Sur les constantes d'intégration en relativité générale

Michel Mizony
Institut Camille Jordan, Umr 5208, Université Lyon 1

Résumé : On constate facilement que la relativité générale est traitée différemment en Occident et en Russie; plus exactement il y a un refus en occident de voir que la solution d'un problème gravitationnelle dépend de la forme de la métrique choisie; en effet pour la plupart des problèmes la résolution des équations d'Einstein fait intervenir deux sortes de constantes d'intégration, certaines sont covariantes, d'autres non. L'école russe a toujours pris en compte ces deux types de constantes quitte à en annuler parfois. Qui a raison, l'Orient ou l'Occident. Des conséquences très importantes en découlent. Ce texte fut écrit en 2013 pour mon ami mathématicien Pierre qui ne connaît pas l'anglais d'où la traduction de certains textes.

Dans la suite nous écrivons en italique les textes ou passages traduits.

I Sur le travail de Asanov, le problème est clairement posé.
The Schwarzschild Metric and de Donder Condition
Asanov
Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, USSR.
General Relativity and Gravitation, Vol. 21, No. 2, 1989

"The nonordinary mathematical form of the Schwarzschild metric in harmonic coordinates is considered. The ordinary property of energy density for it is demonstrated. ... "

La forme mathématique non usuelle de la métrique de Schwarzschild en coordonnées harmoniques est étudiée. La propriété classique de densité d'énergie est démontrée.

La solution à symétrie sphérique statique exacte des équations de la relativité générale pour "la masse ponctuelle" trouvée par Schwarzschild et Droste en 1916 est généralement appelé métrique (externe) de Schwarzschild. La théorie de la relativité générale est invariante sous les transformations inversibles générales de coordonnées, suffisamment lisse. Par conséquent, pendant plusieurs décennies, beaucoup de formes différentes ont été trouvées pour la métrique de Schwarzschild. On peut citer par exemple des résultats impressionnants tels que le théorème de Birkhoff et, en particulier, la forme non statique de Kruscal-Szekeres[1]. Ce dernier représente une extension minimale et complète de l' espace-temps de Schwarzschild, plus précisément, la partie minimale causale factorisée de la métrique du revêtement universel[2]. Toutes les autres formes ne sont clairement pas aussi complètes que celle de Kruskal et les transformations de coordonnées entre elles ne sont pas toujours inversibles. Mais cette situation ne désoriente pas beaucoup les physiciens, mais il les pousse parfois à faire des réserves, comme celle de dire que les transformations "ne sont pas équivalentes et les mesures correspondantes peuvent décrire différentes situations physiques"[3].

Dans les coordonnées "rectilignes, presque cartésiennes"[4]
$\bar{x}_0 = ct$, $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$, *la métrique de Schwarzschild s'écrit*

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu}\, d\bar{x}^\mu\, d\bar{x}^\nu = \left(1 - \frac{2\alpha}{\rho}\right)(c\, dt)^2 - \left[\delta_{ik} + \left(\frac{\rho}{\rho - 2\alpha} - 1\right)\frac{\bar{x}^i \bar{x}^k}{\rho^2}\right] d\bar{x}^i\, d\bar{x}^k \tag{1}$$

où i, k=1, 2, 3; μ , ν =0, 1, 2, 3 et ρ =racine($\bar{x}^i \bar{x}^i$). En fait ρ est la « coordonnée radiale ,»

$$\bar{x}^0 = x^0 = ct, \qquad \bar{x}^i = x^i \frac{\rho(r)}{r}, \qquad r \equiv \sqrt{x^i x^i} \tag{2}$$

de telle sorte que 2 π ρ est la circonférence du cercle (dans le 3-espace) ayant l'origine comme centre et passant par le point $\bar{x}^i$. La condition de correspondance avec la théorie de Newton lorsque ρ → ∞, donne α = GM/c^2; ici G est la constante gravitationnelle newtonienne, M est la masse du corps central, et c est la vitesse de la lumière. Il est évident que l'on peut utiliser ce système de coordonnées seulement si ρ > 2 α = $2GM/c^2$ = r_g, pour ne pas atteindre la coordonnée (sic !) bien connue de «singularité de Schwarzschild." Maintenant une transformation est possible de telle manière que les nouvelles coordonnées soient x^0, x^1, x^2, x^3 définies par :

$$\bar{x}^0 = x^0 = ct, \qquad \bar{x}^i = x^i \frac{\rho(r)}{r}, \qquad r \equiv \sqrt{x^i x^i} \tag{2}$$

La forme (1) prend la forme

$$\begin{gathered} ds^2 = \left(1 - \frac{2\alpha}{\rho(r)}\right)(c\,dt)^2 - \frac{\rho^2(r)}{r^2}\left[\delta_{ik} + \left(\frac{\rho'^2 r^2}{\rho^2 - 2\alpha\rho} - 1\right)\frac{x^i x^k}{r^2}\right] dx^i\,dx^k \\ g = \det g_{\mu\nu} = -\frac{\rho^4 \rho'^2}{r^4}, \qquad \rho' \equiv \frac{d\rho(r)}{dr} \end{gathered} \tag{3}$$

Pour la correspondance avec la théorie newtonienne, il faut exiger que lorsque r → ∞,

$$\lim \frac{\rho(r)}{r} = 1 \tag{4}$$

Lanczos [5] puis Rosen [6] et Fock [7] ont proposé que la transformation soit telle que les nouvelles coordonnées vérifient la condition de De Donder,

$$\frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}}\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\beta}\left(\sqrt{-\bar{g}}\,\bar{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial x^\mu(\bar{x}^\sigma)}{\partial \bar{x}^\alpha}\right) = 0 \tag{5}$$

Fock en 1939 appela ce système de coordonnées « harmonique » (de fait avec des conditions supplémentaires). Nous voyons à partir de (5) que $\bar{x}^0$=x^0 est elle-même harmonique. Les conditions de De Donder pour μ =1 ou 2, 3 mènent à l'équation de Legendre pour la fonction r=r(ρ), fonction inverse de ρ (r) :

$$\frac{d}{d\rho}\left[(\rho^2 - 2\alpha\rho)\frac{dr}{d\rho}\right] - 2r = 0 \tag{6}$$

La solution générale de cette équation est

$$r = C_1\left(\frac{\rho}{\alpha} - 1\right) + C_2 Q\left(\frac{\rho}{\alpha} - 1\right), \qquad Q(z) \equiv \frac{z}{2}\ln\frac{z+1}{z-1} - 1 \tag{7}$$

Ici C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration. En principe elles peuvent dépendre de α . Pour obtenir cette dépendance, posons α =0 dans l'équation (6) ce qui donne l'équation

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2 \frac{dr}{d\rho}\right) - 2r = 0$$

dont la solution générale est de la forme.

$$r = \bar{C}_1 \rho + \frac{\bar{C}_2}{\rho^2} \tag{8}$$

Évidemment $\bar{C}_1$ *et* $\bar{C}_2$ *ne dépendent pas de* α *. En utilisant le développement de la fonction de Legendre*

$$Q\left(\frac{\rho}{\alpha} - 1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^3 + ..., \qquad \frac{\alpha}{\rho} \to 0$$

et en comparant (7) et (8) pour α *petit, nous obtenons*
$C_1 = \alpha \bar{C}_1$ *et* $C_2 = 3\, \alpha \bar{C}_2\, \alpha^{-2}$ *. Ainsi l'équation (7) devient*

$$r = \bar{C}_1(\rho - \alpha) + \frac{3\bar{C}_2}{\alpha^2} Q\left(\frac{\rho}{\alpha} - 1\right)$$

Pour satisfaire la condition (4), il est suffisant (et nécessaire) de poser $\bar{C}_1 = 1$*. La constante* $\bar{C}_2$ *reste arbitraire. Ainsi nous obtenons*

$$r = \rho - \alpha + C_2 Q\left(\frac{\rho}{\alpha} - 1\right) = \rho - \alpha + \frac{3\bar{C}_2}{\alpha^2} Q\left(\frac{\rho}{\alpha} - 1\right) \tag{9}$$

Ce fut Lanczos qui le premier fit le choix $\bar{C}_2 = 0$ *, choix plus tard utilisé par Rosen [6] puis par Fock[7], et de nombreux auteurs. Ainsi nous avons la forme de Lanczos*

$$\rho(r) = r + \alpha \tag{10}$$

Pour lui les coordonnées harmoniques x^i *sont correctes si* $\alpha < r \leq \infty$ *et une singularité apparaît en* $r=\alpha$, $\rho = 2\alpha$ *. Les auteurs ci-dessus donnent différentes raisons pour justifier le choix* $\bar{C}_2 = 0$*. Nous allons brièvement discuter sur celles-ci. Lanczos justifie ce choix en utilisant l'argument supplémentaire qui consiste à dire que lorsque* α *tend 0 la forme de métrique (3) est exactement celle de Minkowski*

$$ds_M^2 = (c\, dt)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2.$$

Autrement dit il exige la forme invariante de ce dernier intervalle d'espace vide et rejette les autres transformations de coordonnées possibles tels que (2). Etant trop restrictif cet argument ne correspond pas au principe général de covariance et n'est donc pas nécessaire. Fock [7, p. 194] justifie le choix $C_2 = 0$ *comme suit: «A* $z = 1$*, la fonction Q devient infinie et donc le terme Q doit être absent ... . Vraiment, quand* $z \to 1$ *(ie,* $\rho \to 2\alpha$*),* $Q(z) \to -1/2 \ln(\rho - 2\alpha)$ *qui* $\to \infty$*. Le terme en Q conduit là maintenant (de fait ?) à deux ensembles de solutions* $\rho(r, C_2)$ *de l'équation. (9), l'une correspondant à* $C_2 > 0$ *et l'autre à* $C_2 < 0$*, au lieu de l'unique possibilité* $\rho(r) = r + \alpha$ *quand* $C_2 = 0$*. Pour les deux ensembles, il se produit une singularité pour la forme (3) à une valeur de* $\rho = \rho_s(r_s, C_2) > 2\alpha$*, voir traitement ci-dessous (voir fig. 1 également). Nous ajoutons que l'argument de Chou [8] coïncide pratiquement avec celui de Fock.*

L'existence dune nouvelle singularité de coordonnée pour C_2 *différent de 0 provient du fait que le 4-espace de Schwarzschild « initial » est quelque peu rétréci. En particulier il sera impossible d'approcher la singularité de Schwarzschild en* $\rho = 2\alpha$ *. Mais ces coordonnées harmoniques sur leur domaine de définition restent valides. Aucun doute, il restera possible de les utiliser en vue de la description d'un champ gravitationnel extérieur à un corps, lorsque la sphère singulière* *n'apparaît pas. Ainsi considérons la solution avec C_2 différent de 0. Le seul exemple que je connaisse de son utilisation est le travail de Balek[9] sur le bimétrisme intitulé « A Gravitation Theory with Privileged Harmonic Coordinates ». Il affirme que dans sa théorie cette métrique doit être utilisée pour construire le champ gravitationnel extérieur d'un corps de dimension finie. Maintenant, à moins de traiter la dépendance en α, il est pratique d'introduire la constante sans dimension*

$$K = -C_2/\alpha = -3\bar{C}_2/\alpha^3$$

Alors (9) prend la forme

$$r = \rho(r) - \alpha - K\alpha\left(\frac{\rho-\alpha}{2\alpha}\ln\frac{\rho}{\rho-2\alpha} - 1\right) \qquad (11)$$

Maintenant l'amplitude et le signe de la constante K restent encore indéterminées. Regardons les régions possibles pour les nouvelles coordonnées selon différentes valeurs de K.

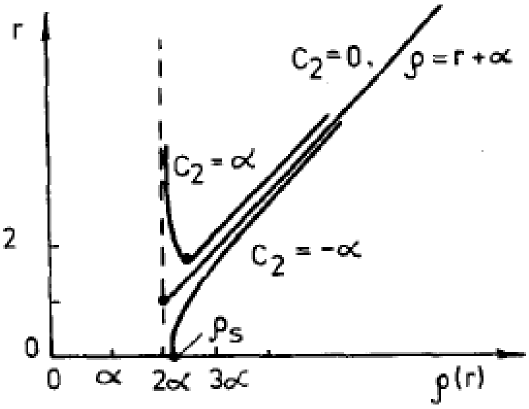

Fig. 1.

Si K<0, nous avons une singularité lorsque $\rho' \to \infty$ et quand

$$g = -\rho_s(r_s, K) \to -\infty.$$

Notons la valeur ρ de ce point par

$$\rho_s(r_s, K)$$

La métrique (3) est bien définie (cohérente) si $\rho_s < \rho \leq \infty$. Par exemple, lorsque K=-1, nous obtenons à partir de (9), $r_s \cong 1,6\,\alpha$; $\rho_s \cong 2,3\alpha$; i.e., la région correcte est un peu plus petite que la région initiale, $2\,\alpha<\rho\leq\infty$.

Quand $|K|$ est très grand, en fait $>>10^3$, nous avons approximativement :

$$\rho_s \approx \left(-\tfrac{2}{3}K\right)^{1/3}\alpha, \qquad r_s \approx \left(-\tfrac{9}{4}K\right)^{1/3}\alpha$$

Si K>0, la « coordonnée radiale » r peut avoir toute les valeurs positives; la singularité apparaît quand $r \to 0$. Quand $g \to -\infty$, comme $\rho_s(0, K)>0$, $\rho'>0$.En fait lorsque K=1, $\rho_s(0, 1) \cong 2{,}04$, ainsi la région permise $\rho_s(0, 1) <\rho \leq \infty$ est légèrement plus petite que la région de Schwarzschild initiale. Quand $K >>10^3$, $\rho_s(0, K)> (K/3)^{1/3}\,\alpha$. A l'infini spatial r, $\rho(r, K) \to \infty$, ces coordonnées tendent rapidement vers celles de Lanczos

$$\rho(r, K) = r + \alpha + \frac{K\alpha}{3}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 + \ldots, \qquad r = \rho - \alpha - \frac{K\alpha}{3}\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^2 + \ldots$$

Autrement dit, au moins si $0 \leq |K| <\sim 10$, de tels systèmes de coordonnées harmoniques peuvent être utilisées pour décrire le champ gravitationnel extérieur de quelques corps célestes connus.
Maintenant considérons la densité d'énergie de ce champ gravitationnel. Puisque en dehors du corps le tenseur de matière $T_{\mu\nu}=0$, le pseudo-tenseur impulsion-énergie d'Einstein dans des coordonnées harmoniques peut être écrit [7, p. 333] sous la forme

$$t_\mu^\nu = \frac{c^4}{16\pi G}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left[\frac{g_{\mu\tau}}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(gg^{\alpha\nu}g^{\sigma\tau} - gg^{\alpha\sigma}g^{\nu\tau}\right)\right]$$

La densité d'énergie associée à la forme (3) de métrique est

$$t_0^0 = \frac{c^4}{16\pi G}\frac{2}{r^2\rho D}\left[2\rho'^2 - \rho^2 r^{-2} - 4r\rho\rho'^2 D + 3\rho^2\rho' D - 2\rho\rho'' + r^2\rho^2\rho'' D\right]$$

où $D=\rho'(\rho^2-2\,a\,\rho)^{-1}$. Il est suffisant pour nous de trouver le comportement asymptotique quand α/ρ tend vers l'infini, en fait,

$$t_0^0 = \frac{c^4}{16\pi G}\frac{2\alpha^2}{r^4}\left(1 + \frac{2}{3}K\frac{\alpha}{r} + \ldots\right)$$

et nous voyons qu'il dépend de K. Ainsi en utilisant différents systèmes de coordonnées harmoniques, nous obtenons différentes valeurs de densité d'énergie pour le même 4-point physique.
Si nous prenons le pseudo-tenseur impulsion-énergie symétrique de Landau-Lifshitz-Fock adapté aux coordonnées harmoniques [7, p. 328],

$$U^{\mu\nu} = \frac{c^4}{16\pi G}\left(\hat{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\hat{g}^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta} - \frac{\partial\hat{g}^{\alpha\mu}}{\partial x^\beta}\frac{\partial\hat{g}^{\beta\nu}}{\partial x^\alpha}\right), \qquad \hat{g}^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}$$

alors pour (3) et (11) lorsque a/r tend vers l'infini, nous obtenons

$$U^{00} = -\frac{c^4}{16\pi G}\frac{2\alpha^2}{r^4}\left(7 + 20\frac{\alpha}{r} - 2K\frac{\alpha}{r} + \ldots\right)$$

et donc cette expression de densité d'énergie dépend aussi de K. Ce résultat mène à une conclusion coïncidant complètement avec celle soutenue depuis longtemps par Schrödinger [4] et Bauer [10] à propos de la dépendance du peudo-tenseur impulsion-énergie du choix d'un système de coordonnées. Maintenant ce n'est pas en faveur de l'hypothèse de Fock et d'autres auteurs à propos du privilège des coordonnées harmoniques et de la possibilité de résoudre certaines difficultés connues de la relativité générale en les utilisant.

REFERENCES

1. Kruscal, M. D. (1960). *Phys. Rev.*, **119**, 1743; Szekeres, G. (1960). *Publ. Mat. Debrecen*, **7**, 285.
2. Pimenov, R. I. (1984). *Siber. Math. J.*, **25**, 5, 119 (Russian).
3. Rosen, N. (1985). *Found. Phys.*, **15**, 4, 517.
4. Schrödinger, E. (1918). *Phys. Zeitschr.*, **19**, 4.
5. Lanczos, K. (1922). *Phys. Zeitschr.*, **23**, 24, 537.
6. Rosen, N. (1940). *Phys. Rev.*, **5**, 57, 147.
7. Fock, V. (1959). *The Theory of Space Time and Gravitation* (Pergamon Press, London).
8. Chou. P.-Y. (1983). In *Proceedings of the Third Marcel Grossman Meeting on General Relativity*, Hu Ning, ed. (Science Press, North-Holand, Amsterdam, New York, Oxford), p. 1.
9. Balek, V. (1984). *Acta Phys. Univ. Comenianae*, **24**, 17.
10. Bauer, H. (1918). *Phys. Zeitschr.*, **19**, 163.
11. Nakanishi, N. (1986). *Prog. Theor. Phys.*, **75**, **6**, 1351.

Commentaires à cet article « The Schwarzschild Metric and de Donder Condition » d'Asanov (traduit en septembre 2013)
En effet peut-on poser le problème de fond assez crûment mais ne le faut-il pas ? Puis essayer d'argumenter le fait que ce problème de fond est bien posé. Enfin de proposer des pistes sérieuses pour le résoudre.

Problème de fond 0 : « l'école russe » et «l'école occidentale » ne donnent pas la même réponse, en utilisant la relativité générale, à un même problème gravitationnel posé.

Il faut prendre « école ... » au sens de « la majorité des relativistes ... » les autres se ralliant à l'autre école. (Sans oublier des pressions des grandes revues et labos).

Nous allons donc considérer ce problème d'une boule sphérique dans un univers vide traité par Asanov ci-dessus dans un système de coordonnées harmoniques, pour cela voici deux références (plus récentes) traitant exactement du même problème.

1- The Schwarzschild metric: It's the coordinates, stupid!
Pierre Fromholz
Ecole Normale Supérieure, 75005 Paris, France
Eric Poisson
Department of Physics, University of Guelph, Guelph ON N1G 2W1 Canada
Clifford M. Will
Department of Physics, University of Florida, Gainesville FL 32611
Institut d'Astrophysique, 75014 Paris, France
gr-qc (Dated: August 5, 2013)

2- Le problème du déchet astral, chapitre 6 de
La relativité générale aujourd'hui ou l'observateur oublié, ed ALEAS, Lyon, 2003
Michel Mizony
Institut Girard Desargues (CNRS UMR 5028), Université Lyon 1

Il y a un grand point commun entre ces deux textes et celui d'Asanov un accord sur l'essentiel du texte d'Asanov. Les mêmes formules (à des notations près) jusque y compris la formule (11); seules

les méthodes pour leur obtention sont légèrement différentes. Et la partie mathématique de la conclusion est identique à celle d'Asanov :
Il existe une infinité de formes de la même métrique qui sous la condition de jauge harmonique dépendent d'un paramètre non covariant (nommé K par Asanov, C puis B par Fromholz et autres et A par Mizony), ce paramètre commun dépendant de la boule considérée, de même masse de Schwarzschild M. Un accord sur le fait que ce paramètre est relié à une « énergie de la boule »; En effet deux boules de même masse (de Schwarzschild) mais différentes (par leur composition, dimension , …) n'ont pas la même « énergie » (exprimée par exemple par le pseudo-tenseur de Landau et Lifschitz).

Il y a divergence seulement sur les conclusions à en tirer.

1 - Les dires de chacun

a) Asanov termine son article en disant : « *et donc cette expression de densité d'énergie dépend aussi de K. Ce résultat mène à une conclusion coïncidant complètement avec celle soutenue depuis longtemps par Schrödinger [4] et Bauer [10] à propos de la dépendance du peudo-tenseur impulsion-énergie du choix d'un système de coordonnées. Maintenant ce n'est pas en faveur de l'hypothèse de Fock et d'autres auteurs à propos du privilège des coordonnées harmoniques et de la possibilité de résoudre certaines difficultés connues de la relativité générale en les utilisant.*»
Fallait-il qu'il ajoute la dernière phrase pour que son article soit publié dans GRG ? Elle n'a rien à voir avec ce qui précède, puisque l'unicité (la principale difficulté dont il est question) que cherchait Fock provient d'ailleurs, de fait du recollement des solutions intérieure et extérieure à une boule de matière, problème difficile que quasiment personne n'avait essayé d'affronter à l'époque. (Cela se comprend car la structure de variété vient juste d'être publiée).
Cette dernière phrase aurait méritée un paragraphe entier pour faire un éventuel lien avec ce qui précède et qui est juste.
Ainsi il faut en rester à l'essentiel de l'article disant que la forme de métrique extérieure dépend d'un autre paramètre (ici K), bien que ce soit toujours « la métrique de Schwarzschild ».

b) Fromholz, Poisson et Will disent plusieurs choses importantes de mon point de vue :

i) « Yet apart from some highly abstract mathematical topics, virtually everything covered in a typical course in general relativity uses coordinates. The reason is simple: it's hard to do explicit calculations – derivatives, products, sums – without coordinates. It is here where coordinates matter. » i.e. *« Pourtant, en dehors de quelques sujets mathématiques très abstraits, presque tout ce qui est étudié dans un cours typique de relativité générale utilise des coordonnées. La raison en est simple: il est difficile de faire des calculs explicites - des dérivés, des produits, des sommes - sans coordonnées. C'est là que se pose la question des coordonnées. »*

ii) « Post-Minkowskian and post-Newtonian theories have become so central to gravitational-wave physics and astrophysics, that two of us (EP and CMW) have recently completed a textbook entitled Gravity: Newtonian, post-Newtonian, Relativistic[8] that uses the Landau-Lifshitz formulation as the centerpiece of its discussion of general relativity. Like any text-book, it features exercises at the end of each chapter, and thus, in writing the chapters in which the Landau-Lifshitz formulation is laid out, we imagined posing the obvious exercise for the student: Solve these equations exactly in vacuum for static, spherical symmetry, and thus obtain the Schwarzschild metric. What could be simpler? » i.e. *« Les théories post-minkowskienne et post-newtonienne sont devenues tellement centrales dans la physique et dans l'astrophysique des ondes gravitationnelles, que deux d'entre nous (EP et CMW) ont récemment achevé un manuel intitulé Gravity: newtonian, post-newtonian, relativistic qui utilise la formulation de Landau-Lifshitz comme la pièce maîtresse de sa discussion de la relativité générale. Comme tout livre de cours, il propose des exercices à la fin de chaque chapitre, et donc, pour les chapitres dans lesquels la* *formulation de Landau-Lifshitz est présentée, nous avons imaginé des exercices évidents pour l'étudiant: Résoudre ces équations exactement dans le vide statique, à symétrie sphérique, et ainsi obtenir la métrique de Schwarzschild. Quoi de plus simple? »*

iii) « This turned out to be not at all simple, and the exercise provides the perfect illustration of the dictum that, while the choice of coordinates has no physical meaning whatsoever, it can have a big impact on the ease of finding a solution of Einstein's equations. Furthermore, although one solution of the LL equations yields the Schwarzschild metric in the so-called harmonic radial coordinate r_H, related to the standard Schwarzschild coordinate r_S by $r_H = r_S - M$, where M is the mass of the object, there is an infinite set of additional solutions, for which we are unable to obtain closed form expressions. Exploring the nature of these additional solutions yields insights into the nature of coordinate freedom that one does not get from standard textbook treatments of the Schwarzschild metric. » i.e. *« Ceci tourne au cauchemar (n'est pas simple du tout), et cet effort fourni la parfaite illustration du dicton disant, bien que le choix de coordonnées n'ait aucun sens physique, toujours est-il qu'il peut avoir un profond impact pour trouver facilement une solution aux équations d'Einstein. De plus, bien qu'une solution des équations de LL (Landau-Lifshitz) mène à la métrique de Schwarzschild avec la ainsi nommée coordonnée radiale harmonique rH, reliée à la coordonnée usuelle de Schwarzschild rS par rH=rS-M, où M est la masse de l'objet, il existe un ensemble infini de solutions supplémentaires, pour lesquels nous sommes incapables de trouver des expressions formelles. L'étude de propriétés de ces solutions supplémentaires jette un éclairage sur la nature de la liberté de choix de coordonnées, choix que l'on ne trouve pas dans le traitement, par les ouvrages usuels, de la métrique de Schwarzschild. »*

Les trois auteurs de cet article étant prolixes, il y aurait d'autres citations à faire. Cependant ils retrouvent les mêmes mêmes résultats qu'Asanov; mais pour l'interprétation de ces résultats, les citations montrent leur embarras. Oui, même si on est tous d'accord sur le fait qu'un système de coordonnées n'a en soi aucune signification physique (covariance oblige), la question reste : Pourquoi la jauge harmonique est-elle si efficace pour rendre compte d'un tas d'observations ? De manière plus générale, pourquoi un choix approprié d'un système de coordonnées (choix obligatoire si l'ont veut confronter la relativité générale aux observations astronomiques) est-il pertinent? C'est la question de fond de cet article (voir le titre). Visiblement les auteurs qui sont de l'école occidentale, se posent la question du pourquoi de cette erreur dans leur école de pensée!

Un rappel en deux points

a) pour un système borné dans un espace vide et « émettant un champ faible » le formalisme nommé PPN (le formalisme post-Newtonien) qui repose sur la jauge harmonique, marche bien (aussi bien d'un point de vue théorique que pour la confrontation aux observations).

b) Pour un champ fort (et donc quelconque) mais lorsqu'il y a symétrie sphérique du problème alors les solutions d'Asanov (et de beaucoup d'autres) sont parfaitement justifiées, théoriquement parlant (et elles donnent évidemment pour les champs faibles les approximations PPN).

2 – Première reformulation du problème de fond

Nous avons dit :

Problème de fond 0 : « l'école russe » et «l'école occidentale » ne donnent pas la même réponse, en utilisant la relativité générale, à un même problème gravitationnel posé.

Nous venons de voir deux positions (uniquement sur l'exemple de la métrique de Schwarzschild, et nous donnerons un autre exemple plus loin) : « l'école russe » attache du sens à la jauge harmonique, et «l'école occidentale » nie ce sens; toutefois en travaillant sur le formalisme PPN, et montrant leurs interrogations comme en témoigne l'article de Fromholz et autres (et aussi le livre de Weinberg de 1972 sur la gravitation), nous pouvons préciser ce problème.

Problème de fond 1 : Deux formes différentes d'une même métrique peuvent-elles traduire deux problèmes physiques différents ? (tout en respectant la covariance, en particulier le fait que les coordonnées ne soient pas mesurables, i.e. n'aient aucun sens physique).

Autrement dit, dans l'exemple de Schwarzschild traité ci-dessus, la constante K (de Asanov) a-t-elle un sens physique?
Ceci veut dire que si la réponse est positive à ce problème de fond, « l'école russe » à raison, si elle est négative « l'école occidentale » a raison, si on ne peut pas trancher, il faut aller plus loin.

Prenons une boule en or (ou en plomb en référence à Galilée) et une boule de plumes, les deux de même « masse de Schwarzschild ». Quitte à prendre des objets limites pourquoi ne pas prendre ces deux exemples avec de plus leur masse égale à une masse solaire dans un univers vide et sans vie! On supposera aussi pour simplifier les calculs que ces deux « objets célestes » on une « densité constante » (problème, que veut dire densité constante? Plus précisément comment le traduire mathématiquement parlant dans un univers non-euclidien ?), ce qui n'est qu'une hypothèse simplificatrice ne changeant pas la nature du résultat. Eh bien si on calcule K_{or} et K_{plume} on obtient évidemment que K_{or} est différent de K_{plume}. En effet comment le justifier proprement ? Pour cela le terme « évidemment » est bien trop rapide et cache beaucoup de théorie. En effet pour répondre à cette question il faut recourir à la théorie des variétés. Plus précisément on cherche la solution intérieure à la boule, puis la solution extérieure et pour que la métrique soit bien définie sur tout l'espace temps, on doit avoir recours à un recollement des métriques intérieure et extérieure pour obtenir une variété de classe C1 et même C2 par morceaux pour pouvoir utiliser les équations des géodésiques (dans cet exemple elle sera de classe C2 sauf éventuellement au bord de la boule où elle sera C1). Du fait que le contenu des boules est différent et que pour une même masse de Schwarzschild les rayons sont différents, le calcul du recollement « lisse » donne K_{or} différent de K_{plume}. Comme le note Asanov en utilisant le pseudo-tenseur de Landau et Lifshitz, cette constante K traduit une propriété de la boule, une propriété classique, une énergie thermodynamique, qui ne relève donc pas de la relativité générale. On notera que heureusement que ce pseudo-tenseur ne soit pas un tenseur sinon notre constante K ne pourrait pas avoir un sens de condition aux limites classique.
On soulignera donc le point important suivant, les deux constantes M et K n'ont pas le même statut, l'une via le rayon de Schwarzschild relève de la relativité générale (et en première approximation est interprétée comme la masse newtonienne de notre boule, l'autre K est une condition aux limites traduisant des propriétés classiques (thermodynamique) de notre boule. Pour le détail voir chapitre 6 « le problème du déchet astral » de mon livre. Aussi on peut donner une

3- deuxième reformulation du problème de fond
Le problème de fond 1 posait la question :
Deux formes différentes d'une même métrique peuvent-elles traduire deux problèmes physiques différents ?
La réponse est oui pour l'exemple ci-dessus.

Problème de fond 2 : si dans une métrique il y a des constantes qui apparaissent, nous les appellerons constantes gravitationnelles; si dans certaines formes de cette métrique, il apparaît de nouvelles constantes nous les appellerons constantes des conditions aux limites (et ou initiales).
Ainsi deux formes d'une même métrique correspondent ipso facto à deux problèmes physiques différents si les constantes des conditions aux limites proviennent d'autres forces que celle du champ gravitationnel.
Autrement dit il y a des constantes covariantes et d'autres qui ne le sont pas.
« L'école russe » semble avoir raison; mais est-ce tout à fait général ?

Une question se pose :

Si les coordonnées n'ont aucun sens physique ce qui est parfaitement juste, et si la solution est « régulière », une des formes de la métrique va dépendre des conditions aux limites, en particulier la boule est d'or ou la boule est composée de peluches (en effet le temps de faire les calculs, les plumes se sont localement agrégées pour former de jolis motifs à 3 dimensions), que penser du statut des coordonnées harmoniques ? En effet, elles jouent un rôle très particulier, et sont utilisées par tout les relativistes mêmes occidentaux, car il est à la base du formalisme post-newtonien qui a toujours été corroboré par les observations, pourquoi? Fromholz, Poisson et Will disent que ce choix de coordonnées permet de laisser la place à deux modes physiquement mesurables de la polarisation d'une onde gravitationnelle!
Ainsi si on n'utilise pas la jauge harmonique, des pans entiers d'observations faites pour corroborer la relativité générale tombent (tout ce qui est basé sur ce formalisme post-newtonien, appelé PPN); mais si on l'utilise et si on fait le raccordement des métriques au bord d'une boule, alors il est vite fait de montrer que cette boule a un rayon strictement supérieur au rayon de Schwarzschild (en clair tout effondrement gravitationnel ne conduit jamais à un trou noir). Conséquence : « l'école occidentale » doit choisir, soit le formalisme PPN a un sens et il n'y a pas de trou noir, soit il y a des trous noirs et alors le formalisme PPN n'a aucun sens ! « L'école occidentale » nage dans la contradiction en ne respectant pas ce qu'est une structure de variété (de classe C1, C2 par morceaux). Question annexe : est-ce pour cela que le problème de raccordement de métriques à la surface d'une boule est si peu étudié ou si mal fait comme il l'est clairement dit dans l'article « Simple Analytic Models of Gravitational Collapse », 2005, par R. J. Adler, J. D. Bjorken, P. Chen, and J. S. Liu : « But the actual dynamical process of collapse, whereby a massive body becomes a black hole, is a more complex dynamical problem, and is often either neglected or treated heuristically and qualitatively. »

Après cette parenthèse, revenons à notre problème de fond en vue de l'éclairer par un deuxième exemple.

Si l'on veut facilement un exemple simple, prenons celle de la « métrique de De Sitter ». On prend sa métrique dont tout le monde s'accorde à dire qu'elle a la forme bien connue depuis quasiment la naissance de la relativité générale : $ds^2=(1-\lambda^2r^2)dt^2+$ ….
Évidemment il y a autant de métrique de De Sitter que de valeurs du paramètre lambda (qui traduit le rayon de courbure de l'hyperboloïde espace de De Sitter SO(1,4)/SO(1,3) munie d'une des métriques invariantes par l'action du groupe de De Sitter SO(1,4) sur son espace homogène (ces métriques sont paramétrées par une constante, λ). Donc on est d'accord jusqu'ici, il y a autant de modèles de De Sitter que de valeur du paramètre λ.
Maintenant prenons un de ces modèles en fixant λ, pour être sûr qu'il soit bien fixé on va dire que $\lambda^2=\Lambda/3$, où Λ est la valeur de la constante cosmologique. On ne sait pas combien elle vaut, mais tout le monde est d'accord sur le fait qu'elle a une valeur précise.
Un calcul simple montre que si un modèle d'univers est un espace de De Sitter associé à la valeur λ, alors on $\Lambda/3=\lambda^2=Ho^2\,\Omega o$, où Ho et Ωo sont les valeurs aujourd'hui du paramètre de Hubble et du paramètre de densité. Ainsi Ho et Ωo sont autant de valeurs aux limites qui donnent différents modèles d'univers ayant une forme de métrique associée à la même métrique. Si λ est une constante covariante, Ho et Ωo ne le sont pas. Comment le voir simplement ? Si $\Omega o>1$ la partie espace est fermée, si $\Omega o=1$ elle est plate et si $\Omega o<1$ elle est ouverte; plus généralement pour deux valeurs différentes de Ωo, le modèle d'univers est défini sur deux ouverts différents de l'hyperboloïde de De Sitter associé à λ: dans cet exemple si la métrique $ds^2=(1-\lambda^2r^2)dt^2+$ …. est toujours la même formellement parlant, elle n'est pas définie sur le même ensemble et donc cette métrique de De Sitter donne lieu à une infinité de modèle d'univers, infinité paramétrée par la constante mesurable et non covariante Ho. Pour établir proprement ces résultats le plus simple est de travailler dans la variété quotient SO(1,4)/SO(1,3).

Le problème est donc bien : est-ce une métrique ou une forme de métrique qui caractérise un problème physique donné, tout en respectant le fait que les coordonnées n'ont aucun sens physique? autrement dit en respectant la covariance qui n'est qu'une exigence mathématique (très pratique car facilitant grandement des calculs mais dont la contrepartie est de masquer certains problèmes physiques)

Remarque : il est sûr que sans la théorie des variétés ce problème ne pouvait pas être bien posé; or cette théorie qui a été créée dans les années 1930, n'a vu le jour (publiée) que dans les années 1950, « l'école russe » a bien négocié ce tournant, « l'école occidentale » a sombré (dans quel trou noir ?). Depuis il pleut des cordes mais peut-être que la théorie des boucles, nettement plus solide sur le plan mathématique, aidera à sortir de cette impasse.