Álgebra II

Segundo Cuatrimestre — 2015

Práctica 8: Producto tensorial y localización de módulos

Productos tensoriales

1. Muestre que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$.

2. Sean $\Bbbk$ un cuerpo y V y W dos $\Bbbk$-espacios vectoriales.

(*a*) Hallar una base de $V \otimes_{\Bbbk} W$ en función de bases de V y W. Concluir que si V y W son de dimensión finita, también lo es su producto tensorial.

(*b*) Dados $w \in W$ y $f \in V^*$ definimos $\psi_{w,f} : V \to W$ por la fórmula $\psi_{w,f}(v) = f(v)w$. Probar que existe una transformación lineal $\psi : W \otimes V^* \to \mathsf{Hom}_{\Bbbk}(V, W)$ tal que $\psi(w \otimes f) = \psi_{w,f}$ para todo tensor elemental $w \otimes f \in W \otimes V^*$.

(*c*) Encontrar condiciones necesarias y suficientes para que ψ sea inyectiva o sobreyectiva.

3. Sean A y B anillos, M un A-módulo a derecha, N un A-B-bimódulo y P un B-módulo a izquierda. Muestre que

(*a*) $M \otimes_A N$ es un B-módulo a derecha;

(*b*) $M \otimes_A N$ es un $\mathsf{End}_A(M)$-$\mathsf{End}_A(N)$-bimódulo;

(*c*) existe un isomorfismo natural

$$M \otimes_A (N \otimes_B P) \cong (M \otimes_A N) \otimes_B P.$$

4. Sea N un A-módulo a izquierda y sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de A-módulos a derecha. Probar que existe un isomorfismo natural

$$\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) \otimes N \cong \bigoplus_{i \in I} M_i \otimes N.$$

5. Sean A un anillo, $\mathfrak{a} \subset A$ un ideal bilátero y M un A-módulo a izquierda. Muestre que existe un isomorfismo $A/\mathfrak{a} \otimes_A M \cong M/\mathfrak{a}M$.

6. Sean A un anillo, M un A-módulo a derecha y $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de submódulos de M tal que $M = \sum_{i \in I} M_i$. Probar que si N es un A-módulo a izquierda tal que $M_i \otimes_A N = 0$ para todo $i \in I$ entonces $M \otimes_A N = 0$.

7. *Producto tensorial de álgebras.* Sea $\Bbbk$ un cuerpo y sean A y B dos $\Bbbk$-álgebras. Muestre que existe una única estructura de $\Bbbk$-álgebra sobre $A \otimes_{\Bbbk} B$ tal que el producto de tensores elementales está dado por

$$a \otimes b \cdot a' \otimes b' = (aa') \otimes (bb').$$

8. Sean $\Bbbk$ un cuerpo, A una $\Bbbk$-álgebra y $n, m \in \mathbb{N}$. Probar que existen isomorfismos de álgebras

$$A[X] \cong \Bbbk[X] \otimes_{\Bbbk} A,$$
$$M_n(A) \cong M_n(\Bbbk) \otimes_{\Bbbk} A,$$

y

$$M_{nm}(A) \cong M_n(A) \otimes_{\Bbbk} M_m(A).$$

Módulos playos

9. Probar que todo sumando directo de un módulo playo es playo.

10. Sean A un anillo conmutativo y M y N A-módulos playos. Probar que $M \otimes_A N$ es un A-módulo playo.

†11. Sea

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

una sucesión exacta de A-módulos a izquierda con M'' playo. Probar que para todo A-módulo a derecha N la sucesión

$$0 \to N \otimes_A M' \to N \otimes_A M \to N \otimes_A M'' \to 0$$

es exacta.

12. Sea A un anillo. El objetivo de este ejercicio es probar el siguiente resultado: todo A-módulo izquierdo playo y finitamente presentado es proyectivo.

(*a*) Para cada grupo abeliano M sea $M^* = \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Probar que si M es un A-módulo a izquierda entonces M^* es un A-módulo a derecha, y que todo morfismo de A-módulos a izquierda $f : M \to N$ induce un morfismo de A-módulos a derecha $f^* : N^* \to M^*$.

(*b*) Probar que f^* es inyectiva si y solo si f es sobreyectiva.

(*c*) Sean M y N dos A-módulos. Probar que existe un morfismo de grupos abelianos $\sigma(N, M) : N^* \otimes_A M \to \mathsf{Hom}_A(M, N)^*$ tal que $\sigma(f \otimes m)(h) = f(h(m))$ para todo tensor elemental $f \otimes m \in N^* \otimes M$.

(*d*) Probar que si M es finitamente presentado entonces $\sigma(M, N)$ es un isomorfismo.

Sugerencia. Probar primero que $\sigma(A^n, N)$ es un isomorfismo para cada $n \in \mathbb{N}$ y aplicar este resultado a una presentación finita de M.

(*e*) Sea M un A-módulo playo y sea $f : N \to O$ un morfismo sobreyectivo de A-módulos a izquierda. Probar que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
O^* \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, "\sigma(O,M)"'] & N^* \otimes_A M \arrow[d, "\sigma(N,M)"] \\
\mathsf{Hom}_A(M, O)^* \arrow[r, "(f_*)^*"] & \mathsf{Hom}_A(M, N)^*.
\end{tikzcd}$$

Concluir que $f_* : \mathsf{Hom}_A(M, N) \to \mathsf{Hom}_A(M, O)$ es un epimorfismo y por lo tanto M es proyectivo.

13. Probar que un A-módulo a izquierda M es playo si y solo si el A-módulo a derecha M^* es inyectivo.

14. Un anillo se dice *regular von Neumann* si para todo $a \in A$ existe $x \in A$ tal que $axa = a$. El objetivo de este ejercicio es probar el siguiente resultado, demostrado independientemente por Auslander y Hagata: un anillo A es regular von Neumann si y solo si todo A-módulo, a izquierda o a derecha, es playo. Por este motivo estos anillos también suelen llamarse *absolutamente playos*.

(*a*) Sea A un anillo y M un A-módulo a izquierda. Probar que M es playo si y solo si para todo ideal a derecha finitamente generado $I \subset A$ la aplicación

$$a \otimes m \in I \otimes_A M \mapsto am \in IM$$

es un isomorfismo de grupos abelianos.

Sugerencia. Para probar que M es playo primero pruebe que la hipótesis vale aún si el ideal I no es finitamente generado y a continuación pruebe que M^* es inyectivo.

(*b*) Supongamos que para todo ideal a derecha finitamente generado $I \subset A$ el A-módulo a derecha A/I es playo. Probar que todo A-módulo a izquierda es playo.
(*c*) Sean $I, J \subset A$ ideales a derecha tales que $A = I \oplus J$. Probar que existen idempotentes $e, f \in A$ tales que $I = eA$, $J = fA$ y $ef = fe = 0$.
(*d*) Sea A un anillo. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
(i) todo A-módulo a izquierda es playo;
(ii) todo A-módulo a derecha es playo;
(iii) para todo ideal a izquierda finitamente generado I el módulo A/I es proyectivo;
(iv) para todo ideal a derecha finitamente generado I el módulo A/I es proyectivo;
(v) todo ideal a izquierda finitamente generado está generado por un idempotente;
(vi) todo ideal a derecha finitamente generado está generado por un idempotente;
(vii) A es regular von Neumann.

Von Neumann identificó los anillos que llevan su nombre en un articulo sobre el álgebra de operadores de un espacio vectorial con producto interno de dimensión infinita. El artículo fue publicado en 1936, veinte años antes de que Serre definiera la noción de platitud.

Localización de módulos

En esta sección A es un anillo y $S \subset A$ es un subconjunto central multiplicativamente cerrado. El morfismo natural $A \to A_S$ nos permite ver a cualquier A_S-módulo como un A-módulo, ver ejercicio **8** de la práctica **6**, ítem *(b)*.

15. *Localización de módulos.* Sea M un A-módulo. Probar las siguientes afirmaciones.
(*a*) Existen un A_S-módulo M_S y un morfismo de A-módulos $j_M : M \to M_S$ con la siguiente propiedad: dado un A_S-módulo N y un morfismo de A-módulos $f : M \to N$, existe un único morfismo de A_S-módulos $\tilde{f} : M_S \to N$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j_M"'] & N \\ M_S \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

(*b*) El par (M_S, j_M) está determinado a menos de un único isomorfismo.
(*c*) El módulo M_S es isomorfo a $A_S \otimes_A M$ como A_S-módulo.
(*d*) Si M es un A-módulo tal que para todo $s \in S$ la aplicación $m \in M \mapsto sm \in M$ es biyectiva, $j_M : M \to M_S$ es un isomorfismo.
(*e*) Si $f : M \to N$ es un morfismo de A-módulos, existe un único morfismo $f_S : M_S \to N_S$ tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j_M"'] & N \arrow[d, "j_N"] \\ M_S \arrow[r, "f_S"] & N_S. \end{tikzcd}$$

16. Sea M un A-módulo a izquierda finitamente generado. Probar que $M_S = 0$ si y solo si existe $s \in S$ tal que $sM = 0$. ¿Qué ocurre si M no es finitamente generado?

17. *Exactitud de la localización.* Probar que para toda sucesión exacta corta de A-módulos

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0,$$

el diagrama obtenido al localizar en S

$$0 \longrightarrow M'_S \xrightarrow{f_S} M_S \xrightarrow{g_S} M''_S \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de A_S-módulos. Concluir que A_S es un A-módulo playo.

18. Sea M un A-módulo y sean $P, Q \subset M$ submódulos. Probar que:

(*a*) $(P+Q)_S = P_S + Q_S$;

(*b*) $(P \cap Q)_S = P_S \cap Q_S$;

(*c*) $(M/P)_S \cong M_S/P_S$.

†**19.** *Propiedades locales.* En este ejercicio A es un anillo conmutativo, M y N son A-módulos a izquierda y $f : M \to N$ es un morfismo de módulos. Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo y $S = A \setminus \mathfrak{p}$, escribimos $A_\mathfrak{p}, M_\mathfrak{p}$ y $f_\mathfrak{p}$ en lugar de A_S, M_S y f_S, respectivamente.

(*a*) Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $M = 0$;

(ii) $M_\mathfrak{p} = 0$ para todo ideal primo $\mathfrak{p} \subset A$;

(iii) $M_\mathfrak{m} = 0$ para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$.

(*b*) Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) f es inyectiva;

(ii) $f_\mathfrak{p}$ es inyectiva para todo ideal primo $\mathfrak{p} \subset A$;

(iii) $f_\mathfrak{m}$ es inyectiva para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$.

(*c*) Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) f es sobreyectiva;

(ii) $f_\mathfrak{p}$ es sobreyectiva para todo ideal primo $\mathfrak{p} \subset A$;

(iii) $f_\mathfrak{m}$ es sobreyectiva para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$.

(*d*) Sea

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \tag{1}$$

una sucesión de A-módulos tal que $g \circ f = 0$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) La sucesión (1) es exacta.

(ii) Para cada ideal primo $\mathfrak{p} \subset A$, la sucesión

$$0 \longrightarrow M'_\mathfrak{p} \xrightarrow{f_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \xrightarrow{g_\mathfrak{p}} M''_\mathfrak{p} \longrightarrow 0$$

obtenida de (1) localizando en $\mathfrak{p}$ es exacta.

(iii) Para cada ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$, la sucesión

$$0 \longrightarrow M'_\mathfrak{m} \xrightarrow{f_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m} \xrightarrow{g_\mathfrak{m}} M''_\mathfrak{m} \longrightarrow 0$$

obtenida de (1) localizando en $\mathfrak{m}$ es exacta.

†**20.** *Soporte de un módulo.* Sea A un anillo conmutativo. Si M es un A-módulo, el *soporte de M* es el conjunto $\operatorname{supp} M = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : M_\mathfrak{p} \neq 0\}$.

(*a*) Muestre que si M es finitamente generado entonces

$$\operatorname{supp} M = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : \operatorname{ann} M \subset \mathfrak{p}\}.$$

(*b*) Sea $f \in \mathbb{C}[X]$. Calcular el soporte de $\mathbb{C}[X]/(f)$ como $\mathbb{C}[X]$-módulo.

(*c*) Calcular el soporte del $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

21. Sea M un A-módulo a izquierda. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) Si M es libre entonces M_S es libre como A_S-módulo.

(*b*) Si M es proyectivo entonces M_S es proyectivo como A_S-módulo.

(*c*) Si M es finitamente generado entonces M_S es finitamente generado como A_S-módulo.

22. *Criterio local de platitud.* Sea A un anillo conmutativo Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) M es playo;

(ii) para cada $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\ A$, el $A_{\mathfrak{p}}$-módulo $M_{\mathfrak{p}}$ es playo;

(iii) para cada ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$, el $A_{\mathfrak{m}}$-módulo $M_{\mathfrak{m}}$ es playo.

23. Probar que si A es un anillo conmutativo absolutamente playo y $S \subset A$ es un subconjunto multiplicativamente cerrado entonces A_S es absolutamente playo.

Productos de torsión

24. Dados M y N grupos abelianos definimos

$$G(M,N) = \{(m,k,n) \in M \times \mathbb{Z} \times N \mid km = 0, kn = 0\}.$$

Sea $L(M,N)$ el $\mathbb{Z}$-módulo libre generado por $G(M,N)$ y sea $R(M,N)$ el subgrupo de $L(M,N)$ generado por los elementos

$$\begin{aligned}
&(m+m',k,n) - (m,k,n) - (m',k,n), && \text{si } km = km' = 0 \text{ y } kn = 0;\\
&(m,k,n+n') - (m,k,n) - (m,k,n'), && \text{si } km = 0 \text{ y } kn = kn' = 0;\\
&(m,kk',n) - (mk,k',n), && \text{si } kk'm = 0 \text{ y } k'n = 0;\\
&(m,kk',n) - (m,k,k'n), && \text{si } km = 0 \text{ y } kk'n = 0.
\end{aligned}$$

Definimos $M \odot N = L(M,N)/R(M,N)$. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) Existe un isomorfismo $M \odot N \cong N \odot M$.

(*b*) Si M o N es libre de torsión entonces $M \odot N = 0$.

(*c*) Dados $f : M \to M'$ y $g : N \to N'$ morfismos de grupos abelianos, es posible construir un morfismo de grupos abelianos $f \odot g : M \odot N \to M' \odot N'$ de manera que se cumplan las siguientes condiciones:

(i) Si $f' : M' \to M''$ y $g' : N' \to N''$ son morfismos de grupos abelianos entonces

$$(f' \odot g') \circ (f \odot g) = (f' \circ f) \odot (g' \circ g).$$

(ii) Si $f' : M \to M'$ y $g' : N \to N'$ son morfismos de grupos abelianos entonces

$$(f + f') \odot g = f \odot g + f' \odot g$$

y

$$f \odot (g + g') = f \odot g + f \odot g'.$$

(iii) $\mathsf{id}_M \odot \mathsf{id}_N = \mathsf{id}_{M \odot N}$.

(*d*) Si $f : M \to M'$ y $g : N \to N'$ son isomorfismos, entonces $f \odot g : M \odot N \to M' \odot N'$ es un isomorfismo.

(*e*) Si M, M', N y N' son grupos abelianos, entonces existen isomorfismos naturales

$$(M \oplus M') \odot N \cong (M \odot N) \oplus (M' \odot N)$$

y

$$M \odot (N \oplus N') \cong (M \odot N) \oplus (M \odot N').$$

(*f*) Si

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta entonces existe un morfismo de grupos $\partial : M'' \odot N \to M' \otimes N$ tal que

$$0 \longrightarrow M' \odot N \xrightarrow{f \odot \mathsf{id}_N} M \odot N \xrightarrow{g \odot \mathsf{id}_N} M'' \odot N \xrightarrow{\partial}$$
$$\longrightarrow M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes \mathsf{id}_N} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes \mathsf{id}_N} M'' \otimes N \longrightarrow 0$$

resulta exacta.

(g) Calcular $M \odot \mathbb{Z}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(h) Sea $T(M) \subset M$ el subgrupo de los elementos de torsión. Muestre que existe un isomorfismo $M \odot (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong T(M)$.

(i) Sean p un número primo y $S = \{p^i : i \in \mathbb{N}_0\}$. Se trata de un conjunto multiplicativamente cerrado en $\mathbb{Z}$, así que podemos considerar la localización $\mathbb{Z}_S$. Describir el grupo $M \odot \mathbb{Z}_S$.

(j) Supongamos que para cualesquiera $m \in M$ y $n \in N$ de orden finito, dichos órdenes son copirmos. Probar que $M \odot N = 0$.

(k) Probar que si M y N son grupos abelianos finitos entonces $M \otimes N \cong M \odot N$.