V}$ es compacto.

Observación 2.8. Es fácil ver que $V \subset X$ es precompacto si y sólo si verifica que para toda sucesión $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset V$, existe una subsucesión $\{x_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ convergente.

Teniendo en cuenta la anterior definición definimos lo siguiente.

Definición 2.9. Sean X e Y espacios de Banach con $X \subset Y$. Decimos que el espacio X esta compactamente embebido en el espacio Y y lo denotamos como $X \subset\subset Y$, si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. existe una constante positiva C tal que

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X \text{ para todo } x \in X,$$

2. todo conjunto $V \subset X$ acotado es precompacto en Y.

Teorema 2.10. *(Kolmogorov-Riesz-Fréchet) Sea $1 \leq p < \infty$ y $\mathcal{L}$ un conjunto acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Asumimos que*

$$\lim_{|h|\to 0} \|\tau_h u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0, \text{ uniformemente en } u \in \mathcal{L}. \tag{2.2}$$

Es decir $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0$ tal que $\|\tau_h u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon, \forall u \in \mathcal{L}, \forall h \in \mathbb{R}^n$ con $|h| < \delta$.

Entonces $\mathcal{L}_{|\Omega}$ es precompacto en $L^p(\Omega)$, para cualquier conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de medida finita.

En el teorema anterior, $\mathcal{L}_{|\Omega}$ denota las funciones de $\mathcal{L}$ restringidas a Ω.

2.2. Espacios de Sobolev clásicos

Introducimos ahora los espacios clásicos de Sobolev pero primero será necesario el siguiente concepto.

2.2.1. Derivada débil

Notación 2.11. $C_c^\infty(U)$ ($U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto) denotará el conjunto de las funciones infinitamente diferenciables $\phi\colon U \to \mathbb{R}$ con soporte compacto en U.

A lo largo de esta sección usaremos la notación de multiíndice para las derivadas parciales. Esto es:

Definición 2.12. Un multiíndice es un vector de coordenadas enteras no negativas, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. El orden de un multiíndice α se define como

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Definición 2.13. Dada una función $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y un multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ se define la α-derivada parcial de ϕ como

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{|\alpha|}\phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definición 2.14. Dado $k \in \mathbb{N}$ y $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ se define

$$D^k \phi := \{D^\alpha \phi\colon\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ |\alpha| = k\},$$

el conjunto de todas las derivadas parciales de orden k. Dos casos particulares requieren una notación especial:

- ($k = 1$) En este caso el conjunto $D^1\phi$ se lo interpreta como un vector y a dicho vector se lo llama el *gradiente* de ϕ,

$$D^1\phi = \nabla\phi = (\partial_{x_1}\phi, \ldots, \partial_{x_n}\phi).$$

- ($k = 2$) En este caso el conjunto $D^2\phi$ se lo interpreta como una matriz y a dicha matriz se la llama matriz *Hessiana* de ϕ,

$$D^2\phi = H\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2\phi}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Definición 2.15. Sean $u, v \in L^1_{loc}(U)$, y $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ un multiíndice. Decimos que v es la $\alpha-$ésima derivada parcial débil de u, y se escribe:

$$D^\alpha u = v$$

si se cumple

$$\int_U u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v\phi \, dx, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(U). \tag{2.3}$$

Es fácil ver que la derivada débil es única. Eso justifica la notación de la definición.

2.2.2. Definición de espacios de Sobolev

Sea $1 \leq p \leq \infty$ y k un entero no negativo. Definimos ahora cierto espacio funcional cuyos miembros tienen derivadas de varios ordenes en L^p.

Definición 2.16. Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. El espacio de Sobolev $W^{k,p}(U)$, consiste de todas las funciones localmente integrables $u\colon U \to \mathbb{R}$ de modo tal que por cada multiíndice α con $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe en el sentido débil y pertenecen a $L^p(U)$.

Observación 2.17.

1. Si $p = 2$, usualmente escribimos

$$H^k(U) = W^{k,2}(U) \quad (k = 0, 1 \ldots).$$

   Se usa la letra H ya que se desea remarcar la estructura hilbertiana del espacio. Note que $H^0(U) = L^2(U)$.

2. De aquí en adelante identificamos funciones en $W^{k,p}$ las cuales coinciden casi en todo punto.

Definición 2.18. Si $u \in W^{k,p}(U)$, definimos su norma como:

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \leq p < \infty)$$
$$\|u\|_{W^{k,\infty}(U)} := \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_\infty.$$

Observación 2.19. Observemos que en el caso $p = 2$ esta norma coincide con la inducida por el producto interno

$$(u, v)_{H^k(U)} := \sum_{|\alpha|\leq k} \int_U D^\alpha u D^\alpha v \, dx.$$

Observación 2.20. En el caso $k = 1$ y $1 \leq p < \infty$, es usual considerar la siguiente norma en $W^{1,p}(U)$,

$$\|u\|_{W^{1,p}(U)} := \left(\int_U |\nabla u|^p + |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Esta norma es equivalente a la definida en la Definición 2.18 que corresponde a tomar la norma p de vectores en $\mathbb{R}^n$ en lugar de la norma euclídea para $|\nabla u|$.

Es fácil ver que $(W^{k,p}(U), \|\cdot\|_{W^{k,p}(U)})$ resulta un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$ y $k \in \mathbb{N}_0$. Más aún, si $1 \leq p < \infty$ estos espacios son separables y cuando $1 < p < \infty$ son reflexivos. Ver [8].

Definición 2.21. Escribimos $u_m \to u$ en $W^{k,p}_{loc}(U)$ para decir que $u_m \to u$ en $W^{k,p}(V)$ por cada $V \subset\subset U$.

Definición 2.22. Denotamos por $W^{k,p}_0(U)$ a la clausura de $C^\infty_c(U)$ en $W^{k,p}(U)$.

De esta forma $u \in W^{k,p}_0(U)$ si y sólo si existen funciones $u_m \in C^\infty_c(U)$ tal que $u_m \to u$ en $W^{k,p}(U)$. Interpretamos los elementos del espacio $W^{k,p}_0(U)$ como las funciones $u \in W^{k,p}(U)$ tal que

$$\text{“}D^\alpha u = 0 \text{ en } \partial U\text{” para todo } |\alpha| \leq k - 1.$$

Esto se hára mas claro con el concepto de traza.

Notación 2.23. Es costumbre escribir

$$H^k_0(U) = W^{k,2}_0(U)$$

Observación 2.24. En general, $W^{k,p}_0(\Omega) \subsetneq W^{k,p}(\Omega)$. Sin embargo, cuando $\Omega = \mathbb{R}^n$ se tiene que ambos espacios coinciden. Ver [21].

2.3. Propiedades elementales

A continuación recordamos ciertas propiedades de las derivadas débiles. Varias de estas reglas son válidas para funciones suaves pero las funciones en un espacio de Sobolev no son necesariamente suaves. No daremos una demostración de estos hechos. El lector interesado la puede encontrar, por ejemplo, en el libro [18].

Teorema 2.25 (Propiedades de las derivadas débiles)**.** *Asumiendo $u, v \in W^{k,p}(U)$, $|\alpha| \leq k$, se tiene que*

1. *$D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$ y $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$ para todo multiíndice α, β con $|\alpha| + |\beta| \leq k$.*
2. *Por cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$ y $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$, $|\alpha| \leq k$.*
3. *Si V es un subconjunto abierto de U, entonces $u \in W^{k,p}(V)$.*
4. *Si $\zeta \in C_c^\infty(U)$, entonces $\zeta u \in W^{k,p}(U)$ y*

$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta} u \quad \textit{(fórmula de Leibnitz)}$$

donde $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$ y $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_n!$.

2.3.1. Aproximación en los espacios $W^{1,p}(\Omega)$

Nos es necesario en este trabajo resultados de aproximación por funciones suaves para las funciones en el espacio $W^{1,p}(\Omega)$. Para conseguir este tipo de aproximación por funciones regulares hasta el borde es necesario asumir cierta regularidad de la frontera del dominio Ω. Daremos un teorema, que no es el más general posible, pero que nos será útil para algunos de los resultados obtenidos.

Antes de enunciar los resultados de aproximación, necesitamos definir la clase de regularidad que usaremos para el dominio Ω y el tipo de funciones necesarias para entender las aproximaciones que haremos.

Definición 2.26. Decimos que el $\partial\Omega$ es de clase C^k si por cada punto $x_0 \in \partial\Omega$ existe $r > 0$ y una función $\gamma : R^{n-1} \to \mathbb{R}$ de clase C^k tal que (salvo reetiquetado y reorientación de los ejes coordenados si es necesario)

$$\Omega \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r) \colon x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Decimos también que $\partial\Omega$ es de clase C^∞ si $\partial\Omega$ es de clase C^k para $k = 1, 2, \dots$, y $\partial\Omega$ es analítico si la función γ es analítica.

Enunciamos ahora sin demostración el principal resultado de esta sección que engloba dos tipos de aproximaciones usando funciones suaves. Para un estudio más detallado de este tipo de aproximaciones referirse a [18].

Teorema 2.27. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado, $1 \leq p < \infty$ y $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Entonces existe una sucesión $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \in C^{\infty}(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ tal que*

$$||u_m - u||_{W^{k,p}(\Omega)} \to 0 \text{ si } m \to \infty.$$

Mas aún si Ω tiene frontera $\partial\Omega$ de clase C^1, entonces existe una sucesión $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$ tal que

$$||u_m - u||_{W^{k,p}(\Omega)} \to 0 \text{ si } m \to \infty.$$

2.3.2. Extensión

En esta sección enunciamos un teorema que permite extender funciones del espacio $W^{1,p}(U)$ para convertirlas en funciones de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, esto se debe hacer cuidadosamente: si por ejemplo se extiende una función para que valga cero en $\mathbb{R}^n \setminus U$ se puede generar una discontinuidad tan mala sobre ∂U de modo tal que pierda derivada débil, el siguiente teorema que enunciamos sin demostración (ver [18] para los detalles) nos dice como puede hacerse tal extensión adecuadamente.

Teorema 2.28. *Sea $1 \leq p \leq \infty$, $U \subset \mathbb{R}^n$ acotado y con ∂U de clase C^1. Si V es un conjunto acotado que cumple $U \subset\subset V$ entonces existe un operador lineal acotado $E : W^{1,p}(U) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ de modo tal que para cada $u \in W^{1,p}(U)$ se cumple que:*

1. *$Eu = u$ casi en todo punto de U.*

2. *Eu tiene soporte dentro de V.*

3. *$||Eu||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C||u||_{W^{1,p}(U)}$, donde la constante C depende solo de p, U y V.*

Se dice que Eu es una extensión de u a $\mathbb{R}^n$.

2.3.3. Teoremas de inmersión clásicos

En esta sección presentamos algunas inmersiones asociadas a los espacios $W^{1,p}(\Omega)$ y que serán necesarias en nuestro trabajo. Antes de demostrar el principal resultado de esta sección comenzamos con la desigualdad de Gagliardo-Nierenberg-Sobolev (ver [2],[18]).

Antes de comenzar será necesaria la siguiente definión.

Definición 2.29. Sean X, Y, espacios normados, diremos que el espacio X esta inmerso en el espacio Y si $X \subset Y$ y si existe una costante C tal que

$$||x||_Y \leq C||x||_X \text{ para todo } x \in X.$$

Nos referiremos a esto escribiendo $X \hookrightarrow Y$.

Teorema 2.30 (Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)**.** *Si $1 \leq p < n$, entonces existe una constante C dependiente solo de p y n tal que*

$$\|u\|_{L^{p^\star}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$$

donde $p^\star = np/(n-p)$.

Observación 2.31. Observemos que siempre se tiene que $p^\star > p$.

Demostración. Se supone primero $p = 1$, ya que u tiene soporte compacto para cada $i = 1, \dots, n$ y $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos que

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)\, dy_i$$

y así

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)|\, dy_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

en consecuencia

$$|u|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)|\, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Integrando la última desigualdad a ambos lados con respecto a x_1 obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}}\, dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\prod_{i=2}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dx_1\, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \end{aligned} \tag{2.4}$$

en la última desigualdad se utilizo la desigualdad de Hölder generalizada, integrando ahora la desigualdad (2.4) respecto de x_2 tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}}\, dx_1\, dx_2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dx_1\, dy_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{n} I_i^{\frac{1}{n-1}}\, dx_2$$

donde $I_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dy_1$ y $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dx_1\, dy_i$ para $(i = 3, \dots, n)$. Aplicando una vez más la desigualdad de Hölder extendida encontramos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}}\, dx_1\, dx_2 \leq & \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dx_1\, dy_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dy_1\, dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ & \prod_{i=3}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dx_1\, dx_2\, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

Continuamos integrando respecto de $x_3, \ldots, x_n$ para encontrar

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}}\, dx &\leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dx_1 \ldots dy_i \ldots dx_n \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\, dx \right)^{\frac{1}{n-1}}\end{aligned} \tag{2.5}$$

y de esta forma se prueba el resultado para $p = 1$.

Consideramos ahora el caso $1 < p < n$, aplicando la estimación (2.5) a la función $v := |u|^\gamma$ (donde $\gamma > 1$ será escogida adecuadamente) tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}}\, dx \right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla |u|^\gamma|\, dx = \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1} |\nabla u|\, dx \\ &\leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}\, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\, dx \right)\end{aligned} \tag{2.6}$$

ahora elegimos γ de modo tal que $\gamma n/(n-1) = (\gamma - 1)p/(p-1)$ despejando obtenemos $\gamma = p(n-1)/(n-p) > 1$ y asi $\gamma n/(n-1) = (\gamma-1)p/(p-1) = np/(n-p) = p^\star$ usando este valor de γ en (2.6) se llega a

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^\star}\, dx \right)^{1/p^\star} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\, dx \right)^{1/p}$$

□

Observación 2.32. Un problema muy importante en el análisis, es la determinación de la constante óptima en la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev. Es decir, de la constante

$$K(n,p)^{-1} = \inf_{u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^\star}\, dx \right)^{\frac{p}{p^\star}}}.$$

Este problema es conocido como el problema de Talenti debido a que fue él quien lo resolvió en 1976. Ver [41].

En el anterior teorema se puede reemplazar el espacio $C^1(\mathbb{R}^n)$ por el espacio $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, eso nos indica el siguiente corolario.

Corolario 2.33. *La desigualdad de Gagliardo–Nirenberg–Sobolev es válida para cualquier función $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. En efecto, si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ existe $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_m \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Luego, por Gagliardo–Nirenberg–Sobolev, sigue que $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^{p^\star}(\mathbb{R}^n)$.

Sea $v \in L^{p^\star}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_m \to v$ en $L^{p^\star}(\mathbb{R}^n)$. Pero como $u_m \to u$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$, se tiene (pasando a una subsucesión), que $u_m \to u$ c.t.p. y $u_m \to v$ c.t.p.

Luego $u = v$. Finalmente, como por Gagliardo–Nirenberg–Sobolev se tiene

$$\|u_m\|_{L^{p^\star}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

pasando al límite $m \to \infty$ se concluye lo deseado. □

El Teorema 2.30 implica también la siguiente inmersión de Sobolev que afirma que una función en $W^{1,p}(U)$ es más integrable que lo esperado a priori.

Corolario 2.34. *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y con ∂U de clase C^1, asumimos $1 \leq p < n$, entonces*

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}, \quad u \in W^{1,p}(U) \tag{2.7}$$

para $p \leq q \leq p^\star$, donde $p^\star = np/(n-p)$ y la constante C depende solo de p, n y U.

Mas aún si U es acotado, entonces existe constante C dependiente de p, n y U tal que

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}, \quad u \in W^{1,p}(U)$$

para $1 \leq q \leq p^\star$.

Demostración. Sea $u \in W^{1,p}(U)$, por el Teorema 2.28 existe una extensión $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\bar{u} = u \text{ en } U \text{ y } \|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)} \tag{2.8}$$

donde la función extendida $\bar{u}$ tiene soporte compacto.

Ahora, por la desigualdad de Gagliardo–Nirenberg–Sobolev, tenemos que

$$\|\bar{u}\|_{L^{p^\star}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla \bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Luego,

$$\|u\|_{L^{p^\star}(U)} \leq \|\bar{u}\|_{L^{p^\star}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla \bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}. \tag{2.9}$$

Sea ahora $p \leq q \leq p^\star$, usando el Teorema 2.5 y (2.9) tenemos que existe $\alpha \in (0,1)$ tal que

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq \|u\|^{\alpha}_{L^p(U)}\|u\|^{1-\alpha}_{L^{p^\star}(U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}.$$

Finalmente supongamos que $U \subset \mathbb{R}^n$ es acotado y que $1 \leq q < p$. Sea $u \in W^{1,p}(U)$, usando la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq |U|^{\frac{(p-q)}{pq}}\|u\|_{L^p(U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

donde la constante anterior no depende de la función u.

Queda demostrado del teorema. □

Antes de terminar la sección recordamos la desigualdad de Poincaré para espacios de Sobolev clásicos, el lector interesado en la demostración puede dirigirse a [18].

Teorema 2.35. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto con $|U| < \infty$ y $1 \leq p < n$. Entonces existe una constante C tal que*

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(U)} \text{ para toda } u \in W^{1,p}_0(U),$$

con $q \in [1, p^\star]$. La constante C depende de los parámetros n, p, q y U.

2.3.4. Teorema de Rellich-Kondrachov

Esta sección esta dedicada a presentar el resultado de compacidad clave que usaremos después para la existencia de extremales en las constantes óptimas.

El resultado fundamental se conoce como el Teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov. La demostración que aquí daremos será haciendo uso del Teorema 2.10 y siguiendo las ideas en [8]. El lector interesado en otra versión mas general del teorema de Rellich-Kondrachov y que usa en su demostración otra variante del Teorema de compacidad 2.10 que involucra una condición de decaimiento puede referirse a [28].

Teorema 2.36 (Rellich-Kondrachov)**.** *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado, con ∂U de clase C^1 y $1 \leq p < \infty$. Entonces $W^{1,p}(U) \subset\subset L^p(U)$.*

Demostración. Consideremos primero $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces usando la desigualdad de Jensen obtenemos

$$\begin{aligned}
|u(x+h)-u(x)|^p &= \left|\int_0^1 \frac{d}{dt}u(t(x+h)+(1-t)x)\,dt\right|^p \\
&= \left|\int_0^1 \nabla u(t(x+h)+(1-t)x)\cdot h\,dt\right|^p \\
&\leq \left(\int_0^1 |\nabla u(t(x+h)+(1-t)x)\cdot h|\,dt\right)^p \\
&\leq |h|^p \int_0^1 |\nabla u(t(x+h)+(1-t)x)|^p\,dt.
\end{aligned}$$

Integrando en la anterior desigualdad respecto de la variable x y cambiando variables llegamos a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x+h)-u(x)|^p\,dx \leq |h|^p \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\,dx,$$

luego elevando a la $1/p$ en esto último obtenemos

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq |h|\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.10}$$

para toda $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Sea ahora $\mathcal{L} \subset W^{1,p}(U)$ acotado, supongamos por simplicidad que $\|u\|_{W^{1,p}(U)} \leq 1, \forall u \in \mathcal{L}$. Debemos comprobar las condiciones del Teorema 2.10, en efecto si $\tilde{\mathcal{L}} = \{Eu : u \in \mathcal{L}\} \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ denotan las extensiones de los elementos en $\mathcal{L}$ entonces por el Teorema 2.28 se tiene que

$$\begin{aligned}
\|Eu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)} \\
&\leq C,
\end{aligned}$$

para toda $Eu \in \tilde{\mathcal{L}}$, es decir $\tilde{\mathcal{L}}$ resulta ser un subconjunto acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$. También se cumple (2.10) para los elementos en $\tilde{\mathcal{L}}$ (densidad de C_c^∞ en L^p), entonces por el Teorema 2.10 se tiene que $\tilde{\mathcal{L}}_{|U}$ es precompacto en $L^p(U)$, pero $\tilde{\mathcal{L}}_{|U} = \mathcal{L}$. Queda demostrado entonces el teorema. □

El anterior teorema puede ser aún mas general. En efecto el siguiente corolario muestra que se puede tener mas compacidad aún.

Corolario 2.37. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ con las mismas hipótesis que en el Teorema 2.36. Entonces $W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U)$ con $1 \leq q < p^\star$, donde $p^\star = \frac{np}{n-p}$ es el exponente crítico, si $1 \leq p < n$ y $p^\star = \infty$ si $n \leq p < \infty$.*

Demostración. Asumamos primero que $1 \leq p < n$. Supongamos que $p \leq q < p^\star$ y $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset W^{1,p}(U)$ con $\|u_m\|_{W^{1,p}(U)} \leq C, \forall m$. Usando ahora el Teorema 2.36 existe una subsucesión, que aún seguimos llamando $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ y una función $u \in L^p(U)$ tal que $u_m \to u$ en $L^p(U)$.

Ahora por el Teorema 2.5 existe $\alpha \in (0,1)$ tal que

$$\|u_m - u\|_{L^q(U)} \leq \|u_m - u\|_{L^p(U)}^{\alpha} \|u_m - u\|_{L^{p^\star}(U)}^{1-\alpha}. \tag{2.11}$$

$$\int_U |u|^{p^\star}\, dx \leq \liminf_{m\to\infty} \int_U |u_m|^{p^\star}\, dx \leq C\|u_m\|_{W^{1,p}(U)}^{p} \leq C,$$

por lo tanto $u \in L^{p^\star}(U)$. Se desprende de esto que

$$\|u_m - u\|_{L^{p^\star}(U)}^{1-\alpha} \leq C\left(\|u_m\|_{W^{1,p}(U)}^{1-\alpha} + \|u\|_{L^{p^\star}(U)}^{1-\alpha}\right) \leq C\left(C + \|u\|_{L^{p^\star}(U)}^{1-\alpha}\right),$$

entonces

$$\|u_m - u\|_{L^{p^\star}(U)}^{1-\alpha} \leq C, \text{ para todo } m.$$

Usando esta última desigualdad y que $\|u_m - u\|_{L^p(U)} \to 0$ en (2.11), concluimos que $u_m \to u$ en $L^q(U)$. Hemos probado así que $W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U)$ para $p \leq q < p^\star$.

Finalmente sea $1 \leq q < p$ y $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset W^{1,p}(U)$ con $\|u_m\|_{W^{1,p}(U)} \leq C, \forall m$. Usando nuevamente que $W^{1,p}(U) \subset\subset L^p(U)$, existe una subsucesión que aún seguimos llamando $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ y una función $u \in L^p(U)$ tal que $u_m \to u$ en $L^p(U)$. Por la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\|u_m - u\|_{L^q(U)} \leq |U|^{\frac{(p-q)}{qp}} \|u_m - u\|_{L^p(U)}^{q}.$$

Esta última desigualdad permite concluir que $W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U)$ para $1 \leq q < p$.

Hemos probado entonces que $W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U)$ para $1 \leq q < p^\star$.

Supongamos ahora que $p \geq n$, y $1 \leq q < \infty$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $q < n(n-\varepsilon)/\varepsilon$. Definamos ahora $p_\varepsilon = n - \varepsilon$, claramente $p_\varepsilon < p$, por lo tanto se tiene que $W^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p_\varepsilon}(\Omega)$ (ya que $|\Omega| < \infty$).

Sea $\{u_m\}_m \subset W^{1,p}(\Omega)$ uniformeme acotada en m, entonces $\{u_m\}_m \subset W^{1,p_\varepsilon}(\Omega)$, ya que $p_\varepsilon < n$ se cumple, por la primera parte de la demostración que la sucesión $\{u_m\}_m$ es precompacta en $L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < p_\varepsilon^\star$, pero como

$$p_\varepsilon^\star = \frac{n(n-\varepsilon)}{\varepsilon} \to +\infty \text{ si } \varepsilon \to 0,$$

se tiene entonces que $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < \infty$.

Queda finalizada la demostración. □

2.3.5. Teoremas de trazas clásicos

Asumiendo $U \subset \mathbb{R}^n$ acotado y de clase C^1, en esta sección mostramos que $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q(\partial U)$ para $1 \leq q \leq p_\star$ donde $p_\star = (n-1)p/(n-p)$ es el exponente crítico de trazas y que esta inmersión es compacta para el rango $1 \leq q < p_\star$.

Para probar el principal teorema de trazas de esta sección necesitamos la siguiente versión de la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, que demostramos usando las ideas de la demostración del Teorema 2.30.

Teorema 2.38. *Si $1 \leq p < n$, entonces existe una constante C dependiente solo de p y n tal que*

$$\|u\|_{L^{p_\star}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \quad \forall u \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$$

donde $p_\star = (n-1)p/(n-p)$.

Observación 2.39. Observemos que $p_\star \geq p$ y la igualdad sólo vale si $p = 1$.

Demostración. Sea $u \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$ arbitraria, considerando $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ entonces

$$u(x', 0) = -\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)\, dt$$

por lo tanto

$$|u(x', 0)| \leq \int_0^\infty |\nabla u(x', t)|\, dt$$

tomando entonces integral respecto de x' a ambos lados en la última desigualdad queda

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', 0)|\, dx' \leq \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u(x)|\, dx. \tag{2.12}$$

Aplicando ahora la desigualdad (2.12) a la función $|u|^\gamma$ (donde el parámetro γ sera ajustado adecuadamente después) y la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^\gamma\, dx' \leq \int_{\mathbb{R}^n_+} \gamma |u|^{\gamma-1} |\nabla u|\, dx \leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^p\, dx \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |u|^{(\gamma-1)p'}\, dx \right)^{1/p'}$$

ahora ajustamos el parámetro γ de modo que $(\gamma - 1)p' = p^\star$ y así resulta $\gamma = p_\star$ quedando entonces

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^{p_\star}\, dx' \leq p^\star \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^p\, dx \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |u|^{p^\star}\, dx \right)^{1/p'}. \tag{2.13}$$

Aplicando ahora el Teorema 2.30 a $(\int_{\mathbb{R}^n_+} |u|^{p^\star}\, dx)^{1/p'}$ nos queda

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |u|^{p^\star}\, dx \right)^{1/p'} = \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |u|^{p^\star}\, dx \right)^{\frac{p^\star}{p^\star p'}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^p\, dx \right)^{\frac{p^\star}{pp'}} \tag{2.14}$$

poniendo ahora (2.14) en (2.13) se llega a

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^{p_\star}\, dx' \leq p^\star \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}(1+\frac{p^\star}{pp'})}.$$

Como $1 + \frac{p^\star}{pp'} = 1 + \frac{np}{n-p}\frac{p-1}{p} = \frac{(n-1)p}{n-p} = p_\star$ la última desigualdad se convierte en

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^{p_\star}\, dx' \leq p^\star \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^p\, dx \right)^{\frac{p_\star}{p}} \tag{2.15}$$

por último elevando a la $1/p_\star$ a ambos lados de (2.15) llegamos a

$$\|u\|_{L^{p_\star}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \frac{np}{n-p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Queda entonces demostrado el teorema. □

Con la ayuda del Teorema 2.38 podemos demostrar el siguiente teorema que nos permitirá probar el principal resultado de esta sección.

Teorema 2.40. *Sea $1 \leq p < \infty$ asumiendo $U \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto acotado y ∂U de clase C^1 entonces existe un operador lineal acotado*

$$T : W^{1,p}(U) \to L^{p_\star}(\partial U)$$

donde $p_\star = (n-1)p/(n-p)$ tal que

1. *$Tu = u|_{\partial U}$ si $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$.*
2. *$\|Tu\|_{L^{p_\star}(\partial U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$ para cada $u \in W^{1,p}(U)$, con la constante C dependiente solo de p y de U.*

Demostración. Se supone primero $u \in C^1(\bar{U})$. Sea $x_0 \in \partial U$, suponemos también que cerca de x_0 la frontera ∂U es plana, podemos entonces asumir que existe una bola B con centro en x_0 de modo que los conjuntos $B^+ = B \cap \{x_n \geq 0\}$ y $B^- = B \cap \{x_n \leq 0\}$ cumplen que $B^+ \subset \bar{U}$ y $B^- \subset \mathbb{R}^n \setminus U$, se define la bola $\hat{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r/2\}$, considerando una función $\zeta \in C_c^\infty(B)$ con $\zeta \geq 0$ en B y $\zeta = 1$ en $\hat{B}$ usando el Teorema 2.38 aplicado a la función ζu y la suavidad de ζ tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma |u|^{p_\star}\, dx' &\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\zeta u|^{p_\star}\, dx' \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla(\zeta u)|^p\, dx \right)^{\frac{p_\star}{p}} \\
&= C\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |(\nabla\zeta)u + (\nabla u)\zeta)|^p\, dx \right)^{\frac{p_\star}{p}} \\
&= C\left(\int_{B^+} |(\nabla\zeta)u + (\nabla u)\zeta)|^p\, dx \right)^{\frac{p_\star}{p}} \\
&\leq C\left(\int_{B^+} |u|^p + |\nabla u|^p\, dx \right)^{\frac{p_\star}{p}}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

donde Γ es la porción de ∂U contenida dentro de $\hat{B}$ y $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} = \{x_n = 0\}$.

Si cerca del punto x_0 la frontera no es plana hacemos el alisamiento cercano al punto x_0 de la siguiente forma: por ser ∂U de clase C^1 existe un difeomorfismo $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ y un número $r > 0$ de modo que $V = U \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r) : x_n > \gamma(x')\}$ a partir de esto definimos los siguientes mapeos

$$\begin{cases} y_i = x_i := \Phi^i(x) & i = 1, \ldots, n-1 \\ y_n = x_n - \gamma(x') := \Phi^n(x) \end{cases} \tag{2.17}$$

y

$$\begin{cases} x_i = y_i := \Psi^i(x) & i = 1, \ldots, n-1 \\ x_n = y_n + \gamma(y') := \Psi^n(y) \end{cases} \tag{2.18}$$

de esta forma $y = \Phi(x)$ y $x = \Psi(y) = \Phi^{-1}(y)$, poniendo ahora el cambio $x = \Phi(y)$ $(\det(D\Phi) = \det(D\Psi) = 1)$ y usando (2.16) se llega a

$$\begin{aligned} \int_\Gamma |u|^{p_\star}\, dx' = \int_{\Phi(\Gamma)} |u \circ \Psi|^{p_\star}\, dy' &\leq C \left(\int_{\Phi(V)} |u \circ \Psi|^p + |\nabla (u \circ \Psi)|^p\, dy \right)^{\frac{p_\star}{p}} \\ &= C \left(\int_V |u|^p + |\nabla u|^p\, dx \right)^{\frac{p_\star}{p}} \\ &\leq C \left(\int_U |u|^p + |\nabla u|^p\, dx \right)^{\frac{p_\star}{p}}. \end{aligned}$$

Usando ahora que el borde ∂U es compacto existen finitos puntos $x_0^i \in \partial U$ y conjuntos abiertos asociados $\Gamma_i \subset \partial U$ $(i = 1, \ldots, n)$ tal que $\partial U = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$, se llega a

$$\|u\|_{L^{p_\star}(\partial U)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}. \tag{2.19}$$

Luego, definiendo ahora $Tu := u|_{\partial U}$ y usando (2.19) se obtiene

$$\|Tu\|_{L^{p_\star}(\partial U)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)} \tag{2.20}$$

donde la constante no tiene dependencia de la función u.

Hasta ahora hemos considerado $u \in C^1(\bar{U})$, supongamos ahora que $u \in W^{1,p}(U)$, por la regularidad asumida sobre el dominio existe una sucesión $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de clase $C^\infty(\bar{U})$ de modo que $\|u_m - u\|_{W^{1,p}(U)} \to 0$ si $m \to \infty$, esto último junto con (2.20) dicen que la sucesión $\{Tu_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^p(\partial U)$ definimos entonces

$$Tu := \lim_{m\to\infty} Tu_m$$

donde el límite esta tomado en $L^{p_\star}(\partial U)$, como además por (2.20) se tiene

$$\|Tu_m - Tu_l\|_{L^{p_\star}(\partial U)} \leq C \|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(U)} \tag{2.21}$$

el operador Tu esta bien definido. Si $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$ por la construcción de las u_m hecha en el Teorema 2.27 las u_m convergen uniformemente a la función u sobre $\bar{U}$ por lo tanto $Tu = u|_{\partial U}$. □

Con todo lo anterior estamos en condiciones de enunciar el principal resultado de esta sección referido a la compacidad de trazas. Si bien creemos que este resultado no es original, aquí lo demostramos. Este tipo de teoremas esta implícito en las distintas versiones de teoremas de compacidad de trazas existentes (ver [1, 2, 18]).

Teorema 2.41 (Inmersión compacta de trazas). *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ acotado y de clase $C^1(U)$ entonces $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q(\partial U)$ para todo q con $1 \leq q \leq p_\star = \frac{(n-1)p}{n-p}$, más aún si $q < p_\star$ la inmersión es compacta.*

Demostración. Dada $u \in W^{1,p}(U)$, aplicando la desigualdad Hölder y teniendo en cuenta que el dominio U es acotado se tiene para $1 \leq q < p_\star$ que

$$\|u\|_{L^q(\partial U)} \leq |\partial U|^{\frac{p_\star}{q(p_\star - q)}} \|u\|_{L^{p_\star}(\partial U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}. \tag{2.22}$$

Esto último prueba la inmersión $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q(\partial U)$ para $1 \leq q \leq p_\star$.

Vamos a probar ahora la compacidad de la inmersión cuando $q < p_\star$. Vamos a dividir la prueba en dos partes, primero demostraremos que $W^{1,p}(U) \subset\subset L^1(\partial U)$ y luego usaremos el Teorema 2.5 para probar que $W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(\partial U)$ para $1 \leq q < p^\star$. Supongamos ahora que $\{u_m\}_m \in W^{1,p}(U)$ es una sucesión que cumple

$$\|u_m\|_{W^{1,p}(U)} \leq M, \quad \forall m. \tag{2.23}$$

Sea $\varepsilon_l > 0$ tal que $\varepsilon_l \to 0$ cuando $l \to \infty$ y consideremos las funciones $u_m^{\varepsilon_l}$ como las obtenidas por el método de regularización del Teorema 1 sección 5.3 en [18] a Eu_m donde E es el operador de extensión. Luego, por (2.22), se tiene

$$\|u_m^{\varepsilon_l} - u_m\|_{L^1(\partial U)} \leq C\|u_m^{\varepsilon_l} - u_m\|_{W^{1,p}(U)}. \tag{2.24}$$

Vamos a probar ahora las hipótesis del teorema de Arzela-Ascoli para la sucesión $\{u_m^{\varepsilon_l}\}_{m\in\mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned}|u_m^{\varepsilon_l}(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \eta_{\varepsilon_l}(x-y)Eu_m(y)\,dy\right| &\leq \|\eta_{\varepsilon_l}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|Eu_m\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|\eta_{\varepsilon_l}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u_m\|_{W^{1,p}(U)} \leq M\|\eta_{\varepsilon_l}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

donde hemos usado que Eu_m tiene soporte compacto, el Teorema de inmersión de Sobolev y el Teorema de extensión. Así

$$|u_m^{\varepsilon_l}(x)| \leq M\|\eta_{\varepsilon_l}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.25}$$

Por (2.23) la constante M no depende de m y así el lado derecho en (2.25) es una constante que no depende de m.

Por otro lado, de manera análoga, se obtiene

$$\begin{aligned}|D_x u_m^{\varepsilon_l}(x)| = \left|\int_{B_{\varepsilon_l}(x)} D_x\eta_{\varepsilon_l}(x-y)Eu_m(y)\,dy\right| &\leq \int_{B_{\varepsilon_l}(x)} |D_x\eta_{\varepsilon_l}(x-y)||Eu_m(y)|\,dy \\ &\leq C\|D\eta_{\varepsilon_l}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u_m\|_{W^{1,p}(U)} \leq CM\|D\eta_{\varepsilon_l}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

y en consecuencia

$$|D_x u_m^{\varepsilon_l}(x)| \leq CM\|D\eta_{\varepsilon_l}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \tag{2.26}$$

La desigualdad (2.26) dice que la sucesión $\{u_m^{\varepsilon_l}\}_m$ es equicontinua. Por (2.25) y (2.26) vale entonces el Teorema de Arzela-Ascoli, existe por lo tanto una subsucesión $\{u_{m_k}^{\varepsilon_l}\}_k \subseteq \{u_m^{\varepsilon_l}\}_m$ tal que $|u_{m_k}^{\varepsilon_l}(x) - u_{m_j}^{\varepsilon_l}(x)| \to 0$ si $j, k \to \infty$ sobre compactos en $\mathbb{R}^n$, en particular sobre ∂U que es compacta, esto junto con el hecho de que $\{u_{m_k}^{\varepsilon_l}\}_k$ son $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ implica entonces

$$\|u_{m_k}^{\varepsilon_l} - u_{m_j}^{\varepsilon_l}\|_{L^1(\partial U)} \to 0 \quad si \quad j, k \to \infty. \tag{2.27}$$

Usando ahora (2.24) con $m = l = m_k$ después con $m = l = m_j$ junto con (2.27) y la desigualdad triangular se llega a

$$\|u_{m_k} - u_{m_j}\|_{L^1(\partial U)} \to 0 \quad si \quad j, k \to \infty.$$

Se ha encontrado entonces una subsucesión de Cauchy en $L^1(\partial U)$, y como este espacio es completo es convergente, todo esto prueba que $W^{1,p}(U) \subset\subset L^1(\partial U)$.

Supongamos ahora que $1 \leq q < p^\star = \frac{(n-1)p}{n-p}$, si $\|u_m\|_{W^{1,p}(U)} \leq M$ $\forall m$ por lo anterior podemos encontrar una subsucesión $\{u_{m_k}\}_k$ de Cauchy en $L^1(\partial U)$ y por el Teorema 2.5 con $p = 1, r = q$ y $q = p^\star$ se tiene que

$$\|u_{m_k} - u_{m_j}\|_{L^q(\partial U)} \leq \|u_{m_k} - u_{m_j}\|_{L^1(\partial U)}^\alpha \|u_{m_k} - u_{m_j}\|_{L^{p^\star}(\partial U)}^{1-\alpha}$$

donde $\alpha = (p^\star - q)/q(p^\star - 1)$ y $1 - \alpha = p^\star(q-1)/q(p^\star - 1)$ (al estar considerando $q < p^\star$ sera $\alpha > 0$), como $\|u_{m_k} - u_{m_j}\|_{L^1(\partial U)}^\alpha \to 0$ si $j, k \to \infty$ y $\|u_{m_k} - u_{m_j}\|_{L^{p^\star}(\partial U)}^{1-\alpha} \leq C\|u_{m_k} - u_{m_j}\|_{W^{1,p}(U)}^{1-\alpha} \leq CM$, donde las constantes no dependen de j, k, tenemos entonces que

$$\|u_{m_k} - u_{m_j}\|_{L^q(\partial U)} \leq CM\|u_{m_k} - u_{m_j}\|_{L^1(\partial U)}^\alpha$$

al ser $\alpha > 0$ llegamos a que $\{u_{m_k}\}_k$ es de Cauchy en $L^q(\partial U)$ con $1 \leq q < p^\star$ y al ser este completo esta subsucesión es convergente. Se ha probado entonces que

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(\partial U),$$

para $1 \leq q < p^\star$. Esto concluye la demostración. □

2.4. Espacios de Sobolev negativos

En esta breve sección, daremos las definiciones de los espacios de Sobolev negativos que son los espacios duales de los de Sobolev.

Definición 2.42. Dado $k \in \mathbb{N}$ y $1 < p < \infty$ se define el espacio $W^{-k,p'}(U)$ como el dual topológico de $W_0^{k,p}(U)$. Es decir

$$W^{-k,p'}(U) := \{f : W_0^{k,p}(U) \to \mathbb{R} \text{ lineales y continuas}\}.$$

En estos espacios se define la norma

$$\|f\|_{-k,p'} := \sup_{\substack{u\in W_0^{k,p}(U)\\ \|u\|_{k,p}=1}} \langle f, u\rangle,$$

donde $\langle f, u\rangle := f(u)$ es la aplicación de dualidad.

Observación 2.43. Observemos que si $f \in L^{p'}(U)$, entonces induce un elemento de $W^{-k,p'}(U)$ de la forma

$$\langle f, u\rangle := \int_U f u\, dx.$$

en este sentido decimos que $L^{p'}(U) \subset W^{-k,p'}(U)$ y dicha inclusión resulta continua.

En el caso $k = 1$ los elementos de $W^{-1,p'}(U)$ se pueden caracterizar completamente. Ver [18, Section 5.9.1]. De hecho se tiene

Teorema 2.44. *Sea $f \in W^{-1,p'}(U)$. Entonces existen $f^0, f^1, \dots, f^n \in L^{p'}(U)$ tales que*

$$\langle f, u\rangle = \int_U f^0 u\, dx + \sum_{i=1}^n \int_U f^i \partial_{x_i} u\, dx.$$

2.5. Espacios de Sobolev fraccionarios

En la literatura los espacios fraccionarios del tipo Sobolev se llaman también espacios de *Aronszajn, Gagliardo o Slobodeckij* en honor a estos matemáticos ya que los introdujeron casi en forma simultánea.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto (posiblemente con ningún tipo de suavidad), $0 < s < 1$ y $1 \le p < \infty$. Definiremos los espacios de Sobolev fraccionarios $W^{s,p}(\Omega)$ como

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega)\colon \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{n}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}, \tag{2.28}$$

endosado con la norma natural

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left\{ \int_\Omega |u|^p\, dx + \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}}\, dx\, dy \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{2.29}$$

Observación 2.45. Cuando $p = 2$, se denota $W^{s,2}(\Omega) = H^s(\Omega)$ debido a su estructura hilbertiana.

Observación 2.46. Si $s \ge 1$ y $u \in W^{s,p}(\Omega)$ entonces se tiene que u es constante (ver proposición 2 en [7]).

Luego, para el caso $s \ge 1$ se requiere otra definición.

Si $s \ge 1$ es un entero, entonces $W^{s,p}(\Omega)$ se define como el espacio de Sobolev clásico.

Si $s > 1$ y $s = \sigma + m$, donde m es un entero y $0 < \sigma < 1$, entonces el espacio (2.28) se define como

$$W^{s,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega) \colon D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega) \text{ con } |\alpha| = m\},$$

el cual es un espacio de Banach con respecto a la norma

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left\{ \|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^p_{W^{\sigma,p}(\Omega)} \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

En particular, en la norma (2.29), cuando $0 < s < 1$, el término

$$[u]_{s,p,\Omega} = \left\{ \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}}\, dx\, dy \right\}^{\frac{1}{p}} \tag{2.30}$$

recibe el nombre de seminorma de *Gagliardo* de la función u.

Observemos que este espacio (con $s \in (0, 1)$) es un espacio de Banach intermedio entre los espacios $W^{1,p}(\Omega)$ y $L^p(\Omega)$ respectivamente. A continuación presentamos la siguiente proposición (ver Proposiciones 2.1 y 2.2 en [17]) que muestra esta relación de inclusión.

Proposición 2.47. *Sean $0 < t < s < 1 \le p < \infty$. Si $u \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función medible entonces*

$$c\|u\|_{W^{t,p}(\mathbb{R}^n)} \le \|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

donde la constante $C \ge 1$ depende de los parámetros n, s y p y la constante $c \le 1$ depende de p, s, t. En particular se tiene que

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \subset W^{t,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Sea $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

Ahora usando el cambio de variables $z = y - x$ y la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\{|x-y|<1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}}\, dx\, dy &\le \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_1} \frac{|u(x) - u(x + z)|^p}{|z|^{n+sp}}\, dz\, dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_1} \int_0^1 \frac{|\nabla u(x + tz)|^p}{|z|^{n-p(1-s)}}\, dt\, dz\, dx \\
&\le \int_{B_1} \int_0^1 \frac{\|\nabla u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}}{|z|^{n-p(1-s)}}\, dt\, dz \\
&\le \frac{\omega_n}{p(1 - s)} \|\nabla u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\{|x-y|\ge1\}} \frac{|u(x)|^p}{|x - y|^{n+sp}}\, dx\, dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\{|x-y|\ge1\}} \frac{|u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}}\, dx\, dy \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\{|z|\ge1\}} \frac{1}{|z|^{n+sp}}\, dz \right) |u(x)|^p\, dx \\
&= \frac{\omega_n}{sp} \|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Usando ahora la desigualdad anterior se obtiene

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\{|x-y|\geq 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dx\,dy &\leq 2^{p-1}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\{|x-y|\geq 1\}} \frac{|u(x)|^p+|u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dx\,dy \\ &\leq 2^p\frac{\omega_n}{sp}\|u\|_p^p.\end{aligned} \tag{2.32}$$

Usando ahora (2.31) y (2.32) se cumple que

$$\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dx\,dy \leq C(n,s,p)\|u\|_{1,p}^p.$$

Usando lo anterior y la definición de la norma $\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$ concluimos la primera parte de la demostración.

Por otro lado, teniendo en cuenta que $0<t<s<1$, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\{|x-y|<1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+tp}}\,dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\{|x-y|<1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy. \tag{2.33}$$

De esta forma usando (2.32) y (2.33) tenemos que

$$\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+tp}}\,dxdy \leq 2^p\frac{\omega_n}{tp}\|u\|_p^p + \iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy$$

y así llegamos a

$$\|u\|_{t,p}^p \leq C(n,t,p)\|u\|_{s,p}^p.$$

Queda demostrado el teorema. □

2.5.1. Extensión en los espacios $W^{s,p}$

Es un hecho conocido que en el caso en que s es un número entero positivo y bajo ciertas condiciones de regularidad asumidas sobre el dominio $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, cualquier función $u\in W^{s,p}(\Omega)$ puede ser extendida a una función en el espacio $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. Recordemos que cuando s es un entero positivo, el espacio $W^{s,p}(\Omega)$ es el espacio de Soblev clásico. Estos resultados de extensión son fundamentales ya que nos permiten demostrar los teoremas de inmersión que serán necesarios en este trabajo.

Antes de presentar el teorema de extensión haremos la siguiente definición.

Definición 2.48 (Dominio de extensión)**.** Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un dominio abierto. Si s y p son números arbitrarios con $0<s<1\leq p<\infty$, decimos que Ω es un *dominio de extensión* para $W^{s,p}$ si existe una constante positiva $C=C(n,p,s,\Omega)$ tal que para toda función $u\in W^{s,p}(\Omega)$ existe una función $\tilde{u}\in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u(x)=\tilde{u}(x)$ para todo $x\in\Omega$ y $\|\tilde{u}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\leq C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$.

Enunciamos ahora sin demostración el principal resultado de esta sección, el cual nos dice que todo dominio Lipschitz tiene la propiedad de extensión de dominio. El lector interesado en los detalles de la demostración puede referirse a [17].

Teorema 2.49. *Sean s y p con $0 < s < 1 \leq p < \infty$. Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado y con frontera Lipschitz. Entonces Ω es un dominio de extensión según la Definición 2.48.*

Usando el Teorema 2.48 se puede extender fácilmente la Proposición 2.47 a dominios $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ que sean de extensión.

Teorema 2.50. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio con frontera Lipschitz. Sean $0 < t < s < 1 \leq p < \infty$. Luego se tiene que*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset W^{s,p}(\Omega) \subset W^{t,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega),$$

con inclusiones continuas.

Demostración. La demostración es inmediata de extender una función $u \in W^{s,p}(\Omega)$ a $\mathbb{R}^n$ y aplicar la Proposición 2.47. □

Observación 2.51. La condición de que el dominio Ω sea Lipschitz no puede ser evitada, para ver esto el lector puede ver el ejemplo 9.1 en [17].

Observación 2.52. Con la misma demostración, se puede ver que se tiene la inclusión $W^{s,p}(\Omega) \subset W^{t,q}(\Omega)$ para $q \leq p$ y $t < s$, si Ω tiene medida finita. En general no es cierto que $W^{s,p}(\Omega) \subset W^{s,q}(\Omega)$ si $q < p$. Ver [1] para más detalles y el caso en que Ω no tiene necesariamente medida finita.

2.5.2. Desigualdades fraccionarias

Presentamos en esta sección algunas desigualdades del tipo Sobolev para los espacios fraccionarios $W^{s,p}(\Omega)$ y que involucran la norma $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}$ definida anteriormente.

Definimos el exponente crítico de Sobolev fraccionario al número

$$p_s^\star := \begin{cases} \frac{np}{n-sp} & \text{si } sp < n \\ \infty & \text{si } sp \geq n. \end{cases}$$

Empezamos con el siguiente teorema de inmersión.

Teorema 2.53. *Sea $s \in (0,1)$, $p \in [1, +\infty)$ tal que $sp < n$. Entonces existe una constante positiva $C = C(n,s,p)$ tal que para cada función medible $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y compactamente soportada se cumple que*

$$\|u\|^p_{L^{p_s^\star}(\mathbb{R}^n)} \leq C \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \, dx\, dy. \tag{2.34}$$

Consecuentemente el espacio $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ esta continuamente embebido en el espacio $L^q(\mathbb{R}^n)$ para $q \in [p, p_s^\star]$.

Finalmente, si $sp \geq n$ tenemos que $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ está continuamente embebido en $L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $q \in [p, \infty)$.

Demostración. La siguiente demostración es extremadamente simple y elegante. La misma utiliza exclusivamente la desigualdad de Hölder. Esta prueba se puede encontrar en el libro [38]. En el mismo, el autor atribuye la demostración a H. Brezis.

Si bien esta demostración es muy elemental, la misma no da el comportamiento de óptimo de la constante con respecto a s. Esta dependencia es de mucha utilidad en algunas aplicaciones (cf. Capítulo 5). Se puede ver que la constante óptima en la desigualdad (2.34) es de la forma $C = s(1-s)C(n,p)$, pero su demostración se basa en la estimación de la mejor constante en una desigualdad de tipo Hardy. Ver [35]. En [4] se estudia también la constante C y se obtiene, mediante técnicas de análisis de Fourier que $C = (1-s)C(n,p)$ para $s \sim 1$.

Sea $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. Dado que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ (ver [17]), podemos suponer, sin pérdida de generalidad. que $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Tenemos que $|u(x)| \leq |u(x)-u(y)| + |u(y)|$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$. Sea $r > 0$ a determinar, se cumple que

$$\begin{aligned}
\omega_n r^n |u(x)| &= \int_{B_r(x)} |u(x)|\,dy \\
&\leq \int_{B_r(x)} |u(x)-u(y)|\,dy + \int_{B_r(x)} |u(y)|\,dy \\
&\leq \int_{B_r(x)} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}} |x-y|^{\frac{n}{p}+s}\,dy + \int_{B_r(x)} |u(y)|\,dy \\
&\leq r^{\frac{n}{p}+s} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dy \right)^{\frac{1}{p}} |B_r(x)|^{\frac{1}{p'}} + \|u\|_{p_s^\star} |B_r(x)|^{\frac{1}{(p_s^\star)'}} \\
&\leq \omega_n^{\frac{1}{p'}} r^{\frac{n}{p}+s+\frac{n}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dy \right)^{\frac{1}{p}} + \omega_n^{\frac{1}{(p_s^\star)'}} r^{\frac{n}{(p_s^\star)'}} \|u\|_{p_s^\star},
\end{aligned}$$

donde ω_n representa la medida de la bola unitaria. Si en la anterior desigualdad dividimos por $\omega_n r^n$, y luego elevamos a la $p_s^\star$ obtenemos también la siguiente desigualdad

$$|u(x)|^{p_s^\star} \leq \left[\omega_n^{\frac{1}{p'}-1} r^s \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dy \right)^{\frac{1}{p}} + \omega_n^{\frac{1}{(p_s^\star)'}-1} r^{\frac{n}{(p_s^\star)'}-n} \|u\|_{p_s^\star} \right]^{p_s^\star}. \tag{2.35}$$

Definimos ahora lo siguiente

$$a = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.36}$$

y

$$b = \|u\|_{p_s^\star}. \tag{2.37}$$

Teniendo en cuenta las anteriores definiciones, queremos que se cumpla que $r^s a = r^{n(\frac{1}{p_s^\star}-1)} b$, ya que si esto ocurre podemos acotar a $|u(x)|^{p_s^\star}$ por la seminorma de Gagliardo. Haciendo cálculos podemos ver que

$$(p_s^\star)' = \frac{np}{np-n+sp}$$

y
$$\frac{1}{p_s^\star} - 1 = \frac{-(n-sp)}{np}.$$
Teniendo en cuenta las expresiones de a y de b, junto con la ecuación $r^s a = r^{n(1/p_s^\star - 1)} b$, se puede ver que
$$r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p}{n}} = \frac{\|u\|_{p_s^\star}^{\frac{p}{n}}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\, dy\right)^{\frac{1}{n}}}.$$
Teniendo en cuenta entonces la expresión encontrada para r y la desigualdad (2.35) llegamos a
$$\begin{aligned}
|u(x)|^{p_s^\star} &\leq \left(\omega_n^{\frac{1}{p'}-1} + \omega_n^{\frac{1}{(p_s^\star)'}-1}\right)^{p_s^\star} r^{sp_s^\star} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\, dy\right)^{\frac{p_s^\star}{p}} \\
&\leq \left(\omega_n^{-\frac{1}{p}} + \omega_n^{-\frac{1}{p_s^\star}}\right)^{p_s^\star} \left(\frac{\|u\|_{p_s^\star}^{\frac{p}{n}}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\, dy\right)^{\frac{1}{n}}}\right)^{sp_s^\star} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\, dy\right)^{\frac{p_s^\star}{p}} \\
&= \left(\omega_n^{-\frac{1}{p}} + \omega_n^{-\frac{1}{p_s^\star}}\right)^{p_s^\star} \|u\|_{p_s^\star}^{\frac{p}{n}sp_s^\star} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\, dy.
\end{aligned}$$
Por último, integrando en la anterior desigualdad respecto de x y calculando los exponentes llegamos a
$$\|u\|_{p_s^\star}^p \leq C(n,s,p)[u]_{s,p;\mathbb{R}^n}^p.$$
Ahora, es inmediato de la desigualdad de interpolación (2.5) que $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$ para $q \in [p, p_s^*]$ con inclusiones continuas.

Finalmente, si $sp \geq n$ y $q \in (p,\infty)$, entonces tomando $t > 0$ tal que
$$0 < t < n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right),$$
tenemos que $t < s$, $tp < n$ y $p_t^* > q$. Luego $W^{t,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$ con inclusión continua. Pero, de la Proposición 2.47, $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \subset W^{t,p}(\mathbb{R}^n)$ con inclusión continua. □

Usando el teorema de extensión, Teorema 2.49, se deduce fácilmente el siguiente corolario.

Corolario 2.54. *Sea $0 < s < 1 \leq p < \infty$. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio que tiene la propiedad de extensión para el espacio $W^{s,p}$, entonces $W^{s,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ con inclusión continua para $q \in [p, p_s^\star]$ si $sp < n$ y para $q \in [p,\infty)$ si $sp \geq n$.*

Mas aún si el dominio Ω es de medida finita, entonces se cumple que la inmersión $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ es continua para $q \in [1, p_s^\star]$ y, si $sp < n$ y para $q \in [1,\infty)$ si $sp \geq n$.

Demostración. Sea $u \in W^{s,p}(\Omega)$. Por el Teorema 2.49, existe $\tilde{u} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u = \tilde{u}$ c.t.p. en Ω y $\|\tilde{u}\|_{s,p;\mathbb{R}^n} \leq C\|u\|_{s,p;\Omega}$. Pero, del Teorema 2.53, si $q \in [p, p_s^*]$ o $q \in [p,\infty)$ dependiendo si $sp < n$ o $p \geq n$, tenemos que $\|\tilde{u}\|_{q;\mathbb{R}^n} \leq C\|\tilde{u}\|_{s,p;\mathbb{R}^n}$. Luego
$$\|u\|_{q;\Omega} \leq \|\tilde{u}\|_{q;\mathbb{R}^n} \leq C\|\tilde{u}\|_{s,p;\mathbb{R}^n} \leq C\|u\|_{s,p;\Omega}.$$

Finalmente, si $|\Omega| < \infty$, por Hölder se tiene que

$$\|u\|_{q;\Omega} \leq |\Omega|^{\frac{p-q}{p}} \|u\|_{p;\Omega},$$

de donde se deduce el resultado. □

Observación 2.55. La conclusión del corolario anterior, no es válida en general para un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ arbitrario, ya que no siempre es posible extender una función u en el espacio $W^{s,p}(\Omega)$ a una en el espacio $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ sin asumir la regularidad adecuada para el dominio Ω.

2.5.3. Inmersiones fraccionarias compactas

En esta sección presentaremos algunos resultados de compacidad relacionados con los espacios $W^{s,p}(\Omega)$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado. Estos resultados de compacidad jugarán un rol fundamental mas adelante en este trabajo para probar existencia de extremales cuando trabajemos con las constantes óptimas asociadas a las desigualdades de Poincaré antes presentadas.

Enunciamos ahora el siguiente resultado de compacidad para espacios fraccionarios análogo al Teorema 2.36. Demostramos este resultado haciendo uso otra vez del Teorema 2.10.

Empecemos por un lema clave que da la continuidad en L^p de una función de $W^{s,p}$.

Lema 2.56. *Sean $0 < s < 1 \leq p < \infty$. Existe entonces una constante $C > 0$ que depende sólo de n, s y p tal que*

$$\|\tau_h u - u\|_p \leq C|h|^s [u]_{s,p},$$

para toda $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, donde $\tau_h u(x) = u(x+h)$.

Demostración. Observemos primero que

$$|h|^n \omega_n \|\tau_h u - u\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B_{|h|}(x)} |u(x+h) - u(x)|^p \, dy \, dx. \tag{2.38}$$

Luego obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_{|h|}(x)} |u(x+h) - u(x)|^p \, dy \, dx \leq& \\ & 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_{|h|}(x)} \frac{|u(x+h) - u(y)|^p}{|x+h-y|^{n+sp}} |x+h-y|^{n+sp} \, dy \, dx \\ & + 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_{|h|}(x)} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} |x-y|^{n+sp} \, dy \, dx \\ =& 2^{p-1}(I + II). \end{aligned}$$

Los términos I y II se acotan de manera similar. Primero se observa que, si $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in B_{|h|}(x)$,

$$|x-y| \leq |h| \quad \text{y} \quad |x+h-y| \leq |x-y| + |h| \leq 2|h|. \tag{2.39}$$

Luego, de (2.39),

$$I \leq (2|h|)^{n+sp} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_{|h|}(x)} \frac{|u(x+h) - u(y)|^p}{|x+h-y|^{n+sp}}\, dy\, dx \leq (2|h|)^{n+sp}\, [u]_{s,p}^p. \tag{2.40}$$

Análogamente,

$$II \leq |h|^{n+sp}\, [u]_{s,p}^p. \tag{2.41}$$

Finalmente, usando (2.38), (2.40) y (2.41) concluimos

$$\|\tau_h u - u\|_p^p \leq \frac{2^{p-1}(2^{n+sp}+1)}{\omega_n} |h|^{sp}\, [u]_{s,p}^p,$$

lo que concluye la demostración. □

Con la ayuda del Teorema 2.10 y del Lema 2.56 se obtiene fácilmente el siguiente resultado de compacidad.

Teorema 2.57. *Sean $0 < s < 1 \leq p < \infty$ y sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ una sucesión acotada, i.e. $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\|_{s,p} < \infty$. Existe entonces una función $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ y una subsucesión $\{u_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{k_j} \to u$ en $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Si llamamos $M = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\|_{s,p}$ es claro entonces que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\|_p \leq M \quad \text{y} \quad \sup_{k\in\mathbb{N}} [u_k]_{s,p} \leq M.$$

Luego, $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y, por el Lema 2.56,

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\tau_h u_k - u_k\|_p \leq CM|h|^s.$$

Luego, la sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ verifica las hipótesis del Teorema 2.10, con lo que tenemos que existe $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y una subsucesión $\{u_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{k_j} \to u$ en $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Sólo queda por verificar que $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. Pero eso es una consecuencia del Lema de Fatou. En efecto, pasando eventualmente a una subsucesión, podemos suponer que $u_{k_j} \to u$ en casi todo punto de $\mathbb{R}^n$. Luego

$$0 \leq \frac{|u_{k_j}(x) - u_{k_j}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \to \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \quad \text{para casi todo } (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Entonces, por el Lema de Fatou

$$\begin{aligned} [u]_{s,p}^p &= \iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\, dxdy \\ &\leq \liminf_{j\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{|u_{k_j}(x)-u_{k_j}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\, dxdy \\ &\leq \sup_{k\in\mathbb{N}} [u_k]_{s,p}^p < \infty, \end{aligned}$$

como queríamos ver. □

La convergencia local en $L^p(\mathbb{R}^n)$ no puede mejorarse. De hecho es sencillo ver que en general no es cierto que si $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ es acotada, entonces $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tenga algún punto de acumulación en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Ejemplo 2.58. Sea $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\rho \geq 0$, $\text{sop}(\rho) = B_1(0)$. Por ejemplo, se puede tomar $\rho(x)$ como el *núcleo regularizante estándar*,

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

Entonces es fácil ver que $\rho \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ para todo $0 < s < 1 \leq p < \infty$ y si llamamos $u_k(x) = \rho(x + k\text{v})$ con $\text{v} \in \mathbb{R}^n$ fijo, entonces $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ es acotada y verifica

$$\|u_k\|_p = \|\rho\|_p \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad u_k \to 0 \text{ en } L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

En consecuencia $u_k \not\to 0$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

El motivo por el cual en el Ejemplo 2.58 no se obtiene compacidad de la sucesión en $L^p(\mathbb{R}^n)$ es porque la masa de la sucesión se *pierde en el infinito*. En cambio si consideramos funciones restringidas a un dominio acotado, este fenómeno debería evitarse y así conseguir la deseada compacidad. Ese es el contenido del siguiente corolario.

Corolario 2.59 (Compacidad de $W^{s,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto de extensión acotado y $0 < s < 1 \leq p < \infty$. Entonces, si $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W^{s,p}(\Omega)$ es acotada, existe $u \in W^{s,p}(\Omega)$ y una subsucesión $\{u_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{k_j} \to u$ en $L^p(\Omega)$ cuando $j \to \infty$.*

Demostración. Sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W^{s,p}(\Omega)$ una sucesión acotada y $\tilde{u}_k \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ las extensiones asociadas. Luego, tenemos que existe $C > 0$ tal que $\|\tilde{u}_k\|_{s,p} \leq C\|u_k\|_{s,p;\Omega}$, para toda $k \in \mathbb{N}$. Tenemos entonces que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\tilde{u}_k\|_{s,p} \leq C \sup_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\|_{s,p;\Omega} < \infty.$$

Podemos luego aplicar el Teorema 2.57 a la sucesión $\{\tilde{u}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ y concluir que existe $\tilde{u} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ y una subsucesión $\{\tilde{u}_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{\tilde{u}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\tilde{u}_{k_j} \to \tilde{u}$ en $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Pero entonces, como Ω es acotado, $\tilde{u}_{k_j} \to \tilde{u}$ en $L^p(\Omega)$. Luego, llamando $u = \tilde{u}|_\Omega$ se concluye lo deseado. □

El Corolario 2.54 nos dice hasta donde podemos tener compacidad si asumimos cierta relación entre los exponentes n, s y p. El siguiente corolario nos muestra esto.

Corolario 2.60. *Sea $0 < s < 1 \leq p < \infty$ y sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con frontera Lipschitz. Entonces si $sp < n$, tenemos que $W^{s,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$ para $q \in [1, p_s^\star)$ y si $sp \geq n$, para $q \in [1, \infty)$.*

Demostración. Como se tiene siempre que $W^{s,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$ entonces se deduce fácilmente de la desigualdad de Hölder que $W^{s,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$ para $q \in [1, p]$.

Supongamos ahora que $sp < n$, sea $q \in [p, p_s^\star]$ y $\{u_m\}_{m=1}^\infty \subset W^{s,p}(\Omega)$ acotada. Por el Corolario 2.54 existe una subsucesión que aún seguimos llamando $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ y una función $u \in W^{s,p}(\Omega)$ tal que $\|u_m - u\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ si $m \to \infty$.

La función u pertenece también al espacio $L^{p_s^\star}(\Omega)$. Por lo tanto usando el Corolario 2.54 se tiene que

$$\begin{aligned}\|u_m - u\|_{p_s^\star;\Omega} \leq& \|u_m\|_{p_s^\star;\Omega} + \|u\|_{p_s^\star;\Omega}\\ \leq& C([u_m]_{s,p} + [u]_{s,p})\\ \leq& C,\end{aligned}$$

donde esta constante no depende de m.

Usando ahora el Teorema 2.5 existe $\alpha \in (0,1)$ tal que

$$\|u_m - u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u_m - u\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)} \|u_m - u\|^{1-\alpha}_{L^{p_s^\star}(\Omega)},$$

por lo tanto $\|u_m - u\|_{L^q(\Omega)} \to 0$.

Finalmente, si $sp \geq n$ y $q \in [p, \infty)$, sea $r > q$ y por el Corolario 2.54 tenemos que $W^{s,p}(\Omega) \subset L^r(\Omega)$ con inclusión continua. Luego el resultado sigue de forma análoga al caso previo usando la desigualdad de interpolación del Teorema 2.5 para $p < q < r$. □

2.5.4. Desigualdades del tipo Poincaré para espacios fraccionarios

Terminamos este capítulo presentando las desigualdades de Poincaré mencionadas anteriormente en la introducción para espacios de Sobolev fraccionarios y algunas propiedades asociadas.

Usaremos la notación

$$(u)_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(y)\, dy = ⨍_\Omega u\, dy.$$

Tenemos entonces la siguiente desigualdad de tipo Poincaré.

Teorema 2.61. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado y $0 < s < 1 \leq p < \infty$. Existe entonces $C_1 > 0$ que sólo depende de $s, p, n, |\Omega|$ y diam(Ω) tal que*

$$\|u - (u)_\Omega\|_p \leq C_1 [u]_{s,p;\Omega} \tag{2.42}$$

para toda $u \in W^{s,p}(\Omega)$.

Demostración. Como $[u]_{s,p;\Omega} = [u + k]_{s,p;\Omega}$ para toda constante $k \in \mathbb{R}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $(u)_\Omega = 0$.

Luego tenemos

$$|\Omega||u(x)| = \left|\int_\Omega (u(x) - u(y))\, dy\right| \leq \int_\Omega |u(x) - u(y)|\, dy,$$

de donde, por la desigualdad de Hölder,

$$|u(x)|^p \leq \fint_\Omega |u(x) - u(y)|^p \, dy = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |u(x) - u(y)|^p \, dy.$$

Integrando esta desigualdad sobre Ω obtenemos

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \leq \frac{1}{|\Omega|} \iint_{\Omega\times\Omega} |u(x) - u(y)|^p \, dxdy.$$

Finalmente, usando que $|x - y| \leq \operatorname{diam}(\Omega)$ si $x, y \in \Omega$ concluimos

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega\times\Omega} |u(x) - u(y)|^p \, dxdy &= \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} |x - y|^{n+sp} \, dxdy \\ &\leq \operatorname{diam}(\Omega)^{n+sp} [u]^p_{s,p;\Omega}.\end{aligned}$$

Luego basta tomar

$$C_1 = \left(\frac{\operatorname{diam}(\Omega)^{n+sp}}{|\Omega|} \right)^{\frac{1}{p}}$$

para concluir la demostración. □

Notemos por $L^p_0(\Omega)$ al conjunto de funciones con promedio 0, i.e.

$$L^p_0(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) \colon (f)_\Omega = 0\},$$

y definimos

$$\mathring{W}^{s,p}(\Omega) = W^{s,p}(\Omega) \cap L^p_0(\Omega).$$

El Teorema 2.61 implica entonces que si nos restringimos a $\mathring{W}^{s,p}(\Omega)$, entonces $[\,\cdot\,]_{s,p,\Omega}$ define una norma equivalente a $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}$. Es decir

Corolario 2.62. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado y $0 < s < 1 \leq p < \infty$. Entonces*

$$[u]_{s,p;\Omega} \leq \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq (1 + C_1^p)^{\frac{1}{p}} [u]_{s,p;\Omega},$$

para toda $u \in \mathring{W}^{s,p}(\Omega)$, donde C_1 es la constante del Teorema 2.61.

En consecuencia $(\mathring{W}^{s,p}(\Omega), [\,\cdot\,]_{s,p;\Omega})$ resulta ser un espacio de Banach separable y, si $p > 1$, reflexivo.

Demostración. Es inmediata del Teorema 2.61 y de la definición de $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}$. □

La anterior desigualdad del tipo Poincaré no es la única de este tipo asociada a los espacios fraccionarios $W^{s,p}(\Omega)$, en realidad la que resultará útil mas adelante en este trabajo es otra versión en donde la medida del conjunto de puntos en donde se anulan las funciones debe tener medida positiva. Terminamos este capítulo con esta versión de la desigualdad de Poincaré cuya demostración es básica.

Teorema 2.63. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado y $0 < \alpha < |\Omega|$. Entonces existe una constante C que depende sólo de n, p, s, α y diam(Ω) tal que para para toda función $u \in W^{s,p}(\Omega)$ con $|\{u = 0\} \cap \Omega| \geq \alpha$ se cumple que*

$$\left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} \, dx \, dy\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.43}$$

Demostración. Sea $A = \{u = 0\} \cap \Omega$. Entonces

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} \, dx \, dy \geq \int_\Omega |u(x)|^p \left\{ \int_A \frac{1}{|x - y|^{n+sp}} \, dy \right\} dx. \tag{2.44}$$

La idea es ahora encontrar una cota inferior para

$$\int_A \frac{1}{|x - y|^{n+sp}} \, dy.$$

Como $|x - y| \leq \text{diam}(\Omega)$ para $x, y \in \Omega$ tenemos que

$$\int_A \frac{1}{|x - y|^{n+sp}} \, dy \geq \text{diam}(\Omega)^{-(n+sp)} |A|,$$

por lo tanto usando la anterior desigualdad en (2.44) tenemos que

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} \, dx \, dy \geq \text{diam}(\Omega)^{-(n+sp)} |A| \int_\Omega |u(x)|^p \, dx.$$

Queda entonces demostrada la desigualdad (2.43). $\square$

Capítulo 3

Problemas asociados a los operadores Δ_p y $(-\Delta_{p,\Omega})^s$

En este capítulo introduciremos los operadores con los que trabajaremos en el Capítulo 5. En la primera mitad de este capítulo empezamos describiendo el operador *$p-$laplaciano* Δ_p y el espacio sobre el cual trabajaremos. Luego presentamos algunos problemas de autovalores asociados a este operador mostrando la existencia de primer autovalor y de extremales. Para finalizar esta primera parte del capítulo presentamos el problema de diseño óptimo asociado a Δ_p que analizaremos detalladamente después en el Capítulo 4. Mostramos para este problema la existencia de *ventanas óptimas* asociada al primer autovalor de Steklov no lineal.

Finalizamos la primera mitad del capítulo haciendo una generalización del problema de Steklov presentado previamente, esta generalización será sobre la cual trabajaremos luego en el Capítulo 5.

En la segunda parte del capítulo introducimos el operador no local $(-\Delta_{p,\Omega})^s$ indicando la clase de funciones sobre la cual consideraremos que actúa y el espacio sobre el cual trabajaremos. También presentaremos los llamados *problema del obstáculo fuerte* y el *problema del obstáculo débil* respectivamente que involucran al operador $(-\Delta_{p,\Omega})^s$, estos serán también los problemas sobre los cuales trabajaremos en el Capítulo 5. Mostraremos existencia de configuración óptima para cada uno de los problemas mencionados.

3.1. El laplaciano no lineal Δ_p

Cuando estudiamos la extensión del problema de Laplace, que surge de forma natural en cálculo de variaciones cuando la integral

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx$$

es reemplazada por

$$\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx \text{ para } 1 < p < \infty,$$

reemplazamos también el espacio $H^1(\Omega)$ por el espacio $W^{1,p}(\Omega)$. En el caso de la primera integral el operador asociado es el laplaciano Δ, cuando estudiamos la segunda integral para funciones en $W^{1,p}(\Omega)$ el operador asociado ahora es el $p-$laplaciano no lineal Δ_p definido como

$$\Delta_p u(x) := div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \sum_{i=1}^{n}(|\nabla u(x)|^{p-2}u_{x_i}(x))_{x_i}, \tag{3.1}$$

para $1 < p < \infty$. Observamos que en el caso $p = 2$ se tiene que $\Delta_p = \Delta$.

La condición de que $1 < p < \infty$ es fundamental para nosotros, ya que para este caso el espacio $W^{1,p}(\Omega)$ sobre el que trabajaremos resulta ser un espacio de Banach reflexivo y esto hace posible que funcionen los teoremas de convergencia de mínimos que usaremos en los próximos capítulos.

Resultan ser útiles en muchas aplicaciones los casos $p = 1$ y $p = \infty$, pero estos no serán tratados en esta tesis.

En esta sección nos concentramos en el estudio de ciertos problemas de autovalores asociados al laplaciano no lineal Δ_p. Dado que el operador Δ_p es no lineal, no son problemas de autovalores en el sentido estricto del término (por ejemplo, las autofunciones no forman un espacio lineal). Sin embargo, la homogeneidad del operador ($\Delta_p(tu) = t^{p-1}\Delta_p u$, $t > 0$) si permiten mostrar que las autofunciones forman un *cono* y dicho concepto es suficiente para extender muchas de las propiedades de los autovalores para problemas lineales.

A modo de repaso, recordemos algunas cuestiones de los autovalores de Dirichlet asociados al laplaciano Δ.

Los autovalores de Dirichlet de Δ en un dominio acotado Ω son aquellos números reales μ tales que la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

admite una solución $u \in H_0^1(\Omega)$ no trivial. Es bien sabido, ver por ejemplo [18], que el conjunto de autovalores forma una sucesión $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que cumple

$$0 < \mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq \cdots \leq \mu_k \to \infty$$

donde el primero μ_1 es *simple* (es decir, el conjunto de autofunciones es un espacio lineal de dimensión uno) y los demás autovalores tienen multiplicidad finita (en la sucesión están contados con multiplicidad).

Estos autovalores tienen la siguiente *caracterización variacional*

$$\mu_k = \min_{S\subset\mathbb{S}_k}\max_{v\in S}\frac{\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx}{\int_\Omega v^2\,dx},$$

donde $\mathbb{S}_k := \{S \subset H_0^1(\Omega) \colon S \text{ es subespacio}, \dim S \geq k\}$.

En particular, el primer autovalor μ_1 posee la siguiente caracterización:

$$\mu_1 = \min_{0\neq v\in H_0^1(\Omega)}\frac{\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx}{\int_\Omega v^2\,dx}.$$

No es difícil ver que el mínimo se realiza exactamente en las autofunciones asociadas a μ_1 y que dichas autofunciones son de signo constante. En este sentido se dice que μ_1 es un *autovalor principal*.

Vamos ahora a estudiar la correspondiente extensión de este primer autovalor para el operador Δ_p.

3.1.1. El problema de Dirichlet para Δ_p

Empezamos mostrando la existencia de solución débil (y que se entiende por esta), dando a su vez una caracterización de una solución para el problema de Dirichlet con fuente en la ecuación principal.

Teorema 3.1. *Sea $p \in (1, \infty)$. Sea Ω un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ y sea $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ dada, donde $1/p + 1/p' = 1$ y $W^{-1,p'}(\Omega)$ nota el dual topológico de $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

1. *Existe entonces una única solución $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ del siguiente problema de minimización:*

$$\text{mín}\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p\,dx - \langle f, v\rangle \colon\, v \in W_0^{1,p}(\Omega)\right\}.$$

2. *Equivalentemente, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es solución débil del problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f & \textit{en } \Omega \\ u = 0 & \textit{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

Es decir, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y verifica

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v\,dx = \langle f, v\rangle$$

para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. Veamos primero la equivalencia entre 1 y 2.

Sea $I\colon\, W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p\,dx - \langle f, v\rangle.$$

Supongamos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es un mínimo de I. Veamos que es solución débil de (3.2). En efecto, si $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y $t \in \mathbb{R}$, entonces se tiene que $\varphi(t) := I(u + tv)$ alcanza su mínimo en $t = 0$ y por ende $\varphi'(0) = 0$. Pero

$$\varphi'(t) = \int_\Omega |\nabla u + t\nabla v|^{p-2}(\nabla u + t\nabla v) \cdot \nabla v\,dx - \langle f, v\rangle,$$

de donde

$$0 = \varphi'(0) = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v\, dx - \langle f, v\rangle.$$

Recíprocamente, si u es solución débil de (3.2) y $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es arbitraria, usamos $w = u - v$ como función test en la formulación débil y obtenemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot (\nabla u - \nabla v)\, dx = \langle f, u - v\rangle$$

de donde se obtiene

$$\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx - \langle f, u\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v\, dx - \langle f, v\rangle.$$

Usando la desigualdad de Young (ver [18]) $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, la primera integral del lado derecho se acota por

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p\, dx + \frac{1}{p'}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx.$$

De ahí es inmediato concluir que

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx - \int_\Omega fu\, dx \le \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p\, dx - \langle f, v\rangle = I(v).$$

Falta entonces demostrar 1. Observemos que I es acotado inferiormente. Para eso usaremos la llamada *desigualdad de Young con épsilon*, es decir, usamos la desigualdad de Young de la siguiente manera:

$$ab = (\delta a)(\tfrac{b}{\delta}) \le \frac{\delta^p a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'\delta^{p'}}.$$

Luego, si dado $\varepsilon > 0$ elegimos $\delta > 0$ tal que $\frac{\delta^p}{p} = \varepsilon$ (i.e. $\delta = (p\varepsilon)^{\frac{1}{p}}$), se obtiene

$$ab \le \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^{p'}, \tag{3.3}$$

con $C_\varepsilon = \frac{p-1}{p^{\frac{p+1}{p}}\varepsilon^{\frac{1}{p}}}$.

Usando ahora la desigualdad (3.3) y el Teorema 2.35 (desigualdad de Poincaré clásica), se obtiene

$$\langle f, v\rangle \le \|v\|_{1,p}\|f\|_{-1,p'} \le (C+1)\varepsilon \int_\Omega |\nabla v|^p\, dx + C_\varepsilon \|f\|_{-1,p'}^{p'},$$

donde C es la constante asociada a la desigualdad de Poincaré. Luego si se fija $\varepsilon = \frac{1}{2p(C+1)}$, se obtiene que

$$\begin{aligned} I(v) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p\, dx - \langle f, v\rangle \\ &\ge \frac{1}{2p}\int_\Omega |\nabla v|^p\, dx - C_\varepsilon \|f\|_{-1,p'}^{p'} \\ &\ge -C_\varepsilon \|f\|_{-1,p'}^{p'}. \end{aligned}$$

Ahora la demostración es una aplicación inmediata del *método directo del cálculo de variaciones*. Sea $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ una sucesión minimizante, i.e.

$$I(u_m) \to \inf_{W_0^{1,p}(\Omega)} I$$

Observemos que lo visto anteriormente nos da la siguiente desigualdad de coercividad

$$I(v) \geq \frac{1}{2p}\|v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - C\|f\|^{p'}_{-1,p'}.$$

De esta desigualdad se desprende que la sucesión $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y luego, por el Teorema de Banach-Alaoglu, existe una subsucesión (que seguimos notando $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$) débil convergente.

Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ el límite débil, es decir, $u_m \rightharpoonup u$. Entonces, por definición de convergencia débil,

$$\langle f, u_m\rangle \to \langle f, u\rangle.$$

Por otro lado, como la norma es débil semicontinua inferiormente, se tiene que

$$\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx \leq \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_m|^p\, dx.$$

Combinando estas dos últimas expresiones, obtenemos que

$$I(u) \leq \liminf_{m\to\infty} I(u_m) = \inf_{W_0^{1,p}(\Omega)} I,$$

es decir, u resuelve el problema de minimización.

Finalmente, veamos la unicidad. Esto es una consecuencia de la convexidad uniforme de I. En efecto, dado que la función real $x \mapsto |x|^p$ con $p > 1$ es uniformemente convexa, es fácil ver que I es uniformemente convexa, esto es

$$I((1-t)u + tv) < (1-t)I(u) + tI(v)$$

para todo $t \in (0, 1)$ y $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \neq v$.

Luego, si u_1 y u_2 son dos minimizantes distintos para I, definimos $u = \frac{1}{2}(u_1+u_2)$ y obtenemos

$$I(u) < \frac{1}{2}I(u_1) + \frac{1}{2}I(u_2) = \inf_{W_0^{1,p}(\Omega)} I$$

lo que es un absurdo.

Esto concluye la demostración. □

Sea $p \in (1, \infty)$. Definimos el siguiente número

$$\rho_1 = \inf_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^p\, dx}{\int_\Omega |v|^p\, dx}. \tag{3.4}$$

Estudiamos ahora el caso $f = \rho_1|u|^{p-2}u$, es decir el problema de Dirichlet con autovalores. El siguiente resultado nos dice que existe ínfimo para la cantidad (3.4) y nos da la existencia de solución para el problema de autovalores de Dirichlet.

Teorema 3.2. *Si $p \in (1,\infty)$, entonces el ínfimo en (3.4) se alcanza. Más aún $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ alcanza ese ínfimo si y sólo si u es una autofunción asociada a ρ_1, es decir, es solución débil de*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \rho_1|u|^{p-2}u & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Finalmente, si Ω es conexo, toda autofunción asociada a ρ_1 tiene signo constante. Más aún, toda autofunción asociada a ρ_1 no se anula en Ω.

Observación 3.3. Puede demostrarse, si bien no lo haremos en este trabajo, que ρ_1 es simple. Es decir, si u_1 y u_2 son dos autofunciones asociadas a ρ_1, entonces existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $u_1 = tu_2$.

Demostración. Veamos primero que el ínfimo en la definición de ρ_1 se alcanza. La demostración es muy similar a lo hecho en la sección anterior.

En efecto, sea $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ una sucesión minimizante. Claramente, podemos suponer que $\|u_m\|_{L^p(\Omega)} = 1$. Luego se tiene

$$\|\nabla u_m\|^p_{L^p(\Omega)} \to \rho_1, \quad \|u_m\|_{L^p(\Omega)} = 1.$$

De esto se desprende que la sucesión $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y por lo tanto existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y una subsucesión (que seguimos notando $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$) tal que $u_m \rightharpoonup u$.

Observemos que por el Teorema de Rellich-Kondrachov 2.36, $u_m \to u$ en $L^p(\Omega)$ y por ende $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$, en consecuencia la función u es admisible para (3.4).

Finalmente, como la norma es débil semicontinua inferiormente, se obtiene que

$$\rho_1 \leq \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \liminf_{m\to\infty} \|\nabla u_m\|^p_{L^p(\Omega)} = \rho_1.$$

Análogamente que en la sección anterior, sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ un minimizante para ρ_1 normalizado, es decir $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$ y por ende $\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} = \rho_1$. Sea $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ arbitraria y consideremos la función $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(t) := \frac{\int_\Omega |\nabla u + t\nabla v|^p\,dx}{\int_\Omega |u + tv|^p\,dx},$$

entonces φ tiene un mínimo en $t = 0$ y por ende $\varphi'(0) = 0$. Observemos que si v es un múltiplo de u, entonces φ no está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, pero en ese caso existe $\delta > 0$ tal que φ está definida en $|t| < \delta$.

Ahora,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u + t\nabla v|^p\,dx = p\int_\Omega |\nabla u + t\nabla v|^{p-2}(\nabla u + t\nabla v)\cdot\nabla v\,dx,$$
$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |u + tv|^p\,dx = p\int_\Omega |u + tv|^{p-2}(u + tv)v\,dx$$

de donde

$$
\begin{aligned}
0 = \varphi'(0) &= \frac{\left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)\left(\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v\,dx\right) - \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\right)\left(\int_\Omega |u|^{p-2}uv\,dx\right)}{\left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^2} \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v\,dx - \rho_1\int_\Omega |u|^{p-2}uv\,dx.
\end{aligned}
$$

Es decir, u es una autofunción asociada a ρ_1.

Recíprocamente, si u es una autofunción asociada a ρ_1, entonces

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v\,dx - \rho_1\int_\Omega |u|^{p-2}uv\,dx = 0$$

para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Luego, tomando $v = u$ se llega a

$$\rho_1 = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx}{\int_\Omega |u|^p\,dx}.$$

Resta ver que las autofunciones asociadas a ρ_1 tienen signo constante. Para esto sólo basta observar que si u es un minimizante para ρ_1, entonces $w = |u|$ también lo es y por ende w es una solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta_p w \geq 0 & \text{en } \Omega \\ w \geq 0 & \text{en } \Omega \\ w = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Para este problema, vale el principio fuerte del mínimo (ver [42]) y entonces se tiene que $w \equiv 0$ o $w > 0$ en Ω. Cómo $w \neq 0$ concluimos que $w > 0$ en Ω de donde se deduce que u tiene signo constante. □

3.1.2. El problema de Neumann homogéneo y no homogéneo para Δ_p

Empezamos con el problema de Neumann con condición homogénea en la frontera del dominio.

Teorema 3.4. *Sea $1 < p < +\infty$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Sea $f \in [W^{1,p}(\Omega)]'$.*

1. *Existe entonces una única solución $u \in W^{1,p}(\Omega)$ del siguiente problema de minimización:*

$$\text{mín}\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p + |v|^p\,dx - \langle f, v\rangle \colon v \in W^{1,p}(\Omega)\right\}.$$

2. *Equivalentemente, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ es solución débil del problema*

$$-\Delta_p u + |u|^{p-2}u = f \quad \text{en } \Omega$$

Es decir, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y verifica

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v + |u|^{p-2}uv\,dx = \langle f, v\rangle,$$

para toda $v \in W^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. La demostración es completamente análoga al Teorema 3.1. □

Como caso particular de gran interés es cuando $f \in L^{p'}(\partial\Omega)$. En este caso, el anterior problema se convierte en el problema de Neumann con flujo dado por f. Se tiene en consecuencia el siguiente resultado.

Teorema 3.5. *Sea $1 < p < +\infty$ y sea Ω un conjunto abierto con frontera Lipschitz. Sea $g \in L^{p'}(\partial\Omega)$ una función dada.*

1. *Existe entonces una única solución $u \in W^{1,p}(\Omega)$ del siguiente problema de minimización:*

$$\text{mín}\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p + |v|^p\,dx - \int_{\partial\Omega} gv\,dS : v \in W^{1,p}(\Omega)\right\}.$$

2. *Equivalentemente, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ es solución débil del problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = 0 & \text{en } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2}\partial_\nu u = g & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Es decir, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y verifica

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v + |u|^{p-2}uv\,dx = \int_{\partial\Omega} gv\,dS$$

para toda $v \in W^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. Inmediato de la discusión previa. □

3.1.3. El problema de Steklov no lineal asociado a Δ_p

Supongamos ahora que $1 < p < \infty$ y definimos el número

$$\lambda_1 := \inf_{W^{1,p}(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p\,dx}{\int_{\partial\Omega} |u|^p\,dS} = \text{ínf}_{W^{1,p}(\Omega)} \frac{\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}}{\|u\|^p_{L^p(\partial\Omega)}} \tag{3.5}$$

Veremos ahora que este número corresponde con el primer autovalor del llamado problema de *Steklov*, que para el operador Δ fuera el estudiado por W. Steklov en [40]. En este problema el autovalor aparece a traves de la frontera del dominio.

Tenemos el siguiente resultado de existencia de solución para este problema de autovalores.

Teorema 3.6. *Sea $1 < p < \infty$ y sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto con borde Lipschitz y acotado. Entonces existe ínfimo para la constante (3.5). Mas aún una función $u \in W^{1,p}(\Omega)$ es un mínimo para (3.5) si y sólo es una solución débil para*

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = 0 & \text{en } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2}\partial_\nu u = \lambda |u|^{p-2}u & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

Demostración. Probamos primero la existencia de extremal para la constante (3.5). Por el Teorema 2.41 el cociente en (3.5) esta acotado inferiormente, por lo tanto podemos tomar una sucesión minimizante $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \in W^{1,p}(\Omega)$, que podemos suponer además normalizada ($\|u_m\|_{L^p(\partial\Omega)} = 1, \forall m$). Es decir

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \lambda_1.$$

Esto último nos dice que existe una constante $C > 0$ tal que $\|u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C\ \forall m$, tenemos entonces por el teorema de Banach Alaoglu que existe una subsucesión que aún seguimos llamando $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$, y una función $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_m \rightharpoonup u$ débil en $W^{1,p}(\Omega)$, además por la compacidad del Teorema 2.41 tenemos que

$$u_m \to u \text{ fuerte en } L^p(\partial\Omega). \tag{3.7}$$

Usando (3.7) se cumple que

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} = \lim_{m\to\infty} \|u_m\|_{L^p(\partial\Omega)} = 1,$$

esto nos dice que el límite débil esta normalizado y así u resulta ser una función admisible para (3.5).

Usando ahora la semicontinuidad de la norma de Sobolev, llegamos a

$$\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \liminf_{m\to\infty} \|u_m\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \lambda_1 \leq \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)},$$

lo anterior nos dice que la función u es donde se alcanza el ínfimo en (3.5), es decir u es extremal para (3.5).

Probemos ahora la equivalencia. Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ un mínimo para (3.5), entonces

$$\lambda_1 = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p\, dx}{\int_{\partial\Omega} |u|^p\, dS}. \tag{3.8}$$

Definamos ahora el funcional $J : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ como

$$J(u) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p\, dx}{\int_{\partial\Omega} |u|^p\, dS},$$

se cumple entonces que la función u es un mínimo para este funcional, en consecuencia para $v \in W^{1,p}(\Omega)$ arbitraria se cumple que $< J'(u), v >= 0$, es decir

$$\frac{p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + |u|^{p-2}uv\, dx \int_{\partial\Omega} |u|^p\, dS - p\int_{\partial\Omega} |u|^{p-2}uv\, dS\, \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}}{\left(\int_{\partial\Omega} |u|^p\, dS\right)^2} = 0.$$

Lo anterior junto con (3.8) nos dice que la función u es una solución débil para (3.6).

Sea ahora $u \in W^{1,p}(\Omega)$ una solución débil para (3.6). Entonces se tiene que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + |u|^{p-2}uv\,dx = \lambda_1 \int_{\partial\Omega} |u|^{p-2}uv\,dS,$$

para toda $v \in W^{1,p}(\Omega)$. En particular la anterior igualdad se cumple para $v = u$, de lo que obtenemos

$$\lambda_1 = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p\,dx}{\int_{\partial\Omega} |u|^p\,dS}.$$

□

En realidad, el problema de Steklov que trataremos en esta tesis será algo más general. Para eso consideramos un subconjunto $\Gamma \subset \partial\Omega$ tal que $\bar{\Gamma} \neq \partial\Omega$ (podría ser $\Gamma = \emptyset$). Dado Γ se define

$$W_\Gamma^{1,p}(\Omega) = \overline{\{v \in C^1(\overline{\Omega}) \colon \Gamma \subset (\mathrm{sop}(v))^c\}} \tag{3.9}$$

donde la clausura se toma en $W^{1,p}(\Omega)$. Heurísticamente, este conjunto representa las funciones de $W^{1,p}(\Omega)$ que se anulan sobre Γ.

Luego se tiene el siguiente teorema:

Teorema 3.7. *Sea $p \in (1,\infty)$ y Ω de clase C^1. Definimos el siguiente número*

$$\lambda_1(\Gamma) = \inf_{v \in W_\Gamma^{1,p}(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^p + |v|^p\,dx}{\int_{\partial\Omega} |v|^p\,dS}. \tag{3.10}$$

Entonces el ínfimo se alcanza. Más aún $u \in W_\Gamma^{1,p}(\Omega)$ alcanza ese ínfimo si y sólo si u es una autofunción de Steklov asociada a $\lambda_1(\Gamma)$, es decir, es solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = 0 & \text{en } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2}\partial_\nu u = \lambda_1 |u|^{p-2}u & \text{en } \partial\Omega \setminus \Gamma \\ u = 0 & \text{en } \Gamma. \end{cases} \tag{3.11}$$

Finalmente, si Ω es conexo, toda autofunción asociada a λ_1 tiene signo constante.

Observación 3.8. Observemos que $\lambda_1(\emptyset) = \lambda_1$. En ese sentido el Teorema 3.7 es más general que el Teorema 3.6

Demostración. La demostración de este teorema es muy similar a la del Teorema 3.2, el Teorema 2.41 nos da que el mínimo en (3.10) existe, supongamos ahora entonces que $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ es la sucesión minimizante para (3.10), por lo tanto

$$\lambda_1(\Gamma) = \lim_{m\to\infty} \frac{\int_\Omega |\nabla u_m|^p + |u_m|^p\,dx}{\int_{\partial\Omega} |u_m|^p\,dS}$$

pero se puede suponer que $\|u_m\|^p_{L^p(\Omega)} = 1$, de este modo queda $\|u_m\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \to \lambda_1(\Gamma)$ y esto dice a su vez que $\|u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C$ donde la constante no depende de m, por lo tanto la sucesión esta uniformemente acotada en m y así existe una subsucesión que aún seguiremos denotando por $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ y una función $u \in W^{1,p}(\Omega)$ de modo tal que $u_m \rightharpoonup u$ (u_m converge a u en la topología débil de $W^{1,p}(\Omega)$). Usando la compacidad del Teorema 2.41 se tiene que $\|u_m\|^p_{L^p(\partial\Omega)} \to \|u\|^p_{L^p(\partial\Omega)}$ y así $\|u\|^p_{L^p(\partial\Omega)} = 1$, por lo que u es admisible para (3.10).

Teniendo en cuenta el hecho de que la norma es semicontinua inferior se tiene que $\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \liminf_{m\to\infty} \|u_m\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \lambda_1(\Gamma)$ y como también $\lambda_1(\Gamma) \leq \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}$ se llega a que $\lambda_1(\Gamma) = \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}$ y esto dice que u es donde se logra el ínfimo.

Para probar la equivalencia supongamos primero que $u \in W^{1,p}_{\Gamma}(\Omega)$ es donde se alcanza el ínfimo para λ_1 esto quiere decir que u es mínimo para el funcional $I(u) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p\,dx}{\int_{\partial\Omega} |u|^p\,dS}$, asi que $I'(u) = 0$, sea ahora $v \in W^{1,p}(\Omega)$ arbitraria y poniendo $h(t) = |\nabla u + t\nabla v| + |u + tv|^p$, $g(t) = |u + tv|^p$ se cumple que

$$0 = I'(u) = \frac{\int_\Omega h'(t)|_{t=0}\,dx}{\int_{\partial\Omega} g'(t)|_{t=0}\,dS_x} =$$

$$\frac{\int_\Omega |\nabla u|^{p-1}\nabla u \nabla v + |u|^{p-1}uv\,dx \int_{\partial\Omega} |u|^p\,dS_x - \int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p\,dx \int_{\partial\Omega} |u|^{p-1}uv\,dS_x}{\left(\int_{\partial\Omega}|u|^p\,dS_x\right)^2} =$$

$$\frac{\int_\Omega |\nabla u|^{p-1}\nabla u\nabla v + |u|^{p-1}uv\,dx}{\int_{\partial\Omega}|u|^p\,dS_x} - \lambda_1(\Gamma)\frac{\int_{\partial\Omega}|u|^{p-1}uv\,dS_x}{\int_{\partial\Omega}|u|^p\,dS_x}$$

y en consecuencia

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-1}\nabla u\nabla v + |u|^{p-1}uv\,dx = \lambda_1(\Gamma)\int_{\partial\Omega}|u|^{p-1}uv\,dS_x$$

para toda $v \in W^{1,p}_{\Gamma}(\Omega)$, y esto último dice que u es solución débil para el problema.

Recíprocamente supongamos que $u \in W^{1,p}_{\Gamma}(\Omega)$ es solución débil para el problema esto significa que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-1}\nabla u\nabla v + |u|^{p-1}uv\,dx = \lambda_1(\Gamma)\int_{\partial\Omega}|u|^{p-1}uv\,dS_x \tag{3.12}$$

para toda $v \in W^{1,p}_{\Gamma}(\Omega)$, en particular para $v = u$, poniendo este valor de v en (3.12) se obtiene

$$\lambda_1(\Gamma) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p\,dx}{\int_{\partial\Omega}|u|^p\,dS}.$$

Solo falta ver que las autofunciones tienen signo constante, como en la demostración anterior si u es autofunción también lo será $w = |u|$ y en consecuencia será solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta_p w + |w|^{p-2}w \geq 0 & \text{en } \Omega \\ |\nabla w|^{p-2}\partial_\nu w = \lambda_1 |w|^{p-2}w & \text{en } \partial\Omega \setminus \Gamma \\ w \geq 0 & \text{en } \Gamma \end{cases}$$

por el principio fuerte del máximo se cumple que $w = 0$ o $w > 0$ en Ω, pero como w es autofunción esta es positiva por lo tanto $w > 0$ en Ω y así u tiene signo constante en Ω. □

Observación 3.9. Por los resultados de regularidad de [34], un extremal u de $\lambda_1(\Gamma)$, verifica que $u \in C^{1,\delta}_{loc}(\Omega)$ para algún $0 < \delta < 1$.

Más aún, por [33], si $\partial\Omega \backslash \overline{\Gamma} \in C^{1,\eta}$, entonces la regularidad hasta la frontera es $u \in C^{1,\gamma}_{loc}(\overline{\Omega} \backslash \overline{\Gamma})$ para algún $0 < \gamma < 1$.

Por otro lado, si u es un extremal de $\lambda_1(\Gamma)$, entonces tenemos que también $|u|$ es un extremal de $\lambda_1(\Gamma)$. Luego, usando que $|u|$ es una solución débil de (3.11) y el principio del máximo (ver [42]), se obtiene que u tiene signo constante. En consecuencia, podemos asumir que

$$u > 0 \text{ en } \Omega \text{ y } u \geq 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Más aún, por el Lema de Hopf (ver [42]) y la regularidad de la frontera obtenemos que una solución no negativa de (3.11) verifica

$$u > 0 \quad \text{in } \overline{\Omega} \setminus \overline{\Gamma}.$$

A continuación vamos a hacer una última generalización de los problemas que involucran el operador Δ_p, esta nueva generalización tiene en cuenta una *función de peso* que aparece en la condición de borde del problema, nos referimos a un problema del tipo

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = 0, & \text{en } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2}\partial_\nu u = \lambda\rho |u|^{p-2}u, & \text{en } \partial\Omega \setminus \Gamma \\ u = 0, & \text{en } \Gamma, \end{cases} \tag{3.13}$$

donde esta función ρ satisface ciertas condiciones que más adelante especificaremos.

Esta nueva generalización resulta de vital importancia para nuestro trabajo ya que en los siguientes capítulos nos ocuparemos de analizar el comportamiento asintótico de problemas que producen una ecuación efectiva del tipo mencionado.

Sea $\Gamma \subset \partial\Omega$ subconjunto cerrado de la frontera cumpliendo $\Gamma \neq \partial\Omega$ y el espacio $W^{1,p}_\Gamma(\Omega)$ definido como en (3.9). Consideramos una función de peso $\rho \in L^\infty(\partial\Omega)$ tal que $C_1 \leq \rho(x) \leq C_2$ donde C_1, C_2 son constantes positivas. Tenemos entonces el siguiente teorema

Teorema 3.10. *Sea $1 < p < \infty$ y Ω de clase C^1. Definimos el siguiente número*

$$\lambda_\rho(\Gamma) = \inf_{u \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p \, dx}{\int_{\partial\Omega} \rho |u|^p \, dS_x}. \tag{3.14}$$

Se cumple lo siguiente

- *El ínfimo en (3.14) se alcanza.*
- *Una función $u \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega)$ alcanza el ínfimo en (3.14) si y solo si u es solución débil del problema (3.11).*
- *Toda autofunción para (3.14) tiene signo constante.*

Demostración. Teniendo en cuenta que $\rho \le C_2$ se cumple que

$$\frac{1}{C_2}\frac{\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p\,dx}{\int_{\partial\Omega} |u|^p\,dS_x} \le \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p\,dx}{\int_{\partial\Omega} \rho|u|^p\,dS_x}.$$

Esta última desigualdad junto con el Teorema 2.41 nos aseguran la existencia de $\lambda_\rho(\Gamma)$. En efecto, sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega)$ una sucesión minimizante para $\lambda_\rho(\Gamma)$. Podemos suponer que $\int_{\partial\Omega} \rho|u_k|^p\,dS = 1$ ya que si u_k son admisibles también lo serán las funciones αu_k, para $\alpha \in \mathbb{R}$. Tenemos entonces que $\lim_{k\to\infty} \|u_k\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \lambda_\rho(\Gamma)$, y como consecuencia de esta convergencia se cumple que $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ resulta acotada en $W^{1,p}(\Omega)$. Existe entonces una subsucesión de $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (que aún seguimos denotando como $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$) y una función $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_k \rightharpoonup u$ débil en $W^{1,p}(\Omega)$. Por la semicontinuidad de la norma de Sobolev se tiene que

$$\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \le \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \lambda_\rho(\Gamma). \tag{3.15}$$

Por otro lado, por el Teorema 2.41 tenemos que

$$u_k \to u \text{ fuerte en } L^p(\partial\Omega) \tag{3.16}$$
$$u_k \to u \text{ c.t.p. en } \partial\Omega. \tag{3.17}$$

Por (3.16) tenemos que $1 = \lim_{k\to\infty} \int_{\partial\Omega} \rho|u_k|^p\,dS = \int_{\partial\Omega} \rho|u|^p\,dS$, y por (3.17) se cumple también que $u|_\Gamma = 0$, por lo tanto u es una función admisible en la definición de $\lambda_\rho(\Gamma)$ y $\int_{\partial\Omega} \rho|u|^p\,dS = 1$ en consecuencia $\lambda_\rho(\Gamma) \le \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}$, esto último junto con (3.15) dicen que $\lambda_\rho(\Gamma) = \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}$, por lo tanto u es en donde se da el ínfimo para $\lambda_\rho(\Gamma)$.

Vamos a probar ahora la equivalencia, supongamos que $u \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega)$ es en donde alcanza el ínfimo $\lambda_\rho(\Gamma)$, es decir

$$\lambda_\rho(\Gamma) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p\,dx}{\int_{\partial\Omega} \rho|u|^p\,dS_x}. \tag{3.18}$$

También de la definición de $\lambda_\rho(\Gamma)$ se desprende que u es un mínimo para la función

$$I_\rho(v) = \frac{\int_\Omega |\nabla v|^p + |v|^p\,dx}{\int_{\partial\Omega} \rho|v|^p\,dS_x}.$$

es decir $I'_\rho(u) = 0$. Por otro lado definiendo las funciones $g(t) = |\nabla u + t\nabla v|^p + |u + tv|^p$ y $h(t) = \rho|u + tv|^p$ donde $v \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega)$ es una función arbitraria se cumple que

$$I'_\rho(u) = \frac{\int_\Omega g'(t)|_{t=0}\,dx \int_{\partial\Omega} \rho|u|^p\,dS_x - \int_{\partial\Omega} h'(t)|_{t=0}\,dS_x \int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p\,dx}{(\int_{\partial\Omega} \rho|u|^p\,dS)^2}$$

usando esto último, $I'_\rho(u) = 0$ y (3.18) llegamos a

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + |u|^{p-2}uv\, dx = \lambda_\rho(\Gamma)\int_{\partial\Omega} \rho|u|^{p-2}uv\, dS, \quad \forall v \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega)$$

esto último dice que u es una solución débil para el problema (3.11).

Supongamos ahora que $u \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega)$ es una solución débil para el problema (3.11), esto significa que se cumple

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + |u|^{p-2}uv\, dx = \lambda_\rho(\Gamma)\int_{\partial\Omega} \rho|u|^{p-2}uv\, dS, \quad \forall v \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega).$$

Esto último se cumple en particular para $v = u$ y con esta elección de v se tiene que

$$\lambda_\rho(\Gamma) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p\, dx}{\int_{\partial\Omega} \rho|u|^p\, dS_x},$$

por lo tanto $\lambda_\rho(\Gamma)$ alcanza el ínfimo en u.

Con un argumento similar al hecho en la demostración del Teorema 3.7 podemos concluir también que cualquier autofunción asociada a $\lambda_\rho(\Gamma)$ tiene signo constante. □

3.2. El operador fraccionario $(-\Delta_{p,\Omega})^s$

En esta sección presentamos el operador fraccionario $(-\Delta_{p,\Omega})^s$ que emplearemos en el capítulo 5. Explicitaremos también que entendemos por solución débil para este operador tanto para el problema de fuente como para el problema de autovalores.

Como dijimos en el capítulo previo, en el caso $p = 2$ el espacio $W^{s,p}$ se denota usualmente como H^s por su estructura hilbertiana. Este espacio esta relacionado con el operador *laplaciano fraccionario* $(-\Delta)^s$ definido como

$$(-\Delta)^s u(x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon(x)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+sp}}\, dy. \tag{3.19}$$

Este operador ha adquirido importancia recientemente y en nuestro caso estudiaremos una variante, se trata del operador $(p,s)-$*laplaciano regional* $(-\Delta_{p,\Omega})^s$ definido como

$$\begin{aligned}(-\Delta_{p,\Omega})^s u(x) &:= \text{p.v.}\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{n+sp}}\, dy \\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{n+sp}}\, dy.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Estudiaremos dos tipos de problemas asociados al operador $(-\Delta_{p,\Omega})^s$, primero veamos alguna de las clases de funciones para las cuales aplica este operador.

Lema 3.11. *Sea $0 < s < 1 < p < \infty$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto. Entonces $(-\Delta_{p,\Omega})^s u(x)$ esta bien definido para $u \in C^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.*

Demostración. Sea $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B_{\varepsilon_0}(x) \subset\subset \Omega$. Ahora, como $u \in L^\infty(\Omega)$ tenemos que

$$\int_{\Omega\setminus B_{\varepsilon_0}(x)} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{n+sp}}\,dy < \infty.$$

Para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, se tiene

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon<|x-y|<\varepsilon_0} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{n+sp}}\,dy &= \int_{\varepsilon<|z|<\varepsilon_0} \frac{|u(x)-u(x+z)|^{p-2}(u(x)-u(x+z))}{|z|^{n+sp}}\,dz\\ &= \int_{\varepsilon<|z|<\varepsilon_0} \frac{|u(x)-u(x-z)|^{p-2}(u(x)-u(x-z))}{|z|^{n+sp}}\,dz.\end{aligned}$$

Para simplificar la notación, denotaremos $\phi_p(t) = |t|^{p-2}t$. Por lo tanto esta última cantidad es igual a

$$\frac{1}{2}\int_{\varepsilon<|z|<\varepsilon_0} \frac{\phi_p(u(x)-u(x+z)) - \phi_p(u(x)-u(x-z))}{|z|^{n+sp}}\,dz. \tag{3.21}$$

Definimos también

$$\varphi(t) = \phi_p((u(x)-u(x-z)) + t(u(x+z)-2u(x)+u(x-z))).$$

Así (3.21) puede escribirse como

$$\frac{1}{2}\int_{\varepsilon<|z|<\varepsilon_0} \frac{\varphi(1)-\varphi(0)}{|z|^{n+sp}}\,dz = \frac{1}{2}\int_{\varepsilon<|z|<\varepsilon_0}\int_0^1 \varphi'(t)\,dt\,|z|^{-(n+sp)}\,dz$$

y haciendo calculos esto da

$$\frac{1}{2}\int_{\varepsilon<|z|<\varepsilon_0}\int_0^1 \frac{|(t-1)D_{-z}u(x)+tD_zu(x)|^{p-2}D_z^2u(x)}{|z|^{n+sp}}\,dt\,dz, \tag{3.22}$$

donde $D_zu(x) = u(x+z)-u(x)$ y $D_z^2u(x) = u(x+z)-2u(x)+u(x-z) = D_zu(x)+D_{-z}u(x)$.

De esta última expresión observamos que

$$|(t-1)D_{-z}u(x)+tD_zu(x)|^{p-2} \le C|z|^{p-2},$$

donde C depende de la constante de Lipschitz asociada a u y de p, además

$$|D_z^2u(x)| \le C'|z|^2,$$

donde C' depende de la norma C^2 de u.

Teniendo en cuenta todo lo anterior encontramos que existe una constante C dependiente solo de la norma C^2, de u y de p tal que (3.22) es acotado por

$$C\int_{\varepsilon<|z|<\varepsilon_0} |z|^{-n+p(1-s)}\,dz$$

como este último término converge cuando $\varepsilon \downarrow 0$ podemos concluir el lema. $\square$

Observación 3.12. La demostración de este lema nos fue comunicada por L. Del Pezzo.

El anterior lema nos dice que, para funciones regulares, el operador $(-\Delta_{p,\Omega})^s$ está bien definido en un sentido puntual. Sin embargo, en las aplicaciones más usuales de este operador, es necesario entender cómo se define sobre funciones más generales. El siguiente lema nos dice el sentido en el cual debe actuar el operador.

Lema 3.13. *Sea $0 < s < 1 < p < \infty$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Para cada $u \in W^{s,p}(\Omega)$, el $(p, s)-$laplaciano regional definido en (3.20) define una distribución sobre $\mathcal{D}'(\Omega)$. Mas aún,*

$$\langle(-\Delta_{p,\Omega})^s u, \phi\rangle = \frac{1}{2}\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))(\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{n+sp}}\, dx\, dy,$$

por cada $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Demostración. Dada $u \in W^{s,p}(\Omega)$, por cada $\varepsilon > 0$ definimos $T_\varepsilon u$ como

$$T_\varepsilon u(x) = \int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+sp}}\, dy.$$

Afirmamos que $T_\varepsilon u \in L^{p'}(\Omega)$. En efecto, por la desigualdad de Hölder se cumple que

$$\begin{aligned} |T_\varepsilon u(x)| &\leq \int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-1}}{|x - y|^{n+sp}}\, dy \\ &\leq \left(\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|u(x) - u(y)|^{p}}{|x - y|^{n+sp}}\, dy\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{|x-y|\geq\varepsilon} \frac{1}{|x - y|^{n+sp}}\, dy\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Denotamos

$$C = C(n, s, p) = \frac{n\omega_n}{sp},$$

donde ω_n es la medida de la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$.

Entonces es fácil ver que

$$\int_{|x-y|\geq\varepsilon} \frac{1}{|x - y|^{n+sp}}\, dy = C\varepsilon^{-sp}.$$

De esta forma concluimos que

$$\|T_\varepsilon u\|_{p',\Omega} \leq C^{\frac{1}{p}}\varepsilon^{-s}[u]_{s,p}^{\frac{p}{p'}}.$$

Por lo tanto, $T_\varepsilon u$ induce una distribución como

$$\langle T_\varepsilon u, \phi\rangle = \int_\Omega T_\varepsilon u\phi\, dx = \int_\Omega \int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+sp}}\phi(x)\, dydx.$$

Es fácil ver usando el Teorema de Fubini que se cumple también

$$\langle T_\varepsilon u, \phi\rangle = -\int_\Omega \int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+sp}}\phi(y)\, dydx,$$

y así
$$\langle T_\varepsilon u, \phi\rangle = \frac{1}{2}\int_\Omega \int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(\phi(x)-\phi(y))}{|x-y|^{n+sp}}\,dydx.$$
Ya que el integrando en la última integral esta en $L^1(\Omega\times\Omega)$, usando el Teorema de la Convergencia Dominada podemos concluir que

$$\begin{aligned}\langle(-\Delta_{p,\Omega})^s u, \phi\rangle &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\langle T_\varepsilon u, \phi\rangle\\ &= \frac{1}{2}\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(\phi(x)-\phi(y))}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy.\end{aligned}$$

Esto finaliza la demostración del lema. □

Observación 3.14. De la demostración del anterior lema podemos concluir que el $(p, s)-$laplaciano regional es un operador acotado visto como $(-\Delta_{p,\Omega})^s : W^{s,p}(\Omega) \to [W^{s,p}(\Omega)]'$.

Con todo lo mencionado anteriormente podemos describir que entendemos por solución débil para el $(p, s)-$laplaciano regional $(-\Delta_{p,\Omega})^s$.

Definición 3.15. Sea $0 < s < 1 < p < \infty$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Dado $f \in L^{p'}(\Omega)$, decimos que $u \in W^{s,p}(\Omega)$ es una solución débil de
$$(-\Delta_{p,\Omega})^s u = f \quad \text{in } \Omega, \tag{3.23}$$
si la igualdad se tiene en el sentido distribucional. Es decir si
$$\frac{1}{2}\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}}\,dx\,dy = \int_\Omega f v\,dx, \tag{3.24}$$
para cada $v \in W^{s,p}(\Omega)$.

Observación 3.16. Más generalmente, se puede considerar $f \in [W^{s,p}(\Omega)]'$.

Observación 3.17. Este problema es análogo al problema de Neumann homogéneo en el caso clásico.

Para este problema es fácil ver que se tiene existencia de solución y unicidad salvo constante. En efecto, se tiene

Teorema 3.18. *Dada $f \in L^{p'}(\Omega)$, existe una única función $u_0 \in \mathring{W}^{s,p}(\Omega)$ solución débil de (3.23) en el sentido de la Definición 3.15.*

Más aún, si $u \in W^{s,p}(\Omega)$ es una solución débil de (3.23), entonces $u - u_0$ es constante.

Demostración. La demostración es estándar. En efecto, definamos el funcional $J\colon \mathring{W}^{s,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por
$$J(v) := \frac{1}{2p}\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy - \langle f, v\rangle.$$

Es fácil ver que $u_0 \in \mathring{W}^{s,p}(\Omega)$ es una solución débil de (3.23) si y sólo si u_0 es un mínimo de J. En efecto, si u_0 es una solución débil y $v \in \mathring{W}^{s,p}(\Omega)$ es arbitraria, usando $u_0 - v$ como función test en (3.24) y reagrupando términos, obtenemos

$$\frac{1}{2}\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u_0(x)-u_0(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy - \langle f, u_0\rangle =$$
$$\frac{1}{2}\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u_0(x)-u_0(y)|^{p-2}(u_0(x)-u_0(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy - \langle f, v\rangle.$$

Observamos que $|x-y|^{n+sp} = |x-y|^{\frac{n+sp}{p'}}|x-y|^{\frac{n+sp}{p}}$ y usando la desigualdad de Young $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u_0(x)-u_0(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy - \langle f, u_0\rangle \\
&\leq \frac{1}{2p'}\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u_0(x)-u_0(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy + \frac{1}{2p}\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy - \langle f, v\rangle \\
&= \frac{1}{2p'}\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u_0(x)-u_0(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy + J(v),
\end{aligned}$$

de donde fácilmente se deduce que $J(u_0) \leq J(v)$.

Recíprocamente, si $u_0 \in \mathring{W}^{s,p}(\Omega)$ es un mínimo de J, entonces dada $v \in \mathring{W}^{s,p}(\Omega)$ y $t \in \mathbb{R}$, definimos $j(t) = J(u_0 + tv)$. Luego $j'(0) = 0$. Pero es fácil ver que

$$j'(0) = \frac{1}{2}\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u_0(x)-u_0(y)|^{p-2}(u_0(x)-u_0(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy - \langle f, v\rangle.$$

Ver más adelante la demostración del Teorema 3.25 para ver los detalles de esta afirmación.

Veamos entonces que J posee un único mínimo en $\mathring{W}^{s,p}(\Omega)$. La unicidad es una consecuencia inmediata de la convexidad uniforme de J que a su vez es inmediato de la convexidad uniforme de la función $x \mapsto |x|^p$.

Para la existencia, se usa el método directo del cálculo de variaciones. En efecto, sea $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathring{W}^{s,p}(\Omega)$ una sucesión minimizante, i.e.

$$J(v_m) \to \inf_{\mathring{W}^{s,p}(\Omega)} J =: I.$$

Usando el Corolario 2.62, obtenemos

$$\begin{aligned}
C \geq J(v_m) &= \frac{1}{2p}[v_m]_{s,p}^p - \langle f, v_m\rangle \\
&\geq c\|v_m\|_{s,p}^p - \|f\|_{p'}\|v_m\|_{s,p}.
\end{aligned}$$

Usamos ahora la desigualdad de Young con ε para $\varepsilon = \frac{c}{2}$ y obtenemos

$$\frac{c}{2}\|v_m\|_{s,p}^p - C\|f\|_{p'}^{p'} \leq C,$$

de donde se deduce que la sucesión $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es acotada uniformemente en m.

En consecuencia, existe una subsucesión, que aún seguimos llamando $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y una función $u_0 \in \mathring{W}^{s,p}(\Omega)$ tal que

$$v_m \rightharpoonup u_0, \text{ débil en } W^{s,p}(\Omega).$$

Usando ahora la semicontinuidad inferior débil de la seminorma de Gagliardo se concluye que u_0 es un mínimo para J.

Resta ver que cualquier solución $u \in W^{s,p}(\Omega)$ de (3.23) difiere de u_0 en una constante. Pero esto es inmediato de la observación de que si u es una solución, entonces $u + k$ también es una solución para cualquier $k \in \mathbb{R}$. Luego, si tomamos $k = -(u)_\Omega$, tenemos que $u + k \in \mathring{W}^{s,p}(\Omega)$ es una solución y por ende $u + k = u_0$. □

Uno de los problemas que estudiaremos para el caso no local es el *problema del obstáculo fuerte* que presentaremos en el siguiente capítulo. El objetivo ahora es darle sentido a lo que entendemos por solución débil de este tipo de problemas. La siguiente definición especifica esto.

Definición 3.19. Sea $0 < s < 1 < p < \infty$ fijo y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Sea $A \subset \Omega$ un conjunto medible y $f \in L^{p'}(\Omega)$. Definimos

$$W_A^{s,p}(\Omega) := \{v \in W^{s,p}(\Omega) \colon v = 0 \text{ c.t.p. en } A\}.$$

Entonces, decimos que $u \in W_A^{s,p}(\Omega)$ es una solución débil del problema de valores de frontera mixto

$$\begin{cases} (-\Delta_{p,\Omega})^s u = f & \text{en } \Omega \setminus A \\ u = 0 & \text{en } A, \end{cases} \tag{3.25}$$

si (3.24) se cumple para cada $v \in W_A^{s,p}(\Omega)$.

Para este problema también se tiene existencia y unicidad para toda $f \in L^{p'}(\Omega)$.

Teorema 3.20. *Dada $f \in L^{p'}(\Omega)$, existe una única $u \in W_A^{s,p}(\Omega)$ solución débil de (3.25) en el sentido de la Definición 3.19.*

Demostración. La demostración de este teorema es completamente análoga a la del Teorema 3.18 usando la desigualdad de Poincaré (2.43) en lugar del Corolario 2.62. □

3.2.1. Existencia de solución para $\lambda_s(A)$

Consideramos $A \subset \Omega$. Nos ocuparemos ahora de la existencia de extremal para la constante $\lambda_s(A)$, constante que estará directamente relacionada con el problema del obstáculo fuerte antes mencionado, mas aún mostraremos que tal extremal resulta ser una solución para el (p, s)−laplaciano regional en el sentido de la Definición 3.19.

Recordemos la definición de la constante $\lambda_s(A)$ dada en la introducción. Dado $A \subset \Omega$ medible, se define

$$\lambda_s(A) := \inf_{0\neq v\in W^{s,p}_A(\Omega)} \frac{\frac{1}{2}\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy}{\int_\Omega |v|^p\,dx},$$

y recordemos también que

$$W^{s,p}_A(\Omega) := \{v \in W^{s,p}(\Omega)\colon v = 0 \text{ c.t.p. en } A\}.$$

Antes de comenzar mostramos que la constante $\lambda_s(A)$ esta bien definida y que es estrictamente positiva. El siguiente lema de fácil demostración nos asegura esto.

Proposición 3.21. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado, abierto y $A \subset \Omega$ un conjunto medible de medida positiva. Entonces existe una constante $\theta > 0$ dependiente de n, s, p, diam(Ω) y $|A|$ tal que $\lambda_s(A) \geq \theta$.*

Demostración. Este resultado es inmediato a partir de la desigualdad de Poincaré (2.43). En efecto, se tiene que

$$\frac{[u]^p_{s,p}}{\|u\|^p_p} \geq C^{-1},$$

donde $C > 0$ es la constante del Teorema 2.63. Tomando ínfimo $u \in W^{s,p}_A(\Omega)$, se deduce el resultado. □

Ahora presentamos el principal resultado de esta sección que tiene que ver con la existencia de extremal para la constante $\lambda_s(A)$, es decir la existencia de una funcion $u \in W^{s,p}_A(\Omega)$ tal que

$$\lambda_s(A) = \inf_{v\in W^{s,p}_A(\Omega)} \frac{\frac{1}{2}[v]^p_{s,p}}{\|v\|^p_p} = \frac{\frac{1}{2}[u]^p_{s,p}}{\|u\|^p_p}.$$

Como veremos enseguida, esto es inmediata consecuencia de la compacidad de la inmersión $W^{s,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ que nos proporciona el Corolario 2.59.

Teorema 3.22. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera Lipschitz. Entonces, dado $A \subset \Omega$ conjunto medible de medida positiva, existe $u \in W^{s,p}_A(\Omega)$ extremal para $\lambda_s(A)$.*

Observación 3.23. La condición de regularidad asumida de que la frontera $\partial\Omega$ sea Lipschitz es necesaria para que la inmersión $W^{s,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ sea compacta como lo indica el Corolario 2.59. En realidad lo que resulta ser suficiente es que el dominio Ω cumpla con la propiedad de extensión de dominio según la Definición 2.48, ya que por el Teorema 2.49 esta propiedad implica la condición de regularidad Lipschitz.

Observación 3.24. De la homogeneidad del cociente de Rayleigh, es inmediato que el extremal puede tomarse normalizado en $L^p(\Omega)$. Es decir, $\|u\|_p = 1$.

Demostración. La prueba resulta ser inmediata. Sea $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset W^{s,p}_A(\Omega)$ una sucesión minimizante normalizada para $\lambda_s(A)$. Esto es

$$\|u_m\|_p = 1 \text{ para cada } m \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \lambda_s(A) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2}[u_m]^p_{s,p}.$$

Por lo tanto, $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $W^{s,p}(\Omega)$, ya que $W^{s,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach reflexivo y por la compacidad de la inmersión $W^{s,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ existe una subsecuencia que aún denotamos por $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y una función $u \in W^{s,p}(\Omega)$ tal que

$$u_m \rightharpoonup u \text{ débil en } W^{s,p}(\Omega) \tag{3.26}$$
$$u_m \to u \text{ fuerte en } L^p(\Omega). \tag{3.27}$$

Es fácil ver que $u = 0$ c.t.p. en A (por ejemplo tomando otra subsucesión más de modo que $u_m \to u$ c.t.p. en Ω, o también observando que $W^{s,p}_A(\Omega)$ es débilmente cerrado ya que es fuertemente cerrado y convexo), así $u \in W^{s,p}_A(\Omega)$.

Por (3.27), se sigue que $\|u\|_p = 1$ y por (3.26) y la semicontinuidad débil de la seminorma de Gagliardo se cumple

$$\lambda_s(A) \le \frac{1}{2}[u]^p_{s,p} \le \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}[u_m]^p_{s,p} = \lambda_s(A).$$

La prueba queda terminada. □

Terminamos la sección mostrando que un extremal para $\lambda_s(A)$ resulta ser también una autofunción para el (p, s)–laplaciano regional $(-\Delta_{p,\Omega})^s$, es decir si $u \in W^{s,p}_A(\Omega)$ es una extremal de $\lambda_s(A)$, entonces u es una solución de

$$\begin{cases} (-\Delta_{p,\Omega})^s u = \lambda_s(A)|u|^{p-2}u & \text{en } \Omega \setminus A \\ u = 0 & \text{en } A, \end{cases} \tag{3.28}$$

en el sentido de la Definición 3.19.

Teorema 3.25. *Sean $0 < s < 1 < p < \infty$. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado, y $A \subset \Omega$ un conjunto medible de medida positiva. Si $u \in W^{s,p}_A(\Omega)$ es un extremal para $\lambda_s(A)$, entonces u es una solución para (3.28) en el sentido de la Definición 3.19, con $f = \lambda_s(A)|u|^{p-2}u$.*

Demostración. Sea $u \in W^{s,p}_A(\Omega)$ un extremal normalizado para $\lambda_s(A)$, y sea $v \in W^{s,p}_A(\Omega)$ una función arbitraria. Definimos

$$j(t) = \frac{1}{2}[u + tv]^p_{s,p} = \frac{1}{2}\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|(u + tv)(x) - (u + tv(y))|^p}{|x - y|^{n+sp}}\,dx\,dy. \tag{3.29}$$

y

$$k(t) = \|u + tv\|^p_p = \int_\Omega |u + tv|^p\,dx. \tag{3.30}$$

Entonces es fácil ver que

$$\begin{aligned} j'(0) &= \frac{p}{2}\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}}\,dx\,dy \\ &= p\langle(-\Delta_{p,\Omega})^s u, v\rangle \end{aligned} \tag{3.31}$$

y

$$k'(0) = p\int_\Omega |u|^{p-2}uv\,dx. \tag{3.32}$$

Mas aún, ya que $u \in W^{s,p}_A(\Omega)$ es un extremal normalizado para $\lambda_s(A)$, tenemos que

$$j(0) = \frac{1}{2}[u]^p_{s,p} = \lambda_s(A) \quad \text{y} \quad k(0) = \|u\|^p_p = 1. \tag{3.33}$$

Si ahora definimos

$$G(t) = \frac{j(t)}{k(t)},$$

obtenemos

$$0 = G'(0) = \frac{j'(0)k(0) - k'(0)j(0)}{[k(0)]^2}.$$

Usando (3.31), (3.32) y (3.33) en la anterior igualdad obtenemos el resultado deseado. □

3.2.2. Existencia de solución para $\lambda_s(\sigma,\phi)$

Fijando σ constante positiva y $\phi \in L^\infty(\Omega)$ función no negativa, nos ocupamos en esta parte del capítulo de la existencia de extremal para la constante $\lambda_s(\sigma,\phi)$. Finalmente mostraremos que todo extremal para $\lambda_s(\sigma,\phi)$ es una solución para el $(p,s)-$laplaciano regional en el sentido de la Definición 3.15.

Recordemos, para conveniencia del lector, la definición de la constante $\lambda_s(\sigma,\phi)$

$$\lambda_s(\sigma,\phi) = \inf_{0\neq v\in W^{s,p}(\Omega)} \frac{[v]^p_{s,p} + \sigma\int_\Omega |v|^p\phi\,dx}{\int_\Omega |v|^p\,dx}.$$

Comenzamos mostrando que la constante $\lambda_s(\sigma,\phi)$ es positiva, para esto será clave otra vez asumir que la frontera de nuestro dominio es Lipschitz para poder hacer uso de la compacidad de la inmersión $W^{s,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ que nos da el Corolario 2.59. Todo esto está contenido en el siguiente teorema.

Teorema 3.26. *Sean $0 < s < 1 < p < \infty$. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y con frontera Lipschitz. Si $0 \neq \phi \in L^\infty(\Omega)$ es una función no negativa y $\sigma > 0$. Entonces existe una constante $\kappa > 0$ tal que $\lambda_s(\sigma,\phi) \geq \kappa$.*

Demostración. La prueba estará completa si mostramos la existencia de una constante $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega |v|^p\,dx \leq C\left(\frac{1}{2}\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy + \sigma\int_\Omega |v|^p\phi\,dx.\right), \tag{3.34}$$

para cualquier función $v \in W^{s,p}(\Omega)$. Demostraremos por el absurdo. En efecto, supongamos que (3.34) es falso. Entonces existe una sucesión $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset W^{s,p}(\Omega)$ tal que

$$\|v_m\|_p = 1, \tag{3.35}$$

$$[v_m]_{s,p} \to 0, \tag{3.36}$$

$$\int_\Omega |v_m|^p \phi \, dx \to 0. \tag{3.37}$$

Argumentando como en la demostración del Teorema 3.22 existe una subsucesión (que aún seguimos denotando como $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$), y una función $v \in W^{s,p}(\Omega)$ tal que

$$v_m \rightharpoonup v \text{ débil en } W^{s,p}(\Omega)$$
$$v_m \to v \text{ fuerte en } L^p(\Omega).$$

Ahora, ya que $W^{s,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach uniformemente convexo, de (3.36) es fácil ver que $\|v_m\|_{W^{s,p}(\Omega)} \to \|v\|_{W^{s,p}(\Omega)}$ por lo tanto $v_m \to v$ fuerte en $W^{s,p}(\Omega)$. Por lo tanto $\|v\|_p = 1$ y $[v]_{s,p} = 0$ y así v es constante (de hecho, $v = |\Omega|^{-\frac{1}{p}}$).

Ahora como $|v_m|^p \to |v|^p$ fuerte en $L^1(\Omega)$ se sigue que

$$0 = \int_\Omega |v|^p \phi \, dx = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \phi \, dx,$$

lo que resulta ser una contradicción.

De esta forma queda demostrado el teorema. □

Usando ahora las mismas ideas que en el Teorema 3.22, podemos demostrar existencia de extremal para la constante $\lambda_s(\sigma, \phi)$ como lo indica el siguiente teorema.

Teorema 3.27. *Sea $0 < s < 1$ y $1 < p < \infty$ fijo. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio abierto acotado con frontera Lipschitz. Si $0 \neq \phi \in L^\infty(\Omega)$ es una función no negativa y $\sigma > 0$. Entonces, existe un extremal $u \in W^{s,p}(\Omega)$ para $\lambda_s(\sigma, \phi)$.*

Demostración. La demostración es completamente análoga a la del Teorema 3.22. □

Para finalizar concluimos que si una función $u \in W^{s,p}(\Omega)$ es un extremal para $\lambda_s(\sigma, \phi)$, es decir si

$$\lambda_s(\sigma, \phi) = \frac{\frac{1}{2} \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \, dx \, dy + \sigma \int_\Omega |u|^p \phi \, dx}{\int_\Omega |u|^p \, dx}$$

entonces u es una solución para el (p, s)−laplaciano regional $(-\Delta_{p,\Omega})^s$ en el sentido de la Definición 3.15 con $f = \lambda_s(\sigma, \phi)|u|^{p-2}u$. Enunciamos todo esto en el siguiente teorema.

Teorema 3.28. *Sea $0 < s < 1$ y $1 < p < \infty$ fijos, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Sea $0 \neq \phi \in L^\infty(\Omega)$ una función no negativa y $\sigma > 0$. Si $u \in W^{s,p}(\Omega)$ es un extremal para $\lambda_s(\sigma, \phi)$, entonces u es una solución para*

$$(-\Delta_{p,\Omega})^s u + \sigma\phi|u|^{p-2}u = \lambda_s(\sigma, \phi)|u|^{p-2}u \quad \text{en } \Omega, \tag{3.38}$$

en el sentido de la Definición 3.15.

Demostración. Supongamos que $u \in W^{s,p}(\Omega)$ es un extremal normalizado para $\lambda_s(\sigma, \phi)$. Si $v \in W^{s,p}(\Omega)$, definimos la siguiente función

$$J(t) = \frac{j(t) + \sigma l(t)}{k(t)}$$

con j y k definidos en (3.29) y (3.30) respectivamente, y

$$l(t) = \|u + tv\|_{p,\phi}^p = \int_\Omega |u + tv|^p \phi \, dx.$$

Entonces

$$l'(0) = \int_\Omega p|u|^{p-2}uv\phi \, dx. \tag{3.39}$$

Ahora usando que $k(0) = 1$, $\lambda_s(\sigma, \phi) = j(0) + \sigma l(0)$, las expresiones (3.31), (3.32) y (3.39) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 = J'(0) &= \frac{(j'(0) + \sigma l'(0))k(0) - (j(0) + \sigma l(0))k'(0)}{k^2(0)} \\ &= p\langle(-\Delta_{p,\Omega})^s u, v\rangle + \sigma \int_\Omega p|u|^{p-2}uv\phi \, dx - \lambda_s(\sigma, \phi)p \int_\Omega |u|^{p-2}uv \, dx, \end{aligned}$$

como deseábamos probar. □

Capítulo 4

Problemas de optimización

En este capítulo presentaremos los problemas de optimización para el caso clásico y para el caso fraccionario. En la primera mitad del capítulo plantearemos el problema de diseño óptimo asociado al primer autovalor de Steklov, luego recordaremos una caracterización para la constante que define el problema óptimo (ver [16]), que será usada más adelante para probar la existencia de *ventana óptima* y de extremal. Después recordaremos una caracterización para el conjunto de puntos donde una autofunción se anula asumiendo suficiente regularidad para el dominio y propiedades para la constante óptima. Finalizaremos la primera mitad del capítulo generalizando los resultados obtenidos para la variante del problema de Steklov a un problema que involucra una función de peso, este problema como veremos mas adelante será clave en los resultados obtenidos.

En la segunda mitad de este capítulo plantearemos los dos problemas de optimización de forma asociados al operador $(-\Delta_{p,\Omega})^s$ y que serán sobre los que trabajaremos en el Capítulo 5, por un lado analizaremos el llamado *problema del obstáculo fuerte* mostrando existencia de configuración óptima y finalmente presentamos el *problema del obstáculo débil* dando también para este la existencia de una configuración óptima, en el Capítulo 5 mostraremos la conexión entre los problemas antes mencionados. Los resultados de optimización de forma presentados en este capítulo para el operador $(-\Delta_{p,\Omega})^s$ son originales de esta tesis.

4.1. Problema de optimización asociado al problema de Steklov

Ahora estudiaremos el siguiente problema de optimización de forma: dado un número $\alpha \in (0,1)$, se busca la existencia de una ventana $\Gamma_\alpha \subset \partial\Omega$ de manera tal que $|\Gamma_\alpha|_{n-1} = \alpha|\partial\Omega|_{n-1}$ y

$$\lambda_1(\Gamma_\alpha) \leq \lambda_1(\Gamma)$$

entre todas las ventanas $\Gamma \subset \partial\Omega$ que verifican $|\Gamma|_{n-1} = \alpha|\partial\Omega|_{n-1}$, donde $\lambda_1(\Gamma)$ es el primer autovalor de Steklov dado en el Teorema 3.7.

Este problema fue estudiado en [16]. Seguiremos en este capítulo la presentación de dicho artículo.

Con ese propósito, se define la constante

$$\Lambda(\alpha) := \text{ínf}\{\lambda_1(\Gamma) \colon \Gamma \subset \partial\Omega, |\Gamma|_{n-1} = \alpha|\partial\Omega|_{n-1}\} \tag{4.1}$$

El primer resultado que presentamos nos da una caracterización alternativa de la constante $\Lambda(\alpha)$ que será fundamental en el estudio del problema.

Lema 4.1. *Para cada* $\alpha \in (0,1)$ *la constante* $\Lambda(\alpha)$ *tiene la siguiente caracterización*

$$\Lambda(\alpha) = \text{ínf}\left\{ \frac{\|v\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}}{\|v\|^p_{L^p(\partial\Omega)}} \colon v \in W^{1,p}(\Omega),\ |\{v=0\} \cap \partial\Omega|_{n-1} \geq \alpha|\partial\Omega|_{n-1} \right\}.$$

Demostración. Definamos la constante $\mu(\alpha)$ como

$$\mu(\alpha) := \text{ínf}\left\{ \frac{\|v\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}}{\|v\|^p_{L^p(\partial\Omega)}} \colon v \in W^{1,p}(\Omega),\ |\{v=0\} \cap \partial\Omega|_{n-1} \geq \alpha|\partial\Omega|_{n-1} \right\}.$$

Veamos primero que $\mu(\alpha) \leq \Lambda(\alpha)$.

Sea $\Gamma \subset \partial\Omega$ tal que $|\Gamma|_{n-1} = \alpha|\partial\Omega|_{n-1}$ y sea $u \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega)$ una autofunción asociada a $\lambda_1(\Gamma)$.

Observemos que u es admisible en la caracterización de $\mu(\alpha)$, de donde

$$\mu(\alpha) \leq \frac{\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}}{\|u\|^p_{L^p(\partial\Omega)}} = \lambda_1(\Gamma).$$

En consecuencia $\mu(\alpha) \leq \Lambda(\alpha)$ como queríamos ver.

Probamos ahora que $\Lambda(\alpha) \leq \mu(\alpha)$. En efecto, sea $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión minimizante para $\mu(\alpha)$, es decir, $v_k \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\mu(\alpha) = \lim_{k\to\infty} \frac{\|v_k\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}}{\|v_k\|^p_{L^p(\partial\Omega)}} \quad \text{y} \quad |\{v_k = 0\} \cap \partial\Omega|_{n-1} \geq \alpha|\partial\Omega|_{n-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Luego, para cada $k \in \mathbb{N}$, elegimos

$$\Gamma_k \subset \{v_k = 0\} \cap \partial\Omega$$

tal que $|\Gamma_k|_{n-1} = \alpha|\partial\Omega|_{n-1}$. En consecuencia, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\Lambda(\alpha) \leq \lambda_1(\Gamma_k) \leq \frac{\|v_k\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}}{\|v_k\|^p_{L^p(\partial\Omega)}}.$$

Pasando al límite en esta desigualdad obtenemos

$$\Lambda(\alpha) \leq \lim_{k\to\infty} \lambda_1(\Gamma_k) \leq \lim_{k\to\infty} \frac{\|v_k\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}}{\|v_k\|^p_{L^p(\partial\Omega)}} = \mu(\alpha).$$

Esto completa la demostración. $\square$

Veamos ahora el teorema más importante que nos garantiza la existencia de la ventana óptima.

Teorema 4.2. *Sea $\alpha \in (0,1)$.*

1. *Existe $\Gamma_\alpha \subset \partial\Omega$ tal que $|\Gamma_\alpha|_{n-1} = \alpha|\partial\Omega|_{n-1}$ y $\Lambda(\alpha) = \lambda_1(\Gamma_\alpha)$.*
2. *Existe $u_\alpha \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $|\{u_\alpha = 0\} \cap \partial\Omega|_{n-1} \geq \alpha|\partial\Omega|_{n-1}$ y*

$$\Lambda(\alpha) = \frac{\|u_\alpha\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}}{\|u_\alpha\|^p_{L^p(\partial\Omega)}}.$$

Demostración. Veamos primero 2. Sea $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}(\Omega)$ una sucesión de funciones no negativas y normalizadas (es decir $\|v_k\|_{L^p(\partial\Omega)} = 1$) tal que

$$\|v_k\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \to \Lambda(\alpha) \quad \text{y} \quad |\{v_k = 0\} \cap \partial\Omega|_{n-1} \geq \alpha|\partial\Omega|_{n-1}.$$

La existencia de esta sucesión está garantizada por el Lema 4.1.

Observemos que $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ está acotada en $W^{1,p}(\Omega)$ y por ende, por el Teorema de Banach-Alaoglu, existe $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y una subsucesión (que seguimos llamando $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$) tal que

$$v_k \rightharpoonup u \quad \text{débil en } W^{1,p}(\Omega). \tag{4.2}$$

Además, por el Teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov, vale que

$$v_k \to u \qquad \text{fuerte en } L^p(\Omega) \text{ y en } L^p(\partial\Omega) \tag{4.3}$$

$$v_k \to u \qquad \text{c.t.p. en } \partial\Omega. \tag{4.4}$$

De (4.3) sigue que $\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} = 1$ y de (4.4) se obtiene que

$$|\{u = 0\} \cap \partial\Omega|_{n-1} \geq \limsup_{k\to\infty} |\{v_k = 0\} \cap \partial\Omega|_{n-1} \geq \alpha|\partial\Omega|_{n-1}.$$

Es decir, u es admisible en la caracterización de $\Lambda(\alpha)$ dada por el Lema 4.1, luego

$$\Lambda(\alpha) \leq \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Por otro lado, la semicontinuidad inferior de la norma con respecto a la convergencia débil nos da

$$\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \liminf_{k\to\infty} \|v_k\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \Lambda(\alpha).$$

Esto concluye la demostración de 2.

Veamos ahora que 2 implica 1. En efecto, por 2, existe $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$|\{u = 0\} \cap \partial\Omega|_{n-1} \geq \alpha|\partial\Omega|_{n-1} \quad \text{y} \quad \Lambda(\alpha) = \frac{\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}}{\|u\|^p_{L^p(\partial\Omega)}}.$$

Sea entonces $\Gamma_0 \subset \{u = 0\} \cap \partial\Omega$ tal que

$$|\Gamma_0|_{n-1} = \alpha|\partial\Omega|_{n-1}.$$

Pero entonces

$$\lambda_1(\Gamma_0) \leq \frac{\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}}{\|u\|^p_{L^p(\partial\Omega)}} = \Lambda(\alpha).$$

Dado que la otra desigualdad es obvia, eso concluye la demostración de 1. □

El siguiente resultado es un refinamiento del Teorema 4.2. El mismo muestra que si asumimos cierta regularidad sobre el dominio Ω, entonces la ventana óptima asociada a $\Lambda(\alpha)$ es exactamente el conjunto de ceros de la autofunción asociada en la frontera.

Teorema 4.3. *Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ una autofunción asociada a $\Lambda(\alpha)$. Entonces, si Ω verifica la condición de la bola interior (por ejemplo, si es de clase C^2), se tiene que*

$$|\{u = 0\} \cap \partial\Omega|_{n-1} = \alpha|\partial\Omega|_{n-1}.$$

Demostración. Supongamos que la tesis del Teorema es falsa. Luego se tiene que

$$|\{u = 0\} \cap \partial\Omega|_{n-1} > \alpha|\partial\Omega|_{n-1}.$$

Dado que la medida de superficie es regular, existe un conjunto cerrado $\Gamma_0 \subset \{u = 0\} \cap \partial\Omega$ tal que

$$|\{u = 0\} \cap \partial\Omega|_{n-1} > |\Gamma_0|_{n-1} > \alpha|\partial\Omega|_{n-1}.$$

En consecuencia, se tiene que $\Lambda(\alpha) \leq \lambda_1(\Gamma_0)$.

Por otro lado, como u es admisible en la caracterización de $\lambda_1(\Gamma_0)$ se tiene que

$$\lambda_1(\Gamma_0) \leq \frac{\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}}{\|u\|^p_{L^p(\partial\Omega)}} = \Lambda(\alpha),$$

de donde $\lambda_1(\Gamma_0) = \Lambda(\alpha)$ y u es también una autofunción asociada a $\lambda_1(\Gamma_0)$. Luego, u es una solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \Gamma_0 \\ |\nabla u|^{p-2}\partial_\nu u = \lambda_1(\Gamma_0)|u|^{p-2}u & \text{en } \partial\Omega \setminus \Gamma_0. \end{cases}$$

Ahora, por la Observación 3.9. $u \in C^{1,\gamma}_{loc}(\Omega \cup (\partial\Omega \setminus \Gamma_0))$ para algún $\gamma \in (0, 1)$ y podemos asumir que $u > 0$ en Ω.

Finalmente, por nuestra suposición de regularidad en Ω podemos aplicar el Lema de Hopf (ver [42]) que nos da la estimación

$$\partial_\nu u > 0 \quad \text{en } (\{u = 0\} \cap \partial\Omega) \setminus \Gamma_0.$$

Esto es una contradicción. □

Finalmente, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.4. *La función $\alpha \mapsto \Lambda(\alpha)$ es estríctamente creciente.*

Demostración. Es claro que $\Lambda(\alpha)$ es no decreciente como función de α. Supongamos ahora que existen $0 < \alpha < \beta < 1$ tales que $\Lambda(\alpha) = \lambda(\beta)$. Luego, todo extremal para $\lambda(\beta)$ lo será también para $\Lambda(\alpha)$. Pero si u es un extremal para $\lambda(\beta)$ tenemos

$$|\{u = 0\} \cap \partial\Omega|_{n-1} = \beta|\partial\Omega|_{n-1} > \alpha|\partial\Omega|_{n-1}.$$

que contradice el Teorema 4.3. Luego $\Lambda(\alpha)$ es estríctamente creciente. □

El siguiente resultado nos da un resultado de regularidad de la función $\alpha \mapsto \Lambda(\alpha)$ demostrado en [16] y será de gran utilidad en el siguiente capítulo.

Teorema 4.5. *La función λ es continua por la derecha sobre el intervalo* $(0, 1)$*, es decir*

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0^+} \Lambda(\alpha) = \lambda(\alpha_0), \quad \forall \alpha_0 \in (0, 1).$$

Demostración. Sea $\alpha_0 \in (0, 1)$ arbitrario, usando el Corolario 4.4 existe

$$\mathcal{L} = \lim_{\alpha \to \alpha_0^+} \Lambda(\alpha) \quad y \quad \mathcal{L} \geq \lambda(\alpha_0). \tag{4.5}$$

Por el Teorema 4.3, existe $v_{\alpha_0} \in W^{1,p}(\Omega)$ autofunción asociada a $\lambda(\alpha_0)$ tal que $\|v_{\alpha_0}\|_{L^p(\partial\Omega)} = 1$ y

$$|A_{\alpha_0}|_{n-1} = \alpha_0|\partial\Omega|_{n-1},$$

donde $A_{\alpha_0} = \{v_{\alpha_0}(x) = 0\} \cap \partial\Omega$.

Se elige ahora una función suave η satisfaciendo

$$\begin{cases} \eta = 0, & \text{en } B(0, 1) \\ \eta = 1, & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus B(0, 2) \\ 0 \leq \eta \leq 1, & \|\nabla\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq 2. \end{cases}$$

Tomando ahora $x_0 \in \partial\Omega \setminus A_{\alpha_0}$ un punto de densidad cero relativo a $\partial\Omega$ (ver definición en [19, Capítulo 1.7]), por cada $\varepsilon > 0$ definimos $\eta_\varepsilon(x) = \eta(\frac{x-x_0}{\varepsilon})$ y $w_\varepsilon = \eta_\varepsilon v_{\alpha_0} \in W^{1,p}(\Omega)$. Observamos que

$$\{x \in \partial\Omega \colon w_\varepsilon(x) = 0\} = A_{\alpha_0} \cup (B_\varepsilon(x_0) \cap \partial\Omega).$$

de donde

$$|\{x \in \partial\Omega \colon w_\varepsilon(x) = 0\}|_{n-1} > |A_{\alpha_0}|_{n-1} = \alpha_0|\partial\Omega|_{n-1}, \tag{4.6}$$

para ε suficientemente pequeño, puesto que x_0 es un punto de densidad 0 para A_{α_0} relativo a $\partial\Omega$.

Por una lado se tiene que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|w_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} = \|v_{\alpha_0}\|_{L^p(\Omega)} \tag{4.7}$$

y

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|w_\varepsilon\|_{L^p(\partial\Omega)} = \|v_{\alpha_0}\|_{L^p(\partial\Omega)}. \tag{4.8}$$

En efecto, veamos (4.7),

$$\begin{aligned}\int_\Omega |w_\varepsilon - v_{\alpha_0}|^p\,dx &= \int_{B(x_0,2\varepsilon)\cap\Omega\setminus B(x_0,\varepsilon)} |(\eta_\varepsilon - 1)v_{\alpha_0}|^p\,dx + \int_{B(x_0,\varepsilon)\cap\Omega} |v_{\alpha_0}|^p\,dx \\ &\le \int_{B(x_0,2\varepsilon)\cap\Omega} |v_{\alpha_0}|^p\,dx,\end{aligned}$$

donde hemos usado que $0 \le \eta_\varepsilon \le 1$. Por lo tanto $w_\varepsilon \to v_{\alpha_0}$ en $L^p(\Omega)$, de donde se deduce (4.7). La demostración de (4.8) se puede realizar con un argumento similar.

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}\|\nabla w_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} &\le \|\nabla\eta_\varepsilon v_{\alpha_0} + \eta_\varepsilon\nabla v_{\alpha_0}\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le \|\nabla\eta_\varepsilon v_{\alpha_0}\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla v_{\alpha_0}\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le \frac{C}{\varepsilon}\|v_{\alpha_0}\|_{L^p(B(x_0,2\varepsilon)\cap\Omega\setminus B(x_0,\varepsilon))} + \|\nabla v_{\alpha_0}\|_{L^p(\Omega)}\end{aligned}$$

y por desigualdad de Hölder se obtiene que

$$\|\nabla w_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \le C\|v_{\alpha_0}\|_{L^{p^*}(B(x_0,2\varepsilon)\cap\Omega\setminus B(x_0,\varepsilon))} + \|\nabla v_{\alpha_0}\|_{L^p(\Omega)}, \tag{4.9}$$

donde C es una constante independiente de ε.

Por (4.6) existe $\delta > 0$ tal que

$$|\{x \in \partial\Omega\colon w_\varepsilon(x) = 0\}|_{n-1} > \alpha|\partial\Omega|_{n-1}, \quad \forall 0 < \alpha - \alpha_0 < \delta,$$

y por lo tanto w_ε es una función admisible en la caracterización de $\Lambda(\alpha)$. De esto último junto con (4.9) obtenemos que

$$\Lambda(\alpha) \le \frac{\|w_\varepsilon\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}}{\|w_\varepsilon\|^p_{L^p(\partial\Omega)}} \tag{4.10}$$

$$\le \frac{(C\|v_{\alpha_0}\|_{L^{p^\star}(B(x_0,2\varepsilon)\setminus B(x_0,\varepsilon))} + \|\nabla v_{\alpha_0}\|_{L^p(\Omega)})^p + \|w_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}}{\|w_\varepsilon\|^p_{L^p(\partial\Omega)}} \tag{4.11}$$

para todo $0 < \alpha - \alpha_0 < \delta$. Entonces por (4.5) tenemos que

$$\mathcal{L} \le \frac{(C\|v_{\alpha_0}\|_{L^{p^\star}(B(x_0,2\varepsilon)\setminus B(x_0,\varepsilon))} + \|\nabla v_{\alpha_0}\|_{L^p(\Omega)})^p + \|w_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}}{\|w_\varepsilon\|^p_{L^p(\partial\Omega)}}.$$

Tomando límite con $\varepsilon \to 0$, usando (4.7), (4.8) llegamos a

$$\mathcal{L} \le \frac{\|v_{\alpha_0}\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}}{\|v_{\alpha_0}\|^p_{L^p(\partial\Omega)}}.$$

Tenemos por lo tanto que $\mathcal{L} = \lambda(\alpha_0)$, es decir

$$\lim_{\alpha \to {\alpha_0}^+} \Lambda(\alpha) = \lambda(\alpha_0),$$

lo que concluye la demostración. $\square$

Terminamos esta sección haciendo una generalización de los resultados obtenidos para la constante $\lambda(\Gamma)$. En lo que sigue, necesitaremos una generalización, cuya demostración es elemental. Enunciamos el resultado con detalle.

Para eso, dado una función de peso $\rho \in L^\infty(\partial\Omega)$ tal que $\rho(x) \geq c > 0$ $\mathcal{H}^{n-1}$–c.t.p. en $\partial\Omega$, y $\Gamma \subset \partial\Omega$ un conjunto de Borel, se define la constante $\lambda_\rho(\Gamma)$ como

$$\lambda_\rho(\Gamma) = \inf\left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla v|^p + |v|^p \, dx}{\int_{\partial\Omega} |v|^p \, d\mu_\rho} : v \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega) \right\},$$

donde la medida μ_ρ viene dada por $d\mu_\rho = \rho \, dS$.

Introducimos las siguientes notaciones asociadas al problema de optimización para la constante $\lambda_\rho(\Gamma)$: para $\alpha \in (0,1)$ se define

$$\lambda_\rho(\alpha) := \inf\{\lambda_\rho(\Gamma) \colon \Gamma \subset \partial\Omega, \mu_\rho(\Gamma) = \alpha\mu_\rho(\partial\Omega)\}. \tag{4.12}$$

Esta constante $\lambda_\rho(\alpha)$ nos da a su vez la noción de ventana óptima pero esta vez asociada al problema (3.13), es decir una ventana $\Gamma_\rho \subset \partial\Omega$ es una ventana óptima para el problema (3.13) si $\lambda_\rho(\alpha) = \lambda_\rho(\Gamma_\rho)$ y el extremal asociado a la ventana Γ_ρ se notará por u_ρ.

Resumiendo todos los resultados, se obtiene el siguiente teorema cuya demostración omitimos.

Teorema 4.6. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio Lipschitz. Entonces, dado $\alpha \in (0,1)$, se tiene*

1. *Existe un conjunto $\Gamma_\rho \subset \partial\Omega$ tal que $\mu_\rho(\Gamma_\rho) = \alpha\mu_\rho(\partial\Omega)$ y*

$$\lambda_\rho(\alpha) = \lambda_\rho(\Gamma_\rho).$$

   Más aún, existe $u_\rho \in W^{1,p}_{\Gamma_\rho}(\Omega)$ tal que

$$\lambda_\rho(\alpha) = \frac{\int_\Omega |\nabla u_\rho|^p + |u_\rho|^p \, dx}{\int_{\partial\Omega} |u_\rho|^p \, d\mu_\rho}.$$

2. *Si $\partial\Omega$ verifica la propiedad de la bola tangente exterior, entonces*

$$\mu_\rho(\{u_\rho = 0\} \cap \partial\Omega) = \alpha\mu_\rho(\partial\Omega).$$

3. *Si $\partial\Omega$ verifica la propiedad de la bola tangente exterior, entonces $\lambda_\rho(\alpha)$ es estrictamente creciente.*

4. *Finalmente, si $\partial\Omega$ verifica la propiedad de la bola tangente exterior, entonces $\lambda_\rho(\alpha)$ es continua a derecha.*

4.2. Configuración óptima no local

Como dijimos en la introducción de este capítulo, estudiaremos en esta sección los problemas de optimización de forma asociados al operador $(-\Delta_{p,\Omega})^s$ definido en (3.20).

Antes de comenzar con los problemas de optimización mencionados presentaremos una versión del principio fuerte del mínimo no local que será usado para caracterizar el conjunto de puntos en donde se anulan los extremales asociados a la constante Λ_s definida en (1.3). Necesitaremos primero del siguiente lema básico tomado de [10].

Lema 4.7. *Sea $p \geq 1$ y $\varepsilon \in (0, 1]$. Entonces*

$$|a|^p \leq |b|^p + c_p\varepsilon|b|^p + (1 + c_p\varepsilon)\varepsilon^{1-p}|a - b|^p, c_p := (p - 1)\Gamma(\text{máx}\,\{1, p - 2\}),$$

con $a, b \in \mathbb{R}^n$ y $n \geq 1$, siendo Γ la función gamma, definida como

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt.$$

Demostración. Por la desigualdad triangular y la convexidad de la función $h(t) = t^p$, obtenemos

$$\begin{aligned}|a|^p \leq& (|b| + |a - b|)^p \\ =& (1 + \varepsilon)^p \left(\frac{1}{1 + \varepsilon}|b| + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}\frac{|a - b|}{\varepsilon}\right)^p \\ \leq& (1 + \varepsilon)^{p-1}|b|^p + \left(\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}\right)^{p-1}|a - b|^p.\end{aligned}$$

Usando ahora la estimación

$$(1 + \varepsilon)^{p-1} = 1 + (p - 1)\int_1^{1+\varepsilon} t^{p-2}\,dt \leq 1 + \varepsilon(p - 1)\,\text{máx}\{1, (1 + \varepsilon)^{p-2}\},$$

e iterando ahora esta desigualdad, se llega al resultado deseado. Ver [10, Lemma 3.1] para más detalles. □

A continuación presentamos la herramienta que nos permitirá demostrar el principio fuerte del mínimo en su versión no local. Daremos una demostración de este lema siguiendo la demostración de [10, Lemma 1.3]. Queremos remarcar que la demostración en [10, Lemma 1.3] es más compleja dado que no asumen que u sea nonegativa en todo Ω, sino sólo en B_R. Por ende tienen que controlar el decaimiento de u_- en el complemento de dicha bola.

Lema 4.8 (Lema logarítmico). *Sea $0 < s < 1 < p < \infty$ fijo y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Sea $A \subset \Omega$ un conjunto cerrado. Asumimos que $f \in L^{p'}(\Omega)$ es una función no negativa tal que $u \in W^{s,p}_A(\Omega)$ es una solución débil no negativa de (3.25) en el sentido de la Definición 3.19. Si $B_R(x_0) \subset\subset \Omega \setminus A$, entonces se cumple la siguiente estimación: para cualquier $B_r(x_0) \subset B_{R/2}(x_0)$ y cada $d > 0$,*

$$\iint_{B_r\times B_r} \frac{1}{|x - y|^{n+sp}} \left|\log\left(\frac{u(x) + d}{u(y) + d}\right)\right|^p dx\,dy \leq Cr^{n-sp}, \tag{4.13}$$

donde $C = C(n, p, s) > 0$.

Demostración. Sea $d > 0$ y $\phi \in C_c^\infty(B_{3r/2})$ para $r > 0$ tal que

$$0 \le \phi \le 1, \phi \equiv 1 \text{ en } B_r \text{ y } |\nabla\phi| < cr^{-1} \text{ en } B_{3r/2} \subset B_{R/2}.$$

Ahora usamos la formulación débil (3.24) con la siguiente función de prueba

$$\eta = (u + d)^{1-p}\phi^p.$$

Observamos que la función η esta bien definida ya que $u \ge 0$ y, como $\psi(t) = (t+d)^{1-p}$ es acotada con derivada acotada para $t \ge 0$, tenemos que $\eta \in W^{s,p}(\Omega)$.

De esta forma se obtiene

$$\begin{aligned} 0 \le &\int_\Omega f\eta\, dx \\ =&\frac{1}{2}\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))(\eta(x) - \eta(y))}{|x - y|^{n+sp}}\, dxdy \\ =&I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned} \tag{4.14}$$

donde

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}\iint_{B_{2r}\times B_{2r}} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+sp}}\left[\frac{\phi(x)^p}{(u(x) + d)^{p-1}} - \frac{\phi(y)^p}{(u(y) + d)^{p-1}}\right] dx\, dy, \\ I_2 &= \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus B_{2r}}\int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}}{|x - y|^{n+sp}} \frac{u(x) - u(y)}{(u(x) + d)^{p-1}}\phi(x)^p\, dx\, dy, \\ I_3 &= \frac{1}{2}\int_{B_{2r}}\int_{\Omega\setminus B_{2r}} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}}{|x - y|^{n+sp}} \frac{(u(y) - u(x))}{(u(y) + d)^{p-1}}\phi(y)^p\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Acotamos ahora cada uno de los anteriores términos. Comenzamos con I_1, supongamos que $u(x) > u(y)$ en el integrando en I_1, usamos la desigualdad en el Lema 4.7 eligiendo $a = \phi(x), b = \phi(y)$ y

$$\varepsilon = \delta\frac{u(x) - u(y)}{u(x) + d} \in (0, 1) \text{ con } \delta \in (0, 1)$$

ya que $u(y) \ge 0$ para $y \in B_{2r} \subset B_R$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \phi(x)^p &\le \phi(y)^p + c_p\varepsilon\phi(y)^p + (1 + c_p\varepsilon)\varepsilon^{1-p}|\phi(x) - \phi(y)|^p \\ &\le \phi(y)^p + c_p\delta\frac{u(x) - u(y)}{u(x) + d}\phi(y)^p + (1 + c_p)\delta^{1-p}\frac{(u(x) + d)^{p-1}}{(u(x) - u(y))^{p-1}}|\phi(x) - \phi(y)|^p. \end{aligned}$$

De esta desigualdad se deduce que

$$\begin{aligned} &\frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+sp}}\left[\frac{\phi(x)^p}{(u(x) + d)^{p-1}} - \frac{\phi(y)^p}{(u(y) + d)^{p-1}}\right] \le \\ &\frac{1}{|x - y|^{n+sp}}\frac{(u(x) - u(y))^{p-1}}{(u(x) + d)^{p-1}}\phi(y)^p\left[1 + c_p\delta\frac{u(x) - u(y)}{u(x) + d} - \left(\frac{u(x) + d}{u(y) + d}\right)^{p-1}\right] \\ &+ (1 + c_p)\delta^{1-p}\frac{1}{|x - y|^{n+sp}}|\phi(x) - \phi(y)|^p \end{aligned}$$

El primer término que aparece al lado derecho de la última desigualdad puede ser escrito como

$$\frac{1}{|x-y|^{n+sp}}\left(\frac{u(x)-u(y)}{u(x)+d}\right)^p \phi^p(y)\left[c_p\delta+\frac{1-\left(\frac{u(y)+d}{u(x)+d}\right)^{1-p}}{1-\frac{u(y)+d}{u(x)+d}}\right] := J_1. \tag{4.15}$$

Luego si llamamos $t=\frac{u(y)+d}{u(x)+d}$, tenemos que estimar la función $g\colon (0,1)\to\mathbb{R}$ dada por

$$g(t) := \frac{1-t^{1-p}}{1-t}.$$

Mediante cálculos elementales, es fácil ver que $g(t)$ es creciente, $g(0)=-\infty$ y $g(1)=-(p-1)$.

Más aún, si $t\in[0,\frac{1}{2}]$ se obtiene que

$$g(t)\frac{1-t}{t^{1-p}} = -(1-t^{p-1}) \leq -\frac{2^{p-1}-1}{2^{p-1}} \leq -2\log 2\frac{p-1}{2^p} < -\frac{p-1}{2^p},$$

donde hemos usado la desigualdad $2^x-1\geq x\log 2$ si $x\geq 0$.

En consecuencia se obtuvo que

$$g(t) \leq -\frac{p-1}{2^p}\frac{t^{1-p}}{1-t},$$

para $0<t\leq\frac{1}{2}$. por otro lado, observemos que $t^{p-1}<1<\frac{1}{1-t}$ para $t\in(0,1)$, de donde

$$\frac{t^{1-p}}{1-t}\geq 1, \quad \text{si } 0<t<1.$$

En definitiva, hemos probado que

$$g(t)\leq -\frac{p-1}{2^p}, \quad \text{si } 0<t<\frac{1}{2}.$$

Luego, llamando $t=\frac{u(y)+d}{u(x)+d}\in(0,1)$, tenemos que

$$J_1 = \frac{1}{|x-y|^{n+sp}}\phi^p(y)(1-t)^p[g(t)+c_p\delta].$$

Ahora, si $0<t<1$,

$$(1-t)^p = (1-t)t^{p-1}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{p-1} \leq \left(\frac{1-t}{t}\right)^{p-1}.$$

Juntando todo, obtenemos que si $0<t<\frac{1}{2}$,

$$J_1 \leq \frac{1}{|x-y|^{n+sp}}\phi^p(y)\left(\frac{1-t}{t}\right)^{p-1}\left[c_p\delta-\frac{p-1}{2^p}\right].$$

Elegimos entonces $\delta = \frac{p-1}{2^{p+1}c_p}$ (observemos que esta elección de δ verifica que $0 < \delta < 1$) y llegamos a

$$J_1 \leq -\frac{p-1}{2^{p+1}}\frac{1}{|x-y|^{n+sp}}\phi^p(y)\left(\frac{1-t}{t}\right)^{p-1} = -\frac{p-1}{2^{p+1}}\frac{1}{|x-y|^{n+sp}}\phi^p(y)\left(\frac{u(x)-u(y)}{u(y)+d}\right)^{p-1}.$$

Usamos la estimación

$$\left(\log\frac{1}{t}\right)^p \leq c(p)\left(\frac{1-t}{t}\right)^{p-1},$$

para $0 < t \leq \frac{1}{2}$ se obtiene

$$J_1 \leq -\frac{p-1}{2^{p+1}}\frac{1}{|x-y|^{n+sp}}\phi^p(y)\left(\log\frac{1}{t}\right)^p = -\frac{p-1}{2^{p+1}}\frac{1}{|x-y|^{n+sp}}\phi^p(y)c(p)\log^p\left(\frac{u(x)+d}{u(y)+d}\right). \quad (4.16)$$

Puede verse, de hecho, que se puede tomar $c(p) = (p-1)^{-\frac{1}{p}}$.

Por otro lado, si $\frac{1}{2} < t < 1$, se tiene

$$J_1 = \frac{1}{|x-y|^{n+sp}}\phi^p(y)(1-t)^p[g(t)+c_p\delta] \leq \frac{1}{|x-y|^{n+sp}}\phi^p(y)(1-t)^p\left[c_p\delta-(p-1)\right].$$

Luego, con la misma elección de δ se llega a

$$\begin{aligned} J_1 &\leq -\frac{(p-1)(2^{p+1}-1)}{2^{p+1}}\frac{1}{|x-y|^{n+sp}}\phi^p(y)(1-t)^p \\ &= -\frac{(p-1)(2^{p+1}-1)}{2^{p+1}}\frac{1}{|x-y|^{n+sp}}\phi^p(y)\left(\frac{u(x)-u(y)}{u(x)+d}\right)^p. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Observemos ahora que $\log x \leq x-1$ para $x > 0$ y recordando que $\frac{1}{2} < t < 1$ sigue que

$$\log^p\left(\frac{1}{t}\right) \leq \left(\frac{1}{t}-1\right)^p = \left(\frac{1-t}{t}\right)^p = t^{-p}(1-t)^p \leq 2^p(1-t)^p.$$

Luego, de (4.17), obtenemos

$$\begin{aligned} J_1 &\leq -\frac{(p-1)(2^{p+1}-1)}{2^{2p+1}}\frac{1}{|x-y|^{n+sp}}\phi^p(y)\log^p\left(\frac{1}{t}\right) \\ &= -\frac{(p-1)(2^{p+1}-1)}{2^{2p+1}}\frac{1}{|x-y|^{n+sp}}\phi^p(y)\log^p\left(\frac{u(x)+d}{u(y)+d}\right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

De (4.16) y (4.18) se consigue que, si $u(y) < u(x)$ entonces

$$\begin{aligned} &\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{n+sp}}\left[\frac{\phi(x)^p}{(u(x)+d)^{p-1}} - \frac{\phi(y)^p}{(u(y)+d)^{p-1}}\right] \leq \\ &J_1 + C\frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \leq -c\frac{\phi^p(y)}{|x-y|^{n+sp}}\log^p\left(\frac{u(x)+d}{u(y)+d}\right) + C\frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}. \end{aligned}$$

Observemos que cuando $u(x) = u(y)$, entonces la estimación hecha anteriormente se cumple trivialmente.

Si ahora $u(y) > u(x)$ podemos ahora cambiar los roles de x e y en los calculos hechos anteriormente y llegar a lo mismo. Finalmente obtenemos para I_1 la siguiente estimación

$$\begin{aligned} I_1 \leq & - c \iint_{B_{2r}\times B_{2r}} \frac{1}{|x-y|^{n+sp}} \left|\log\left(\frac{u(x)+d}{u(y)+d}\right)\right|^p \phi^p(y)\,dxdy \\ & + C \iint_{B_{2r}\times B_{2r}} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy \end{aligned} \tag{4.19}$$

para algunas constantes c, C que dependen de p.

Hay que estimar ahora I_2, observamos primero que como $u(y) \geq 0$,

$$\frac{(u(x)-u(y))_+}{u(x)+d} \leq 1 \text{ para todo } x, y \in \Omega.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} I_2 & \leq \int_{\Omega\setminus B_{2r}} \int_{B_{2r}} \left(\frac{(u(x)-u(y))_+}{u(x)+d}\right)^{p-1} \frac{\phi^p(x)}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy \\ & \leq \int_{\Omega\setminus B_{2r}} \int_{B_{2r}} \frac{\phi^p(x)}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy \end{aligned} \tag{4.20}$$

Teniendo en cuenta que el soporte de la función ϕ esta en $B_{2r/3}$ se cumple que

$$\int_{\Omega\setminus B_{2r}} \int_{B_{2r}} \frac{\phi^p(x)}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy \leq \omega_n \left(\frac{2}{3}\right)^n r^n \sup_{x\in B_{3r/2}} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2r}} \frac{1}{|x-y|^{n+sp}}\,dy. \tag{4.21}$$

Ahora, como $x \in B_{3r/2}$, sigue que $\mathbb{R}^n \setminus B_{2r}(0) \subset \mathbb{R}^n \setminus B_{r/2}(x)$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2r}(0)} \frac{1}{|x-y|^{n+sp}}\,dy & \leq \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/2}(x)} \frac{1}{|x-y|^{n+sp}}\,dy \\ & = \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{r/2}(0)} \frac{1}{|z|^{n+sp}}\,dz \\ & = n\omega_n \int_{r/2}^{\infty} \frac{1}{\rho^{n+sp}}\rho^{n-1}\,d\rho \\ & = \frac{2^{sp} n\omega_n}{sp} r^{-sp}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Juntando entonces (4.20) con (4.21) obtenemos que

$$I_2 \leq C r^{n-sp}.$$

El término I_3 se acota exactamente igual que el I_2.

Finalmente, de (4.14) y las cotas para I_i, $i = 1, 2, 3$ llegamos a

$$\begin{aligned} 0 \leq & -c \iint_{B_{2r}\times B_{2r}} \frac{1}{|x-y|^{n+sp}} \left|\log\left(\frac{u(x)+d}{u(y)+d}\right)\right|^p \phi^p(y)\,dxdy \\ & + C\left(\iint_{B_{2r}\times B_{2r}} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy + r^{n-sp}\right). \end{aligned}$$

Para finalizar la demostración, debemos estimar el término

$$L := \iint_{B_{2r}\times B_{2r}} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy.$$

Recordemos que $\|\nabla\phi\|_\infty \leq cr^{-1}$. Luego,

$$L \leq cr^{-p} \iint_{B_{2r}\times B_{2r}} \frac{1}{|x-y|^{n+sp-p}}\,dxdy.$$

Ahora bien, observemos que si $(x, y) \in B_{2r}(0) \times B_{2r}(0)$, entonces $y \in B_{4r}(x)$. Luego

$$L \leq cr^{-p} \int_{B_{2r}(0)} \left(\int_{B_{4r}(x)} \frac{1}{|x-y|^{n+sp-p}}\,dy\right) dx$$

Razonando de manera análoga a (4.22) se ve fácilmente que

$$\int_{B_{4r}(x)} \frac{1}{|x-y|^{n+sp-p}}\,dy = Cr^{-sp+p}.$$

Juntando todas estas estimaciones se concluye que

$$L \leq Cr^{n-sp}.$$

Esto concluye la demostración del lema. □

Usando ahora el Lema 4.8 podemos dar la siguiente versión del principio fuerte del mínimo para el operador $(-\Delta_{p,\Omega})^s$. Daremos una demostración de este principio siguiendo las ideas del Teorema A.1 en [6].

Teorema 4.9 (Principio fuerte del mínimo no local)**.** *Sea $0 < s < 1 < p < \infty$ fijo y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y conexo. Sea $A \subset \Omega$ un subconjunto cerrado. Asumamos que $f \in L^{p'}(\Omega)$ es una función no negativa y que $u \in W^{s,p}_A(\Omega)$ es una solución débil no negativa de (3.25) en el sentido de la Definición 3.19. Entonces o bien $u \equiv 0$ en Ω o bien $u > 0$ casi en todo punto de Ω.*

Demostración. Comenzaremos demostrando que para cada $K \subset \Omega$ compacto y conexo si se cumple que

$$u \not\equiv 0 \text{ en } K, \tag{4.23}$$

entonces $u > 0$ c.t.p. de K.

En efecto, sea $K \subset \Omega$ un conjunto compacto y conexo, entonces $K \subset \{x \in \Omega \colon d(x, \partial\Omega) > 2r\}$, para algún $r > 0$. Al ser K compacto podemos cubrirlo por un número finito de bolas $\{B_{r/2}(x_1), \dots, B_{r/2}(x_k)\}$, tal que $x_i \in K$ y

$$|B_{r/2}(x_i) \cap B_{r/2}(x_{i+1})| > 0 \text{ para } i = 1, \dots, k-1. \tag{4.24}$$

Supongamos ahora que $u = 0$ sobre un subconjunto de K de medida positiva. Entonces tenemos que para algún $i \in \{1, \dots, k-1\}$ el conjunto

$$Z := \{x \in B_{r/2}(x_i) \colon u(x) = 0\},$$

tiene medida positiva.

Definimos ahora la función

$$F_\delta(x) = \log\left(1 + \frac{u(x)}{\delta}\right), x \in B_{r/2}(x_i),$$

para $\delta > 0$ y afirmamos que se cumple la siguiente desigualdad del tipo Poincaré

$$\int_{B_{r/2}(x_i)} |F_\delta|^p \, dx \leq \frac{r^{n+sp}}{|Z|} \iint_{B_{r/2}(x_i) \times B_{r/2}(x_i)} \frac{|F_\delta(x) - F_\delta(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \, dxdy. \tag{4.25}$$

En efecto, observamos que para cada $x \in Z$ se cumple que $F_\delta(x) = 0$, por lo tanto para $x \in B_{r/2}(x_i)$ e $y \neq x$ con $y \in Z$ se tiene que

$$|F_\delta(x)|^p = \frac{|F_\delta(x) - F_\delta(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} |x-y|^{n+sp}.$$

Integrando en la anterior igualdad respecto de la variable y, obtenemos

$$|Z||F_\delta(x)|^p \leq \left(\max_{x,y \in B_{r/2}(x_i)} |x-y|^{n+sp}\right) \int_{B_{r/2}(x_i)} \frac{|F_\delta(x) - F_\delta(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \, dy,$$

lo cual integrando respecto de $x \in B_{r/2}(x_i)$ demuestra la desigualdad (4.25).

Por otro lado,

$$\left|\log\left(\frac{\delta + u(x)}{\delta + u(y)}\right)\right|^p = |F_\delta(x) - F_\delta(y)|^p,$$

usando entonces el Lema 4.8 junto con (4.25) llegamos a

$$\int_{B_{r/2}(x_i)} \left|\log\left(1 + \frac{u(x)}{\delta}\right)\right|^p \, dx \leq \frac{C}{|Z|} r^{2n}, \tag{4.26}$$

donde la constante C no depende de δ. Veamos que (4.26) implica que $u = 0$ c.t.p. en $B_{r/2}(x_i)$. En efecto, si $u \not\equiv 0$ en $B_{r/2}(x_i)$ existe $\lambda > 0$ tal que $A := \{u \geq \lambda\} \cap B_{r/2}(x_i)$ tiene medida positiva. Pero entonces se tiene

$$\log\left(1 + \frac{u(x)}{\delta}\right) \geq \log\left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\right), \quad \text{para todo } x \in A.$$

Entonces, de (4.26) sigue que

$$|A| \log^p \left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\right) \leq \frac{C}{|Z|} r^{2n},$$

para todo $\delta > 0$. Haciendo $\delta \downarrow 0$ llegamos a una contradicción y por ende $u = 0$ c.t.p. en $B_{r/2}(x_i)$.

Usando la propiedad (4.24) se puede replicar el anterior argumento para las bolas $B_{r/2}(x_{i-1})$ y $B_{r/2}(x_{i+1})$ y así sucesivamente para obtener finalmente que $u = 0$ c.t.p. en K. Pero esto contradice (4.23).

Asumamos ahora que se cumple que $u \not\equiv 0$ en Ω. Ya que Ω es conexo, existe una sucesión $K_m \subset \Omega$, de subconjuntos compactos y conexos de modo que

$$\Omega = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m \quad \text{y} \quad u \not\equiv 0 \text{ en } K_m.$$

Por la primera parte de la prueba tenemos que $u > 0$ en cada K_m, lo que implica el resultado del teorema. □

Observación 4.10. Si bien no lo usaremos en esta tesis las conclusiones del Lema 4.8 y del Teorema 4.9 aún se mantienen para soluciones de (3.23) en el sentido de la Definición 3.15.

En lo que resta del capítulo supondremos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado con frontera Lipschitz, esto será necesario ya que haremos uso de la compacidad de la inclusión $W^{s,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ en espacios de Sobolev fraccionarios.

4.2.1. Problema del obstáculo fuerte

Repasemos las definiciones básicas para poder introducir este problema rigurosamente. Sea $\alpha \in (0, 1)$ fijo y definimos la siguiente clase de conjuntos admisibles

$$\mathcal{A}_\alpha := \{A \subset \Omega \colon A \text{ medible y } |A| = \alpha|\Omega|\}.$$

Consideramos ahora $s \in (0, 1)$ y nuestro problema será encontrar un conjunto A_s tal que

$$\Lambda_s(\alpha) := \text{ínf}\{\lambda_s(A) \colon A \in \mathcal{A}_\alpha\}, \tag{4.27}$$

donde, recordemos, $\lambda_s(A)$ es la constante definida por

$$\lambda_s(A) = \inf_{0 \neq v \in W^{s,p}_A(\Omega)} \frac{[v]^p_{s,p}}{\|v\|^p_p}.$$

Si existe un conjunto A_s en donde este ínfimo se alcanza es llamado un *conjunto optimal* para la constante $\Lambda_s(\alpha)$. El problema presentado anteriormente es el *problema del obstáculo fuerte*, llamado así porque como veremos después como consecuencia del Teorema 4.9, este conjunto puede ser caracterizado como el conjunto donde los extremales se anulan.

Observación 4.11. Para el caso $s = 1$ (caso clásico), en [24, 25] se ocupan de la existencia de configuración óptima y propiedades de los extremales asociados.

Enunciamos y demostramos el siguiente resultado acerca de la constante $\lambda_s(A)$ que necesitaremos en esta sección.

Lema 4.12. *Sean $0 < s < 1 < p < \infty$. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado y $A \subset \Omega$ un conjunto medible con medida positiva. Entonces si $u \in W^{1,p}_A(\Omega)$ es un extremal para $\lambda_s(A)$, este tiene signo constante, es decir o bien $u \geq 0$ casi en todo punto en Ω o bien $u \leq 0$ casi en todo punto en Ω.*

Demostración. La demostración es una consecuencia de la siguiente desigualdad elemental

$$||a| - |b|| \begin{cases} = |a-b| & \text{si } ab \geq 0 \\ < |a-b| & \text{si } ab < 0 \end{cases}$$

En efecto, denotemos como $U_+ = \{u > 0\}$ y $U_- = \{u < 0\}$, asumamos que $|U_\pm| > 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
[u]^p_{s,p} &= \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dx\,dy \\
&= \int_{U_+}\int_{U_-} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dx\,dy + \iint_{(\Omega\times\Omega)\setminus(U_+\times U_-)} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dx\,dy \\
&\geq \int_{U_+}\int_{U_-} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dx\,dy + \iint_{(\Omega\times\Omega)\setminus(U_+\times U_-)} \frac{||u(x)|-|u(y)||^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dx\,dy \\
&> \int_{U_+}\int_{U_-} \frac{||u(x)|-|u(y)||^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dx\,dy + \iint_{(\Omega\times\Omega)\setminus(U_+\times U_-)} \frac{||u(x)|-|u(y)||^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dx\,dy \\
&= \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{||u(x)|-|u(y)||^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dx\,dy \\
&= [|u|]^p_{s,p}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, u no es un extremal para $\lambda_s(A)$, lo cual es una contradicción. Queda demostrado el lema. □

Antes de comenzar con la demostración de la existencia de una configuración óptima, necesitamos demostrar la siguiente caracterización.

Lema 4.13. *Sea α un número en $(0, 1)$. Entonces*

$$\Lambda_s(\alpha) = \text{ínf}\left\{ \frac{\frac{1}{2}[u]^p_{s,p}}{\|u\|^p_{L^p(\Omega)}} : u \in W^{s,p}(\Omega), |\{u = 0\} \cap \Omega| \geq \alpha|\Omega| \right\}. \tag{4.28}$$

Demostración. Definimos la siguiente constante

$$\tilde{\Lambda}_s(\alpha) := \text{ínf}\left\{ \frac{\frac{1}{2}[u]^p_{s,p}}{\|u\|^p_{L^p(\Omega)}} : u \in W^{s,p}(\Omega), |\{u = 0\} \cap \Omega| \geq \alpha|\Omega| \right\}.$$

Sea $A \subset \Omega$ un subconjunto arbitrario tal que $|A| = \alpha|\Omega|$. Si $u \in W^{s,p}_A(\Omega)$ es un extremal no negativo para $\lambda_s(A)$, entonces

$$\tilde{\Lambda}_s(\alpha) \leq \lambda_s(A).$$

Tomando ínfimo en A en la anterior desigualdad obtenemos

$$\tilde{\Lambda}_s(\alpha) \leq \Lambda_s(\alpha). \tag{4.29}$$

Por otro lado, sea $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión minimizante normalizada para $\tilde{\Lambda}_s(\alpha)$, es decir $v_m \in W^{s,p}(\Omega)$, $\|v_m\|_{L^p(\Omega)} = 1$ y

$$\tilde{\Lambda}_s(\alpha) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2}[v_m]^p_{s,p}, \quad |\{v_m = 0\} \cap \Omega| \geq 0.$$

Ahora, para cada $m \geq 1$, tomamos $A_m \subset \{v_m = 0\} \cap \Omega$ tal que $|A_m| = \alpha|\Omega|$.

De esta forma

$$\Lambda_s(\alpha) \leq \lambda_s(A_m) \leq \frac{1}{2}[v_m]^p_{s,p}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Tomando límite cuando $m \to \infty$ obtenemos

$$\Lambda_s(\alpha) \leq \tilde{\Lambda}_s(\alpha). \tag{4.30}$$

De esta forma (4.29) y (4.30) prueban el lema. □

Ahora teniendo en cuenta todo lo anterior estamos en condiciones de proporcionar la existencia de una configuración óptima para (4.27).

Teorema 4.14. *Sea α un número arbitrario en $(0, 1)$. Entonces existe:*

1. *Un conjunto $A \subset \Omega$, tal que $|A| = \alpha|\Omega|$ y*

$$\Lambda_s(\alpha) = \lambda_s(A).$$

2. *Una función $u \in W^{s,p}(\Omega)$ con $|\{u = 0\} \cap \Omega| \geq \alpha|\Omega|$, tal que*

$$\Lambda_s(\alpha) = \frac{\frac{1}{2}[u]^p_{s,p}}{\|u\|_{L^p(\Omega)}}.$$

Demostración. Claramente (1) se sigue inmediatamente de (2). Es suficiente tomar cualquier conjunto $A \subset \{u = 0\} \cap \Omega$ con $|A| = \alpha|\Omega|$.

Por lo tanto solo necesitamos probar (2). Sea $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión minimizante normalizada para la constante $\Lambda_s(\alpha)$, es decir para cada $m \in \mathbb{N}$.

$$v_m \in W^{s,p}(\Omega), \quad \|v_m\|_{L^p(\Omega)} = 1, \quad |\{v_m = 0\} \cap \Omega| \geq \alpha|\Omega|,$$

and

$$\Lambda_s(\alpha) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2}[v_m]^p_{s,p}.$$

De esta forma la sucesión $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es acotada en $W^{s,p}(\Omega)$. Usando ahora la reflexividad del espacio $W^{s,p}(\Omega)$ y la compacidad de la inmersión $W^{s,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ (ver [17]) existe una función $u \in W^{s,p}(\Omega)$ y una subsecuencia, que aún denotamos por $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, tal que

$$v_m \rightharpoonup u \text{ débil en } W^{s,p}(\Omega) \tag{4.31}$$

$$v_m \to u \text{ fuerte en } L^p(\Omega) \tag{4.32}$$

$$v_m \to u \text{ c.t.p. en } \Omega. \tag{4.33}$$

Por (4.32) podemos concluir que

$$1 = \lim_{m\to\infty} \|v_m\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Por (4.33) y la semicontinuidad superior de la medida como función de conjuntos de nivel, obtenemos

$$|\{u = 0\} \cap \Omega| \geq \lim_{m\to\infty} |\{v_m = 0\} \cap \Omega| \geq \alpha|\Omega|.$$

De esta forma la función u es admisible para la constante $\Lambda_s(\alpha)$, entonces

$$\Lambda_s(\alpha) \leq \frac{1}{2}[u]^p_{s,p}. \tag{4.34}$$

Ahora usando (4.31) y la semicontinuidad inferior de la seminorma $[\,\cdot\,]_{s,p}$, obtenemos

$$[u]_{s,p} \leq \liminf_{m\to\infty} [v_m]^p_{s,p} = 2\Lambda_s(\alpha).$$

La desigualdad anterior y (4.34) nos dicen que la función u satisface (2). □

El Teorema 4.14 no provee de un extremal cuyos ceros coincidan con el conjunto optimal, es decir no nos provee de un extremal u que cumpla $|\{u = 0\}\cap\Omega| = \alpha|\Omega|$, esto último será necesario para concluir en el Capítulo 5 la convergencia de los obstáculos. Este resultado en realidad puede ser deducido del principio fuerte del mínimo (Teorema 4.9) como veremos a continuación.

Teorema 4.15. *Si $u \in W^{s,p}(\Omega)$ es un extremal para $\Lambda_s(\alpha)$, entonces*

$$|\{u = 0\} \cap \Omega| = \alpha|\Omega|.$$

Demostración. Solo hay que probar $|\{u = 0\} \cap \Omega| \leq \alpha|\Omega|$. Asumimos en el resto de esta demostración que el extremal u esta normalizado, es decir $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$ y que u es no negativo en Ω.

Demostraremos por contradicción. Supongamos que $|\{u = 0\} \cap \Omega| > \alpha|\Omega|$, entonces por la regularidad de la medida existe un conjunto cerrado $A \subset \{u = 0\} \cap \Omega$ tal que

$$|\{u = 0\} \cap \Omega| > |A| > \alpha|\Omega|.$$

Usando la caracterización para la constante $\Lambda_s(\alpha)$ tenemos que

$$\Lambda_s(\alpha) = \frac{1}{2}[u]^p_{s,p} \leq \lambda_s(A) \leq \frac{1}{2}[u]^p_{s,p} = \Lambda_s(\alpha), \tag{4.35}$$

donde hemos usado el hecho de que la función u es admisible en la caracterización de $\lambda_s(A)$.

Entonces u es un extremal para $\lambda_s(A)$ y por lo tanto es una solución no negativa para el problema

$$\begin{cases} (-\Delta^s_{p,\Omega})u = \lambda|u|^{p-2}u, & \Omega \setminus A \\ u = 0, & A, \end{cases} \tag{4.36}$$

en el sentido de la Definición 3.19.

Usando el Teorema 4.9 concluimos que $u > 0$ casi en todo punto en $\Omega \setminus A$, pero esto es una contradicción ya que $|(\{u = 0\} \cap \Omega) \setminus A| > 0$.

Esto completa la prueba del teorema. □

4.2.2. Problema del obstáculo débil

Nos ocupamos ahora del problema de diseño óptimo que involucra otro tipo de obstáculo, aquí el obstáculo será una función en lugar de un conjunto a diferencia del problema presentado en la sección anterior. Mas precisamente nos interesa minimizar la constante $\lambda_s(\sigma, \phi)$ definida en (1.2) sobre la siguiente clase de funciones

$$\mathcal{B} = \{\phi \in L^\infty(\Omega) \colon 0 \leq \phi \leq 1\}.$$

Obviamente $\phi = 0$ es una solución trivial para este problema, por lo tanto para que el problema de optimización tenga sentido consideramos $\alpha \in (0, 1)$ y definimos ahora la siguiente clase de funciones admisibles

$$\mathcal{B}_\alpha = \left\{\phi \in \mathcal{B} \colon \int_\Omega \phi \, dx = \alpha|\Omega|\right\}.$$

Teniendo en cuenta ahora la familia de conjuntos definida anteriormente, planteamos el siguiente problema de diseño óptimo

$$\Lambda_s(\sigma, \alpha) = \operatorname{ínf}\{\lambda_s(\sigma, \phi) \colon \phi \in \mathcal{B}_\alpha\}, \tag{4.37}$$

este problema de diseño óptimo así planteado es el llamado *problema del obstáculo débil*. Una función $\phi \in \mathcal{B}_\alpha$ que realiza el ínfimo en (4.37) es llamada *potencial óptimo*, y si u es un extremal para $\lambda_s(\sigma, \phi)$ con ϕ como potencial óptimo, entonces el par $(u, \phi) \in W^{s,p}(\Omega) \times \mathcal{B}_\alpha$ es una configuración óptima para el problema (4.37).

Recordemos que la constante $\lambda_s(\sigma, \phi)$ viene dada por la expresión

$$\lambda_s(\sigma, \phi) = \operatorname*{ínf}_{0 \neq v \in W^{s,p}(\Omega)} \frac{[v]^p_{s,p} + \sigma \int_\Omega |v|^p \phi \, dx}{\|v\|^p_p}.$$

A continuación enunciamos y demostramos el principal resultado de esta sección que muestra la existencia de una configuración óptima para el problema (4.37).

Para el resultado principal de esta sección, usaremos el llamado *principio de la bañera* (del inglés “bathtube principle”) que su demostración puede encontrarse en [32, p. 28].

Lema 4.16 (Principio de la bañera)**.** *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y f una función medible a valores reales en Ω tal que $\mu(\{f < t\})$ es finito para todo $t \in \mathbb{R}$. Dado $G > 0$ definimos la clase de funciones medibles en Ω*

$$C = \left\{ g \colon \Omega \to \mathbb{R} \colon 0 \leq g(x) \leq 1 \text{ para todo } x \in \Omega \text{ y } \int_\Omega g\, d\mu = G \right\}.$$

Entonces el problema de minimización

$$I = \inf_{g \in C} \int_\Omega f g\, d\mu$$

tiene una solución dada por

$$g = \chi_{\{f<s\}} + c\chi_{\{f=s\}}, \tag{4.38}$$

donde

$$s = \sup\{t \colon \mu(\{f < t\}) \leq G\}, \quad c\mu(\{f = s\}) = G - \mu(\{f < s\}).$$

El minimizante dado por (4.38) es único si $G = \mu(\{f < s\})$ o si $G = \mu(\{f = s\})$.

Ahora si, podemos ver el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.17. *Sea $0 < s < 1 < p < \infty$, $\sigma > 0$ y $0 < \alpha < 1$ fijo. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto acotado con frontera Lipschitz, entonces existe una configuración óptima $(u, \phi) \in W^{s,p}(\Omega) \times \mathcal{B}_\alpha$ para el problema (4.37). Mas aún, el potencial óptimo puede expresarse como $\phi = \chi_D$, con*

$$\{u < s\} \subset D \subset \{u \leq s\}.$$

Demostración. Sea $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión minimizante en $\mathcal{B}_\alpha$ para $\Lambda_s(\sigma, \alpha)$, es decir

$$\Lambda_s(\sigma, \alpha) = \lim_{k\to\infty} \lambda_s(\sigma, \phi_k).$$

Resulta entonces que la sucesión $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^\infty(\Omega)$, entonces usando el hecho de que el espacio $L^1(\Omega)$ es un espacio de Banach separable y que $L^\infty(\Omega)$ es un espacio dual (ver [8, Corollary III.26]), existe $\phi \in L^\infty(\Omega)$ y una subsecuencia que (que aún seguimos llamando $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$) tal que

$$\phi_k \overset{*}{\rightharpoonup} \phi \text{ en } L^\infty(\Omega). \tag{4.39}$$

Observamos que (4.39) implica que $\phi \in \mathcal{B}_\alpha$.

Sea ahora $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in W^{s,p}(\Omega)$ la correspondiente sucesión normalizada de extremales para las constantes $\lambda_s(\sigma, \phi_k)$. Esto es $\lambda_s(\sigma, \phi_k) = I_{s,\phi_k,\sigma}(u_k)$.

Ya que $[u_k]_{s,p}^p \leq 2I_{s,\phi_k,\sigma}(u_k)$ y $\|u_k\|_p = 1$, entonces los extremales $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ son uniformemente acotados en $W^{s,p}(\Omega)$. Por la reflexividad del espacio $W^{s,p}(\Omega)$ (ver [1, p. 205]) y la compacidad de la inmersión $W^{s,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ existe una subsucesión (que aún seguimos llamando u_k) y una función $u \in W^{s,p}(\Omega)$ tal que

$$u_k \rightharpoonup u \text{ débil en } W^{s,p}(\Omega) \tag{4.40}$$
$$u_k \to u \text{ fuerte en } L^p(\Omega) \tag{4.41}$$
$$u_k \to u \text{ c.t.p. en } \Omega. \tag{4.42}$$

Usando (4.41) tenemos que

$$1 = \lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

entonces u es una función admisible en la definición de $\lambda_s(\sigma, \phi)$, en consecuencia

$$\lambda_s(\sigma, \phi) \leq I_{s,\phi,\sigma}(u). \tag{4.43}$$

Ahora usando (4.41), se sigue que $|u_k|^p \to |u|^p$ fuerte en $L^1(\Omega)$ y por lo tanto por (4.39) obtenemos

$$\int_\Omega |u_k|^p \phi_k \, dx \to \int_\Omega |u|^p \phi \, dx \text{ cuando } k \to \infty.$$

Por la semicontinuidad de la seminorma de Gagliardo $[\,\cdot\,]_{s,p}$, se cumple que

$$I_{s,\phi,\sigma}(u) \leq \liminf_{k\to\infty} I_{s,\phi_k,\sigma}(u_k). \tag{4.44}$$

Usando primero (4.44) y luego (4.43), obtenemos que

$$I_{s,\phi,\sigma}(u) \leq \liminf_{k\to\infty} I_{s,\phi_k,\sigma}(u_k) = \Lambda_s(\sigma, \alpha) \leq \lambda_s(\sigma, \phi) \leq I_{s,\phi,\sigma}(u).$$

Entonces $\Lambda_s(\sigma, \alpha) = \lambda_s(\sigma, \phi) = I_{s,\phi,\sigma}(u)$. Esto muestra que $(u, \phi) \in W^{s,p}(\Omega) \times \mathcal{B}_\alpha$ es una configuración óptima.

Finalmente usando el Lema 4.16, concluimos que el problema

$$\inf\left\{ \int_\Omega |u|^p \phi \, dx \colon \phi \in \mathcal{B}_\alpha \right\}$$

tiene una solución de la forma $\phi = \chi_D$ con $\{u < s\} \subset D \subset \{u \leq s\}$ para algún $s \in \mathbb{R}$. □

Capítulo 5

Comportamiento asintótico

En este capítulo, estudiaremos el comportamiento asintótico de los distintos problemas de optimización estudiados en esta Tesis cuando perturbamos ciertos parámetros que aparecen en estos problemas.

El primero de los problemas a estudiar es el de la constante $\Lambda(\alpha)$ estudiada en el Teorema 4.2. En este problema estudiaremos la dependencia de esta constante bajo perturbaciones en el dominio de referencia Ω. Para eso tomamos una familia de dominios Ω_ε que aproximen a Ω cuando $\varepsilon \downarrow 0$ y estudiamos el comportamiento asintótico de las constantes asociadas $\Lambda_\varepsilon(\alpha)$. Vemos que, dependiendo de la naturaleza de la convergencia $\Omega_\varepsilon \to \Omega$, puede resultar que $\Lambda_\varepsilon(\alpha) \not\to \Lambda(\alpha)$ dando lugar a un fenómeno de homogeneización en la frontera de Ω.

Luego nos dedicamos a estudiar el comportamiento asintótico de las constantes $\Lambda_s(\sigma, \alpha)$ definidas en (4.37) cuando $\sigma \to \infty$ y de $\Lambda_s(\alpha)$ dada por (4.27) cuando $s \uparrow 1$. En el caso de la constante $\Lambda_s(\sigma, \alpha)$ mostramos que converge a $\Lambda_s(\alpha)$ cuando $\sigma \to \infty$, haciendo de esta manera rigurosa la conexión entre el problema del obstáculo fuerte y el problema del obstáculo débil.

Para la constante $\Lambda_s(\alpha)$ mostramos que, cuando $s \uparrow 1$ esta converge al primer autovalor de un problema local tipo $p-$laplaciano.

El estudio del comportamiento asintótico, no se limita a la convergencia de las constantes. También abordamos el problema de la convergencia de los extremales asociados y como consecuencia de esto podemos describir el problema de la convergencia de las configuraciones óptimas en cada uno de los casos.

5.1. Homogeneización para el primer autovalor de Steklov de Δ_p

Recordemos la variante de la constante asociada al primer autovalor de Steklov. Para esto consideremos un subconjunto del borde $\Gamma \subset \partial\Omega$, el primer autovalor de Steklov se define como

$$\lambda_1(\Gamma) = \inf_{u \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p\, dx}{\int_{\partial\Omega} |u|^p\, dx}, \tag{5.1}$$

donde $W^{1,p}_{\Gamma}(\Omega) := \{u \in W^{1,p}(\Omega) \colon u = 0$ c.t.p. Γ con respecto a la medida de superficie$\}$ y es la mejor constante asociada a la desigualdad de Sobolev

$$S\left(\int_{\partial\Omega} |u|^q \, dS\right)^{p/q} \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^p + |u|^p \, dx.$$

Como vimos en el Teorema 3.7 existe extremal para la constante (5.1) y una función $u \in W^{1,p}_{\Gamma}(\Omega)$ es un extremal para λ_1 si y solo si es una solución débil para el problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = 0 & \text{en } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2}\partial_\nu u = \lambda_1(\Gamma)|u|^{p-2}u & \text{en } \partial\Omega \setminus \Gamma \\ u = 0 & \text{en } \Gamma. \end{cases}$$

Recordemos también que la constante $\Lambda(\alpha)$ definida en (4.1) es la que define el problema de optimización de forma asociado al anterior problema. Recordemos la definición de $\Lambda(\alpha)$: dado $\alpha \in (0, 1)$ se pone

$$\Lambda(\alpha) = \text{ínf}\{\lambda_1(\Gamma) \colon \Gamma \subset \partial\Omega, |\Gamma|_{n-1} = \alpha|\partial\Omega|_{n-1}\}.$$

Realizaremos, en principio, perturbaciones periódicas del dominio Ω para obtener los dominios Ω_ε, obtenemos a partir de estas perturbaciones la correspondiente sucesión de constantes óptimas $\{\Lambda_\varepsilon(\alpha)\}_{\varepsilon>0}$ sobre los dominios perturbados Ω_ε. Nos ocuparemos de estudiar el comportamiento asintótico de esta sucesión de constantes óptimas y de la correspondiente sucesión de ventanas optimales Γ_ε obteniendo resultados de homogeneización. Mas precisamente tres casos se presentan:

i.- *Caso subcrítico*: en este caso las oscilaciones en las perturbaciones consideradas son grandes y la sucesión de constantes converge a cero.

ii.- *Caso supercrítico*: en este caso las oscilaciones son pequeñas y la sucesión converge a la mejor constante de trazas sobre el dominio sin perturbar, es decir converge a $\Lambda(\alpha)$.

iii.- *Caso crítico*: es el caso más interesante observado. En este caso se observa que las amplitudes de las perturbaciones compensan las oscilaciones y esto se ve reflejado en la aparición de una función de peso ρ, que como veremos está directamente relacionada con el tipo de perturbaciones consideradas.

Comencemos describiendo el tipo de perturbaciones periódicas que vamos a considerar. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado, asumamos que la frontera $\partial\Omega$ es de clase C^1. Para $x_0 \in \partial\Omega$ consideramos un entorno $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 y una función $\Phi : U' \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, donde U' es abierto y conexo de modo que

$$\partial\Omega \cap U = \{(x_1, x') \in \mathbb{R}^n \colon x' \in U',\ x_1 = \Phi(x')\},$$
$$\Omega \cap U = \{(x_1, x') \in \mathbb{R}^n \colon x' \in U',\ x_1 < \Phi(x')\}.$$

Lo anterior describe localmente la frontera del conjunto Ω por medio de una función suave Φ. Ahora veamos como es la perturbación en cada una de los entornos antes mencionados, para esto consideramos una función $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y periódica con período en la celda $Y' = [0,1]^{n-1}$. Entonces describimos localmente los dominios perturbados Ω_ε como

$$\Omega_\varepsilon \cap U = \{(x_1, x') \in U : x' \in U',\ x_1 < \Phi(x') + \varepsilon^a f(\tfrac{x'}{\varepsilon})\} \tag{5.2}$$

y por lo tanto la descripción local de su frontera será

$$\partial\Omega_\varepsilon \cap U = \{(x_1, x') \in \mathbb{R}^N : x' \in U',\ x_1 = \Phi(x') + \varepsilon^a f(\tfrac{x'}{\varepsilon})\}.$$

Sabemos por el Teorema 4.2 y el Teorema 4.3 que existen para las constantes λ_ε extremales u_ε y las correspondientes ventanas optimales Γ_ε cumpliendo $\Gamma_\varepsilon = \{u_\varepsilon = 0\} \cap \partial\Omega_\varepsilon$.

Observamos también que la sucesión Ω_ε así obtenida converge al conjunto Ω en cualquier noción razonable de convergencia de conjuntos en $\mathbb{R}^n$ (por ejemplo en el sentido de la topología complementaria de Hausdorff o en la norma L^1 de las funciones características).

Como dijimos recién, el comportamiento asintótico esta fuertemente relacionado con las perturbaciones consideradas, más precisamente este comportamiento depende de la amplitud de las oscilaciones medidas en términos del parámetro $a > 0$. Tres casos aparecen:

i.- *Caso subcrítico*: corresponde a grandes oscilaciones con respecto al período $0 < a < 1$.

ii.- *Caso supercrítico*: las oscilaciones aquí son pequeñas en relación al período $a > 1$.

iii.- *Caso crítico*: es el caso mas interesante que se presenta, en este caso las oscilaciones y el período son del mismo orden $a = 1$.

El caso subcrítico corresponde a oscilaciones grandes, el problema degenera y la inmersión de la traza se pierde. Esto se ve reflejado en que la sucesión λ_ε converge a 0 cuando $\varepsilon \downarrow 0$.

Al contrario del caso anterior en este caso las oscilaciones son pequeñas, es decir para valores pequeños de ε las oscilaciones resultan ser imperceptibles y como consecuencia de esto la sucesión de problemas converge al problema sin perturbar.

Finalmente en el caso crítico las oscilaciones y los períodos se balancean produciendose el fenómeno de homogeneización en la frontera del dominio. Este fenómeno se manifiesta en la aparición de una función de peso en el la frontera en el espírtu de Cioranescu-Murat [12]. Este fenómeno puede observarse también en trabajos como en [23].

Teniendo en cuenta entonces las perturbaciones periódicas descritas anteriormente sobre el dominio Ω tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, acotado y asumamos que $\partial\Omega$ es de clase C^1. Sea $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ la familia de dominios perturbados descriptos en (5.2). Si $\Lambda_\varepsilon(\alpha)$ $(0 < \alpha < 1)$ es la mejor constante de trazas de Sobolev sobre Ω_ε dadas por (4.1) en el dominio Ω_ε.*

Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. (Caso subcrítico) *Si $a < 1$ entonces $\lim_{\varepsilon\to 0} \Lambda_\varepsilon(\alpha) = 0$, mas aún, tenemos el siguiente comportamiento asintótico*
$$\Lambda_\varepsilon(\alpha) \le C\varepsilon^{1-a}, \tag{5.3}$$
donde la constante C depende solo de la función f usada en la perturbación del dominio.

2. (Caso supercrítico) *Si* $a > 1$ *entonces* $\lim_{\varepsilon\to 0} \Lambda_\varepsilon(\alpha) = \Lambda(\alpha)$.

3. (Caso crítico) *Si* $a = 1$ *entonces* $\lim_{\varepsilon\to 0} \Lambda_\varepsilon(\alpha) = \Lambda_\rho(\alpha)$*, donde* $\Lambda_\rho(\alpha)$ *es definida como*

$$\Lambda_\rho(\alpha) := \inf\left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p\,dx}{\int_{\partial\Omega} |u|^p\,d\mu_\rho} : u \in W^{1,p}(\Omega),\ \mu_\rho(\{u=0\}\cap\partial\Omega) \geq \alpha\mu_\rho(\partial\Omega) \right\}, \tag{5.4}$$

y la medida μ_ρ *es dada por* $d\mu_\rho = \rho\, dS$ *con el peso* ρ *esta definido como*

$$\rho(x) = \frac{\int_Y \sqrt{1 + |\nabla\Phi(x') + \nabla f(y)|^2}\,dy}{\sqrt{1+|\nabla\Phi(x')|^2}}, \quad x \in U\cap\partial\Omega. \tag{5.5}$$

El resultado presentado arriba será, como veremos mas adelante un caso particular de un resultado mas general. Esto será como consecuencia de considerar perturbaciones mas generales que las periódicas, estas serán en realidad un caso particular de esta clase mas general que abarcará también a las desformaciones regulares consideradas en [16].

5.1.1. Estimaciones para el cambio de variables

Antes de presentar la demostración del Teorema 5.1, vamos a hacer un análisis presentando algunos resultados que nos indicarán porque las perturbaciones pueden ser mas generales que las periódicas presentadas anteriormente. Como veremos, será de fundamental importancia el comportamiento asintótico de los cambios de variable considerados, una vez estudiados estos comportamientos el análisis será independiente de la forma que tengan estos cambios.

Consideremos $\varepsilon > 0$ y definamos la transformación $T_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \Omega$ como

$$(y_1, y') = T_\varepsilon(x_1, x') = (x_1 - \varepsilon^a f(\tfrac{x'}{\varepsilon})\phi_\varepsilon(x), x'), \tag{5.6}$$

donde, como es usual, $x' = (x_2, \ldots, x_n)$ y $\phi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ esta soportada en $B_{\sqrt{\varepsilon}}(\partial\Omega) = \bigcup_{x\in\partial\Omega} B_{\sqrt{\varepsilon}}(x)$, $\phi_\varepsilon \equiv 1$ en $\partial\Omega$, $0 \leq \phi_\varepsilon \leq 1$, $|\nabla\phi_\varepsilon| \leq C\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$.

Calculamos ahora el diferencial de T_ε, DT_ε.

$$DT_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon^a f\partial_1\phi_\varepsilon & -\varepsilon^{a-1}\partial_2 f\phi_\varepsilon - \varepsilon^a f\partial_2\phi_\varepsilon & \cdots & -\varepsilon^{a-1}\partial_n f\phi_\varepsilon - \varepsilon^a f\partial_n\phi_\varepsilon \\ 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1\times n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Observemos que

$$DT_\varepsilon(x) = I_{n\times n} - \varepsilon^a f(\tfrac{x'}{\varepsilon})A_\varepsilon(x) - \varepsilon^{a-1}\phi_\varepsilon(x)B(\tfrac{x'}{\varepsilon}),$$

donde

$$A_\varepsilon(x) := \begin{pmatrix} \nabla\phi_\varepsilon(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B(x') := \begin{pmatrix} 0 & \nabla f(x') \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, ya que $||f||_\infty < \infty$ y $||\nabla f||_\infty < \infty$ tenemos que

$$||B||_\infty < \infty.$$

Mas aún, ya que $||\nabla\phi_\varepsilon||_\infty \leq C\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$, obtenemos

$$||A_\varepsilon||_\infty \leq C\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\chi_{\text{sop}(\phi_\varepsilon)}$$

y por lo tanto llamando $f_\varepsilon(x') = f(\frac{x'}{\varepsilon})$, obtenemos

$$||\varepsilon^a f_\varepsilon A_\varepsilon||_\infty \leq C\varepsilon^{a-\frac{1}{2}}\chi_{\text{sop}(\phi_\varepsilon)}.$$

Por otro lado, llamando $B_\varepsilon(x') = B(\frac{x'}{\varepsilon})$, tenemos

$$||\varepsilon^{a-1}\phi_\varepsilon B_\varepsilon||_\infty \leq C\varepsilon^{a-1}\chi_{\text{sop}(\phi_\varepsilon)}.$$

Observamos que cuando $a \geq 1$, tenemos que dado $K \subset \Omega$ conjunto compacto, $T_\varepsilon = id_{\mathbb{R}^n}$ sobre K para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. En particular

$$DT_\varepsilon = I_{n\times n} \quad \text{and} \quad JT_\varepsilon = 1$$

sobre K para $\varepsilon > 0$ pequeño, donde $JT_\varepsilon = |\det(DT_\varepsilon)|$ es el Jacobiano de T_ε.

Finalmente, en el caso $a > 1$, $T_\varepsilon \to id_{\mathbb{R}^n}$ en la norma C^1 y, como consecuencia, tenemos

$$DT_\varepsilon \rightrightarrows I_{n\times n}, \quad JT_\varepsilon \rightrightarrows 1 \quad \text{and} \quad J_\tau T_\varepsilon \rightrightarrows 1,$$

donde $J_\tau T_\varepsilon = |DT_\varepsilon^{-1}\mathbf{n}|JT_\varepsilon$ es el Jacobiano tangencial de T_ε, $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario de Ω y "$\rightrightarrows$" significa convergencia uniforme. Ver [30] para mas detalles sobre el Jacobiano tangencial.

Necesitamos estudiar ahora el comportamiento asintótico de Jacobiano tangencial en el caso $a = 1$. En este caso, para $x \in \partial\Omega$ teniendo en cuenta que $\phi_\varepsilon = 1$ sobre $\partial\Omega$ tenemos la siguiente expresión para el diferencial

$$DT_\varepsilon(x) = I_{n\times n} - B(\tfrac{x'}{\varepsilon}) + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}).$$

El siguiente lema da el preciso comportamiento asintótico del Jacobiano tangencial para este caso.

Lema 5.2. *Dada $g \in L^1(\partial\Omega)$, tenemos que*

$$\int_{\partial\Omega} gJ_\tau T_\varepsilon^{-1}\,dS \to \int_{\partial\Omega} g\rho\,dS, \text{ cuando } \varepsilon \to 0.$$

Esto es $J_\tau T_\varepsilon^{-1} \overset{*}{\rightharpoonup} \rho$ débil- en $L^\infty(\partial\Omega)$, donde ρ es la función definida por (5.5).*

Demostración. Sea $g \in C(\partial\Omega)$ una función arbitraria. Analizamos primero la convergencia localmente, por lo tanto recordamos la construcción de las perturbaciones. Entonces, sea $U \subset \mathbb{R}^n$ como en (5.2) y asumimos que $\mathrm{sop}(g) \subset U$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega\cap U} gJ_\tau T_\varepsilon^{-1}\,dS &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon\cap U}(g\circ T_\varepsilon)\,dS\\ &= \int_{U'}(g\circ T_\varepsilon)(x')\sqrt{1+|\nabla\Phi(x')+\nabla f(\tfrac{x'}{\varepsilon})|^2}\,dx'.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Pero

$$\int_{U'}(g\circ T_\varepsilon)(x')\sqrt{1+|\nabla\Phi(x')+\nabla f(\tfrac{x'}{\varepsilon})|^2}\,dx' = \int_{U'}(g\circ T_\varepsilon)(x')\rho_\varepsilon(x')\sqrt{1+|\nabla\Phi(x')|^2}\,dx',$$

donde

$$\rho_\varepsilon(x') := \rho(x',\tfrac{x'}{\varepsilon}),\quad \rho(x',y) := \frac{\sqrt{1+|\nabla\Phi(x')+\nabla f(y)|^2}}{\sqrt{1+|\nabla\Phi(x')|^2}}.$$

Usando que f es periódica con período Y, se sigue que $\rho(x',y)$ es periódica en y con período Y y por lo tanto

$$\rho_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \rho \quad \text{débil-* en } L^\infty(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Ver [3].

Por otro lado, ya que $T_\varepsilon \rightrightarrows id_{\mathbb{R}^n}$ se sigue que $(g\circ T_\varepsilon)\rightrightarrows g$ uniformemente sobre conjuntos compactos, en particular, $(g\circ T_\varepsilon)\to g$ en $L^1(U')$.

Combinando todo lo anterior llegamos a

$$\int_{U'}(g\circ T_\varepsilon)\rho_\varepsilon\sqrt{1+|\nabla\Phi|^2}\,dx' \to \int_{U'} g\rho\sqrt{1+|\nabla\Phi|^2}\,dx' = \int_{\partial\Omega} g\rho\,dS.$$

El caso en el que $g \in C(\partial\Omega)$ es arbitraria, se sigue por un argumento estándar usando partición de la unidad y es omitido aquí.

Finalmente si $g \in L^1(\partial\Omega)$ un argumento estándar de aproximación nos da el resultado deseado. □

Resumiendo lo anterior hemos demostrado el siguiente Teorema para las perturbaciones (5.6).

Teorema 5.3. *Sea $\{T_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ las transformaciones dadas por (5.6). Entonces se tienen las siguientes estimaciones:*

1. *Si $a > 1$, $T_\varepsilon \to id_{\mathbb{R}^n}$ en norma C^1 cuando $\varepsilon \to 0$. En consecuencia*

$$T_\varepsilon \rightrightarrows id_{\mathbb{R}^n},\ DT_\varepsilon \rightrightarrows I_{n\times n},\ JT_\varepsilon \rightrightarrows 1 \text{ y } J_\tau T_\varepsilon \rightrightarrows 1.$$

2. *Si $a = 1$, tenemos que para cualquier compacto $K \subset \Omega$ existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que*

$$T_\varepsilon|_K = id_K,$$

para cada $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Mas aún,

$$J_\tau T_\varepsilon^{-1} \stackrel{*}{\rightharpoonup} \rho \quad \text{débil-* en } L^\infty(\partial\Omega),$$

donde ρ es la función dada por (5.5).

Procedemos ahora a demostrar en las siguientes dos subsecciones el resultado expresado en el Teorema 5.1.

5.1.2. Caso subcrítico ($a < 1$)

El caso subcrítico resulta ser como veremos a continuación, el más simple de los tres casos a demostrar, en efecto

Demostración. Sea $\alpha \in (0, 1)$ y tomemos $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ como la clausura de un conjunto relativamente abierto y conexo tal que $|\Gamma_0|_{n-1} > \alpha|\partial\Omega|_{n-1}$.

Dado $\delta > 0$, consideramos los conjuntos $U_\delta = B_\delta(\Gamma_0)$ definidos como

$$U_\delta := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \mathrm{dist}(x, \Gamma_0) < \delta\}$$

y tomamos $\Gamma_1 \subset \partial\Omega \setminus \overline{U}_{2\delta}$ tal que $|\Gamma_1|_{n-1} > 0$.

Sea ahora $\phi \in C^1(\bar{\Omega})$ tal que $\phi \equiv 0$ en U_δ, $\phi \equiv 1$ en $\Omega \setminus U_{2\delta}$ y $0 \le \phi \le 1$, $|\nabla\phi| \le C\delta^{-1}$ en $U_{2\delta} \setminus U_\delta$.

Observe que si denotamos por $\Gamma_{0,\varepsilon} \subset \partial\Omega_\varepsilon$ a la porción de la frontera de Ω_ε que proviene de perturbar Γ_0, se tiene que $\phi \equiv 0$ en $\Gamma_{0,\varepsilon}$ por cada $\varepsilon > 0$ pequeño. Más aún, es fácil ver que $|\Gamma_{0,\varepsilon}|_{n-1} \ge \alpha|\partial\Omega_\varepsilon|_{n-1}$. Entonces, ϕ es admisible en la caracterización de $\lambda(\Gamma_{0,\varepsilon})$. Como consecuencia de esto, tenemos la siguiente estimación:

$$\lambda_\varepsilon(\alpha) \le \lambda(\Gamma_{0,\varepsilon}) \le \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\phi|^p + |\phi|^p \, dx}{\int_{\partial\Omega_\varepsilon} |\phi|^p \, dS}.$$

El anterior cociente puede ser fácilmente estimado, en efecto tenemos

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\phi|^p \, dx \le C|\Omega_\varepsilon|_n, \qquad \int_{\Omega_\varepsilon} |\phi|^p \, dx \le |\Omega_\varepsilon|_n, \tag{5.8}$$

con $C = C(\delta)$.

Por otro lado,

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} |\phi|^p \, dS \ge \int_{\partial\Omega_\varepsilon \setminus \bar{U}_{2\delta}} |\phi|^p \, dS = |\partial\Omega_\varepsilon \setminus \bar{U}_{2\delta}|_{n-1} \ge |\Gamma_{1,\varepsilon}|_{n-1}, \tag{5.9}$$

donde $\Gamma_{1,\varepsilon}$ representa la perturbación obtenida a partir de $\Gamma_1 \subset \partial\Omega \setminus \bar{U}_{2\delta}$.

Pero,

$$\begin{aligned} |\Gamma_{1,\varepsilon}|_{n-1} &= \int_{U'} \sqrt{1 + \left|\nabla\Phi(x') + \varepsilon^{a-1}\nabla f(\tfrac{x'}{\varepsilon})\right|^2}\, dx' \\ &= \varepsilon^{a-1} \int_{U'} \sqrt{\varepsilon^{2(1-a)} + \left|\varepsilon^{1-a}\nabla\Phi(x') + \nabla f(\tfrac{x'}{\varepsilon})\right|^2}\, dx'. \end{aligned}$$

Estimamos ahora la última integral en la anterior desigualdad.

$$\begin{aligned} &\int_{U'} \sqrt{\varepsilon^{2(1-a)} + \left|\varepsilon^{1-a}\nabla\Phi(x') + \nabla f(\tfrac{x'}{\varepsilon})\right|^2}\, dx' \\ &\quad = \int_{U'} \left(\sqrt{\varepsilon^{2(1-a)} + \left|\varepsilon^{1-a}\nabla\Phi(x') + \nabla f(\tfrac{x'}{\varepsilon})\right|^2} - |\nabla f(\tfrac{x'}{\varepsilon})| \right) + |\nabla f(\tfrac{x'}{\varepsilon})|\, dx'. \end{aligned}$$

Si ahora denotamos por $\rho_\varepsilon(x') = \sqrt{\varepsilon^{2(1-a)} + \left|\varepsilon^{1-a}\nabla\Phi(x') + \nabla f(\tfrac{x'}{\varepsilon})\right|^2} - |\nabla f(\tfrac{x'}{\varepsilon})|$, no es difícil ver que $|\rho_\varepsilon(x')| \leq \varepsilon^{1-a}(1 + |\nabla\Phi(x')|)$, de donde se sigue que

$$\int_{U'} \left(\sqrt{\varepsilon^{2(1-a)} + \left|\varepsilon^{1-a}\nabla\Phi(x') + \nabla f(\tfrac{x'}{\varepsilon})\right|^2} - |\nabla f(\tfrac{x'}{\varepsilon})| \right) dx' \to 0 \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0.$$

Finalmente, debido a la periodicidad de f, concluimos que

$$\int_{U'} |\nabla f(\tfrac{x'}{\varepsilon})|\, dx' \to \int_Y |\nabla f(y)|\, dy =: \overline{|\nabla f|} > 0.$$

Estas estimaciones nos permiten concluir que,

$$|\Gamma_{1,\varepsilon}|_{n-1} \geq \varepsilon^{a-1} \frac{\overline{|\nabla f|}}{2}, \tag{5.10}$$

por cada $\varepsilon > 0$ pequeño.

Ahora, de (5.8), (5.9) y (5.10), obtenemos que

$$\lambda_\varepsilon(\alpha) \leq C\varepsilon^{1-a} \to 0 \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0$$

como deseabamos mostrar. □

5.1.3. Casos crítico y supercrítico ($a \geq 1$)

Ahora, teniendo en cuenta el Teorema 5.3 notamos que los casos crítico y supercrítico enunciados en el Teorema 5.1 resultan ser casos particulares de un resultado más general.

En realidad si $T_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \Omega$ es una familia de pertubaciones que cumplen con la siguiente condición

$$\begin{cases} T_\varepsilon = id_{\mathbb{R}^n}. & \text{sobre cada conjunto compacto } K \subset \Omega \text{ para } \varepsilon < \varepsilon_0(K) \\ J_\tau T_\varepsilon^{-1} \overset{*}{\rightharpoonup} \rho, & \text{débilmente* en } L^\infty(\partial\Omega) \text{ cuando } \varepsilon \to 0, \end{cases} \tag{5.11}$$

donde $\rho \in L^\infty(\partial\Omega)$. Tenemos entonces el siguiente resultado.

Teorema 5.4. *Sea $\{T_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ una familia de perturbaciones que satisfacen la condición (5.11). Entonces*

$$\Lambda_\varepsilon(\alpha) \to \Lambda_\rho(\alpha), \text{ cuando } \varepsilon \to 0,$$

donde $\Lambda_\varepsilon(\alpha)$ es dada por (4.1) sobre Ω_ε y $\Lambda_\rho(\alpha)$ es dada por

$$\Lambda_\rho(\alpha) = \text{ínf}\left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p\, dx}{\int_{\partial\Omega} |u|^p\, d\mu_\rho} : u \in W^{1,p}(\Omega),\ \mu_\rho(\{u=0\} \cap \partial\Omega) \geq \alpha\mu_\rho(\partial\Omega) \right\}. \tag{5.12}$$

Aquí la medida μ_ρ esta dada por $d\mu_\rho = \rho\, dS$.

Más aún, si u_ε es una autofunción asociada a $\Lambda_\varepsilon(\alpha)$ normalizada como $\|u_\varepsilon\|_{L^p(\partial\Omega_\varepsilon)} = 1$, entonces la sucesión $\{u_\varepsilon \circ T_\varepsilon^{-1}\}_{\varepsilon>0} \subset W^{1,p}(\Omega)$ es débilmente precompacta y cada punto de acumulación es una autofunción para $\Lambda_\rho(\alpha)$.

Observación 5.5. Claramente las conclusiones en el Teorema 5.4 implican los casos supercrítico ($a > 1$) y crítico ($a = 1$) del Teorema 5.1. El Teorema 5.4 implica además el Teorema 6.2 en [16].

Antes de comenzar con la demostración del teorema, nos es necesario hacer algunas observaciones. En efecto, sean los dominios abiertos $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$, supongamos también que existe un difeomorfismo $T : \Omega_1 \to \Omega_2$. Este difeomorfismo induce, a su vez el mapa $\mathcal{T} : W^{1,p}(\Omega_2) \to W^{1,p}(\Omega_1)$ definido como

$$\mathcal{T} : W^{1,p}(\Omega_2) \to W^{1,p}(\Omega_1), \quad \mathcal{T}(u) = u \circ T.$$

Esta aplicación así definida resulta ser lineal, continua e invertible con $\mathcal{T}^{-1}v = v \circ T^{-1}$. Más aún una simple aplicación del Teorema de Cambio de Variables permite concluir las siguientes estimaciones claves

$$\int_{\Omega_1} |\mathcal{T} u|^p\, dx \leq \|JT^{-1}\|_\infty \int_{\Omega_2} |u|^p\, dx \tag{5.13}$$

y

$$\int_{\Omega_1} |\nabla(\mathcal{T} u)|^p\, dx \leq \|JT^{-1}\|_\infty \|DT\|_\infty \int_{\Omega_2} |\nabla u|^p\, dy. \tag{5.14}$$

Si consideramos ahora las perturbaciones $T_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \Omega$ satisfaciendo las condiciones (5.11), tenemos entonces asociadas a estas los correspondientes mapeos $\mathcal{T}_\varepsilon : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$, los cuales son lineales, invertibles y, gracias a las estimaciones (5.13) y (5.14) resultan también bicontinuos.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, definimos las funciones

$$Q_\varepsilon : W^{1,p}(\Omega_\varepsilon) \to \mathbb{R}, \quad Q : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

por

$$Q_\varepsilon(u) = \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^p + |u|^p dx \quad \text{y} \quad Q(v) = \int_\Omega |\nabla v|^p + |v|^p\, dy.$$

Ahora, consideramos las funciones $\tilde{Q}_\varepsilon : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definidas por $\tilde{Q}_\varepsilon = Q_\varepsilon \circ \mathcal{T}_\varepsilon$ e introducimos los conjuntos

$$X_\alpha^\varepsilon := \{u \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon) \colon |\{u = 0\} \cap \partial\Omega_\varepsilon|_{n-1} \geq \alpha|\partial\Omega_\varepsilon|_{n-1} \text{ y } \|u_\varepsilon\|_{L^p(\partial\Omega_\varepsilon)} = 1\}, \tag{5.15}$$

$$\tilde{X}_\alpha^\varepsilon := \mathcal{T}_\varepsilon(X_\alpha^\varepsilon) = \{v \in W^{1,p}(\Omega) \colon v \circ T_\varepsilon \in X_\alpha^\varepsilon\}, \tag{5.16}$$

$$X_\alpha^\rho := \{v \in W^{1,p}(\Omega) \colon \mu_\rho(\{v = 0\} \cap \partial\Omega) \geq \alpha\mu_\rho(\partial\Omega) \text{ y } \|v\|_{L^p(d\mu_\rho)} = 1\}, \tag{5.17}$$

donde $d\mu_\rho = \rho\, dS$. Con todas estas notaciones mencionadas anteriormente, podemos ahora escribir las constantes óptimas de la siguiente forma

$$\Lambda_\varepsilon(\alpha) = \inf_{u \in X_\alpha^\varepsilon} Q_\varepsilon(u) = \inf_{v \in \tilde{X}_\alpha^\varepsilon} \tilde{Q}_\varepsilon(v) \quad \text{y} \quad \Lambda_\rho(\alpha) = \inf_{v \in X_\alpha^\rho} Q(v). \tag{5.18}$$

Teniendo en cuenta las nuevas expresiones para las constantes óptimas, vemos que ahora los espacios sobre los cuales se toma el ínfimo son espacios variables, por lo tanto necesitaremos algun resultado acerca de la convergencia de estos espacios. En efecto, teniendo en cuenta los espacios $\tilde{X}_\alpha^\varepsilon$ y X_α^ρ definidos en (5.16) y (5.17) respectivamente, el siguiente lema nos da la deseada convergencia.

Lema 5.6. *Sean $\tilde{X}_\alpha^\varepsilon, X_\alpha^\rho \subset W^{1,p}(\Omega)$ los conjuntos definidos en (5.16) y (5.17) respectivamente. Entonces, dado $v_\varepsilon \in \tilde{X}_\alpha^\varepsilon$ tal que $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ débil en $W^{1,p}(\Omega)$, se sigue que $v \in X_\alpha^\rho$.*

Reciprocamente, por cada $v \in X_\alpha^\rho$ existe una sucesión $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\varepsilon_k \downarrow 0$ y $v_k \in \tilde{X}_\alpha^{\varepsilon_k}$ tal que $v_k \rightharpoonup v$ débil en $W^{1,p}(\Omega)$. Más aún, la sucesión converge fuerte en $W^{1,p}(\Omega)$.

Observación 5.7. El resultado del anterior lema nos dice que la sucesión de conjuntos $\tilde{X}_\alpha^\varepsilon$ convergen en el sentido Mosco a el conjunto X_α^ρ. El lector interesado en este concepto de convergencia de conjuntos puede consultar en [30, 36].

Demostración. Sea $v \in X_\alpha^\rho$ y $\Gamma = \{v = 0\} \cap \partial\Omega$.

Dado $k \in \mathbb{N}$ definimos $\tilde{v}_k := \max\{v - \frac{1}{k}, 0\}$. Entonces, $\Gamma_k = \{\tilde{v}_k = 0\} \cap \partial\Omega$ verifican que $\mu_\rho(\Gamma_k) > \mu_\rho(\Gamma)$ (recordar que el peso ρ es estrictamente positivo). Así, existe $\rho_k > 0$ tal que

$$\mu_\rho(\Gamma_k) \geq (1 + \rho_k)\alpha\mu_\rho(\partial\Omega). \tag{5.19}$$

No es difícil verificar que $\tilde{v}_k \to v$ fuerte en $W^{1,p}(\Omega)$ cuando $k \to \infty$.

Ahora sea $t_{k,\varepsilon} > 0$ tal que $v_{k,\varepsilon} := t_{k,\varepsilon}\tilde{v}_k$ verifica que $\|v_{k,\varepsilon} \circ T_\varepsilon\|_{L^p(\partial\Omega_\varepsilon)} = 1$. Es fácil ver que $\tilde{v}_k \to v$ $(k \to \infty)$ fuerte en $L^p(\partial\Omega)$ implica que $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\lim_{k\to\infty} t_{k,\varepsilon}) \to 1$. Así, tenemos que $v_{k,\varepsilon} \to v$ fuerte en $W^{1,p}(\Omega)$ cuando $k \to \infty$ y $\varepsilon \downarrow 0$.

Resta comprobar que dado $k \in \mathbb{N}$ existe ε_k con $\varepsilon_k \downarrow 0$ tal que $v_k := v_{k,\varepsilon_k} \in \tilde{X}_\alpha^{\varepsilon_k}$ y para esto solo tenemos que ver que

$$\mu_{\varepsilon_k}(\Gamma_k) \geq \alpha\mu_{\varepsilon_k}(\partial\Omega),$$

donde $\Gamma_k = \{v_k = 0\} \cap \partial\Omega = \{\tilde{v}_k = 0\} \cap \partial\Omega$ y $d\mu_\varepsilon = J_\tau T_\varepsilon dS$.

Pero ya que $\mu_\varepsilon(A) \to \mu_\rho(A)$ por cada $dS-$medible $A \subset \partial\Omega$, tenemos que existe ε_k tal que

$$\mu_{\varepsilon_k}(\Gamma_k) \geq (1 + \rho_k)^{-\frac{1}{2}}\mu_\rho(\Gamma_k) \quad \text{y} \quad \mu_\rho(\partial\Omega) \geq (1 + \rho_k)^{-\frac{1}{2}}\mu_{\varepsilon_k}(\partial\Omega). \tag{5.20}$$

Combinando (5.19) y (5.20) concluimos que

$$\begin{aligned}\mu_{\varepsilon_k}(\Gamma_k) &\geq (1+\rho_k)^{-\frac{1}{2}}\mu_\rho(\Gamma_k)\\ &\geq (1+\rho_k)^{\frac{1}{2}}\alpha\mu_\rho(\partial\Omega)\\ &\geq \alpha\mu_{\varepsilon_k}(\partial\Omega).\end{aligned}$$

Ahora necesitamos ver que si $v_\varepsilon \in \tilde{X}^\varepsilon_\alpha$ es tal que $v_\varepsilon \rightharpoonup v$, entonces $v \in X^\rho_\alpha$. Pero, esto es una inmediata consecuencia del Lemma B.4.

De hecho, el Lemma B.4 es aplicado a las funciones $v_\varepsilon, v \in W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\partial\Omega)$ (recordemos que asumimos que $v_\varepsilon \to v\ dS-$c.t.p. en $\partial\Omega$) y a las medidas

$$d\mu_\varepsilon = J_\tau T_\varepsilon^{-1} dS, \quad d\mu_\rho = \rho dS, \quad d\nu = dS.$$

Como consecuencia, obtenemos

$$\begin{aligned}\mu_\rho(\{v=0\}\cap\partial\Omega) &\geq \limsup_{\varepsilon\to 0}\mu_\varepsilon(\{v_\varepsilon=0\}\cap\partial\Omega) = \limsup_{\varepsilon\to 0}\int_{\{v_\varepsilon=0\}\cap\partial\Omega} J_\tau T_\varepsilon^{-1}\, dS\\ &= \limsup_{\varepsilon\to 0}|\{v_\varepsilon\circ T_\varepsilon=0\}\cap\partial\Omega_\varepsilon|_{n-1}\\ &\geq \limsup_{\varepsilon\to 0}\alpha|\partial\Omega_\varepsilon|_{n-1} = \alpha\mu_\rho(\partial\Omega).\end{aligned}$$

Lo que concluye la demostración. □

Comenzamos ahora la demostración del Teorema 5.4 que tiene como ingrediente principal el concepto de $\Gamma-$convergencia introducido en el Apéndice A.

Más concretamente, en vista del aspecto que tienen las constantes óptimas en (5.18), la idea de la demostración es aplicar el Teorema A.6 a las funciones $J_\varepsilon, J\colon L^p(\Omega) \to (-\infty,+\infty]$ definidas como

$$J_\varepsilon(v) := \begin{cases}\tilde{Q}_\varepsilon(v) & \text{si } v\in\tilde{X}^\varepsilon_\alpha\\ +\infty & \text{en otro caso,}\end{cases} \tag{5.21}$$

$$J(v) := \begin{cases}Q(v) & \text{si } v\in X^\rho_\alpha\\ +\infty & \text{en otro caso.}\end{cases} \tag{5.22}$$

Desafortunadamente no somos capaces de probar la $\Gamma-$convergencia de las funciones antes mencionadas en toda su generalidad, de hecho solo podremos probar la $\Gamma-$ convergencia para el caso supercrítico, que para este marco general será el caso $T_\varepsilon \to id_{\mathbb{R}^n}$ en la topología del espacio C^1. Sin embargo, para el caso general podemos aplicar el Teorema A.8, que si bien es más restrictivo, alcanza para obtener la convergencia de los mínimos.

Prueba del Teorema 5.4. Como dijimos más arriba, debemos comprobar las hipótesis del Teorema A.8 a las funciones $J_\varepsilon, J\colon L^p(\Omega) \to (-\infty,+\infty]$ definidas como en (5.21) y (5.22) respectivamente. En efecto probaremos que

- por cada sucesión $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset L^p(\Omega)$ de mínimos de $\{J_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ tal que $v_\varepsilon \to v$ en $L^p(\Omega)$, se tiene que
$$J(v) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(v_\varepsilon).$$
- Además, por cada $v \in L^p(\Omega)$, existe $v_k \in L^p(\Omega)$ y $\varepsilon_k \downarrow 0$ tal que $v_k \to v$ en $L^p(\Omega)$ y
$$J(v) \geq \limsup_{k\to\infty} J_{\varepsilon_k}(v_k).$$

Dividimos la prueba en dos partes.

Desigualdad del límite inferior: Sea $v_\varepsilon \in \tilde{X}^\varepsilon_\alpha$ tal que $\tilde{Q}_\varepsilon(v_\varepsilon) = \inf_{\tilde{X}^\varepsilon_\alpha} \tilde{Q}_\varepsilon$ y asumimos que $v_\varepsilon \to v$ en $L^p(\Omega)$ cuando $\varepsilon \downarrow 0$ para algún $v \in X^\rho_\alpha$. Asumimos que
$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \tilde{Q}_\varepsilon(v_\varepsilon) < +\infty, \tag{5.23}$$
de otra forma no hay nada que probar. Es inmediato ver que (5.13) y (5.14) implican que
$$\|v_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)} = Q(v_\varepsilon) \leq C\tilde{Q}_\varepsilon(v_\varepsilon)$$
y así, por (5.23) concluimos que $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ es acotado en $W^{1,p}(\Omega)$ y, ya que $v_\varepsilon \to v$ en $L^p(\Omega)$ fácilmente se sigue que $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ débil en $W^{1,p}(\Omega)$.

Ya que $v_\varepsilon \to v$ fuerte en $L^p(\Omega)$ y $JT_\varepsilon \to 1$ c.t.p en Ω y es uniformemente acotada se sigue que
$$\int_\Omega |v_\varepsilon|^p JT_\varepsilon^{-1}\,dx \to \int_\Omega |v|^p\,dx, \text{ cuando } \varepsilon \downarrow 0. \tag{5.24}$$
Tomando en cuenta las expresiones de $\tilde{Q}_\varepsilon(v_\varepsilon)$ y $Q(v)$, resta demostrar que
$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |\nabla v_\varepsilon(DT_\varepsilon \circ T_\varepsilon^{-1})|^p JT_\varepsilon^{-1}\,dx \geq \int_\Omega |\nabla v|^p\,dx. \tag{5.25}$$
Mostramos primero que $\nabla v_\varepsilon \to \nabla v$ c.t.p. en Ω. Para este fin necesitamos que la sucesión $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ sea una sucesión de mínimos para $\tilde{Q}_\varepsilon$ y por lo tanto estas verifican la ecuación de Euler-Lagrange asociada a la función $\tilde{Q}_\varepsilon$. Esto es
$$\begin{aligned}\int_\Omega (|\nabla v_\varepsilon(DT_\varepsilon \circ T_\varepsilon^{-1})|^{p-2}\nabla v_\varepsilon(DT_\varepsilon \circ T_\varepsilon^{-1})\cdot\nabla\psi + |v_\varepsilon|^{p-2}v_\varepsilon\psi)JT_\varepsilon^{-1}\,dx \\ = \lambda_\varepsilon(\alpha)\int_{\partial\Omega} |v_\varepsilon|^{p-2}v_\varepsilon\psi J_\tau T_\varepsilon^{-1}\,dS,\end{aligned}$$
para cada $\psi \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega)$.

Tomando ahora $K \subset \Omega$ un conjunto compacto, sea $\delta = \frac{1}{2}d(K,\partial\Omega)$ y escribimos $K_\delta = \{x \in \Omega\colon d(x,K) < \delta\}$. Por lo tanto $K \subset K_\delta \subset\subset \Omega$ y si ε es suficientemente pequeño, tenemos que $T_\varepsilon = id_{\mathbb{R}^n}$ en K_δ.

Observe ahora que si $\psi_0 \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega)$ e tal que $\mathrm{sop}(\psi_0) \subset K_\delta$, entonces
$$\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^{p-2}\nabla v_\varepsilon\nabla\psi_0 + |v_\varepsilon|^{p-2}v_\varepsilon\psi_0\,dx = 0.$$

Consideramos $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ se tal que $\eta = 1$ en K, $\mathrm{sop}(\eta) \subset K_\delta$ y $0 \leq \eta \leq 1$ en $K_\delta \setminus K$.

Por lo tanto, para $\psi_\varepsilon = \eta(v_\varepsilon - v)$, tenemos

$$\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^{p-2}\nabla v_\varepsilon \nabla\psi_\varepsilon + |v_\varepsilon|^{p-2}v_\varepsilon\psi_\varepsilon\, dx = 0,$$

esto es

$$\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^{p-2}\nabla v_\varepsilon(v_\varepsilon - v)\nabla\eta + |\nabla v_\varepsilon|^{p-2}\nabla v_\varepsilon\nabla(v_\varepsilon - v)\eta + |v_\varepsilon|^{p-2}v_\varepsilon\eta(v_\varepsilon - v)\, dx = 0. \tag{5.26}$$

Ya que $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ débil en $W^{1,p}(\Omega)$ tenemos que $\|\nabla v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq C$, así por la desigualdad de Hölder,

$$\left|\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^{p-2}\nabla v_\varepsilon(v_\varepsilon - v)\nabla\eta\, dx\right| \leq \|\nabla\eta\|_\infty C\|v_\varepsilon - v\|_{L^p(\Omega)}. \tag{5.27}$$

Por otro lado, ya que $\|v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq C$, de nuevo por la desigualdad de Hölder,

$$\left|\int_\Omega |v_\varepsilon|^{p-2}v_\varepsilon\eta(v_\varepsilon - v)\, dx\right| \leq \|\eta\|_\infty C\|v_\varepsilon - v\|_{L^p(\Omega)}. \tag{5.28}$$

De (5.26), (5.27) y (5.28) obtenemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{K_\delta} |\nabla v_\varepsilon|^{p-2}\nabla v_\varepsilon\nabla(v_\varepsilon - v)\eta\, dx = 0. \tag{5.29}$$

Más aún, ya que $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ débil en $W^{1,p}(\Omega)$ tenemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{K_\delta} |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla(v_\varepsilon - v)\eta\, dx = 0. \tag{5.30}$$

Combinando (5.29) y (5.30) llegamos a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{K_\delta} (|\nabla v_\varepsilon|^{p-2}\nabla v_\varepsilon - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\nabla(v_\varepsilon - v)\eta\, dx = 0.$$

Es un hecho conocido (ver [39]) que el integrando es no negativo, y por lo tanto $(|\nabla v_\varepsilon|^{p-2}\nabla v_\varepsilon - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\nabla(v_\varepsilon - v) \to 0$ a.e. in K. De esto fácilmente concluimos que $\nabla v_\varepsilon \to \nabla v$ c.t.p. en K. Ya que K es arbitrario en Ω concluimos la convergencia puntual de los gradientes c.t.p. en Ω.

De la convergencia puntual de los gradientes la conclusión de la desigualdad del límite inferior se sigue fácilmente. En efecto, ya que $JT_\varepsilon \to 1$ y $DT_\varepsilon \to I$ c.t.p. en Ω tenemos

$$|\nabla v_\varepsilon(DT_\varepsilon \circ T_\varepsilon^{-1})|^p JT_\varepsilon^{-1} \to |\nabla v|^p \text{ c.t.p. en } \Omega.$$

Este último hecho junto con el Lema de Fatou implican que (5.25) se cumple.

Desigualdad del límite superior: Dada $v \in X_\alpha^\rho$, sea $v_k \in \tilde{X}_\alpha^{\varepsilon_k}$ tal que $v_k \to v$ fuerte en $W^{1,p}(\Omega)$. Observemos que la sucesión existe por el Lema 5.6.

Ahora esto y nuestra hipótesis sobre T_ε implican fácilmente que

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{Q}_{\varepsilon_k}(v_k) = Q(v).$$

La demostración queda entonces completa. □

5.1.4. Convergencia de las ventanas óptimas

Terminamos esta primera mitad del capítulo demostrando la convergencia de las ventanas óptimas. Este resultado, como veremos, será directa consecuencia de la convergencia de las constantes óptimas $\Lambda_\varepsilon(\alpha)$ obtenida en la sección anterior, en el siguiente teorema queda expresado el sentido en el cual tenemos la convergencia antes mencionada.

Teorema 5.8. *Bajo las mismas hipótesis y notaciones que el Teorema 5.4, si $\Gamma_\varepsilon \subset \Omega_\varepsilon$ son las ventanas óptimas asociadas a $\Lambda_\varepsilon(\alpha)$ entonces, salvo subsucesión, estas convergen cuando $\varepsilon \downarrow 0$ a la ventana óptima del problema límite $\Lambda_\rho(\alpha)$ en el siguiente sentido: definimos las medidas de Radon $\{\nu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ como*

$$d\nu_\varepsilon = \chi_{\Gamma_\varepsilon}\, dS.$$

Entonces, la familia es precompacta en la topología débil de medidas, y cada punto de acumulación de $\{\nu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ tiene la siguiente forma

$$d\nu^* = \chi_{\Gamma_\rho}\rho\, dS,$$

donde Γ_ρ es una ventana óptima para el problema (5.12).

Demostración. Sea $u_\varepsilon \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$ un extremal para $\Lambda_\varepsilon(\alpha)$. Podemos asumir que $u_\varepsilon \in X_\alpha^\varepsilon$. Entonces por el Teorema 4.3, tenemos que $\{u_\varepsilon = 0\} \cap \Omega_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon$ es una ventana óptima para $\Lambda_\varepsilon(\alpha)$, y por lo tanto esta verifica $|\Gamma_\varepsilon|_{n-1} = \alpha|\Omega_\varepsilon|_{n-1}$.

Consideremos ahora las funciones reescaladas $v_\varepsilon := u_\varepsilon \circ T_\varepsilon^{-1}$. Entonces v_ε es un extremal de $\tilde{Q}_\varepsilon$ en el conjunto $\tilde{X}_\alpha^\varepsilon$.

Teniendo en cuenta ahora el Teorema 5.4 sabemos que $\Lambda_\varepsilon(\alpha) \to \Lambda_\rho(\alpha)$, y en consecuencia la sucesión de extremales reescalados v_ε esta uniformemente acotada en ε. Luego podemos asumir que existe $v \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ débil en $W^{1,p}(\Omega)$, $v \in X_\alpha^\rho$ y v es extremal para $\Lambda_\rho(\alpha)$. En particular

$$\mu_\rho(\{v = 0\} \cap \partial\Omega) = \alpha\mu_\rho(\partial\Omega).$$

Por otro lado,

$$|\{u_\varepsilon = 0\} \cap \partial\Omega_\varepsilon|_{n-1} = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \chi_{\{u_\varepsilon=0\}}\, dS = \int_{\partial\Omega} \chi_{\{v_\varepsilon=0\}} J_\tau T_\varepsilon^{-1}\, dS.$$

Si denotamos por μ_ε a la medida $d\mu_\varepsilon = J_\tau T_\varepsilon^{-1}\, dS$ sobre $\partial\Omega$, tenemos que

$$\mu_\varepsilon(\{v_\varepsilon = 0\} \cap \partial\Omega) = \alpha|\partial\Omega_\varepsilon|_{n-1} = \alpha\mu_\varepsilon(\partial\Omega),$$

y, ya que $J_\tau T_\varepsilon^{-1} \overset{*}{\rightharpoonup} \rho$ débil-* en $L^\infty(\partial\Omega)$, se tiene que

$$\mu_\varepsilon(A) \to \mu_\rho(A),$$

por cada $A \subset \partial\Omega$ medible. En particular, $\mu_\varepsilon(\partial\Omega) \to \mu^*(\partial\Omega)$.

De toda esta discusión concluimos que

$$\mu_\varepsilon(\{v_\varepsilon = 0\} \cap \partial\Omega) \to \mu_\rho(\{v = 0\} \cap \partial\Omega).$$

Estamos ahora en condiciones de aplicar el Lema B.4 y concluir que

$$\mu_\varepsilon([\{v_\varepsilon = 0\}\triangle\{v = 0\}] \cap \partial\Omega) \to 0.$$

Sea ahora Γ_ε una ventana óptima y sea $u_\varepsilon \in X^\varepsilon_\alpha$ un extremal asociado. Sea $v_\varepsilon = u_\varepsilon \circ T_\varepsilon^{-1}$ el extremal reescalado como se describio previamente. De nuevo, podemos asumir que $v_\varepsilon \to v$ c.t.p. en $\partial\Omega$, donde $v \in X^\rho_\alpha$ es un extremal asociado a $\Lambda_\rho(\alpha)$.

Sea $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\begin{aligned}
\int f\,d\nu_\varepsilon - \int f\,d\nu^* &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} f\chi_{\{u_\varepsilon=0\}}\,dS - \int_{\partial\Omega} f\chi_{\{v=0\}}\rho\,dS \\
&= \int_{\partial\Omega} (f\circ T_\varepsilon^{-1})\chi_{\{v_\varepsilon=0\}}\,d\mu_\varepsilon - \int_{\partial\Omega} f\chi_{\{v=0\}}\,d\mu^* \\
&= \int_{\partial\Omega} (\chi_{\{v_\varepsilon=0\}} - \chi_{\{v=0\}})(f\circ T_\varepsilon^{-1})\,d\mu_\varepsilon \\
&+ \int_{\partial\Omega} \chi_{\{v=0\}}[(f\circ T_\varepsilon^{-1}) - f]\,d\mu_\varepsilon \\
&+ \int_{\partial\Omega} \chi_{\{v=0\}} f(d\mu_\varepsilon - d\mu^*) \\
&= A_\varepsilon + B_\varepsilon + C_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Se puede probar fácilmente que cada uno de estos términos converge a cero. En efecto

$$|A_\varepsilon| \le \|f\|_\infty \mu_\varepsilon([\{v_\varepsilon = 0\}\triangle\{v = 0\}] \cap \partial\Omega) \to 0,$$

gracias al Lema B.4. Por otro lado

$$|B_\varepsilon| \le \|(f\circ T_\varepsilon^{-1}) - f\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\mu_\varepsilon(\partial\Omega) \to 0,$$

ya que $\mu_\varepsilon(\partial\Omega)$ es convergente (y por lo tanto acotada) y $f\circ T_\varepsilon^{-1} \rightrightarrows f$ sobre compactos.

Finalmente, usando que $\mu_\varepsilon \rightharpoonup \mu_\rho$ débil en el sentido de convergencia de medidas, se sigue que

$$|C_\varepsilon| \to 0.$$

Esto completa la demostración del teorema. □

5.2. Comportamiento asintótico para $\Lambda_s(\sigma,\alpha)$ y $\Lambda_s(\alpha)$

Nos ocupamos en esta segunda mitad del capítulo de estudiar la convergencia de los problemas óptimos que definen las constantes $\Lambda_s(\sigma,\alpha)$ y $\Lambda_s(\alpha)$.

5.2.1. Conexión entre $\Lambda_s(\sigma,\alpha)$ y $\Lambda_s(\alpha)$

Comenzaremos mostrando, como dijimos en la introducción de este capítulo, la conexión existente entre el problema del obstáculo fuerte y el problema del obstáculo débil. Más precisamente, haremos rigurosa esta conexión mostrando que $\Lambda_s(\alpha,\sigma) \to \Lambda_s(\alpha)$, cuando $\sigma \to \infty$. El siguiente teorema muestra esta conexión.

Teorema 5.9. *Sea $0 < s < 1 < p < \infty$ y $0 < \alpha < 1$ fijo. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera Lipschitz y $\Lambda_s(\alpha)$ y $\Lambda_s(\sigma,\alpha)$ las constantes definidas en (4.27) y (4.37) respectivamente. Entonces*

$$\lim_{\sigma\to\infty} \Lambda_s(\sigma,\alpha) = \Lambda_s(\alpha).$$

Más aún, si denotamos por $(u_\sigma, \chi_{D_\sigma}) \in W^{s,p}(\Omega) \times \mathcal{B}_\alpha$ un par óptimo para $\Lambda_s(\sigma,\alpha)$, entonces la familia $\{(u_\sigma, \chi_{D_\sigma})\}_{\sigma>0}$ es precompacta en la topología fuerte de $W^{s,p}(\Omega)$ en la primera variable y en la topología débil de $L^\infty(\Omega)$ en la segunda variable.*

Finalmente, cualquier punto de acumulación de la familia tiene la forma (u,χ_D) donde $D \in \mathcal{A}_\alpha$, $\{u = 0\} \cap \Omega = D$ y u es un extremal para $\Lambda_s(\alpha)$.

Demostración. Dado $0 < \alpha < 1$, sea (u, A) una configuración óptima para la constante $\Lambda_s(\alpha)$. Esto es $u \in W^{s,p}_A(\Omega)$, $\|u\|_p = 1$, $|A| = \alpha|\Omega|$ y $\Lambda_s(\alpha) = \frac{1}{2}[u]^p_{s,p}$.

Por lo tanto, por cada $\sigma > 0$,

$$\Lambda_s(\sigma,\alpha) \le \lambda_s(\sigma,\chi_A) \le I_{s,\chi_A,\sigma}(u) = \frac{1}{2}[u]^p_{s,p} = \Lambda_s(\alpha).$$

Ya que $\Lambda_s(\sigma,\alpha)$ es no decreciente en σ, se sigue que existe Λ_* tal que

$$\Lambda_s(\sigma,\alpha) \uparrow \Lambda_* \le \Lambda_s(\alpha). \tag{5.31}$$

Sea ahora $\{\sigma_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una sucesion tal que $\sigma_j \uparrow \infty$ y sea (u_j, ϕ_j) el par óptimo asociado a $\Lambda_s(\sigma_j,\alpha)$. Entonces, por cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2}[u_j]_{s,p} \le I_{s,\phi_j,\sigma_j}(u_j) = \Lambda_s(\sigma_j,\alpha) \le \Lambda_s(\alpha).$$

Ya que $\|u_j\|_p = 1$ por cada $j \in \mathbb{N}$, usando la reflexividad del espacio $W^{s,p}(\Omega)$, la compacidad de la inmersión $W^{s,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ y el hecho de que $L^\infty(\Omega)$ es un espacio dual, existe un par $(u,\phi) \in W^{s,p}(\Omega) \times \mathcal{B}$ y una sucesión (que aún seguimos denotando por (u_j,ϕ_j)) tal que

$$u_j \rightharpoonup u \text{ débil en } W^{s,p}(\Omega) \tag{5.32}$$

$$u_j \to u \text{ fuerte en } L^p(\Omega) \tag{5.33}$$

$$\phi_j \overset{*}{\rightharpoonup} \phi \ *\text{−débil en } L^\infty(\Omega). \tag{5.34}$$

Usando (5.33) tenemos que $1 = \lim_{j\to\infty} \|u_j\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)}$, y por (5.34) obtenemos que $\phi \in \mathcal{B}_\alpha$. También, usando (5.33) y (5.34)

$$\int_\Omega |u_j|^p \phi_j \, dx \to \int_\Omega |u|^p \phi \, dx, \quad \text{cuando } j \to \infty. \tag{5.35}$$

Teniendo en cuenta (5.31), tenemos que

$$0 \le \sigma_j \int_\Omega \phi_j |u_j|^p \, dx \le I_{s,\phi_j,\sigma_j}(u_j) = \Lambda_s(\sigma_j,\alpha) \le \Lambda_s(\alpha),$$

de donde obtenemos

$$0 \leq \int_\Omega |u_j|^p \phi_j \, dx \leq \frac{\Lambda_s(\alpha)}{\sigma_j}$$

y así

$$\int_\Omega |u_j|^p \phi_j \, dx \to 0, \quad \text{cuando } j \to \infty.$$

Esto y (5.35) producén

$$\int_\Omega |u|^p \phi \, dx = 0, \tag{5.36}$$

de donde concluimos que

$$|u|^p \phi = 0 \quad \text{c.t.p. en } \Omega \tag{5.37}$$

Ahora, (5.37) implica que u es una función admisible en la caracterización de $\Lambda_s(\alpha)$. En efecto, si denotamos por $D = \{\phi > 0\} \cap \Omega$, entonces

$$|D| \geq \int_D \phi \, dx = \int_\Omega \phi \, dx = \alpha|\Omega|, \tag{5.38}$$

y por (5.37), $u = 0$ c.t.p. en D y así $|\{u = 0\} \cap \Omega| \geq |D| \geq \alpha|\Omega|$ como deseabamos mostrar.

Por (5.31), (5.36) y la semicontinuidad de la seminorma de Gagliardo $[\,\cdot\,]_{s,p}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\Lambda_s(\alpha) \geq \Lambda_* &= \lim_{j\to\infty} \Lambda_s(\sigma_j, \alpha) \\
&= \lim_{j\to\infty} I_{s,\phi,\sigma}(u_j) \\
&\geq \liminf_{j\to\infty} \frac{1}{2}[u_j]_{s,p}^p \\
&\geq \frac{1}{2}[u]_{s,p}^p \geq \Lambda_s(\alpha).
\end{aligned}$$

Observamos que los anteriores cálculos muestran que u es un extremal para $\Lambda_s(\alpha)$. Más aún, ya que $\{u = 0\} \cap \Omega \supset D$ y $\alpha|\Omega| \leq |D| \leq |\{u = 0\} \cap \Omega| = \alpha|\Omega|$, donde hemos usado el Teorema 4.15 en la última igualdad, deducimos que $D = \{u = 0\} \cap \Omega$. Además de (5.38) deducimos fácilmente que $\phi = \chi_D$.

Resta ver que $u_j \to u$ fuerte en $W^{s,p}(\Omega)$. Pero de los anteriores cálculos se puede ver que

$$\lim_{j\to\infty} [u_j]_{s,p} = [u]_{s,p},$$

por lo tanto, por (5.33),

$$\lim_{j\to\infty} \|u_j\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}.$$

Ya que $W^{s,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach uniformemente convexo, se sigue que $u_j \to u$ fuerte en $W^{s,p}(\Omega)$.

Esto finaliza la demostración del teorema. $\square$

5.2.2. Comportamiento asintótico para $\Lambda_s(\alpha)$ cuando $s \uparrow 1$

En esta subsección estudiaremos el comportamiento asintótico de la constante $\Lambda_s(\alpha)$ cuando $s \uparrow 1$. Para esto, consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado y con frontera Lipschitz, $A \subset \Omega$ un conjunto medible con medida positiva y las funciones $I_s, I : L^p(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}$ definidas como

$$I_s(u) = [u]_{s,p}^p = \begin{cases} \displaystyle\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dx\,dy & \text{si } u \in W^{s,p}(\Omega)\cap E_\alpha \\ +\infty & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{5.39}$$

$$I(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx & \text{si } u \in W^{1,p}(\Omega)\cap E_\alpha \\ +\infty & \text{en otro caso,} \end{cases} \tag{5.40}$$

donde

$$E_\alpha = \{v \in L^p(\Omega)\colon |\{v=0\}\cap\Omega| \geq \alpha|\Omega|, \|v\|_p = 1\}. \tag{5.41}$$

De esta forma se satisface que

$$\Lambda_s(\alpha) = \inf_{v\in L^p(\Omega)} \frac{1}{2} I_s(v). \tag{5.42}$$

Definimos también la constante

$$\tilde{\Lambda}(\alpha) = \inf_{v\in L^p(\Omega)} \frac{1}{2} I(v). \tag{5.43}$$

Antes de continuar, presentaremos un resultado análogo al Teorema 4.3 que nos será necesario para concluir la convergencia de los obstáculos al final de este capítulo.

Teorema 5.10. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de clase C^2 y $\alpha \in (0,1)$. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)\cap E_\alpha$ es un mínimo para $\tilde{\Lambda}(\alpha)$, entonces*

$$|\{u=0\}| = \alpha|\Omega|.$$

Demostración. Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)\cap E_\alpha$ un mínimo para $\tilde{\Lambda}(\alpha)$. Solo debemos demostrar que $|\{u=0\}| \leq \alpha|\Omega|$. Supongamos que $|\{u=0\}\cap\Omega| > \alpha|\Omega|$, usando la regularidad de la medida de lebesgue existe $K \subset \{u=0\}$ compacto tal que

$$\alpha|\Omega| < |K| < |\{u=0\}|,$$

por lo tanto $\tilde{\Lambda}(\alpha) \leq \lambda(K)$, donde $\lambda(K)$ es el autovalor asociado al problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda(K)|u|^{p-2}u & \text{en } \Omega\setminus K \\ u = 0 & \text{en } K \\ |\nabla u|^{p-2}\partial_\nu u = 0 & \text{en } \partial(\Omega\setminus K) \\ u \geq 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{5.44}$$

y $\lambda(K) = \inf\left\{\frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_p^p} : u \in W_K^{1,p}(\Omega)\right\}$ con $W_K(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega)\colon u = 0 \text{ casi en todo punto de } K\}$. Por otro lado al ser u admisible para $\lambda(K)$ se tiene que $\lambda(K) \leq \tilde{\Lambda}(\alpha)$. En consecuencia $\tilde{\Lambda}(\alpha) =$

$\lambda(K)$, y entonces u es solución para el problema (5.44), por lo tanto $-\Delta_p u \geq 0$ en $\Omega \setminus K$. Ahora por el principio fuerte del máximo (ver [42]) tenemos que o bien $u = 0$ en $\Omega \setminus K$, o bien $u > 0$ en $\Omega \setminus K$. Como u es autofunción debe ser entonces $u > 0$ en $\Omega \setminus K$ pero esto es una contradicción ya que $|\{u = 0\}| > |K|$.

Hemos probado entonces que $|\{u = 0\}| = \alpha|\Omega|$. □

La idea ahora es analizar el comportamiento asintótico de las constantes $\Lambda_s(\alpha)$ mostrando que esta sucesión converge, si reescalamos adecuadamente, a la constante $\tilde{\Lambda}(\alpha)$ cuando $s \uparrow 1$. Con la idea de estudiar esta convergencia, observamos que teniendo en cuenta las expresiones (5.42) y (5.43) respectivamente, la herramienta adecuada para estudiar este comportamiento asintótico es el concepto de $\Gamma-$convergencia introducido en el Apéndice A, más precisamente la idea será usar el Teorema A.6 aplicado a las funciones (5.39) y (5.40) respectivamente. En el siguiente teorema queda expresado nuestro resultado.

Teorema 5.11. *Sea $0 < \alpha < 1$ y $\Lambda_s(\alpha), \tilde{\Lambda}(\alpha)$ las constantes definidas en (5.42) y (5.43) respectivamente. Entonces*

$$(1 - s)\Lambda_s(\alpha) \to K(n, p)\tilde{\Lambda}(\alpha) \quad \textit{cuando} \quad s \uparrow 1,$$

donde $K(n, p) = ⨍_{S^{n-1}} |e_1 \cdot \sigma|^p \, d\mathcal{H}^{n-1}(\sigma) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{p+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n+p}{2})}$, siendo $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\, dt$ la función Gamma.

Más aún, si $u_s \in W^{s,p}(\Omega) \cap E_\alpha$ es un extremal para $\Lambda_s(\alpha)$, entonces para cada sucesión $s_j \to 1$, la sucesión $\{u_{s_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es precompacta en $L^p(\Omega)$ y cada punto de acumulación de la sucesión es un extremal para $\tilde{\Lambda}(\alpha)$.

Demostración. Probaremos entonces las hipótesis del Teorema A.6 a las funciones $I_s, I : L^p(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}$ definidas en (5.39) y (5.40) respectivamente. Comenzamos probando la $\Gamma-$convergencia, la cual será una simple derivación del Teorema 8 en [37], en efecto probaremos

$$\Gamma\!-\!\lim_{s\to 1} (1 - s)I_s = K(n, p)I. \tag{5.45}$$

Antes de comenzar con la prueba de (5.45) haremos la siguiente observación clave: respectivamente, entonces el Teorema 8 en [37] nos asegura que $\Gamma\!-\!\lim_{s\to 1}(1 - s)J_s = K(n, p)J$, al ser las funciones I_s, I las restricciones de las funciones J_s, J respectivamente entonces (5.45) sería inmediato, pero como observamos en el Apéndice A las restricciones de sucesiones de funciones $\Gamma-$convergentes no siempre resultan ser $\Gamma-$convergentes.

Consideremos ahora $\{s_j\}_j \in (0, 1)$ una sucesión arbitraria con $s_j \to 1$ cuando $j \to \infty$, si somos capaces de mostrar que se cumplen las hipótesis del Lema A.10 con

$$F_j = (1 - s_j)J_{s_j}, \quad F = K(n, p)J, \quad X = L^p(\Omega) \quad \text{y} \quad Y = L^p(\Omega) \cap E_\alpha$$

entonces se tendrá que

$$\Gamma\!-\!\lim_{j\to\infty} (1 - s_j)I_{s_j} = K(n, p)I. \tag{5.46}$$

Luego (5.45) será cierto. Comencemos entonces a demostrar las hipótesis del Lema A.10. Solo debemos mostrar que

$$F_j(v) \to F(v), \quad \forall v \in L^p(\Omega) \cap E_\alpha \tag{5.47}$$

y que $Y = L^p(\Omega) \cap E_\alpha$ es cerrado.

La convergencia puntual en (5.47) se desprende del Corolario 2 en [4]. Probemos ahora que Y es cerrado, sea $\{u_j\}_j \in Y$ tal que $u_j \to u$ en $L^p(\Omega)$, por la semicontinuidad superior de la medida tenemos que

$$|\{u=0\}| \geq \limsup_{j\to\infty} |\{u_j = 0\}| \geq \alpha|\Omega|.$$

Por otro lado

$$1 = \lim_{j\to\infty} \|u_j\|_p = \|u\|_p,$$

por lo tanto $\|u\|_p = 1$ y $u \in L^p(\Omega)$. Todo esto dice que $u \in Y$.

Solo falta demostrar que la sucesión de extremales es precompacta para poder aplicar el Teorema A.6. En efecto, sean $\{u_{s_j}\}_j$ la sucesión de extremales normalizados asociados a las constantes $\Lambda_{s_j}(\alpha)$, entonces

$$\Lambda_{s_j}(\alpha) = \frac{1}{2}[u_{s_j}]^p_{s_j,p}$$

si $u \in W^{s_j,p}(\Omega)$ es una función fija admisible para $\Lambda_{s_j}(\alpha)$ (para cada s_j), entonces $\Lambda_{s_j}(\alpha) \leq (1/2)[u]^p_{s_j,p}$, por lo tanto

$$(1-s_j)[u_{s_j}]^p_{s_j,p} \leq (1-s_j)[u]^p_{s_j,p},$$

por el Corolario 2 en [4] sabemos que la sucesión $(1-s_j)[u]^p_{s_j,p}$ esta uniformemente acotada en j, luego por el Corolario 7 en [4] podemos concluir que la sucesión de extremales $\{u_{s_j}\}_j$ es precompacta en $L^p(\Omega)$ como queríamos demostrar.

La prueba queda completa. □

5.2.3. Convergencia de los obstáculos A_s cuando $s \uparrow 1$

Al igual que en el caso clásico, como consecuencia de la convergencia de los extremales obtenemos también la convergencia de los obstáculos (conjuntos óptimos asociados). En efecto, si $\{u_s\}_s$ es la sucesión de extremales asociados a las constantes $\Lambda_s(\alpha)$, entonces la sucesión $(1-s)[u_s]^p_{s,p}$ esta uniformemente acotada, por el Corolario 7 en [4]. Esto nos dice que existe una subsucesión $\{u_{s_j}\}_j$ tal que $u_{s_j} \to u$, fuerte en $L^p(\Omega)$. Esto, nos permitirá concluir la convergencia de los conjuntos óptimos $A_{s_j} = \{u_{s_j} = 0\}$ al conjunto óptimo A asociado a la constante $\Lambda(\alpha)$.

Teorema 5.12. *Sea $A_s \subset \Omega$ un conjunto óptimo para $\Lambda_s(\alpha)$. Entonces existe una sucesión $s_j \to 1$ y un conjunto $A \subset \Omega$ tal que*

$$\chi_{A_{s_j}} \to \chi_A \text{ fuerte en } L^1(\Omega).$$

Más aún, el conjunto A es un conjunto óptimo para $\Lambda(\alpha)$ en el sentido que existe un extremal $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap E_\alpha$ tal que $\{u = 0\} = A$.

Demostración. Sea $u_s \in W^{s,p}(\Omega) \cap E_\alpha$ un extremal para $\Lambda_s(\alpha)$. Entonces por el Lema 4.15 tenemos

$$|\{u_s = 0\} \cap \Omega| = \alpha|\Omega|,$$

y por el Teorema 5.11 existe una sucesión $s_j \to 1$, y una función $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap E_\alpha$ tal que $u_{s_j} \to u$ fuerte en $L^p(\Omega)$ siendo u es un extremal para $\Lambda(\alpha)$.

Ahora, por el Teorema 5.10 y el Lema B.4 obtenemos

$$\lim_{j\to\infty} |\{u_{s_j} = 0\} \triangle \{u = 0\}| = 0. \tag{5.48}$$

Así, si llamamos $A_s := \{u_s = 0\}$ y $A = \{u = 0\}$, de (5.48) obtenemos

$$\chi_{A_{s_j}} \to \chi_A \quad \text{fuerte en } L^1(\Omega).$$

La demostración queda completa. □

Apéndice A

$\Gamma-$convergencia

Introducimos en este apéndice el concepto de $\Gamma-$convergencia que será clave para obtener los resultados acerca del comportamiento asintótico de las constantes óptimas que presentamos en el último capítulo de esta tesis. Este concepto fue desarrollado a principios de la década del 70 por el matemático italiano Ennio De Giorgi, esta noción de convergencia juega un rol fundamental en el estudio de convergencia de mínimos y ha sido usado también fuera del ámbito del cálculo de variaciones y de las ecuaciones diferenciales.

Para una referencia general sobre este tema el lector puede dirigirse a [5], para una lectura más específica puede referirse a [14].

A.1. Definiciones

Antes de comenzar recordamos las siguientes definiciones de límite superior e inferior respectivamente.

Definición A.1. Dada una sucesión de números $\{a_m\}_m$, se definen los límites superiores e inferiores como

$$\limsup_{m\to\infty} a_m = \inf_k \sup_{m\geq k}\{a_m\} \tag{A.1}$$

y

$$\liminf_{m\to\infty} a_m = \sup_k \inf_{m\geq k}\{a_m\} \tag{A.2}$$

respectivamente.

Observemos que siempre se tiene que $\liminf_{m\to\infty} a_m \leq \limsup_{m\to\infty} a_n$ y que el límite de la sucesión existe si y sólo si $\liminf_{m\to\infty} a_m = \limsup_{m\to\infty} a_m$

Teniendo en cuenta este concepto se puede definir la noción de semicontinuidad.

Definición A.2. Sea X un espacio topológico. Una función $J\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ se dice secuencialmente semicontinua inferior en un punto $u \in X$ si por cada sucesión $u_m \to u$ se cumple que

$$J(u) \leq \liminf_{m\to\infty} J(u_m) \tag{A.3}$$

es decir

$$J(u) = \min\left\{\liminf_{m\to\infty} J(u_m)\colon\, u_m \to u\right\}.$$

Se dice que J es secuencialmente semicontinua inferior en X si es secuencialmente semicontinua inferior en u, $\forall u \in X$.

Observación A.3. Usaremos comúnmente esta noción en el siguiente contexto. X es un espacio de Banach y la topología considerada es la topología débil. Luego, $J\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ es débilmente semicontinua inferior en un punto $u \in X$ si por cada sucesión $u_m \rightharpoonup u$ se cumple:

$$J(u) \leq \liminf_{m\to\infty} J(u_m). \tag{A.4}$$

Definición A.4. Decimos que una sucesión de funciones, $J_m\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$, Γ−converge en X a la función $J\colon X \to \bar{R}$ si para todo $u \in X$ se cumple lo siguiente:

(i) (Desigualdad del límite inferior) para cada sucesión $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \in X$ convergiendo a $u \in X$ se cumple:

$$J(u) \leq \liminf_{m\to\infty} J_m(u_m) \tag{A.5}$$

(ii) (Desigualdad del límite superior) existe una sucesión $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \in X$ con $u_m \to u$ de modo que:

$$\limsup_{m\to\infty} J_m(u_m) \leq J(u). \tag{A.6}$$

La función J es el Γ−límite de la sucesión $\{J_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y escribimos

$$\Gamma\text{−}\lim_{m\to\infty} J_m = J.$$

Observación A.5. Observemos que si se tiene que $J_m \to J$ puntualmente, entonces automáticamente se verifica la desigualdad del límite superior. En efecto, basta entonces considerar la sucesión constante $u_m := u$, de donde

$$J(u) = \lim_{m\to\infty} J_m(u) = \limsup_{m\to\infty} J_m(u_m).$$

A.2. Convergencia de mínimos

Ahora si, teniendo en mente el concepto de $\Gamma-$convergencia podemos enunciar el teorema de convergencia de mínimos que nos permitirá concluir nuestros resultados en el capítulo 5.

Teorema A.6. *Sea* (X, d) *un espacio métrico completo y* $F_j, F\colon X \to (-\infty, +\infty]$ *funciones tal que* $F = \Gamma-\lim_{j\to\infty} F_j$. *Asumimos que por cada* j *existe* $x_j \in X$ *tal que* $F_j(x_j) = \inf_X F_j$. *Más aún, asumamos que* $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *es precompacta en* X. *Entonces*

- $\inf_X F = \lim_{j\to\infty} \inf_X F_j$.
- *Si* x *es cualquier punto de acumulación de la sucesión* $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, *entonces* $F(x) = \inf_X F$.

Tenemos también la siguiente versión más general del Teorema A.6 en la cual la condición de que la sucesión sea una sucesión de mínimos puede reemplazarse por el hecho de que sea una sucesión de cuasi-mínimos.

Teorema A.7. *Sea* (X, d) *un espacio métrico completo,* $F_j, F\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ *funciones tal que* $\Gamma-\lim_{j\to\infty} F_j = F$ *y supongamos que existe* $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in X$ *tal que*

$$\inf_X F_j = F_j(x_j) + o(1).$$

Asumamos que la sucesión $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *es precompacta* X. *Entonces*

$$\inf_X F_j \to \min_X F \quad si\ j \to \infty.$$

Más aún, si $x_0 \in X$ *es un punto de acumulación de la sucesión* $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, *entonces* x_0 *es un mínimo para* F.

Las demostraciones de los anteriores teoremas de convergencia de mínimos es elemental y puede ser encontrada en cualquiera de las siguientes obras [5, 13].

Incluimos la demostración del Teorema A.7 (que implica el Teorema A.6) para que la tesis sea autocontenida.

Demostración del Teorema A.7. Sea $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión de cuasi-mínimos y asumamos que $x_j \to x$ cuando $j \to \infty$.

Entonces se tiene

$$\inf_X F \le F(x) \le \liminf_{j\to\infty} F_j(x_j) = \liminf_{j\to\infty} \inf_X F_j. \tag{A.7}$$

Por otro lado, Dado $\varepsilon > 0$ existe $x_0 \in X$ tal que $\inf_X F + \varepsilon \ge F(x_0)$. Sea ahora $\{y_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset X$ la sucesión dada por la desigualdad del límite superior. Luego

$$\inf_X F + \varepsilon \ge F(x_0) \ge \limsup_{j\to\infty} F_j(y_j) \ge \limsup_{j\to\infty} \inf_X F_j. \tag{A.8}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, juntando (A.7) y (A.8) se llega a

$$\inf_X F \leq F(x) \leq \liminf_{j\to\infty} \inf_X F_j \leq \limsup_{j\to\infty} \inf_X F_j \leq \inf_X F.$$

Esto concluye la demostración. □

En una de las aplicaciones de la teoría de Gamma-convergencia que hacemos en esta tesis, no se tiene la Gamma-convergencia de las funciones en su total generalidad. Se reemplaza la desigualdad del límite inferior por una desigualdad algo más débil. Aún así, las conclusiones del Teorema A.6 se mantienen. Este es el contenido del siguiente teorema.

Teorema A.8. *Sea (X, d) un espacio métrico completo, $F, F_j \colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ tales que:*

1. *para todo $j \in \mathbb{N}$ existe $x_j \in X$ tal que $F_j(x_j) = \inf_X F_j$.*
2. *Si $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de mínimos de $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, entonces la misma es precompacta en X.*
3. *Si $x \in X$ es un punto de acumulación de una sucesión de mínimos $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ entonces*
$$F(x) \leq \liminf_{j\to\infty} F_j(x_j).$$
4. *Para todo $x \in X$ existe $\{y_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que*
$$F(x) \geq \limsup_{j\to\infty} F_j(y_j).$$

Entonces

$$\inf_X F = \lim_{j\to\infty} \inf_X F_j,$$

y todo punto de acumulación de una sucesión de mínimos de $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es un mínimo de F.

Observación A.9. La diferencia entre este resultado y el Teorema A.7 (o el Teorema A.6) es que la desigualdad del límite inferior se pide que sea verdadera sobre sucesiones de mínimos en lugar de sobre sucesiones arbitrarias.

Demostración. La demostración es análoga a la del Teorema A.7. En efecto, sea $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de mínimos de $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ y sea $x \in X$ un punto de acumulación de dicha sucesión. Luego,

$$\inf_X F \leq F(x) \leq \liminf_{j\to\infty} F_j(x_j) = \liminf_{j\to\infty} \inf_X F_j.$$

Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$ sea $x_0 \in X$ tal que $\inf_X F + \varepsilon \geq F(x_0)$. Por la desigualdad del límite superior, existe $\{y_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que

$$F(x_0) \geq \limsup_{j\to\infty} F_j(y_j) \geq \limsup_{j\to\infty} \inf_X F_j.$$

Al igual que en el Teorema A.7 es fácil concluir el resultado a partir de estas desigualdades. □

Finalizamos este capítulo con un resultado que nos dice bajo que condiciones podemos restringir sucesiones $\Gamma-$convergentes y seguir conservando la $\Gamma-$convergencia, esto en general no es cierto (ver Proposición 6.14 en [13])

Lema A.10. *Sea $F_j, F\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ funciones tales que $\Gamma-\text{lím}_{j\to\infty} F_j = F$. Sea $Y \subset X$ cerrado y definimos las funciones restringidas $\tilde{F}_j, \tilde{F}\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ como*

$$\tilde{F}_j(x) = \begin{cases} F_j(x) \text{ si } x \in Y, \\ +\infty \text{ en otro caso,} \end{cases} \qquad y \quad \tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x) \text{ si } x \in Y, \\ +\infty \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Si $F_j(y) \to F(y)$ por cada $y \in Y$, entonces

$$\Gamma-\lim_{j\to\infty} \tilde{F}_j = \tilde{F}.$$

Demostración. Probamos primero la desigualdad del límite inferior. En efecto, sea $x \in X$ y $x_j \to x$ en X, debemos probar que

$$\tilde{F}(x) \leq \liminf_{j\to\infty} \tilde{F}_j(x_j). \tag{A.9}$$

Podemos asumir que $\liminf_{j\to\infty} \tilde{F}_j(x_j) < +\infty$, en otro caso no hay nada que probar.

Entonces, podemos asumir que $x_j \in Y$ por cada $j \in \mathbb{N}$, y así

$$\tilde{F}_j(x_j) = F_j(x_j).$$

Ahora usando la $\Gamma-$convergencia de las funciones F_j tenemos que

$$F(x) \leq \liminf_{j\to\infty} F_j(x_j) = \liminf_{j\to\infty} \tilde{F}_j(x_j)$$

Ya que Y es cerrado, concluimos que $x \in Y$ y así $F(x) = \tilde{F}(x)$. De esta forma queda demostrado (A.9).

Finalmente probamos la desigualdad del límite superior. Es decir por cada $x \in X$ debemos probar que existe una sucesión $\{x_j\}_j \in X$ tal que $x_j \to x$ in X y

$$\limsup_{j\to\infty} \tilde{F}_j(x_j) \leq \tilde{F}(x). \tag{A.10}$$

Consideramos la sucesión constante $x_j = x$. Si $x \notin Y$ entonces $\tilde{F}_j(x_j) = \tilde{F}(x) = \infty$ y la desigualdad es trivial. Suponemos ahora que $x \in Y$, en este caso $\tilde{F}_j(x_j) = F_j(x)$ y $\tilde{F}(x) = F(x)$, entonces por la hipótesis de convergencia puntual tenemos que

$$\lim_{j\to\infty} F_j(x) = F(x),$$

en particular (A.10) es válido. □

Apéndice B

Teoremas de convergencia de la medida

Nos dedicaremos a presentar en este apéndice los teoremas relacionados con las medidas que usamos en el Capítulo 5. Con estos resultados asociados a convergencia de medidas como herramientas seremos capaces de probar la convergencia de las ventanas óptimas en el caso clásico y de los obstáculos en el caso fraccionario.

Lema B.1. *Sea (X, Σ, ν) un espacio de medida finita y sean $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}, f$ funciones $\nu-$medibles no negativas. Sean $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, μ medidas absolutamente continuas con respecto a ν tales que*

- *Para todo $A \in \Sigma$, se tiene que $\mu_k(A) \to \mu(A)$.*
- *$f_k \to f$ $\nu-$c.t.p.*

Si $\lim_{k\to\infty} \mu_k(\{f_k = 0\}) = \mu(\{f = 0\})$, entonces se tiene que, dado $\varepsilon > 0$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \geq j_0$,

$$\limsup_{k\to\infty} \mu_n(\{0 < f_k \leq \tfrac{1}{j}\}) < \varepsilon.$$

Observación B.2. Cuando $\mu_k = \mu$ por cada $k \in \mathbb{N}$ es un hecho conocido y es de fácil demostración. En este caso, la dificultad radica en que las medidas varían. No sabemos si este resultado es conocido o si las hipótesis son óptimas. Sin embargo, serán suficientes para nuestros propósitos.

Observación B.3. Por argumentos estándar, es posible demostrar que la condición $\mu_k(A) \to \mu(A)$ por cada $A \in \Sigma$ es equivalente a la convergencia débil de las densidades de las medidas en $L^1(X, \nu)$.

Demostración del Lema B.1. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\chi_{\{0<f\leq\frac{1}{j}\}} \to 0$ $\nu-$c.t.p. cuando $j \to \infty$, tenemos que existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(\{0 < f \leq \tfrac{1}{j}\}) < \varepsilon, \quad \text{para todo } j \geq j_0. \tag{B.1}$$

Como $f_k \to f$ $\nu-$c.t.p., tenemos que

$$\{f \leq \tfrac{1}{j}\} \supset \bigcap_{k_0\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n_0} \{f_k \leq \tfrac{1}{j}\},$$

de donde

$$\mu(\{f \leq \tfrac{1}{j}\}) \geq \lim_{n_0\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k\geq n_0} \{f_k \leq \tfrac{1}{j}\}\right).$$

Luego, dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(\{f \leq \tfrac{1}{j}\}) + \delta \geq \mu\left(\bigcup_{k\geq n_0} \{f_k \leq \tfrac{1}{j}\}\right) \tag{B.2}$$

Por nuestra hipótesis sobre la convergencia de las medidas,

$$\lim_{k\to\infty} \mu_k\left(\bigcup_{k\geq n_0} \{f_k \leq \tfrac{1}{j}\}\right) = \mu\left(\bigcup_{k\geq n_0} \{f_k \leq \tfrac{1}{j}\}\right),$$

de donde

$$\mu\left(\bigcup_{k\geq n_0} \{f_k \leq \tfrac{1}{j}\}\right) + \delta \geq \mu_k\left(\bigcup_{k\geq n_0} \{f_k \leq \tfrac{1}{j}\}\right) \geq \mu_k(\{f_k \leq \tfrac{1}{j}\}), \tag{B.3}$$

para todo k suficientemente grande.

De (B.2) y (B.3) sigue que

$$\mu(\{f \leq \tfrac{1}{j}\}) + 2\delta \geq \limsup_{k\to\infty} \mu_k(\{f_k \leq \tfrac{1}{j}\})$$

Como $\delta > 0$ es arbitrario, sigue que

$$\limsup_{k\to\infty} \mu_k(\{f_k \leq \tfrac{1}{j}\}) \leq \mu(\{f \leq \tfrac{1}{j}\}) \tag{B.4}$$

Ahora el lema sigue de (B.1) y (B.4) usando la hipótesis que

$$\lim_{k\to\infty} \mu_k(\{f_k = 0\}) = \mu(\{f = 0\}).$$

□

Con la ayuda del Lema B.1 estamos en condiciones de demostrar el siguiente resultado fundamental acerca de convergencia de medidas y que será clave para concluir la convergencia de las ventanas óptimas y los obstáculos que presentamos en el Capítulo 5.

Lema B.4. *Sea (X, Σ, ν) un espacio de medida finita, y $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}, f$ funciones $\nu-$medibles y no negativas tales que $f_k \to f$ $\nu-$c.t.p.*

Sean $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y μ medidas no negativas y absolutamente continuas respecto de la medida ν tal que $\mu_k(A) \to \mu(A)$, para cada $A \in \Sigma$.

Entonces, si $\lim_{k\to\infty} \mu_k(\{f_k = 0\}) = \mu(\{f = 0\})$, se sigue que

$$\lim_{k\to\infty} \mu_k(\{f_k = 0\} \triangle \{f = 0\}) = 0,$$

donde $A\triangle B$ indica la diferencia simétrica de conjuntos, i.e.

$$A\triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Demostración. Por el Teorema de Egoroff (ver [18]), tenemos que dado $\delta > 0$, existe un conjunto medible $C_\delta \subset X$ tal que

$$f_k \rightrightarrows f, \text{ uniformemente cuando } k \to \infty \text{ en } X \setminus C_\delta$$

con

$$\mu(C_\delta) < \delta.$$

Obeservemas que, cuando $\mu_k(A) \to \mu(A)$ para cada conjunto medible A, podemos asumir que

$$\mu_k(C_\delta) < \delta,$$

para cada k suficientemente grande.

Definimos ahora el conjunto $E_\delta = X \setminus C_\delta$ y usando esta convergencia uniforme sobre el conjunto E_δ, tenemos que

$$\{f_k = 0\} \cap E_\delta \subset \{f \leq \delta\} \cap E_\delta,$$

para cada k suficientemente grande.

Tenemos entonces que

$$\{f = 0\} \setminus \{f_k = 0\} \subset ((\{f \leq \delta\} \setminus \{f_k = 0\}) \cap E_\delta) \cup C_\delta,$$

de donde se puede ver que

$$\mu_k(\{f = 0\} \setminus \{f_k = 0\}) \leq \mu_k(\{f \leq \delta\}) - \mu_k(\{f_k = 0\}) + \delta.$$

Tomando límite cuando $k \to \infty$, obtenemos que

$$\limsup_{k\to\infty} \mu_k(\{f = 0\} \setminus \{f_k = 0\}) \leq \mu(\{f \leq \delta\}) - \mu(\{f = 0\}) + \delta,$$

tomando ahora $\delta \to 0$ podemos concluir que

$$\lim_{k\to\infty} \mu_k(\{f = 0\} \setminus \{f_k = 0\}) = 0.$$

Por otro lado, dado $j \in \mathbb{N}$ existe $k_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{f = 0\} \cap E_j \subset \{f_{k_j} < \tfrac{1}{j}\} \cap E_j,$$

donde $\nu(X \setminus E_j) \leq \frac{1}{j}$. Ahora, razonando como en el caso anterior se tiene que

$$\limsup_{j\to\infty} \mu_{k_j}(\{f_{k_j} = 0\} \setminus \{f = 0\}) \leq \limsup_{j\to\infty} \left(\mu_{k_j}(\{f_{k_j} < \tfrac{1}{j}\})\right) - \mu(\{f = 0\}).$$

Pero, del Lema B.1 se puede ver que

$$\mu_{k_j}(\{f_{k_j} < \tfrac{1}{j}\}) = \mu_{k_j}(\{f_{k_j} = 0\}) + \mu_{k_j}(\{0 < f_{k_j} < \tfrac{1}{j}\}) \to \mu(\{f = 0\}).$$

Esto completa la demostración del teorema. □

Observación B.5. En el caso en el que las medidas $\{\mu_k\}_k$ son constantes, el resultado es conocido y esta probado en [22, Lema 3.1].

Bibliografía

[1] Robert A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975, Pure and Applied Mathematics, Vol. 65. MR 0450957 (56 #9247) 21, 26, 78

[2] Hedy Attouch, Giuseppe Buttazzo, and Gérard Michaille, *Variational analysis in Sobolev and BV spaces*, MPS/SIAM Series on Optimization, vol. 6, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA; Mathematical Programming Society (MPS), Philadelphia, PA, 2006, Applications to PDEs and optimization. MR 2192832 (2006j:49001) 12, 21

[3] A. Bensoussan, J.-L. Lions, and G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2011, Corrected reprint of the 1978 original [MR0503330]. MR 2839402 85

[4] Jean Bourgain, Haïm Brezis, and Petru Mironescu, *Another look at Sobolev spaces*, 2001, Original research article appeared at in Optimal Control and Partial Differential Equations IOS Press ISBN 1 58603 096 5, pp. 439–455. 27, 99

[5] Andrea Braides, *Γ-convergence for beginners*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 22, Oxford University Press, Oxford, 2002. MR 1968440 (2004e:49001) 101, 103

[6] Lorenzo Brasco and Giovanni Franzina, *Convexity properties of Dirichlet integrals and Picone-type inequalities*, Kodai Math. J. **37** (2014), no. 3, 769–799. MR 3273896 71

[7] Haim Brezis, *How to recognize constant functions. A connection with Sobolev spaces*, Uspekhi Mat. Nauk **57** (2002), no. 4(346), 59–74. MR 1942116 (2003m:46047) 23

[8] ———, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, New York, 2011. MR 2759829 6, 7, 10, 16, 78

[9] Luis Caffarelli and Luis Silvestre, *An extension problem related to the fractional Laplacian*, Comm. Partial Differential Equations **32** (2007), no. 7-9, 1245–1260. MR 2354493 2

[10] Agnese Di Castro, Tuomo Kuusi, and Giampiero Palatucci, *Local behavior of fractional p-minimizers*, Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis (2015), –. 66

[11] A. Cherkaev and E. Cherkaeva, *Optimal design for uncertain loading condition*, Homogenization, Ser. Adv. Math. Appl. Sci., vol. 50, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1999, pp. 193–213. MR 1792689 2

[12] Doina Cioranescu and François Murat, *A strange term coming from nowhere [MR0652509 (84e:35039a); MR0670272 (84e:35039b)]*, Topics in the mathematical modelling of composite materials, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., vol. 31, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997, pp. 45–93. MR 1493040 82

[13] Gianni Dal Maso, *An introduction to Γ-convergence*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 8, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1993. MR 1201152 (94a:49001) 103, 105

[14] Ennio De Giorgi and Tullio Franzoni, *Su un tipo di convergenza variazionale*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **58** (1975), no. 6, 842–850. MR 0448194 101

[15] Leandro Del Pezzo, Julián Fernández Bonder, and Luis López-Rios, *An optimization problem for the first eigenvalue of the $p-$fractional laplacian*, ArXiv e-prints (2016), 22p. 2

[16] Leandro Del Pezzo, Julián Fernández Bonder, and Wladimir Neves, *Optimal boundary holes for the Sobolev trace constant*, J. Differential Equations **251** (2011), no. 8, 2327–2351. MR 2823670 (2012g:49102) 2, 59, 63, 83, 88

[17] Eleonora Di Nezza, Giampiero Palatucci, and Enrico Valdinoci, *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, Bull. Sci. Math. **136** (2012), no. 5, 521–573. MR 2944369 24, 25, 26, 27, 76

[18] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, second ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. MR 2597943 (2011c:35002) 7, 11, 12, 15, 21, 23, 36, 38, 108

[19] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992. MR 1158660 (93f:28001) 5, 6, 63

[20] G. Faber, *Beweis dass unter allen homogenen membranen von gleicher fläche und gleicher spannung die kreisförmige den tiefsten grundton gibt*, Sitz. Ber. Bayer. Akad. Wiss. (1923), 169–172. 1

[21] Julián Fernández Bonder, *Ecuaciones diferenciales parciales*, Cursos de Grado, vol. 7, Departamento de Matemática, FCEN-UBA, 2015. 10

[22] Julián Fernández Bonder, Pablo Groisman, and Julio D. Rossi, *Optimization of the first Steklov eigenvalue in domains with holes: a shape derivative approach*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **186** (2007), no. 2, 341–358. MR 2295124 (2007m:35179) 108

[23] Julián Fernández Bonder, Rafael Orive, and Julio D. Rossi, *The best Sobolev trace constant in a domain with oscillating boundary*, Nonlinear Anal. **67** (2007), no. 4, 1173–1180. MR 2325371 (2008g:35010) 82

[24] Julián Fernández Bonder, Julio D. Rossi, and Noemi Wolanski, *Regularity of the free boundary in an optimization problem related to the best Sobolev trace constant*, SIAM J. Control Optim. **44** (2005), no. 5, 1614–1635. MR 2193498 (2007d:35289) 73

[25] ______, *On the best Sobolev trace constant and extremals in domains with holes*, Bull. Sci. Math. **130** (2006), no. 7, 565–579. MR 2261964 (2007i:46029) 73

[26] Julián Fernández Bonder and Juan Spedaletti, *A shape optimization problem for steklov eigenvalues in oscillating domains*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. (2016), 18p. 3

[27] ______, *Some nonlocal optimal design problems*, ArXiv e-prints (2016), 22p. 4

[28] Harald Hanche-Olsen and Helge Holden, *The Kolmogorov-Riesz compactness theorem*, Expo. Math. **28** (2010), no. 4, 385–394. MR 2734454 (2012a:46048) 16

[29] Antoine Henrot, *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators*, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006. MR 2251558 2

[30] Antoine Henrot and Michel Pierre, *Variation et optimisation de formes*, Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications], vol. 48, Springer, Berlin, 2005, Une analyse géométrique. [A geometric analysis]. MR 2512810 (2009m:49003) 1, 2, 84, 89

[31] E. Krahn, *Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises*, Math. Ann. **94** (1925), no. 1, 97–100. MR 1512244 1

[32] Elliott H. Lieb and Michael Loss, *Analysis*, second ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 14, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. MR 1817225 (2001i:00001) 77

[33] Gary M. Lieberman, *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal. **12** (1988), no. 11, 1203–1219. MR 969499 (90a:35098) 46

[34] ______, *The natural generalization of the natural conditions of Ladyzhenskaya and Ural′tseva for elliptic equations*, Comm. Partial Differential Equations **16** (1991), no. 2-3, 311–361. MR 1104103 (92c:35041) 46

[35] V. Maz′ya and T. Shaposhnikova, *On the Bourgain, Brezis, and Mironescu theorem concerning limiting embeddings of fractional Sobolev spaces*, J. Funct. Anal. **195** (2002), no. 2, 230–238. MR 1940355 27

[36] Umberto Mosco, *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities*, Advances in Math. **3** (1969), 510–585. MR 0298508 89

[37] Augusto C. Ponce, *A new approach to Sobolev spaces and connections to* Γ*-convergence*, Calc. Var. Partial Differential Equations **19** (2004), no. 3, 229–255. MR 2033060 (2005a:49030) 98

[38] ———, *Elliptic pdes, measures and capacities*, Tracts in Mathematics 23, European Mathematical Society (EMS), 2016. 27

[39] Jacques Simon, *Régularité de la solution d'une équation non linéaire dans* $\mathbf{R}^N$, Journées d'Analyse Non Linéaire (Proc. Conf., Besançon, 1977), Lecture Notes in Math., vol. 665, Springer, Berlin, 1978, pp. 205–227. MR 519432 (80b:35035) 92

[40] W. Stekloff, *Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique (suite et fin)*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **19** (1902), 455–490. MR 1509018 42

[41] Giorgio Talenti, *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **110** (1976), 353–372. MR 0463908 14

[42] J. L. Vázquez, *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations*, Appl. Math. Optim. **12** (1984), no. 3, 191–202. MR 768629 (86m:35018) 41, 46, 62, 98