

Matematika 2

(BMA2 + KMA2)

Autoři textu:

Prof. RNDr. František Melkes, CSc.

Mgr. Martin Řezáč

1 Úvod a zařazení předmětu ve studijním programu

1.1 Úvod

Předložený elektronický text je určen především studentům bakalářského studia na FEKT VUT v Brně a to jak prezenčního, kombinovaného tak i distančního typu. Obsahuje nejprve úvod do teorie funkce více proměnných, pak základní kapitoly z oblasti řešení diferenciálních rovnic, a poté nezbytné pojednání o funkci komplexní proměnné jako matematickém základu pro navazující kapitoly o integrálních transformacích. Veškerá látka je vzhledem k rozsahu a zaměření textů probírána tak, aby jednak v rozumné míře a srozumitelných způsobem popisovala základní problematiku uvedených matematických disciplín a hlavně, aby umožňovala využití v praxi.

Vážení studenti, omluvte prosím nedostatky tohoto textu, které z časových důvodů nebylo možné upravit. Jeho autor profesor Melkes zemřel doslova při práci nad úpravami tohoto textu. Je možné, že některé ukázky, definice nebo odkazy na ně jsou uvedeny s nesprávným číslem kapitoly. Omluvte nepřítomnost shrnutí a otázek v kapitolách 7 a 8. Také některé hypertextové úpravy nebyly dokončeny.

Předmět BMA2 je z matematických kursů nejtěžší, ale následující text i tak v některých partiích zdaleka překračuje jeho rámec. Proto pro přípravu ke zkoušce jsou směrodatné pokyny zkoušejícího. Na procvičení kapitol 3-6 je základním doporučeným textem sbírka příkladů RNDr. E. Kolářové (viz elektronické texty FEKT). Příklady 1.6 až 1.10 vstupního testu jsou i se svým vzorovým řešením dobrým úvodem ke kapitole 4 (= do problematiky komplexních čísel).

1.2 Úvod do předmětu

Předmět *Matematika 2* je zařazen do druhého semestru bakalářského studia na FEKT. K jeho úspěšnému zvládnutí je zapotřebí, aby student byl v dostatečné míře seznámen se základními matematické pojmy, se základy lineární algebry a geometrie, s diferenciálním a integrálním počtem jedné a eventuálně i více proměnných a to v rozsahu prerekvizitního předmětu *Matematika 1*.

Do předmětu *Matematika 2* jsou zahrnuty dvě významné matematické disciplíny, které velice těsně souvisejí s četnými praktickými aplikacemi, a to jak technického tak i netechnického charakteru. Těmito disciplínami jsou diferenciální rovnice a integrální transformace.

Diferenciální rovnice se vyskytují všude tam, kde modelujeme působení nějaké změny, pohybu, vývoje či růstu. Setkáme se s nimi např. při navrhování elektrických obvodů, při analýze fyzikálních polí, při sledování pohybu těles, při vyšetřování koncentrace chemických reakcí, při studiu ekonomických procesů, při popisu toku zdrojů v tržní ekonomice, při modelování růstu populace, při simulování biologických pochodů a pod. Při řešení každého takového problému je nutné, a to na základě vlastností uvažované problematiky, příslušnou diferenciální rovnici (eventuálně soustavu diferenciálních rovnic) nejprve sestavit a poté vhodným způsobem vyřešit. V tomto předmětu se sestavováním diferenciálních rovnic, až na ně-

kolik málo výjimek, zabývat nebudeme. Zaměříme se jen na vysvětlení a aplikování některých základních metod jejich řešení.

V praxi se ukazuje, že mnoho konkrétních úloh, zvláště úloh spojených s lineárními diferenciálními rovnicemi, lze úspěšně řešit také pomocí řady formálních operací. V případě této tzv. metody integrální transformace postupujeme následovně: zadaný problém nejprve vhodným způsobem transformujeme, transformovanou a zpravidla jednodušší úlohu vyřešíme a zpětnou transformací pak získáme řešení původního problému. Uvedený postup se s výhodou aplikuje např. ve sdělovací technice, automatizaci, teorii systémů, energetice, elektrických obvodech apod. Existuje řada rozličných integrálních transformací. V těchto skriptech se zaměříme zejména na Fourierovu a Laplaceovu transformaci a na tzv. (a ne plně integrální) transformaci Z.

S ohledem na aplikační zaměření textů budeme většinu tvrzení formulovat bez příslušného důkazu. V několika málo případech si však stručně naznačíme, jak by se uvedené tvrzení dokazovalo. Přitom, pokud to bude možné, se budeme vyhýbat složitým teoretickým úvahám. Zaměříme se spíše na využití formulovaných vět při řešení rozmanitých úloh. Proto text doplňuje velké množství řešených úloh umístěných bezprostředně za probranou látkou, které se týkají. Tyto úlohy jsou dvojího druhu. Úlohy s titulkem **Ukázka** mají ilustrovat využití právě probírané problematiky a proto nejsou obvykle příliš složité. Je u nich uveden dostatečně podrobný postup řešení. Některé z těchto úloh budeme řešit více způsoby a to proto, abychom zdůraznili rozmanitost přístupu k řešení zadaného problému, což se může v praxi projevit jako velice užitečné. Úlohy s titulkem **Ukázka** naznačují, že se jedná o poněkud obtížnější úlohu, kterou je možné při prvním čtení pominout. Protože se však i tyto úlohy týkají probírané látky, je vhodné je při dalším čtení alespoň zběžně projít. Další řešené i neřešené příklady určené k samostatné práci studentů jsou uvedeny v [17] (eventuelně pro náročné čtenáře i v [7]) a příslušná počítačová cvičení v [10]. Pokud se některým čtenářům budou zdát jisté partie těchto textů poněkud abstraktní, je to jen proto, abychom si připravili základ pro případné prohloubení látky vzhledem k aplikacím.

Před vlastním čtením skript bychom rádi upozornili na některou užitou symboliku, která by mohla vést k nedorozumění. Symbolem C budeme v dalším rozumět prostor všech spojitých funkcí, přičemž za tento symbol uvedeme, eventuelně v závorkách, definiční obor těchto funkcí. Tedy např. $C\langle a, b \rangle$ označuje prostor všech spojitých funkcí jedné proměnné definovaných na intervalu $\langle a, b \rangle$ nebo $C(\Omega)$ je prostor spojitých funkcí definovaných na oblasti Ω . Podobně je to se symbolem C_n , který označuje prostor všech funkcí, jejichž derivace n -tého řádu jsou v příslušné oblasti spojitě. Na rozdíl od tohoto označení budeme symbolem C označovat množinu všech komplexních čísel.

Pro zjednodušení zápisu některých vztahů budeme využívat tzv. *Kroneckerova symbolu*. Jedná se o dvouhodnotovou veličinu, která je rovna jedné, pokud $i = j$ a vymizí, pokud $i \neq j$. Dá se také vyjádřit pomocí jedné z relací

$$d_{ij} = \max(1 - |i - j|, 0) = 1 - \min(|i - j|, 1).$$

Z hlediska úpravy textu se při práci s exponenciální funkcí přidržíme novějšího zápisu $\exp(x)$ místo původního e^x .

Vstupní test

- Příklad 1.1** Vysvětlete význam symbolů $\forall, \exists, \exists!, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \times, \cup, \cap, \subset, \in, \notin, \rightarrow$.
[výsledek](#)
- Příklad 1.2** Negujte následující složený výrok a rozhodněte o jeho pravdivosti:
($\forall x \in \mathbf{R} : x^2 \neq -2$) \Rightarrow ($\forall a, b, c \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R} : ax^2 + bx + c = 0$). [výsledek](#)
- Příklad 1.3** Vysvětlete význam označení číselných tříd $\mathbf{N}, \mathbf{I}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ a $\bar{\mathbf{C}}$.
[výsledek](#)
- Příklad 1.4** Vyjádřete množinu $M = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$ jednodušším zápisem.
[výsledek](#)
- Příklad 1.5** Jak je definována imaginární jednotka? [výsledek](#)
- Příklad 1.6** Napište algebraický, trigonometrický a exponenciální tvar komplexního čísla. [výsledek](#)
- Příklad 1.7** Znázorněte v Gaussově komplexní rovině velikost (=modul) a argument komplexního čísla a číslo komplexně sdružené. [výsledek](#)
- Příklad 1.8** Jak zní Moivreova věta? [výsledek](#)
- Příklad 1.9** Popište způsob odmocňování komplexního čísla. [výsledek](#)
- Příklad 1.10** Vypočtěte a v Gaussově rovině znázorněte řešení algebraické rovnice $z^6 = 1$ pro $z \in \mathbf{C}$. [výsledek](#)
- Příklad 1.11** Určete, pro které hodnoty parametru $c \in \mathbf{R}$ je přímka p vyjádřená rovnicí $2x - y + c = 0$ a) tečnou, b) sečnou, c) vnější přímkou kružnice k se středem $S = [3, -1]$ a poloměrem $r = 2$. [výsledek](#)
- Příklad 1.12** Uveďte definici derivace funkce jedné proměnné a naznačte její geometrický a fyzikální význam. [výsledek](#)
- Příklad 1.13** Popište, co rozumíte pod pojmem úplný (totální) diferenciál. [výsledek](#)
- Příklad 1.14** Vyšetřete průběh funkce $f(x) = x^2 e^{-x}$. [výsledek](#)
- Příklad 1.15** Vysvětlete rozdíl mezi určitým a neurčitým integrálem. [výsledek](#)
- Příklad 1.16** Metodou per partes najděte integrál $\int x^3 e^{3x} dx$. [výsledek](#)
- Příklad 1.17** Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{5 dx}{x^3 + 2x^2 + 5x}$. [výsledek](#)
- Příklad 1.18** Proud v elektrickém obvodu je dán vztahem $i(t) = (4 + 5t)e^{-bt}$, kde b je kladná konstanta. Určete celkový náboj $Q = \int_0^{\infty} i(t) dt$. [výsledek](#)

2 Funkce více proměnných

Cíle kapitoly: V této kapitole se stručně seznámíme se základními pojmy, které se týkají funkcí více proměnných a jsou nezbytné pro výklad dalších tematických celků probíraných v rámci předmětu BMA 2. To znamená, že i náplň kapitoly je tak poznamenána a neobsahuje proto i některé standardně probírané pasáže a řešení některých typických příkladů. Dalším omezením je zaměření se zejména při geometrických interpretacích na funkce pouze dvou proměnných. Toto je motivováno zachováním názornosti, neboť při tomto omezení budou naše úvahy probíhat v trojrozměrném Euklidovském prostoru. Zavedení pojmu funkce dvou proměnných je doplněno pojmy globálních charakteristik, jako jsou vrstevnice a obecně hladiny. Po nezbytném seznámení se s pojmy limita a spojitost funkce více proměnných, je pozornost zaměřena na problematiku parciálních derivací a diferenciálů spolu s jejich využitím. A to jak ke studiu lokálních vlastností funkcí (gradient funkce a derivace ve směru), tak i pro přibližný výpočet funkčních hodnot a stanovení tečné roviny a normálové přímky. Dále jsou uvedeny některé známé diferenciální operátory. Závěrem je využito parciálních derivací k uvedení některých kvalitativních vlastností řešení rovnic o dvou a třech proměnných.

2.1 Definice a základní pojmy

Reálnou funkcí n reálných proměnných rozumíme zobrazení f množiny $D(f)$ na množinu $H(f)$, tj. $f : D(f) \rightarrow H(f)$, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ nazýváme *definičním oborem* a $H(f) \subset \mathbb{R}$ *oborem hodnot* funkce f . Funkci obvykle zapisujeme ve tvaru $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nebo zkráceně $f(x_1, \dots, x_n)$. V případě funkce dvou proměnných resp. tří proměnných obvykle preferujeme zápis $z = f(x, y)$ resp. $u = f(x, y, z)$. Příklady takovýchto funkcí mohou být známé jednoduché vzorce. Objem V rotačního válce je funkcí poloměru R podstavy a výšky v , což zapíšeme

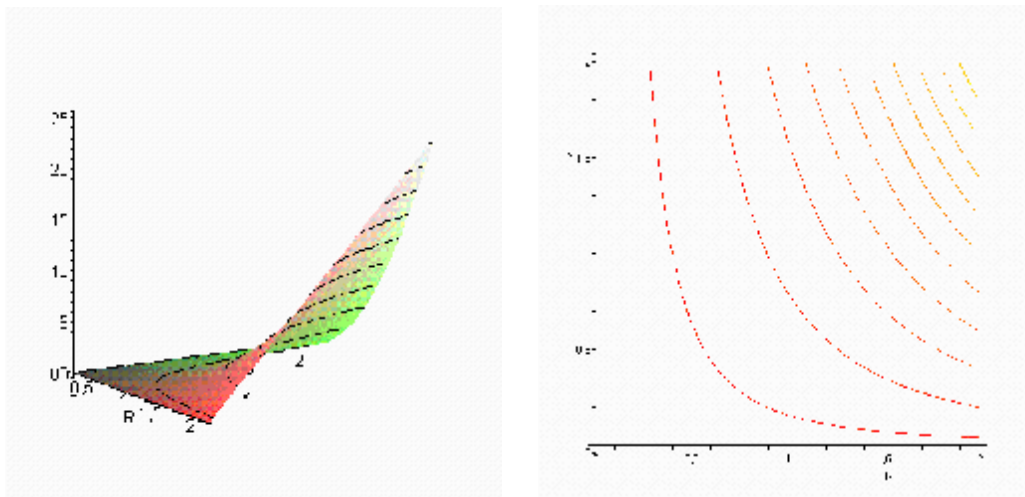
$$V = V(R, v) = p \cdot R^2 \cdot v.$$

Analogicky objem V komolého rotačního kužele je funkcí tří proměnných výšky v a poloměrů R, r jeho spodní a horní podstavy, což zapíšeme

$$V = V(R, v, r) = \frac{p \cdot v}{3} (R^2 + Rr + r^2).$$

Funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ obvykle znázorňujeme pomocí *grafu* jako množinu bodů $[x, y, f(x, y)]$ v tzv. Euklidovském prostoru dimenze 3 (E^3). Pro grafické znázornění v dvourozměrném vyjádření (obrázek) využíváme často tzv. metodu rovinných řezů. Speciálním případem těchto křivek jsou *vrstevnice*, což jsou průsečnice grafu funkce s rovinami typu $z = z_0$. Interpretujeme-li zemský povrch lokálně jako funkci dvou proměnných, kdy dvojici čísel, chápaných jako zeměpisná šířka a délka bodu zemského povrchu,

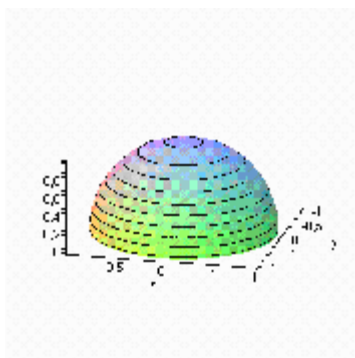
přičadíme jeho nadmořskou výšku, je takto zavedená křivka vrstevnicí na mapě. Pro funkce n proměnných definujeme *hladinu* funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ na úrovni $c \in \mathbb{R}$ jako množinu bodů $\{[x_1, \dots, x_n] \in D(f) \mid f(x_1, \dots, x_n) = c\}$. V následujících obrazcích je pro výše uvedenou funkci objemu rotačního válce v závislosti na poloměru podstavy $R \in [0, 2]$ a výšky tělesa $v \in [0, 2]$ znázorněn graf a vrstevnice:



Poznamenejme, že volba intervalů $R \in [0, 2]$, $v \in [0, 2]$ nezávisle proměnných byla dána rozhodnutím autora. Pokud není součástí zadání funkce stanovení definičního oboru $D(f)$, např. u zmíněného příkladu je vhodné požadovat $D(f) = [0, \infty) \times [0, \infty)$ ve shodě s geometrickým významem proměnných R, v , má se za to, že jím je maximálně přípustná množina. Nalezení $D(f)$ a vymezení oboru hodnot je $H(f)$ a vrstevnic je typickým příkladem.

Ukázka 2.1: Pro funkci $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ určete definiční obor, obor hodnot a vrstevnice.

Definiční obor je dán splněním nerovnosti $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, čemuž odpovídá kruh se středem v počátku o poloměru 1, nebo-li $D(f) = \{[x, y] \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Výraz pod odmocninou nabývá maximální hodnoty 1 a přípustné minimum je 0. Z toho vyplývá obor hodnot $H(f) = [0, 1]$. Při určování vrstevnic hledáme množiny bodů $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, jejíž souřadnice vyhovují rovnici $x^2 + y^2 = 1 - c^2$, pro vrstevnici „výšky“ c tj. průsečnici grafu funkce s rovinou $z = c$. Řešeními těchto rovnic jsou kružnice se středem v počátku o poloměru $\sqrt{1 - c^2}$.



Pro funkce, které mají neprázdný průnik definičních oborů, zavádíme analogicky jako u funkce jedné reálné proměnné *algebraické operace*, což jsou funkce definované na tomto průniku vztahy:

$$\begin{aligned} (f \pm g)(X) &= f(X) \pm g(X), & a f(X) &= a \cdot f(X), & a \in R \\ (fg)(X) &= f(X) \cdot g(X), & \frac{f}{g}(X) &= \frac{f(X)}{g(X)}, & \text{je-li } g(X) \neq 0, \end{aligned}$$

kde $X = [x_1, \dots, x_n] \in R^n$. Při operaci *skládání funkcí* více proměnných je situace složitější. Pro funkci $y = f(u_1, \dots, u_m)$ m proměnných, která je „vnější složkou“ složené funkce, požadujeme existenci m -tice funkcí $u_i = u_i(x_1, \dots, x_n)$ n proměnných (což zkráceně zapisujeme

$U(X) = (\dots, u_i(x_1, \dots, x_n), \dots)$), které mají neprázdný průnik definičních oborů $D = \prod_{i=1}^m D(u_i)$ a

navíc pro jejich obory hodnot platí $H(u_1) \times \dots \times H(u_i) \times \dots \times H(u_m) \subseteq D(f)$ pro $i=1, \dots, m$. Potom definujeme *složenou funkci*

$f(U(X)) = f(u_1, \dots, u_m)(x_1, \dots, x_n) = f(u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, \dots, x_n))$, která je definována na množině D .

2.2 Bodové množiny

Při studiu „lokálních“ vlastností funkcí více proměnných je vhodné zavést některé pojmy popisující vlastnosti podmnožin v R^n . Základním pojmem je *vzdálenost dvou bodů* :

$$v(X, Y) = v([x_1, \dots, x_n], [y_1, \dots, y_n]) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

d-okolím bodu X_0 nazýváme množinu $U(X_0, d) = \{X \in R^n \mid v(X, X_0) < d\}$, případně *redukováným d-okolím bodu* X_0 nazýváme množinu $U^*(X_0, d) = \{X \in R^n \mid 0 < v(X, X_0) < d\}$. Dále řekneme, že bod X_0 je *vnitřním bodem* množiny A , jestliže existuje d takové, že $U(X_0, d) \subset A$, dále jej nazvememe *hromadným bodem* množiny A , jestliže v každém d -okolím bodu X_0 , existuje bod X_1 takový, že $X_1 \in A$, nazveme jej *hraničním bodem* množiny A , jestliže v každém d -okolím bodu X_0 , existují body X_1, X_2 takové, že $X_1 \in A$ a současně $X_2 \notin A$ a konečně X_0 nazveme *bodem uzávěru* \bar{A} množiny A , jestliže pro každé d -okolí bodu X_0 platí, že $U(X_0, d) \cap A = \emptyset$. Množinu A nazveme *otevřenou množinou*, jestliže každý její bod je vnitřním bodem množiny, nazveme *uzavřenou*, jestliže $\bar{A} \subseteq A$. Hranicí ∂A množiny A nazveme množinu všech jejích hraničních bodů.

2.3 Limita, spojitost

Při zavádění pojmů limity a spojitosti postupujeme analogicky jako u funkce jedné proměnné. Řekneme, že funkce $f(x)$ *má v bodě* A , který je hromadným bodem $D(f)$, *limitu* L , jestliže

$$\forall U(L) \exists U^*(A) : (f(U^*(A)) \subset U(L)),$$

tj. ke každému $e > 0$, existuje $d > 0$ takové, že pro každý bod $X \in U^*(A, d)$ platí $f(X) \in U(L, e)$, což zapisujeme $\lim_{X \rightarrow A} f(X) = L$. Podobně jako u funkce jedné proměnné, lze z definice limity přímo dokázat mnohá tvrzení. Například funkce $f(X)$ má v bodě A nejvýše jednu limitu, dálejší je tzv. věta o nerovnostech:

Jestliže platí pro každé $X \in U(A)$ $g(X) \leq f(X) \leq h(X)$ a navíc $\lim_{X \rightarrow A} g(X) = \lim_{X \rightarrow A} h(X) = b$,

pak také platí

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = b.$$

Pro algebraické operace funkcí platí následující rovnosti, přičemž z existence výrazů vpravo plyne existence výrazů vlevo:

$$\begin{aligned} \lim_{X \rightarrow A} (f(X) + g(X)) &= \lim_{X \rightarrow A} f(X) + \lim_{X \rightarrow A} g(X), & \lim_{X \rightarrow A} af(X) &= a \lim_{X \rightarrow A} f(X), & a \in R \\ \lim_{X \rightarrow A} (f(X)g(X)) &= \lim_{X \rightarrow A} f(X) \lim_{X \rightarrow A} g(X), & \lim_{X \rightarrow A} \frac{f(X)}{g(X)} &= \frac{\lim_{X \rightarrow A} f(X)}{\lim_{X \rightarrow A} g(X)}, & \text{je-li } \lim_{X \rightarrow A} g(X) \neq 0 \end{aligned}$$

Řekneme, že funkce $f(X)$ je *spojitá v bodě* A , pro který $A \in D(f)$, jestliže má v tomto bodě limitu a platí

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = f(A).$$

Poznamenejme, že vzhledem existenci limit funkcí, které jsou výsledky s algebraickými operacemi s funkcemi majících limitu, platí také, že výsledkem algebraické operace se spojitými funkcemi je spojitá funkce. Pro složenou funkci platí:

Existuje-li kompozice $f(g)$, $\lim_{X \rightarrow A} g(X) = b$ a navíc je zobrazení f spojitě v bodě b , potom také

$$\lim_{X \rightarrow A} f(g(X)) = f(b).$$

Tato věta spolu s předcházející poznámkou umožňuje tvrdit: elementární funkce jsou spojitě tam kde jsou definované, přičemž za elementární funkce považujeme mocninou funkci, funkce goniometrické, exponenciální, hyperbolické dále funkce k nim inverzní a funkce, které vznikly konečným počtem algebraických operací a operací skládání z těchto funkcí. Tato skutečnost je podstatná při stanovení postupu při výpočtu limity, kdy nejdříve u „školních příkladů“ zkusíme vypočítat funkční hodnotu elementární v bodě, v němž zjišťujeme limitu, a existuje-li tato funkční hodnota potom existuje i limita a jsou si rovny. V úvahách o existenci limit je vhodné užívat speciálního pojmu limity funkce $f(x)$ vzhledem k množině. Řekneme, že funkce $f(X)$ *má v bodě* A , který je hromadným bodem $D(f)$, *limitu* L *vzhledem*

k množině M , pro níž $M \subseteq D(f)$ a navíc je bod A jejím hromadným bodem, jestliže

$$\forall U(b) \exists U^*(A) : (f(U^*(A) \cap M) \subset U(b)),$$

tj. ke každému $\epsilon > 0$, existuje $d > 0$ takové, že pro každý bod $X \in U^*(A, d) \cap M$ platí $f(X) \in U(L, \epsilon)$, což zapisujeme $\lim_{\substack{X \rightarrow A \\ X \in M}} f(X) = L$. Z existence $\lim_{X \rightarrow A} f(X) = L$, plyne pro každou

podmnožinu $M \subset D(f)$, jejímž hromadným bodem je bod A také existence $\lim_{\substack{X \rightarrow A \\ X \in M}} f(X) = \lim_{X \rightarrow A} f(X)$. Speciální volbou množiny $M = \{[x_1(t), \dots, x_n(t)] \mid t \in I\}$, kde $x_i(t)$

jsou spojité funkce a existuje $t_0 \in I$ tak, že platí $A = [x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)]$, je možné při výpočtu limity funkce více proměnných vzhledem k množině M využít postupů výpočtu limit neurčitých výrazů pro funkci jedné proměnné. Platí: $\lim_{\substack{X \rightarrow A \\ X \in M}} f(X) = \lim_{t \rightarrow a} f(x_1(t), \dots, x_n(t))$.

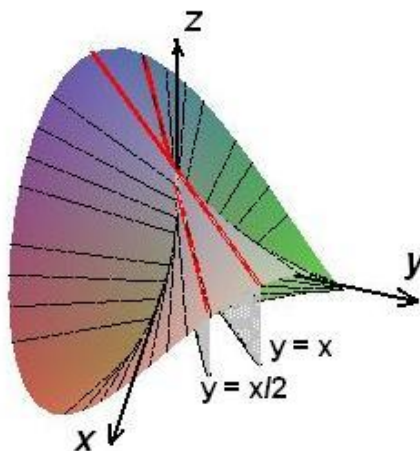
Tato skutečnost se s výhodou použije při dokazování neexistence limity. Viz. následující ukázka.

Ukázka 2.2: Vyšetřete limitu $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$.

Vyšetříme všechny limity vzhledem k přímkám pk procházejícím počátkem $y = kx$. Potom

platí $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [0,0] \\ [x,y] \in pk}} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xkx}{x^2 + k^2x^2} = \frac{2k}{1+k^2}$. Protože hodnota limity

v bodě $[0,0]$ vzhledem k přímce pk závisí na volbě k , tedy je pro různá k odlišná, vyšetřovaná limita neexistuje. Viz. následující obrázek



V uvedené ukázce je poměrně snadno ukázáno, že limita neexistuje. Pro opačný výsledek, že limita existuje, je třeba ukázat, že po všech křivkách má limita vzhledem k této křivce stejnou hodnotu. Ověřit tuto skutečnost pouze pro určitou třídu křivek (např. přímek) nestačí, jak je patrné z následující ukázky.

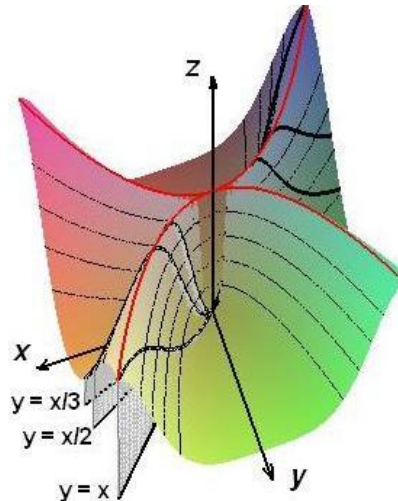
Ukázka 2.3: Rozhodněte o existenci limity $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

V tomto případě existují všechny limity vzhledem k přímkám pk procházejícím počátkem

$y = kx$ a jsou rovny 0, neboť $\lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [0,0] \\ [x,y] \in pk}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{k}{x^2 + k^2} = 0$. Tato skutečnost ovšem

existenci limity nezaručuje, neboť volbou množiny P , která je parabolou $y = x^2$ dostáváme

$\lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [0,0] \\ [x,y] \in P}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}$. Viz. následující obrázek



Obecně při výpočtu limity je nutné vycházet z definice limity a pracovat s okolími. V případě funkce dvou proměnných je možné okolí bodu $[x_0, y_0]$ vhodně popsat pomocí tzv. polárních souřadnic ve tvaru $x = x_0 + r \cos j$, $y = y_0 + r \sin j$, kdy bod $[x_0, y_0]$ nazýváme pólem. Výhodou tohoto popisu je, že potom limitní přechod $[x, y] \rightarrow [x_0, y_0]$ lze nahradit limitním přechodem $r \rightarrow 0$. Uvedený postup ilustruje následující ukáзка.

Ukázka 2.4: Vypočítejte limitu $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$.

Protože v tomto případě funkční hodnota neexistuje (po dosazení je ve jmenovateli 0), použijeme transformaci do polárních souřadnic ve tvaru $x = r \cos j$, $y = r \sin j$. Po nahrazení proměnných x, y má funkce tvar:

$$\frac{1 - \cos^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1 - \cos^2(r^2)}{r^4},$$

proto výpočet uvedené limity nahradíme výpočtem limity funkce jedné proměnné a při výpočtu můžeme použít aparát funkce jedné proměnné, v tomto případě L'Hospitalovo pravidlo.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(r^2)}{r^4} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{4r \sin(r^2) \cos(r^2)}{4r^3} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin(r^2)}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \cos(r^2) = 1 \end{aligned}$$

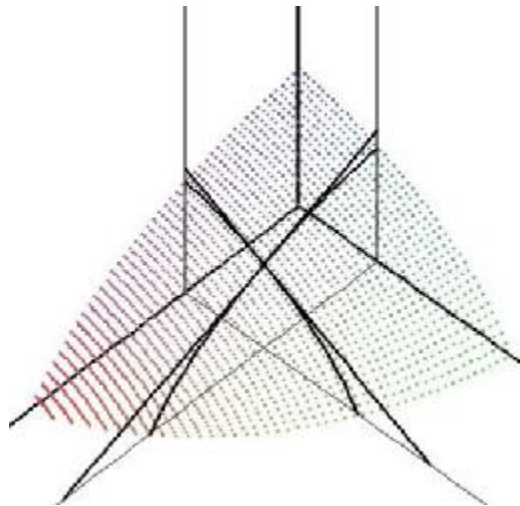
Poznamenejme, že v případě kdy výsledek závisí na j limita neexistuje viz. ukázka 2.2. Dále je nutné uvědomit si, že limitní přechod pro $r \rightarrow 0$ musí obecně zohlednit i možnou závislost $j(r)$, viz ukázka 2.3.

2.4 Parciální derivace, derivace ve směru

Pro funkce více proměnných se zavádí pojem parciální derivace, který využívá pojem derivace funkce jedné proměnné. *Parciální derivací* funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ v bodě $A = [a_1, \dots, a_n]$ podle *proměnné* x_i rozumíme derivací funkce jedné proměnné $y(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$ v bodě a_i . Tuto derivaci zapisujeme dvěma možnými způsoby:

$$f'_{x_i}(A) \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(A).$$

Tedy všechny proměnné kromě proměnné x_i „zafixujeme“, tj. nazíráme na ně při derivování jako na konstanty a derivujeme pouze podle proměnné x_i . Pro grafické vyjádření pojmu parciální derivace se omezíme pouze na funkce dvou proměnných v bodě $[x_0, y_0]$. V tomto případě „zafixování“ proměnné x , resp. y značí omezit se na rovinu $x = x_0$, resp. $y = y_0$. Potom ve shodě s geometrickým významem derivace funkce jedné proměnné je derivace $f'_x(x_0, y_0)$ rovna směrnici tečny v bodě $[x_0, y_0]$ k průsečnici funkce $f(x, y)$ s rovinou $x = x_0$. Analogické úvahy platí i pro $f'_y(x_0, y_0)$. Situace je znázorněna na následujícím obrázku



Jestliže funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ má definovanou parciální derivaci podle proměnné x_i v každém bodě množiny M , je funkce přiřazující každému bodu této množiny hodnotu této parciální derivace nazývána parciální derivací funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ podle proměnné x_i , což zapisujeme $f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nebo $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Jedná se o funkci n proměnných, pro niž jsou studovány další vlastnosti např. spojitost.

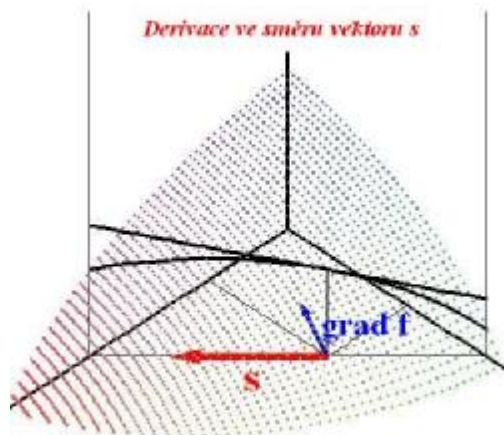
Zobecněním pojmu parciální derivace je derivace ve směru vektoru $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$. *Derivací funkce* $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *v bodě* $A = [a_1, \dots, a_n]$ *ve směru* $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$ rozumíme derivaci funkce jedné proměnné $y(t) = \frac{f(a_1 + ts_1, \dots, a_n + ts_n)}{|(s_1, \dots, s_n)|}$ pro $t = 0$, což zapisujeme $f'_s(A)$. Volíme-li totiž vektor $\mathbf{s} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ tvořený nulami s výjimkou i -té pozice (kde je 1), derivace funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ v bodě $A = [a_1, \dots, a_n]$ ve směru $\mathbf{s} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ je rovna parciální derivaci funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ v bodě $A = [a_1, \dots, a_n]$ podle proměnné x_i . Abychom uvedli i souvislost parciálních derivací s derivací ve směru, je vhodné zavést pojem gradientu funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Jestliže má funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ parciální derivace v bodě A podle všech proměnných x_i , řekneme, že *funkce* $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *má v bodě* A *gradient* $\text{grad } f$, který je roven vektoru parciálních derivací v tomto bodě podle jednotlivých proměnných:

$$\text{grad } f(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \right).$$

Existuje-li nějaké okolí bodu A , v němž má funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ spojitě parciální derivace podle všech proměnných x_i , potom pro libovolný vektor $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$ existuje derivace funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve směru \mathbf{s} a platí:

$$f'_s(A) = \frac{\text{grad } f(A) \cdot \mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \frac{s_1}{|\mathbf{s}|} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \frac{s_n}{|\mathbf{s}|},$$

kde výraz $\text{grad } f(A) \cdot \mathbf{s}$ označuje skalární součin těchto vektorů. Poznamenejme, že pro vektor \mathbf{s} s opačnou orientací dostáváme výraz s opačným znaménkem a hodnota směrové derivace $f'_s(A)$ nezávisí na velikosti $|\mathbf{s}|$ vektoru \mathbf{s} . Z vlastností skalárního součinu plyne fakt, že největší hodnoty nabývá $f'_s(A)$ pro vektor $\text{grad } f$. Gradient funkce f je tedy směrem největšího růstu funkce f . Pro geometrickou interpretaci derivace ve směru \mathbf{s} se podobně jako u parciálních derivací omezíme na funkce dvou proměnných. Množina bodů $[a_1 + ts_1, a_2 + ts_2, f(a_1 + ts_1, a_2 + ts_2)]$, $t \in \mathbb{R}$ tvoří průsečnici roviny rovnoběžné s osou z , která má stopu v rovině xy přímkou určenou bodem $[a_1, a_2]$ a vektorem (s_1, s_2) , spolu s grafem funkce f . Derivace ve směru vektoru je potom tangentou úhlu, který svírají vektor \mathbf{s} spolu s tečným vektorem. Viz obrázek



Jinou možnou interpretací je představa, že funkce f lokálně popisuje nadmořskou výšku zemského povrchu. Postavíme-li se s lyžemi na svah v bodě $[a_1, a_2, f(a_1, a_2)]$ tak, že lyže se nám při rovnoběžném promítání ve směru osy z , promítnou do vektoru (s_1, s_2) , potom podíl rozdílu nadmořských výšek špiček a pat lyží ku délce lyží je roven derivaci funkce f v bodě A ve směru \underline{s} .

Jak jsme již výše uvedli, lze parciální derivace chápat jako funkci více proměnných na množině M . Jestliže funkce f má na této množině parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, která má v bodě $A \in M$ parciální derivaci podle proměnné x_i , nazveme tuto parciální derivaci parciální derivací druhého řádu funkce f podle x_j, x_i :

$$f''_{x_j x_i}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Opakováním uvedeného postupu definujeme rekurentně i parciální derivace vyšších řádů. Pro parciální derivace vyšších řádů platí tzv. Schwarzova věta o záměně pořadí derivování.

Nechť v nějakém okolí $U(A)$ bodu A existují parciální derivace f'_x, f'_y a f''_{xy} je spojitá v bodě A . Potom existuje i smíšená parciální derivace f''_{yx} a platí:

$$f''_{yx} = f''_{xy}.$$

Závěrem uvedeme důležité diferenciální operátory. Pro jednoduchý zápis gradientu se používá symbolického vektoru nabla $\underline{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$, který nejčastěji používáme pro dimenzi 3 proměnných tj. $\underline{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$. Gradient $grad f$ zapisujeme potom jako součin symbo-

lického vektoru $\mathbf{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ a skaláru f : $\text{grad } f(A) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f(A)$. Dalším důležitým operátorem Laplaceův operátor, který můžeme symbolicky vyjádřit:

$$\Delta = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

který je nejčastěji používán pro dimenze 2, 3 tj. $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ nebo $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

2.5 Diferenciál funkce

Diferenciál funkce jedné proměnné vnímáme jako nahrazení funkce tečnou a jeho existence je rovnocenná existenci derivace. Situace v případě funkcí více proměnných je komplikovanější, i když budeme postupovat formálně stejně.

Nechť je funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definována v nějakém okolí bodu $A = [a_1, \dots, a_n]$. Nechť existují konstanty $D_1, \dots, D_n \in R$ a funkce $t(h_1, \dots, h_n) = t(H)$, pro kterou platí $\lim_{H \rightarrow 0} t(H) = 0$ a okolí $U(A)$ bodu A tak, že v něm platí:

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n D_i h_i + t(h_1, \dots, h_n) \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$$

Potom řekneme, že funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je bodě $A = [a_1, \dots, a_n]$ *diferencovatelná* nebo, že v tomto bodě *má totální diferenciál*.

Platí, že diferencovatelnost funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ zaručuje spojitost této funkce a také existenci všech parciální derivací prvního řádu spolu se splněním rovnosti

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = D_i \text{ pro } i=1, \dots, n.$$

Proto zavádíme pojem diferenciálu. Nechť je funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ diferencovatelná v bodě A . Potom *totálním diferenciálem funkce f v bodě A s diferenciemi h_i* nazýváme výraz

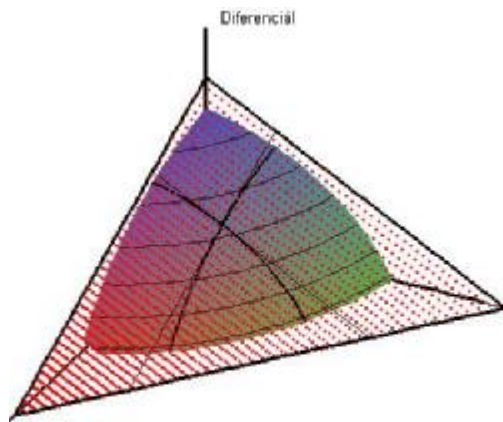
$$df(A) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)h_n .$$

Výrazy $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A)h_i$, pro $i = 1, \dots, n$ nazýváme *parciálními diferenciály*.

Při geometrické interpretaci se opět omezíme pouze na funkci dvou proměnných. V tomto případě diferenciál funkce $z = f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ obvykle zapisujeme ve zkrácené podobě

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy .$$

Vyjádríme-li diferenciály $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$, $dz = z - z_0$ a dosadíme do výše uvedené rovnice vznikne nám pro proměnné x, y, z lineární rovnice, která popisuje tečnou rovinu k funkci $z = f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$. Situace je znázorněna na následujícím obrázku.



Ukázka 2.4: *Napište rovnici tečné roviny a normálové (kolmé k tečné rovině) přímky k funkci $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ v bodě $T = [1, 1, ?]$.*

Nejdříve vypočteme třetí souřadnici tečného bodu $\operatorname{arctg} \frac{1}{1} = \frac{p}{4}$. Tedy $T = [1, 1, \frac{p}{4}]$. Dále vypočteme parciální derivace prvního řádu.

$$\frac{\partial \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \qquad \frac{\partial \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Nyní dosadíme do výše uvedeného vztahu:

$$z - \frac{p}{4} = \frac{-1}{1^2 + 1^2}(x - 1) + \frac{1}{1^2 + 1^2}(y - 1) \Leftrightarrow x - y + 2z - \frac{p}{2} = 0.$$

Normálový vektor tečné roviny $\vec{n} = (1, -1, 2)$ je směrovým vektorem normálové přímky což spolu se znalostí jednoho bodu normály (T) umožňuje napsat např. kanonickou rovnici normálové přímky

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{y-\frac{p}{4}}{2}.$$

Kromě popisu tečné roviny můžeme využít totálního diferenciálu k symbolickému odvozování „vzorců“ pro parciální derivování složených funkcí. Uvažujme funkci $f(U) = f(u_1, \dots, u_m)$ m proměnných jako vnější složku s m -ticí vnitřních složek $(\dots, u_i = u_i(x_1, \dots, x_n), \dots) = U(X)$ funkcí n proměnných. Poté $f(U(X)) = f(u_1, \dots, u_m)(x_1, \dots, x_n) = f(u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, \dots, x_n))$

označuje složenou funkci více proměnných. Při zavedení symbolického vyjádření parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{df}{dx_i}$, které je analogické s funkcí jedné proměnné, dostáváme:

$$\frac{\partial f(U(X))}{\partial x_i} = \frac{df(U)}{dx_i} = \frac{\dots + \frac{\partial f}{\partial u_j} du_j + \dots}{dx_i} = \dots + \frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{du_j}{dx_i} + \dots = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

Podobně lze postupovat i u parciálních derivací vyšších řádů.

Ukázka 2.5: Transformujte Laplaceův operátor $\Delta z = \nabla^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ do polárních souřadnic.

Uvažujme neznámou funkci $z=z(x,y)$ a polární souřadnice ve tvaru dvojice funkcí dvou proměnných $x = r \cos j$, $y = r \sin j$. Inverzní závislost proměnných x,y, r, j je popsána vztahy:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $j = \arctg \frac{x}{y}$. Začneme pomocným výpočtem, který je přímým použitím vzorce uvedeného výše dostáváme:

$$z'_x = z'_r r'_x + z'_j j'_x = z'_r \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z'_j \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad z'_y = z'_r r'_y + z'_j j'_y = z'_r \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z'_j \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Při výpočtu vyšší derivace postupujeme podle definice vyšší derivace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(z'_r \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z'_j \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial z'_r}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z'_r \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial z'_j}{\partial x} \frac{-y}{x^2 + y^2} + \\ & z'_j \frac{\partial}{\partial x} \frac{-y}{x^2 + y^2} = \left(z''_{rr} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z''_{rj} \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z'_r \frac{y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} + \\ & \left(z''_{jr} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z''_{jj} \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \frac{-y}{x^2 + y^2} + z'_j \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \\ & z''_{rr} \frac{x^2}{x^2 + y^2} - z''_{rj} \frac{2xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} + z''_{jj} \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} + z'_r \frac{y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} + z'_j \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Analogicky dostáváme i parciální derivaci:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{rr} \frac{y^2}{x^2 + y^2} + z''_{rj} \frac{2xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} + z''_{jj} \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} + z'_r \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} - z'_j \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Po dosazení do Laplaceánu a úpravě ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$) dostaneme:

$$z''_{xx} + z''_{yy} = z''_{rr} + z''_{jj} \frac{1}{x^2 + y^2} + z'_r \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = z''_{rr} + \frac{1}{r^2} z''_{jj} + \frac{1}{r} z'_r$$

Dalším možným užitím diferenciálu je přibližný výpočet funkční hodnoty funkce více proměnných. Platí totiž $\Delta f \approx df$. Úpravou daného vztahu a dosazením $dx_i = x_i - a_i$ dostáváme

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(X) = f(A) + df(A) = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_i} (x_i - a_i)$$

Ukázka 2.6: Užitím totálního diferenciálu přibližně vypočítejte funkční hodnotu $0.99^{9.9}$. Při volbě funkce a bodu A , v němž je uvedený výraz roven $f(A)$, je vhodné uplatnit požadavek na minimalizování diferenciálů dx_i , neboť jejich velikost je úměrná velikosti chyby. V tomto případě zvolíme funkci $f(x, y) = x^y$ a bod $A = (1, 10)$, protože $dx = -0.01$, $dy = -0.1$ a navíc

lze přesně určit funkční hodnotu $1^{10} = 1$. Vypočteme obě parciální derivace $\frac{\partial x^y}{\partial x} = x^y \ln x$ a

$$\frac{\partial x^y}{\partial y} = yx^{y-1}. \text{ Dále přibližně vypočteme}$$

$$0.99^{9.9} \approx 1^{10} + 1^{10} \ln(0.99 - 1) + 10 \cdot 1^9 (9.9 - 10) = 1 - 0.1 = 0.9,$$

přičemž přesná hodnota je 0,905.

2.6 Některé aplikace pro řešení rovnic

Uvažme jednoduchou rovnici $x^2 = y^2$. Řešení této rovnice můžeme popsat pomocí funkcí jedné proměnné, a to dvěma způsoby $y = \pm x$ nebo $y = \pm |x|$. Uvážíme-li toto řešení pouze v okolí nějakého bodu, který je řešením dané rovnice je tato funkce lokálně určena jednoznačně. Toto platí s výjimkou jediného bodu $(0, 0)$. Obecně platí:

Nechť má funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ v nějakém okolí bodu $A = [a_1, \dots, a_n]$, pro který platí $f(A) = 0$, spojitě parciální derivace prvního řádu (je diferencovatelná \Rightarrow je spojitá v tomto bodě). Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) \neq 0$ potom existuje funkce $x_i = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ taková, že $a_i = g(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$ a graf této funkce je řešením dané rovnice, tj.

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), x_{i+1}, \dots, x_n) = 0.$$

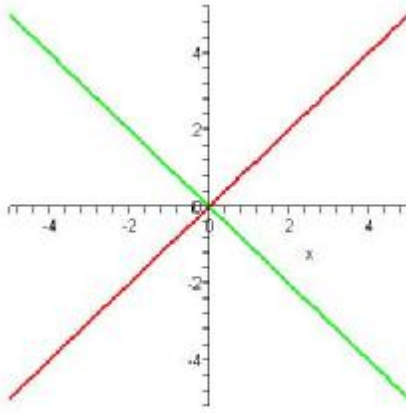
Navíc má funkce $x_i = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ spojitě parciální derivace prvního řádu v nějakém okolí bodu $[a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n]$ (je spojitá) a platí

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}}{\frac{\partial f}{\partial x_i}} \text{ pro } j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n.$$

Tuto skutečnost můžeme snadno získat parciálním derivováním uvedené rovnice. Platí totiž

$$\frac{\partial f(x_1, \dots, x_{i-1}, g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), x_{i+1}, \dots, x_n)}{\partial x_j} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} = 0.$$

Poznamenejme, že rovnice $f(x, y) = x^2 + y^2 = 0$ má jediný bod řešení, kdy v jeho okolí nelze řešení popsat jako graf funkce jedné proměnné, je jím $[0, 0]$. Platí tu $f'_x(0, 0) = 0 = f'_y(0, 0)$. To potvrzuje z obrázku patrný fakt, že toto řešení nelze popsat jako $y = g(x)$ nebo $x = g(y)$.



Nejjednodušším příkladem užití je případ jedné rovnice o dvou proměnných, který v následující kapitole je v některých případech „výsledkem“ příkladu, kdy řešení diferenciální rovnice je dáno v tzv. implicitním tvaru, tj. je zadáno rovnicí. Geometrická interpretace tohoto řešení je křivka ležící v rovině. Jestliže navíc je funkce $f(x, y)$ levé strany rovnice $f(x, y) = 0$ má spojité parciální derivace až do řádu n má i funkce $y(x)$ daná implicitně touto rovnicí má derivace až do řádu n . Tyto derivace můžeme určit z rovnic, které vzniknou postupným derivováním dané rovnice s tím, že její levou stranu chápeme jako složenou funkci $f(x, y(x))$.

Geometrickou interpretací řešení rovnice $f(x, y, z) = 0$ je plocha v prostoru. Existují-li parciální derivace prvního řádu potom existence nenulového vektoru (f'_x, f'_y, f'_z) je dostatečnou podmínkou existence tečné roviny v bodě řešení této rovnice a vektor $\vec{n} = (f'_x, f'_y, f'_z)$ je normálovým vektorem tj. je kolmý k tečné rovině. Uvažme množinu řešení popsané dvěma rovnicemi o třech neznámých $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$. Jestliže obě rovnice mají za řešení plochy, ke kterým existují tečné roviny popsané nenulovými normálovými vektory \vec{n}_1 , \vec{n}_2 , které jsou lineárně nezávislé, mají tyto plochy průsečnici, která je křivkou v prostoru a existuje k ní tečna. Tečný vektor \vec{t} k této křivce je kolmý k oběma normálovým vektorům \vec{n}_1 , \vec{n}_2 a je možné jej určit jako vektorový součin $\vec{t} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

2.7 Shrnutí

Funkce více proměnných a speciální případy funkce 2 resp. 3 proměnných:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(X) \quad z = f(x, y) \quad u = f(x, y, z)$$

Geometrická interpretace funkce 2 proměnných (graf) a vrstevnice:

$$\text{množina bodů } [x, y, f(x, y)] \text{ v } E^3 \text{ (plocha)}$$

body řešení rovnice $f(x, y) = c$ (průmět průsečnice grafu s rovinou $z = c$)

Vzdálenost a okolí bodu, limita a spojitost:

$$v(X, Y) = v([x_1, \dots, x_n], [y_1, \dots, y_n]) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

$$U(X_0, d) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid v(X, X_0) < d\} \quad U^*(X_0, d) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid 0 < v(X, X_0) < d\}$$

$$\forall U(L) \exists U^*(A) : (f(U^*(A)) \subset U(L)) \Leftrightarrow \lim_{X \rightarrow A} f(X) = L$$

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = f(A) \Leftrightarrow f(X) \text{ je spojitá v bodě } A$$

Parciální derivace, gradient, derivace ve směru:

$$\lim_{x \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{x - a_i} = f'_{x_i}(A) = \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i}(A)$$

$$\text{grad } f(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \right)$$

$$f'_s(A) = \frac{\text{grad } f(A) \cdot \mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \frac{s_1}{|\mathbf{s}|} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \frac{s_n}{|\mathbf{s}|}$$

Diferenciál:

$$df(A) = \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1}(A) h_1 + \dots + \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n}(A) h_n$$

Derivace složené funkce:

$$\frac{\partial f(U(X))}{\partial x_i} = \frac{df(U)}{dx_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

Derivace funkce dané implicitně rovnicí $f(x_1, \dots, x_{i-1}, g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$:

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}}{\frac{\partial f}{\partial x_i}}$$

2.8 Kontrolní otázky

- 1) Je každá závislost $n+1$ proměnných interpretovatelná jako funkce n proměnných?
- 2) Jakou plochu v trojrozměrném prostoru můžeme chápat jako graf vhodné funkce dvou proměnných?
- 3) Musí být vrstevnice grafu funkce dvou proměnných křivka?
- 4) Jaké znáte algebraické operace s funkcemi více proměnných?
- 5) Jaký je definiční obor funkce, která je výsledkem algebraické operace s funkcemi více proměnných?
- 6) Vysvětlete skládání funkcí více proměnných. Kolik „vnitřních složek“ musí být obsaženo ve složené funkci, kde „vnější složkou“ je funkce n proměnných?
- 7) Popište postup při výpočtu parciální derivace a parciálních derivací vyšších řádů.
- 8) Co je to gradient funkce a jak souvisí s derivací funkce ve směru.
- 9) Kdy záleží na pořadí derivování u parciálních derivací vyšších řádů?
- 10) Vysvětlete pojem totálního diferenciálu funkce více proměnných a jeho souvislost s parciálními derivacemi.
- 11) Jaká je geometrická interpretace totálního diferenciálu funkce dvou proměnných?
- 12) Jak je možné využít totálního diferenciálu k přibližnému výpočtu funkční hodnoty funkce více proměnných?
- 13) Vysvětlete jak je možné využít totálního diferenciálu při parciálním derivování složených funkcí více proměnných.
- 14) Za jakých podmínek je řešení rovnice $F(x,y)=0$ v okolí bodu $[x_0,y_0]$ možno určit jako funkci $y=f(x)$, tj. platí $F(x,f(x))=0$?
- 15) Kdy má tato funkce derivace a jak je možné je určit?
- 16) Jak je možné geometricky interpretovat řešení rovnice $F(x,y,z)=0$?
- 17) Vysvětlete geometrickou interpretaci gradientu funkce $F(x,y,z)$ ve vztahu k řešení výše uvedené rovnice.

2.9 Příklady ke kapitole 2

Příklad 2.1: Určete definiční obor funkce $z = \frac{\sqrt{1 - \ln(|x| + |y|)}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$.

Příklad 2.2: Určete vrstevnici funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2}$ procházející bodem $X = [2, 5]$ a tuto načrtněte. Vypočtěte gradient dané funkce v bodě a rozhodněte o jejich vzájemné relaci.

Příklad 2.3: Ukažte, že funkce $z = j(x^2 + y^2)$, kde j je diferencovatelná funkce, vyhovuje rovnici $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Příklad 2.4: Ukažte, že funkce zadaná implicitně rovnicí $4x^4 - 4x^2 + y^2 = 0$ a bodem $[1/\sqrt{2}, 1]$ má v tomto bodě lokální maximum.

Výsledky viz kap. 9

3 Obyčejné diferenciální rovnice

Cíle kapitoly: V první kapitole se stručně seznámíme s nezbytnými pojmy, které se týkají exaktního řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Pro rovnici prvního řádu popíšeme dvě základní exaktní metody řešení a to metodu separace proměnných a postup pro řešení lineární rovnice. U rovnic vyššího řádu se omezíme jen na lineární případ, kdy se obecné řešení nehomogenní rovnice skládá z obecného řešení rovnice homogenní a partikulárního řešení rovnice nehomogenní. K určení partikulárního řešení obecné lineární rovnice uvedeme metodu variace konstant. Pro nalezení partikulárního řešení lineární rovnice s konstantními koeficienty připojíme ještě metodu neurčitých koeficientů a poté pro ni popíšeme postup k nalezení obecného řešení rovnice homogenní.

3.1 Základní pojmy

Obyčejnou diferenciální rovnici rozumíme rovnici obsahující nezávisle proměnnou x a neznámou funkci $y = y(x)$ jedné proměnné včetně jejích derivací. Ve speciálních případech mohou některé z těchto veličin chybět, avšak alespoň jedna z derivací se v diferenciální rovnici vyskytnout musí.

Ukázka 3.1: Příklady obyčejných diferenciálních rovnic:

$$y' = e^{2y}/x, \quad y'' = x \sin y' + y^2, \quad y^3 y''' + y \tan y' - (x+1)^3 = 0, \quad y'' y^{iv} - e^x y' - \sin x = 0.$$

Poznamenejme na okraj, že místo derivací může diferenciální rovnice obsahovat též diferenciály nezávisle proměnné a neznámé funkce. Tak např. první rovnici z uvedených ukázek můžeme zapsat i takto: $x dy = e^{2y} dx$.

Řádem diferenciální rovnice rozumíme řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje. Tedy rovnice z uvedené ukázky jsou postupně prvního, druhého, třetího a čtvrtého řádu.

Obecný tvar rovnice můžeme uvést v *implicitním* nebo *explicitním* (tj. vyřešeném vzhledem k nejvyšší derivaci) tvaru. Tedy

$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ je obecný implicitní tvar diferenciální rovnice n -tého řádu,

$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ je obecný explicitní tvar diferenciální rovnice n -tého řádu.

Abychom toto obecně pojaté vyjádření poněkud konkretizovali, lze speciálně pro rovnici prvního a druhého řádu psát:

$$f(x, y, y') = 0, \quad y' = f(x, y), \quad f(x, y, y', y'') = 0, \quad y'' = f(x, y, y').$$

První dvě rovnice v ukázce 3.1 jsou zapsány v explicitním tvaru, druhé dvě ve tvaru implicitním. Poznamenejme ještě, že v uvedených relacích vyznačuje symbol f tzv. *generickou funkci*, která jen naznačuje, že se jedná o funkční závislost, nemusí to být však tatáž funkce.

Řešení obyčejné diferenciální rovnice rozumíme každou funkci, která v nějakém intervalu dané rovnici identicky vyhovuje. Nestačí tedy splnění rovnice v několika izolovaných bodech. Křivku, která řešení znázorňuje, nazýváme *integrální křivkou*. Řešení vyšetřované diferenciální rovnice nemusí v některých případech vůbec existovat, zatímco v jiných případech jich může existovat více, i nekonečně mnoho. Rovnici považujeme za vyřešenou, určíme-li všechna její řešení. Každé konkrétní řešení nazýváme *partikulárním řešením*. Nalezeme-li univerzální vzorec, který zahrnuje všechna partikulární řešení, mluvíme o *obecném řešení*. Toto obecné řešení obsahuje n navzájem nezávislých integračních konstant c_1, \dots, c_n , přičemž n označuje řád rovnice. Tyto konstanty se zde objevují proto, že jsme v průběhu řešení museli (a to ať již skrytě nebo zjevně) provést n integrací. Obecné řešení $y = y(x)$ vlastně představuje n -parametrickou třídu funkcí a můžeme je získat v jednom z následujících tvarů:

$$\text{implicitní tvar} \quad \Phi(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0$$

$$\text{explicitní tvar} \quad y = \Psi(x, c_1, \dots, c_n)$$

$$\text{parametrický tvar} \quad x = x(t, c_1, \dots, c_n), \quad y = y(t, c_1, \dots, c_n), \quad a \leq t \leq b.$$

Ne každá n -tice konstant vyskytujících se v uvedených relacích však vede na obecné řešení. Tyto konstanty musí být nezávislé v tom smyslu, že jejich konkrétními volbami pokryjeme všechna partikulární řešení dané rovnice. Přípustné jsou jen takové konstanty, že jejich vyloučením z implicitního tvaru řešení a z relací získaných postupným derivováním až do řádu n dostaneme zadanou diferenciální rovnici. Dále poznamenejme, že za integrační konstanty nelze vždy volit libovolná čísla.

Ilustrujme si předchozí tvrzení na dvou ukázkách. V těchto i některých dalších ukázkách budeme uvádět výsledná řešení vyšetřovaných rovnic i když jsme se s popisem metodiky jejich řešení ještě neseznámili. O správnosti se vždy můžeme přesvědčit dosazením prezentovaného řešení do příslušné rovnice.

Ukázka 3.2: *Funkce $y = c_1 \exp(x + c_2)$ není obecným řešením rovnice $y'' - y = 0$ i když této rovnici vyhovuje a jako řešení rovnice druhého řádu obsahuje dvě konstanty. Uvedené konstanty nejsou totiž nezávislé. Řešení lze upravit na tvar $y = c \exp(x)$, kde $c = c_1 \exp(c_2)$ a jedná se tedy ve skutečnosti jen o jednoparametrickou třídu funkcí. Obecným řešením je funkce $y = c_1 \exp(x) + c_2 \exp(-x)$. Vskutku, neboť vyliminujeme-li z této relace a z relace $y'' = c_1 \exp(x) + c_2 \exp(-x)$ obě integrační konstanty, obdržíme vyšetřovanou rovnici.*

Ukázka 3.3: *Povšimněme si nyní rovnice $y y' + x = 0$. Integrací této rovnice podle proměnné x můžeme získat řešení v implicitním tvaru $x^2 + y^2 = c$, z něhož pro integrační konstantu vyplývá omezení $c > 0$.*

Diferenciální rovnice může mít ještě *singulární řešení*, které je jistým způsobem výjimečné. V matematické literatuře existují dokonce tři definice singulárního řešení, avšak žádné dvě z nich nejsou ekvivalentní. Podle těchto definic nazýváme řešení singulárním jestliže:

- buď není obsaženo v obecném řešení
- nebo je v každém jeho bodě porušena jednoznačnost
- nebo jsou všechny jeho přímkové elementy singulární.

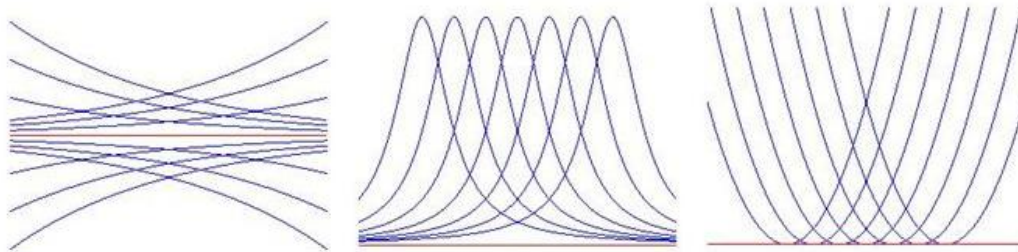
Podle první definice singulární řešení není speciálním případem obecného řešení pro žádnou konkrétní n -tici integračních konstant. Podle druhé definice každým bodem singulárního řešení prochází alespoň dvě integrální křivky dané rovnice. Podle třetí definice singulární řešení vyhovuje např. pro implicitní rovnici prvního řádu soustavě dvou diferenciálních rovnic $f(x, y, y') = 0$, $f_{y'}(x, y, y') = 0$. Uvedená homonymita způsobuje, že vyšetřovaná funkce může podle některé z definic představovat singulární řešení, zatímco podle jiné definice ne. To demonstrují následující ukázky.

Ukázka 3.4: *Vyšetřujeme nejprve rovnici $y'^2 = y^2$. Její obecné řešení je $y = c e^{\pm x}$. Zabývejme se nyní konkrétní funkcí $y_0 = 0$. Tato funkce je obsažena v obecném řešení a to pro $c = 0$, žádným jejím bodem neprochází jiné řešení uvedené rovnice, avšak všechny její přímkové elementy jsou singulární, neboť uvedené řešení vyhovuje soustavě rovnic $f(x, y, y') \equiv y'^2 - y^2 = 0$, $f_{y'}(x, y, y') \equiv 2 y' = 0$. Podle prvních dvou definic se tedy nejedná o singulární řešení, podle třetí definice však ano.*

Ukázka 3.5: *Nyní studujeme rovnici $y' = -y^2 \sqrt{1 - y^2}$. Funkce $y_0 = 0$ není obsažena v obecném řešení $y = \operatorname{sgn}(x - c)(1 + (x - c)^2)^{-\frac{3}{2}}$. Žádným jejím bodem neprochází další řešení studované rovnice. Funkce y_0 sice vyhovuje rovnici $f(x, y, y') \equiv y' + y^2 \sqrt{1 - y^2} = 0$, avšak nevyhovuje druhé rovnici, neboť $f_{y'}(x, y, y') \equiv 1 \neq 0$. Podle první definice se tedy jedná o singulární řešení, podle zbývajících dvou však ne.*

Ukázka 3.6: *Nakonec vyšetříme nelineární rovnici $y'^2 = 4y$, $y > 0$. Funkce $y_0 = 0$ není obsažena v obecném řešení $y = (x - c)^2$ dané rovnice pro žádnou hodnotu c , jejím libovolným bodem x prochází ještě jedno další řešení $y = (x - x)^2$ a vyhovuje soustavě rovnic $f(x, y, y') \equiv y'^2 - 4y = 0$, $f_{y'}(x, y, y') \equiv 2y' = 0$. V tomto případě se všechny tři definice shodují, neboť funkce y_0 je singulárním řešením podle každé z nich.*

Průběhy řešení uvedených ukázek znázorňuje ve stejném pořadí Obr. 3.1. Červeně je zde vyznačeno singulární řešení, které ve všech třech případech splývá s osou x .



Obr. 3.1: Ukázky singulárního řešení

Uvedli jsme, že řešení diferenciální rovnice závisí obecně na n integračních konstantách. Abychom tyto konstanty určili a získali tak jednoznačné řešení, musíme k diferenciální rovnici přidat ještě n navzájem nezávislých *vedlejších podmínek*. Jsou-li tyto podmínky zadány v jednom bodě, nazývají se *počátečními*, jsou-li zadány ve více bodech, nazývají se *okrajovými*. Jako technická interpretace počátečních a okrajových podmínek nám může posloužit jednostranně a dvoustranně vetknutý nosník či jazýčková píšťala a houslová struna. Diferenciální rovnici spolu s počátečními či okrajovými podmínkami nazýváme *počáteční* či *okrajovou úlohou*. Vedlejší podmínky hrají při řešení diferenciálních úloh důležitou roli, neboť mohou velice ovlivnit existenci i tvar výsledného řešení, jak naznačuje následující ukázka.

Ukázka 3.7: Uvažujme rovnici druhého řádu $y'' + y = 0$, kterou pro dosažení jednoznačnosti řešení doplníme dvěma vedlejšími podmínkami. Vyberme sedm možností:

- počáteční podmínky $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ vedou na řešení $y = \sin x$,
- okrajové podmínky $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ dávají totéž řešení $y = \sin x$,
- okrajové podmínky $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ implikují nulové řešení $y = 0$,
- okrajové podmínky $y(0) = 0$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$ dávají $y = c \sin x$, kde c je libovolné,
- počáteční podmínky $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ vedou na řešení $y = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$,
- okrajové podmínky $y(0) = 1$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ poskytují řešení $y = \cos x$,
- okrajové podmínky $y(0) = 1$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$ nedávají žádné řešení.

Z uvedené ukázky vyplývá, že různou volbou počátečních podmínek můžeme dosáhnout toho, že daná úloha pro tutéž rovnici buď nemá žádné řešení nebo poskytuje nekonečně mnoho řešení nebo dává jednoznačné řešení různých tvarů. Nezbytnost nalezení obecného řešení, které pokrývá všechna řešení vyšetřované rovnice, ilustrujeme na ukázce:

Ukázka 3.8: Řešme počáteční úlohu $y'' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Považujme nejprve za obecné řešení (tak jak je to naznačeno v ukázce 3.2) funkci $y = c \exp(x)$, která sice obsahuje nekonečně mnoho řešení dané rovnice, ale zdaleka neobsahuje její řešení všechna. Pak žádnou volbou konstanty c nedosáhneme splnění zadaných počátečních podmínek. Tato konstanta by totiž musela vyhovovat soustavě dvou rovnic $y(0) \equiv c = 0$ a $y'(0) \equiv c = 1$, což je nemožné. Vezmeme-li však v úvahu správné obecné řešení $y = c_1 \exp(x) + c_2 \exp(-x)$, zjistíme, že při $c_1 = 0.5$, $c_2 = -0.5$ jsou dané počáteční podmínky splněny. Hledaným partikulárním řešením je známá funkce $y = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)) \equiv \sinh x$.

Vystupuje-li v rovnici neznámá funkce y včetně všech svých derivací nejvýše v prvním stupni, mluvíme o *lineární* diferenciální rovnici. Příkladem lineární rovnice druhého řádu jsou rovnice z předchozích dvou ukázek. Lineárním rovnicím, vzhledem k jejich častému výskytu v praxi, věnujeme níže dostatek pozornosti. Rovnice, která není lineární, je *nelineární*. Příkladem nelineárních rovnic jsou všechny čtyři rovnice z ukázky 3.1.

3.2 Existence a jednoznačnost řešení

Již jsme se zmínili, že zadaná diferenciální úloha nemusí mít žádné řešení. Např. počáteční úloha $y' + x = 0$, $y(0) = 0$ v reálném oboru žádné řešení nemá, v komplexním oboru však má řešení dvě $y = \pm j x$ kde $j^2 = -1$. Pro praktické aplikace je však žádoucí, aby řešení bylo jediné. Musíme tedy nejprve stanovit nějaké podmínky, za nichž řešení dané úlohy vůbec existuje a podmínky, za nichž je toto řešení jediné. Existuje řada vět, které na tyto otázky odpovídají. Vybereme jen dvě z nich.

S ohledem na další probíranou látku pojmem tuto kapitolu poměrně obecně a budeme se proto zabývat počáteční úlohou rovnice n -tého řádu. Za tím účelem předpokládejme, že máme danu $(n+1)$ -rozměrnou oblast Ω a v ní pevný bod $[x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}] \in \Omega$. Všechny souřadnice tohoto bodu jsou, i přes označení připomínající derivace, předem daná čísla. Tento obecný bod reprezentuje nastavení počátečních podmínek, neboť obsahuje jak polohu počátečního bodu tak i hodnoty, jež musejí příslušné derivace hledaného řešení v tomto bodě nabývat. Počáteční úlohu, kterou budeme vyšetřovat, formulujeme takto:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (3.1)$$

Ukázka 3.9: Pro $n = 1, 2, 3$ má uvedená formulace konkrétní tvar:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), & y(x_0) &= y_0, \\ y'' &= f(x, y, y'), & y(x_0) &= y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \\ y''' &= f(x, y, y', y''), & y(x_0) &= y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad y''(x_0) = y_0''. \end{aligned}$$

Tvrzení následujících vět zapíšeme nejprve přehledným matematickým zápisem a tento zápis bezprostředně vysvětlíme.

Věta 3.1: $f \in C(\Omega) \Rightarrow \exists$ řešení úlohy (3.1) v okolí x_0 , tj. je-li funkce f v oblasti Ω spojitou funkcí všech svých argumentů, pak v okolí bodu x_0 řešení úlohy (3.1) existuje.

Ukázka 3.10: Uvažme nejprve velice jednoduchou úlohu $y' = 2x$, $y(0) = 1$. Funkce $f(x, y) = 2x$ je pro všechna x, y spojitá, takže řešení úlohy existuje. Abychom je získali, integrujme obě strany dané rovnice podle proměnné x . Dostaneme $y = x^2 + c$. Hodnotu integrační konstanty c získáme z počáteční podmínky, neboť $y(0) = c = 1$. Hledané řešení má tedy tvar $y = x^2 + 1$.

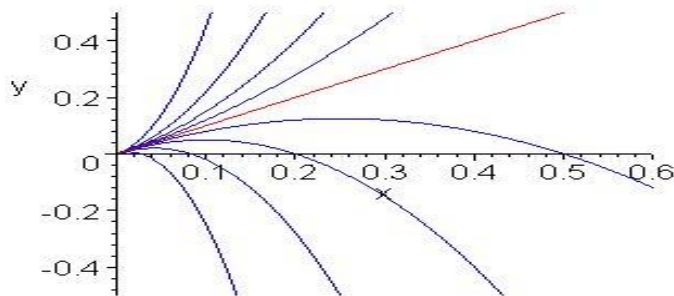
Ukázka 3.11: Zabývejme se nyní formálně málo pozměněnou úlohou $y' = \frac{1}{x}$, $y(0) = 1$. Funkce $f(x, y) = \frac{1}{x}$ není v tomto případě v bodě $x = 0$ spojitá a proto věta nezaručuje existenci řešení. Ukážeme, že řešení naší úlohy ani nemůže existovat. Integrací obou stran rovnice

dospějeme k relaci $y = \ln|x| + c$, což je obecné řešení vyšetřované rovnice. Vzhledem k zadané počáteční podmínce však nemůžeme pro žádnou hodnotu integrační konstanty c dosáhnout toho, aby v bodě $x = 0$ platilo $y(0) = 1$. Řešení zadané počáteční úlohy tedy neexistuje.

K zajištění jednoznačnosti řešení úlohy (3.1) však samotná spojitost funkce f nestačí a proto musíme předpoklad zesílit. Budeme požadovat navíc, aby funkce měla spojitě i první derivace podle všech argumentů, tj. aby byla hladká.

Věta 3.2: $f \in C_1(\Omega) \Rightarrow \exists!$ řešení úlohy (3.1) v okolí x_0 , tj. je-li funkce f v oblasti Ω hladkou funkcí všech svých argumentů, pak v okolí bodu x_0 existuje právě jedno řešení úlohy (3.1).

Ukázka 3.12: Jako protipříklad uveďme počáteční úlohu $y' = 2\frac{y}{x} - 1$, $y(0) = 0$, která má nekonečně mnoho řešení vzhledem k tomu, že funkce $y = c x^2 + x$ vyhovuje dané úloze pro libovolnou hodnotu konstanty c . Průběh těchto řešení pro různá c je uveden na Obr. 3.2. Všechna řešení vycházejí z počátku (tj. splňují danou počáteční podmínku) a to se stejnou směrnici znázorněnou červeně. Uvedená skutečnost však předchází větě neodporuje, neboť funkce $f(x, y) = 2\frac{y}{x} - 1$ není v počátku hladkou funkcí prvního z argumentů.



Obr. 3.2: Nejednoznačnost řešení počáteční úlohy

Povšimněme si ještě vlivu počátečních podmínek na řešení naší úlohy. Jedná se o formulaci vhodných předpokladů pro to, aby při spojitě změně počátečních podmínek nevykazovalo příslušné řešení skokové změny.

Věta 3.3: $f \in C(\Omega)$, $\forall [x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}] \in \Omega \exists!$ řešení $y = \varphi(x, x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \Rightarrow \varphi \in C(I \times \Omega)$, tj. je-li funkce f v oblasti Ω spojitá a existuje-li pro každé počáteční podmínky z této oblasti právě jedno řešení úlohy (3.1), pak toto řešení závisí spojitě na počátečních podmínkách.

Ukázka 3.13: Platnost předchozí věty si ilustrujme na počáteční úloze $y'' = \frac{2}{x^2} y$, $y(x_0) = a$, $y'(x_0) = b$, jejímž řešením je funkce

$$y \equiv j(x, x_0, a, b) = \frac{a + b x_0}{3} \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \frac{2a - b x_0}{3} \frac{x_0}{x}.$$

Protože funkce $f(x,y) = \frac{2}{x^2}y$ je spojitá v celé rovině s výjimkou počátku, je i řešení, tedy funkce φ , spojitou funkcí všech svých čtyř argumentů x, x_0, a, b s výjimkou případů $x=0$ a $x_0=0$.

3.3 Rovnice prvního řádu

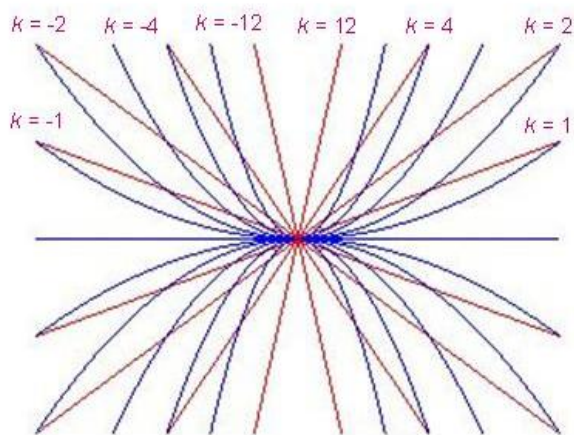
3.3.1 Geometrická interpretace

V tomto odstavci se budeme zabývat diferenciální rovnicí prvního řádu v explicitním tvaru. Obecné řešení této rovnice obsahuje jednu integrační konstantu, takže můžeme předepsat jen jednu vedlejší podmínku, tj. podmínku počáteční. Budeme tedy vyšetřovat počáteční úlohu

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (3.2)$$

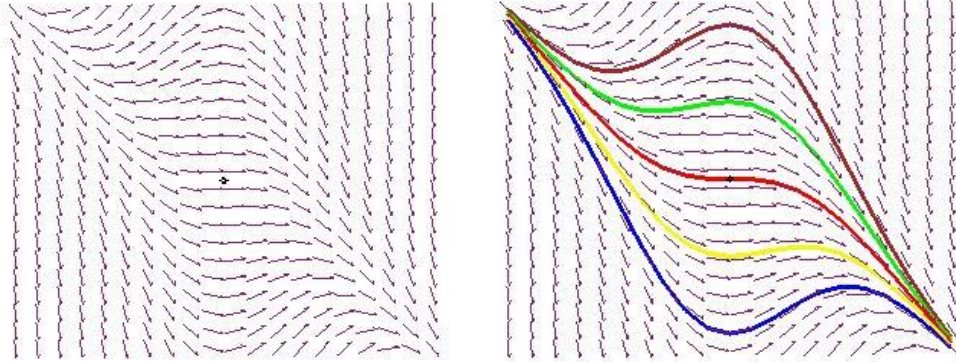
Proveďme nejprve geometrickou interpretaci úlohy (3.2). Každému bodu $[x,y]$ roviny (x, y) lze přiřadit hodnotu funkce $f(x, y)$ a tuto hodnotu můžeme chápat jako směrnici tečny ke grafu řešení (integrální křivce) v bodě $[x,y]$. Trojici čísel $(x, y, f(x, y))$ nazveme *lineárním elementem* rovnice (3.2) a množinu všech lineárních elementů jejím *směrovým polem*. Rovnici (3.2) můžeme rozložit na dvě rovnice $f(x, y) = k$ a $y' = k$, kde k je nějaká konstanta. První z těchto rovnic je implicitním vyjádřením rovinné křivky, kterou nazýváme *izoklina*. Druhá rovnice říká, že každé řešení protíná izoklinu se stejnou směrnici k . Hledané řešení studované úlohy (3.2) je reprezentováno integrální křivkou procházející bodem $[x_0, y_0]$.

Ukázka 3.14: Situaci si ilustrujme na rovnici $y' = 2\frac{y}{x}$. Zvolme pevně konstantu k . Pak odpovídající izoklina, na níž graf každého řešení má směrnici $y' = k$, má tvar $y = \frac{k}{2}x$. **Obr. 3.3** znázorňuje odpovídající izokliny (červené čáry) a integrální křivky (modré čáry) pro různě volené konstanty k .

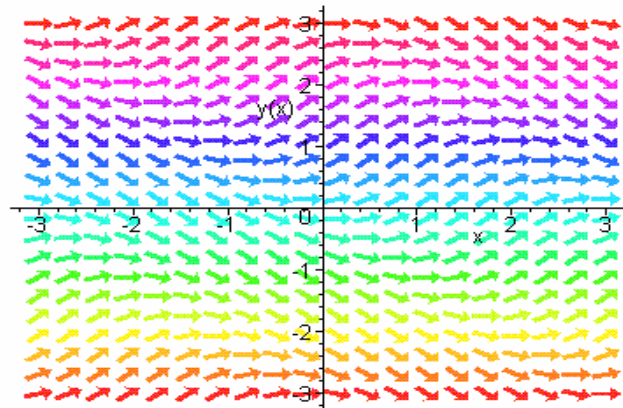


Obr. 3.3: Průběh *izoklin* a *integrálních křivek*

Ukázka 3.15: Studujme nyní rovnici $4y' + xy = -2x^2$. Funkce $f(x, y) = -\frac{x}{4}(2x + y)$ je v celé rovině spojitá. Směrové pole je znázorněno na **Obr. 3.4**. Vedlejší obrázek zachycuje totéž směrové pole s průběhy pěti řešení s různou počáteční podmínkou. Na **Obr. 3.5** je pak ještě znázorněno směrové pole příslušející rovnici $y' = \sin(x + y)$.



Obr. 3.4: Směrové pole samotné a s integrálními křivkami

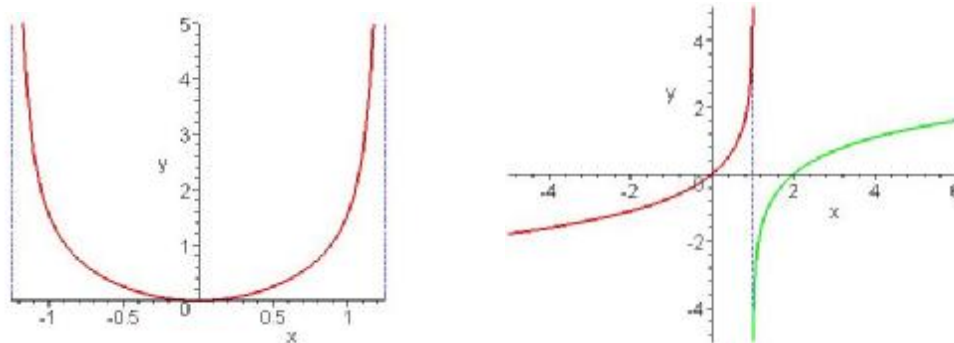


Obr. 3.5: Směrové pole rovnice $y' = \sin(x + y)$

Z vět uvedených v kapitole 3.2 vyplývá věta o jednoznačné existenci řešení naší úlohy.

Věta 3.4: Necht' jsou funkce f a f_y spojité v celé rovině (x, y) . Pak pro libovolné počáteční podmínky existuje právě jedno řešení počáteční úlohy (3.2), které je buď definováno na celé číselné ose nebo má jednu či dvě asymptoty bez směrnice.

Ukázka 3.16: Vyšetřeme počáteční problém $y' = 2x(y^2 + 1)$, $y(0) = 0$. Pravá strana rovnice $f(x, y) = 2x(y^2 + 1)$ zřejmě splňuje předpoklady předchozí věty (jedná se o polynom), takže existuje právě jedno řešení zadaného problému. Dosazením se přesvědčíme, že tímto řešením je funkce $y = \tan x^2$, která je definována v intervalu $(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$ a má tedy v bodech $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ dvě asymptoty bez směrnice. Integrální křivka je znázorněna na **Obr. 3.6** vlevo.



Obr. 3.6: Integrální křivky ukázek 3.16 a 3.17

Ukázka 3.17: *Povšimněme si nyní počáteční úlohy $y' = \exp(y)$, $y(0) = 0$. Již ze samotné rovnice vyplývá, že řešení je rostoucí funkcí, neboť $y' > 0$. Proto $y = -\ln(1-x)$. Toto řešení je definováno na intervalu $(-\infty, 1)$ a má tedy v bodě $x=1$ jednu asymptotu bez směrnice. Integrální křivku uvádí **Obr. 3.6** vpravo (červená křivka). Pokud bychom zaměnili počáteční podmínku a zvolili $y(2) = 0$, pak by řešením byla funkce $y = \ln(x-1)$. Tato funkce má stejnou asymptotu bez směrnice, je však definována na intervalu $(1, \infty)$, viz **Obr. 3.6** vpravo (zelená křivka).*

Ukázka 3.18: *Počáteční úloha $y' + y = 2\sin x$, $y(0) = -1$ má řešení $y = \sin x - \cos x$ definované na celé číselné ose.*

Pro praxi je velice důležité určit obecné řešení dané rovnice. Protože neexistuje univerzální metoda řešení diferenciálních rovnic, omezíme se jen na dva nejdůležitější typy rovnic a pro ně uvedeme způsob vhodného exaktního řešení.

3.3.2 Separace proměnných

Diferenciální rovnicí se separovanými proměnnými rozumíme rovnici

$$y' = f(x)g(y). \quad (3.3)$$

Abychom uvedenou rovnici vyřešili, upravme (3.3) na tvar

$$\frac{y'(x)dx}{g(y(x))} = f(x)dx.$$

Zvážíme-li, že $y = y(x)$, $y'(x)dx = dy$, dosadíme do předchozí relace a obě strany zintegrujeme, dostaneme obecný integrál vyšetřované rovnice ve tvaru:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c \quad (3.4)$$

Postup při řešení rovnice (3.3) tedy spočívá v tom, že na jednu stranu rovnice převedeme členy se závisle proměnnou a na druhou stranu členy s nezávisle proměnnou. Tím obě

proměnné separujeme a můžeme proto obě strany rovnice zintegrovat. Uspějeme-li ve výpočtu obou integrálů, obdržíme řešení v implicitním tvaru. Podaří-li se nám navíc osamostatnit proměnnou y , získáme řešení v explicitním tvaru. Nesmíme zapomenout, že se funkce $g(y)$ vyskytuje ve jmenovateli a proto musíme při praktickém řešení případ $g(y) = 0$ vyšetřit zvlášť, neboť může poskytnout singulární řešení.

Obecnější rovnice $f_1(x)g_1(y)y' = f_2(x)g_2(y)$ se na rovnici se separovanými proměnnými snadno převede.

Ukázka 3.19: Máme nalézt obecné řešení rovnice $y' = 3x^2(y-2)$. Rovnici nejprve upravíme na tvar

$$\frac{dy}{y-2} = 3x^2 dx$$

a to je již rovnice se separovanými proměnnými. Integrací obou jejích stran získáme $\ln|y-2| = x^3 + \ln|c|$, což je implicitní tvar řešení. Odlogaritmováním dostaneme $|y-2| = |c| \exp(x^3)$ a odsud, zahrneme-li absolutní hodnotu do integrační konstanty, pak obecné řešení $y = 2 + c \exp(x^3)$ v explicitním tvaru. Nesmíme zapomenout na mlčky provedený předpoklad, že $y-2 \neq 0$, neboť funkce $y = 2$ též vyhovuje zadané rovnici. Toto řešení je však již obsaženo v obecném řešení pro $c = 0$. Průběh integrálních křivek pro různá c znázorňuje **Obr. 3.7** vlevo. Příklad $c = 0$ je vykreslen červeně.

Ukázka 3.20: Hledáme všechna řešení rovnice $x^2 y' = y^2 - xy + x^2$. Tuto rovnici nelze přímo separovat. Zavedeme proto novou neznámou z pomocí relace $y = xz$ a získáme tak po úpravě rovnici $xz' = (z-1)^2$, kterou již separovat lze. Z této rovnice vyplývá

$$\frac{dz}{(z-1)^2} = \frac{dx}{x} \quad \text{a odsud} \quad \frac{1}{1-z} = \ln|x| + \ln|c| = \ln(cx),$$

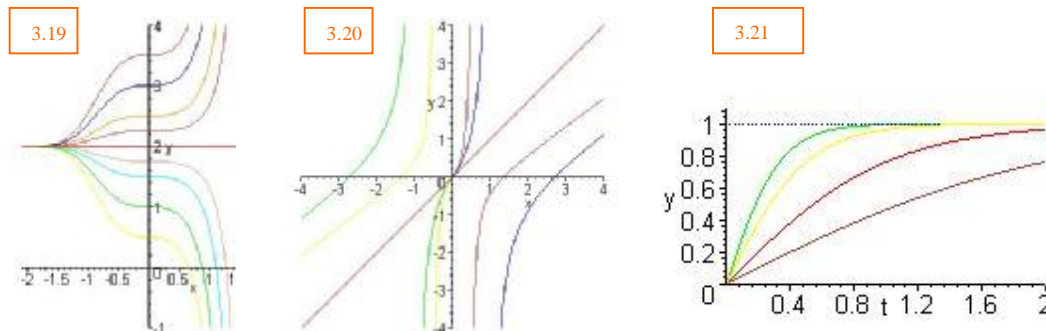
neboť $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ a konstantu c volíme tak, aby $cx > 0$. Přejdem k původní neznámé získáme nakonec obecné řešení ve tvaru $y = x(1 - \frac{1}{\ln(cx)})$. Během úprav jsme dělili dvojklenem $z-1$, který nabývá nulové hodnoty pro $z = 1$ a to odpovídá funkci $y = x$. Tato funkce zadané rovnici též vyhovuje, avšak není obsažena v obecném řešení pro žádnou hodnotu integrační konstanty c . Jednoparametrický systém funkcí y a funkce $y = x$ představují všechna řešení výchozí rovnice. Průběh integrálních křivek znázorňuje **Obr. 3.7** uprostřed. Jedině funkce $y = x$, znázorněná červeně, je definována na celé číselné ose. Jednotlivá partikulární řešení jsou při $c > 0$ či při $c < 0$ definována jen na poloose $(0, \infty)$, případně $(-\infty, 0)$. Tato řešení jsou nespojitá v bodě $x = 1/c$.

Ukázka 3.21: V RL obvodu je zapojena nelineární cívka s charakteristikou $i = k\Phi^2$, kde k je zadaná konstanta. Stanovte proudovou odezvu $i = i(t)$, je-li v čase $t = 0$ sepnut vypínač. Uvedený obvod je popsán počáteční úlohou $\frac{d\Phi}{dt} + Ri = U_0$, $i(0) = 0$. Po dosažení za proud dospějeme k rovnici $\frac{d\Phi}{dt} + kR\Phi^2 = U_0$. Jejím separováním dostaneme

$$\frac{d\Phi}{1 - k^2\Phi^2} = U_0 dt, \quad \text{kde} \quad k = \sqrt{\frac{kR}{U_0}}.$$

Integrací získáme $\arg \tanh(k\Phi) = kU_0 t + c$. Zpočáteční podmínky pro proud vyplývá, že také $\Phi(0) = 0$, což implikuje $c = 0$. Proto $\Phi = \tanh(kU_0 t)/k$ a dosazením do charakteristiky $i = \frac{U_0}{R} \tanh^2(kU_0 t)$. Průběh proudové odezvy v případě $U_0 = R$ prezentuje pro některé hodnoty k

Obr. 3.7 vpravo..



Obr. 3.7: Průběhy integrálních křivek ukávek 3.19, 3.20 a 3.21

3.3.3 Lineární rovnice

Lineární rovnice se v praxi velice často vyskytuje. Má tvar

$$y' + f(x)y = g(x), \quad x \in I. \quad (3.5)$$

Platí-li $f, g \in C(I)$, tj. jsou-li obě funkce $f(x)$ a $g(x)$ na intervalu I spojité, pak v důsledku věty (3.4) má lineární rovnice pro každou počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in I$ právě jedno řešení, které existuje na celém intervalu I .

V případě *homogenní rovnice*, kdy $g(x) = 0$, lze (3.5) snadno vyřešit separací proměnných, neboť $\frac{dy}{y} = -f dx$. Označíme-li integrační konstantu symbolem c , dostaneme

$$y = c \exp\left(-\int f(x) dx\right) = c/F(x), \quad \text{kde } F \equiv F(x) = \exp\left(\int f(x) dx\right) \quad (3.6)$$

V případě *rovnice nehomogenní*, kdy $g(x) \neq 0$, nalezneme řešení pomocí *metody variace konstanty*. Tato metoda spočívá v tom, že zmíněné řešení hledáme ve tvaru (3.6) jen s tím rozdílem, že veličina c není konstantní, ale závisí nějakým způsobem na proměnné x , tj. že je vlastně funkcí $c = c(x)$. Předpokládáme tedy $y = c(x)/F(x)$. Abychom funkci $c(x)$ určili dosadíme předpokládané řešení do (3.5). Obdržíme

$$\frac{c'}{F} - \frac{cF'}{F^2} + f \frac{c}{F} = g \quad \Rightarrow \quad c' + \left(f - \frac{F'}{F}\right)c = gF.$$

Vzhledem k definici funkce F je výraz v závorce poslední rovnosti nulový a proto

$$c' = gF \quad \Rightarrow \quad c = \int gF dx + c_0.$$

Obecné řešení lineární rovnice je pak dáno relací

$$y = \left[\int g(x) F(x) dx + c_0 \right] / F(x) \quad (3.7)$$

Řešení lineární rovnice tedy vyžaduje v obecném případě provedení dvou kvadratur.

Souhrnně řečeno postup řešení lineární rovnice spočívá v tom, že pomocí separace proměnných nalezneme nejprve obecné řešení rovnice homogenní. V takto získaném řešení považujeme integrační konstantu za funkci nezávisle proměnné x a dosadíme do výchozí nehomogenní lineární rovnice. Po úpravě získáme jednoduchou rovnici, z níž integrací obdržíme funkci $c(x)$. Dosazením do předpokládaného tvaru pak dospějeme k výslednému řešení nehomogenní lineární rovnice.

Ukázka 3.22: Máme nalézt všechna řešení rovnice $y' - 2xy = 4x^3$. Vidíme ihned, že obě funkce $f(x) = -2x$ a $g(x) = 4x^3$ jsou na celé číselné ose spojité. Řešení příslušné homogenní rovnice $y' - 2xy = 0$ je $y = c \exp(x^2)$. Řešení nehomogenní rovnice tedy předpokládáme ve tvaru $y = c(x) \exp(x^2)$ a dosadíme do zadané rovnice. Získáme postupně

$$\begin{aligned} c' \exp(x^2) + 2xc \exp(x^2) - 2xc \exp(x^2) &= 4x^3 \quad \Rightarrow \\ c' \exp(x^2) &= 4x^3 \quad \Rightarrow \quad c = 4 \int x^3 \exp(-x^2) dx \end{aligned}$$

Pro určení integrálu nejprve zavedeme substituci $t = x^2$ a transformovaný integrál vypočteme metodou per partes. Po menších úpravách získáme nakonec jednoparametrický systém funkcí $y = c \exp(x^2) - 2x^2 - 2$ který obsahuje všechna řešení dané rovnice.

Ukázka 3.23: Lineární RL obvod se střídavým buzením je popsán diferenciální rovnicí

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E_0 \sin wt,$$

v níž všechny koeficienty jsou kladné. Máme určit proudovou odezvu $i = i(t)$, platí-li $i(0) = 0$. Obě funkce $f(t) = \frac{R}{L}$ a $g(t) = \frac{E_0}{L} \sin wt$ v dané rovnici jsou spojité na celé číselné ose. Řešením homogenní rovnice získáme $i = c \exp(-\frac{R}{L}t)$. Řešení nehomogenní rovnice tedy budeme předpokládat ve tvaru $i = c(t) \exp(-\frac{R}{L}t)$. Dosazením do zadané rovnice dostaneme po vyloučení členů s opačným znaménkem a úpravě

$$c = \frac{E_0}{L} \int \exp(\frac{R}{L}t) \sin wt dt.$$

Po dvojí integraci per partes dospějeme k relaci

$$i = \frac{E_0}{R^2 + w^2 L^2} \exp(\frac{R}{L}t) (R \sin wt - wL \cos wt) + c_0 = E_1 \exp(\frac{R}{L}t) \sin(wt - d) + c_0,$$

$$\text{kde} \quad \tan d = \frac{wL}{R}, \quad E_1 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + w^2 L^2}}.$$

Obecné řešení má tvar $i = E_1 \sin(wt - d) + c_0 \exp(-\frac{R}{L}t)$. Integrační konstantu určíme z počáteční podmínky, neboť $0 = c_0 - E_1 \sin d$. Proudová odezva

$$i \equiv i(t) = E_1 \sin(wt - d) + E_1 \exp(-\frac{R}{L}t) \sin d$$

tedy obsahuje periodickou složku a tlumenou složku, která po určitém čase prakticky zanikne. Veličina $t = \frac{1}{R}$ se nazývá časovou konstantou.

Ukázka 3.24: Jako ukázkou si uveďme ještě jeden, formálně mírně odlišný postup při řešení lineární rovnice. Vynásobením (3.5) zatím blíže neurčenou funkcí F získáme $F y' + F f y = F g$. K úpravě této relace využijme známého pravidla pro výpočet derivace součinu $(F y)' = F y' + F' y$. Po malé úpravě dostaneme $(F y)' + (F f - F') y = F g$. Nyní zvolme F tak, aby se poslední rovnice maximálně zjednodušila. K tomu stačí, aby výraz v závorce vymizel, tj. aby pro funkci F platilo $F = \exp(\int f(x) dx)$. Tato volba F implikuje rovnici $(F y)' = F g$ a tudíž $F y = \int g F dx + c_0$, což je v podstatě (3.7).

V kapitole 3.3 jsme popsali jen dvě základní metody exaktního řešení obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu. Metody pro řešení některých dalších typů rovnic lze nalézt např. v [9], [16], [27], [28]. Zvláště [16] je vhodná pro použití v praxi, neboť obsahuje velké množství konkrétních diferenciálních rovnic (a to nejen prvního řádu), které jsou buď přímo vyřešeny nebo je zde uveden podrobný postup, jak řešení získat.

3.4 Rovnice n -tého řádu

3.4.1 Obecný tvar rovnice

Obecný tvar rovnice n -tého řádu, a to jak v implicitní tak i explicitní formě, jsme uvedli již v kapitole 3.1. Pro některé typy obecných rovnic existují postupy, jak tyto rovnice vyřešit nebo alespoň zjednodušit, např. pomocí snížení řádu vyšetřované rovnice. Těmito postupy se nebudeme blíže zabývat. Případné zájemce odkazujeme např. na [28].

Nejpodrobněji je propracována problematika lineárních rovnic. Protože se tyto rovnice v praxi vyskytují nejčastěji, omezíme další úvahy jen na ně. Poznamenejme, že vzhledem k výhodným vlastnostem lze pomocí lineárních rovnic s výhodou aproximovat i mnohou nelineární rovnici. V technické praxi je linearizace nelineárních rovnic aplikována mnohdy poměrně nepřesně a to může vést k nesprávným závěrům. Je třeba si zejména uvědomit, že ne všechny vlastnosti nelineárních rovnic se dají přenést na příslušné linearizované rovnice. Před vlastním použitím principu linearizace je proto zapotřebí prostudovat vlastnosti diferenciálních rovnic podrobněji, speciálně se to týká závislosti řešení na počátečních podmínkách, viz např. [18], [20].

Ukázka 3.25: Příkladem nepřenositelných vlastností mezi nelineárními a lineárními rovnicemi mohou posloužit již rovnice druhého řádu. Zatímco lineární rovnice s konstantními koeficienty nemá buď žádné periodické řešení nebo všechna jeho řešení jsou periodická, nelineární rovnice může mít periodické řešení jen jedno. Konkrétními případy jsou obecná Liénardova rovnice $y'' + f(y)y' + g(y) = 0$ a její důležitý speciální případ van der Polova rovnice $y'' - e(1 - y^2)y' + y = 0$ používané při vyšetřování nelineárních kmitů.

3.4.2 Obecná lineární rovnice

Obecnou lineární diferenciální rovnicí n -tého řádu rozumíme rovnici tvaru

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \quad a_n(x) \neq 0 \quad (3.8)$$

Věta 3.2 zajišťuje, že tato rovnice má jednoznačné řešení na celém intervalu, i nekonečném, v němž jsou všechny funkce $a_i(x)$, $f(x)$ spojité a který obsahuje bod x_0 , v němž jsou zadány počáteční podmínky $y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Je-li $f(x) \equiv 0$ mluvíme o **homogenní rovnici**, v případě $f(x) \neq 0$ o **rovnici nehomogenní**. Při konstrukci obecného řešení homogenní rovnice hraje důležitou roli tzv. fundamentální systém řešení. Systém n řešení y_1, \dots, y_n homogenní rovnice nazveme **fundamentálním systémem**, jsou-li tato řešení lineárně nezávislá, tj. je-li jejich wronskián

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

na intervalu I různý od nuly. Wronskián stačí prověřit v jediném bodě intervalu I , neboť je na celém intervalu buď různý od nuly nebo identicky nulový. Za fundamentální systém řešení můžeme vzít libovolnou n -tici lineárně nezávislých řešení homogenní rovnice. V praxi zpravidla vybíráme buď ten formálně nejjednodušší fundamentální systém nebo fundamentální systém, který popisuje nějakou potřebnou fyzikální či technickou veličinu.

Ukázka 3.26: Za fundamentální systém rovnice $y'' - y = 0$ můžeme zvolit např. jak dvojici funkcí $y_1 = \exp(x)$, $y_2 = \exp(-x)$, tak i dvojici jejich vhodných kombinací, např. $y_1 = \sinh x \equiv \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$, $y_2 = \cosh x \equiv \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$, neboť všechny čtyři funkce dané rovnici vyhovují a přitom

$$\text{jak } W = \begin{vmatrix} \exp(x) & \exp(-x) \\ \exp(x) & -\exp(-x) \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \text{tak i} \quad W = \begin{vmatrix} \sinh x & \cosh x \\ \cosh x & \sinh x \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Ukázka 3.27: Přesvědčte se, že funkce $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$ a $y_4 = x^3$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice $y^{iv} = 0$. Uvedené funkce jsou polynomy nejvýše třetího stupně a tedy jejich čtvrtá derivace je nulová, takže všechny čtyři funkce zadané rovnici vyhovují. Musíme ještě prokázat jejich lineární nezávislost. K tomu stačí spočítat wronskián

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

Ukázka 3.28: Ukažme ještě, že funkce $y_1 = \sin x$ a $y_2 = \cos x$ reprezentují fundamentální systém řešení rovnice $y'' + y = 0$. Obě funkce zřejmě této rovnici vyhovují a platí

$$W = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0.$$

Vyberme nyní nějaký fundamentální systém y_1, \dots, y_n a zvolme libovolně konstanty c_1, \dots, c_n . Pak lineární kombinace $\sum_{i=1}^n c_i y_i$ představuje obecné řešení rovnice homogenní. Toto tvrzení podtrhuje důležitost zavedení fundamentálního systému, neboť ze známého fundamentálního systému můžeme obecné řešení homogenní rovnice již celkem lehce zkonstruovat. Nalezneme ještě libovolné partikulární řešení y^* nehomogenní rovnice, pak obecné řešení y nehomogenní rovnice můžeme psát ve tvaru

$$y = y^* + \sum_{i=1}^n c_i y_i \quad (3.9)$$

Přicházíme tedy k důležitému závěru, že obecné řešení nehomogenní lineární rovnice je součtem obecného řešení homogenní rovnice a partikulárního řešení rovnice nehomogenní.

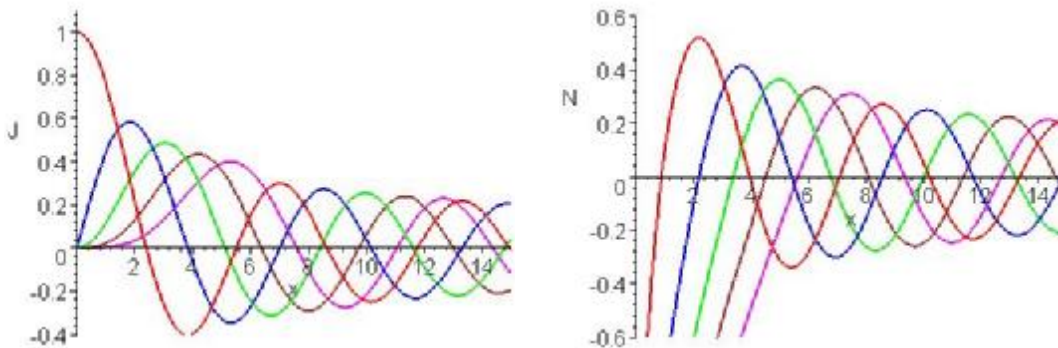
Ukázka 3.29: Na základě ukázky 3.26 můžeme obecné řešení rovnice $y'' - y = 0$ psát jak ve tvaru $y = c_1 \exp(t) + c_2 \exp(-t)$, tak ve tvaru $y = c_1 \sinh x + c_2 \cosh x$.

Určení fundamentálního systému u obecné lineární rovnice n -tého řádu je zatím otevřený problém. Jak uvidíme v následujícím odstavci, je nalezení fundamentálních řešení plně popsáno u lineárních rovnic s konstantními koeficienty. U lineárních rovnic s nekonstantními koeficienty se k určení jednotlivých fundamentálních řešení často využívá mocninných řad. Tyto řady konvergují v oboru konvergence stejnoměrně a proto mohou být derivovány i integrovány člen po členu, aniž by se změnil obor jejich konvergence. Jsou tedy vhodným nástrojem k vyšetřování zejména lineárních rovnic s polynomiálními koeficienty.

Ukázka 3.30: Při řešení rotačně symetrických úloh dospějeme zpravidla k Besselově diferenciální rovnici $x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$, kde $n \in \mathbf{R}$. Bez odvození uveďme, že fundamentální systém této rovnice tvoří Besselova funkce $J_n(x)$ n -tého řádu a Neumannova funkce $N_n(x)$ n -tého řádu, přičemž (symbol Γ označuje tzv. gama funkci, viz např. [1])

$$J_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(n+i+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2i}, \quad N_n(x) = \lim_{n \rightarrow n} \frac{J_n(x) \cos pn - J_{-n}(x)}{\sin pn}.$$

Uvedená řada konverguje pro všechna reálná x . Průběh obou funkcí pro $n = 0, 1, 2, 3$ a 4 je uveden na **Obr. 3.8**.



Obr. 3.8: Průběh Besselových a Neumannových funkcí

K určení partikulárního řešení můžeme opět využít *metodu variace konstant*. Předpokládáme, že jsme již nějakým způsobem určili fundamentální systém $y_i = y_i(x)$, $i = 1, \dots, n$ a tedy i obecné řešení homogenní rovnice. Řešení nehomogenní rovnice hledáme ve stejném tvaru s tím, že integrační konstanty považujeme za funkce nezávisle proměnné, tj. partikulární řešení předpokládáme ve tvaru

$$y^* = \sum_{i=1}^n c_i(x) y_i .$$

Ukazuje se, že tento předpoklad je oprávněný vyhovují-li derivace $c'_1(x), \dots, c'_n(x)$ neznámých funkcí soustavě lineárních algebraických rovnic

$$\sum_{j=1}^n c'_j(x) y_j^{(i)} = f(x) d_{i,n-1}, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad (\text{Kronecker})$$

Pro názornost uveďme tuto soustavu též v explicitním tvaru

$$\begin{aligned} c'_1 y_1 + c'_2 y_2 + \dots + c'_n y_n &= 0 \\ c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 + \dots + c'_n y'_n &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ c'_1 y_1^{(n-2)} + c'_2 y_2^{(n-2)} + \dots + c'_n y_n^{(n-2)} &= 0 \\ c'_1 y_1^{(n-1)} + c'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + c'_n y_n^{(n-1)} &= f \end{aligned} \tag{3.10}$$

Uvedená soustava má vždy právě jedno řešení, neboť determinant matice soustavy je wronskián, který je podle předpokladu nenulový. Vyřešením této soustavy a výpočtem n integrálů pak získáme hledané partikulární řešení y^* , které dosadíme do (3.9).

Metoda variace konstant je na jedné straně velice obecná, neboť se týká obecné lineární rovnice n -tého řádu. Na druhé straně se však jedná o technicky poměrně komplikovanou záležitost, která reprezentuje vyřešení soustavy n lineárních rovnic a poté provedení n kvadratur.

Ukázka 3.31: *Ve formě ukázky provedeme princip zdůvodnění metody variace konstant na případu lineární rovnice druhého řádu $y'' + a y' + b y = f$, v níž $a = a(x)$, $b = b(x)$, $f = f(x)$ jsou zadané koeficienty. Necht' y_1, y_2 je fundamentální systém homogenní rovni-*

ce a hledáme partikulární řešení ve tvaru $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, přičemž $c_1 = c_1(x)$, $c_2 = c_2(x)$. Pak $y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' + c_1' y_1 + c_2' y_2$. Uvažme nyní, že hledáme dvě neznámé funkce c_1, c_2 , ale k dispozici máme zatím jen jednu podmínku a tou je výchozí rovnice. Jednu nezávislou podmínku tedy můžeme přidat. Pro maximální zjednodušení dalšího postupu budeme navíc požadovat, aby $y_1 c_1' + y_2 c_2' = 0$. V důsledku takto zvolené podmínky se tvar první derivace redukuje na $y' = y_1' c_1 + y_2' c_2$ a proto $y'' = c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2''$. Dosazením posledních dvou relací do výchozí rovnice dostaneme

$$c_1 (y_1'' + a y_1' + b y_1) + c_2 (y_2'' + a y_2' + b y_2) + c_1' y_1' + c_2' y_2' = f$$

Vzhledem k tomu, že y_1, y_2 představují fundamentální řešení, jsou oba výrazy v závorkách předchozí relace nulové. Pro veličiny c_1', c_2' tak získáme nakonec soustavu rovnic

$$y_1 c_1' + y_2 c_2' = 0, \quad c_1' y_1' + c_2' y_2' = f,$$

což je speciální případ (3.10) pro $n = 2$.

Ukázka 3.32: Nalezneme obecné řešení rovnice $x^2 y'' - 2x y' + 2y = x^3$, jejíž fundamentální systém tvoří funkce $y_1 = x$ a $y_2 = x^2$. Rovnici upravíme na $y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = x$, neboť, jak také ukazuje předchozí ukázka, metoda variace konstant je odvozena pro tento typ rovnice. Partikulární řešení předpokládáme ve tvaru $y = c_1 x + c_2 x^2$, přičemž hledané funkce $c_1 = c_1(x)$, $c_2 = c_2(x)$ musí vyhovovat soustavě dvou lineárních rovnic $x c_1' + x^2 c_2' = 0$, $c_1' + 2x c_2' = x$. Řešení této soustavy vede na relace $c_1' = -x$, $c_2' = 1$, z nichž vyplývá $c_1 = -\frac{1}{2}x^2$, $c_2 = x$. Partikulární řešení je tedy $y^* = \frac{1}{2}x^3$, takže obecné řešení zadané rovnice má konečný tvar $y = a x + b x^2 + \frac{1}{2}x^3$, kde a, b jsou integrační konstanty. .

Ukázka 3.33: Určeme obecné řešení rovnice $y'' + y = 3 \sin 2x$. Z ukázky 3.28 víme, že fundamentální systém odpovídající homogenní rovnice tvoří funkce $\sin x$ a $\cos x$. Partikulární řešení tedy budeme hledat ve tvaru $y^* = c_1(x) \sin x + c_2(x) \cos x$. Pro derivace prozatím neurčených funkcí $c_1 = c_1(x)$, $c_2 = c_2(x)$ platí

$$c_1' \sin x + c_2' \cos x = 0, \quad c_1' \cos x - c_2' \sin x = 3 \sin 2x.$$

Vyřešením této soustavy lineárních rovnic obdržíme $c_1' = 6 \sin x \cos^2 x$, $c_2' = -6 \sin^2 x \cos x$, odkud integrací $c_1 = -2 \cos^3 x$, $c_2 = -2 \sin^3 x$. Dosazením do předpokládaného tvaru partikulárního řešení pak dostaneme

$$y^* = -2 \cos^3 x \sin x - 2 \sin^3 x \cos x = -2 \sin x \cos x = -\sin 2x.$$

Sečtením partikulárního řešení s obecným řešením homogenní rovnice tak dospějeme ke konečnému tvaru obecného řešení zadané rovnice

$$y = a \sin x + b \cos x - \sin 2x, \quad a, b \text{ konst.}$$

Zmínili jsme, že obecný postup pro určení fundamentálního systému u lineárních rovnic s nekonstantními koeficienty není prozatím znám. Ve formě dvou ukázek uvedeme, že i doposud probraná a ne příliš rozsáhlá látka spolu s jistou intuicí umožňuje některé speciální lineární rovnice s nekonstantními koeficienty úspěšně vyřešit a to bez pomoci nekonečných řad.

Ukázka 3.34: *Zabývejme se okrajovou úlohou $xy'' - y' = x^2$, $y(0) = y(3) = 1$. Vyšetřeme nejprve homogenní rovnici, kterou postupně upravme takto:*

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y'} \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy'}{y'} = \frac{dx}{x}$$

Obdrželi jsme rovnici se separovanými proměnnými x a y' , takže můžeme obě strany integrovat. Získáme tím postupně

$$\ln|y'| = \ln|x| + \ln|2c_1| \quad \Rightarrow \quad y' = 2c_1 x \quad \Rightarrow \quad y = c_1 x^2 + c_2$$

Poslední relace vyjadřuje obecné řešení homogenní rovnice; za fundamentální soustavu tak můžeme považovat dvojici funkcí $1, x^2$. K určení partikulárního řešení y^ tedy stačí podle metody variace konstant předpokládat, že veličiny c_1 a c_2 jsou funkcemi proměnné x , tudíž $y^* = c_1(x)x^2 + c_2(x)$. Derivace neurčených funkcí $c_1 \equiv c_1(x)$, $c_2 \equiv c_2(x)$ musí vyhovovat soustavě rovnic $x^2 c_1' + c_2' = 0$, $2x c_1' = x$ (nezapomeňme, že podle ukázky 3.31 je soustava odvozena za předpokladu, že koeficient u nejvyšší derivace je roven jedné). Vyřešením této soustavy a následnou integrací získáme $c_1(x) = \frac{1}{2}x$, $c_2(x) = -\frac{1}{6}x^3$, takže partikulárním řešením je funkce $y^* = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^3 = \frac{1}{3}x^3$. Obecné řešení zadané rovnice má tedy tvar $y = a + bx^2 + \frac{1}{3}x^3$. Určením integračních konstant a, b z počátečních podmínek pak dospějeme k výslednému řešení*

$$y = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

Ukázka 3.35: *Druhá ukázka je mnohem komplikovanější, neboť máme nalézt obecné řešení rovnice $x \cos x y'' + 2(\cos x - x \sin x) y' - 2 \sin x y = 0$. Pomocí pravidla pro derivování součinu $(x y')' = y' + x y''$ zadanou rovnici postupně upravíme na separovaný tvar*

$$[(x y')' - y'] \cos x + 2(\cos x - x \sin x) y' - 2 \sin x y = 0,$$

$$(x y' + y)' \cos x = 2(x y' + y) \sin x,$$

$$\frac{(x y' + y)'}{x y' + y} = 2 \tan x,$$

jehož obě strany můžeme přímo integrovat. Po integraci dostaneme

$$\ln|x y' + y| = \ln|c_1| - \ln \cos^2 x \quad \Rightarrow \quad x y' + y = \frac{c_1}{\cos^2 x}.$$

Přitom jsme absolutní hodnotu opět zahrnuli do integrační konstanty. Jak zjistíme separací proměnných, je obecné řešení homogenní rovnice tvaru $y = \frac{c}{x}$. Pomocí variace konstanty $c = c(x)$ dospějeme k

$$c' = \frac{c_1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad c = c_1 \tan x + c_2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{c_1 \tan x + c_2}{x}$$

a to je hledané obecné řešení.

3.4.3 Lineární rovnice s konstantními koeficienty

Lineární rovnice s konstantními koeficienty má tvar

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad a_n \neq 0. \quad (3.11)$$

Pro tuto rovnici je znám exaktní postup, jak určit systém fundamentálních řešení její homogenní rovnice. Za tím účelem přiřadíme rovnici (3.11) tzv. *charakteristickou rovnici*

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Povšimněme si podobnosti této rovnice s vyšetřovanou diferenciální rovnicí. Charakteristická rovnice představuje algebraickou rovnici n -tého stupně a ta má právě n kořenů, počítáme-li je i s násobností. Tyto kořeny mohou být reálné i komplexní. Má-li charakteristická rovnice komplexní kořen, pak má i komplexně sdružený kořen, tj. komplexní kořeny se vyskytují v komplexně sdružených dvojicích. Podle tvaru kořene můžeme určit příslušné fundamentální řešení.

Je-li λ jednoduchý reálný kořen, pak příslušné fundamentální řešení je $y = \exp(\lambda x)$. Obdržíme-li dvojici jednoduchých komplexně sdružených kořenů $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, pak příslušná dvojice fundamentálních řešení má tvar $y_1 = \exp(\alpha x) \cos \beta x$ a $y_2 = \exp(\alpha x) \sin \beta x$. Jedná-li se o p -násobný kořen (ať již reálný či komplexní), pak obdržíme p fundamentálních řešení $y_1 = \tilde{y}$, $y_2 = x \tilde{y}$, ..., $y_p = x^{p-1} \tilde{y}$, přičemž \tilde{y} je řešení, které by odpovídalo jednoduchému kořenu.

Ukázka 3.36: Rovnici $y'' - y = 0$ přísluší charakteristická rovnice $I^2 - 1 = 0$, která má dvě jednoduchá reálná řešení $I_1 = 1$, $I_2 = -1$ a proto fundamentálními řešeními jsou funkce $\exp(x)$, $\exp(-x)$.

Ukázka 3.37: Rovnice $y'' + y = 0$ má charakteristickou rovnici $I^2 + 1 = 0$, jež má dvojici komplexně sdružených kořenů $I_1 = j$, $I_2 = -j$ a proto jsou fundamentálními řešeními funkce $\sin x$, $\cos x$.

Ukázka 3.38: Rovnice $y'' - (a + b)y' + a b y = 0$, kde a, b označují navzájem různá reálná čísla, má kvadratickou charakteristickou rovnici $I^2 - (a + b)I + a b = 0$ se dvěma reálnými kořeny $I_1 = a$, $I_2 = b$ a tudíž funkce $\exp(ax)$, $\exp(bx)$ reprezentují její fundamentální systém.

Ukázka 3.39: Rovnice $y'' - 2a y' + (a^2 + b^2)y = 0$, přičemž a, b jsou obecná reálná čísla, má charakteristickou rovnici $I^2 - 2aI + a^2 + b^2 = 0$, s dvojicí komplexně sdružených kořenů $I_1 = a + j b$, $I_2 = a - j b$, což vede na fundamentální řešení $\exp(ax) \sin bx$ a $\exp(ax) \cos bx$. Vidíme, že reálná část komplexního kořene charakteristické rovnice ovlivňuje vzrůst či tlumení řešení dané diferenciální rovnice, zatímco imaginární část tohoto kořene má vliv na periodičnost řešení.

Ukázka 3.40: Rovnici $y^{iv} + (b^2 - a^2)y'' - a^2 b^2 y = 0$, kde a, b jsou obecná reálná čísla, přísluší charakteristická rovnice $I^4 + (b^2 - a^2)I^2 - a^2 b^2 = 0$ s kořeny $I_{1,2} = \pm a$ a $I_{3,4} = \pm j b$. Fundamentální systém tvoří funkce $\exp(ax)$, $\exp(-ax)$, $\sin bx$ a $\cos bx$.

Ukázka 3.41: Rovnici $y''' - 4y'' + 4y' = 0$ je přiřazena kubická charakteristická rovnice $I^3 - 4I^2 + 4I \equiv I(I-2)^2 = 0$ s jedním jednoduchým kořenem $I_1 = 0$ a jedním dvojným kořenem $I_{2,3} = 2$. Proto jsou fundamentální řešení tvaru $1, \exp(2x), x \exp(2x)$

Protože metoda variace konstant je mnohdy technicky velice náročná a vychází ze znalosti fundamentálních řešení, můžeme u rovnice s konstantními koeficienty k určení partikulárního řešení s výhodou využít též *metodu neurčitých koeficientů*. Tato metoda je mnohem jednodušší a nevyžaduje znalost fundamentálních řešení, ale lze ji použít jen pro některé typy pravých stran. Spočívá v tom, že pro některé pravé strany lze určit formální tvar partikulárního řešení, který obsahuje volné parametry. Stačí tedy určit hodnoty těchto volných parametrů.

Postup si objasňeme na případu poměrně obecné pravé strany

$$f(x) = \exp(\alpha x)[p^m(x) \cos \omega x + q^m(x) \sin \omega x], \quad (3.12)$$

kde $p^m(x)$ a $q^m(x)$ jsou zadané polynomy m -tého stupně a α, ω jsou reálná čísla. Je-li číslo $a + j\omega$ κ -násobným kořenem charakteristické rovnice, pak lze partikulární řešení hledat ve tvaru

$$y^* = x^k \exp(\alpha x)[r^m(x) \cos \omega x + s^m(x) \sin \omega x].$$

Dosud neurčené koeficienty polynomů $r^m(x)$ a $s^m(x)$ se po dosazení y^* do nehomogenní rovnice určí porovnáním koeficientů u stejných funkcí. Pokud číslo $a + j\omega$ není kořenem charakteristické rovnice, položíme v předchozí relaci $k = 0$.

Povšimněme si, že v uvedeném poměrně obecném tvaru pravé strany (3.12) a tedy i odpovídajícího partikulárního řešení je skryto několik v praxi se často vyskytujících speciálních případů. Uveďme si přehledně některé z nich:

$$\begin{aligned} a = 0, w = 0 &\Rightarrow f(x) = p^m(x), & y^* &= x^k r^m(x), \\ m = 0, w = 0 &\Rightarrow f(x) = p_0 \exp(\alpha x), & y^* &= r_0 x^k \exp(\alpha x), \\ m = 0, a = 0 &\Rightarrow f(x) = p_0 \cos \omega x + q_0 \sin \omega x, & y^* &= x^k (r_0 \cos \omega x + s_0 \sin \omega x), \end{aligned}$$

kde p_0, q_0 jsou zadané a r_0, s_0 zatím neurčené konstanty. Poznamenejme ještě, že i když se v pravé straně vyskytuje jen jedna z trigonometrických funkcí, musíme u partikulárního řešení obecně předpokládat výskyt obou funkcí.

Ukázka 3.42: Určeme partikulární řešení rovnice z ukázky 3.33, tentokrát metodou neurčitých koeficientů. V tomto případě $m = a = p_0 = 0, q_0 = 1, w = 2$. Protože číslo $a + j\omega = 2j$ není řešením charakteristické rovnice $I^2 + 1 = 0$, klademe $k = 0$. Partikulární řešení tedy můžeme hledat ve tvaru $y^* = r_0 \cos 2x + s_0 \sin 2x$. Dosazením do zadané diferenciální rovnice a porovnáním koeficientů u stejných trigonometrických funkcí dospějeme k $r_0 = 0, s_0 = -1$ a proto hledaným partikulárním řešením je funkce $y^* = -\sin 2x$.

Ukázka 3.43: Nalezneme partikulární řešení rovnice $y'' - 5y' + 6y = \exp(3x)$. Zde $a = 3, w = m = 0, p_0 = 1$. Číslo $a + j\omega = 3$ je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice $I^2 - 5I + 6 = 0$ a tudíž $k = 1$. Partikulární řešení proto předpokládáme ve tvaru

$y^* = r_0 x \exp(3x)$. Dosazením do výchozí diferenciální rovnice pak shledáme, že $r_0 = 1$ a v důsledku toho $y^* = x \exp(3x)$.

Ukázka 3.44: Řešme nyní následující okrajovou úlohu

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 6\exp(2x), \quad y(0) = y'(0) = y(1) = 0.$$

Charakteristická rovnice $I^3 - 6I^2 + 12I - 8 \equiv (I - 2)^3 = 0$ má trojný kořen $I = 2$ a proto se fundamentální systém skládá z funkcí $\exp(2x)$, $x\exp(2x)$, $x^2\exp(2x)$. K určení partikulárního řešení uvažme, že $m = w = 0$, $a = 2$, $p_0 = 6$. Vzhledem k tomu, že číslo $a + jw = 2$ je trojnásobným kořenem charakteristické rovnice, klademe $k = 3$. Partikulární řešení proto předpokládáme ve tvaru $y^* = r_0 x^3 \exp(2x)$. Dosazením do zadané rovnice určíme $r_0 = 1$, takže obecné řešení výchozí rovnice můžeme psát ve tvaru

$$y = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + x^3) \exp(2x).$$

K určení integračních konstant c_0, c_1, c_2 využijeme počátečních podmínek. To vede na soustavu lineárních algebraických rovnic $c_0 = 0$, $2c_0 + c_1 = 0$, $c_0 + c_1 + c_2 + 1 = 0$, jejímž řešením je $c_0 = c_1 = 0$, $c_2 = -1$. Výsledným řešením zadané okrajové úlohy je tedy funkce $y = (x^3 - x^2) \exp(2x)$.

Ukázka 3.45: Zabývejme se nyní úlohou, kdy se pravá strana skládá z více členů různého typu. Postup vysvětlíme na počáteční úloze

$$y'' + y' - 2y = 4\exp(2x) - 10\sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Charakteristická rovnice $I^2 + I - 2 = 0$ má dva různé reálné kořeny $I_1 = 1$, $I_2 = -2$ a proto fundamentální systém tvoří funkce $\exp(x)$ a $\exp(-2x)$. Vzhledem k lineárnosti rovnice můžeme na základě předchozích ukázek hledat partikulární řešení ve tvaru lineární kombinace partikulárních řešení, která by odpovídala jednotlivým členům pravé strany. V našem případě tedy položíme $y^* = a \exp(2x) + b \sin x + c \cos x$. Abychom vypočetli neurčené parametry a , b , c , dosadíme do výchozí rovnice a porovnáme koeficienty u stejných funkcí. Dospějeme k soustavě rovnic $4a = 4$, $3b + c = 10$, $b - 3c = 0$ s řešením $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$. Nyní již můžeme pro vyšetřovanou rovnici sestavit obecné řešení

$$y = c_1 \exp(x) + c_2 \exp(-2x) + \exp(2x) + 3\sin x + \cos x.$$

Aby byly splněny i počáteční podmínky, musíme položit $c_1 = -3$, $c_2 = 1$, takže celkem

$$y = -3 \exp(x) + \exp(-2x) + \exp(2x) + 3\sin x + \cos x \equiv -3 \exp(x) + 2 \cosh(2x) + 3\sin x + \cos x.$$

Ukázka 3.46: Provedme si analýzu seriového elektrického RLC obvodu, jehož proudová odezva $i = i(t)$ vyhovuje diferenciální rovnici $LCi'' + RCi' + i = Cu'(t)$ druhého řádu. Omezme se jen na homogenní rovnici. Její charakteristická rovnice $LC\lambda^2 + RC\lambda + 1 = 0$ má dva kořeny

$$I_1 = -p - \sqrt{p^2 - \frac{1}{LC}}, \quad I_2 = -p + \sqrt{p^2 - \frac{1}{LC}}, \quad p = \frac{R}{2L}.$$

V závislosti na velikosti parametrů R , L a C analyzovaného obvodu můžeme rozeznat tři případy:

a° $CR^2 > 4L \Rightarrow$ Charakteristická rovnice má dva reálné různé záporné kořeny, takže $i = c_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 \exp(\lambda_2 t)$. Jedná se tedy o silně tlumený neperiodický děj.

b° $CR^2 = 4L \Rightarrow$ Charakteristická rovnice má dvojný reálný záporný kořen a proto $i = \exp(-pt)(c_1 + c_2 t)$. Jedná se o kriticky tlumený děj.

c° $CR^2 > 4L \Rightarrow$ Charakteristická rovnice má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_1 = -p - j\omega$ a $\lambda_2 = -p + j\omega$, $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - p^2}$, se zápornou reálnou složkou. Tedy $i = \exp(-pt)(c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t)$. Tento děj je tedy slabě tlumený.

Ukázka 3.47: V praxi se často vyskytuje požadavek na výpočet neurčitěho integrálu $I = \int \exp(ax) \sin wx \, dx$. Tento integrál se zpravidla určuje pomocí dvojí integrace per partes a vyřešením takto získané lineární rovnice. Ukážeme, jak lze tento integrál získat jako řešení lineární diferenciální rovnice $I' = \exp(ax) \sin wx$ metodou neurčitých koeficientů. Vzhledem k typu pravé strany můžeme podle (3.12) řešení uvedené rovnice předpokládat ve tvaru $I = \exp(ax)(c_1 \sin wx + c_2 \cos wx)$. Dosazením do diferenciální rovnice a porovnáním koeficientů u stejných trigonometrických funkcí dospějeme k soustavě dvou rovnic $a c_1 - w c_2 = 1$ a $w c_1 + a c_2 = 0$. Vyřešením této soustavy získáme $c_1 = a/(a^2 + w^2)$, $c_2 = -w/(a^2 + w^2)$. Výsledný integrál má proto tvar $\int \exp(ax) \sin wx \, dx = \exp(ax) \frac{a \sin wx - w \cos wx}{a^2 + w^2}$.

3.5 Shrnutí

Diferenciální rovnice n -tého řádu v implicitním a explicitním tvaru:

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Počáteční úloha rovnice n -tého řádu:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

$$f \in C(\Omega) \Rightarrow \text{existence řešení}$$

$$f \in C_1(\Omega) \Rightarrow \text{jednoznačná existence řešení}$$

Počáteční úloha diferenciální rovnice prvního řádu:

$$y' = f(x, y)$$

$$\text{separace proměnných: } y' = f(x)g(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + \text{konst.}$$

lineární rovnice:

$$y' + f(x)y = g(x) \Rightarrow y = [\int g(x)F(x) dx + c]/F(x), \quad F(x) = \exp(\int f(x) dx)$$

Lineární rovnice n -tého řádu:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \quad a_n(x) \neq 0$$

obecné řešení nehom. r. = obecné řešení hom. r. + part. řešení nehom. r.

variace konstant:
$$\sum_{j=1}^n c'_j(x) y_j^{(i)} = f(x) d_{i,n-1}, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad (\text{Kronecker})$$

Lineární rovnice n -tého řádu s konstantními koeficienty:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad a_n \neq 0$$

charakteristická rovnice:
$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

fundamentální řešení:
$$I \text{ reálné} \Rightarrow y = \exp(Ix)$$

$$I_{1,2} = a \pm jb \Rightarrow y_1 = \exp(ax) \sin bx, \quad y_2 = \exp(ax) \cos bx$$

metoda neurčitých koeficientů:
$$f(x) = \exp(ax) [p^m(x) \cos \omega x + q^m(x) \sin \omega x]$$

$$y^* = x^k \exp(ax) [r^m(x) \cos wx + s^m(x) \sin wx]$$

3.6 Kontrolní otázky

- 18) Musí diferenciální rovnice n -tého řádu obsahovat všechny derivace nižšího řádu?
- 19) Vysvětlete rozdíl mezi implicitním a explicitním tvarem řešení.
- 20) Stačí u diferenciálních rovnic nalézt nekonečně mnoho řešení?
- 21) Může být singulární řešení obsaženo v obecném řešení?
- 22) Vysvětlete rozdíl mezi existencí a jednoznačnou existencí řešení.
- 23) Čím se liší počáteční a okrajové úlohy?
- 24) Jaký je vztah mezi integrálními křivkami a izoklinami?
- 25) Lze provést separaci proměnných u každé diferenciální rovnice prvního řádu?
- 26) Co je typické pro lineární diferenciální rovnice?
- 27) Jak se sestrojí a k čemu slouží charakteristická rovnice?
- 28) Co je to fundamentální systém řešení?
- 29) Jak je definován wronskián?
- 30) V kolika bodech musíme spočítat wronskián, abychom určili fundamentální systém?
- 31) Musíme určit fundamentální systém vždy před nalezením partikulárního řešení?
- 32) Jaké metody výpočtu partikulárního řešení znáte?

3.7 Příklady ke kapitole 3

Příklad 3.1: Znázorněte směrové pole diferenciální rovnice $y' = \sin(x + z)$.

Příklad 3.2: Ukažte, že funkce $u(x)$, určená rovnicí $\arctg \frac{u}{x} - \ln \sqrt{x^2 + u^2} = 0$,
vyhovuje diferenciální rovnici $(x + y) dx - (x - y) dy = 0$.

Příklad 3.3: Řešte Cauchyovu úlohu pro rovnici $y' = \cos^2 x$ při počáteční podmínce
 $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$.

Příklad 3.4: Řešte rovnici $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$ s počáteční podmínkou $y(0) = 4$.

Příklad 3.5: Najděte obecné řešení rovnice $y''' + 2y'' + y' = x^2 + \sin x$.

Výsledky viz kap. 9

4 Diferenciální počet v komplexním oboru

Cíle kapitoly: Kapitola obsahuje základy diferenciálního počtu komplexní funkce komplexní proměnné. Nejprve si připomeneme některé nezbytné pojmy a potřebná označení. Poté se seznámíme s komplexní funkcí komplexní proměnné a zavedeme pojem její derivace. Zde budou hrát důležitou roli Cauchyovy-Riemannovy podmínky. Zaměříme se hlavně na důležitou množinu komplexních funkcí a to na tzv. holomorfní funkce. Budeme jimi rozumět funkce, které mají derivaci i v okolí každého bodu definičního oboru. Zařadíme zde též krátkou zmínku o geometrické interpretaci holomorfních funkcí - o konformním zobrazení. Kapitulu zakončíme rozsáhlejším přehledem nejužívanějších racionálních a transcendentních komplexních funkcí. V souvislosti s tím uvedeme také řadu, zejména elektrotechnických, aplikací.

4.1 Úvod

Analýza komplexní funkce komplexní proměnné představuje mocný teoretický aparát. Tento aparát lze s úspěchem aplikovat jak v matematice samotné, např. v diferenciálních a integrálních rovnicích, integrálních transformacích, funkcionální analýze apod., tak i v praktických aplikacích, jako je elektrotechnika, hydrodynamika, aerodynamika, vedení tepla, teoretická fyzika apod. Studium funkce komplexní proměnné umožňuje též hlubší pohled na funkce a na jejich vzájemné, a v mnoha případech velmi těsné, souvislosti.

Prvním, kdo zavedl pojem ryze imaginárního čísla byl, a to již asi v polovině 16. století, Ital Raffael Bombelli. Základy teorie komplexní analýzy položil v první polovině 18. století Švýcar Leonhard Euler. Hlavní výsledky však byly formulovány až v průběhu 19. století a jsou spojeny se jmény významných matematiků, jako je Francouz Augustin Louis Cauchy, Němci Carl Friedrich Gauss, Karl Weierstrass a Georg Friedrich Bernhard Riemann a Angličan sir William Rowan Hamilton.

V elektrotechnice samotné jsou komplexní veličiny využívány až od konce 19. století, kdy rychle se rozvíjející elektrotechnická praxe si hlubší studium funkce komplexní proměnné postupně vynutila. To pak mimo jiné přispělo i k zavedení symbolického vyjadřování střídavých veličin pomocí komplexních čísel. V současnosti je používání komplexní analýzy v elektrotechnice zcela běžné.

Pro čtení dalších kapitol se předpokládá, že čtenář je dostatečně seznámen s pojmem komplexního čísla, s jeho geometrickým významem, s tvary jeho zápisu, se způsobem počítání s komplexními čísly a některými dalšími pojmy. Přesto bude užitečné, zopakujeme-li nejprve alespoň některé základní pojmy a sjednotíme terminologii.

4.2 Množiny komplexních čísel

Označme $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ reálné číslo, $z, c \in \mathbf{C}$ komplexní čísla a $M \subset \mathbf{C}$ množinu komplexních čísel. Při $|c| < \infty$ nazveme množinu $U(d, c) = \{z \in \mathbf{C} : |z - c| < d\}$ *d-okolím* bodu c . Pro nekonečný bod $c = \infty$ definujeme δ -okolí vztahem $U(\delta, \infty) = \{z \in \mathbf{C} : |z| > \frac{1}{\delta}\}$. Vidíme

ihned, že se v obou případech se zmenšujícím se δ zmenšuje i velikost příslušného okolí. Vyjmeme-li z δ -okolí bod c , mluvíme o *prstencovém okolí*. Bod c nazveme *vnitřním bodem* množiny M , jestliže $\exists U(\delta, c) \subset M$. Bod c nazveme *izolovaným bodem* množiny M , když existuje prstencové okolí $U(\delta, c) \not\subset M$. Bod c nazveme *hromadným bodem* množiny M , když $\forall U(\delta, c)$ obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny M ; povšimněme si, že hromadný bod nemusí patřit do množiny M . Bod c nazveme *hraničním bodem* množiny M , jestliže $\forall U(\delta, c) \quad \exists z_1 \in M \wedge \exists z_2 \notin M$, tedy každé okolí hraničního bodu obsahuje alespoň jeden bod, který do množiny M patří a alespoň jeden bod, který do množiny M nepatří. Také hraniční bod nemusí být prvkem množiny M . Množinu všech hraničních bodů množiny M nazveme její *hranicí*.

Ukázka 4.1: *Kružnice $|z - c| = r$ je hranicí jak uzavřeného kruhu $|z - c| \leq r$, a tedy do kruhu patří, tak i otevřeného kruhu $|z - c| < r$, kdy do kruhu nepatří.*

Množinu bodů $[x, y]$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$ nazveme *rovinnou křivkou*. Přitom $x(t)$, $y(t)$ jsou zadané funkce. Bod $[x(a), y(a)]$ nazveme jejím *počátečním bodem* a $[x(b), y(b)]$ jejím *koncovým bodem*. Rovinná křivka je *spojitá*, jsou-li obě funkce $x(t)$, $y(t)$ spojité. Platí-li $x(a) = x(b)$ a $y(a) = y(b)$, jedná se o křivku *uzavřenou*. U uzavřené křivky tedy koncový bod splývá s počátečním bodem. Křivku nazveme *prostou* či *jednoduchou*, jestliže $t_1 \neq t_2$ implikuje $x(t_1) \neq x(t_2) \wedge y(t_1) \neq y(t_2)$, tj. když sama sebe neprotíná. Prostou uzavřenou křivku nazveme *Jordanovou křivkou*. Křivka je *hladká*, jestliže je prostá a její tečna se spojitě mění, přičemž $x'^2(t) + y'^2(t) > 0$. Křivka je *po částech hladká*, jestliže je sestavena z konečného počtu hladkých křivek.

Ukázka 4.2: *Kružnice, elipsa, obvod mnohoúhelníka a asteroidea jsou uzavřené spojitě prosté křivky. Kružnice a elipsa jsou přitom hladké křivky, obvod mnohoúhelníka a asteroidea jsou jen po částech hladké. Příkladem křivky, která není prostá je „osmička“ či „nekonečno“. Přímka, úsečka, kruhový oblouk a spirála jsou prosté hladké spojitě křivky, které nejsou uzavřené.*

Ukázka 4.3: *Vyjádřeme si nyní rovnici přímky $Bx + Cy + D = 0$ v komplexní Gaussově rovině. Za tím účelem vyřešme soustavu rovnic $z = x + jy$, $\bar{z} = x - jy$ pro neznámé x a y . Výsledné relace $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ a $y = \frac{1}{2j}(z - \bar{z})$ dosadíme do rovnice přímky. Po úpravě dostaneme*

$$\bar{E}z + E\bar{z} + D = 0, \quad \text{kde } E = \frac{1}{2}(B + jC).$$

Zdůrazněme, že koeficient D je reálný a povšimněme si charakteristického postavení komplexního koeficientu E .

Ukázka 4.4: *Podobně nalezneme vyjádření kružnice $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$, $A \neq 0$, $B^2 + C^2 > 4AD$. Po jednoduchých úpravách dospějeme k*

$$Az\bar{z} + \bar{E}z + E\bar{z} + D = 0,$$

přičemž koeficient E je stejný jako v předchozí ukázce. Pro úplnost poznamenejme, že jiné vyjádření téže kružnice je $|z - z_0| = r$, kde střed se určí z relace $z_0 = -\frac{E}{A}$ a pro poloměr platí $r = \frac{1}{|A|}\sqrt{E\bar{E} - AD}$.

Vzhledem k velké podobě rovnice přímky a kružnice v komplexní rovině, si zavedeme pojem *zobecněné kružnice*

$$Az\bar{z} + \bar{E}z + E\bar{z} + D = 0, \quad A, D \in \mathbf{R}, \quad E \in \mathbf{C}$$

kteřá pro $A = 0$ přejde v klasickou přímku a pro $A \neq 0$ v klasickou kružnici.

Množinu M nazveme *otevřenou*, je-li každý její bod vnitřní. Množinu M doplněnou o všechny její hromadné body nazveme *uzávěrem* množiny M a označíme \bar{M} . Množina je *uzavřená*, platí-li $M = \bar{M}$. Množina M je *ohraničená*, existuje-li kruh konečného poloměru, který tuto množinu obsahuje. Otevřená množina M se nazývá *souvislá*, lze-li každé její dva body spojit lomenou čarou, která celá leží v M . Ohraničená oblast se nazývá *k-násobně souvislá*, je-li její hranice tvořena k uzavřenými křivkami. Souvislou otevřenou množinu budeme nazývat *oblastí*.

Ukázka 4.5: 1) $M = \{z \in \mathbf{C} : 0 < r_1 < |z - c| < r_2\}$, tedy otevřené mezikružší, je otevřená, ohraničená a dvojnásobně souvislá množina. Jejím uzávěrem je uzavřené mezikružší, které obsahuje i body obou vytvářejících kružnic. 2) $M = \{z \in \mathbf{C} : 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}\}$, tedy první kvadrant roviny včetně souřadných poloos, je uzavřená, neohraničená a souvislá množina. Tato množina je totožná se svým uzávěrem. 3) $M = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z^2 > 0\}$, tedy první a třetí kvadrant bez souřadných os, je otevřená, neohraničená a nesouvislá množina. Jejím uzávěrem je množina M doplněná o body ležící na obou souřadných osách. Tento uzávěr je již množina souvislá. 4) $M = \{z \in \mathbf{C} : |z - 2| < |z|\}$, tedy polorovina $\operatorname{Re} z > 1$, je otevřená, neohraničená a souvislá množina. 5) $M = \{z \in \mathbf{C} : z^2 = 0\}$, tedy dvojice souřadných os, je uzavřená, neohraničená a souvislá množina. Tato množina splývá se svou hranicí. Pověšme si, že k zápisu množin komplexních čísel lze použít různé matematické prostředky.

4.3 Posloupnosti komplexních čísel

Protože existuje jistá analogie mezi posloupnostmi reálných čísel a posloupnostmi komplexních čísel, nebude čtení této kapitoly pro čtenáře obtížné.

Přiřadíme-li každému $n \in \mathbf{N}$ komplexní číslo $z_n = x_n + jy_n$ a tato čísla seřadíme podle vzrůstajícího indexu, řekneme, že jsme utvořili *posloupnost*. Obvykle ji značíme $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo nemůže-li dojít k omylu $\{z_n\}$. Číslo z_n nazýváme *n-tým členem* posloupnosti. Posloupnost nazveme *ohraničenou*, jestliže $\exists r > 0$ tak, že $\forall n \in \mathbf{N}$ platí $|z_n| < r$. Ohraničená posloupnost tedy leží v nějakém dostatečně velkém okolí bodu nula. Posloupnost, která není ohraničená, je *neohraničená*.

Definice 4.1: Číslo $c \in \mathbf{C}$ nazýváme *limitou* posloupnosti $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{C}$, jestliže $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$ tak, že $\forall n > N$ leží body z_n v ε -okolí bodu c , tj. platí $|z_n - c| < \varepsilon$. Píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c$ nebo prostě $z_n \rightarrow c$ a říkáme, že posloupnost je *konvergentní*. V opačném případě je posloupnost *divergentní*.

Věta 4.1: Označme $z_n = x_n + jy_n$, $c = a + jb$. Pak $z_n \rightarrow c$ právě tehdy, když současně platí $x_n \rightarrow a \wedge y_n \rightarrow b$.

Věta 4.2: Označme $z_n = r_n \exp(j\varphi_n)$, $c = r \exp(j\varphi)$, $c \neq 0$, $c \neq \infty$. Pak $z_n \rightarrow c$ právě tehdy, když současně platí $r_n \rightarrow r \wedge \varphi_n \rightarrow \varphi$.

Věty říkají, že místo výpočtu jedné limity komplexní posloupnosti, můžeme počítat limity dvou reálných posloupností. U druhé věty je nutné vhodně volit argumenty. Více vysvětlí následující ukázka.

Ukázka 4.6: Vyšetřeme posloupnost $z_n = 1 + (-1)^n \frac{j}{n}$. Volba $0 \leq \arg z_n < 2\pi$ není v tomto případě vhodná, neboť posloupnost argumentů členů se sudými indexy by konvergovala k nule, zatímco posloupnost argumentů členů s lichými indexy by konvergovala k číslu 2π . Naproti tomu volba $-\pi \leq \arg z_n < \pi$ u téže posloupnosti je správná, neboť obě zmíněné posloupnosti argumentů konvergují k nule.

Věta 4.3: Pro posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- a° má nejvýše jednu limitu,
- b° platí věty o součtu, rozdílu, součinu a podílu (kromě dělení nulou),
- c° konverguje-li, je ohraničená,
- d° konverguje právě tehdy, když konverguje posloupnost jejich modulů,
- e° konverguje právě tehdy, když je cauchyovská.

Připomeňme, že posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *cauchyovská*, jestliže $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ tak, že $\forall m, n > N$ platí $|z_m - z_n| < \varepsilon$ (Bolzano-Cauchy). U posloupnosti komplexních čísel tedy pojmy konvergentní posloupnost a cauchyovská posloupnost splývají, přitom se snadněji ověřuje skutečnost, že posloupnost je cauchyovská, neboť nemusíme znát limitní bod.

4.4 Komplexní nekonečné řady

Také v této kapitole budeme vycházet ze značné podobnosti s reálnými řadami. Mějme dānu posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ komplexních čísel. Pak symbol $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots$ nazýváme *řadou* komplexních čísel. Abychom mohli stanovit, co budeme rozumět součtem této řady, přiřaďme ji tzv. *posloupnost částečných součtů* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, přičemž *n-tý částečný součet* definujeme relací $s_n = \sum_{i=1}^n z_i$.

Definice 4.2: Existuje-li $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \neq \infty$, říkáme, že řada *konverguje* a číslo s považujeme za její součet, tj. píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s$. V opačném případě, tj. je-li $s = \infty$ nebo s neexistuje, řada *diverguje*. V tom případě řadě žádný součet nepřisuzujeme. Jestliže konverguje i

$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$, pak řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *konverguje absolutně*. Jestliže konvergentní řada nekonverguje absolutně, řekneme že *konverguje relativně*.

Věta 4.4: Označme $z = x_n + j y_n$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konverguje právě tehdy, když konvergují obě reálné řady $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$. Je-li přitom $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z$, pak $z = x + j y$.

Věta říká, že místo jedné komplexní řady můžeme sčítat dvojici reálných řad, je-li to výhodnější.

Věta 4.5: Pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ komplexních čísel platí:

a^o konverguje-li, pak $z_n \rightarrow 0$,

b^o diverguje, pokud $z_n \rightarrow z \neq 0$,

c^o konverguje-li absolutně, pak konverguje,

d^o řídí se podílovým kriteriem (d'Alembert):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \begin{cases} < 1 & \text{řada konverguje} \\ > 1 & \text{řada diverguje} \end{cases}$$

e^o řídí se odmocninovým kriteriem (Cauchy):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} \begin{cases} < 1 & \text{řada konverguje} \\ > 1 & \text{řada diverguje} \end{cases}$$

Zdůrazněme, že pokud se uvedené limity rovnají jedné, pak uvedená kritéria konvergence nedávají žádnou odpověď. V tom případě musíme rozhodnout podle některého z dalších kriterií, jako je Dirichletovo, Abelovo, Raabeovo, integrální apod., přičemž lze s výhodou využít i vlastnosti c^o, viz např. [27], [28 str. 830].

Ukázka 4.7: Z vlastnosti a^o a b^o vyplývá existence konvergentních řad, které nekonvergují absolutně, nýbrž jen relativně. Příkladem je relativně konvergentní Leibnizova řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots = \ln \frac{1}{2}, \text{ jejíž řada modulů } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots, \text{ známá jako}$$

harmonická řada, nekonverguje i přesto, že její obecný člen $z_n = \frac{1}{n}$ konverguje k nule .

Ukázka 4.8: Ukažme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(j(n + \ln n))}{2^n + \sqrt{n}}$ konverguje absolutně. Počítejme

$$\text{proto } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\exp(j(n + \ln n))|}{|2^n + \sqrt{n}|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + \sqrt{n}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2 - 1 = 1 \text{ a to jsme měli dokázat.}$$

Doposud jsme se zabývali jen číselnými řadami. Důležitým nástrojem pro vyšetřování funkcí jsou však *mocninné řady*. Jsou to řady tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (4.1)$$

Věta 4.6: *K řadě (4.1) existuje číslo $R \geq 0$ tak, že pro $|z - z_0| < R$ řada konverguje a pro $|z - z_0| > R$ řada diverguje. Pro tzv. **poloměr konvergence** R platí $R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.*

Mocninná řada tedy konverguje uvnitř jistého kruhu a diverguje vně tohoto kruhu. V některých bodech hraniční kružnice může řada konvergovat a ve zbylých divergovat. To je nutné prošetřit zvlášť. Z věty také vyplývá, že poloměr konvergence se rovná vzdálenosti nejbližšího bodu, v něm řada nekonverguje, od bodu z_0 . Velice často se klade $z_0 = 0$. Mocninné řady mají některé zajímavé vlastnosti, o nichž nás informuje následující věta.

Věta 4.7: *Pro řadu (4.1) platí:*

a^o její poloměr lze počítat též pomocí relace $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$,

b^o konverguje v kruhu o poloměru $r < R$ stejnoměrně,

c^o řady vzniklé derivací či integrací člen po členu mají stejný obor konvergence jako (4.1).

Povšimněme si opačného pořadí indexů v bodě a^o než bylo u d'Alembertova kriteria.

Ukázka 4.9: *Určete poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Bod a^o předchozí věty implikuje*

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

a tedy řada konverguje v celé komplexní rovině.

Ukázka 4.10: *Spočítejte poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. Věta 4.6 spolu s využitím*

l'Hospitalova pravidla pro určení neurčitého výrazu implikuje postupně:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{n} \ln n\right) = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln n\right) = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\right) = \exp(0) = 1.$$

Ukázka 4.11: *V matematické analýze reálné proměnné je znám následující rozvoj funkce v řadu $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$, $|x| < 1$. Pokud využíváme jen poznatků z oboru reálných čísel, není možné zdůvodnit, proč tento rozvoj platí jen při $|x| < 1$, když funkce na levé straně je konečná pro všechny reálné hodnoty x . Platnost uvedeného rozvoje lze ovšem rozšířit i do komplexního oboru, tj. $\forall z \in \mathbf{C}$, $|z| < 1$ platí $\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots$. V komplexním oboru se uvedenou zdánlivou anomálií již podaří celkem jednoduše vysvětlit, neboť v bodech $z = \pm j$ funkce na levé straně nemá konečnou hodnotu. V důsledku toho uvedená řada nemůže v těchto bodech konvergovat, takže její poloměr konvergence je, jak tvrdí **Věta 4.6**, skutečně roven jedné.*

Ukázka 4.12: *Nalezněme součet tzv. geometrické řady $1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots$, kde pro kvocient $q \in \mathbf{C}$ musí platit $|q| < 1$. Roznásobením se můžeme snadno přesvědčit, že pro každé přirozené číslo n platí identita $(1 + q + \dots + q^n)(1 - q) = 1 - q^{n+1}$. Přejdeme-li v této identi-*

tě k limitě pro $n \rightarrow \infty$, pak za uvedeného předpokladu o kvocientu platí $q^{n+1} \rightarrow 0$ a tudíž $1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. Tuto relaci budeme v dalším často využívat.

Ukázka 4.13: Z geometrické řady můžeme odvodit další zajímavé relace. Např. derivováním této řady člen po členu podle proměnné q a následnou úpravou obdržíme za stejné podmínky pro kvocient postupně

$$\frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n = \sum_{n=1}^{\infty} n q^n + \frac{1}{1-q} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} n q^n = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Integrováním geometrické řady podle proměnné q dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1}}{n+1} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} = c - \ln(1-q) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} = -\ln(1-q),$$

přičemž jsme neznámou hodnotu integrační konstanty $c = 0$ určili z platnosti odvozované relace i pro $q = 0$. Povšimněme si, že výsledná relace platí i v případě $q = -1$, tj. pro Leibnizovu řadu zmíněnou v ukázce 4.7.

4.5 Komplexní funkce komplexní proměnné

Definice 4.3: Je-li $\forall z \in M \subset \overline{\mathbb{C}}$ přiřazeno alespoň jedno číslo $w \in N \subset \overline{\mathbb{C}}$, řekneme, že na množině M je definována **komplexní funkce komplexní proměnné** a píšeme $w = f(z)$. Množinu M nazýváme **definičním oborem** funkce f a množinu N **oborem hodnot**. Je-li každému komplexnímu číslu z množiny M přiřazeno právě jedna hodnota z množiny N , mluvíme o funkci **jednoznačné**. Je-li některým číslům z množiny M přiřazeno více hodnot z množiny N , mluvíme o funkci **mnohoznačné**.

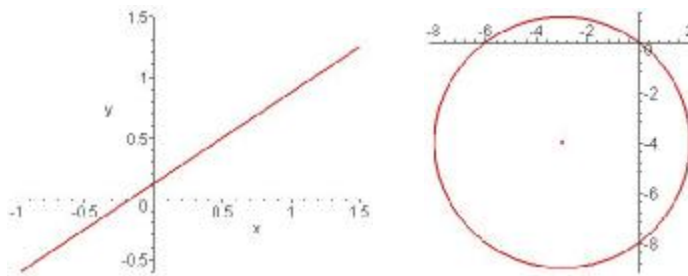
Ukázka 4.14: Např. funkce $w = z^2$ je jednoznačná, funkce $w = \sqrt{z}$ je dvojnásobná, funkce $w = \sqrt{z+j} - \sqrt{z-1}$ je čtyřznačná a funkce $w = \ln z$ je nekonečněmnohoznačná.

Ukázka 4.15: Komplexní funkce komplexní proměnné má v technické praxi, zvláště v elektrotechnice, široké využití. Např. v impedanci $z = R + j\omega L$ lze oddělit činný odpor a reaktanci, podobně lze u výkonu oddělit činný a jalový výkon, obecné kmity (i elektrické) lze vyjádřit pomocí relace $A(t) = A_0 \exp(j\omega t)$, podobně při šíření elektromagnetických vln se využívá relace $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-jkx)$ a $\vec{H} = \vec{H}_0 \exp(-jkx)$ apod.

Komplexní funkci $w = u + jv$ komplexní proměnné $z = x + jy$ můžeme geometricky interpretovat jako zobrazení komplexní roviny (z) do komplexní roviny (w). Pomocí tohoto zobrazení lze vyšetřovat jak se rozličné bodové útvary roviny (z) znázorní do roviny (w).

Ukázka 4.16: Vyšetřete jaká křivka vznikne zobrazením přímky $6x - 8y + 1 = 0$ pomocí funkce $w = \frac{1}{z}$. Z definiční relace funkce potřebujeme nejprve vyjádřit x a y . Proto $x + jy = \frac{1}{u + jv} = \frac{u - jv}{u^2 + v^2}$, což implikuje $x = \frac{u}{u^2 + v^2}$, $y = \frac{-v}{u^2 + v^2}$. Dosazením těchto relací do

výchozí rovnice přímky obdržíme $6u + 8v + u^2 + v^2 = 0$, takže zobrazením dané přímky je kružnice $(u + 3)^2 + (v + 4)^2 = 25$, viz **Obr. 4.1**.



Obr. 4.1: Přímka a její obraz realizovaný převrácenou hodnotou

Ukázka 4.17: Jaká křivka vznikne zobrazením polokružnice $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$ pomocí funkce $w = z^2$? Ze zadaného definičního vztahu funkce vyplývá relace $u + jv = (x + jy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyj$, z níž pak $u = x^2 - y^2 = 4(\cos^2 t - \sin^2 t) = 4 \cos 2t$ a $v = 2xy = 8 \sin t \cos t = 4 \sin 2t$. Zobrazením zadané polokružnice tedy vznikne plná kružnice o dvojnásobném poloměru.

Stejně jako v reálném oboru je jedním ze základních pojmů diferenciálního počtu pojem limity funkce.

Definice 4.4: Řekneme, že funkce $w = f(z)$ má v bodě z_0 **limitu** c , jestliže $\forall U(\varepsilon, c) \exists$ prstencové $U(\delta, z_0)$ tak, že $\forall z \in U(\delta, z_0)$ platí $f(z) \in U(\varepsilon, c)$. Píšeme $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c$.

Komplexní funkce má tedy v bodě z_0 limitu c , jestliže ke každému ε -okolí bodu c existuje prstencové δ -okolí bodu z_0 tak, že pro všechny body z uvedeného δ -okolí náležejí příslušné funkční hodnoty do zvoleného ε -okolí.

Věta 4.8 Označme $w = f(z) = u + jv$, $z_0 = x_0 + jy_0$, $c = a + jb$. Pak platí $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c$ právě tehdy, když $\lim_{[x, y] \rightarrow [x_0, y_0]} u(x, y) = a$ a současně $\lim_{[x, y] \rightarrow [x_0, y_0]} v(x, y) = b$.

Důsledek: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |c| \wedge \lim_{z \rightarrow z_0} \arg f(z) = \arg c$.

Důsledek: Platí věty o součtu, rozdílu, součinu a podílu (kromě nulového jmenovatele).

S pojmem limity těsně souvisí pojem spojitosti funkce. Intuitivně lze říci, že funkce $f(z)$ je spojitá v bodě z_0 , jestliže pro všechny body z blízké bodu z_0 jsou hodnoty $f(z)$ blízké hodnotě $f(z_0)$. Přesněji následující definice:

Definice 4.5: Řekneme, že funkce $w = f(z)$ je **spojitá v bodě** z_0 , je-li definována v některém jeho okolí a přitom platí $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. Je-li funkce spojitá v každém bodě nějaké oblasti, řekneme, že je **spojitá v oblasti**.

Důsledek: Funkce je spojitá právě tehdy, je-li spojitá její reálná i imaginární složka.

4.6 Derivace funkce

Pojem derivace a diferenciálu patří ke stěžejním pojmům analýzy komplexní funkce komplexní proměnné. Formálně se derivace definuje stejně, jako u reálné funkce reálné proměnné. Všechny pojmy a operace však musíme chápat ve smyslu komplexních čísel.

Definice 4.6: Necht' je funkce $f(z)$ definována v nějakém okolí bodu $z_0 \in \mathbf{C}$. Existuje-li

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

nazýváme ji *derivací* funkce $f(z)$ v bodě z_0 a značíme $f'(z_0)$. V tomto případě řekneme, že funkce $f(z)$ je v bodě z_0 *diferencovatelná*. Výraz $df = f'(z)dz$ nazveme *diferenciálem* funkce $f(z)$ v bodě z_0 .

Zdůrazněme, že uvedená limita musí existovat pro libovolnou cestu, po níž se bod z blíží k bodu z_0 . Proto diferencovatelnost funkce komplexní proměnné vymezuje mnohem užší třídu funkcí, než je tomu u reálných funkcí reálné proměnné. V důsledku toho i velice jednoduché funkce nemusí být diferencovatelné.

Ukázka 4.18: *Příkladem funkce, která je všude spojitá a nikde diferencovatelná je funkce $f(z) = \bar{z}$ definovaná v celé komplexní rovině. Zvolme libovolně $z_0 \in \mathbf{C}$ a počítejme $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \bar{z} = \bar{z}_0 = f(z_0)$. Z tohoto faktu vyplývá, že funkce $f(z)$ je v bodě z_0 spojitá.*

Pro další úvahy upravme nejprve

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0}.$$

Abychom ukázali, že naše funkce nemá v bodě z_0 derivaci, stačí zvolit dvě různé cesty, pro něž výše uvedená limita nabývá různých hodnot. Za tyto cesty zvolíme rovnoběžky se souřadnicovými osami, které procházejí bodem z_0 . Zvolme nejprve přímku rovnoběžnou s reálnou osou. Pro tuto přímku platí $z = x + jy_0$, tudíž $\overline{z - z_0} = x - x_0 = z - z_0$ a proto se výše uvedená limita rovná $+1$. Pro přímku rovnoběžnou s imaginární osou je $z = x_0 + jy$, proto $\overline{z - z_0} = j(y - y_0) = y_0 - y = z_0 - z$, takže limita je rovna -1 . Výše uvedená limita tedy neexistuje a funkce $f(z) = \bar{z}$ nemá v bodě z_0 derivaci. Protože bod z_0 byl zvolen libovolně, není tato všude spojitá funkce nikde diferencovatelná.

Podobně jako u reálných funkcí platí, že má-li funkce $f(z)$ v nějakém bodě derivaci, je v tomto bodě i spojitá. Platí též věty o derivaci součtu, rozdílu, součinu, podílu (kromě dělení nulou) a složené funkce.

Pro praktické použití potřebujeme mít k dispozici nějaké kritérium, pomocí něhož bychom snadno zjistili, zda je daná funkce diferencovatelná. Podle předchozí ukázky spojitost funkce

k tomu nestačí. Nutné a postačující podmínky pro existenci derivace komplexní funkce udávají **Cauchyovy-Riemannovy podmínky** definované v následující větě.

Věta 4.9 Funkce $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ má v bodě $z = x + jy$ derivaci právě tehdy, mají-li funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ v tomto bodě totální diferenciál a splňují-li podmínky

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (4.2)$$

Abychom naznačili, jak lze Cauchyovy-Riemannovy podmínky (4.2) odvodit, vezměme v úvahu, že derivace nezávisí na cestě, podél níž se bod z k bodu z_0 přibližuje a proto můžeme psát

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dz} = \frac{df}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{a současně} \quad f'(z) = \frac{df}{dy} \frac{dy}{dz} = \frac{df}{dy} \frac{1}{j} = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Porovnáním reálných a imaginárních složek pak získáme (4.2).

Protože jak nezávisle proměnná z , tak i závisle proměnná $w = f(z)$ mohou být vyjádřeny v kartézském i exponenciálním tvaru, uveďme si Cauchyovy-Riemannovy podmínky pro všechny čtyři možné alternativy:

$$\begin{aligned} w = u(x, y) + jv(x, y) &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \\ w = u(r, j) + jv(r, j) &\Rightarrow r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial j}, \quad r \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial j} \\ w = R(x, y) \cdot \exp(j\Phi(x, y)) &\Rightarrow \frac{\partial R}{\partial x} = R \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad R \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial R}{\partial y} \\ w = R(r, j) \cdot \exp(j\Phi(r, j)) &\Rightarrow r \frac{\partial R}{\partial r} = R \frac{\partial \Phi}{\partial j}, \quad rR \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{\partial R}{\partial j} \end{aligned}$$

Ukázka 4.19: Abychom ukázali, jak se odvodí např. třetí řádek, dosadíme $u = R \cos \Phi$ a $v = R \sin \Phi$ do (4.2). Po zderivování složených funkcí a úpravě obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x} \cos \Phi - R \frac{\partial \Phi}{\partial x} \sin \Phi &= \frac{\partial R}{\partial y} \sin \Phi + R \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos \Phi, \\ \frac{\partial R}{\partial y} \cos \Phi - R \frac{\partial \Phi}{\partial y} \sin \Phi &= -\frac{\partial R}{\partial x} \sin \Phi - R \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos \Phi. \end{aligned}$$

Tyto relace můžeme upravit následovně:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial R}{\partial x} - R \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) \cos \Phi - \left(\frac{\partial R}{\partial y} + R \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) \sin \Phi &= 0, \\ \left(\frac{\partial R}{\partial y} + R \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) \cos \Phi + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - R \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) \sin \Phi &= 0. \end{aligned}$$

Získali jsme tak homogenní soustavu dvou lineárních rovnic pro neznámé $\cos \Phi$, $\sin \Phi$ a ta má nenulové řešení jen tehdy, je-li determinant soustavy nulový. Musí tedy platit $\left(\frac{\partial R}{\partial x} - R \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y} + R \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 = 0$. To je možné jen tehdy, jsou-li oba sčítance nulové, což jsme měli v podstatě dokázat.

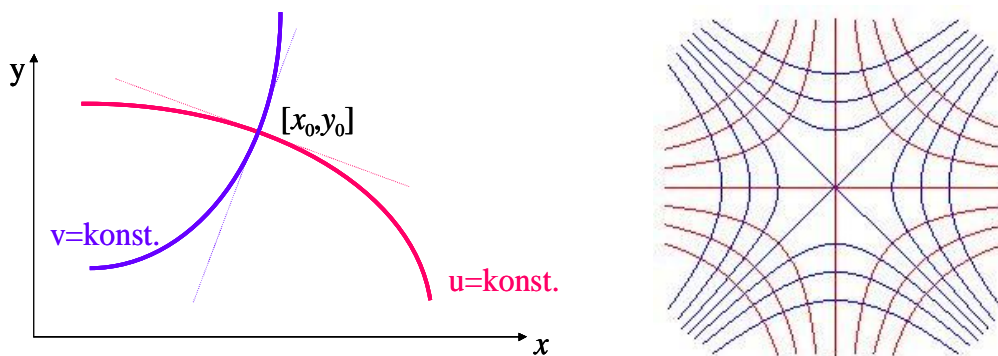
Povšimněme si geometrického významu C-R podmínek. Uvažujme komplexní funkci $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$. Zvolme libovolně dvě křivky zadané implicitně rovnicemi $u(x, y) = \text{konst.}$ a $v(x, y) = \text{konst.}$ Označme $z_0 = x_0 + jy_0$ jejich průsečík. Předpokládejme,

že funkce $f(z)$ má v bodě z_0 derivaci, viz. **Obr. 4.2** vlevo. Rovnice tečen vedených v bodě z_0 k uvedeným křivkám mají tvar

$$u = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0$$

$$v = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0$$

Protože funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ splňují C-R podmínky, platí $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, což znamená, že se obě tečny, a tedy i obě křivky, protínají pod pravým úhlem. Systémy křivek $u(x, y) = \text{konst.}$ a $v(x, y) = \text{konst.}$ jsou tedy navzájem ortogonální.



Obr. 4.2: Geometrický význam C-R podmínek

Ukázka 4.20: Složky $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ funkce $f(z) = z^2$ splňují C-R podmínky, neboť $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$, $-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$. Soustavy křivek $x^2 - y^2 = \text{konst.}$ (modré křivky) a $xy = \text{konst.}$ (červené křivky) znázorňuje **Obr. 4.2** vpravo. Každá modrá hyperbola protíná každou červenou hyperbolu pod pravým úhlem. Fyzikální interpretaci zadané funkce získáme tak, že se omezíme jen např. na první kvadrant komplexní roviny. Pak červené křivky představují ekvipotenciály a modré křivky siločáry elektrického pole dvou navzájem kolmých elektricky nabitých desek umístěných do kladných souřadnicových poloos.

4.7 Holomorfní funkce

Definice 4.7: Jednoznačnou funkci $f(z)$ nazveme *holomorfní v bodě*, má-li v tomto bodě a v nějakém jeho okolí derivaci. Funkce je *holomorfní v oblasti*, je-li holomorfní v každém bodě této oblasti. Funkce je *holomorfní na křivce* či *na uzavřené oblasti*, je-li holomorfní na některé nadoblasti, která tyto útvary obsahuje.

Abychom vysvětlili geometrický význam holomorfní funkce, označme z_0 bod, v jehož okolí je funkce $w = f(z)$ holomorfní a předpokládejme, že $f'(z_0) \neq 0$. Z definice derivace vyplývá

$$\arg f'(z_0) = \arg \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{w - w_0}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \arg(w - w_0) - \lim_{z \rightarrow z_0} \arg(z - z_0) = \Phi_0 - \varphi_0,$$

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|w-w_0|}{|z-z_0|} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overset{\cap}{w} \underset{\cap}{w_0}}{\overset{\cap}{z} \underset{\cap}{z_0}},$$

kde symbol \cap vyjadřuje oblouk křivky. V podstatě tedy můžeme říci, že argument derivace představuje úhel otočení tečny a modul derivace vyjadřuje koeficient deformace. Přesnější výsledek formuluje následující věta.

Věta 4.10: *Nechť je funkce $w = f(z)$ holomorfní v bodě z_0 a nechť $f'(z_0) \neq 0$. Pak:*

1° $\arg f'(z_0)$ je úhel, o který je nutno v kladném směru otočit tečnu ke křivce γ procházející bodem z_0 , abychom dostali směr tečny ke křivce $\Gamma = f(\gamma)$ procházející bodem $w_0 = f(z_0)$,

2° $|f'(z_0)|$ udává poměry délek nekonečně malých oblouků křivek $\overset{\cap}{w} \underset{\cap}{w_0}$ a $\overset{\cap}{z} \underset{\cap}{z_0}$.

Pokud se jedná o deformaci ovlivněnou modulem derivace, mluvíme v případě $|f'(z_0)| > 1$ o *dilataci* a v případě $|f'(z_0)| < 1$ o *kontrakci*.

Definice 4.8: Zobrazení se nazývá *konformním v bodě* z_0 , zachovává-li úhly mezi dvěma libovolným křivkami vycházejícími z bodu z_0 a zachovává-li poměry délek nekonečně malých oblouků. Zobrazení je *konformní na množině*, je-li konformní v každém jejím bodě.

Věta 4.11: *Zobrazení realizované holomorfní funkcí je konformní v každém bodě, v němž je derivace nenulová.*

Ukázka 4.21: *Funkce $f(z) = z^2$ z ukázky 4.17 je zřejmě holomorfní, neboť má derivaci $f'(z) = 2z$ v celé komplexní rovině a proto zobrazení realizované touto funkcí je konformní v každém bodě $z \neq 0$, neboť $f'(0) = 0$. Poznamenejme ještě, že komplexně sdružená funkce $\overline{f(z)} = \overline{z^2}$, již holomorfní není, neboť nespĺňuje C-R podmínky.*

Ukazuje se, že mezi holomorfními funkcemi a harmonickými funkcemi existuje těsná souvislost. Přitom harmonické funkce vykazují velice dobré vlastnosti a hrají důležitou roli v technických aplikacích, např. v teorii potenciálu.

Definice 4.9: Reálnou funkci $\Phi = \Phi(x, y)$ nazýváme *harmonickou* v oblasti M , jestliže zde má spojitě druhé derivace a splňuje Laplaceovu rovnici

$$\Delta\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0.$$

Ukázka 4.22: *Harmonické funkce jsou např. funkce $\Phi = 1$, $\Phi = x$, $\Phi = y$, $\Phi = xy$, $\Phi = x^2 - y^2$, $\Phi = x^3 - 3xy^2$, $\Phi = 3x^2y - y^3$ či funkce $\Phi = \sin x \sinh y$, $\Phi = \sin x \cosh y$, $\Phi = \cos x \sinh y$, $\Phi = \cos x \cosh y$.*

Ukázka 4.23: *Harmonickými funkcemi jsou také obecné funkce*

$$\Phi = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i \binom{n}{2i} x^{n-2i} y^{2i}, \quad \Phi = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^i \binom{n}{2i+1} x^{n-2i-1} y^{2i+1},$$

nebo nekonečná třída funkcí

$$\Phi = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \sin(ix + \beta_i) \sinh(iy + \gamma_i), \quad \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbf{R}$$

lineárních kombinací součinů trigonometrických a hyperbolických funkcí či funkce

$$\Phi = E(\exp(2x) - 1), \quad \Phi = 2E \exp(x) \sin y, \quad v \text{ nichž } E = 1/(\exp(2x) + 2\exp(x) \cos y + 1).$$

Věta 4.12: Je-li funkce $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ holomorfní v oblasti M , pak jsou obě její složky $u(x, y)$ a $v(x, y)$ v oblasti M harmonické.

Zdůrazněme, že obrácená věta neplatí, tj. považujeme-li dvě libovolně zvolené harmonické funkce za složky nějaké komplexní funkce komplexní proměnné, pak tato funkce nemusí být holomorfní, neboť vybrané harmonické funkce nemusejí splňovat C-R podmínky.

Ukázka 4.24: Jako příklad nám poslouží harmonické funkce $u = x^2 - y^2$ a $v = x$. Pak funkce $f(z) = x^2 - y^2 + jx = \operatorname{Re} z^2 + j \operatorname{Re} z$ není holomorfní, neboť $2x = \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ a také $2y = -\frac{\partial u}{\partial y} \neq \frac{\partial v}{\partial x} = 1$.

Definice 4.10: Dvě harmonické funkce, které splňují C-R podmínky, nazýváme *sdrúženými* (konjugovanými).

Věta 4.13: V jednoduše souvislé oblasti existuje k libovolné harmonické funkci sdrúžená harmonická funkce.

V důsledku poslední věty můžeme libovolnou harmonickou funkci považovat za reálnou či imaginární složku nějaké holomorfní funkce. Podle této věty druhá složka existuje, takže můžeme zkonstruovat celou holomorfní funkci. Jinými slovy, holomorfní funkce je až na aditivní integrační konstantu určena jednou ze svých složek. Metodiku konstrukce holomorfní funkce na základně znalosti jedné z jejich složek demonstrujeme na následující ukázce.

Ukázka 4.25: Ze známé imaginární složky $v = v(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ máme nalézt holomorfní funkci $f(z)$, pro níž $f(1) = 0$. Integrací první C-R podmínky $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$ podle proměnné x získáme $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + c(y)$, přičemž integrační konstanta může záviset ještě na druhé nezávislé proměnné, podle níž jsme neintegrovali. Tuto veličinu určíme z druhé C-R podmínky. Dostaneme postupně $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{y}{x^2+y^2} + c'(y) = \frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = c_0$. Reálná složka hledané holomorfní funkce je tedy až na aditivní integrační konstantu určena jednoznačně a má tvar $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + c_0$. Pro funkci $f(z)$ tedy můžeme prozatím psát $f(z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + j \arctan \frac{y}{x} + c_0$. Komplexní funkci $f(z)$ musíme ještě vyjádřit pomocí nezávislé komplexní proměnné z . Takže $f(z) = \ln |z| + j \arg z + c_0 = \ln z + c_0$. Integrační konstantu určíme z podmínky $f(1) = 0$. Hledaná holomorfní funkce má tedy konečný tvar $f(z) = \ln z$.

Ukázka 4.26: Provedme si nyní aplikaci holomorfních funkcí na rovinné elektrostatické pole bez volných nábojů. Elektrický potenciál tohoto pole vyhovuje Laplaceově rovnici a pro-

to jej můžeme považovat např. za imaginární složku $v = v(x, y)$ jisté holomorfní funkce $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$. Tuto funkci nazveme **komplexním potenciálem elektrostatického pole**. Reálná složka $u = u(x, y)$ komplexního potenciálu reprezentuje silovou (tokovou) funkci. Vektor intenzity elektrického pole vyjádřený pro komplexní rovinu pak dává postupně

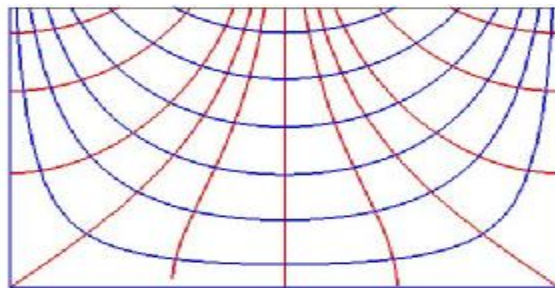
$$\vec{E} = -\text{grad } v = -\frac{\partial v}{\partial x} - j\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} - j\frac{\partial u}{\partial x} = -j\frac{\partial}{\partial x}(u - jv) = -j\overline{f'(z)} = \overline{jf'(z)}.$$

Ze známého komplexního potenciálu $f(z)$ tedy můžeme určit všechny veličiny elektrostatického pole, tedy tokovou funkci jako jeho reálnou složku, elektrický potenciál jako jeho imaginární složku, vektor elektrické indukce z relace $\vec{E} = \overline{jf'(z)}$, eventuálně velikost elektrické intenzity $|\vec{E}| = |f'(z)|$ jako modul derivace komplexního potenciálu, či $\arg \vec{E} = -\arg f'(z) - \frac{\pi}{2}$.

Ukázka 4.27: Skalární magnetický potenciál stacionárního magnetického pole dlouhé obdélníkové drážky je dán relací $v = U \operatorname{sink} x \sinh k y$. Podobně jako u ukázky 4.25 se snadno přesvědčíme, že sdružená harmonická funkce má tvar $u = -U \operatorname{cosk} x \cosh k y$, přičemž jsme zvolili nulovou integrační konstantu. Komplexní potenciál tohoto pole je tedy

$$f(z) = -U \operatorname{cosk} x \cosh k y + jU \operatorname{sink} x \sinh k y = -U \operatorname{cosk}(x + jy) = -U \operatorname{cosk} z.$$

Průběh siločar $u = \text{konst.}$ (červené čáry) a ekvipotenciál $v = \text{konst.}$ (modré čáry) vyšetřovaného pole uvádí **Obr. 4.3**.



Obr. 4.3: Průběh siločar a ekvipotenciál v obdélníkové drážce

4.8 Racionální funkce

V této kapitole uvedeme stručně a bez zdůvodňování hlavní vlastnosti některých jednoduchých racionálních funkcí.

4.8.1 Lineární funkce

Je to funkce tvaru $w = az + b$, $a \neq 0, b \in \mathbf{C}$. Její základní vlastnosti jsou:

- 1° zobrazuje vzájemně jednoznačně $\overline{\mathbf{C}}$ na $\overline{\mathbf{C}}$,
- 2° lze ji nahradit stejnolehlostí, rotací a translací,
- 3° zobrazuje přímku na přímku,
- 4° zobrazuje kružnici na kružnici,
- 5° v případě $a \neq 1$ má pevný bod $z = \frac{b}{a-1}$, v případě $a = 1, b \neq 0$ pevný bod neexistuje a

v případě $a = 1$, $b = 0$ je každý bod roviny jejím pevným bodem (identické zobrazení).

Ukázka 4.28: Funkci w lze přepsat do tvaru $w = |a| \exp(j \arg a) z + b$, takže zobrazení $z_1 = |a| z$ představuje stejnoolehlost, $z_2 = z_1 \exp(j \arg a)$ reprezentuje rotaci a $w = z_2 + b$ vyjadřuje translaci. Ověřili jsme tedy platnost bodu 2°. Povšimněme si ještě, že relace $w = \pm j z$ znamená otočení o $\pm 90^\circ$ kolem počátku.

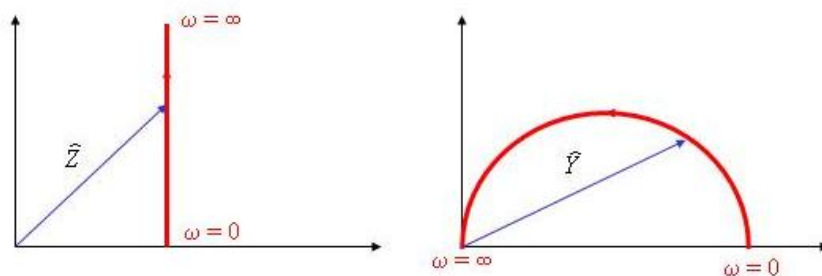
Ukázka 4.29: V ukázce 4.3 a 4.4 jsme uvedli rovnici přímky a kružnice v komplexní rovině a oba útvary jsme spojili v zobecněnou kružnici $A z \bar{z} + \bar{E} z + E \bar{z} + D = 0$, $A, D \in \mathbf{R}$. Z rovnice vyšetřované lineární funkce spočítáme $z = \frac{w-b}{a}$ a dosadíme do rovnice zobecněné kružnice. Po jednoduchých úpravách obdržíme $A w \bar{w} + \bar{E} a - \bar{A} b w + (E a - A b) \bar{w} + F = 0$, kde komplexní koeficient E má význam jako v ukázce 4.3 a reálný koeficient je dán $F = A b \bar{b} - \bar{E} a b - E a \bar{b} + D a \bar{a}$. Uvedená rovnice vyjadřuje zobecněnou rovnici v rovině w . Protože jak v původní tak i v transformované rovnici je u kvadratického členu tentýž reálný koeficient A , transformuje se přímka v přímku a klasická kružnice v klasickou kružnici. Ověřili jsme tak body 3° a 4°.

4.8.2 Kruhová inverze

Kruhová inverze je v komplexní rovině vyjádřena relací $w = \frac{R^2}{\bar{z}}$, $R > 0$. Připomeňme, že body A a B jsou symetrické vzhledem ke kružnici $k(S, R)$, když leží na společném paprsku vycházejícím ze středu S kružnice k a přitom platí $\overline{AS} \cdot \overline{BS} = R^2$. Proto je ve jmenovateli komplexně sdružená hodnota nezávisle proměnné, jinak by odpovídající si body neležely na společném paprsku. Kruhová inverze má tyto vlastnosti:

- 1° zobrazuje vzájemně jednoznačně \bar{C} na C ,
- 2° zobrazí zobecněnou kružnici na zobecněnou kružnici,
- 3° zobrazí vnitřek kružnice $|z| < R$ na její vnějšek a naopak.

Ukázka 4.30: V RL obvodu je impedance jako funkce frekvence ω dána relací $Z = R + j\omega L$ a je tedy složena z činného odporu a reaktance. Admitance $Y = \frac{1}{Z}$ je pomocí kruhové inverze dána relací $Y = \frac{1}{R - j\omega L} = \frac{R + j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$, tj. $u = \frac{R}{R^2 + j\omega L}$, $v = \frac{\omega L}{R^2 + j\omega L}$. Povšimněme si, že platí $Y \bar{Y} = \frac{Y + \bar{Y}}{2R}$, což je rovnice kružnice $|Y - \frac{1}{2R}| = \frac{1}{2R}$ se středem v bodě $Y = \frac{1}{2R}$ a poloměrem $\frac{1}{2R}$, viz **Obr. 4.4**. Polopřímka v komplexní rovině Z tak přechází v horní polokružnici v komplexní rovině Y .



Obr. 4.4: Impedance a admitance

4.8.3 Lineární lomená funkce

Jednou z nejdůležitějších racionálních funkcí komplexní proměnné je lineární lomená funkce, tj. funkce tvaru $w = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad \neq bc$, $c \neq 0$. Tato funkce vykazuje velice zajímavé vlastnosti:

- 1° zobrazuje vzájemně jednoznačně $\bar{\mathbb{C}}$ na $\bar{\mathbb{C}}$,
- 2° lze nahradit translací, rotací, stejnolehlostí a inverzí,
- 3° zobrazí zobecněnou kružnici na zobecněnou kružnici,
- 4° zobrazí tři zadané body z_1, z_2, z_3 na tři zadané body w_1, w_2, w_3 , přitom platí

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2},$$

- 5° necht' se kružnice K zobrazí na kružnici L, pak se buď vnitřek K zobrazí na vnitřek L (a tedy vnějšek K na vnějšek L) anebo se vnitřek K zobrazí na vnějšek L (a tedy i vnějšek K na vnitřek L),
- 6° body symetrické k zobecněné kružnici se zobrazí body symetrické k obrazu této kružnice.

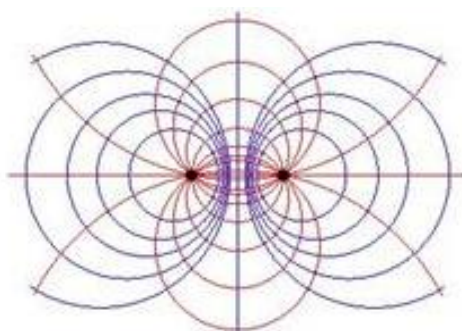
Z třetího bodu vyplývá, že přímka se může zobrazit na klasickou kružnici a klasická kružnice na přímku. Čtvrtý bod říká, že lineární lomené zobrazení zachovává dvojnásobek.

Ukázka 4.31: Pro rozklad na elementární zobrazení přepíšme lineární lomenou funkci do tvaru $w = \frac{a}{c} + \frac{\alpha}{z+\frac{d}{c}}$, $\alpha = \frac{bc-ad}{c^2}$. Pak dekompozice $z_1 = z + \frac{d}{c}$, $z_2 = \frac{1}{z_1}$, $z_3 = |a|z_2$, $z_4 = z_3 \exp(j \arg a)$ $a = z_4 + \frac{a}{c}$ reprezentuje postupně translaci, inverzi, stejnolehlost, rotaci a translaci, čímž jsme prokázali platnost bodu 2°.

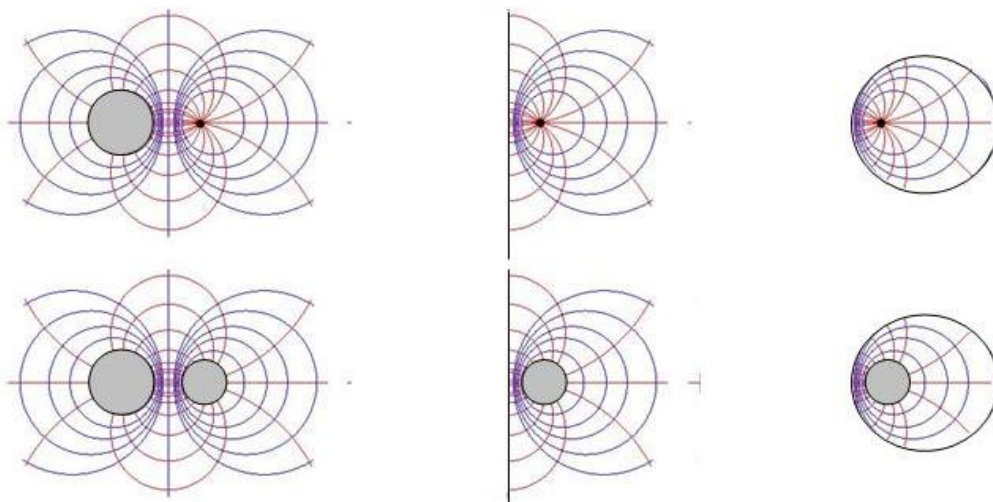
Ukázka 4.32: Pomocí inverzní lineární lomené funkce $z = \frac{-dw+b}{cw-a}$ se zobecněná kružnice $Az\bar{z} + \bar{E}z + E\bar{z} + D = 0$ transformuje na zobecněnou kružnici $Fz\bar{z} + \bar{G}z + G\bar{z} + H = 0$, přičemž $F = Ad\bar{d} - \bar{E}c\bar{d} - Ec\bar{d} + Dc\bar{c}$, $G = -Ab\bar{d} + \bar{E}b\bar{c} + Ea\bar{d} - Da\bar{c}$, $H = Ab\bar{b} - \bar{E}a\bar{b} - Ea\bar{b} + Da\bar{a}$, koeficienty F a H jsou reálné. Střed transformované kružnice leží v bodě $w_0 = -\frac{G}{F}$ a její poloměr je dán relací $r = \frac{1}{|F|} \sqrt{G\bar{G} - FH}$. Tím jsme prověřili platnost bodu 3°.

Ukázka 4.33: Pomocí lineární lomené funkce nalezněte zobrazení pravé poloviny na vnitřek jednotkového kruhu k , přičemž se daný bod z_0 zobrazí na střed kruhu. Zdánlivě se zdá, že máme k dispozici málo údajů. Podle bodu 6° se však musí bod $-\bar{z}_0$ symetrický k bodu z_0 podle imaginární osy (hranice zobrazované poloviny) zobrazit na bod $w = \infty$, který je symetrický ke středu kruhu vzhledem k jednotkové kružnici ohraničující tento kruh. Dosadíme-li tyto dvě podmínky do definiční relace lineární lomené funkce, obdržíme $b = -az_0$, $d = cz_0$, takže po úpravě dostaneme $w = \frac{a}{c} \frac{z-z_0}{z+\bar{z}_0}$. Pro určení poměru $\frac{a}{c}$ však máme k dispozici ještě třetí podmínku a sice, že body $z = jy$ ležící na imaginární ose se musí zobrazit na body $|w|=1$ ležící na jednotkové kružnici. Uplatnění této podmínky dává $|\frac{a}{c}|=1$, tj. $a = c \exp(j\varphi)$. Hledané zobrazení $w = \exp(j\varphi) \frac{z-z_0}{z+\bar{z}_0}$ je tedy jednoznačné až na otočení kolem středu kruhu. Podotkneme ještě, že podle vlastnosti 5° se levá polovina roviny z zobrazí na vnějšek jednotkového kruhu.

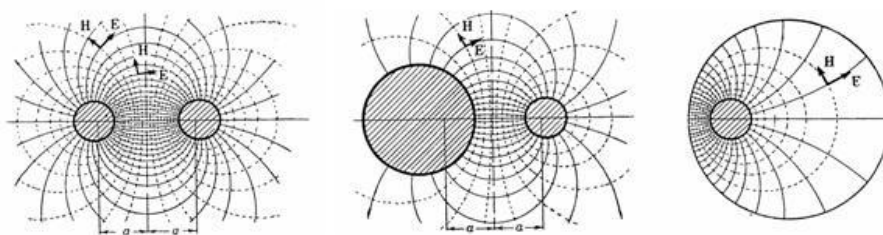
Ukázka 4,34: Lineární lomená funkce odvozená v předchozí ukázce má v elektrotechnické praxi velký význam. Uvedme si několik jejich fyzikálních interpretací, v nichž zvolíme $j = 0$. První interpretaci elektrického pole dvou opačně nabitých rovnoběžných vláken uvádí, v němž modré čáry vyznačují ekvipotenciály a červené silokřivky. Vložíme-li nyní do tohoto pole elektrodu, jejíž povrch splývá s některou z ekvipotenciál, pak se pole vně elektrod nezmění, neboť povrch elektrody tvoří ekvipotenciální hladinu. Tím získáme dalších šest polí pro různá uskupení a to tenký a masivní vodič, tenký vodič a stěna, tenký koaxiální vodič, dva různé masivní vodiče, masivní vodič a stěna a konečně masivní koaxiální vodič, viz **Obr. 4.6**. V podstatě stejné obrázky získáme pro elektromagnetické pole různých seskupení paralelních vlnovodů, viz **Obr. 4.7**; zde je znázorněna dvojice stejných vlnovodů, dvojice různých vlnovodů a koaxiální vlnovod. Do stejné kategorie aplikací náleží ještě Smithův (kruhový) diagram, který dává do souvislosti činitel odrazu $w = \rho$ a poměrou vlnovou impedanci $Z = R + jX$, viz **Obr. 4.8**.



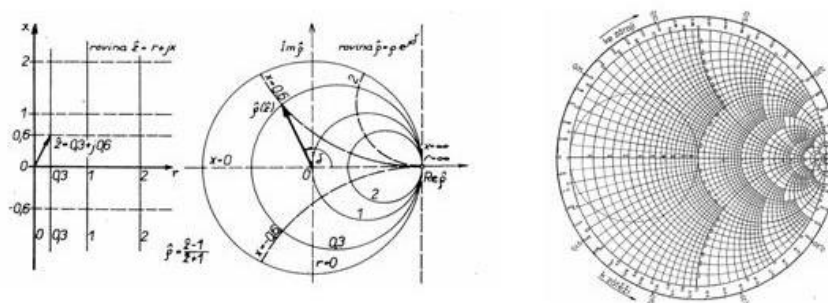
Obr. 4.5: Elektrické pole dvou opačně nabitých vláken



Obr. 4.6: Elektrické pole šesti uskupení vodičů a stěn



Obr. 4.7: Elektromagnetické pole různých uskupení vlnovodů



Obr. 4.8: Smithův diagram

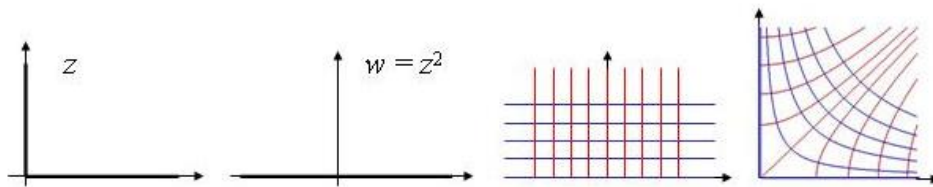
4.8.4 Mocinná funkce

Jedná se o funkci danou předpisem $w = z^n$, $n > 1$. Funkce má následující vlastnosti:

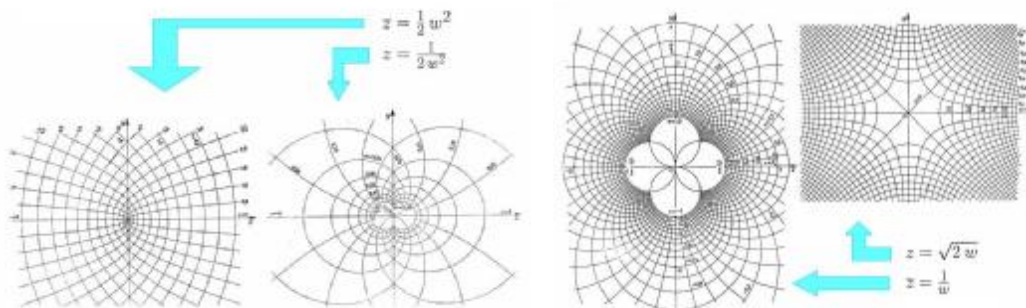
- 1° realizuje konformní zobrazení v celé komplexní rovině s výjimkou bodu $z = 0$,
- 2° zobrazuje kružnice se středem v počátku na kružnice se středem v počátku,
- 3° zobrazuje paprsky na paprsky,
- 4° zobrazuje úhel φ na úhel $\Phi = n\varphi$.

Ukázka 4.35: Elektrické pole dvou navzájem kolmých stejně nabitých stěn, zmíněné již v ukázce 4.20, můžeme určit též tak, že první kvadrant transformujeme pomocí funkce $w = z^2$ na horní polorovinu. Povrch stěn tak přejde v reálnou osu, na níž je nyní předepsán konstantní potenciál. Pole v horní polorovině je tak zřejmě homogenní. Zpětnou transformací pak získáme pole kolmých stěn. Celý postup je znázorněn na **Obr. 4.9**

Ukázka 4.36: Další ukázky použití různých tvarů mocinné funkce prezentuje **Obr. 4.10**.

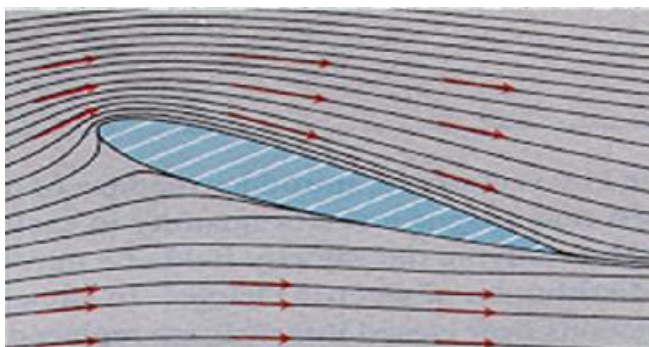


Obr. 4.9: Elektrické pole dvou kolmých nabitých stěn



Obr. 4.10: Zobrazení realizovaná některými mocninnými funkcemi

Ukázka 4.37: V aerodynamice hraje důležitou roli funkce Žukovského, která je definována relací $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$. Žukovského funkce je jednoznačná a holomorfní v celé komplexní rovině s výjimkou bodu $z = 0$, její oblast jednoduše je vnitřek (vnějšek) jednotkového kruhu, realizuje konformní zobrazení s výjimkou bodů $z = \pm 1, 0$ a zobrazuje vnitřek (vnějšek) kruhu na vnějšek úsečky $\langle -1, 1 \rangle$. Jako ukázkou si uvedme obtékání profilu křídla letadla, tak jak uvádí **Obr. 4.11**.



Obr. 4.11: Obtékání profilu křídla

4.8.5 Obecná racionální funkce

Obecnou racionální funkci můžeme zapsat jako podíl dvou polynomů $w = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Tato funkce je spojitá a holomorfní v celé komplexní rovině s výjimkou kořenů jmenovatele. Při

vyšetřování racionální funkce se zpravidla využívá rozkladu na parciální zlomky, z nichž každý můžeme chápat jako speciální případ racionální lomené funkce.

4.9 Základní transcendentní funkce

4.9.1 Exponenciální funkce

Exponenciální funkci definujeme pomocí nekonečné řady

$$e^z \equiv \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (4.3)$$

V ukázce 4.9 jsme dokázali, že tato řada konverguje v celé rovině, neboť pro její poloměr konvergence platí $R = \infty$. Exponenciální funkce má následující vlastnosti:

- 1° je holomorfní v celé komplexní rovině,
- 2° lze ji určit předpisem $\exp(z) = \exp(x) (\cos y + j \sin y)$,
- 3° pro $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ platí $\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$,
- 4° je periodická s ryze imaginární periodou $2\pi j$,
- 5° její oblast jednoznačnosti je pás $-\infty < x < \infty$, $2k\pi < y < 2(k+1)\pi$, $k \in \mathbf{I}$,
- 6° realizuje konformní zobrazení v každém bodě komplexní roviny,
- 7° rovnoběžky s reálnou osou zobrazuje na paprsky procházející počátkem,
- 8° rovnoběžky s imaginární osou zobrazuje na soustředné kruhy se středem v počátku,
- 9° pás šířky $h = y_2 - y_1 < 2\pi$ rovnoběžný s reálnou osou zobrazuje na úhel s vrcholem v počátku a roztečí h , speciálně pás $y_1 = 0$, $y_2 = p$ zobrazí na horní polorovinu a pás $y_1 = 0$, $y_2 = 2p$ na celou rovinu.

4.9.2 Trigonometrické funkce

Trigonometrické funkce jsou definovány relacemi

$$\sin z = \frac{\exp(jz) - \exp(-jz)}{2j}, \quad \cos z = \frac{\exp(jz) + \exp(-jz)}{2}.$$

Vzhledem ke (4.3) je můžeme vyjádřit i pomocí konvergentních řad

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Mají tyto vlastnosti:

- 1° jsou holomorfní v celé komplexní rovině,
- 2° lze je určit pomocí $\sin z = \sin x \cosh y + j \cos x \sinh y$, $\cos z = \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y$,
- 3° jsou periodické s reálnou periodou 2π ,
- 4° platí pro ně známé vztahy, např. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$,
 $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$, $\sin' z = \cos z$, $\cos' z = -\sin z$ apod.,
- 5° realizují konformní zobrazení pro $z \neq \frac{1}{2}(2k+1)\pi$, eventuelně pro $z \neq k\pi$, $k \in \mathbf{I}$,
- 6° lze je vyjádřit jako kompozici známých zobrazení a to otočení, exponenciální funkce a

Žukovského funkce,

7° rovnoběžky s reálnou osou zobrazují na konfokální elipsy,

8° rovnoběžky s imaginární osou zobrazují na konfokální hyperboly.

Z druhého bodu vyplývá, že v komplexní rovině mohou trigonometrické funkce nabývat i hodnot v absolutní hodnotě větších než jedna.

Ukázka 4.38: Spočtěme modul funkcí $\sin z$ a $\cos z$. Podle druhé vlastnosti a podle čtvrté vlastnosti následující kapitoly platí postupně

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y} = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 x \sinh^2 y + \sinh^2 y - \sin^2 x \sinh^2 y}$$

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}$$

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y} = \sqrt{\cos^2 x + \cos^2 x \sinh^2 y + \sinh^2 y - \cos^2 x \sinh^2 y}$$

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \sinh^2 y}$$

Ukázka 4.39: Určeme $\sin j$. Na základě druhé vlastnosti trigonometrických funkcí platí

$$\sin j = \sin 0 \cosh 1 + j \cos 0 \sinh 1 = j \sinh 1 = \frac{e^2 - 1}{2e} j.$$

4.9.3 Hyperbolické funkce

Hyperbolické funkce jsou definovány relacemi

$$\sinh z = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}, \quad \cosh z = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}.$$

Pomocí (4.3) je můžeme vyjádřit ve tvaru konvergentních řad

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Mají tyto vlastnosti:

1° jsou holomorfní v celé komplexní rovině,

2° lze je určit pomocí $\sinh z = \sinh x \cosh y + j \cosh x \sinh y$, $\cosh z = \cosh x \cosh y + j \sinh x \sinh y$,

3° jsou periodické s ryze imaginární periodou $2\pi j$,

4° platí pro ně známé vztahy, např. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$, $\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$, $\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$,

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2, \quad \sinh' z = \cosh z, \quad \cosh' z = \sinh z \text{ apod.},$$

5° realizují konformní zobrazení pro $z \neq \frac{1}{2}(2k+1)\pi j$, eventuelně pro $z \neq 2k\pi j$, $k \in \mathbf{I}$,

6° lze je složit z exponenciální funkce a Žukovského funkce,

7° rovnoběžky s reálnou osou zobrazuje na konfokální hyperboly,

8° rovnoběžku s imaginární osou zobrazuje na konfokální elipsy,

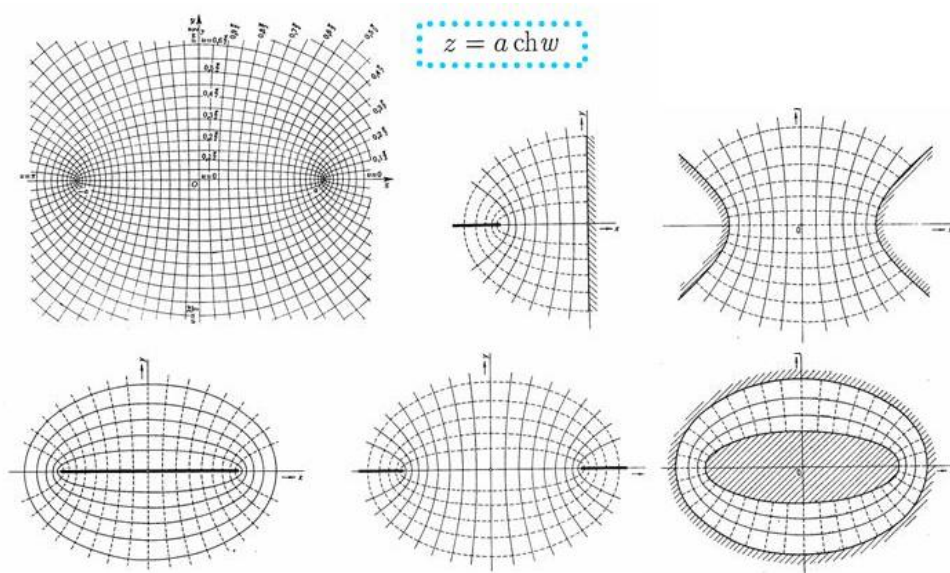
9° souvisí s trigonometrickými funkcemi pomocí vztahů

$$\sinh jz = j \sin z, \quad \cosh jz = \cos z, \quad \sin jz = j \sinh z, \quad \cos jz = \cos z.$$

Ukázka 4.40: Podobně jako v ukázce 4.38 lze odvodit

$$|\sinh z| = \sqrt{\sinh^2 x + \sin^2 y} \quad \text{a} \quad |\cosh z| = \sqrt{\cosh^2 x - \sin^2 y}$$

Ukázka 4.41: Průběh konfokálních elips a konfokálních hyperbol zobrazení $w = \cosh z$ znázorňuje **Obr. 4.12.** Na témže obrázku jsou uvedeny také některé elektrotechnické interpretace tohoto zobrazení, zejména elektrické pole dvou navzájem kolmých deskových elektrod, dvou hyperbolických elektrod, jedné deskové elektrody, dvojice deskových elektrod ležících v jedné rovině a dvojice eliptických koaxiálních elektrod.



Obr. 4.12: Zobrazení $w = \cosh z$ a jeho fyzikální interpretace

4.9.4 Logaritmická funkce

Logaritmická funkce je definována jako inverzní funkce k exponenciální funkci, tedy

$$w = \ln z \quad \Leftrightarrow \quad z = \exp(w).$$

Jako inverzní funkce k periodické funkci je logaritmus nekonečněmnohohodnotnou funkcí. Abychom to dokázali, položme $z = r \exp(j\varphi)$ a $w = u + jv$. Dosazením do definičního vztahu a úpravou získáme $r = \exp(u)$ a $v = \varphi + 2k\pi$. Takže

$$w = \text{Ln } z = \ln z + 2k\pi j = \ln r + j\varphi + 2k\pi j, \quad k \in \mathbf{I}.$$

Veličina $\ln z$ označuje *hlavní hodnotu* logaritmu, veličina $\text{Ln } z$ reprezentuje *množinu všech hodnot* logaritmu a těch je nekonečně mnoho, neboť k je libovolné celé číslo. Vlastnosti:

- 1° je spojitá v pro všechna $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0, -1, -2, \dots$,
- 2° je holomorfní pro všechna $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0, -1, -2, \dots$,
- 3° platí pro ní známá pravidla, totiž $\text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln } z_1 + \text{Ln } z_2$, $\text{Ln}' z = \frac{1}{z}$.

Ukázka 4.42: Určeme $\text{Ln } j$. Podle definice platí $\text{Ln } j = \ln |j| + j\frac{\pi}{2} + 2kpj = (2k + \frac{1}{2})pj$.

Ukázka 4.43: Vypočtěme $\text{Ln}(-1)$. Platí $\text{Ln}(-1) = \ln |-1| + jp + 2kpj = (2k + 1)pj$.

4.9.5 Obecná mocnina

Obecná mocnina je definována relací

$$w = z^c = \exp(c \operatorname{Ln} z), \quad c \in \mathbf{C}.$$

Jedná se o kompozici exponenciální a logaritmické funkce, tedy o kompozici periodické a nekonečněmnohoznačné funkce. Veličina $\exp(c \operatorname{Ln} z)$ představuje její hlavní hodnotu. Vlastnosti:

- 1° je spojitá pro $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0, -1, -2, \dots$,
- 2° je holomorfní pro $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0, -1, -2, \dots$,
- 3° platí pro ni známá relace $(z^c)' = c z^{c-1}$,
- 4° je obecně mnohoznačná, v případě $c \in \mathbf{N}$ je jednoznačná, v případě $z \in \mathbf{Q}$ je konečněmnohoznačná a ve zbývajících případech je nekonečněmnohoznačná.

Ukázka 4.44: *Spočítejme výraz j^j . Podle definice a podle předchozí ukázky máme*

$$j^j = \exp(j \operatorname{Ln} j) = \exp(j(2k + \frac{1}{2})\pi j) = \exp(-\frac{\pi}{2} - 2k\pi).$$

Vidíme, že výraz j^j nabývá reálné hodnoty, a tato hodnota je dokonce nekonečněmnohoznačná, neboť k je libovolné celé číslo.

4.9.6 Cyklometrické funkce

Cyklometrické funkce jsou definovány jako inverzní funkce k funkcím trigonometrickým. Jsou tedy definovány relacemi

$$w = \arcsin z \iff z = \sin w, \quad \text{apod.}$$

Vlastnosti:

- 1° jsou mnohoznačné, neboť jsou inverzní k periodickým funkcím,

$$\arcsin z = -j \operatorname{Ln}(jz + \sqrt{1 - z^2}), \quad \arctan z = \frac{1}{2} j \operatorname{Ln} \frac{j+z}{j-z},$$

- 2° platí pro ně relace

$$\arccos z = -j \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}), \quad \operatorname{arccot} z = \frac{1}{2} j \operatorname{Ln} \frac{z-j}{z+j}.$$

4.9.7 Hyperbolometrické funkce

Hyperbolometrické funkce jsou definovány jako inverzní funkce k funkcím hyperbolickým. Platí tedy

$$w = \operatorname{arg} \sinh z \iff z = \sinh w, \quad \text{apod.}$$

Vlastnosti:

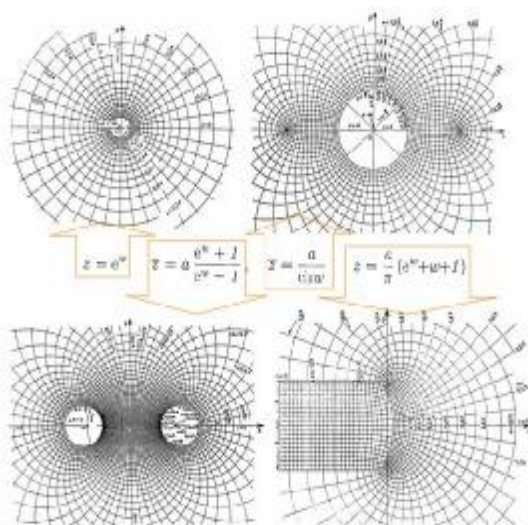
- 1° jsou mnohoznačné, neboť jsou inverzní k periodickým funkcím,

$$\operatorname{arg} \sinh z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}), \quad \operatorname{arg} \tanh z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z},$$

- 2° platí pro ně relace

$$\operatorname{arg} \cosh z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}), \quad \operatorname{arg} \coth z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}.$$

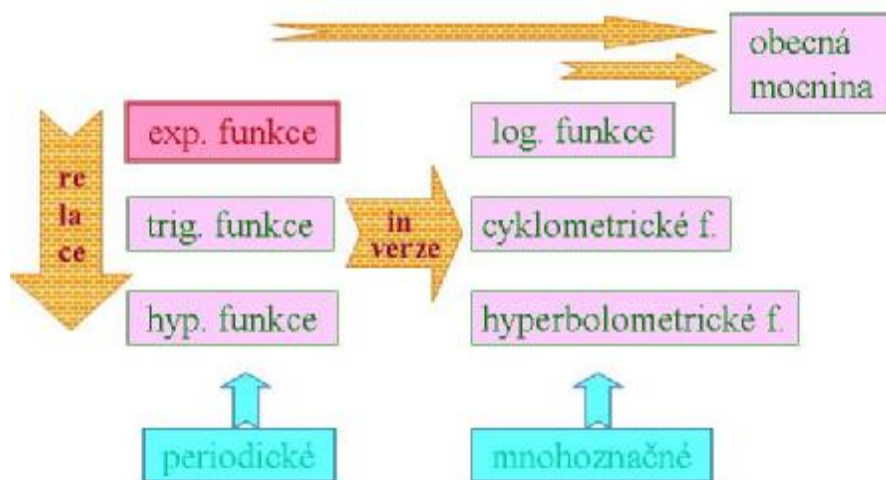
Ukázka 4.45: **Obr. 4.13** *uvádí některé další interpretace složitějších holomorfních funkcí.*



Obr. 4.13: Některá interpretace holomorfních funkcí

4.9.8 Přehled základních transcendentních funkcí

V tomto odstavci jako rekapitulaci probrané látky uvedeme jen přehledné schéma vytváření základních transcendentních funkcí. Výchozí funkcí je funkce exponenciální, kterou jsme jako jedinou definovali pomocí konvergentní nekonečné řady. Ostatní funkce jsme obdrželi buď pomocí vhodné relace či inverze nebo pomocí kompozice obou postupů. Více napoví Obr. 4.14.



Obr. 4.14: Konstrukce základních transcendentních funkcí

4.10 Shrnutí

Rovnice zobecněné kružnice: $Az\bar{z} + \bar{E}z + E\bar{z} + D = 0, \quad A, D \in \mathbf{R}, \quad E \in \mathbf{C}$

Kriterium d'Alembertovo:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \begin{cases} < 1 & \text{řada konverguje} \\ > 1 & \text{řada diverguje} \end{cases}$$

Kriterium Cauchyovo:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} \begin{cases} < 1 & \text{řada konverguje} \\ > 1 & \text{řada diverguje} \end{cases}$$

Derivace funkce komplexní proměnné:
$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad z, z_0 \in \mathbf{C}$$

Cauchyovy-Riemannovy podmínky:

$$\begin{aligned} w = u(x, y) + jv(x, y) &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \\ w = u(r, j) + jv(r, j) &\Rightarrow r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial j}, & r \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial j} \\ w = R(x, y) \cdot \exp(j\Phi(x, y)) &\Rightarrow \frac{\partial R}{\partial x} = R \frac{\partial \Phi}{\partial y}, & R \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial R}{\partial y} \\ w = R(r, j) \cdot \exp(j\Phi(r, j)) &\Rightarrow r \frac{\partial R}{\partial r} = R \frac{\partial \Phi}{\partial j}, & rR \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{\partial R}{\partial j} \end{aligned}$$

Holomorfní funkce: má derivaci i v jistém okolí referenčního bodu

Harmonická funkce:
$$\Delta \Phi \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \Phi \in C_2(\Omega)$$

Racionální lomená funkce:
$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{C}$$

Exponenciální funkce:
$$e^z \equiv \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \infty$$

Trigonometrické funkce:

$$\sin z = \frac{\exp(jz) - \exp(-jz)}{2j}, \quad \cos z = \frac{\exp(jz) + \exp(-jz)}{2}, \quad \sin jz = j \sinh z, \quad \cos jz = \cos z$$

Hyperbolické funkce:

$$\sinh z = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}, \quad \cosh z = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}, \quad \sinh jz = j \sin z, \quad \cosh jz = \cos z$$

Logaritmická funkce:

$$w = \ln z \quad \Leftrightarrow \quad z = \exp(w)$$

Obecná mocnina:

$$w = z^c = \exp(c \operatorname{Ln} z), \quad c \in \mathbf{C}$$

Cyklometrické funkce:

$$w = \arcsin z \quad \Leftrightarrow \quad z = \sin w, \quad \text{a pod.}$$

Hyperbolometrické funkce:

$$w = \operatorname{arg} \sinh z \quad \Leftrightarrow \quad z = \sinh w, \quad \text{a pod.}$$

4.11 Kontrolní otázky

- 1) Co je to zobecněná kružnice a čím se vyznačuje její rovnice?

- 2) Co je to mocninná řada a jaké má vlastnosti?
- 3) Jaký je tvar geometrické řady a jak veliký je její poloměr konvergence?
- 4) K čemu slouží podílové a odmocninové kritérium?
- 5) Formulujte Cauchyovy-Riemannovy podmínky.
- 6) Jaký je geometrický význam Cauchyových-Riemannových podmínek?
- 7) Vysvětlete pojem holomorfní funkce.
- 8) Vysvětlete pojem harmonické funkce.
- 9) Objasněte pojem sdružené harmonické funkce.
- 10) Jaká je souvislost mezi holomorfními a harmonickými funkcemi?
- 11) Jaké vlastnosti má konformní zobrazení?
- 12) Co jsou to body sdružené ke kružnici?
- 13) Vyjmenujte vlastnosti lineární lomené funkce.
- 14) Napište definici exponenciální funkce.
- 15) Které z funkcí exponenciála, trigonometrické funkce, hyperbolické funkce jsou periodické?
- 16) Může modul trigonometrických funkcí přerůst hodnotu jedna?
- 17) Napište relace mezi trigonometrickými a hyperbolickými funkcemi.
- 18) Proč cyklometrické a hyperbolometrické funkce souvisejí s logaritmem?

4.12 Příklady ke kapitole 4

Příklad 4.1: Rozhodněte, zda množina M je otevřená (uzavřená), ohraničená (neohraničená), případně k -násobně souvislá

$$\text{a) } M = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| > 1, |z| < 4\},$$

$$\text{b) } M = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |\operatorname{Im} z| \leq 2\}.$$

Příklad 4.2: Určete poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$

Příklad 4.3: Nalezněte rovnici křivky, na kterou se zobrazí kružnice daná rovnicí $z\bar{z} + (1-j)z + (1+j)\bar{z} + 1 = 0$ pomocí funkce $w = 2z + \bar{z} - 1$.

Příklad 4.4: Určete tvar holomorfní funkce $f(z)$, je-li její reálná složka $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$ a $f(0) = 1$.

Příklad 4.5: Mějme dvě komplexní čísla $a = |a|e^{ja}$, $b = |b|e^{jb}$, $|a| \geq |b|$ a zobrazení definované předpisem $w = az + b\bar{z} + c$. Ukažte, že platí $w = f_4(f_3(f_2(f_1(z))))$, kde $f_1(z) = e^{\frac{1}{2}j(a-b)} z$, $f_2(z) = |a|z + |b|\bar{z}$, $f_3(z) = e^{\frac{1}{2}j(a+b)} z$, $f_4(z) = z + c$.

Příklad 4.6: Vyčíslete a) $\text{Ln}(-9j)$ b) $(-2)^{\sqrt{2}}$.

Výsledky viz kap. 9

5 Integrální počet v komplexním oboru

Cíle kapitoly: Kapitola obsahuje základy integrálního počtu komplexní funkce komplexní proměnné. Po definici integrálu v komplexní proměnné a některých způsobech jeho výpočtu dospějeme ke stěžejní Cauchyově větě, která má řadu důležitých důsledků. Abychom mohli pracovat i s neholomorfními funkcemi, zavedeme si tzv. Laurentovu řadu. Ta nám umožní klasifikovat izolované singulární body, v nichž není funkce holomorfní. Závěrem zavedeme pojem rezidua a uvedeme reziduovou větu, jako zobecnění věty Cauchyovy. Reziduovou větu využijeme v této kapitole jen při výpočtu dvou typů reálných integrálů. S dalším jejím uplatněním se setkáme při studiu integrálních transformací.

5.1 Úvod

Jedním z fundamentálních pojmů analýzy funkcí komplexní proměnné je pojem křivkového integrálu. Tento integrál úzce souvisí s křivkovým integrálem druhého druhu studovaným v analýze reálných funkcí a má s ním řadu podobných vlastností. Proto budeme při výkladu látky postupovat analogickým způsobem. Omezíme se přitom jen na třídu křivek, které jsou pro praktické aplikace dostatečně obecné, tj. na třídu po částech hladkých křivek. Výhodou tohoto omezení je skutečnost, že po částech hladké křivky jsou rektifikace schopné, tj. můžeme určit jejich délku. Druhá výhoda spočívá v tom, že výpočet křivkového integrálu komplexní funkce komplexní proměnné převedeme v podstatě na výpočet určitého integrálu komplexní funkce reálné proměnné. Uvedeme si několik způsobů praktického výpočtu integrálu komplexní proměnné, neboť tyto metody nám usnadní práci při studiu následných kapitol o integrálních transformacích.

5.2 Integrál

V celé kapitole budeme předpokládat, nebude-li řečeno jinak, že Γ je po částech hladká křivka s počátečním bodem $z = a$ a koncovým bodem $z = b$. Na křivce Γ zvolme nějaké dělení $z_0 = a, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = b$ a předpokládejme, že dělicí body jsou na křivce uspořádány podle rostoucího indexu. Vybranému dělení přiřadíme nezáporné číslo $\Delta = \max_{k=1, \dots, n} |z_k - z_{k-1}|$, tzv. *normu dělení*. V každém oblouku $\Gamma_k \subset \Gamma$, $k = 1, \dots, n$ s počátečním bodem z_{k-1} a koncovým bodem z_k zvolme libovolně bod ζ_k , tzv. reprezentanta. Předpokládejme dále, že na křivce Γ je definována spojitá funkce $w = f(z)$, tedy $f(z) \in C(\Gamma)$. Existuje-li níže uvedená limita nezávisle na výběru dělení i výběru reprezentantů, pak *integrál komplexní funkce $f(z)$ po křivce Γ* definujeme relací

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) (z_k - z_{k-1}) \quad (5.1)$$

Ukázka 5.1: Pomocí definice spočítejte integrál $\int_{\Gamma} dz$ podél libovolné křivky s koncovými body a a b . V tomto případě postupně platí

$$\int_{\Gamma} dz = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} (z_n - z_0) = b - a.$$

Povšimněte si, že pro uzavřenou křivku je vyšetřovaný integrál nulový.

Ukázka 5.2: Určete nyní $\int_{\Gamma} |dz|$. Tentokrát máme

$$\int_{\Gamma} |dz| = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}| = \text{meas} \Gamma,$$

takže vyšetřovaný integrál udává délku křivky.

Ukázka 5.3: Spočítejte ještě postupně

$$\int_{\Gamma} z dz = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (z_k + z_{k-1}) (z_k - z_{k-1}) = \frac{1}{2} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} (z_n^2 - z_0^2) = \frac{1}{2} (b^2 - a^2).$$

I v tomto případě je integrál po uzavřené křivce nulový.

Určování integrálu z definice je poněkud komplikované a proto si uvedeme dva vhodnější způsoby jeho výpočtu.

Věta 5.1: Necht' je Γ po částech hladká křivka a necht' $f(z) \in C(\Gamma)$. Pak $\int_{\Gamma} f(z) dz$ existuje a platí $\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} (u + jv)(dx + jdy) = \int_{\Gamma} (u dx - v dy) + j \int_{\Gamma} (v dx + u dy)$.

Věta tedy umožňuje počítat jeden integrál v komplexní rovině pomocí dvou křivkových integrálů v reálné rovině. V případě, že umíme vyjádřit integrační křivku v parametrickém tvaru, lze křivkový integrál komplexní funkce komplexní proměnné počítat jako určitý integrál komplexní funkce reálné proměnné.

Věta 5.2: Necht' je křivka Γ zadána parametricky pomocí funkcí $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Pak $z = x(t) + jy(t) = z(t)$, $dz = z'(t) dt$ a proto $\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)] z'(t) dt$.

Ukázka 5.4: Spočítejte $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0}$ podél kružnice $|z - z_0| = r > 0$, přičemž z_0 je libovolně, ale pevně zvolený bod komplexní roviny. Zaveďme parametrické vyjádření kružnice $z = z_0 + r \exp(j\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Pak

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{j r \exp(j\varphi)}{r \exp(j\varphi)} d\varphi = j \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi j.$$

Toto je velice důležitý výsledek, který se promítne do našich dalších úvah. Povšimněte si, že integrand není v bodě z_0 holomorfní. S faktorem $2\pi j$ se budeme v dalším často setkávat.

Protože křivkový integrál v komplexním oboru se v mnohém podobá křivkovému integrálu v reálném oboru, uvedeme si, a to bez hlubšího rozboru, alespoň některé z jeho základních vlastností.

Věta 5.3: Za výše uvedených předpokladů a označení platí:

$$1^\circ \int_{\Gamma} [c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)] dz = c_1 \int_{\Gamma} f_1(z) dz + c_2 \int_{\Gamma} f_2(z) dz, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{C}$$

$$2^\circ \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$$

$$3^\circ \int_{\Gamma^-} f(z) dz = - \int_{\Gamma} f(z) dz$$

$$4^\circ |f(z)| \leq M, \quad l = \text{meas} \Gamma \Rightarrow \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq M l.$$

5.3 Cauchyova věta

Nyní již máme všechny nutné poznatky k formulaci základní věty integrálního počtu komplexní proměnné. V ukázkách 5.1 a 5.3 jsme obdrželi nulovou hodnotu integrálu podél uzavřené křivky. V obou případech byl integrand uvnitř integrační křivky holomorfní funkcí. V ukázkách 5.2 a 5.4 jsme dospěli k nenulové hodnotě integrálu, ale integrand nebyl všude uvnitř integrační křivky holomorfní funkcí. Ukazuje se, že tento výsledek je velice obecný a že holomorfnost integrandu je pro výpočet integrálu velice podstatná. Přesné tvrzení formule je fundamentální *Cauchyova věta*. Sám Augustin Louis Cauchy formuloval a dokázal toto tvrzení již v roce 1814, avšak za silnějšího předpokladu (spojitost derivace integrandu). Dnešní tvar věty, kdy předpoklad o integrandu je slabší (holomorfnost integrandu), dokázal v roce 1900 E Goursat.

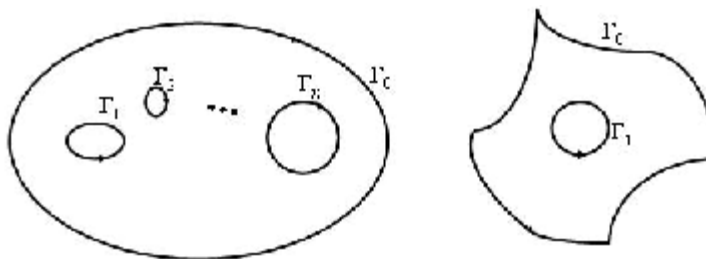
Věta 5.4: Buď Ω jednoduše souvislá oblast a $\Gamma \subset \Omega$ uzavřená po částech hladká křivka. Nechť je funkce $f(z)$ holomorfní v Ω . Pak $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$.

Tedy, zhruba řečeno, integrál z holomorfní funkce podél uzavřené křivky je vždy nulový.

Ukázka 5.5: Nechť Γ je Jordanova křivka, z_0 bod ležící vně této křivky a $n = 0, 1, 2, \dots$. Pak přímým důsledkem Cauchyovy věty je, že $\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = 0$, neboť integrand je uvnitř křivky Γ holomorfní funkcí.

Cauchyovu větu lze zobecnit i na vícenásobně souvislou oblast. Nechť je oblast ohraničena po částech hladkými a stejně orientovanými křivkami $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, přičemž křivka Γ_0 obepíná všechny zbývající křivky, viz **Obr. 5.1** vlevo. Pak

$$\int_{\Gamma_0} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} f(z) dz.$$



Obr. 5.1: Vícenásobně souvislá oblast a deformace integrační cesty

Důležitou roli hraje případ $n = 1$, kdy

$$\int_{\Gamma_0} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz .$$

Tento případ je znám pod názvem *deformace integrační cesty*. Význam uvedené relace spočívá v tom, že integrál i po velice komplikované křivce Γ_0 můžeme převést na integrál po jednoduché křivce Γ_1 , např. po kružnici, a to nám většinou usnadní výpočet, viz **Obr. 5.1** vpravo.

Ukázka 5.6: *Nechť $\Gamma \subset \mathbf{C}$ je po částech hladká křivka a $z_0 \in \mathbf{C}$ je pevný bod. Pak*

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \begin{cases} 2\pi j & z_0 \text{ uvnitř } \Gamma \\ 0 & z_0 \text{ vně } \Gamma \end{cases} .$$

První tvrzení je důsledkem ukázky 5.4 a použití deformace integrační cesty a druhé tvrzení je přímým důsledkem Cauchyovy věty. Pro libovolné celistvé n platí i obecnější tvrzení

$$\int_{\Gamma} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi j & z_0 \text{ uvnitř } \Gamma, \quad n = -1 \\ 0 & z_0 \text{ uvnitř } \Gamma, \quad n \neq -1 \quad \vee \quad z_0 \text{ vně } \Gamma \end{cases} .$$

Nechť jsou body $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ spojeny dvěma stejně orientovanými křivkami Γ_1 a Γ_2 . Označme $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Pak Γ je uzavřená křivka a podle Cauchyovy věty je integrál holomorfní funkce podél křivky Γ nulový. Tento výsledek ovšem implikuje

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz .$$

Jinými slovy, křivkový integrál funkce holomorfní na oblasti nezávisí na tvaru integrační cesty, nýbrž jen na jejích koncových bodech. Tato skutečnost nám mimo jiné dovoluje zavést pojem primitivní funkce a v důsledku toho i naznačit další způsob výpočtu křivkového integrálu.

Definice 5.1: *Nechť je $f(z)$ holomorfní v oblasti Ω a nechť je $z_0 \in \Omega$ pevný bod. Označme Γ křivku s počátečním bodem z_0 a koncovým bodem z . Pak*

$$F(z) = \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

nazýváme *neurčitým integrálem (primitivní funkci)* funkce $f(z)$.

Věta 5.5: *Nechť je funkce $f(z)$ holomorfní na jednoduše souvislé oblasti Ω . Označme $F(z)$ funkci primitivní k $f(z)$. Pak $F(z)$ je v Ω též holomorfní a platí*

$$F'(z) = f(z), \quad \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = F(z) - F(z_0) .$$

Ukázka 5.7: *Protože funkce $f(z) = z$ je holomorfní v celé komplexní rovině, můžeme např. integrál z ukázky 5.3 jednoduše určit takto: $\int_{\Gamma} z dz = \frac{1}{2} z^2 \Big|_a^b = \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$.*

Ke Cauchyově větě platí v jistém smyslu i obrácená věta – *věta Morerova*.

Věta 5.6: *Bud' Ω jednoduše souvislá oblast. Necht' pro $f(z) \in C(\Omega)$ a pro každou uzavřenou křivku Γ platí $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$. Pak je funkce $f(z)$ holomorfní v Ω .*

5.4 Cauchyův vzorec

V důsledku platnosti Cauchyovy věty se ukazuje, že hodnoty holomorfní funkce uvnitř oblasti nelze volit zcela libovolně, ale že jsou za jistých předpokladů již dány jejími hodnotami na hranici oblasti. Platí totiž:

Věta 5.7: *Necht' je jednoduše souvislá oblast Ω ohraničena Jordánovou křivkou Γ . Necht' je funkce $f(z)$ holomorfní v $\bar{\Omega}$. Pak pro $\forall z \in \Omega$ platí*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (5.2)$$

Poslední rovnost, tzv. **Cauchyův vzorec**, ukazuje, že ze znalosti funkčních hodnot holomorfní funkce na hranici oblasti můžeme jednoznačně určit i její hodnoty v každém bodě oblasti. Derivováním relace (5.2) podle parametru z dostaneme existenci derivací všech řádů holomorfní funkce.

Věta 5.8: *Za předpokladů předchozí věty má funkce $f(z)$ uvnitř Ω derivace všech řádů a platí*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (5.3)$$

Obdobný výsledek u reálných funkcí nenajdeme. Větu lze zobecnit i na vícenásobně souvislou oblast. V tom případě musíme položit $\Gamma = \bigcup_{i=0}^n \Gamma_i$ a určit správně orientaci jednotlivých křivek.

Ukázka 5.8: *Máme spočítat integrál $I = \int \frac{\sin(\pi\zeta/4)}{\zeta^2 - 1} d\zeta$ podél kružnice $x^2 + y^2 - 2x = 0$, neboli $|z - 1| = 1$. Abychom mohli využít formule (5.2), položíme $f(\zeta) = \frac{\sin(\pi\zeta/4)}{\zeta + 1}$. Jelikož je funkce $f(z)$ v kruhu $|z - 1| \leq 1$ holomorfní a bod $z = 1$ leží uvnitř vyšetřované kružnice, máme $I = 2\pi j f(1) = 2\pi j \frac{\sin(\pi/4)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi j$. Spočtíme ještě tentýž integrál podél kružnice $x^2 + y^2 - 2y = 0$, tj. $|z - j| = 1$. Oba body $z = \pm 1$ leží vně této kružnice, takže integrand je v kruhu $|z - j| \leq 1$ holomorfní funkcí a proto podle Cauchyovy věty $I = 0$.*

Ukázka 5.9: *Nyní spočtíme $I = \int \frac{\sin(\pi\zeta/4)}{(\zeta^2 - 1)(\zeta - 1)} d\zeta$ podél kružnice $|z - 1| = 1$. Funkci $f(\zeta)$ zvolme stejně, jako v předchozí ukázce, neboť již víme, že je uvnitř kružnice holomorfní. Nyní použijeme relaci (5.3) při $n = 1$. Proto $I = 2\pi j f'(1) = \frac{1}{8} \sqrt{2} \pi (\pi - 2) j$, neboť krátkým výpočtem zjistíme, že $f'(z) = \frac{\pi \cos(\pi\zeta/4) - 4f(\zeta)}{4(\zeta + 1)}$.*

Ukázka 5.10: Mějme dánu holomorfní funkci $f(z)$ a aplikujme (5.2) na kruh $|\zeta - z| = R$. Zavedme parametrické vyjádření $z = z + R \cdot \exp(j\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Po snadné úpravě dostaneme $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + R \cdot \exp(j\varphi)) d\varphi$. Tato relace je známa jako **Gaussova věta o střední hodnotě**.

Uvedená relace říká, že hodnota holomorfní funkce ve středu kruhu je rovna střední hodnotě jejích hodnot na hraniční kružnici.

5.5 Taylorova a Laurentova řada

V kapitole 4.4 jsme uvedli, že mocninná řada konverguje uvnitř konvergenčního kruhu stejnoměrně a že ji zde proto můžeme derivovat i integrovat člen po členu, aniž by se změnil obor konvergence. Tedy součet řady je uvnitř konvergenčního kruhu holomorfní funkcí. Platí však i obrácené tvrzení: Je-li funkce holomorfní v nějakém bodě, pak ji lze v jistém okolí tohoto bodu vyjádřit ve tvaru konvergentní mocninné řady.

Věta 5.9: Necht' je funkce $f(z)$ holomorfní v kruhu $K: |z - z_0| < R$, pak $\forall z \in K$ platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \int_K \frac{f(\zeta) dz}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \quad (5.4)$$

Tato řada se nazývá **Taylorovou řadou (Taylorovým rozvojem)** funkce $f(z)$ v bodě z_0 . Platí však i obrácené tvrzení o jednoznačnosti Taylorova rozvoje.

Věta 5.10: Lze-li funkci $f(z)$ rozložit v řadu $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, pak je to řada Taylorova, tj. pro koeficienty c_n platí relace (5.4).

Ukázka 5.11: Taylorovými rozvoji funkcí $\exp(z)$, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$ jsou řady uvedené v odstavcích 4.9.1, 4.9.2 a 4.9.3. Jak se můžeme přesvědčit pomocí podílového kritéria, všechny tyto řady konvergují v celé komplexní rovině.

V praxi se však setkáváme i s funkcemi, které nejsou ve všech bodech oblasti holomorfní. Abychom mohli i tyto funkce rozvést v řadu, musíme si pojem mocninné řady zobecnit.

Věta 5.11: Necht' je funkce $f(z)$ holomorfní na mezikruží $0 < R_1 < |z - z_0| < R_2$. Pak $\forall z$ tohoto mezikruží lze funkci $f(z)$ rozvést v řadu

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi j} \int_K \frac{f(\zeta) dz}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad n \in \mathbf{I}, \quad (5.5)$$

kde K je kružnice $|z - z_0| = R$, $R_1 < R < R_2$. Tato řada konverguje v mezikruží stejnoměrně.

Definice 5.2: Řadu (5.5) nazýváme **Laurentovou řadou** (nebo též **Laurentovým rozvojem**) funkce $f(z)$ v bodě z_0 . Částečná řada při $-\infty < n \leq -1$ (tedy členy se zápornými mocninami) vytváří **hlavní část** Laurentova rozvoje, částečná řada při $0 \leq n < \infty$ (tedy členy s nezápornými mocninami) představuje **regulární část** Laurentova rozvoje.

Je-li funkce $f(z)$ v bodě z_0 holomorfní, pak Laurentova řada se redukuje na řadu Taylorovu, tj. její hlavní část vymizí. Podobně jako v případě Taylorovy řady i v případě Laurentovy řady platí věta o jednoznačnosti rozvoje v řadu, kterou využíváme hlavně v případech, kdy se nám podaří nalézt součet řady prostřednictvím geometrické řady nebo derivací či integrací jiné řady člen po členu.

Věta 5.12: *Je-li možné v mezikruží $0 < R_1 < |z - z_0| < R_2$ rozložit funkci $f(z)$ v řadu $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, pak je to řada Laurentova, tj. pro její koeficienty platí (5.5).*

Ukázka 5.12: *V bodě $z_0 = 0$ máme rozvést funkci $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ v Laurentovu řadu. Budeme přitom využívat známého výsledku o součtu **geometrické řady** (viz ukázkou 4.12)*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \equiv 1 + q + q^2 + q^3 + \mathbf{L} = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1. \quad (5.6)$$

Danou funkci rozložíme nejprve v parciální zlomky $f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$. Z tohoto rozložení vídíme, že rozvoj v Laurentovu řadu musíme provádět odděleně ve třech oblastech, jejíž hraniční čáry tvoří kružnice $|z| = 1$ a $|z| = 2$.

a° Necht' $|z| < 1$ a tedy tím spíše $|\frac{z}{2}| < 1$. Abychom mohli užít (5.6), upravíme danou funkci na tvar $f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-z/2}$. Pak $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2^{-n-1}) z^n$. Laurentova řada se mění v Taylorovu, neboť zadaná funkce je ve vyšetřované oblasti holomorfní.

b° Necht' nyní $1 < |z| < 2$. Pak $|\frac{z}{2}| < 1$ a $|\frac{1}{z}| < 1$. V tomto případě upravíme zadanou funkci takto $f(z) = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-z/2}$, takže $f(z) = -\frac{1}{z} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{z^m} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z}{2})^n = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} z^n$. Laurentův rozvoj má tedy nenulovou hlavní i regulární část.

c° Necht' konečně $2 < |z|$. Protože nyní platí $|\frac{1}{z}| < 1$, $|\frac{2}{z}| < 1$, použijeme úpravu $f(z) = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{z} \frac{1}{1-2/z}$ a proto $f(z) = -\frac{1}{z} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{z^m} + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{2}{z})^n = \sum_{n=-2}^{\infty} (2^{-n-1} - 1) z^n$. Tedy Laurentův rozvoj má jen hlavní část.

5.6 Izolované singulární body

Již jsme se setkali s tím, že komplexní funkce nemusí být všude holomorfní. Body, v nichž funkce není holomorfní, nazveme **singulárními body** (nebo krátce **singularitami**). Nebudeme se zabývat všemi druhy singulárních bodů. Omezíme se jen na takové singularity, v jejichž okolí je daná funkce holomorfní. Singularitami, které jsou hromadnými body dalších singularit, se zabývat nebudeme. Stejně tak nebudeme brát v úvahu singularity mnohoznačných funkcí, jako je např. izolovaná singularita $z_0 = 0$ funkce $f(z) = \ln z$.

Definice 5.3: Bod $z_0 \in \mathbb{C}$ nazveme *izolovaným singulárním bodem* jednoznačné funkce $f(z)$, jestliže $\exists R > 0$ tak, že v oblasti $0 < |z - z_0| < R$ je funkce $f(z)$ holomorfní, ale v samotném bodě z_0 holomorfní není.

Singularita z_0 funkce $f(z)$ je tedy izolovaná, jestliže je funkce $f(z)$ holomorfní v nějakém prstencovém okolí bodu z_0 .

Ukázka 5.13: Mějme funkci $f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}$. Body $z_k = \pm \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{N}$ jsou izolované singulární body a proto budou předmětem našich dalších úvah. Singulární bod $z_0 = 0$ však již izolovaný není, neboť je hromadným bodem posloupnosti singulárních bodů. Singularitami tohoto typu se zabývat nebudeme, neboť v žádném jejich prstencovém okolí není vyšetřovaná funkce holomorfní.

Věta 5.13: V okolí izolovaného singulárního bodu z_0 funkce $f(z)$ můžeme zkonstruovat Laurentovu řadu, která konverguje v oblasti $0 < |z - z_0| < R$

Hlavní část této Laurentovy řady může obsahovat různý počet nenulových členů. Podle počtu těchto členů rozeznáváme izolované singularity tří typů.

Definice 5.3: Izolovaná singularita z_0 jednoznačné funkce $f(z)$ se nazývá *odstranitelnou singularitou* (*pólem* či *podstatnou singularitou*), jestliže hlavní část Laurentova rozvoje této funkce v okolí bodu z_0 má nulový (konečný či nekonečný) počet členů. Index posledního členu hlavní části Laurentova rozvoje udává *řád pólu*.

Protože určování typu singularity pomocí Laurentova rozvoje je velice pracné, uvedeme větu, která umožňuje klasifikovat singularity mnohem jednodušeji a to pomocí limity.

Věta 5.14: Bud' $f(z)$ jednoznačná funkce a z_0 její izolovaný singulární bod. Pak z_0 je

1^o *odstranitelnou singularitou* $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) < \infty$,

2^o *pólem* $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$,

3^o *podstatnou singularitou* $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ neexistuje.

Věnujme se nyní jednotlivým typům izolovaných singularit podrobněji.

Odstranitelná singularita. Představuje-li bod z_0 odstranitelnou singularitu funkce $f(z)$, pak buď není tato funkce v bodě z_0 definována nebo $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \neq c_0$, přičemž c_0 je koeficient z Laurentova rozvoje. V tomto případě lze singularitu odstranit v tom smyslu, že funkci $f(z)$ nahradíme funkcí $g(z)$, která ve všech bodech $z \neq z_0$ nabývá stejných hodnot jako funkce $f(z)$ a v bodě z_0 nabývá hodnoty $g(z_0) = c_0$. Nová funkce $g(z)$ již v bodě z_0 holomorfní je. V dalších úvahách budeme předpokládat, že tato singularita je již odstraněna dodefinováním vyšetřované funkce pomocí relace $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

Ukázka 5.14: Vyšetřeme singularitu funkce $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ v bodě $z_0 = 0$. Funkce $f(z)$ není v bodě $z_0 = 0$ definována, takže se jedná o singulární bod. Přitom platí

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} = 1 - \frac{1}{6} z^2 + \frac{1}{120} z^4 - \mathbf{L}, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Hlavní část Laurentova rozvoje chybí a proto je uvedená singularita odstranitelná. Protože existuje konečná limita vyšetřované funkce v bodě $z_0 = 0$, můžeme singularitu odstranit, tj. funkci $f(z)$ nahradíme funkcí $g(z)$, pro níž $g(z) = \frac{\sin z}{z}$ při $z \neq 0$ a $g(0) = 1$. Funkce $g(z)$ se od původní funkce liší jen v bodě $z = 0$, je však v bodě $z = 0$ holomorfní.

Pól. Tato singularita se v praxi vyskytuje velice často. Funkce, které nemají jiné singularity než póly, se nazývají **meromorfní funkce**. Hodnoty vyšetřované funkce rostou v pólu na všechny meze a hlavní část příslušného Laurentova rozvoje obsahuje konečný počet členů, přičemž index posledního členu udává řád pólu. Abychom snadno zjistili řád tohoto pólu, zabývejme se nejprve řádem nulového bodu funkce.

Definice 5.4: Číslo k nazveme **řádem nulového bodu** z_0 dané funkce $f(z)$, platí-li $f(z_0) = f'(z_0) = \mathbf{L} = f^{(k-1)}(z_0) = 0$, $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. V tomto případě můžeme psát

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k g(z), \quad g(z_0) \neq 0.$$

Věta 5.15: Je-li z_0 nulovým bodem k -tého řádu holomorfní funkce $f(z)$, pak je též pólem k -tého řádu funkce $1/f(z)$ a naopak.

Ukázka 5.15: Určeme řád pólu funkce $f(z) = \frac{1}{z - \sin z}$ v bodě $z_0 = 0$. Vyšetřujme proto řád nulového bodu funkce $g(z) = z - \sin z$. Zřejmě $g(0) = 0$. Dále platí $g'(z) = 1 - \cos z$, $g'(0) = 0$, $g''(z) = \sin z$, $g''(0) = 0$ a $g'''(z) = \cos z$, $g'''(0) = 1 \neq 0$. Pól zadané funkce je tedy třetího řádu.

Podstatná singularita. Hlavní část Laurentova rozvoje funkce v podstatné singularitě má nekonečný počet členů a limita vyšetřované funkce v tomto bodě neexistuje. Chování funkce v okolí podstatné singularity může být velice složité. V podstatě lze říci, že se zde daná funkce může přibližovat k libovolné předem zadané komplexní hodnotě. O složitosti chování funkce v okolí podstatné singularity vypovídá přesněji následující věta.

Věta 5.16: Nechť je bod z_0 podstatnou singularitou jednoznačné funkce $f(z)$. Zvolme libovolně $c \in \mathbf{C}$. Pak existuje posloupnost $\{z_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$, pro níž $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = c$.

Ukázka 5.16: Vyšetřeme funkci $f(z) = \exp(\frac{1}{z})$ v bodě $z_0 = 0$. Platí zřejmě $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$.

Hlavní část Laurentova rozvoje má tedy nekonečný počet členů. Spočtěme ještě limitu podél kladné reálné poloosy $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{x \rightarrow 0+} \exp(\frac{1}{x}) = \infty$ a také limitu podél záporné reálné poloosy

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{x \rightarrow 0-} \exp(\frac{1}{x}) = 0$. Limity podél dvou různých cest se liší a proto $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ neexistuje. Dvojím způsobem jsme tedy ukázali, že se jedná o podstatnou singularitu. Zvolme nyní

libovolně číslo $c \in \mathbf{C}$ a definujeme posloupnost $z_k = \frac{1}{\text{Ln } c} = \frac{1}{\ln|c| + j \arg c + 2k\pi j}$. Zřejmě $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0 = 0$ a proto také

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{z_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \exp(\text{Ln } c) = \lim_{k \rightarrow \infty} c = c.$$

Definice 5.5: Nekonečně vzdálený bod nazveme *izolovaným singulárním bodem* funkce $f(z)$, jestliže existuje kruh o poloměru $R > 0$ tak, že vně tohoto kruhu nemá funkce $f(z)$ žádné další singulární body. Nekonečně vzdálený bod je *odstranitelnou singularitou* (*pólem* či *podstatnou singularitou*) funkce $f(z)$, jestliže její Laurentův rozvoj v tomto bodě obsahuje nulový (konečný či nekonečný) počet členů s **kladnou** mocninou.

Ukázka 5.17: Vyšetřeme funkci $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ v bodě $z = \infty$. Podle předchozí ukázky je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$. Laurentův rozvoj tedy neobsahuje kladné mocniny a proto se jedná o *odstranitelnou singularitu*. Platí $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{z}\right) = 1$.

5.7 Teorie reziduí

K důležitým pojmům komplexní analýzy náleží pojem rezidua funkce v bodě. Etymologie názvu reziduum (zbytek) vyplývá z následující úvahy. Zvolme libovolně funkci $f(z)$, kterou lze rozložit v Laurentovu řadu, a integrujme ji podél kladně orientované Jordanovy křivky Γ , uvnitř níž leží bod z_0 . Pak s využitím výsledku ukázky 5.6 zbude po integraci

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{\Gamma} (z - z_0)^n dz = 2\pi j c_{-1}$$

skutečně jen jediný nenulový člen. Reziduum a zvláště pak reziduová věta hrají v komplexní analýze velice důležitou roli. Jsou užitečné jak z teoretického tak i z praktického hlediska. Užívají se např. při výpočtu integrálů, při realizaci integračních transformací, při sčítání řad apod.

Definice 5.6: Bud' Γ Jordanova křivka, $f(z)$ funkce holomorfní uvnitř Γ s eventuální výjimkou izolované singularity v bodě z_0 . *Reziduem* funkce $f(z)$ v bodě z_0 nazveme integrál $\text{res } f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(z) dz$.

Z definice bezprostředně vyplývá, že reziduum nezávisí na integrační cestě. Není-li z_0 singulárním bodem, je podle Cauchyovy věty $\text{res } f(z_0) = 0$. Abychom nemuseli rezidua počítat přímo z definice, musíme nalézt nějaká jednodušší pravidla pro jejich určování. Již počáteční úvaha této kapitoly naznačuje, že můžeme formulovat obecnou větu, která je vhodná k určení rezidua pro libovolný singulární bod, tedy i pro podstatnou singularitu.

Věta 5.17:... *Reziduum funkce $f(z)$ v bodě z_0 se rovná koeficientu c_{-1} v Laurentově rozvoji vyšetřované funkce v bodě z_0 .*

Ukázka 5.18: Nalezněme reziduum funkce $f(z) = \exp(\frac{1}{z})$ v bodě $z_0 = 0$, kde podle ukázky 5.16 nastává podstatná singularita. Protože $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$, je $\text{res } f(0) = 1$.

Další pravidla pro výpočet reziduí se týkají jen meromorfních funkcí. Uvažme nejprve, že meromorfní funkce $f(z)$ má v bodě z_0 jednoduchý pól. Pak Laurentův rozvoj zadané funkce má tvar $f(z) = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \mathbf{L}$. Vynásobíme-li celou rovnost dvojitelnem $z-z_0$, dostaneme $(z-z_0)f(z) = c_{-1} + c_0(z-z_0) + c_1(z-z_0)^2 + \mathbf{L}$. Přejdeme-li v této relaci k limitě pro $z \rightarrow z_0$, získáme koeficient c_{-1} a tedy první způsob určení rezidua.

Věta 5.18: Bud' z_0 prostým pólem funkce $f(z)$. Pak $\text{res } f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)f(z)$.

Ukázka 5.19: Vypočtěme reziduum funkce $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)^2}$ v bodě $z_0 = 1$. Zřejmě platí $\text{res } f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{(z-3)^2} = \frac{1}{4}$.

Podobným způsobem se odvodí pravidlo pro výpočet rezidua, je-li z_0 pól řádu k .

Věta 5.19: Bud' z_0 pólem k -tého řádu funkce $f(z)$. Pak

$$\text{res } f(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-z_0)^k f(z)] \quad .$$

Ukázka 5.20: Vypočtěte reziduum funkce z předchozí ukázky v bodě $z_0 = 3$. V tomto případě se jedná o pól druhého řádu, takže platí $\text{res } f(3) = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{d}{dz} (\frac{z}{z-1}) = -\lim_{z \rightarrow 3} \frac{1}{(z-1)^2} = -\frac{1}{4}$.

Ukázka 5.21: V rámci ukázky zdůvodněme platnost předchozí věty pro $k = 2$. V tomto případě platí

$$f(z) = \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots$$

a proto $(z-z_0)^2 f(z) = c_{-2} + c_{-1}(z-z_0) + c_0(z-z_0)^2 + c_1(z-z_0)^3 + \dots$

Abychom obdrželi koeficient c_{-1} , derivujeme poslední relaci podle proměnné z . Obdržíme tak

$$\frac{d}{dz} [(z-z_0)^2 f(z)] = c_{-1} + 2c_0(z-z_0) + 3c_1(z-z_0)^2 + \dots$$

Přechodem k limitě pro $z \rightarrow z_0$ pak bezprostředně získáme speciální případ předchozí věty, tj.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0)^2 f(z)] = c_{-1} = \text{res } f(z_0) \quad .$$

Vyjádřeme nyní funkci $f(z)$ ve tvaru zlomku $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ a předpokládejme, že z_0 je jejím prostým pólem. Tedy musí platit $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$. **Věta 5.18** pak implikuje $\text{res } f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

Věta 5.20: Nechť je z_0 prostým pólem funkce $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$. Pak $\text{res } f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

Ukázka 5.22: Určeme reziduum funkce $f(z) = \frac{1}{\cos z}$ v bodě $z_0 = \frac{\pi}{2}$. Platí $\varphi(z) = 1$, $\psi(z) = \cos z$, $\psi'(z) = -\sin z$. Proto $\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} = -1$.

Reziduová věta, kterou nyní zformulujeme, má pro své četné aplikace zcela mimořádné postavení mezi ostatními výsledky. Je v jistém smyslu zobecněním Cauchyovy věty. Je vlastně důsledkem rozšíření Cauchyovy věty na vícenásobně souvislou oblast.

Věta 5.21: Necht' je oblast Ω ohraničena Jordánovou křivkou Γ . Necht' je funkce $f(z)$ holomorfní na $\overline{\Omega}$ s výjimkou konečného počtu izolovaných singularit $z_1, \mathbf{L}, z_n \in \Omega$. Pak

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi j \sum_{i=1}^n \operatorname{res} f(z_i) . \quad (5.7)$$

Podle reziduové věty závisí hodnota integrálu jen na singularních bodech uvnitř křivky Γ . Tato hodnota se rovná $2\pi j$ násobku součtu reziduí od všech zmíněných singularit.

Ukázka 5.23: Určeme hodnotu integrálu $I = \int \frac{dz}{z^3+z^2}$ podél kružnice $|z - \frac{j}{2}| = \frac{2}{3}$. Integrand má dvě singularity a to pól druhého řádu v bodě $z_0 = 0$, který leží uvnitř zadané kružnice, a jednoduchý pól v bodě $z_0 = -1$, který leží vně této kružnice. Proto

$$I = 2\pi j \operatorname{res} f(0) = 2\pi j \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz}(z^2 f(z)) = 2\pi j \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \frac{1}{z+1} = -2\pi j \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(z+1)^2} = -2\pi j .$$

Ukázka 5.24: Spočtěme integrál z předchozí ukázky podél kružnice $|z - \frac{j}{2}| = 2$. V tomto případě jsou oba singularitní body uvnitř integrační cesty, takže

$$I = 2\pi j (\operatorname{res} f(0) + \operatorname{res} f(-1)) = 2\pi j (-1 + \lim_{z \rightarrow -1} ((z+1) f(z))) = 2\pi j (-1 + \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{z^2}) = 0 .$$

Definice 5.7: Necht' je funkce $f(z)$ holomorfní v okolí bodu $z = \infty$. Buď Γ kladně orientovaná uzavřená po částech hladká křivka obsahující uvnitř všechny konečné singularitní body funkce $f(z)$. Pak **reziduem funkce** $f(z)$ **v nekonečnu** rozumíme integrál

$$\operatorname{res} f(\infty) = -\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(z) dz .$$

Ukázka 5.25: Určeme reziduum funkce $f(z) = 1 + \frac{1}{z}$ v nekonečnu. Za křivku Γ zvolme kružnici $|z| = R > 0$. Podle definice platí

$$\operatorname{res} f(\infty) = -\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \left(1 + \frac{1}{z}\right) dz = -\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} dz - \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = -1 .$$

První integrál je nulový podle Cauchyovy věty, druhý se rovná $2\pi j$ podle ukázky 5.4. Povšimněme si, že platí $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right) = 1$. Bod $z_0 = \infty$ není singularitním bodem zadané funkce a přesto je reziduum v tomto bodě nenulové. Toto je odchylka od případu $|z_0| < \infty$, kdy je reziduum v nesingularitním bodě vždy nulové.

Věta 5.22: Necht' je funkce $f(z)$ holomorfní v celé komplexní rovině s výjimkou konečného počtu singularit z_1, \mathbf{L}, z_n . Pak $\sum_{i=1}^n \operatorname{res} f(z_i) + \operatorname{res} f(\infty) = 0$.

Ukázka 5.26: Užitečnost poslední věty si ilustrujeme na výpočtu integrálu

$$I = \int_{\Gamma} \frac{z^{17} dz}{(z^4 - 1)^2 (z^2 - 4)^5}$$

podél kružnice $\Gamma: |z|=3$. Integrand má šest pólů v bodech $z_1 = 1, z_2 = -1, z_3 = j, z_4 = -j, z_5 = 2, z_6 = -2$, přitom první čtyři póly jsou druhého řádu a poslední dva pátého řádu. Protože všechny póly leží uvnitř kružnice Γ , platí podle reziduové věty $I = 2\pi j \sum_{i=1}^6 \text{res } f(z_i)$. Výpočet těchto reziduí je poměrně pracný. Proto s výhodou využijeme poslední věty, takže $I = -2\pi j \text{res } f(\infty)$. Stačí tedy určit

$$-\text{res } f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^{18}}{(z^2 - 4)^5 (z^4 - 1)^2} = 1.$$

Zadaný integrál tedy nabývá hodnoty $I = 2\pi j$.

5.8 Aplikace teorie reziduí

Jednou z aplikací teorie reziduí je výpočet reálných integrálů, zvláště nevlastních, jejichž určení pomocí klasických metod je obtížné nebo nemožné. Teorii reziduí je možno s úspěchem využít i při sčítání nekonečných řad, při definování některých speciálních funkcí, při odvozování asymptotických vzorců apod. V této kapitole se zaměříme jen na určení integrálů dvou typů. Další možnosti výpočtu integrálů nalezneme čtenář např. v [9], [21], [29].

a^o **Výpočet integrálů typu** $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx$

V integrálu předpokládáme, že R je racionální funkce dvou proměnných. Pro určení tohoto integrálu zavedeme substituci $z = \exp(jx)$. Pak z definičních vztahů trigonometrických funkcí vyplývají po jednoduché úpravě relace

$$\sin x = \frac{z^2 - 1}{2jz}, \quad \cos x = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad dx = \frac{dz}{jz}.$$

Po provedení substituce se uvedený integrál změní na integrál

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx = \int_{\Gamma} R\left(\frac{z^2 - 1}{2jz}, \frac{z^2 + 1}{2z}\right) \frac{dz}{jz}$$

z racionální funkce komplexní proměnné podél jednotkové kružnice $\Gamma: |z|=1$.

Ukázka 5.27: Spočtěme integrál $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b \cos x}$, přičemž $a > b > 0$. Po zavedení substituce $z = \exp(jx)$ a jednoduché úpravě obdržíme $I = \frac{2}{j} \int_{\Gamma} \frac{dz}{bz^2 + 2az + b} = \frac{2}{jb} \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_2)}$, přičemž $z_1 = \frac{1}{b}(-a + \sqrt{a^2 - b^2})$, $z_2 = \frac{1}{b}(-a - \sqrt{a^2 - b^2})$. Integrand má tedy dva jednoduché póly. Pól z_2 leží vně jednotkové kružnice, protože $z_2 < -\frac{a}{b} < -1$, pól z_1 leží uvnitř kružnice, neboť $-1 < z_1 < 1$. Podle reziduové věty je $I = \frac{2}{jb} 2\pi j \text{res } f(z_1) = \frac{4\pi}{b} \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{4\pi}{b} \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$.

Ukázka 5.28: Spočtěme nyní $J = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cos x)^2}$, $a > b > 0$. Integrál můžeme spočítat dvěma způsoby. Jednak analogicky jako u předchozí ukázky pomocí substituce $z = \exp(jx)$ a

jednak na základě výsledku z předchozí ukázky. Integrál $I = I(a, b)$ můžeme totiž chápat jako funkci parametrů a a b . Protože integrand tohoto integrálu je vzhledem k proměnné a spojitý a diferencovatelný, můžeme integrál derivovat podle parametru a . Proto $J = -\frac{\partial I}{\partial a}$. Na základě předchozího výsledku pak $J = -\frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^q}$, $q = \frac{3}{2}$.

Ukázka 5.29: Nakonec určíme integrál $K = \int_0^{2\pi} \frac{\cos x \, dx}{(a + b \cos x)^2}$, $a > b > 0$. Abychom demonstrovali rozmanitost přístupů k řešení některých problémů, naznačíme si tři způsoby určení tohoto integrálu. První způsob spočívá v již předvedeném zavedení substituce $z = \exp(jx)$. Druhý způsob využívá derivování integrálu $I = I(a, b)$ podle parametru b , tedy $K = -\frac{\partial I}{\partial b}$. A konečně třetí způsob je založen na platnosti identity $aJ + bK = I$. Tedy $K = \frac{1}{b}(I - aJ)$ a proto $K = -\frac{2\pi b}{(a^2 - b^2)^q}$, $q = \frac{3}{2}$.

b° **Výpočet integrálů typu** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$.

Integrály tohoto typu se vyskytují např. v souvislosti s Fourierovu transformací. Předpokládáme, že funkce $f(z)$ je holomorfní v horní polorovině komplexní roviny s výjimkou konečného počtu pólů z_1, \dots, z_n a že součin $z f(z)$ konverguje k nule pro $z \rightarrow \infty$ stejnoměrně. Pak platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = 2\pi j \sum_{i=1}^n \operatorname{res} f(z_i).$$

Ukázka 5.30: Vyhodnoťme integrál $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} \, dx$, $a, b > 0$. Funkce $f(z) = \frac{\exp(jaz)}{z^2 + b^2}$ je v celé komplexní rovině holomorfní s výjimkou dvou prostých pólů $z_1 = jb$ a $z_2 = -jb$. Ověřme nejprve uvedený předpoklad o stejnoměrné konvergenci. Úpravami dostaneme

$$\lim_{R \rightarrow \infty} z f(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R \exp(j\varphi) \exp(ja R \exp(j\varphi))}{R^2 \exp(2j\varphi) + b^2}$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} \exp(ja R \cos \varphi - j\varphi) \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R \exp(-a R \sin \varphi)}{R^2 + b^2 \exp(-2j\varphi)}$$

V poslední relaci je první limita ohraničená, neboť modul exponenciály z ryze imaginárního čísla je roven jedné. Druhá limita konverguje při $R \rightarrow \infty$ k nule nezávisle na proměnné φ , neboť v horní komplexní polorovině je $\sin \varphi \geq 0$. Protože součin $z f(z)$ konverguje pro $z \rightarrow \infty$ k nule stejnoměrně, můžeme psát

$$I = 2\pi j \operatorname{res} f(jb) = 2\pi j \frac{\exp(ja jb)}{2jb} = \frac{\pi}{b} \exp(-ab),$$

neboť druhý pól v horní polorovině neleží. Pro tzv. Laplaceův integrál speciálně platí

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + b^2} \, dx = \frac{p}{2b} \exp(-b).$$

Ukázka 5.31: Nyní zkoumejme integrál $J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2} dx$, $a, b > 0$. I tento integrál můžeme počítat buď pomocí reziduí způsobem popsáním v předchozí ukázce nebo derivací integrálu I podle parametru b . V druhém případě máme $J = -\frac{1}{2b} \frac{\partial I}{\partial b} = \pi \frac{1+ab}{2b^3} \exp(-ab)$.

Ukázka 5.32: Nakonec ještě vypočtěme integrál $K = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+b^2} dx$. Opět můžeme postupovat dvojím způsobem, buď pomocí reziduí, kdy vezmeme do úvahy komplexní funkci $f(z) = -j z \frac{\exp(jaz)}{z^2+b^2}$, nebo pomocí derivace integrálu I podle parametru a . V tomto případě $K = -\frac{1}{2} \frac{\partial I}{\partial a} = \frac{\pi}{2} \exp(-ab)$.

5.9 Shrnutí

Cauchyova věta: $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$, $f(z)$ holomorfní, Γ uzavřená

$$\int_{\Gamma_0} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} f(z) dz \quad \text{pro vícenásobně souvislou oblast}$$

Deformace integrační cesty: $\int_{\Gamma_0} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz$

Primitivní funkce: $F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$, $F'(z) = f(z) \Rightarrow \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0)$

Cauchyův vzorec: $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta$, $n \geq 0$

Laurentova řada: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, $c_n = \frac{1}{2\pi j} \int_K \frac{f(\zeta) dz}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$

Klasifikace izolovaných singularit:

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) < \infty$ odstranitelná singularita

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ pól

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ neexistuje podstatná singularita

Reziduum: $\text{res } f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(z) dz$, $\text{res } f(\infty) = -\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(z) dz$

Reziduová věta: $\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi j \sum_{i=1}^n \text{res } f(z_i)$ $\sum_{i=1}^n \text{res } f(z_i) + \text{res } f(\infty) = 0$

Aplikace reziduí: $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

Způsoby výpočtu integrálu:

- přímo z definice
- jako dva reálné křivkové integrály
- jako integrál komplexní funkce reálné proměnné při parametrickém vyjádření křivky
- pomocí Cauchyovy věty
- pomocí deformace integrační cesty
- pomocí Cauchyova vzorce
- prostřednictvím primitivní funkce
- pomocí reziduí

5.10 Kontrolní otázky

- 1) Které způsoby výpočtu křivkového integrálu v komplexní proměnné znáte?
- 2) Formulujte přesně Cauchyovu větu?
- 3) Jak vypadá Cauchyova věta pro vícenásobně souvislou oblast?
- 4) Popište metodu deformace integrační cesty.
- 5) Jak závisí integrál holomorfní funkce na integrační cestě?
- 6) Jaký tvar má Cauchyův vzorec?
- 7) Definujte primitivní funkci komplexní proměnné.
- 8) Jaký tvar má Taylorova řada v komplexní proměnné?
- 9) Co je Laurentova řada a jaké má části?
- 10) Jaký význam má Laurentova řada?
- 11) Definujte izolovaný singulární bod.
- 12) Uveďte klasifikaci singulárních bodů.
- 13) Definujte reziduum v konečném i nekonečném bodě.
- 14) Popište způsoby určení rezidua.
- 15) Formulujte reziduovou větu
- 16) Uveďte některé aplikace reziduové věty.

5.11 Příklady ke kapitole 5

Příklad 5.1: Vypočtěte $\int_g z dz$, kde křivka g je dána rovnicí $z = 1 + tj$, $t \in \langle -1, 1 \rangle$.

Příklad 5.2: Vypočtěte $\int_g (z-1)^n dz$, kde $g: z = 1 + re^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

a) $n = 2$,

b) $n = -1$.

Příklad 5.3: Pomocí Cauchyho vzorce vypočtěte $\int_g \frac{dz}{z(z^2-1)}$, kde křivka g je kladně orientovaná kružnice $|z-1| = \frac{1}{2}$.

Příklad 5.4: Najděte Laurentovu řadu pro funkci $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$ v bodě $z_0 = 0$ pro mezikružší $M: 2 < |z| < 3$.

Příklad 5.5: Určete typ singulárního bodu funkce $f(z)$ v bodě $z_0 = 0$:

a) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ b) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, c) $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$.

Příklad 5.6: Určete singulární body funkce $f(z)$ a spočtěte v nich hodnoty $\text{res } f(z_i)$:

a) $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}$, b) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$.

Příklad 5.7: Vypočtěte $\int_0^{2\pi} (\cos^4 x + \sin^4 x) dx$.

Příklad 5.8: Vypočtěte $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$.

Výsledky viz kap. 9

6 Laplaceova transformace

Cíle kapitoly: Úvodem této kapitoly zařadíme krátkou poznámku o smyslu a možnostech transformací vůbec. Před vlastním výkladem zavedeme pojem předmětu a obrazu Laplaceovy transformace a pojem konvoluce dvou funkcí. Nato formulujeme přímou Laplaceovu transformaci jako nevlastní integrál ze součinu transformované funkce a vhodné exponenciály. Abychom mohli s Laplaceovou transformací efektivně pracovat, popíšeme stručně její gramatiku, tj. uvedeme dvanáct základních pravidel, jimiž se tato transformace řídí. Pro periodické funkce přidáme možnost zjednodušeného výpočtu obrazu. Poté formulujeme zpětnou Laplaceovu transformaci a způsoby jejího určení. Zde budou hrát důležitou úlohu dvě Heavisideovy věty o rozkladu. V návaznosti na Laplaceovu transformaci se zmíníme i o zobecněných funkcích neboli distribucích. Nejdůležitější z nich je Diracova funkce, které je potřebná k modelování krátkodobých jevů. Kapitulu doplníme řadou rozmanitých aplikací a krátkým slovníčkem Laplaceovy transformace.

6.1 O transformacích obecně

K řešení některých obyčejných i parciálních diferenciálních rovnic, zvláště rovnic s konstantními koeficienty, integrálních rovnic, integrálů apod. se s výhodou využívají transformační metody. Setkáme se s nimi např. při řešení elektrických obvodů, při vyšetřování lineárních systémů, při sledování vedení tepla, při studování kmitání struny či membrány, při výpočtu vlastních i nevlastních integrálů apod. Klasický přístup řešení spočívá v tom, že nejprve nalezneme obecné řešení dané rovnice a hodnoty integračních konstant určíme z vedlejších podmínek tak, jak jsme to prováděli v kapitole 2. Obecný postup transformačních metod je založen na tom, že nejprve zadanou rovnici pomocí zvolené transformace zobrazíme. Transformovaná rovnice, obsahující jako neznámou funkci obraz hledaného řešení, je zpravidla jednodušší. Tento obraz z transformované rovnice vypočítáme a pomocí zpětné transformace získáme hledané řešení původního problému. Tento postup má tři hlavní výhody. První výhodou lze spatřovat v tom, že odpadá určování integračních konstant. Druhá výhoda spočívá v tom, že základní zákonitosti lze v některých případech formulovat přímo v obrazovém tvaru, čímž se vyhneme přímé transformaci. Za třetí výhodou je lze považovat skutečnost, že již na základě obrazových rovnic je možné provádět některé závěry o řešené úloze, takže zpětná transformace, reprezentující nejtěžší krok, není vždy nutná.

Ukázka 6.1: *Obecný postup transformačních metod si můžeme přiblížit porovnáním s logaritmováním. Máme-li vypočítat součin dvou čísel, pak tento součin nejprve zlogaritmujeme (přímá transformace), provedeme součet logaritmů obou součinitelů (řešení transformované rovnice) a odlogaritmováním získáme hodnotu hledaného součinu (zpětná transformace).*

Integrální transformace mají většinou tvar nevlastního integrálu

$$F(p) = \int_a^{\infty} f(t) K(t, p) dt ,$$

kde předem známá funkce dvou proměnných $K(t, p)$, tzv. *jádro*, charakterizuje jednotlivé transformace. Uveďme si přehledně alespoň nejznámější z nich:

a	$K(t, p)$	transformace
0	$\exp(-pt)$	Laplaceova
0	$p \exp(-pt)$	Laplaceova-Carsonova
$-\infty$	$\exp(-pt)$	dvoustranná Laplaceova
$-\infty$	$\exp(-jpt)$	Fourierova
0	$\cos pt$	Fourierova kosinová
0	$\sin pt$	Fourierova sinová

Kromě uvedených transformací existuje ještě transformace Mellinova, Hilbertova, Besselova, Meierova, Eulerova, Lagrangeova, Stieltjesova, Weylova, Riemannova-Liouvilleova, Kontorovičova-Lebeděvova, Millerova-Fokova apod.

Povšimněme si Laplaceovy-Carsonovy transformace. Laplaceova-Carsonova transformace má určité výhody, jako je stejný fyzikální rozměr originálu i obrazu, zobrazení konstanty na konstantu, jednoduchost vztahů pro $t = 0$ a $t = \infty$ a formální shoda s Heavisideovým pojetím. Pro tyto své nesporné výhody se přímo nabízí zvláště k řešení elektrických obvodů. Avšak vzhledem ke všeobecné tendenci, která se prosazuje v mezinárodní technické literatuře, se přikloníme ke studiu Laplaceovy transformace. Laplaceova transformace je vhodnější pro obecnější úvahy, umožňuje snadnější přechod k Fourierově transformaci a hlavně je v různých technických oblastech (obvody, signály, regulace,...) již dostatečně zavedena.

6.2 Přímá Laplaceova transformace

Definice 6.1: Funkci

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt, \quad p \in \mathbf{C}, \quad t \in \mathbf{R} \quad (6.1)$$

nazýváme *Laplaceovou transformací (Laplaceovým obrazem)* funkce $f(t)$ a budeme ji značit buď $f(t) \leftrightarrow F(p)$ nebo $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Funkce $f(t)$ je reálnou funkcí reálné proměnné a funkce $F(p)$ je komplexní funkcí komplexní proměnné.

Uvedený integrál ovšem nemusí existovat. Pomocí Laplaceovy transformace nemůžeme zobrazit každou funkci. Třidu zobrazitelných funkcí musíme nějakým způsobem vymežit.

Definice 7.2: Funkci $f(t)$ nazveme *předmětem (originálem)* Laplaceovy transformace, jestliže splňuje následující tři podmínky:

- 1° $f(t), f'(t)$ jsou po částech spojitě,
- 2° $f(t) = 0$ pro $t < 0$,
- 3° $f(t)$ je funkcí ohraničeného růstu s indexem s .

K definici poznamenejme, že funkce $f(t)$ je funkcí *ohraničeného růstu s indexem s* , existují-li kladné konstanty M, s tak, že platí $|f(t)| \leq M \exp(st) \quad \forall t \in \mathbf{R}$. Funkce $f(t)$ tedy nemůže růst rychleji než vhodná exponenciální funkce. Zdůrazněme, že stačí zaručit existenci konstant M a s , není třeba je číselně vyhodnocovat.

Podmínka 2° říká, že se soustředíme na budoucnost děje, jeho minulost nás nezajímá. Abychom tuto podmínku mohli při výpočtech snadno akceptovat, zavádíme tzv. *Heavisideovu funkci* (*jednotkový skok*) pomocí relace

$$\eta(t) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t > 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0 \end{cases},$$

viz **Obr. 6.1** - první případ. I když to v dalším nebude explicitně uvedeno, budeme apriori předpokládat, že předmět Laplaceovy transformace podmínku 2° splňuje.

V některých aplikacích budeme též s výhodou využívat tzv. *identickou funkci*, definovanou vztahem (viz **Obr. 6.1** - druhý případ)

$$\psi(t) = t \eta(t) = \max(t, 0) = \frac{1}{2}(|t| + t).$$

Obě uvedené funkce jsou předměty Laplaceovy transformace.

Ukázka 6.2: *Proveřme, zda funkce $f(t) = t^n$, $n \in \mathbf{N}$ je předmětem Laplaceovy transformace. Připomeňme, že fakticky vyšetřujeme funkci $f(t) = t^n \eta(t) = (\max(t, 0))^n$, takže druhá podmínka je splněna. První podmínka je též splněna, neboť se jedná o mocninou funkci, která má všechny derivace. Abychom ověřili, že je splněna i třetí podmínka, uvažme, že platí*

$$\exp(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \mathbf{L} + \frac{1}{n!}t^n + \mathbf{L} \geq \frac{1}{n!}t^n, \quad \text{neboť } t > 0.$$

*Tedy $t^n \leq n! \exp(t)$, odkud vyplývá, že daná funkce je předmětem Laplaceovz transformace s koeficientem růstu $s = 1$ a multiplikační konstantou $M = n!$. Grafy dvou speciálních případů vyšetřované funkce pro $n = 1$ a $n = 2$ uvádí **Obr. 6.1** - druhý a třetí případ.*

Ukázka 6.3: *Prošetřeme, zda je funkce $f(t) = \exp(t^2)$ předmětem Laplaceovu transformace. Ve skutečnosti tedy $f(t) = \exp(t^2) \eta(t)$. První dvě podmínky jsou zřejmě splněny. Ukážeme, že třetí podmínka splněna není. Zvolme proto libovolně kladné konstanty M, s a počítáme postupně*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|f(t)|}{M \exp(st)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\exp(t^2)}{M \exp(st)} = \frac{1}{M} \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(t^2 - st) = \infty,$$

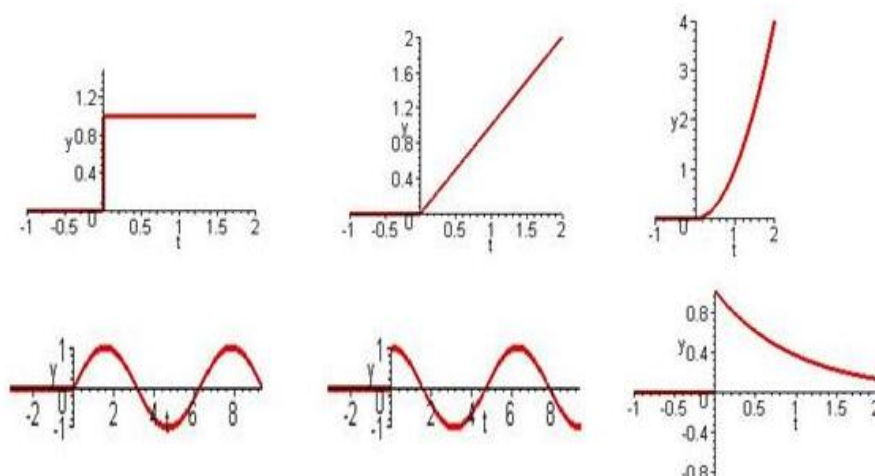
neboť pro dostatečně velká t bude pro jakýkoliv index růstu s platit $t > s$. Protože tato relace platí pro libovolné M, s , třetí podmínka splněna není, neboť limita počítaného poměru není konečná. Proto funkce $f(t) = \exp(t^2)$ není předmětem Laplaceovy transformace.

Ukázka 6.4: *Průběhy funkcí $1, t, t^2, \sin t, \cos t$ a $\exp(-t)$ chápané jako předměty Laplaceovy transformace prezentuje **Obr. 6.1**. První z funkcí je Heavisideova funkce čili jednotkový skok, druhá je identická funkce.*

Ukázka 6.5: *Nalezněme Laplaceův obraz funkce $f(t) = 1$, tj. vlastně $f(t) = \eta(t)$. Podle definice přímé Laplaceovy transformace máme*

$$F(p) = \int_0^{\infty} \eta(t) \exp(-pt) dt = \int_0^{\infty} \exp(-pt) dt = -\frac{1}{p} \exp(-pt) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p} (1 - \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-pt)) = \frac{1}{p}$$

v případě, že $\operatorname{Re} p > 0$. Vidíme, že se zadaná funkce nezobrazuje na konstantu, neboť ve smyslu Laplaceovy transformace platí $1 \leftrightarrow \frac{1}{p}$.



Obr. 6.1: Předměty Laplaceovy transformace

Věta 6.1: Označme s index růstu funkce $f(t)$. Pak Laplaceův integrál konverguje v polovině $\operatorname{Re} p > s$ absolutně a obraz $F(p)$ je zde holomorfní funkcí.

Věta vyjadřuje jen postačující podmínku. Funkce $F(p)$ může být definována i pro jiná p .

Definice 6.3: *Konvolucí* dvou reálných funkcí $f(t)$ a $g(t)$ rozumíme funkci

$$\varphi(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau .$$

Jsou-li funkce $f(t)$ a $g(t)$ předměty Laplaceovy transformace, můžeme konvoluci definovat i pomocí ekvivalentního nevlastního integrálu

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau .$$

Snadno se ověří, že konvoluce má následující vlastnosti:

- 1° je komutativní, tj. $f * g = g * f$,
- 2° je asociativní, tj. $f * (g * h) = (f * g) * h$,
- 3° je distributivní, tj. $f * (g + h) = f * g + f * h$,
- 4° jsou-li f a g po částech spojitě, je funkce φ spojitá.

Ukázka 6.6: Určete konvoluci $\varphi(t) = a^2 t * \exp(at)$, kde $a \in \mathbf{R}$. Na základě definice platí

$$\varphi(t) = a^2 \int_0^t (t - \tau) \exp(a\tau) d\tau = (a(t - \tau) + 1) \exp(a\tau) \Big|_0^t = \exp(at) - at - 1.$$

Při úpravách jsme integrovali metodou *per partes*.

Ukázka 6.7: Spočítejte konvoluci $\varphi(t) = \exp(at) * \exp(bt)$, přičemž $a \neq b \in \mathbf{R}$. Platí

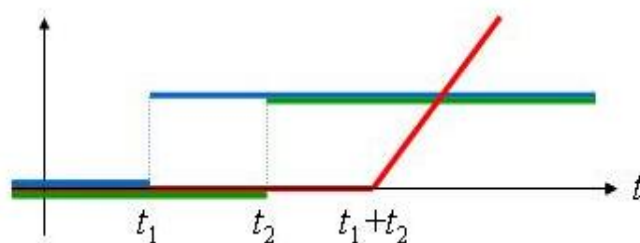
$$\varphi(t) = \int_0^t \exp(a\tau) \exp(b(t-\tau)) d\tau = \exp(bt) \int_0^t \exp((a-b)\tau) d\tau = \exp(bt) \frac{\exp((a-b)t) - 1}{a-b} \Big|_0^t$$

Po vyhodnocení dostaneme konečný výsledek $\varphi(t) = \frac{\exp(at) - \exp(bt)}{a-b}$. Tento výsledek může me limitním přechodem a užitím l'Hospitalova pravidla rozšířit i na případ $a=b$, kdy $\varphi(t) = t \exp(at)$.

Ukázka 6.8: Nalezněte konvoluci dvou různě posunutých jednotkových funkcí $\eta(t-t_1)$ a $\eta(t-t_2)$. Užitím definice a poté substitucí $\sigma = \tau - t_1$ a $s = t - t_1 - t_2 - \sigma$ postupně získáme

$$\eta(t-t_1) * \eta(t-t_2) = \int_0^t \eta(\tau-t_1) \eta(t-\tau-t_2) d\tau = \int_0^{t-t_1} \eta(t-t_1-t_2-\sigma) d\sigma = \int_0^{t-t_1-t_2} ds = \psi(t-t_1-t_2)$$

Konvolucí dvou zadaných jednotkových funkcí je tedy posunutá identická funkce, jejíž posuv je součtem posuvů obou jednotkových funkcí, viz **Obr. 6.2**. Speciálně pro $t_1=t_2=0$ platí $\eta(t) * \eta(t) = \psi(t)$.



Obr. 6.2: Konvoluce dvou jednotkových funkcí

Ukázka 6.9: Na základě výsledku předchozí ukázky můžeme určit i konvoluci $\Phi(t) = (\eta(t-t_1) - \eta(t-t_2)) * (\eta(t-t_3) - \eta(t-t_4))$ dvou různých obdélníkových impulzů. Platí

$$\Phi(t) = \eta(t-t_1) * \eta(t-t_3) - \eta(t-t_1) * \eta(t-t_4) - \eta(t-t_2) * \eta(t-t_3) + \eta(t-t_2) * \eta(t-t_4)$$

a proto podle předchozí ukázky je výsledkem souměrný lichoběžníkový impulz

$$\Phi(t) = \psi(t-t_1-t_3) - \psi(t-t_1-t_4) - \psi(t-t_2-t_3) + \psi(t-t_2-t_4).$$

Definice 6.4: Necht' $f(t) \leftrightarrow F(p)$ a $g(t) \leftrightarrow G(p)$ v polorovině $\text{Re } p > 0$. Necht' oba Laplaceovy integrály absolutně konvergují. **Konvolucí obrazů** nazýváme integrál

$$F(p) * G(p) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} F(\zeta) G(p-\zeta) d\zeta,$$

přičemž $\text{Re } p > \gamma + s$, $\gamma > s$. Poznamenejme, že uvedený integrál je nutno chápat ve smyslu

$$\int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma-jR}^{\gamma+jR}.$$

Integrační cestou křivkového integrálu je tedy rovnoběžka s imaginární osou, která leží napravo od imaginární osy ve vzdálenosti $\gamma > s$. Konvoluce obrazu je komutativní, tj. platí $F * G = G * F$.

Abychom mohli Laplaceovu transformaci při řešení praktických úloh efektivně využívat, uvedeme si některá obecná pravidla, jimiž se tato transformace řídí. Soubor pravidel nazýváme *gramatikou* Laplaceovy transformace. Existuje 12 zmíněných pravidel. V učebnicích je každé z pravidel obvykle formulováno ve tvaru samostatné věty. V tomto textu si všechna pravidla shrneme do věty jediné. Pro každé pravidlo uvedeme název příslušné věty, tvar předmětu i obrazu a eventuálně konkretizující poznámku.

Věta 6.2: *Nechť $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$, $a, b, p \in \mathbf{C}$, $f(t) \leftrightarrow F(p)$, $g(t) \leftrightarrow G(p)$. Pak*

věta o	předmět	obraz	poznámka
1° <i>linearitě</i>	$a f(t) + b g(t)$	$a F(p) + b G(p)$	$\operatorname{Re} p \geq \max(s_f, s_g)$
2° <i>podobnosti</i>	$f(rt)$	$\frac{1}{r} F\left(\frac{p}{r}\right)$	
3° <i>posunutí předmětu</i>	$f(t - r)$	$\exp(-rp) F(p)$	$f(t) = 0, \quad t \leq r$
4° <i>posunutí obrazu</i>	$\exp(at) f(t)$	$F(p - a)$	
5° <i>derivaci předmětu</i>	$f'(t)$	$p F(p) - f(0)$	
6° <i>derivaci obrazu</i>	$-t f(t)$	$F'(p)$	
7° <i>derivaci podle parametru</i>	$\frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda)$	$\frac{\partial}{\partial \lambda} F(p, \lambda)$	$\exists \frac{\partial}{\partial \lambda}$
8° <i>integraci předmětu</i>	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{p} F(p)$	
9° <i>integraci obrazu</i>	$\frac{1}{t} f(t)$	$\int_p^\infty F(\zeta) d\zeta$	$\exists \int_p^\infty$
10° <i>konvoluci předmětu</i>	$f(t) * g(t)$	$F(p) G(p)$	<i>násobení obrazů</i>
11° <i>konvoluci obrazu</i>	$f(t) g(t)$	$F(p) * G(p)$	<i>násobení předmětů</i>
12° <i>Duhamelův vzorec</i>	$f(t) g(0) + f(t) * g'(t)$	$p F(p) G(p)$	
5°	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-i-1} f^{(i)}(0)$	
8°	$\int_0^{t_1} \int_0^{t_{n-1}} \dots \int_0^{t_1} f(t_n) dt_n \dots dt_1$	$\frac{1}{p^n} F(p)$	

Pro užití v praxi byly po vzoru jazykových slovníků vypracovány i slovníky Laplaceovy transformace, které kromě gramatiky obsahují také řadu hesel, tj. dvojic vzájemně si korespondujících funkcí. Různě obsáhlé slovníky možno nalézt např. v [1], [4], [8], [22]. Kratší slovník je uveden i v [9] či v těchto textech.

Odvození některých pravidel je poměrně snadné. Např. u věty o podobnosti vystačíme se substitucí $\tau = rt$. Pak postupně platí

$$\int_0^\infty f(rt) \exp(-pt) dt = \frac{1}{r} \int_0^\infty f(\tau) \exp\left(-\frac{p}{r} \tau\right) d\tau = \frac{1}{r} F\left(\frac{p}{r}\right).$$

U věty o derivaci předmětu nám pomůže integrace per partes. Proto

$$\int_0^\infty f'(t) \exp(-pt) dt = f(t) \exp(-pt) \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty f(t) \exp(-pt) dt = p F(p) - f(0).$$

Odvození dalších vět již nebudeme ani naznačovat. Místo toho raději předvedeme několik případů jejich využití.

Ukázka 6.10: Nalezněme obraz funkce $f(t) = t^n$. Zřejmě platí $f(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$, $f^{(n)}(t) = n!$. Podle věty 5^o je $p^n F = \frac{n!}{p}$ a proto $F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$. Celkem tedy $t^n \leftrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}$.

Ukázka 6.11: Určeme obraz funkce $f(t) = \exp(at)$, $a \in \mathbf{C}$. Aplikací věty o posunutí obrazu a předchozí ukázky při $n=0$ máme ihned $\exp(at) \leftrightarrow \frac{1}{p-a}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$. Tento výsledek můžeme ovšem také získat přímo z definice, což vede na integraci exponenciální funkce.

Ukázka 6.12: Spočtěme obraz funkce $f(t) = \sin \omega t$. Z Eulerova definičního vztahu vyplývá $f(t) = \frac{1}{2j} \exp(j\omega t) - \frac{1}{2j} \exp(-j\omega t)$. Podle věty o linearitě a výsledku předchozí ukázky platí $F(p) = \frac{1}{2j} \frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{2j} \frac{1}{p+j\omega}$. To po převedení na společného jmenovatele dává $\sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$. Obdobným způsobem lze určit i obrazy funkcí $\cos \omega t$, $\sinh \omega t$, $\cosh \omega t$, $\sin(\omega t + \varphi)$ apod.

Ukázka 6.13: K určení obrazu funkce $f(t) = \exp(at) \sin \omega t$ stačí aplikovat větu o posunutí obrazu a výsledek předchozí ukázky. Bezprostředně pak obdržíme přiřazení $\exp(at) \sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}$.

Ukázka 6.14: Nalezení obrazu funkce $f(t) = \frac{1}{t} \sin \omega t$ provedeme pomocí věty o integraci obrazu a výsledku ukázky 6.12. Při zavedení substituce $\zeta = \omega \eta$ postupně platí

$$F(p) = \int_p^\infty \frac{\omega}{\zeta^2 + \omega^2} d\zeta' = \int_{p/\omega}^\infty \frac{d\eta}{\eta^2 + 1} = \arctan \eta \Big|_{p/\omega}^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{p}{\omega} = \operatorname{arccot} \frac{p}{\omega}.$$

Celkem tedy $\frac{1}{t} \sin \omega t \leftrightarrow \operatorname{arccot} \frac{p}{\omega}$.

Ukázka 6.15: Gramatika Laplaceovy transformace nám dovoluje již nyní k zadanému obrazu $F(p) = \frac{\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$ nalézt příslušný předmět, tj. provést zpětnou transformaci. Zřejmě platí $F(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \frac{p}{p^2 + \omega^2}$ a proto podle věty o konvoluci předmětu máme $f(t) = \sin \omega t * \cos \omega t$. Tuto konvoluci musíme ovšem ještě spočítat. Postupně obdržíme

$$f(t) = \int_0^t \sin \omega \tau \cos(\omega t - \omega \tau) d\tau = \cos \omega t \int_0^t \sin \omega \tau \cos \omega \tau d\tau + \sin \omega t \int_0^t \sin^2 \omega \tau d\tau = \frac{1}{2} \sin \omega t.$$

Dospěli jsme tedy k výsledku $\frac{\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2} \leftrightarrow \frac{1}{2} \sin \omega t$.

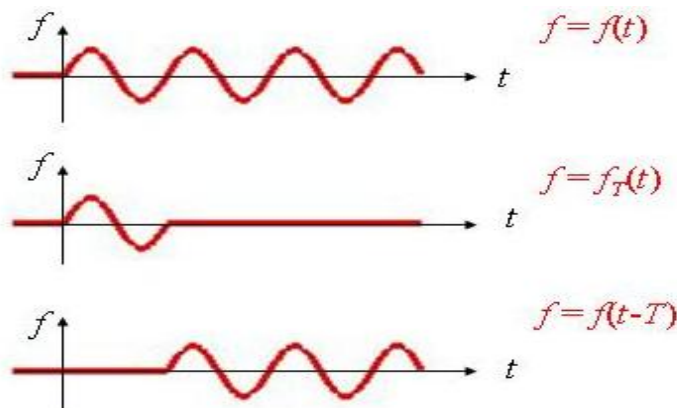
Abychom se vyhnuli výpočtu nevlastního integrálu, můžeme při určování obrazu periodické funkce $f(t+T) = f(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$ postupovat též následujícím způsobem: Definujme si pomocnou funkci

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pro } t \in \langle 0, T \rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 0, T \rangle \end{cases}.$$

Pak zadanou funkci můžeme vyjádřit ve tvaru součtu $f(t) = f_T(t) + f(t-T)$, viz **Obr. 6.3**. Přejdem k obrazové relaci dostaneme $F(p) = F_T(p) + F(p) \exp(-pT)$. Z uvedené obra-

zové relace již můžeme určit $F(p)$. Výhodu tohoto postupu lze spatřovat v tom, že integrál

$F_T(p) = \int_0^T f_T(t) \exp(-pt) dt \equiv \int_0^T f(t) \exp(-pt) dt$ integrujeme přes konečný interval jedné periody. Přesnější závěr formuluje věta.



Obr. 6.3: Zobrazení periodické funkce

Věta 6.3: Necht' je funkce $f(t)$ periodická s periodou T . Necht' existuje $F_T(p)$. Pak

$$F(p) = \frac{F_T(p)}{1 - \exp(-pT)}.$$

Ukázka 6.16: Pomocí poslední věty si nyní určíme obraz funkce $f(t) = \sin \omega t$, který jsme spočítali již v ukázce 6.12. V tomto případě platí $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Funkci

$$F_T(p) = \int_0^T \sin \omega t \exp(-pt) dt$$

vypočítáme pomocí dvojí integrace per partes a vyřešením vzniklé lineární rovnice. Po úpravách získáme $F_T(p) = \omega \frac{1 - \exp(-pT)}{p^2 + \omega^2}$, takže dospějeme k $\sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ jako v ukázce 6.12.

6.3 Zpětná Laplaceova transformace

Z předchozí kapitoly vyplývá, že k danému předmětu lze na základě integrálu z definice 5.1 jednoznačně nalézt příslušný obraz. Po eventuálním vyřešení transformovaného problému musíme provést poslední a zpravidla nejobtížnější fázi transformace, tj. přechod od obrazu k předmětu, tedy zpětnou transformaci. Přitom nevíme za jakých podmínek tato zpětná transformace existuje, zda je jednoznačná a hlavně jak se prakticky určí. Těmito otázkami se budeme postupně zabývat.

Má-li k funkci $F(p)$ existovat předmět, pak funkce $F(p)$ musí mít vlastnosti, které splňuje Laplaceův obraz předmětu, např. holomorfnost zmíněnou ve větě 6.1. Přesnější výčet těchto vlastností specifikuje následující věta:

Věta 6.4: Necht' je $F(p)$ obrazem nějakého předmětu. Pak

a° $\exists s \in \mathbf{R}$ tak, že $F(p)$ je holomorfní pro $\operatorname{Re} p > s$, (věta o regularitě obrazu)

b° $\operatorname{Re} p \geq s_0 > s$, $s_0 = \text{konst.} \Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$, (1. věta o limitě)

c° $k > 1 \Rightarrow \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ |p| < k \operatorname{Re} p}} p F(p)$ je konečná.

Podmínky uvedené v poslední větě jsou nutné, ne však postačující. Existují tedy funkce, které nejsou obrazem žádného předmětu. Příkladem mohou být známé funkce $\exp(p)$, $\sin p$, $\cos p$, $\sinh p$, $\cosh p$, $\ln p$ apod.

Předpokládejme nyní, že $f(t) \leftrightarrow F(p)$ a že též $f'(t)$ je předmět. Na základě věty o derivaci předmětu musí platit $f'(t) \leftrightarrow p F(p) - f(0)$. Užijeme-li 1. limitní větu, dostaneme $\lim_{p \rightarrow \infty} (p F(p) - f(0)) = 0$, což vede k důsledku 6.1. Podobně bychom dokázali i důsledek 6.2.

Důsledek 6.1: Necht' $f(t) \leftrightarrow F(p)$, $f'(t)$ je předmětem a $F(p)$ je holomorfní funkcí v bodě $p = \infty$. Pak $\lim_{p \rightarrow \infty} p F(p) = \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t)$. (2. věta o limitě)

Důsledek 6.2: Necht' $f(t) \leftrightarrow F(p)$, necht' $f'(t)$ je předmětem a necht' navíc existuje $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$. Pak $\lim_{p \rightarrow 0} p F(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$. (3. věta o limitě)

Ukázka 6.17: Platnost limitních vět prověříme na funkci $f(t) = \exp(at)$, $\operatorname{Re} a < 0$ studované již v ukázce 6.11. Platí $F(p) = \frac{1}{p-a}$. Pak pro jednotlivé limitní věty platí

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} F(p) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p-a} = 0, \\ \lim_{p \rightarrow \infty} p F(p) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p}{p-a} = 1 = \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t), \\ \lim_{p \rightarrow 0} p F(p) &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{p-a} = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t). \end{aligned}$$

Ukázka 6.18: Prověříme platnost limitních vět ještě na případě $\cos \omega t \leftrightarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2}$. Platí

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p}{p^2 + \omega^2} = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} = 1 = \cos 0$$

a tedy první dvě limitní věty jsou splněny. Třetí limitní větu nemůžeme aplikovat, neboť neexistuje $\lim_{t \rightarrow \infty} \cos \omega t$.

Přejdeme nyní k otázce jednoznačnosti zpětné transformace. Řekneme, že dvě funkce jsou skoro všude stejné, liší-li se nanejvýš v bodech množiny míry nula. Povšimněme si nyní, že vezmeme-li dva skoro všude stejné předměty, pak jejich rozdíl nemá vliv na hodnotu integrálu definujícího přímou transformaci. V důsledku toho mají oba předměty stejný obraz. Naskytá se otázka, zda i předměty, které se liší podstatněji, nemohou mít stejný Laplaceův obraz. Podle následující věty, kterou dokázal český matematik Matyáš Lerch, však tato alternativa nemůže nastat.

Věta 6.5: *Nechť funkce $f_1(t)$ a $f_2(t)$ mají stejný Laplaceův obraz. Pak je jejich rozdíl skoro všude nulový, tj. $\int_0^\infty |f_1(t) - f_2(t)| dt = 0$.*

Abychom se vyhnuli uvedené poměrně nepodstatné nejednoznačnosti, budeme brát v úvahu jen ty předměty, jejichž hodnota v bodech nespojitosti je dána aritmetickým průměrem limity zleva a limity zprava. Budeme tedy klást $f(t) = \frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0))$. Touto úmluvou můžeme problém jednoznačnosti zpětné transformace považovat pro praktické aplikace za vyřešen.

Nyní již můžeme přistoupit k vlastní technice určování zpětné Laplaceovy transformace. Některé ze způsobů, jak k zadanému obrazu přiřadit příslušný předmět, již známe. V případě mnoha jednodušších a v praxi se vyskytujících obrazů můžeme s výhodou využít vhodný slovník Laplaceovy transformace, eventuálně aplikovat některé z pravidel gramatiky. Pro případ, že tento postup selže, uvedeme si nejprve tzv. *Bromwichův integrál*, který reprezentuje obecný tvar zpětné transformace a poté formulujeme několik praktických vět využívajících převážně metodiku výpočtu reziduí.

Věta 6.6: *Nechť je funkce $F(p)$ obrazem nějakého předmětu $f(t)$. Pak v bodě spojitosti funkce $f(t)$ platí*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{g-j\infty}^{g+j\infty} F(p) \exp(pt) dp, \quad (6.2)$$

přičemž uvedený integrál je nutno chápat ve smyslu definice 6.4.

V bodech nespojitosti prvního druhu můžeme levou stranu rovnice (6.2) nahradit aritmetickým průměrem $\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0))$. V četných praktických aplikacích nalézáme obraz ve tvaru nekonečné řady. K určení příslušného předmětu pak slouží tzv. *1. Heavisideova věta o rozkladu*, založená v podstatě na výsledku ukázky 6.10, tj. na relaci $t^n \leftrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}$.

Věta 6.7: *Nechť je obraz $F(p)$ zadán ve tvaru níže uvedené nekonečné řady konvergující pro $|p| > R \geq 0$. Pak*

$$F(p) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{p^i} \quad \leftrightarrow \quad f(t) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{(i-1)!} t^{i-1}.$$

Ukázka 6.19: *Platnost 1. Heavisideovy věty ověříme na případě funkce $F(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$. Pomocí vzorce pro součet geometrické řady s kvocientem $q = -(\frac{w}{p})^2$ dostaneme postupně*

$$F(p) = \frac{w}{p^2(1 + (\frac{w}{p})^2)} = \frac{w}{p^2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{w^2}{p^2}\right)^i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{w^{2i+1}}{p^{2i+2}}.$$

V tomto případě platí $c_i = (-1)^i \omega^{2i+1}$, což implikuje $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \omega^{2i+1} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} = \sin \omega t$.

Věta 6.8: *Nechť je funkce $F(p)$ holomorfní všude vyjma izolovaných singularit p_1, \dots, p_n ležících v polorovině $\operatorname{Re} p < \gamma$. Nechť funkce $F(p)$ konverguje stejnoměrně k nule na libovolné posloupnosti kružnic $|p| = R_n$, $R_n \rightarrow \infty$. Pak*

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} F(\zeta) \exp(\zeta t) d\zeta = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \operatorname{res}(F(p) \exp(pt)) & \text{pro } t > 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0 \end{cases}.$$

Za předpokladů věty platí pro $F(p) \leftrightarrow f(t)$ relace $f(t) = \sum_{i=1}^n \operatorname{res}(F(p) \exp(pt))$.

Věta 6.9: *Nechť je $F(p) = \frac{M(p)}{N(p)}$ racionální ryze lomená funkce, která má póly p_1, \dots, p_n s násobnostmi k_1, \dots, k_n . Pak*

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(k_i-1)!} \lim_{p \rightarrow p_i} \frac{d^{k_i-1}}{dp^{k_i-1}} \left((p-p_i)^{k_i} \frac{M(p) \exp(pt)}{N(p)} \right).$$

Poslední věta je důsledkem věty předposlední. Speciálním případem této poslední věty pro jednoduché póly je **2. Heavisideova věta o rozkladu**, která zní:

Věta 6.10: *Nechť je $F(p) = \frac{M(p)}{N(p)}$ racionální ryze lomená funkce s jednoduchými póly p_1, \dots, p_n . Pak $f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{M(p_i) \exp(p_i t)}{N'(p_i)}$.*

Ukázka 6.20: *Funkci $F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p-2)}$ přiřadíme předmět. V tomto případě máme $M(p) = 1$, $N(p) = p(p-1)(p-2)$, $N'(p) = 3p^2 - 6p + 2$. Aplikací 2. Heavisideovy věty dostaneme*

$$f(t) = \frac{\exp(0)}{N'(0)} + \frac{\exp(t)}{N'(1)} + \frac{\exp(2t)}{N'(2)} = \frac{1}{2} - \exp(t) + \frac{1}{2} \exp(2t) = \frac{1}{2} (1 - \exp(t))^2.$$

6.4 Zobecněné funkce

V různých oblastech fyziky a techniky, zvláště v elektrotechnice, se často setkáváme s časově proměnnými veličinami (síly, proudy apod.), které trvají jen velice krátkou dobu. Tyto veličiny přitom ale dosahují velikých hodnot a příslušný integrál (impulz síly, množství náboje) je nenulový. Abychom si situaci konkretizovali, představme si hustotu jednotkového náboje soustředěného do jednoho bodu. Při popisu takových veličin se neobejdeme bez tzv. **Diracovy funkce** $\delta(t)$, které přisuzujeme následující tři vlastnosti:

$$\delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0, \quad \delta(0) = \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Již na první pohled však je zřejmé, že uvedené vlastnosti chápané ve smyslu klasické analýzy se navzájem vylučují. Integrál z funkce, která je nenulová v jediném bodě, musí být nutně nulový, takže funkce s těmito vlastnostmi vůbec neexistuje.

Aby bylo možné výše uvedené jevy vhodně popsat, byl vybudován speciální matematický aparát, tzv. teorie zobecněných funkcí neboli distribucí. Zobecněnou funkci nemůžeme chápat v běžném smyslu jako zobrazení, které každému číslu z definičního oboru přiřazuje nějakou funkční hodnotu, neboť pojem hodnoty zobecněné funkce v bodě nemá smysl. Spíše ji můžeme charakterizovat jejím působením na jiné funkce a toto působení již pomocí tzv. funkcionálu již číselně vyjádřit lze. Zobecněné funkce představují užitečný matematický nástroj, který

umožňuje popisovat i nespojité jevy a přiřazovat zobecněnou derivaci (derivaci ve smyslu distribucí) i funkcím, které v klasickém smyslu derivaci nemají.

Dříve než si vyložíme základy teorie zobecněných funkcí, připomeňme si dva pojmy, které budeme v dalším potřebovat. **Nosičem** $\text{supp } f(t)$ funkce $f(t)$ míníme uzávěr množiny všech bodů, v nichž je funkce nenulová, tedy

$$\text{supp } f(t) = \overline{\{t \in \mathbf{R} : f(t) \neq 0\}}.$$

Druhým pojmem je již zmíněný funkcionál. **Funkcionál** je zobrazení nějaké (ne nutně číselné) množiny do množiny čísel. Definičním oborem funkcionálu je tedy obecná množina, zatímco jeho oborem hodnot zůstává množina číselná. Funkcionál je zobecněním pojmu funkce, neboť funkce je speciálním případem funkcionálu, kdy i definiční oblast je číselnou množinou.

Ukázka 6.21: *Pojem funkcionálu si přehledným způsobem ilustrujeme na několika ukázkách z různých oblastí života. Uvedeme jen typ obecného prvku z definiční oblasti a přiřazenou číselnou hodnotu.*

těleso \rightarrow objem	obrazec \rightarrow plošný obsah	křivka \rightarrow délka křivky
matice \rightarrow determinant	matice \rightarrow norma	těleso \rightarrow hmotnost
vlna \rightarrow frekvence	fyzikální pole \rightarrow energie	zboží \rightarrow cena .
město \rightarrow počet obyvatel	zaměstnanec \rightarrow příjem	atd.

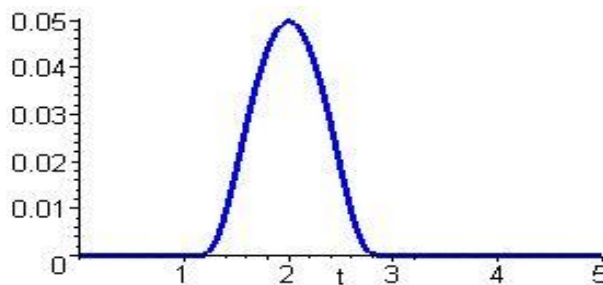
Definice 6.5: **Přípustnou (testovací) funkcí** nazveme funkci, jejíž nosič má konečnou délku a která má v \mathbf{R} všechny derivace. Množinu všech přípustných funkcí označíme symbolem K .

Množina K zřejmě vytváří lineární prostor. A navíc, je-li $a(t) \in K$ přípustná funkce, pak $a(-\infty) = a(\infty) = 0$. Tohoto důsledku budeme s výhodou využívat.

Ukázka 6.22: *Jako příklad testovací funkce, která je definovaná na konečném intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ a má všechny derivace nám poslouží funkce*

$$a(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{|ab|}{(t-a)(b-t)}\right) & t \in \langle \alpha, \beta \rangle \\ 0 & t \notin \langle \alpha, \beta \rangle \end{cases}$$

V bodech $t = \alpha$ a $t = \beta$ jsou všechny derivace této funkce nulové. Na připojeném **Obr. 6.4** je nakreslen průběh uvedené funkce pro $\alpha = 1$ a $\beta = 3$.



Obr. 6.4: Průběh testovací funkce

Definice 6.6: Řekneme, že posloupnost funkcí $\{a_m(t)\}_{m=1}^{\infty} \subset K$ *konverguje* v prostoru K k funkci $a(t) \in K$, jestliže existuje ohraničený interval J tak, že pro všechna m platí $\text{supp } a_m(t) \subset J$ a posloupnost derivací $\{a_m^{(n)}(t)\}_{m=1}^{\infty} \subset K$ libovolného řádu n konverguje k funkci $a^{(n)}(t)$ stejnoměrně.

Definice 6.7: *Zobecněnou funkcí (distribucí)* nazveme libovolný lineární spojitý funkcionál f definovaný na prostoru přípustných funkcí, tj. $f : K \rightarrow \mathbf{C}$. Hodnotu funkcionálu pro přípustnou funkci $a(t)$ označíme (f, a) .

Abychom si pojem zobecněné funkce více přiblížili, uvědomme si, že definice 6.7 obsahuje splnění třech podmínek:

- 1° každé přípustné funkci $a(t)$ je podle pravidla, které jsme označili symbolem f , přiřazeno nějaké číslo (f, a) , *(funkcionál)*
- 2° pro libovolné konstanty $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$ a libovolné přípustné funkce $a_1(t)$ a $a_2(t)$ platí $(f, c_1 a_1 + c_2 a_2) = c_1 (f, a_1) + c_2 (f, a_2)$, *(linearita vzhledem k přípustné funkci)*
- 3° $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(t) = a(t) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (f, a_n) = (f, a)$. *(spojitost)*

Definice 6.8: Necht' f, f_1, f_2 jsou zobecněné funkce, $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$ konstanty a $u(t)$ nekonečně diferencovatelná funkce. Pak definujeme:

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2, a) = c_1 (f_1, a) + c_2 (f_2, a), \quad \text{(linearita distribucí)}$$

$$(u f, a) = (f, u a) . \quad \text{(součin s funkcí)}$$

Definice 6.9: Zobecněnou funkci, kterou lze vyjádřit ve formě $(f, a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) a(t) dt$, nazýváme *regulární*. Zobecněná funkce, která není regulární, je *singulární*.

Ukázka 6.23: *Definujme si funkcionál pomocí relace*

$$(f, a) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) , \quad a(t) \in K .$$

I když jsme vzhledem k jednotnému popisu použili zápis pomocí nekonečné řady obsahuje suma jen konečný počet sčítanců, neboť se jedná o součet funkčních hodnot přípustných funkcí, jejichž nosič má konečnou délku. Proto můžeme níže naznačené operace bez potíží provést. Ukážeme nejprve, že funkcionál je lineární. Platí totiž

$$(f, c_1 a_1 + c_2 a_2) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_1 a_1(n) + c_2 a_2(n)) = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} a_1(n) + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} a_2(n) = c_1 (f, a_1) + c_2 (f, a_2) .$$

Pro ověření spojitosti funkcionálu předpokládejme, že $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m(t) = a(t)$. Pak

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (f, a_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_m(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} a_m(n) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) = (f, a) .$$

Studovaný funkcionál je tedy lineární i spojitý a proto představuje zobecněnou funkci.

Ukázka 6.24: *Definujme nyní funkcionál vztahem $(f, a) = |a(t)|$. Prověřme nejprve jeho linearitu. S ohledem na vlastnosti absolutní hodnoty platí obecně*

$$(f, c_1 a_1 + c_2 a_2) = |c_1 a_1(t) + c_2 a_2(t)| \neq |c_1 a_1(t)| + |c_2 a_2(t)| = c_1 (f, a_1) + c_2 (f, a_2)$$

a proto uvedený funkcionál nemůže představovat zobecněnou funkci.

Ukázka 6.25: Necht' je funkce $f(t)$ předmětem Laplaceovy transformace. Tato funkce generuje regulární zobecněnou funkci

$$(f, a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) a(t) dt = \int_{\text{supp } a(t)} f(t) a(t) dt.$$

Ukázka 6.26: Jako ukázka singulární zobecněné funkce nám poslouží níže popsaná Diracova funkce.

Diracova zobecněná funkce (Diracův impuls) je pro libovolnou přípustnou funkci $a(t)$ definována funkcionálem $(\delta(t), a(t)) = a(0)$. Tento funkcionál je lineární i spojitý, neboť

$$(\delta(t), c_1 a_1(t) + c_2 a_2(t)) = c_1 a_1(0) + c_2 a_2(0) = c_1 (\delta(t), a_1(t)) + c_2 (\delta(t), a_2(t)),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\delta(t), a_n(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(0) = a(0) = (\delta(t), a(t)).$$

Funkcionál definovaný uvedenou relací tedy představuje zobecněnou funkci. Protože neexistuje lokálně integrovatelná funkce $a(t)$ tak, aby platilo

$$(\delta(t), a(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) a(t) dt = a(0),$$

jedná se o zobecněnou funkci singulární.

Je-li $u(t)$ funkce podle definice 6.8, pak $(u(t)\delta(t), a(t)) = (\delta(t), u(t)a(t)) = u(0)a(0)$. Pokud je působení Diracovy funkce soustředěno do bodu $t = t_0$, pak $(\delta(t - t_0), a(t)) = a(t_0)$.

Pro využití v praxi se Diracova zobecněná funkce aproximuje zpravidla vhodnou posloupností lokálně integrovatelných funkcí, která k Diracově funkci konverguje. Přitom se tato posloupnost zpravidla konstruuje tak, že pro její každý člen $f_n(t)$ platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) dt = 1.$$

Vzhledem k nejrůznějším potřebám praxe, existuje více způsobů, jak Diracovu funkci modelovat. Uvedme si alespoň některé z nich:

$$f_n(t) = \frac{n}{2} (\eta(t - \frac{1}{n}) - \eta(t - \frac{1}{n})) \quad \text{posloupnost obdélníkových impulsů}$$

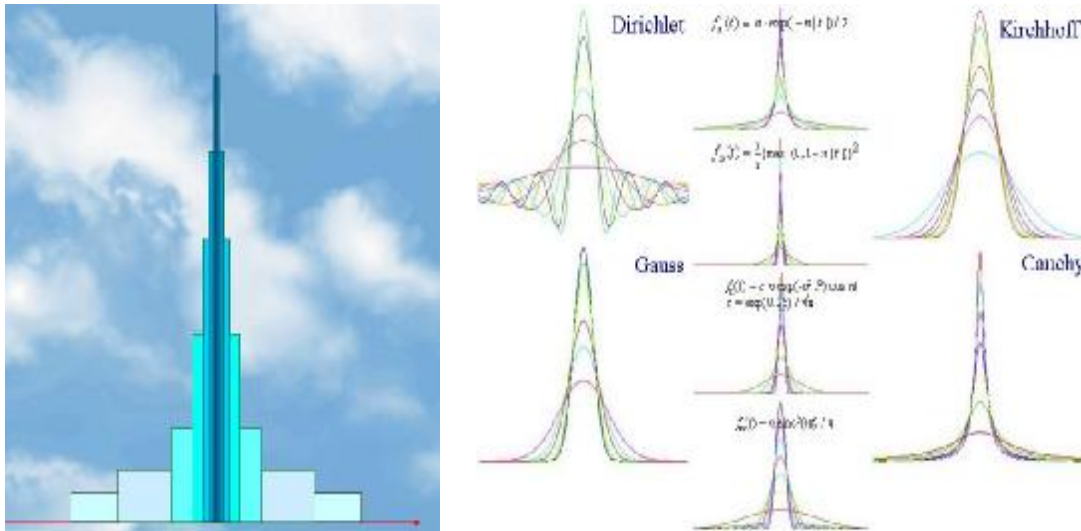
$$f_n(t) = \frac{\sin nt}{\pi t} \quad \text{Dirichletova posloupnost}$$

$$f_n(t) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2} nt^2) \quad \text{Kirchhoffova posloupnost}$$

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \varepsilon_n} \exp(-\frac{t^2}{\varepsilon_n}), \quad \varepsilon_n > 0, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0 \quad \text{Gaussova posloupnost}$$

$$f_n(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon_n}{t^2 + \varepsilon_n^2}, \quad \varepsilon_n > 0, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0 \quad \text{Cauchyova posloupnost}$$

Tyto a ještě některé další modely Diracovy zobecněné funkce prezentuje **Obr. 6.5**.



Obr. 6.5: Aproximace Diracovy zobecněné funkce

Důležitým nástrojem matematické analýzy je pojem derivace. Zatímco u klasických funkcí nemusí derivace vždy existovat, zobecněné funkce mají derivaci libovolného řádu. Abychom mohli pojem derivace zobecnit, předpokládejme nejprve, že $f(t)$ je lokálně integrovatelná funkce. Pak pro $\forall a(t) \in K$, tj. pro libovolnou přípustnou funkci, postupně platí

$$(f'(t), a(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) a(t) dt = f(t) a(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) a'(t) dt = -(f(t), a'(t)).$$

Při úpravách jsme integrovali per partes a využili vymizení přípustných funkcí v bodech $t = \pm\infty$. Platnost získané relace definitoricky rozšíříme i na zobecněné funkce.

Definice 6.10: *Derivaci zobecněné funkce* definujeme vztahem

$$(f'(t), a(t)) = -(f(t), a'(t)),$$

který musí platit pro všechny přípustné funkce $a(t) \in K$. Pro derivace vyšších řádů uijeme

$$(f^{(n)}(t), a(t)) = (-1)^n (f(t), a^{(n)}(t)).$$

Z definice vyplývá, že tíhu derivování jsme přenesli na přípustné funkce, které mají derivace libovolného řádu.

Ukázka 6.27: Spočtěme derivaci Heavisideovy funkce $f(t) = \eta(t)$. Podle definice je

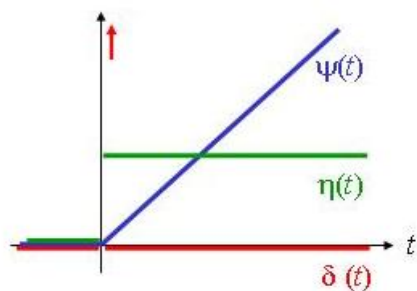
$$(\eta'(t), a(t)) = -(\eta(t), a'(t)) = - \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t) a'(t) dt = - \int_0^{\infty} a'(t) dt = -a(t) \Big|_0^{\infty} = a(0) = (\delta(t), a(t)).$$

Při výpočtu jsme využili jednak faktu, že Heavisideova funkce je regulární zobecněnou funkcí a jednak definice Diracovy funkce. Protože získaná relace platí pro libovolnou testovací funkci, můžeme psát $\eta'(t) = \delta(t)$. Situaci znázorňuje **Obr. 6.6**.

Ukázka 6.28: Podobným způsobem určíme derivaci identické funkce $f(t) = \psi(t)$. Platí

$$(\psi'(t), a(t)) = -(\psi(t), a'(t)) = - \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) a'(t) dt = - \int_0^{\infty} t a'(t) dt = -t a(t) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} a(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t) a(t) dt$$

Celkem tedy $(\psi'(t), a(t)) = (\eta(t), a(t))$, $\forall a(t) \in K$ a proto $\psi'(t) = \eta(t)$, viz **Obr. 6.6**.



Mezi identickou, Heavisideovou a Diracovou funkcí platí relace

$$y''(t) = h'(t) = d(t)$$

Obr. 6.6: Základní zobecněné funkce

Definice 6.11: Předpokládejme, že $f(t)$ a $f(t)\exp(-pt)$ jsou zobecněné funkce a nechť $\text{supp } f(t) \subset (-\infty, \infty)$. **Laplaceovou transformací zobecněné funkce** nazýváme výraz

$$(f(t), \exp(-pt)) .$$

Pro Laplaceovu transformaci zobecněné funkce neplatí gramatika v plném rozsahu, tak jak ji uvádí **Věta 6.2**. Některá pravidla, jako věty o linearitě, podobnosti, posunutí a konvoluce, samozřejmě platí. Jiná pravidla se liší, jako věta o derivaci předmětu, jejíž znění pro zobecněné funkce je jednodušší, neboť $f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^n F(p)$. Některá tvrzení však pro zobecněné funkce neplatí, např. první věta o limitě, takže obraz $F(p)$ může v nekonečnu nabývat nenulové hodnoty.

Ukázka 6.29: Určeme Laplaceův obraz Heavisideovy funkce $f(t) = \eta(t)$. Je

$$(\eta(t), \exp(-pt)) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t) \exp(-pt) dt = \int_0^{\infty} \exp(-pt) dt = \frac{1}{p} \Rightarrow \eta(t) \leftrightarrow \frac{1}{p} .$$

Ukázka 6.30: Nalezněme obraz Diracovy funkce $f(t) = \delta(t)$. V tomto případě platí

$$(\delta(t), \exp(-pt)) = (\eta'(t), \exp(-pt)) = p (\eta(t), \exp(-pt)) = p \frac{1}{p} = 1 \Rightarrow \delta(t) \leftrightarrow 1 .$$

Podobně můžeme odvodit $\delta^{(n)}(t) \leftrightarrow p^n$. Spojením tohoto výsledku s výsledkem ukázky 6.10 obdržíme přehlednou tabulku

obraz	$\frac{1}{p^4}$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{1}{p}$	1	p	p ²
...	b	b	b	b	b	b	b ...
předmět	$\frac{1}{6}t^3$	$\frac{1}{2}t^2$	t	1	$\delta(t)$	$\delta'(t)$	$\delta''(t)$

Ukázka 6.31: Stanovme nyní ještě obraz konvoluce $f(t) * \delta(t)$. Podle věty o konvoluci předmětů platí $L\{f(t) * \delta(t)\} = L\{f(t)\}L\{\delta(t)\} = L\{f(t)\}$ a proto $f(t) * \delta(t) = f(t)$. Diracova funkce spolu s operací konvoluce tedy hraje podobnou roli jako jednička s operací násobení nebo nula s operací sčítání, tj. danou veličinu nemění.

Ukázka 6.32: Určeme předmět funkce $F(p) = \frac{p^4}{p^2 + \omega^2}$. Tuto racionální neryze lomenou funkci můžeme rozložit na součet funkce celistvé a racionální ryze lomené funkce

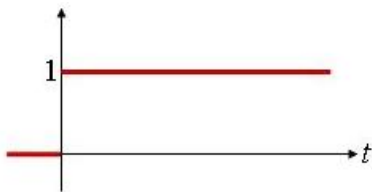
$$F(p) = p^2 - \omega^2 + \frac{\omega^4}{p^2 + \omega^2}.$$

Z výsledků ukázek 6.30 a 6.12 pak vyplývá bezprostředně $f(t) = \delta''(t) - \omega^2 \delta(t) + \omega^3 \sin \omega t$.

6.5 Některé aplikace

6.5.1 Impulzy

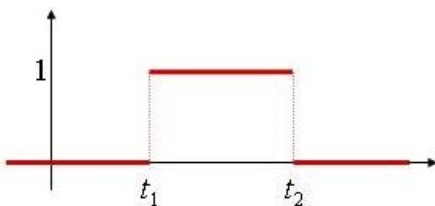
První aplikací Laplaceovy transformace, jíž si podrobněji povšimneme, je zobrazování impulzů. Nejprve, a to ve formě přehledné tabulky, představíme základní impulzy, které se v technické praxi často vyskytují. U každého impulzu uvedeme tvar jeho předmětu i obrazu. K modelování impulzů využijeme s výhodou Heavisideovy a identické funkce. Abychom se vyhnuli nekonečným řadám, uvedeme u příslušných impulzů ještě další vyjádření. Přitom symbolem $[\cdot]$ budeme rozumět celou část čísla. Po ukončení tabulky naznačíme, jak lze uvedené obrazy získat.



Heavisideova funkce

$$f(t) = \eta(t)$$

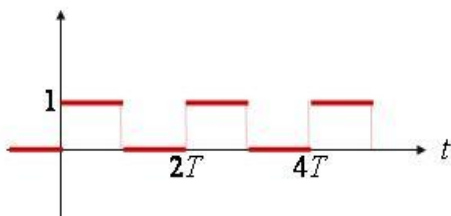
$$F(p) = \frac{1}{p}$$



obdélníkový impulz

$$f(t) = \eta(t - t_1) - \eta(t - t_2)$$

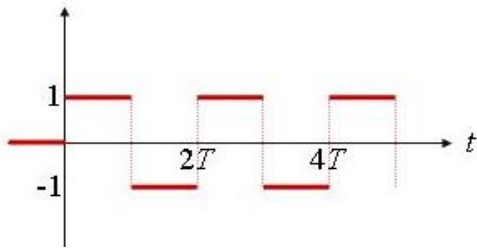
$$F(p) = \frac{1}{p} (\exp(-t_1 p) - \exp(-t_2 p))$$



jednostranný periodický obdélníkový impulz

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i h(t - iT) = h(\sin \frac{pT}{T} t)$$

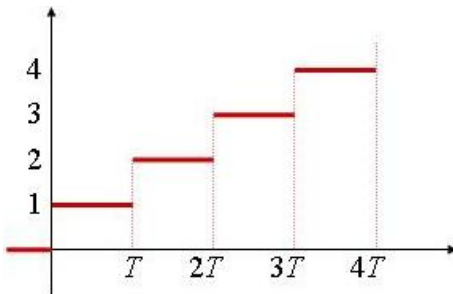
$$F(p) = \frac{1}{p} \frac{1}{1 + \exp(-pT)}$$



dvoustranný periodický obdélníkový impulz

$$f(t) = \eta(t) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \eta(t - iT) = \text{sgn}(\sin \frac{pT}{T})$$

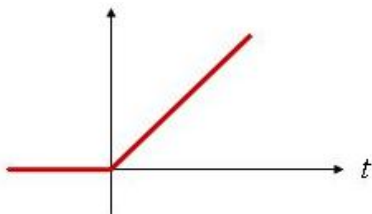
$$F(p) = \frac{1}{p} \tanh(\frac{pT}{2})$$



stupňovitý impulz

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta(t - iT) = [\frac{t}{T}]$$

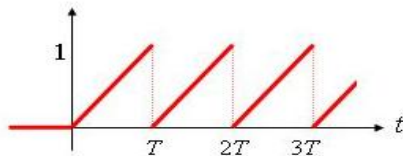
$$F(p) = \frac{1}{2p} (1 + \coth(\frac{pT}{2}))$$



identická funkce

$$f(t) = \psi(t) \equiv t \eta(t)$$

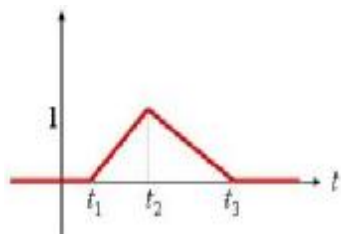
$$F(p) = \frac{1}{p^2}$$



pilovitý impulz

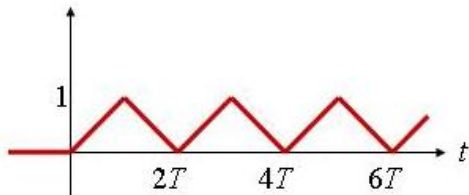
$$f(t) = \frac{1}{T} \psi(t) - \sum_{i=1}^{\infty} \eta(t - iT) = \frac{t}{T} - [\frac{t}{T}]$$

$$F(p) = \frac{1 - \exp(-pT) - pT \exp(-pT)}{p^2 T (1 - \exp(-pT))}$$

**trojúhelníkový impulz**

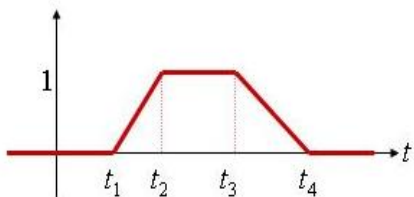
$$f(t) = \frac{(t_3 - t_2)\psi(t - t_1) + (t_1 - t_3)\psi(t - t_2) + (t_2 - t_1)\psi(t - t_3)}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}$$

$$F(p) = \frac{(t_3 - t_2)\exp(-t_1 p) + (t_1 - t_3)\exp(-t_2 p) + (t_2 - t_1)\exp(-t_3 p)}{p^2 (t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}$$

**periodický trojúhelníkový impulz**

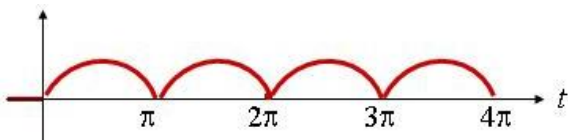
$$f(t) = \frac{1}{T} (\psi(t) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \psi(t - iT))$$

$$F(p) = \frac{1}{T p^2} \tanh \frac{pT}{2}$$

**lichoběžníkový impulz**

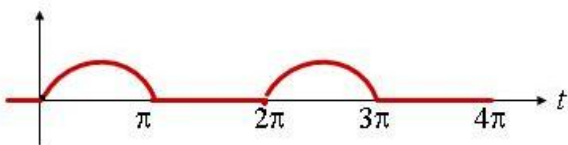
$$f(t) = \frac{\psi(t - t_1) - \psi(t - t_2)}{t_2 - t_1} - \frac{\psi(t - t_3) - \psi(t - t_4)}{t_4 - t_3}$$

$$F(p) = \frac{1}{p^2} \left(\frac{\exp(-t_1 p) - \exp(-t_2 p)}{t_2 - t_1} - \frac{\exp(-t_3 p) - \exp(-t_4 p)}{t_4 - t_3} \right)$$

**dvoucestné usměrnění**

$$f(t) = |\sin \omega t|$$

$$F(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \coth \frac{p}{2\omega}$$

**jednocestné usměrnění**

$$f(t) = \frac{1}{2} (|\sin \omega t| + \sin \omega t) = \max(0, \sin \omega t)$$

$$F(p) = \frac{\omega}{(p^2 + \omega^2) (1 - \exp(-\frac{p}{\omega}))}$$

Pro odvozování obrazů jednotlivých impulzů si zavedeme označení $r = \frac{1}{2} pT$.

Obraz Heavisideovy funkce byl odvozen již v ukázce 6.5.

Obraz obdélníkového impulzu získáme jako rozdíl různě posunutých Heavisideových funkcí.

Obraz jednostranného periodického obdélníkového impulzu získáme buď pomocí geometrické řady nebo jako obraz periodické funkce. V prvním případě podle první Heavisideovy věty o rozkladu máme

$$F(p) = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \exp(-2ir),$$

což je geometrická řada s kvocientem $q = -\exp(-2r)$. Protože $-2r < -T \operatorname{Re} p < -sT < 0$, je $|q| < 1$ a geometrickou řadu můžeme sečíst. Získáme tak

$$F(p) = \frac{1}{p(1 + \exp(-2r))}.$$

Ve druhém případě spočítáme nejprve vlastní integrál

$$F_T(p) = \int_0^{2T} h\left(\sin \frac{pt}{T}\right) \exp(-pt) dt = \int_0^T \exp(-pt) dt = \frac{1 - \exp(-pT)}{p}$$

a pak, jak tvrdí **Věta 6.3**, pro hledaný obraz platí

$$F(p) = \frac{1 - \exp(-pT)}{p(1 - \exp(-2pT))} = \frac{1 - \exp(-pT)}{p(1 - \exp(-pT))(1 + \exp(-pT))} = \frac{1}{p(1 + \exp(-pT))}$$

Obraz dvoustranného periodického obdélníkového impulzu obdržíme též buď prostřednictvím vhodné geometrické řady nebo jako obraz periodické funkce. V prvním případě

$$F(p) = \frac{1}{p} \left(1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \exp(-2ir)\right) = \frac{1}{p} \left(-1 + 2 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \exp(-2ir)\right) = \frac{1}{p} \left(-1 + 2 \sum_{i=0}^{\infty} (-\exp(-2r))^i\right),$$

což je geometrická řada s kvocientem $q = -\exp(-2r)$, kterou podle předchozího můžeme sečíst. Získáme tak

$$F(p) = \frac{1}{p} \left(-1 + \frac{2}{1 + \exp(-2r)}\right) = \frac{1}{p} \frac{1 - \exp(-2r)}{1 + \exp(-2r)} = \frac{1}{p} \frac{\exp(r) - \exp(-r)}{\exp(r) + \exp(-r)} = \frac{1}{p} \tanh r.$$

Ve druhém případě spočteme nejprve vlastní integrál

$$F_T(p) = \int_0^{2T} (\eta(t) - 2\eta(t-T)) \exp(-pt) dt = \frac{1}{p} (1 - \exp(-2r))^2.$$

Věta 6.3 pak říká, že $F(p) = \frac{1}{p} \frac{(1 - \exp(-2r))^2}{1 - \exp(-4r)} = \frac{1}{p} \frac{1 - \exp(-2r)}{1 + \exp(-2r)} = \frac{1}{p} \tanh r$.

Obraz stupňovitého impulzu získáme jako součet speciální geometrické řady s kvocientem $q = \exp(-2r)$, pro nějž jako v předchozím případě platí $|q| < 1$. Postupně dostaneme

$$F(p) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{\infty} \exp(-2ir) = \frac{1}{p} \frac{1}{1 - \exp(-2r)} = \frac{1}{2p} \frac{\exp(r) - \exp(-r) + \exp(r) + \exp(-r)}{\exp(r) - \exp(-r)} = \frac{1}{2p} (1 + \coth r)$$

Obraz identické funkce je speciálním případem funkce vyšetřované v ukázce 6.10.

Obraz pilovitého impulzu obdržíme buď pomocí speciální geometrické řady s kvocientem $q = \exp(-2r)$, $|q| < 1$ nebo jako impulz periodické funkce, kde

$$F_T(p) = \frac{1}{p^2 T} (1 - \exp(-pT) - pT \exp(-pT)).$$

Obraz trojúhelníkového impulsu je trojnásobnou aplikací různě posunutých identických funkcí.

Obraz periodického trojúhelníkového impulsu můžeme určit trojím způsobem a to buď pomocí speciální geometrické řady nebo jako periodickou funkci a nebo pomocí integrace dvoustranného periodického obdélníkového impulsu. První dva způsoby již byly vysvětleny při vyšetřování jiných impulsů. Proto zmíníme podrobněji jen třetí způsob. Podle věty o integraci předmětu musí bezprostředně platit $F(p) = \frac{1}{T} \frac{1}{p} \frac{1}{p} \tanh(r) = \frac{1}{T p^2} \tanh(r)$.

Obraz lichoběžníkového impulsu je čtyřnásobnou aplikací různě posunutých identických funkcí.

Obraz dvojcestného usměrnění získáme jako obraz periodické funkce s periodou $T = \frac{\pi}{\omega}$. Označme $r = \frac{\pi p}{2\omega}$. Protože $F_T(p) = \frac{w}{p^2+w^2} (1 + \exp(-2r))$ je

$$F(p) = \frac{w}{p^2+w^2} \frac{1+\exp(-2r)}{1-\exp(-2r)} = \frac{w}{p^2+w^2} \coth r.$$

Obraz jednocestného usměrnění určíme jako aritmetický průměr obrazu dvojcestného usměrnění a funkce $\sin \omega t$. Algebraickými úpravami dospějeme bezprostředně k relaci

$$F(p) = \frac{1}{2} \frac{\omega}{p^2+\omega^2} (1 + \coth r) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \frac{\exp(r)}{\exp(r)-\exp(-r)} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \frac{1}{1-\exp(-2r)}.$$

6.5.2 Elektrické obvody

Základními prvky elektrických obvodů jsou rezistory, kapacitory a induktory charakterizované odporem R , kapacitou C a indukčností L . Omezíme se na případ, že všechny parametry obvodových prvků jsou konstantní. Vztahy mezi napětím na svorkách jednotlivých prvků a procházejícím proudem jsou dány postupně relacemi $u(t) = R i(t)$, $u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$ a $u(t) = L i'(t)$. Předpokládejme, že všechny funkce času jsou předměty. Pak uvedené relace přejdou Laplaceovou transformací v jednodušší obrazové vztahy $U = RI$, $U = \frac{1}{pC} I$ a $U = pLI$, přičemž $u \leftrightarrow U$ a $i \leftrightarrow I$. Pomocí Kirchhoffových zákonů můžeme sestavit diferenciální nebo integro-diferenciální rovnice vyšetřovaného obvodu, které popisují jeho dynamické vlastnosti, a tyto rovnice pak vyřešit prostřednictvím Laplaceovy transformace. Není-li řečeno jinak, předpokládáme $i(0) = 0$. Vlastní postup řešení nejlépe ilustrují následující ukázky.

Ukázka 6.33: *V seriovém RL obvodu určete proudovou odezvu $i = i(t)$, je-li na vstup přivedeno obecné napětí $u = u(t)$, které je předmětem. Rovnice vyšetřovaného obvodu má tvar $Li' + Ri = u$, který Laplaceovou transformací přejde na $pLI + RI = U$. Vyřešením této lineární rovnice obdržíme*

$$I = \frac{U}{R + pL} = \frac{1}{L} \frac{1}{p + \frac{R}{L}} U.$$

Využitím věty o konvoluci předmětu získáme konečný tvar proudové odezvy

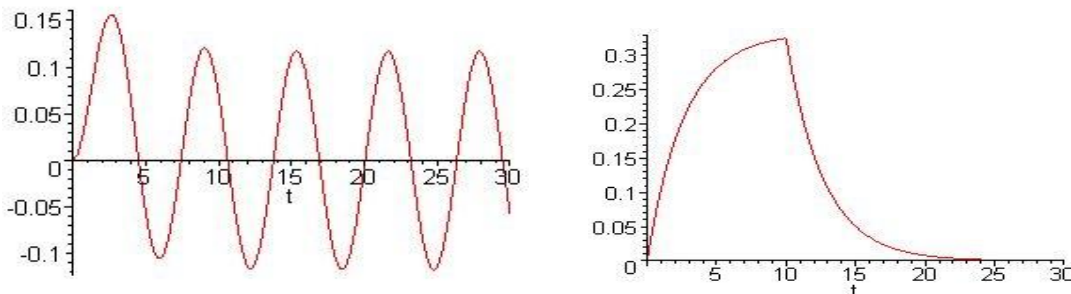
$$i = \frac{1}{L} u(t) * \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) = \frac{1}{L} \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \int_0^t u(\tau) \exp\left(\frac{R}{L}\tau\right) d\tau,$$

v němž ovšem v případě známého napětí musíme konvoluční integrál vypočítat. Povšimněme si, že jsme vůbec nemuseli konkretizovat obraz U obecně zadaného napětí.

Ukázka 6.34: V případě ustáleného periodického napětí $u = u_0 \sin \omega t$ obdržíme po vypočtu konvolučního integrálu pomocí dvojí integrace per partes proudovou odezvu

$$i = \frac{u_0}{R^2 + \omega^2 L^2} (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t + \omega L \exp(-\frac{R}{L} t)),$$

z níž je patrný (viz **Obr. 6.7** vlevo) rychlý útlum exponenciálního členu, takže po určité době dané parametry obvodu se i proudová odezva $i = i(t)$ ustálí.



Obr. 6.7: Proudové odezvy v RL obvodu pro různý průběh napětí

Ukázka 6.35: Má-li budicí napětí tvar obdélníkového impulsu $u = u_0 (\eta(t) - \eta(t - t_0))$ je procházející proud popsán funkcí $i = \frac{u_0}{R} (\exp(-\frac{R}{L} \psi(t - t_0)) - \exp(-\frac{R}{L} t))$, z níž je patrný nárůst proudu při působení impulsu a poté poměrně rychlý exponenciální útlum při jeho zaniknutí (viz **Obr. 6.7** vpravo).

6.5.3 Lineární systémy

Tato kapitola patří k těm obtížnějším a je určena náročnějším studentům. Týká se teorie systémů a pojmem ji poněkud obecněji. Teorie systémů analyzuje rozličné jevy ve vzájemných souvislostech a v poslední době vykazuje intenzivní rozvoj. Tato poměrně nová disciplína se s výhodou uplatňuje i v různých oblastech elektrotechnické praxe jako je automatizace, sdělovací technika, energetika apod. Protože se budeme zabývat poměrně obecným systémem, odhlédneme od jeho konkrétního fyzikálního typu, tj. od toho, zda se jedná o systém elektrický, mechanický, elektromechanický, tepelný, hydraulický, hydrodynamický, pneumatický, chemický či jiný. Omezíme se na systém dynamický, který popisuje chování nějaké reality v čase a který je vzhledem k možnostem Laplaceovy transformace navíc lineární a spojitý. Vnější popis takového systému v sobě zahrnuje jen reakci výstupní veličiny $y = y(t)$ na vstupní signál $u = u(t)$ a neuvažuje žádné vnitřní vazby. Chování tohoto systému lze popsat počáteční úlohou pro lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty, kterou můžeme zapsat ve tvaru

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^m b_i u^{(i)}, \quad m \leq n, \quad a_n \neq 0, \quad b_m \neq 0.$$

Aplikujeme-li nyní na tuto rovnici za předpokladu nulových počátečních podmínek větu o derivaci předmětu Laplaceovy transformace (zobecněnou variantu $\underline{5}^0$), dospějeme k obrazové rovnici

$$\sum_{i=0}^n a_i p^i Y = \sum_{i=0}^m b_i p^i U \quad \text{neboli} \quad Y = F U .$$

Přenosová funkce

$$F = F(p) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}, \quad \text{pro níž} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = \frac{b_m}{a_n} d_{mn} \quad (\text{Kronecker}),$$

udává poměr mezi obrazem $Y = Y(p)$ výstupní veličiny a obrazem $U = U(p)$ vstupní veličiny. Tato funkce popisuje dynamické vlastnosti zkoumaného systému. Jedná se o funkci holomorfní v nekonečnu, neboť případnou odstranitelnou singularitu považujeme za již odstraněnou. Vztah mezi vstupem a výstupem se zpravidla vyjadřuje pomocí reakce systému na některé speciální vstupní signály.

Zejména se využívá *impulzní charakteristika* $g(t)$ jako odezva na Diracovu funkci $\delta(t)$. Protože $\delta(t) \leftrightarrow 1$ a $g(t) \leftrightarrow G(p)$, je $F(p) = G(p)$. Určíme-li předmět příslušný přenosové funkci jako podíl výstupního a vstupního obrazu, je odezva na libovolný vstupní signál $u(t)$ dána konvolucí $y(t) = g(t) * u(t)$.

Další možnost jak určit odezvu na obecný signál poskytuje *přechodová charakteristika* $h(t)$ jako odezva na Heavisideovu funkci $\eta(t)$. Protože $\eta(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}$, je přenosová funkce dána relací $F(p) = p H(p)$, kde $h(t) \leftrightarrow H(p)$. V důsledku této relace platí $Y = p H U$. Aplikací Duhamelova vzorce je odezva na obecný vstupní signál $u(t)$ dána relacemi

$$y(t) = h(t)u(0) + (h(t) * u'(t)) \quad \text{nebo} \quad y(t) = h(0)u(t) + (h'(t) * u(t)).$$

Mezi oběma charakteristikami existuje těsný vztah. Platí totiž $G = F = p H$ a proto

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad \text{neboli} \quad h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau .$$

Jistou informací o systému poskytne též analýza rozložení nul (kořeny čitatele) a pólů (kořeny jmenovatele) přenosové funkce.

Ukázka 6.36: *Přenosová funkce RL obvodu s obecným buzením řešeným v ukázce 6.33 je $F(p) = \frac{1}{Lp+R}$, takže impulzní, resp. přechodová charakteristika má tvar $g(t) = \frac{1}{L} \exp(-\frac{R}{L}t)$, resp. $h(t) = \frac{1}{R} [1 - \exp(-\frac{R}{L}t)]$. Mezi oběma charakteristikami platí relace $R h(t) + L g(t) = 1$.*

6.5.4 Nevlastní integrály

Laplaceova transformace hraje též významnou roli při výpočtu některých nevlastních integrálů v reálném oboru, jejichž výpočet klasickými prostředky je přinejmenším obtížný. Mezi předmětem a obrazem Laplaceovy transformace platí integrální relace:

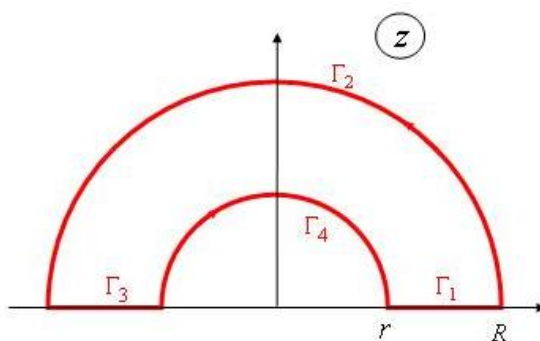
$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt &= \int_0^{\infty} F(p) dp \\ \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t^{n+1}} dt &= \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} p^n F(p) dp \\ \int_0^{\infty} t^n f(t) dt &= (-1)^n (F^{(n)}(0) - F^{(n)}(\infty)) \end{aligned}$$

K prověření prvního vztahu integrujme definiční relaci (6.1) přímé Laplaceovy transformace podle proměnné p v mezích od nuly do nekonečna. Obdržíme postupně

$$\int_0^{\infty} F(p) dp = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt dp = \int_0^{\infty} f(t) \int_0^{\infty} \exp(-pt) dp dt = \int_0^{\infty} f(t) \left[\frac{\exp(-pt)}{t} \right]_0^{\infty} dt = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt.$$

Podobným způsobem lze dokázat i zbývající dvě relace.

Ukázka 6.37: Určeme hodnotu integrálu $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, který již v roce 1781 spočítal Leonhard Euler. Integrál vypočteme třemi způsoby. První způsob spočívá ve využití Cauchyovy věty aplikované na funkci $f(z) = \frac{\exp(jz)}{z}$, která je holomorfní pro $z \neq 0$. Abychom se tomuto bodu vyhnuli, zvolíme integrační cestu tak, jak ukazuje **Obr. 6.8**. Podle Cauchyovy věty platí, že součet integrálů přes křivky Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 a Γ_4 je roven nule. Spočteme nyní integrály přes jednotlivé křivky a přejdeme k limitě pro $r \rightarrow 0$ a $R \rightarrow \infty$. Dostaneme



Obr. 6.8: Integrační cesta

$$\Gamma_1: \quad z = x \text{ a proto } \int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_r^R \frac{\exp(jx)}{x} dx \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\exp(jx)}{x} dx,$$

$$\Gamma_2: \quad z = R \exp(j\varphi) \text{ a proto } \int_{\Gamma_2} f(z) dz = j \int_0^{\pi} \exp(jR \cos \varphi) \exp(-R \sin \varphi) d\varphi \rightarrow 0,$$

$$\Gamma_3: \quad z = x \text{ a proto } \int_{\Gamma_3} f(z) dz = \int_{-R}^{-r} \frac{\exp(jx)}{x} dx \rightarrow -\int_0^{\infty} \frac{\exp(-jx)}{x} dx,$$

$$\Gamma_4: \quad z = r \exp(j\varphi) \text{ a proto } \int_{\Gamma_4} f(z) dz = -j \int_0^{\pi} \exp(jr \exp(j\varphi)) d\varphi \rightarrow -j\pi.$$

Celkem tedy $\int_0^{\infty} \frac{\exp(jx) - \exp(-jx)}{x} dx - j\pi = 0$, takže po úpravě $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Při realizaci druhého způsobu využijeme výsledku ukázky 7.13, z níž speciálně vyplývá $\frac{\sin x}{x} \leftrightarrow \arccot p$, odkud aplikací věty o integraci předmětu dostaneme pro tzv. integrální sinus $\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$ relaci $\text{Si}(t) \leftrightarrow \frac{1}{p} \arccot p$. Podle třetí věty o limitě pak snadno dospějeme k výsledku $\text{Si}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Si}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \arccot p = \frac{\pi}{2}$.

Třetí způsob tkví v aplikaci první z výše tří uvedených integrálních relací. Z ukázky 7.11 vyplývá $\sin y \leftrightarrow \frac{1}{p^2+1}$, takže $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{dp}{p^2+1} = \arctan p \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$.

6.5.5 Rovnice se zpožděným argumentem

Také tato kapitola je určena jen náročnějším studentům. V praktických aplikacích se setkáváme s jevy, kdy vliv některé veličiny není okamžitý, ale trvá určitou dobu. Jevy tohoto typu se matematicky popisují diferenciálními rovnicemi se zpožděným argumentem a tyto rovnice lze v některých případech efektivně řešit pomocí Laplaceovy transformace. Postup řešení demonstrováme na jednoduchém případě.

Ukázka 6.38: Nalezneme řešení diferenciální rovnice $x'(t) = x(t-1)$, přičemž hledaná funkce $x(t)$ splňuje počáteční podmínku $x(t) = -t$ při $-1 \leq t \leq 0$. Na základě definice určíme nejprve obraz pravé strany dané rovnice. Za předpokladu $x(t) \leftrightarrow X(p)$ postupně platí

$$\begin{aligned} x(t-1) &\leftrightarrow \int_0^{\infty} x(\tau-1) \exp(-p\tau) d\tau = \exp(-p) \int_{-1}^{\infty} x(t) \exp(-pt) dt = \\ &= \exp(-p) \left[\int_0^{-1} t \exp(-pt) dt + \int_0^{\infty} x(t) \exp(-pt) dt \right] = \frac{1}{p^2} [\exp(-p) - 1] + \frac{1}{p} + \exp(-p) X. \end{aligned}$$

Při úpravách jsme užili integraci per partes. Nyní již můžeme zadanou rovnici pomocí věty o derivaci předmětu transformovat do obrazového tvaru. Protože $x(t) \leftrightarrow pX$, získáme po vyřešení obrazové rovnice

$$X = \frac{\exp(-p)-1}{p^2[p-\exp(-p)]} + \frac{1}{p[p-\exp(-p)]}.$$

Rozvineme-li převrácenou hodnotu funkce v hranaté závorce v geometrickou řadu, dostaneme

$$\frac{1}{p-\exp(-p)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\exp(-ip)}{p^{i+1}}.$$

Dosažením této řady do předchozí relace obdržíme

$$X = -\frac{1}{p^2} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\exp(-ip)}{p^{i+3}} + 2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\exp(-ip)}{p^{i+2}},$$

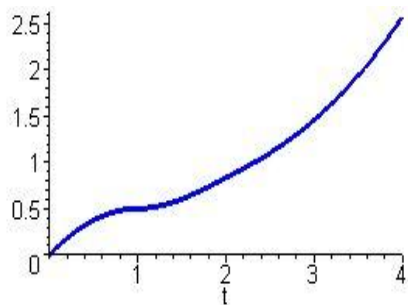
takže zpětnou transformací podle první Heavisideovy věty po úpravách získáme

$$x(t) = \frac{1}{2} t(2-t) \eta(t) - \sum_{i=1}^{\infty} (t-3i-4) \frac{(t-i)^{i+1}}{(i+2)!} \eta(t-i).$$

Tato funkce je na každém intervalu $\langle i-1, i \rangle$ dána polynomem $(i+1)$ -ního stupně. Konkrétně pro několik počátečních intervalů platí

$$x(t) = \begin{cases} -t & -1 \leq t \leq 0 \\ \frac{1}{2}(-t^2 + 2t) & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{6}(-t^3 + 6t^2 - 9t + 7) & 1 \leq t \leq 2 \\ \frac{1}{24}(-t^4 + 12t^3 - 48t^2 + 92t - 52) & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

Průběh řešení znázorňuje Obr. 6.9.



Obr. 6.9: Průběh řešení ukázky 6.38

6.6 Slovníček Laplaceovy transformace

K usnadnění studia i další práce studentů uvedeme si v této kapitole bez odvozování krátký slovníček Laplaceovy transformace. Jednotlivá hesla prezentujeme v pořadí obraz – předmět, což je pro využití v praxi výhodnější. Další hesla nalezne čtenář např. v [1]. Podotkněme ještě, že hesla týkající se některých impulzů jsou obsažena v odstavci 6.5.1.

Ve slovníčku předpokládáme, že $n \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{R}$, $a, b \in \mathbf{C}$.

$$\frac{1}{p^n} \leftrightarrow \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\frac{1}{(p+a)^n} \leftrightarrow \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-at)$$

$$\frac{1}{p^{n+\frac{1}{2}}} \leftrightarrow \frac{2^n t^{n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{p} (2n-1)!!}$$

$$\frac{1}{p^n} \leftrightarrow \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$$

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)}, \quad a \neq b \leftrightarrow \frac{\exp(-at) - \exp(-bt)}{b-a}$$

$$\frac{p}{(p+a)(p+b)}, \quad a \neq b \leftrightarrow \frac{b \exp(-bt) - a \exp(-at)}{b-a}$$

$$\frac{1}{p^2 + a^2} \leftrightarrow \frac{\sin at}{a}$$

$$\frac{p}{p^2 + a^2} \leftrightarrow \cos at$$

$$\frac{1}{(p+a)^2 + b^2} \leftrightarrow \frac{\exp(-at) \sin bt}{b}$$

$$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2} \leftrightarrow \exp(-at) \cos bt$$

$$\frac{1}{p(p^2+a^2)} \leftrightarrow \frac{1-\cos at}{a^2}$$

$$\frac{1}{p^2(p^2+a^2)} \leftrightarrow \frac{at-\sin at}{a^3}$$

$$\frac{1}{(p^2+a^2)^2} \leftrightarrow \frac{\sin at - at \cos at}{2a^5}$$

$$\frac{p}{(p^2+a^2)^2} \leftrightarrow \frac{t \sin at}{2a}$$

$$\frac{p^2}{(p^2+a^2)^2} \leftrightarrow \frac{\sin at + at \cos at}{2a}$$

$$\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}, \quad a^2 \neq b^2 \leftrightarrow \frac{\cos at - \cos bt}{b^2 - a^2}$$

$$\frac{1}{(p^2+a^2)^n} \leftrightarrow \frac{\sqrt{p}}{\Gamma(n)} \left(\frac{t}{2a}\right)^{n-\frac{1}{2}} J_{n-\frac{1}{2}}(at)$$

$$\frac{1}{p^3+a^3} \leftrightarrow \frac{\exp(-at) - \exp(-\frac{at}{2})(\cos \frac{\sqrt{3}at}{2} - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}at}{2})}{3a^2}$$

$$\frac{1}{p^4+4a^4} \leftrightarrow \frac{\sin at \cosh at - \cos at \sinh at}{4a^3}$$

$$\frac{p}{p^4+4a^4} \leftrightarrow \frac{\sin at \sinh at}{2a^2}$$

$$\frac{1}{p^2-a^2} \leftrightarrow \frac{\sinh at}{a}$$

$$\frac{p}{p^2-a^2} \leftrightarrow \cosh at$$

$$\frac{1}{p^4-a^4} \leftrightarrow \frac{\sinh at - \sin at}{2a^3}$$

$$\frac{p}{p^4-a^4} \leftrightarrow \frac{\cosh at - \cos at}{2a^2}$$

$$\ln \frac{p+a}{p+b} \leftrightarrow \frac{\exp(-bt) - \exp(-at)}{t}$$

$$\ln \frac{p^2+a^2}{p^2} \leftrightarrow 2 \frac{1-\cos at}{t}$$

$$\ln \frac{p^2 - a^2}{p^2} \leftrightarrow 2 \frac{1 - \cosh at}{t}$$

$$\operatorname{arcctg} \frac{p}{a} \leftrightarrow \frac{\sin at}{t}$$

6.7 Shrnutí

Předmět Laplaceovy transformace:

- 1) je včetně své derivace po částech spojitý
- 2) vymizí pro záporné argumenty
- 3) je funkcí ohraničeného růstu

Konvoluce:

$$\varphi(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau, \quad F(p) * G(p) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} F(\zeta) G(p-\zeta) d\zeta$$

Přímá Laplaceova transformace:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt, \quad p \in \mathbf{C}, \quad t \in \mathbf{R}$$

Gramatika Laplaceovy transformace:

věta o	předmět	obraz	poznámka
1° linearitě	$a f(t) + b g(t)$	$a F(p) + b G(p)$	$\operatorname{Re} p \geq \max(s_f, s_g)$
2° podobnosti	$f(rt)$	$\frac{1}{r} F\left(\frac{p}{r}\right)$	
3° posunutí předmětu	$f(t-r)$	$\exp(-rp) F(p)$	$f(t) = 0, \quad t \leq r$
4° posunutí obrazu	$\exp(at) f(t)$	$F(p-a)$	
5° derivaci předmětu	$f'(t)$	$p F(p) - f(0)$	
6° derivaci obrazu	$-t f(t)$	$F'(p)$	
7° derivaci podle parametru	$\frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda)$	$\frac{\partial}{\partial \lambda} F(p, \lambda)$	$\exists \frac{\partial}{\partial \lambda}$
8° integraci předmětu	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{p} F(p)$	
9° integraci obrazu	$\frac{1}{t} f(t)$	$\int_p^{\infty} F(\zeta) d\zeta$	$\exists \int_p^{\infty}$
10° konvoluci předmětu	$f(t) * g(t)$	$F(p) G(p)$	násobení obrazů
11° konvoluci obrazu	$f(t) g(t)$	$F(p) * G(p)$	násobení předmětů
12° Duhamelův vzorec	$f(t) g(0) + f(t) * g'(t)$	$p F(p) G(p)$	

$$\underline{5}^{\circ} \quad f^{(n)}(t) \quad p^n F(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-i-1} f^{(i)}(0)$$

$$\underline{8}^{\circ} \quad \int_0^{t_1} \mathbf{L} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \mathbf{L} dt_1 \quad \frac{1}{p^n} F(p)$$

Obraz periodické funkce:

$$F(p) = \frac{F_T(p)}{1 - \exp(-pT)}, \quad F_T(p) = \int_0^T f_T(t) \exp(-pt) dt \equiv \int_0^T f(t) \exp(-pt) dt$$

Zpětná Laplaceova transformace:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{g-j\infty}^{g+j\infty} F(p) \exp(pt) dp, \quad f(t) = \sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{p=p_i} (F(p) \exp(pt))$$

Limitní věty:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} p F(p) = \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t), \quad \lim_{p \rightarrow 0} p F(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

Heavisideovy věty o rozkladu:

$$F(p) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{p^i} \quad \rightarrow \quad f(t) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{(i-1)!} t^{i-1}$$

$$F(p) = \frac{M(p)}{N(p)} \quad \rightarrow \quad f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{M(p_i) \exp(p_i t)}{N'(p_i)}$$

Funkcionál:

zobrazení obecné množiny do množiny čísel

Zobecněná funkce:

spojitý lineární funkcionál na množině přípustných funkcí

Diracova funkce:

$$(\delta(t - t_0), a(t)) = a(t_0), \quad a(t) \in K$$

Derivace zobecněné funkce:

$$(f^{(n)}(t), a(t)) = (-1)^n (f(t), a^{(n)}(t)), \quad a(t) \in K$$

Laplaceova transformace zobecněné funkce:

$$(f(t), \exp(-pt))$$

6.8 Kontrolní otázky

- 1) Naznačte význam transformačních metod
- 2) Jaké vlastnosti musí splňovat předmět Laplaceovy transformace?
- 3) Vysvětlete pojem konvoluce a popište její vlastnosti.
- 4) Definujte přímou Laplaceovu transformaci.
- 5) Které z pravidel gramatiky Laplaceovy transformace znáte?
- 6) Co je to Duhamelův vzorec?
- 7) Jak lze zjednodušeně určit Laplaceův obraz periodické funkce?
- 8) Definujte zpětnou Laplaceovu transformaci.

- 9) Uveďte tři limitní věty.
- 10) Formulujte dvě Heavisideovy věty o rozkladu.
- 11) Objasněte pojem funkcionálu a uveďte některé příklady.
- 12) Vysvětlete pojem zobecněné funkce
- 13) Co je to Diracova funkce?
- 14) Definujte derivaci zobecněné funkce.
- 15) Kolik derivací zobecněná funkce má?
- 16) Jak se určí Laplaceův obraz zobecněné funkce?
- 17) Uveďte některé aplikace Laplaceovy transformace.

6.9 Příklady ke kapitole 6

Příklad 6.1: *Proveďte, zda funkce $f(t) = e^{2t}$ je předmětem Laplaceovy transformace.*

Příklad 6.2: *Spočtěte konvoluci $j(t) = h(t) * \exp(-t)$.*

Příklad 6.3: *Určete obraz funkce $f(t) = \cos(\omega t)$ při Laplaceově transformaci.*

Příklad 6.4: *Pomocí Laplaceovy transformace vyřešte diferenciální úlohu $2y''' + 4y'' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 8$.*

Příklad 6.5: *Pomocí Laplaceovy transformace vyřešte diferenciální úlohu $y'' + y' = \sin t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.*

Výsledky viz kap. 9

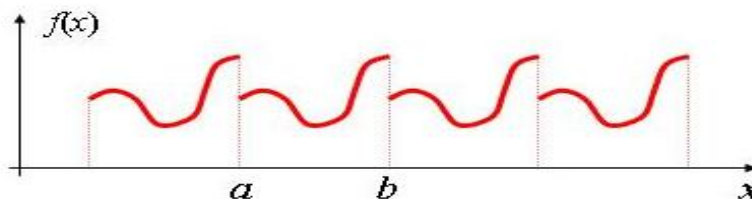
7 Fourierova transformace

Cíle kapitoly: V této kapitole se budeme nejprve krátce věnovat úvodu do problematiky Fourierových řad, jako prostředku pro popis periodických dějů. Vyšetřením mezního případu Fourierových řad pro aperiodické funkce dospějeme k Fourierovu integrálu. Přímo i zpětnou Fourierovu transformaci pak budeme formulovat jako rozklad tohoto Fourierova integrálu. Zmíníme i těsnou souvislost mezi Fourierovou transformací a Laplaceovou transformací. Pro praktické využívání Fourierovy transformace popíšeme souhrnně její gramatiku. Závěrem kapitoly si využití Fourierovy transformace ilustrováme na několika ukázkách a uvedeme krátký slovníček.

7.1 Fourierovy řady

Při vyšetřování periodických dějů, jako jsou např. elektrické, mechanické a akustické kmity, kruhové pohyby apod. a při řešení diferenciálních či integrálních rovnic, často vyjadřujeme příslušné funkce pomocí Fourierových řad. Účelem této kapitoly je podat nezbytný základ pro používání Fourierových řad v konkrétních aplikacích. Upozorníme hned na počátku, že Fourierovy řady se v technické praxi často používají velice formálně, bez ověření přípustnosti jejich použití, což může vést k naprosto nesprávným výsledkům. Pokud tedy provádíme různé operace formálně, je nutné se zpětně přesvědčit, že použití všech operací bylo oprávněné.

Mějme dán interval $I = \langle a, b \rangle$ a označme $T = b - a$. Řekneme, že funkce $f(x)$ je *periodická s periodou T* , jestliže platí $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}$.



Obrázek 7.1: Periodická funkce

Definice 7.1: Necht' $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel a w je reálné číslo. Pak výraz

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nwx + b_n \sin nwx), \quad x \in \mathbf{R} \quad (7.1)$$

nazýváme *trigonometrickou řadou*, dvojčlen $a_n \cos nwx + b_n \sin nwx$ jejím *n -tým členem* a číslo a_0 jejím *absolutním členem*, definitivně klademe $b_0 = 0$.

V některých aplikacích se dává přednost *exponenciálnímu tvaru* této řady, tj. tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(-jnw x), \quad c \in \mathbf{C}, \quad (7.2)$$

přičemž mezi koeficienty uvedenými v (7.1) a (7.2) platí relace

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n), \quad c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n).$$

Protože zvláště v elektrotechnice se exponenciální tvar s výhodou využívá, budeme další výsledky uvádět jak pro trigonometrický tak pro exponenciální tvar.

Věta 7.1 *Nechť lze funkci $f(x)$ rozvinout v trigonometrickou řadu a nechť tato řada konverguje k funkci $f(x)$ na intervalu I stejnoměrně. Pak pro všechna přípustná n platí*

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos n\omega x dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin n\omega x dx, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \exp(-n\omega x) dx. \quad (7.3)$$

Koeficienty definované relacemi (7.3) budeme nazývat *Fourierovými koeficienty*.

Ve větě jsme předpokládali, že funkci $f(x)$ lze rozvinout ve stejnoměrně konvergentní trigonometrickou řadu. Zvolme nyní opačný postup. Nechť je funkce $f(x)$ absolutně integrovatelná, pak uvedené integrály existují. Lze tedy definovat Fourierovy koeficienty a_n, b_n, c_n a funkci $f(x)$ můžeme formálně přiřadit řadu (7.1), eventuelně (7.2). V tomto případě mluvíme o *Fourierově řadě* funkce $f(x)$. Fourierova řada je tedy trigonometrickou řadou, avšak ne každá trigonometrická řada je řadou Fourierovou. Je proto zcela přirozené klást si v této chvíli otázky typu, zda Fourierova řada vůbec konverguje, v jakém smyslu konverguje, k čemu konverguje, zdali a za jakých podmínek konverguje k funkci $f(x)$ apod. Abychom naznačili složitost situace, uveďme si dvě ukázky.

Ukázka 7.1: *Uvažujme trigonometrickou řadu*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}.$$

Tato řada sice na intervalu $\langle -p, p \rangle$ konverguje, ne však stejnoměrně a není Fourierovou řadou žádné integrovatelné funkce.

Ukázka 7.2: *Mějme dvě funkce $f(x) = 0$ a $g(x) = 0, x \neq 0, g(0) = 1$ definované na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. V obou případech jsou všechny Fourierovy koeficienty nulové a proto obě funkce mají stejnou Fourierovu řadu, která stejnoměrně konverguje k nule. Přitom součet řady se rovná funkci $f(x)$, ale nerovná se funkci $g(x)$, neboť $g(0) \neq 0$.*

Z poslední ukázky vyplývají dva poznatky a sice: dvě různé funkce mohou mít stejnou Fourierovu řadu a i když Fourierova řada nějaké funkce konverguje stejnoměrně, nemusí ještě konvergovat k této funkci. Dříve než přikročíme k vyšetřování vlastností Fourierovy řady, uveďme si několik užitečných poznámek.

Sčítání řady (7.1) je nutno chápat tak, že nejprve sečteme dvojčleny uzavřené v závorkách a pak teprve sčítáme řadu takto vzniklých součtů. Uvedené závorky tedy nelze obecně odstranit. Podobně v případě řady (7.2) nejprve sečteme dva odpovídající si sčítance, jejichž absolutní hodnota indexu je stejná a poté sčítáme řadu takto vzniklých součtů.

Integrály v relacích (7.3) lze počítat přes libovolný interval $\langle x_0, x_0 + T \rangle$, často se volí symetrický interval $\langle -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \rangle$.

Při konstruování Fourierovy řady můžeme s výhodou využít některých vlastností funkce $f(x)$. Je-li tato funkce sudá, tj. platí-li $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}$, je $b_n = 0$ pro všechny in-

dexy n a v důsledku $c_n = \frac{1}{2}a_{|n|}$. V tomto případě mluvíme o **kosinové Fourierově řadě**. Je-li funkce $f(x)$ lichá, tj. platí-li $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}$, je $a_n = 0$ pro všechny indexy n a tudíž $c_n = -\frac{1}{2}b_{|n|} \operatorname{sgn} n$. Mluvíme pak o **sinové Fourierově řadě**.

K popisu funkcí se používá i Taylorova řada. Koeficienty Taylorovy řady jsou zadány derivacemi funkce $f(x)$ a proto závisejí jen na hodnotách vyšetřované funkce v okolí vztaženého bodu. Fourierovy koeficienty závisejí na průběhu funkce $f(x)$ v celém intervalu I , neboť jsou vyjádřeny vhodným integrálem. Hodí se proto i k popisu některých nespojitých funkcí a v tomto smyslu je Fourierova řada obecnější.

Věta 7.2 *Nechť je funkce $f(x)$ na intervalu I po částech hladká. Pak její Fourierova řada konverguje k aritmetickému průměru $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, tj. můžeme položit*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nwx + b_n \sin nwx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(jnwx) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

Z věty bezprostředně vyplývá, že v případě spojitě funkce $f(x)$, kdy se v každém bodě limita zprava rovná limitě zleva, konverguje příslušná Fourierova řada k funkci $f(x)$.

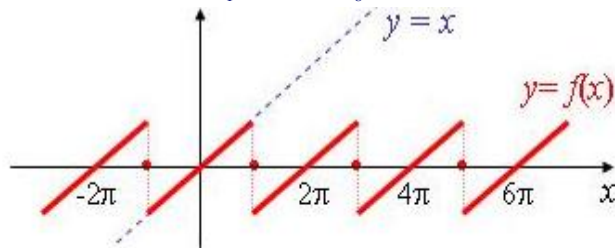
Ukázka 7.3: *Sestrojme Fourierovu řadu funkce $f(x) = x$, $x \in (-p, p)$, $f(x+2p) = f(x)$. V tomto případě je $T = 2p$ a $w = 1$. Funkce $f(x)$ je lichá a proto $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Pomocí integrace per partes spočítáme*

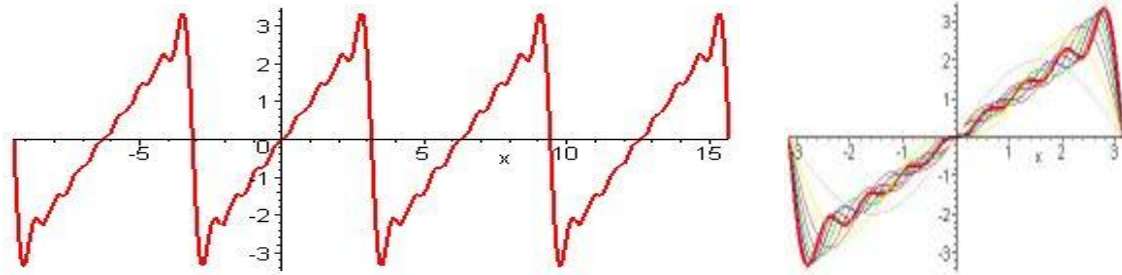
$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p x \sin nx \, dx = (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \quad \text{a proto} \quad f(x) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n \sin nx.$$

Podle [28], str. 262, uvedená řada konverguje pro všechna $x \neq lp$ a $f(lp) = 0$, $l \in \mathbf{I}$. Po všimněme si, že periodická funkce $f(x)$ splývá s funkcí $y = x$ jen na intervalu $(-p, p)$, viz **Obrázek 7.2**. Označme

$$f_m(x) = -2 \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} (-1)^n \sin nx$$

m -tý částečný součet sestrojené Fourierovy řady. Pro ilustraci je na zmíněném obrázku uveden ještě průběh osmého částečného součtu v intervalu čtyř period a detailní situace postupného přibližování částečných součtů $f_1(x), \dots, f_8(x)$ k funkci $f(x)$ v rozmezí jedné periody.





Obrázek 7.2: Periodická funkce z ukázky 8.3 a její aproximace

Nyní ve formě pěti vět uvedeme některé základní vlastnosti Fourierových řad.

Věta 7.3 Necht' je funkce $f(x)$ ohraničená a po částech spojitá. Pak příslušná Fourierova řada konverguje v průměru k funkci $f(x)$, tj. platí

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T [f(x) - S_m(x)]^2 dx = 0, \quad S_m(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^m (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) = \sum_{n=-m}^m c_n \exp(jn\omega x)$$

Důsledkem této věty je tzv. *Parsevalova rovnost*

$$\frac{2}{T} \int_0^T [f(x)]^2 dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Věta 7.4 Za předpokladu $f(x) \in C_2(I)$ konverguje Fourierova řada absolutně a stejnoměrně k funkci $f(x)$

Věta 7.5 Předpokládejme, že $\int_0^T |f(x)| dx < \infty$. Pak platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Věta 7.6 Necht' $f(x) \in C(I)$, $f(0) = f(T)$ a necht' $f'(x)$ je po částech spojitá. Pak

$$f'(x) = \omega \sum_{n=1}^{\infty} n (-a_n \sin n\omega x + b_n \cos n\omega x) = j\omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} n c_n \exp(jn\omega x).$$

Věta 7.7 Je-li funkce $f(x)$ po částech spojitá, pak

$$\int_0^x f(x) dx = \frac{1}{2}a_0 x + \frac{1}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin n\omega x - b_n (\cos n\omega x - 1)] = \frac{j}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{n} (1 - \exp(jn\omega x)).$$

Zvláště dvě poslední vlastnosti, a to *věta o derivování Fourierovy řady člen po členu* a *věta o integrování Fourierovy řady člen po členu*, jsou z praktického hlediska velice užitečné, neboť umožňují získávat další Fourierovy řady bez použití Eulerových-Fourierových vzorců. Ilustrujme si to na následujících ukázkách.

Ukázka 7.4: Rozvíjme tzv. *dvoucestné usměrnění* (viz **Obrázek 7.3**) definované relací $f(x) = |\sin x|$ nebo též podrobněji $f(x) = \sin x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$, $f(x + \pi) = f(x)$, ve Fourierovu řadu. Funkce $f(x)$ je zřejmě sudá a proto $b_n = 0$ pro všechna n . Stačí tedy určit jen koeficienty a_n . Využitím známé trigonometrické relace

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

dostaneme postupně

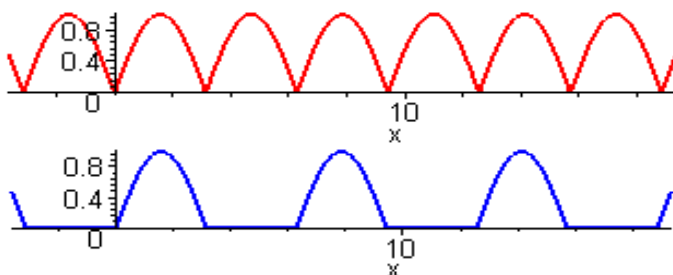
$$a_n = \frac{2}{p} \int_0^p \sin x \cos nx \, dx = \frac{1}{p} \int_0^p [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] \, dx = \frac{1}{p} \left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1} \right]_0^p$$

$$a_n = \frac{1}{p} \left[\frac{\cos np + 1}{n+1} - \frac{\cos np + 1}{n-1} \right] = -\frac{2}{p} \frac{\cos np + 1}{(n+1)(n-1)} = -\frac{2}{p} \frac{1 + (-1)^n}{(n+1)(n-1)},$$

tj. $a_{2m} = -\frac{4}{p} \frac{1}{(2m+1)(2m-1)}$ a $a_{2m+1} = 0$ pro $m = 0, 1, 2, \dots$. Dospěli jsme tedy k závěru, že

dvoucestné usměrnění má Fourierův rozvoj

$$f(x) = \frac{2}{p} - \frac{4}{p} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2mx}{(2m+1)(2m-1)} \quad (7.4)$$



Obrázek 7.3: Dvoucestné a jednocestné usměrnění

Ukázka 7.5: Známe-li výsledek předchozí ukázky, pak k určení Fourierova rozvoje funkce $f(x) = \cos x$, $0 < x < p$, $f(x+p) = f(x)$ nám poslouží **Věta 7.6**. Derivováním (7.4) člen po členu dostaneme ihned

$$f(x) = \frac{8}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{(2n+1)(2n-1)}$$

Ukázka 7.6: Snadno též získáme Fourierův rozvoj tzv. jednocestného usměrnění (viz **Obrázek 7.3**), které je určeno relací $f(x) = \frac{1}{2}(|\sin x| + \sin x) = \max(0, \sin x)$. Využitím (7.4) dostaneme bezprostředně

$$f(x) = \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{(2n+1)(2n-1)}.$$

7.2 Souvislost Fourierovy transformace s Fourierovou řadou

V předchozí kapitole jsme uvedli, že každou periodickou funkci určitých vlastností lze rozvinout ve Fourierovu řadu (7.1) nebo (7.2), přičemž $T > 0$ je příslušná perioda a koeficienty a_n, b_n se určí z (7.3). Zbývá tedy rozšířit popsaný postup i na neperiodické funkce. Položme za tím účelem $\omega T = 2p$. Z této relace vyplývá, že čím větší je perioda T , tím hustěji jsou rozloženy frekvence trigonometrických funkcí vystupujících v (7.1), (7.2). Neperio-

dickou funkci, která musí též splňovat určité vlastnosti, tedy můžeme považovat za mezní případ periodické funkce, jejíž perioda vzrůstá nade všechny meze. Dosaďme v (7.1), (7.2) za koeficienty a_n, b_n integrály (7.3) a provedme limitní přechod pro $T \rightarrow \infty$. Pak nekonečné řady přejdou v integrál, takže ve vzniklých relacích se objeví dvojnásobný integrál. Přesné provedení těchto úvah přesahuje rámec skript (podrobnosti lze nalézt např. v [19], [28]) a proto uvedeme jen výsledný *Fourierův integrál*

$$f(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j \omega t) dt \right] \exp(j \omega t) d\omega .$$

Jedná se vlastně o identitu platnou pro libovolnou funkci $f(t)$ jistých vlastností. Uvedený dvojnásobný integrál můžeme rozložit na dva jednoduché integrály, tak jak je to naznačeno červenými závorkami. Dospějeme tak k definici přímé i zpětné Fourierovy transformace.

Před vlastní definicí Fourierovy transformace si zavedme ještě dva důležité pojmy. Řekneme, že funkce $f(t)$ je *lokálně integrovatelná*, eventuálně *absolutně integrovatelná*, jestliže platí první z nerovností

$$\int_a^b |f(t)| dt < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

pro každý konečný interval $\langle a, b \rangle$, eventuálně jestliže platí druhá z uvedených nerovností.

Definice 7.2: Nechť je funkce $f(t)$ absolutně integrovatelná. Pak relace

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j \omega t) dt \quad \text{a} \quad f(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j \omega t) d\omega \quad (7.5)$$

nazýváme postupně *přímou* a *zpětnou Fourierovou transformací*. Funkce $f(t)$ je *předmětem* a funkce $F(\omega)$ *obrazem* Fourierovy transformace. Obě funkce jsou komplexní funkce reálné proměnné. Fourierovu transformaci budeme symbolicky označovat buď $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ jako u Laplaceovy transformace nebo $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$, pokud by mohlo dojít k záměně.

V případě sudých funkcí, kdy $f(-x) = f(x)$, můžeme (7.5) zjednodušit na

$$F(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad f(t) = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} F(\omega) \cos \omega t d\omega$$

a mluvíme o *Fourierově kosinové transformaci*. V případě lichých funkcí, kdy $f(-t) = -f(t)$ dostaneme *Fourierovu sinovou transformaci*

$$F(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt, \quad f(t) = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} F(\omega) \sin \omega t d\omega .$$

7.3 Souvislost Fourierovy transformace s transformací Laplaceovou

Kromě jednostranné Laplaceovy transformace, o níž bylo pojednáno v kapitole 6, existuje ještě dvoustranná Laplaceova transformace definovaná relacemi

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt, \quad f(t) = \frac{1}{2p} \int_{g-j\infty}^{g+j\infty} F(p) \exp(pt) dp .$$

Přitom předpokládáme, že předmět $f(t)$ je funkce lokálně integrovatelná a že lze volit indexy růstu s_1 a s_2 tak, aby pro $s_1 < \operatorname{Re} p < s_2$ byl integrál $F(p)$ konvergentní. Je-li funkce $f(t)$ navíc absolutně integrovatelná, je také lokálně integrovatelná a pro $p = j\omega$ obdržíme výše uvedené relace (7.5). Tedy množina, na níž je definován dvoustranný Laplaceův obraz, obsahuje imaginární osu. Povšimněme si ještě, že absolutně integrovatelná funkce musí pro $t = \pm \infty$ vymizet, zatímco lokálně integrovatelná funkce zde může nabývat nenulových hodnot.

7.4 Vlastnosti Fourierovy transformace

Abychom mohli Fourierovu transformaci efektivně využívat, uveďme si nyní ve formě tří vět některé její základní vlastnosti. Tvzení první z těchto vět se dá očekávat vzhledem k poznámce na konci předchozího odstavce a značné podobnosti přímé a zpětné Fourierovy transformace. Druhá věta bude obsahovat základní pravidla gramatiky Fourierovy transformace a třetí bude vyjadřovat tzv. *Parsevalovu rovnost*.

Věta 7.8: Nechť je funkce $f(t)$ absolutně integrovatelná. Pak $F(\omega) \in C(\mathbf{R})$, $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} F(\omega) = 0$.

Věta 7.9: Označme $n \in \mathbf{N}$, $r \in \mathbf{R}$, $a, b \in \mathbf{C}$. Předpokládejme, že funkce $f(t)$ a $g(t)$ jsou absolutně integrovatelné, případně že platí $\int_{-\infty}^{\infty} |t^n f(t)| dt < \infty$. Pak

	věta o	předmět	obraz
1°	<i>linearitě</i>	$a f(t) + b g(t)$	$a F(\omega) + b G(\omega)$
2°	<i>podobnosti</i>	$f(rt)$	$\frac{1}{r} F\left(\frac{\omega}{r}\right)$
3°	<i>posunutí předmětu</i>	$f(t - r)$	$\exp(-j r \omega) F(\omega)$
4°	<i>posunutí obrazu</i>	$\exp(j r t) f(t)$	$F(\omega - r)$
5°	<i>derivaci předmětu</i>	$f^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$
6°	<i>derivaci obrazu</i>	$t^n f(t)$	$j^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$
7°	<i>integraci předmětu</i>	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} F(\omega)$
8°	<i>konvoluci předmětu</i>	$f(t) * g(t)$	$F(\omega) G(\omega)$
9°	<i>konvoluci obrazu</i>	$f(t) g(t)$	$F(\omega) * G(\omega)$

Věta 7.10: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$

7.5 Některé aplikace

7.5.1 Speciální impulzy

Nejprve se budeme zabývat funkcí, která se v technické praxi často vyskytuje, neboť s její pomocí můžeme vyjádřit hustotu pravděpodobnosti normálního (Laplaceova-Gaussova) či logaritmicko-normálního rozdělení, Gaussův zákon chyb a pod.

Ukázka 7.7: Určeme Fourierův obraz funkce $f(t) = \exp(-a^2 t^2)$, kde $a > 0$ je dané číslo.

V dalším budeme potřebovat znát hodnotu integrálu

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2 t^2) dt = 2 \int_0^{\infty} \exp(-a^2 t^2) dt$$

a proto si jej nejprve spočítáme. Protože se tento integrál dá jen ztěžít určit klasickými prostředky, určíme jej pomocí dvojného integrálu. Počítejme proto postupně

$$P = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-a^2(x^2 + y^2)) dx dy = 2 \int_0^{\infty} \exp(-a^2 x^2) dx \cdot 2 \int_0^{\infty} \exp(-a^2 y^2) dy = I^2.$$

Vzhledem k tomu, že integrační oblastí integrálu P je první kvadrant, můžeme P spočítat též jako dvojný integrál pomocí transformace do polárních souřadnic $x = r \cos j$, $y = r \sin j$, tj.

$$P = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \exp(-a^2 r^2) r dr dj = \{\text{subst. } s = a^2 r^2\} = \frac{P}{a^2} \int_0^{\infty} \exp(-s) ds = \frac{P}{a^2}.$$

Porovnáním tedy přicházíme k výsledku $I = \sqrt{P} a^{-1}$, který potvrzuje, že funkce $f(t)$ je absolutně integrovatelná a můžeme ji proto transformovat.

Nyní již může určit obraz $F(w)$. Podle definice platí

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2 t^2) \exp(-j w t) dt = \exp\left(-\frac{w^2}{4a^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-a^2 \left(t + \frac{jw}{2a^2}\right)^2\right) dt.$$

Protože funkce $\exp(-a^2 z^2)$ je v celé Gaussově rovině holomorfní, musí být podle Cauchyovy věty její integrál podél libovolné Jordanovy křivky G nulový. Křivku G musíme zvolit tak, aby obsahovala hledaný integrál a aby eventuální další integrály byly buď známé nebo konvergovaly k nule. Zvolíme za ni tedy obvod obdélníka, jehož dolní strana o délce $2R$ leží na reálné ose symetricky vzhledem k počátku a druhá strana má délku $s = w/(2a^2)$. Integrál podél kladně orientované křivky G vyjádříme jako součet čtyř integrálů přes jednotlivé strany obdélníka. Dostaneme tak

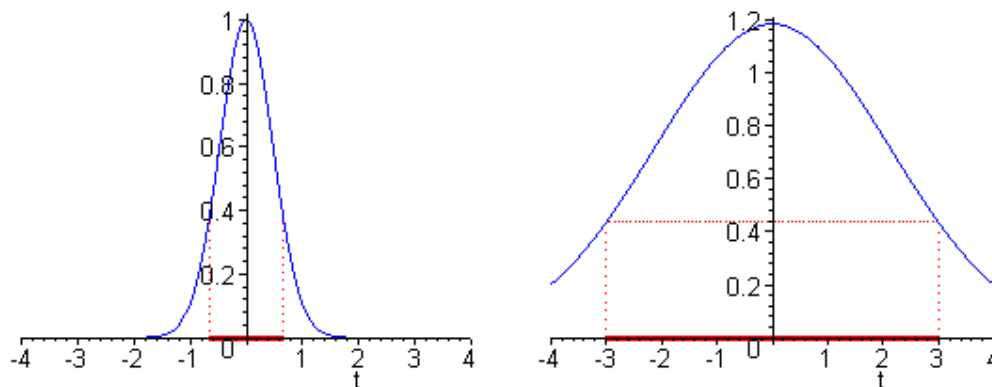
$$\int_{-R}^R \exp(-a^2 x^2) dx + j \int_0^s \exp(-a^2 (R+jy)^2) dy + \int_R^{-R} \exp(-a^2 (x+js)^2) dx + j \int_s^0 \exp(-a^2 (-R+jy)^2) dy = 0$$

Přechodem k limitě pro $R \rightarrow \infty$ zjistíme, že první integrál je roven výše spočítanému integrálu I , druhý a čtvrtý integrál konverguje k nule a třetí integrál hledáme. Celkem tedy

$$F(w) = \frac{\sqrt{P}}{a} \exp\left(-\frac{w^2}{4a^2}\right).$$

Fourierův obraz funkce $f(t)$ určíme ještě druhým způsobem. Funkce $f = f(t)$ zřejmě vyhovuje diferenciální rovnici $f' = -2 a^2 t f$. Transformací této rovnice získáme obrazovou diferenciální rovnici $2 a^2 F' = -w F$, kterou lze řešit separací proměnných. Vyřešením této rovnice obdržíme $F(w) = c \exp(-w^2/4a^2)$. Integrační konstantu c určíme snadno z počáteční podmínky, neboť podle definice Fourierovy transformace platí $F(0) = I$. Dospěli jsme tedy ke stejnému výsledku jako výše.

Proveďme si nyní analýzu dosaženého výsledku. Za šířku impulzu považujeme délku intervalu, během něhož funkce neklesnou pod jednu e-tinu, tj. pod asi 36.7879 % své maximální hodnoty. V našem případě pokles funkce $f(t)$ pod tuto hodnotu nastává v bodech $t_1 = -1/a$, $t_2 = 1/a$, takže šířka impulzu je $\Delta t = t_2 - t_1 = 2/a$ a pokles funkce $F(w)$ se realizuje v bodech $w_1 = -2a$ a $w_2 = 2a$, takže šířka obrazového impulzu je $\Delta w = w_2 - w_1 = 4a$. Z tohoto výsledku vidíme ihned že součin $\Delta t \times \Delta w = 8$ je konstantní a proto šířka obrazového impulzu je tím větší, čím kratší je předmětový impulz a naopak. Nemůžeme proto dosáhnout situace, kdy oba impulzy jsou buď současně velice krátké nebo současně velice dlouhé. Průběh předmětu a obrazu znázorňuje **Obrázek 7.4** modře, délky impulzů jsou zde vyznačeny červeně.



Obrázek 7.4: Průběh funkcí $f(t)$ a $F(w)$ z ukázky 8.7

Již jsme výše podotkli, že Fourierův obraz $F(w)$ je komplexní funkcí reálné proměnné w , která v rovině (x, y) reprezentuje křivku tzv. **frekvenční charakteristiku**. V našem případě nabývá funkce $F(w)$ jen reálných hodnot a proto je frekvenční charakteristikou úsečka ležící na reálné ose proběhnutá dvakrát v opačných směrech, která pro $w = -\infty$ vychází z počátku, pro $w = 0$ se v bodě $x = \sqrt{p/a}$, $y = 0$ otáčí zpět a navrátí se do počátku při $w = \infty$.

Nyní prošetříme dva z impulzů, které byly studovány v odstavci 6.5.1. Trojúhelníkový impulz probereme velice důkladně, obdélníkový impulz pak jen zběžně.

Ukázka 7.8: V odstavci 6.5.1 jsme odvodili Laplaceův obraz obecného trojúhelníkového impulzu. Uvažujme nyní symetrický trojúhelníkový impulz, jehož střed umístíme do počátku souřadnic, tj. ve zmíněném obecném impulzu položíme $t_1 = -T$, $t_2 = 0$, $t_3 = T$. Pak podle 6.5.1 platí $f(t) = [\psi(t+T) - 2\psi(t) + \psi(t-T)] / T = \psi(1 - |t|/T)$, kde $\psi(t) = t\eta(t)$ je identická funkce. Obraz tohoto impulzu můžeme určit čtyřmi způsoby.

První způsob je založen na užití definičního integrálu Fourierovy transformace.

Druhý způsob vychází z faktu, že vyšetřovaný impulz je sudou funkcí a proto můžeme aplikovat vzorec pro kosinovou Fourierovu transformaci. Využitím integrace per partes pak postupně dostaneme

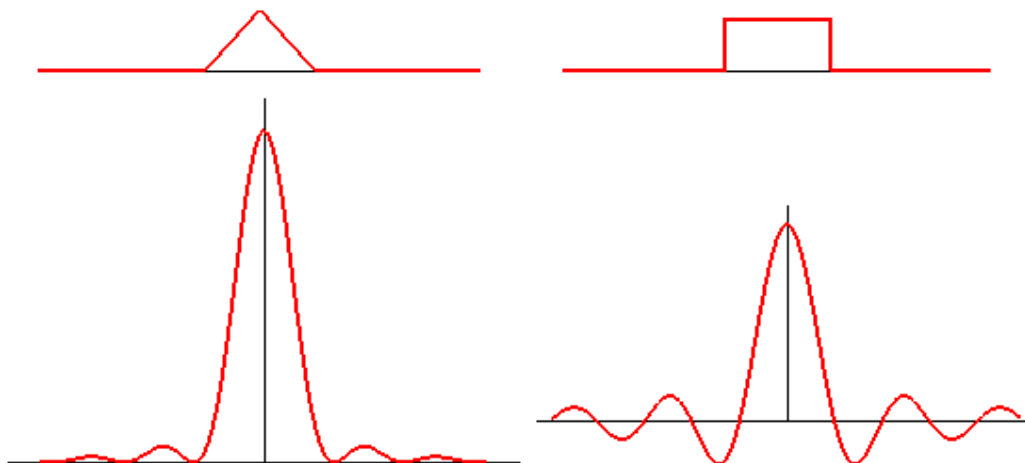
$$F(w) = 2 \int_0^{\infty} y(1 - \frac{t}{T}) \cos wt \, dt = 2 \int_0^T (1 - \frac{t}{T}) \cos wt \, dt = \frac{2}{w^2 T} (1 - \cos wT) = T \left(\frac{\sin \frac{wT}{2}}{\frac{wT}{2}} \right)^2.$$

Třetí způsob spočívá ve využití výsledku odstavce 6.5.1, kde byl určen Laplaceův obraz obecného trojúhelníkového impulzu. Pro symetrický impulz pak při substituci $p = jw$ platí

$$L\{f(t)\} = T \left(\frac{\sinh \frac{pT}{2}}{\frac{pT}{2}} \right)^2 \Rightarrow F\{f(t)\} = T \left(\frac{\sin \frac{wT}{2}}{\frac{wT}{2}} \right)^2.$$

Čtvrtý způsob tkví ve využití Diracovy zobecněné funkce. Vyšetřovaný impulz je popsán vhodnou lineární kombinací identické funkce $\psi(t) = t \eta(t)$. Dvojnásobným derivováním této funkce podle kapitoly 6.4 dostaneme $\psi'(t) = \eta(t) + t \mathbf{d}(t) = \eta(t)$, $\psi''(t) = \mathbf{d}(t)$. Aplikujeme-li tento výsledek na impulz $f(t)$ dospějeme k relaci $f''(t) = [\mathbf{d}(t+T) - 2 \mathbf{d}(t) + \mathbf{d}(t-T)] / T$. Tuto diferenciální rovnici nyní pomocí gramatických pravidel Fourierovy transformace převedeme na jednodušší tvar $(j\omega)^2 F = [\exp(j\omega T) - 2 + \exp(-j\omega T)] / T$, odkud pak osamostatněním F získáme $F = 2(1 - \cos \omega T) / (\omega^2 T)$. Přejdeme-li nyní k polovičnímu úhlu, obdržíme stejný výsledek jako u předchozích způsobů.

Obrázek 7.5 ilustruje průběh frekvenční funkce vyšetřovaného impulzu. Zdůrazněme, že prostřední vlna je zdaleka nejmohutnější, neboť představuje asi 90.3 % celkové plochy nacházející se mezi vodorovnou osou a frekvenční funkcí. Na další dvě dvojice vln pak připadá dvakrát 2.4% a dvakrát 0.8%. Za šířku obrazového impulzu tedy můžeme považovat délku hlavní vlny, která činí $\Delta\omega = 4p/T$. Šířka trojúhelníkového impulzu je $\Delta t = 2T$. Celkem tedy $\Delta t \Delta\omega = 8p$.



Obrázek 7.5: Trojúhelníkový a obdélníkový impulz a jejich frekvenční funkce

Ukázka 7.9: V odstavci 6.5.1 byl odvozen Laplaceův obraz obecného obdélníkového impulzu. Umístíme střed tohoto impulzu do počátku a položíme $p = j\omega$. Dostaneme postupně

$$f(t) = h(t+T) - h(t-T) \quad \Rightarrow \quad L\{f(t)\} = 2 \frac{\sinh pT}{p} \quad \Rightarrow \quad F\{f(t)\} = 2 \frac{\sin \omega T}{\omega}.$$

Šířka předmětového či obrazového impulzu je $\Delta t = 2T$, resp. $\Delta\omega = 2p/T$, takže $\Delta t \Delta\omega = 4p$. Průběh tohoto impulzu včetně jeho frekvenční funkce znázorňuje **Obrázek 7.5**.

Frekvenční funkce studovaných impulzů jsou reálné a odpovídající frekvenční charakteristiky jsou proto dvojnásobně proběhnuté úsečky ležící na vodorovné ose. Následná ukázka ilustruje jiný tvar frekvenční charakteristiky.

Ukázka 7.10: Vyšetřeme funkci $f(t) = \exp(-at) \eta(t)$. Vyjděme z definice a postupně určíme

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-at) h(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_0^{\infty} \exp(-(a + j\omega)t) dt = \frac{1}{a + j\omega} = \frac{a - j\omega}{a^2 + \omega^2}.$$

V tomto případě frekvenční funkce nabývá komplexních hodnot $z = x + jy$ závislých na reálném parametru ω . Platí tedy $x = a / (a^2 + \omega^2)$, $y = -\omega / (a^2 + \omega^2)$. Vyloučením parametru ω z těchto vztahů, získáme po úpravě relaci $a x^2 + a y^2 - x = 0$, která reprezentuje kružnici

$$\left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4a^2} \quad \text{tj.} \quad \left|z - \frac{1}{2a}\right| = \frac{1}{2a}.$$

Tato kružnice vychází při $w = -\infty$ z počátku souřadnic, probíhá horním obloukem až do průsečíku s reálnou osou, kterého dosáhne při $w = 0$, a pak se vrací dolním obloukem zpět do počátku, jehož dosáhne při $w = \infty$.

7.5.2 Diferenciální rovnice

Fourierovu transformaci lze též s úspěchem využít při řešení diferenciálních rovnic. Nejprve nalezneme tvar šíření tepla v nekonečné tyči. V další ukázce pak uvedeme, jaké nebezpečí se v tomto způsobu řešení může skrývat.

Ukázka 7.11: *Nekonečně tenkou a nekonečně dlouhou tyč ztotožníme s osou x . Vedení tepla v této tyči je popsáno funkcí $u = u(x, t)$ vyhovující diferenciální úloze*

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u(x, 0) = g(x), \quad t \geq 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

přičemž konstanta a a počáteční rozložení $g(x)$ jsou zadány. Danou úlohu nyní zobrazíme pomocí Fourierovy transformace, tentokrát vzhledem k proměnné x . Pro obraz $U = U(\omega, t)$ $\leftrightarrow u = u(x, t)$ dostaneme

$$a(j\omega)^2 U = \frac{dU}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{U} = -a\omega^2 dt \quad \Rightarrow \quad U = G \exp(-a\omega^2 t),$$

kde $G = G(x)$ je obraz počátečního rozložení. Podle ukázky 8.7 je $\exp(-a\omega^2 t) \leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$

Ukázka 7.12: *Nalezneme obecné řešení diferenciální rovnice $y'' + t y' + y = 0$. Aplikací Fourierovy transformace získáme pro obraz Y relaci $-w^2 Y + j(j w Y)' + Y = 0$, kterou lze zjednodušit na $y' + w Y = 0$. Vyřešením této rovnice obdržíme $Y = c \exp(-w^2/2)$. K získání zpětné transformace využijeme výsledku ukázky 7.7. Dostaneme tak $y = c \exp(-t^2/2) / \sqrt{2\pi}$. Získaná funkce je sice řešením výchozí diferenciální rovnice druhého řádu, ale není to obecné řešení neboť neobsahuje dvě nezávislé integrační konstanty. Dosazením do zadané rovnice se můžeme přesvědčit, že její obecné řešení má tvar*

$$y = c_1 \exp(-\frac{1}{2}t^2) + c_2 \frac{g(t)}{g'(t)}, \quad \text{kde} \quad g(t) = \int_0^t \exp(\frac{1}{2}t^2) dt.$$

Rozpor spočívá v tom, že druhé fundamentální řešení není absolutně integrovatelné a proto je Fourierova transformace nemohla zachytit.

7.6 Slovníček Fourierovy transformace

Bez odvozování si uvedeme krátký slovníček Fourierovy transformace. Tento slovníček můžeme využívat oběma směry. Abychom to vysvětlili, předpokládejme, že předmětu $f(t)$ je přiřazen obraz $F(\omega)$. Povšimneme-li si velké podoby formule pro přímou a zpětnou transformaci vidíme, že předmětu $F(t)$ musí být pak přiřazen obraz $2\pi f(-w)$.

$$\exp(-a^2 t^2) \quad \leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp(-\frac{w^2}{4a^2})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^2 + a^2} &\leftrightarrow \frac{p}{a} \exp(-a|w|) \\ \frac{1}{\sqrt{|t|}} &\leftrightarrow \sqrt{\frac{2p}{|w|}} \\ \frac{\operatorname{sgn} t}{\sqrt{|t|}} &\leftrightarrow -j \sqrt{\frac{2p}{|w|}} \operatorname{sgn} w \\ \frac{\sin at}{\sqrt{|t|}} &\leftrightarrow j \sqrt{\frac{p}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{|w-a|}} - \frac{1}{\sqrt{|w+a|}} \right) \\ \frac{\cos at}{\sqrt{|t|}} &\leftrightarrow \sqrt{\frac{p}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{|w-a|}} + \frac{1}{\sqrt{|w+a|}} \right) \\ \frac{\exp(-a|t|)}{\sqrt{|t|}} &\leftrightarrow \sqrt{2p} \frac{\sqrt{w^2 + a^2} + a}{w^2 + a^2} \\ \frac{\exp(-a/\sqrt{|t|})}{\sqrt{|t|}} &\leftrightarrow \sqrt{\frac{2p}{|w|}} (\cos \sqrt{2p|w|} - \sin \sqrt{2p|w|}) \\ \frac{\sin at}{t} &\leftrightarrow \begin{cases} p & \text{pro } |w| < a \\ 0 & \text{pro } |w| \geq a \end{cases} \\ \sin at^2 &\leftrightarrow \sqrt{\frac{p}{a} \cos\left(\frac{w^2}{2a} + \frac{p}{4}\right)} \\ \cos at^2 &\leftrightarrow \sqrt{\frac{p}{a} \cos\left(\frac{w^2}{2a} - \frac{p}{4}\right)} \\ \frac{1}{\cosh at} &\leftrightarrow \frac{p}{a} \frac{1}{\cosh \frac{p}{2a} t} \end{aligned}$$

7.7 Příklady ke kapitole 7

Příklad 7.1: Najděte Fourierovu řadu k funkci $f(x) = x^2$, $x \in \langle -p, p \rangle$.

Příklad 7.2: Najděte kosinový rozvoj funkce $f(x) = 1 - x$ pro $x \in \langle 0, 2 \rangle$.

Příklad 7.3: Spočtěte sinový rozvoj funkce $f(x) = 1 - x$ pro $x \in \langle 0, 2 \rangle$.

Výsledky viz kap. 9

8 Transformace Z

Cíle kapitoly: Kapitola je věnována základní problematice transformace Z, která slouží k vyšetřování jevů popsaných posloupnostmi čísel a kterou lze chápat jako diskrétní analog Laplaceovy transformace.

8.1 Úvod

Transformace Z není integrální transformací v pravém slova smyslu (jako je např. Laplaceova či Fourierova transformace), kdy předmětem je po částech spojitá funkce. Předmětem transformace Z je funkce celočíselného argumentu a tedy vlastně číselná posloupnost. Členy této posloupnosti bývají hodnoty nějaké fyzikální veličiny zadané buď v určitých časových okamžicích nebo ve vybraných bodech prostoru. Přitom není důležité, zda tyto hodnoty byly získány např. vzorkováním vyšetřované veličiny či diskretizací analyzovaného fyzikálního pole. Obrazem transformace Z je jistá komplexní funkce, jejíž studium umožňuje vyšetřovat vlastnosti zadané diskrétní veličiny. Tak jako je Fourierova řada diskrétní variantou Fourierovy transformace, lze transformaci Z považovat za diskrétní analog transformace Laplaceovy. Proto je transformace Z určena jako jedna z metod k řešení lineárních diferencních rovnic popisujících rozmanité diskrétní systémy (např. při zpracování signálů, při numerickém řešení fyzikálních polí, v oblasti komunikací apod.). Naproti tomu Laplaceova či Fourierova transformace usnadňuje mimo jiné řešení lineárních diferencálních rovnic

Technika transformace Z není tak nová, jak by se na první pohled mohlo zdát. Již někdy kolem roku 1730 zavedl De Moivre v teorii pravděpodobnosti velice blízký pojem *vytvorující funkce*.

8.2 Přímá transformace Z

Definice 8.1: *Transformací Z* či *Z-transformací* posloupnosti $\{f_n\} \equiv \{f_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ nazýváme funkci $F(z)$ komplexní proměnné, která je definována řadou

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{z^n} \quad (8.1)$$

Zadanou posloupnost nazýváme *předmětem* transformace Z a komplexní funkci *obrazem* transformace Z, někdy též *Z-obrazem*. Z-transformaci budeme označovat buď $\{f_n\} \leftrightarrow F(z)$, podobně jako u předchozích transformací, nebo $F(z) = Z\{f_n\}$, pokud by mohlo dojít k omylu.

V definici předpokládáme, že uvedená řada konverguje pro $|z| > R > 0$. Podaří-li se nám tuto řadu sečíst, obdržíme holomorfní funkci, která má v bodě $z = \infty$ odstranitelnou singularitu, neboť $F(\infty) = f_0 < \infty$. Jedná se v podstatě o Laurentův rozvoj funkce v okolí bodu $z = \infty$. Zmíněná komplexní funkce však může být holomorfní v širší oblasti, než je obor konvergence řady, pak za Z-transformaci budeme považovat funkci v takto rozšířeném smyslu. Demonstrujme tuto situaci na dvou ukázkách.

Ukázka 8.1: *Vyšetřeme nejprve jednoduchou posloupnost $\{1, 0, 0, \dots\}$, jejíž obecný člen můžeme zapsat $f_n = d_{n0}$ (Kronecker). Pak zřejmě $F(z) = 1$. Tato funkce je holomorfní v celé komplexní rovině.*

Ukázka 8.2: *Zabývejme se nyní posloupností $\{1, c, c^2, c^3, \dots\}$, s obecným členem $f_n = c^n$, přičemž $c \in \mathbf{C}$. Na základě definice a následnou úpravou dostaneme postupně*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{c}{z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{c}{z}} = \frac{z}{z-c}.$$

Protože jsme využili formuli pro součet geometrické řady, jejíž kvocient musí být v absolutní hodnotě menší než jedna, uvedená řada konverguje jen pro body $|z| > |c|$. Získaná komplexní funkce má však smysl pro všechna $z \neq c$ a proto je obraz definován v celé komplexní rovině s výjimkou bodu $z = c$. Předložená ukázka v sobě obsahuje celou škálu konkrétních úloh (např. i předchozí ukázku) a proto si uveďme některé speciální případy a případy z nich odvozené:

$$\begin{aligned} c=1 &\Rightarrow f_n = 1 &\Rightarrow \mathbf{a} = \{1, 1, 1, 1, \mathbf{L}\} &\Rightarrow F(z) = \frac{z}{z-1} \\ c=-1 &\Rightarrow f_n = (-1)^n &\Rightarrow \mathbf{b} = \{1, -1, \mathbf{K}1, -1, \mathbf{L}\} &\Rightarrow F(z) = \frac{z}{z+1} \\ c=j &\Rightarrow f_n = j^n &\Rightarrow \mathbf{c} = \{1, j, -1, -j, \mathbf{L}\} &\Rightarrow F(z) = \frac{z}{z-j} \\ c=-j &\Rightarrow f_n = (-j)^n &\Rightarrow \mathbf{d} = \{1, -j, -1, j, \mathbf{L}\} &\Rightarrow F(z) = \frac{z}{z+j} \\ \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &\Rightarrow f_n = \frac{1}{2}[1+(-1)^n] &\Rightarrow \mathbf{e} = \{1, 0, 1, 0, \mathbf{L}\} &\Rightarrow F(z) = \frac{z^2}{z^2-1} \\ \frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b}) &\Rightarrow f_n = \frac{1}{2}[1-(-1)^n] &\Rightarrow \mathbf{f} = \{0, 1, 0, 1, \mathbf{L}\} &\Rightarrow F(z) = \frac{z}{z^2-1} \\ \frac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d}) &\Rightarrow f_n = \frac{1}{2}[j^n+(-j)^n] &\Rightarrow \mathbf{g} = \{1, 0, -1, 0, \mathbf{L}\} &\Rightarrow F(z) = \frac{z^2}{z^2+1} \\ \frac{1}{2j}(\mathbf{c}-\mathbf{d}) &\Rightarrow f_n = \frac{1}{2j}[j^n-(-j)^n] &\Rightarrow \mathbf{h} = \{0, 1, 0, -1, \mathbf{L}\} &\Rightarrow F(z) = \frac{z}{z^2+1} \\ \frac{1}{2}(\mathbf{e}+\mathbf{g}) &\Rightarrow f_n = \frac{1}{4}[1+(-1)^n](1+j^n) &\Rightarrow \{1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \mathbf{L}\} &\Rightarrow F(z) = \frac{z^4}{z^4-1} \\ \frac{1}{2}(\mathbf{f}+\mathbf{h}) &\Rightarrow f_n = \frac{1}{4}[1-(-1)^n](1-j^{n-1}) &\Rightarrow \{0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \mathbf{L}\} &\Rightarrow F(z) = \frac{z^3}{(z^4-1)} \end{aligned}$$

Předmětem Laplaceovy transformace je funkce, která splňuje jisté tři vlastnosti. Podobné vlastnosti, avšak v diskrétním tvaru, musí tedy splňovat i předmět transformace Z . Přitom si uvědomme, že první vlastnost Laplaceovy transformace, kdy předmět musí mít derivaci spojitou po částech, zde ztrácí smysl a že druhá vlastnost, kdy předmět musí nabývat nulových hodnot při $t < 0$, je splněna již volbou indexu n . Takže příslušné tvrzení pro transformaci Z je poněkud jednodušší.

Věta 8.1: *Nechť $|f_n| \leq M \times \exp(sn)$, $n = 0, 1, \dots, s$, $M \in \mathbf{R}$, $M > 0$. Pak posloupnost $\{f_n\}$ je předmětem transformace Z . V tomto případě řada (8.1) konverguje pro $|z| > R = \exp(s)$ a funkce $F(z)$ je zde holomorfní.*

Říkáme také, že posloupnost $\{f_n\}$ je *exponenciálního řádu*. Dříve než formulujeme gramatiku transformace Z zaveďme si některé důležité pojmy.

Definice 8.2: *Konvolucí posloupností $\{f_n\}$ a $\{g_n\}$ rozumíme posloupnost*

$$\{f_n * g_n\} = \left\{ \sum_{k=0}^n f_k g_{n-k} \right\}.$$

Povšimněme si, že pojem konvoluce posloupností vznikl diskretizací pojmu konvoluce funkcí (viz odstavec 6.2), kdy integrace je nahrazena sumací, v níž roli integrační proměnné t hraje sčítací index k a roli vnější proměnné t index n . Proto i konvoluce posloupností je operací komutativní, asociativní a distributivní.

Ukázka 8.3: Spočtěme diskrétní konvoluce několika jednoduchých posloupností:

$$\begin{aligned} f_n = 1, \quad g_n = 1 &\Rightarrow 1 * 1 = \sum_{k=0}^n 1 = n+1 \\ f_n = n, \quad g_n = 1 &\Rightarrow n * 1 = \sum_{k=0}^n k = \frac{1}{2} n(n+1) \\ f_n = f_n, \quad g_n = 1 &\Rightarrow f_n * 1 = \sum_{k=0}^n f_k = s_n \quad \text{částečný součet} \\ f_n = f_n, \quad g_n = n &\Rightarrow f_n * n = \sum_{k=0}^n (n-k) f_n = n(f_n * 1) - (n f_n) * 1 \end{aligned}$$

Definice 8.3: Nechť je dána posloupnost $\{f_n\}$. Pak posloupnost

$$\{f_{n+k}\} = \{f_k, f_{k+1}, \mathbf{L}\} \quad \text{resp.} \quad \{f_{n-k}\} = \{0, \mathbf{L}, 0, f_0, f_1, \mathbf{L}\}$$

nazýváme *posloupností posunutou vlevo*, resp. *posloupností posunutou vpravo*. Podotkneme, že u posloupnosti posunutá vpravo jsme přidali k nul.

Pojmu derivace funkce odpovídá v terminologii diskrétních hodnot pojem diference.

Definice 8.4: : Nechť je dána posloupnost $\{f_n\}$. Pak výraz $\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$ nazýváme (*první diferencí*) a výraz $\Delta^k f_n = \Delta(\Delta^{k-1} f_n)$ *k-tou diferencí*.

Ukázka 8.4: Spolu s danou posloupností si uveďme i posloupnost jejích prvních, druhých a třetích diferencí:

$$\begin{aligned} \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}, \quad \text{tj.} \quad f_n = n^2, & \quad \text{zadaná posloupnost,} \\ \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}, \quad \text{tj.} \quad f_n = 2n+1, & \quad \text{posloupnost prvních diferencí,} \\ \{2, 2, 2, 2, \dots\}, \quad \text{tj.} \quad f_n = 2, & \quad \text{posloupnost druhých diferencí,} \\ \{0, 0, 0, 0, \dots\}, \quad \text{tj.} \quad f_n = 0, & \quad \text{posloupnost třetích diferencí.} \end{aligned}$$

Věta 8.2: Nechť $F(z) = Z\{f_n\}$ a předpokládejme, že níže uvedené limity existují. Pak platí:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) &= f_0 && \text{počáteční hodnota} \\ \lim_{z \rightarrow 1} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \\ \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) F(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n && \text{koncová hodnota} \end{aligned}$$

Věta 8.3: Nechť $F(z) = Z\{f_n\}$, $G(z) = Z\{g_n\}$, $a, b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak

věta o	předmět	obraz
1° <i>linearitě</i>	$a f_n + b g_n$	$a F(z) + b G(z)$
2° <i>podobnosti</i>	$a^n f_n$	$F\left(\frac{z}{a}\right) \quad a \neq 0$
3° <i>posunutí vpravo</i>	f_{n-k}	$F(z) z^{-k}$
4° <i>posunutí vlevo</i>	f_{n+k}	$z^k \left[F(z) - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f_i}{z^i} \right]$
5° <i>derivaci obrazu</i>	$n f_n$	$-z F'(z)$

6°	<i>konvoluci předmětu</i>	$f_n * g_n$	$F(z) G(z)$
7°	<i>integraci obrazu</i>	$\frac{f_n}{n}$	$\int_z^\infty \frac{f(z)}{z} dz$
8°	<i>diferenci</i>	$\Delta^k f_n$	$(z-1)^k F(z) - z \sum_{i=0}^{k-1} \Delta^i f_0 (z-1)^{k-i-1}$
9°	<i>částečném součtu</i>	$\sum_{i=0}^n f_i$	$\frac{z}{z-1} F(z)$

Platnost uvedených gramatických a limitních vět prověříme na řadě příkladů, v nichž budeme předpokládat, že $b, c \in \mathbf{C}$.

Ukázka 8.5: Větu o linearitě aplikujeme na komplexní posloupnost definovanou svým n -tým členem $f_n = \cos nc$. Platí $f_n = (\exp(jnc) + \exp(-jnc))/2 = (\exp(jc))^n/2 + (\exp(-jc))^n/2$. Podle výsledku ukázky 8.2 tedy musí postupně platit

$$F(z) = \frac{1}{2} \frac{z}{z - \exp(jc)} + \frac{1}{2} \frac{z}{z - \exp(-jc)} = \frac{z(z - \cos c)}{z^2 - 2z \cos c + 1}.$$

Zaměníme-li nyní v předmětu i obrazu konstantu c za konstantu jc obdržíme ihned relaci

$$f_n = \cosh nc \quad \leftrightarrow \quad F(z) = \frac{z(z - \cosh c)}{z^2 - 2z \cosh c + 1}.$$

Ukázka 8.6: Větu o podobnosti uijeme při zobrazení posloupnosti $f_n = \exp(nb) \cos nc$. Platí $f_n = (\exp(b))^n \cos nc$ a proto podle předchozí ukázky a po zjednodušení

$$F(z) = \frac{z(z - \exp(b) \cos c)}{z^2 - 2z \exp(b) \cos c + \exp(2b)}.$$

Ukázka 8.7: Větu o posunutí vpravo ověříme na případě $f_n = \exp((n-k)c) = (\exp(c))^{n-k}$. Využijeme-li navíc výsledek ukázky 8.2, získáme ihned $F(z) = z^{1-k}/(z - \exp(c))$.

Ukázka 8.8: Větu o posunutí vlevo aplikujeme na $f_n = \exp((n+k)c) = (\exp(c))^{n+k}$. Pak

$$F(z) = \frac{z^{k+1}}{z - \exp(c)} - \sum_{i=0}^{k-1} z^{k-i} \exp(ic).$$

Ukázka 8.9: Větu o derivaci obrazu použijeme při transformaci funkce $f_n = n^2$. Vyjdeme z výsledku ukázky 8.2, podle níž platí $Z\{1\} = z/(z-1)$. Dvojí aplikací věty o derivaci obrazu dostaneme postupně

$$Z\{n\} = -z \frac{d}{dz} Z\{1\} = \frac{z}{(z-1)^2} \quad \Rightarrow \quad Z\{n^2\} = -z \frac{d}{dz} Z\{n\} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

Ukázka 8.10: Větu o konvoluci předmětu a větu o částečném součtu budeme verifikovat při zobrazení posloupnosti $f_n = n(n+1)$. Tuto posloupnost v závislosti na jejím vyjádření transformujeme trojím způsobem.

$$\begin{aligned}
1. \text{ způsob: } f_n = n^2 + n &\Rightarrow F(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} + \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{2z^2}{(z-1)^3}, \\
2. \text{ způsob: } f_n = n \cdot 2 &\Rightarrow F(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \frac{2z}{z-1} = \frac{2z^2}{(z-1)^3}, \\
3. \text{ způsob: } f_n = 2 \sum_{i=0}^n i &\Rightarrow F(z) = \frac{2z}{z-1} Z\{n\} = \frac{2z}{z-1} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{2z^2}{(z-1)^3}.
\end{aligned}$$

Ukázka 8.11: Větu o integraci obrazu ilustrujeme při určení součtu Leibnitzovy řady, o níž jsme se zmínili již v ukázce 5.7. Obecný člen f_n Leibnitzovy řady může zapsat ve tvaru podílu $f_n = g_n/n$, přičemž posloupnost g má tvar $g = \{0, -1, 1, -1, 1, \dots\}$ a v důsledku toho je obecný člen $g_n = (-1)^n \cdot d_{n0}$. Podle věty o posunutí vpravo a poté aplikací věty o integraci obrazu obdržíme postupně

$$G(z) = \frac{1}{z} \left(\frac{-z}{z+1} \right) = \frac{-1}{z+1} \quad \Rightarrow \quad F(z) = \int_z^\infty \frac{G(z)}{z} dz = \int_z^\infty \frac{dz}{z(z+1)} = \ln \frac{z}{z+1}.$$

Na základě druhé věty o limitě (viz **Věta 8.2**) pak máme

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \lim_{z \rightarrow 1} F(z) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{z \rightarrow 1} \ln \frac{z}{z+1} = \ln \frac{1}{2}.$$

Ukázka 8.12: Na posloupnosti $f_n = g_n/n$, přičemž $g_n = 1 - d_{n0}$ (Kronecker), ověříme platnost tvrzení o koncové hodnotě. Podobně, jako u předchozí ukázky, získáme podle věty o posunutí vpravo a o integraci obrazu postupně

$$G(z) = \frac{1}{z} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{z-1} \quad \Rightarrow \quad F(z) = \int_z^\infty \frac{G(z)}{z} dz = \int_z^\infty \frac{dz}{z(z-1)} = \ln \frac{z}{z-1}.$$

Spočtěme nyní

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \ln \frac{z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\ln \frac{z}{z-1}}{\frac{1}{z-1}} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-\frac{z-1}{z(z^2-1)}}{-\frac{1}{z^2-1}} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} = 0.$$

Při úpravách jsme užili l'Hospitalovo pravidlo pro určení limity neurčitěho výrazu typu $0 \cdot \infty$. Protože obecný člen f_n zadané posloupnosti zřejmě také konverguje k nule, můžeme tvrzení o koncové hodnotě považovat za prověřené.

8.3 Souvislost Z-transformace s Laplaceovou transformací

Za předpokladu, že posloupnost $\{f_n\}$ je předmětem Z-transformace uvažujme zobecněnou funkci

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n d(t-n), \quad \text{kde } d(t) \text{ je Diracova funkce.}$$

Pak pro Laplaceovu transformaci této funkce můžeme podle definice 7.11 formálně psát

$$\begin{aligned}
(f(t), \exp(-pt)) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n d(t-n), \exp(-pt) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (d(t-n), \exp(-pt)) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f_n (h'(t-n), \exp(-pt)) = p \sum_{n=0}^{\infty} f_n (h(t-n), \exp(-pt)) = p \sum_{n=0}^{\infty} f_n \int_n^{\infty} \exp(-pt) dt = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \exp(-pn) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{z^n} = Z\{f_n\},
\end{aligned}$$

přičemž jsme nakonec položili $z = \exp(p)$. V tomto smyslu lze Z-transformaci považovat za diskrétní variantu Laplaceovy transformace.

8.4 Zpětná transformace Z

Problematika zpětné Z-transformace je mnohem jednodušší, než problematika zpětné Laplaceovy transformace. **Věta 8.1** uvádí, že obraz $F(z)$ předmětu $\{f_n\}$ je funkce holomorfní v okolí nekonečně vzdáleného bodu. Zpětná Z-transformace je tedy dána koeficienty Laurentova rozvoje funkce $F(z)$ v okolí bodu $z = \infty$. Abychom mohli tuto situaci prošetřit, zavedme substituci $z = 1/z$. Tato substituce nám umožní získat rozvoj funkce $F(z)$, která je holomorfní v okolí nekonečně vzdáleného bodu, pomocí rozvoje funkce $G(z) = F(z)$, která je holomorfní v okolí nulového bodu. Dostaneme tak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{z^n} = F(z) = G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} \quad \Rightarrow \quad f_n = c_n,$$

přičemž, jak tvrdí Chyba! Nenalezen zdroj odkazů., musí pro kružnici K se středem v počátku platit

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \int_K \frac{G(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi j} \int_K F(z) z^{n+1} \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{2\pi j} \int_K F(z) z^{n-1} dz.$$

Dospěli jsme tak k definici:

Definice 8.5: Necht' $F(z)$ je funkce holomorfní v okolí bodu $z = \infty$. Necht' Γ je dostatečně velká kladně orientovaná kružnice $|z| = R$. Pak **zpětná transformace Z** je definována relací

$$f_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} F(z) z^{n-1} dz, \quad n = 0, 1, 2, \mathbf{L}.$$

Kružnice Γ musí být minimálně tak velká, aby obsahovala všechny eventuální singularity funkce $F(z)$.

K efektivnímu provádění zpětné Z-transformace potřebujeme odvodit nějaká snadněji použitelná výpočetní pravidla. Poměrně obecné pravidlo získáme z definiční relace přímé transformace. Za tím účelem vynásobme relaci (8.1) veličinou z^{n-1} a výsledný vztah n -krát zderivujeme. Obdržíme

$$\frac{d^n}{dz^n} [z^{n-1} F(z)] = \frac{d^n}{dz^n} \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{n-i-1} = (-1)^n \sum_{i=n}^{\infty} f_i (i-n+1)(i-n+2)\mathbf{L} i z^{-i-1},$$

přičemž jsme respektovali skutečnost, že prvních n členů nekonečné řady, vzhledem ke svým celočíselným faktorům, vymizelo. Vynásobíme-li vzniklou relací výrazem $(-1)^n z^{n+1}/n!$ a přejdeme k limitě pro $z \rightarrow \infty$, uvedená nekonečná řada se redukuje jen na absolutní člen. Dospěli jsme tak k prakticky použitelnému výsledku:

Věta 8.4: Necht' je funkce $F(z)$ holomorfní v okolí bodu $z = \infty$. Pak

$$f_n = \frac{(-1)^n}{n!} \lim_{z \rightarrow \infty} z^{n+1} \frac{d^n}{dz^n} [z^{n-1} F(z)].$$

V praxi se nejčastěji vyskytují obrazy ve tvaru racionální lomené funkce, kdy stupeň polynomu v čitateli nepřevyšuje stupeň polynomu ve jmenovateli (jinak by obraz nebyl holomorfní).

ní v nekonečnu). Racionální lomenou funkci tohoto typu lze rozložit na parciální zlomky doplněné o aditivní konstantu v případě, že stupně čitatele a jmenovatele jsou stejné. Zpětnou transformaci konstanty provedeme na základě ukázky 8.1 a pro parciální zlomky využijeme některou z následujících dvou vět.

Věta 8.5: $F(z) = \frac{1}{z^k}, \quad k = 0, 1, 2, \mathbf{L} \quad \Rightarrow \quad f_n = d_{nk} \quad (\text{Kronecker}).$

Věta 8.6: $F(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k}, \quad z_0 \neq 0, \quad k = 1, 2, 3, \mathbf{L} \quad \Rightarrow \quad f_n \equiv f_{kn} = \binom{n-1}{k-1} z_0^{n-k},$

přítom kombináčnÍ číslo je v případě $n < k$ rovno nule.

Pro snazší interpretaci poslední věty si uvedme tvar vzniklé posloupnosti:

$$\{0, \mathbf{L}, 0, 1, kz_0, \frac{1}{2}k(k+1)z_0^2, \frac{1}{6}k(k+1)(k+2)z_0^3, \mathbf{L}\},$$

v níž prvních k členů je nulových. Jednotlivé posloupnosti můžeme vyjádřit i tabulkou:

$n \rightarrow$ $k \downarrow$	0	1	2	3	4	5	6	\mathbf{L}
1	0	1	z_0	z_0^2	z_0^3	z_0^4	z_0^5	\mathbf{L}
2	0	0	1	$2z_0$	$3z_0^2$	$4z_0^3$	$5z_0^4$	\mathbf{L}
3	0	0	0	1	$3z_0$	$6z_0^2$	$10z_0^3$	\mathbf{L}
4	0	0	0	0	1	$4z_0$	$10z_0^2$	\mathbf{L}
5	0	0	0	0	0	1	$5z_0$	\mathbf{L}
6	0	0	0	0	0	0	1	\mathbf{L}

v níž lze spatřit i Pascalův trojúhelník. Využijeme-li označení poslední věty, můžeme k rozšiřování tabulky využít zákonitosti

$$f_{k+1,n} = \frac{1}{k} \frac{df_{kn}}{dz_0}.$$

Při transformaci výše zmíněné racionální lomené funkce je též velice výhodné rozložit tuto funkci na zlomky tvaru $z/(z - z_0)$, jejichž zpětnou transformaci lze provést pomocí výsledku ukázky 8.2, nebo využít techniku pro dělení polynomu polynomem.

Ukázka 8.13: *Určeme předmět funkce $F(z) = z(z-1)/(z+1)^3$. Funkce je zřejmě holomorfní v nekonečnu, neboť je reprezentována ryzím zlomkem. Má však pól třetího řádu v bodě $z = -1$. Předmět nalezneme třemi způsoby.*

Při prvním způsobu vyjdeme z definice. Proto

$$f_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{z^n(z-1)}{(z+1)^n} dz = \operatorname{res}_{z=-1} \frac{z^n(z-1)}{(z+1)^n} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^2}{dz^2} (z^{n+1} - z^n) = (-1)^{n+1} n^2.$$

Druhý způsob umožňuje Věta 8.6, kdy položíme $z_0 = -1$. Rozkladem na parciální zlomky obdržíme

$$F(z) = \frac{1}{z+1} - \frac{3}{(z+1)^2} + \frac{2}{(z+1)^3}.$$

Věta 8.6 a následné tabulky implikují

$$\{0, 1, -1, 1, -1, \mathbf{L}\} - 3 \cdot \{0, 0, 1, -2, 3, -4, \mathbf{L}\} + 2 \cdot \{0, 0, 0, 1, -3, 6, -10, \mathbf{L}\} = \{0, 1, -4, 9, -16, 25, \mathbf{L}\},$$

což se shoduje s již dosaženým výsledkem.

Třetí způsob je založen na dělení polynomu polynomem. Platí totiž

$$\begin{array}{r} (z^2 - z) : (z^3 + 3z^2 + 3z + 1) = \frac{1}{z} - \frac{4}{z^2} + \frac{9}{z^3} - \frac{16}{z^4} + \mathbf{L} \\ -z^2 - 3z - 3 - \frac{1}{z} \\ \hline -4z - 3 - \frac{1}{z} \\ 4z + 12 + \frac{12}{z} + \frac{4}{z^2} \\ \hline 9 + \frac{11}{z} + \frac{4}{z^2} \\ -9 - \frac{27}{z} - \frac{27}{z^2} - \frac{9}{z^3} \\ \hline -\frac{16}{z} - \frac{23}{z^2} - \frac{9}{z^3} \end{array}$$

Jako výsledek dělení dostáváme přímo příslušný Laurentův rozvoj

Ukázka 8.14: Nalezněme předmět funkce $F(z) = \sin(1/z)$. Tato funkce je holomorfní v nekonečnu. Položíme-li $z = 1/z$, můžeme vyšetřovaný předmět určit pomocí rozvoje funkce $\sin z$ v Taylorovu řadu, viz odstavec 4.9.2. Proto

$$F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} z^{2i+1} \quad \Rightarrow \quad f_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \text{ sudé} \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n!} & \text{pro } n \text{ liché} \end{cases}$$

8.5 Některé aplikace

8.5.1 Diferenční rovnice

S diferenčními rovnicemi se setkáváme při popisu diskrétních systémů v různých oblastech praxe a to jak v matematice samé (např. při numerickém řešení diferenciálních rovnic, v konstruktivní teorii funkcí, v teorii pravděpodobnosti) tak v aplikacích (numerická analýza fyzikálních polí, elektrotechnika, stavebnictví apod.). Bez ohledu na to, zda sledovaný diskrétní systém vznikl vzorkováním, měřením či diskretizací nějaké spojité veličiny, můžeme k jeho řešení využít mimo jiné i techniku transformace Z. V následujících několika ukázkách si pomocí Z-transformace vyřešíme několik diferenčních úloh z různých oblastí technické i netechnické praxe.

Ukázka 8.15: Nejprve nalezneme hodnoty Fibonacciovy posloupnosti zadané pomocí rekurentní relace $f_0 = f_1 = 1$, $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$. Tato posloupnost má četné praktické aplikace. Poprvé byla užita italským matematikem Leonardem z Pisy, známým spíše jako Fibonacci, který žil v letech 1170 až 1240, viz ukázkou 8.17. Na danou rekurentní relaci aplikujme Z-transformaci. Pro obraz $F = F(z)$ dostaneme $z^2(F - 1 - 1/z) = z(F - 1) + F$. Vyřešením této rovnice a rozkladem vzniklé racionální lomené funkce na parciální zlomky získáme postupně

$$F(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1} = \frac{1}{z_1 - z_2} \left(z_1 \frac{z}{z - z_1} - z_2 \frac{z}{z - z_2} \right), \quad \text{kde } z_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \quad z_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}),$$

z_1, z_2 jsou kořeny jmenovatele funkce F . Na základě ukázky 8.2 pak snadno shledáme, že

$$f_n = \frac{1}{z_1 - z_2} (z_1 z_1^n - z_2 z_2^n) = \frac{z_1^{n+1} - z_2^{n+1}}{z_1 - z_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

Dospěli jsme tedy k posloupnosti definované formálně pomocí iracionálních čísel. Aplikací binomické věty ukážeme, že členy této posloupnosti jsou přirozená čísla. Platí totiž dále

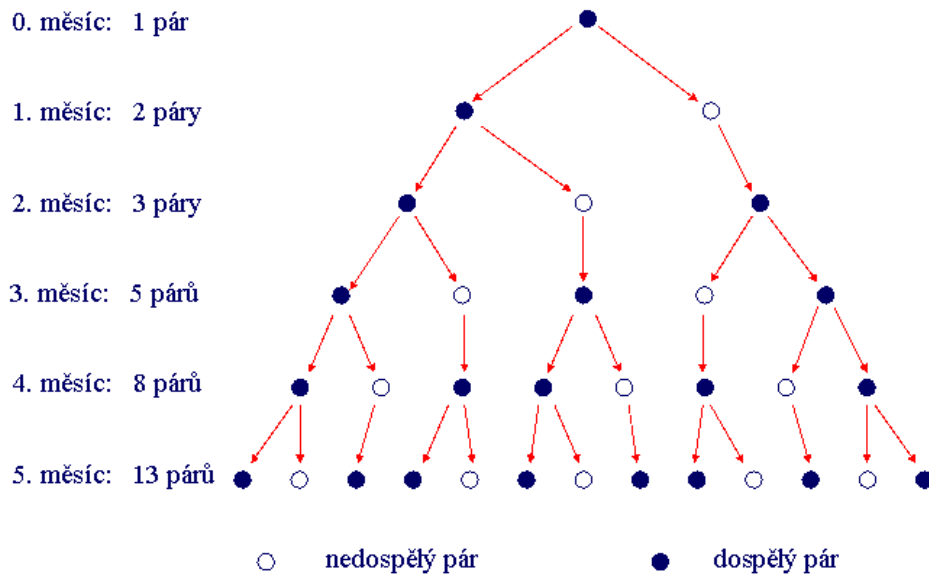
$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 2^n} \left[\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \sqrt{i} - \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} \sqrt{5^i} \right] = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} 5^k.$$

Při úpravách jsme položili $k = 2i+1$, neboť členy pro sudé indexy i se ruší. Členy Fibonacciho posloupnosti tedy jsou:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Ukázka 8.16: Nalezněme nyní členy posloupnosti g_n , která vyhovuje stejné rekurentní relaci $g_{n+2} = g_n + g_{n+1}$, jako f_n v předchozí ukázce a obecným počátečním podmínkám $g_0 = a$, $g_1 = b$. Ve smyslu rekurentní relace doplňme v předchozí ukázce $f_2 = 1$, $f_{-1} = 0$ a hledjme g_n ve tvaru lineární kombinace $g_n = p f_{n-2} + q f_{n-1}$. Pak z počátečních podmínek vyplývají relace $g_0 = a = p$, $g_1 = b = q$. Vyšetřovaná posloupnost má tedy tvar $g_n = a f_{n-2} + b f_{n-1}$.

Ukázka 8.17: Problém králíků zveřejnil Leonardo z Pisy již v roce 1202 v knize Liber abaci. Tento problém můžeme formulovat takto: Kolik králíků vzejde po roce z jednoho páru, jestliže každému páru se v období dospělosti, tj. po dvou měsících, narodí jeden nový pár. Schéma růstu populace králíků vypadá takto:



Obrázek 8.1: Populační vývoj králíků

Z obrázku vidíme, že počet párů g_n v n -tém měsíci se řídí Fibonacciovou posloupností s počátečními podmínkami $g_0 = 1$, $g_1 = 2$ a proto s využitím výsledků předchozích dvou ukázek máme nakonec $g_{12} = f_{10} + 2 f_{11} = f_{11} + f_{12} = f_{13} = 377$.

Ukázka 8.18: Přenos informací: Uvažujme signální soustavu, která vydává dva signály s_1 a s_2 , jejichž přenos vyžaduje např. jednu, respektive dvě časové jednotky. Příkladem může sloužit tečka a čárka v Morseově abecedě. Zpráva je pak reprezentována konečnou posloup-

ností signálů. Označme M_n počet možných zpráv v trvání n časových jednotek. Pak M_{n-1} vyjadřuje počet možných zpráv v trvání n časových jednotek končících signálem s_1 a M_{n-2} vyjadřuje počet možných zpráv v trvání n časových jednotek končících signálem s_2 . Zřejmě platí $M_n = M_{n-1} + M_{n-2}$ za předpokladu $M_0 = 0$, $M_1 = 1$. Opět jsme dospěli k Fibonacciově posloupnosti a proto podle ukázky 8.16 máme $M_n = f_{n-1}$. Na základě znalosti M_n můžeme určit i kapacitu C kanálu definovanou relací

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M_n}{n}.$$

V našem případě tedy

$$C = \frac{1}{\ln 2} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \sqrt{5}}{n} \right] = \frac{1}{\ln 2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{n} = \frac{\ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\ln 2} = 0,6942.. \mathbf{B} 0,7.$$

Při úpravách jsme využili skutečnosti, že druhá a třetí limita je rovna nule.

Ukázka 8.19: Národní důchod $x_n = C_n + I_n + G_n$ za období jednoho roku se skládá ze tří hlavních položek a to z výdajů na spotřební zboží C_n , investic I_n a vládních mandatorních výdajů G_n . Výdaje za spotřební zboží jsou úměrné národnímu důchodu v předchozím roce a tudíž $C_n = a x_{n-1}$. Investice jsou úměrný vzrůstu výdajů, takže $I_n = b (C_n - C_{n-1})$. Mandatorní výdaje bývají v průběhu roku konstantní a proto můžeme položit $G_n = 1$. Dosazením do původní rovnice dostaneme po úpravě $x_{n+2} - a(1+b)x_{n+1} + abx_n = 1$, přitom počáteční veličiny x_0, x_1 jsou dány. Abychom další vyšetřování poněkud zjednodušili, zavedme si substituci $y_n = x_n - c$, kde $c = 1/(1-a)$. Tím se daná nehomogenní úloha zjednoduší na homogenní úlohu $y_{n+2} - a(1+b)y_{n+1} + aby_n = 0$, $y_0 = x_0 - c$, $y_1 = x_1 - c$, přičemž konstanty a, b považujeme za známé. Z-transformací poslední relace a zavedením označení $2p = a(1+b)$ získáme obrazovou relaci $(z^2 - 2pz + ab)Y = y_0 z^2 + (y_1 - 2py_0)z$. Jejím vyřešením a rozložením vzniklé racionální lomené funkce na parciální zlomky dostaneme

$$Y = \frac{y_0 z^2 + (y_1 - 2py_0)z}{z^2 - 2pz + ab} = a \frac{z}{z - z_1} + b \frac{z}{z - z_2}, \quad \text{kde } a = \frac{y_1 - y_0 z_2}{2q}, \quad b = y_0 - a,$$

přičemž $z_1 = p + q$, $z_2 = p - q$ jsou kořeny jmenovatele funkce Y , $q = \sqrt{p^2 - ab}$. Na základě ukázky 8.2 pak získáme konečný výsledek

$$y_n = a z_1^n + b z_2^n \quad \Rightarrow \quad x_n = a z_1^n + b z_2^n + c.$$

Ukázka 8.20: Zruinování hazardního hráče: Hazardní hráč hraje řadu her proti soupeři, přičemž pravděpodobnost, že vyhraje 1 Kč je v každé hře dána číslem q , $0 \leq q \leq 1$. Pravděpodobnost, že prohraje 1 Kč je tedy $1-q$. Hry končí, jestliže hráč buď dosáhne požadovanou částku N Kč nebo všechno prohraje. Jestliže hráč nejprve všechno ztratí, řekneme, že je zruinován. Označme p_n pravděpodobnost, že hráč bude zruinován, když vsadí n Kč. Zruinování může nastat ve dvou případech. V prvním případě hráč příští hru vyhraje a získá jednu korunu. Pravděpodobnost, že bude zruinován je tedy $q p_{n+1}$. V druhém případě hráč příští hru prohraje a jednu korunu tak ztratí. Odpovídající pravděpodobnost je pak rovna $(1-q) p_{n-1}$. Podle věty o úplné pravděpodobnosti tak dospějeme k relaci $p_n = q p_{n+1} + (1-q) p_{n-1}$. Po úpravě, přeindexování a přidání vedlejších podmínek získáme diferenční úlohu

$$p_{n+2} - (r+1)p_{n+1} + r p_n = 0, \quad p_0 = 1, \quad p_N = 0, \quad r = \frac{1}{q} - 1.$$

Abychom mohli úspěšně provést Z-transformaci, dodefinujeme ještě $p_1 = a$, přičemž parametr a určíme nakonec z druhé vedlejší podmínky. Transformovaná rovnice má po menších úpravách tvar $(z^2 - (r+1)z + r)P = z^2 + a z - (r+1)z$, přičemž $P \leftrightarrow p_n$. Vyřešením této rovnice a následným rozkladem na parciální zlomky dostaneme

$$P = \frac{z(z+a-r-1)}{z^2 - (r+1)z + r} = \frac{z(z+a-r-1)}{(z-1)(z-r)} = a \frac{z}{z-1} + b \frac{z}{z-r}, \quad a = \frac{a-r}{1-r}, \quad b = 1-a.$$

Zpětnou transformací podle ukázky 8.2 pak bezprostředně máme $p_n = a + b r^n$. Zbývá určit parametr a . Abychom zjednodušili výpočet, spočítáme přímo koeficient a . Využijeme k tomu podmínku $p_N \equiv a + b r^N = 0$. Dosazením vztahu $b = 1 - a$ do této rovnice a vyřešením dostaneme $a = -r^N / (1 - r^N)$ a potažmo i $b = 1 / (1 - r^N)$. Pro pravděpodobnost p_n , že hazardní hráč bude zruinován, respektive pro pravděpodobnost \hat{p}_n , že vyhraje, dostaneme tedy

$$p_n = \frac{r^n - r^N}{1 - r^N}, \quad \text{resp.} \quad \hat{p}_n = \frac{1 - r^n}{1 - r^N}.$$

Výsledek platí i pro $q = 1/2$, tj. $r = 1$, musíme však spočítat pomocí l'Hospitalova pravidla limitu pro $r \rightarrow 1$. Je-li $q \leq 1/2$, tj. $r \geq 1$, pak pro $N \rightarrow \infty$ bude $\lim p_n = 1$ a tedy skutečnost, že při dostatečně velké částce N bude hráč zruinován, hraničí s jistotou. Např. při $n = 5$, $N = 20$ a $q = 0,4$ je $r = 1,5$ a proto $q_5 \approx 0,998$.

Ukázka 8.21: Logistická rovnice: Růst populace $x = x(t)$ v čase t je modelován logistickou rovnicí $x' = a x - b x^2$, přičemž koeficient $a > 0$ vyjadřuje tempo růstu populace v ideálních podmínkách a koeficient $b > 0$ reprezentuje negativní vlivy, jako je přelidnění, omezenost zdrojů apod. Diskrétním ekvivalentem této rovnice je Pielouova logistická rovnice

$$x_{n+1} = \frac{a x_n}{1 + b x_n}, \quad a = \exp(a) > 1, \quad b = \frac{b}{a} (a - 1) > 0,$$

kteřá však není lineární. Na lineární rovnici ji můžeme převést substitucí $y_n = 1/x_n$. Po úpravě dostaneme $a y_{n+1} = y_n + b$. Pro $Y \leftrightarrow y_n$ pak platí $(a z - 1) Y = z (a y_0 + b / (z - 1))$. Vyřešením obrazové rovnice a rozkladem na parciální zlomky získáme

$$Y = z \left(\frac{a y_0}{a z - 1} + \frac{b}{(z - 1)(a z - 1)} \right) = \frac{b}{a - 1} \frac{z}{z - 1} + \frac{a y_0 - y_0 - b}{a - 1} \frac{z}{z - \frac{1}{a}},$$

odsud zpětnou transformací pomocí ukázky 8.2 y_n a přechodem k původní neznámé pak

$$y_n = \frac{b}{a - 1} + \frac{(a - 1) y_0 - b}{(a - 1) a^n} \Rightarrow x_n = \frac{(a - 1) a^n}{b (a^n - 1) + (a - 1) y_0}.$$

Toto řešení se pro $n \rightarrow \infty$ blíží k rovnovážnému stavu $x_\infty = (a - 1) / b = a/b$.

Ukázka 8.22: Vyřešme nyní diskrétní analog ukázky 6.20. Využitím metody konečných diferencí lze diferenciální rovnici elektrického RL obvodu studovaného v citované ukázce diskretizovat. Získáme tak $i_0 = 0$, $i_{n+1} - b i_n = a u_n$, kde $a = h/L$, $b = 1 - R a$, $n = 0, 1, \dots$. Z-transformace této relace má tvar $z I - b I = a Z\{u_n\}$. Vyřešením a úpravou dostaneme

$$I = \frac{a}{z - b} Z\{u_n\} = \frac{a}{b} \left(\frac{z}{z - b} Z\{u_n\} - Z\{u_n\} \right)$$

a zpětnou transformací pak

$$i_n = \frac{a}{b} (b^n * u_n - u_n) = \frac{a}{b} \left(\sum_{l=0}^n b^{n-l} u_l - u_n \right) = \frac{a}{b} \sum_{l=0}^{n-1} b^{n-l} u_l = a \sum_{l=1}^n b^{n-l} u_{l-1}.$$

Proberme ještě mírně přesnější analog ukázky 6.20 a to $i_0 = 0$, $i_{n+1} - b i_n = a (u_n + u_{n+1})/2$. Podobným postupem jako výše dojdeme k výsledku

$$i_n = \frac{1}{2} a \sum_{l=1}^n b^{n-l} (u_{l-1} + u_l).$$

Pro sinusové buzení můžeme obě získané konečné sumy na základě níže vyřešené ukázky 8.25 sečíst a pro proudovou odezvu i_{1n} pro méně přesnou aproximaci a pro proudovou odezvu i_{2n} u mírně přesnější aproximace tak získáme jednodušší výpočetní formule

$$i_{1n} = au_0 \frac{b^n \sin q - b \sin nq + \sin(n-1)q}{b^2 - 2b \cos q + 1}$$

$$i_{2n} = \frac{1}{2} [au_0 \sin nq + (b+1)i_{1n}], \quad \text{kde } q = wh.$$

Přesnost obou aproximací numericky prověříme na případu $R = 3$, $L = 8$, $w = 50$, $u_0 = 1$. Budeme sledovat maximální relativní chybu e_{\max} a relativní chybu v eukleidovské normě e_e , obě počítány v procentech. Výsledky jsou dány tabulkou

aproximace	h	n	e_{\max} [%]	e_e [%]
1	0.1	200	2.21	1.93
	0.05	400	0.45	0.26
2	0.1	200	0.93	0.82
	0.05	400	0.25	0.11

Z tabulky je zřejmé, že druhá aproximace je o něco přesnější.

8.5.2 Konečné součty

Pomocí transformace Z můžeme též určit některé součty celých čísel. Využíváme přitom hlavně větu o částečném součtu a větu o derivaci obrazu. Metodiku výpočtu si osvětlíme na ukázkách.

Ukázka 8.23: Sečteme třetí mocniny prvních n přirozených čísel. V ukázce 8.9 jsme našli obraz posloupnosti $\{n^2\}$. S využitím tohoto výsledku a pomocí věty o derivaci předmětu nalezneme ještě obraz posloupnosti $\{n^3\}$. Na získanou relaci pak aplikujeme větu o částečném součtu. Postupně dospějeme k relacím

$$n^3 \leftrightarrow \frac{z(z^2 + 4z + 1)}{(z-1)^3} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n i^3 \leftrightarrow \frac{z^2(z^2 + 4z + 1)}{(z-1)^5} = F(z).$$

Protože funkce $F(z)$ je holomorfní v okolí nekonečna a má v bodě $z = 1$ pól pátého řádu, můžeme na základě definice zpětné transformace psát

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \text{res} F(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{4!} \frac{d^4}{dz^4} (z^{n+3} + 4z^{n+2} + z^{n+1}) = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

Povšimněme si, že platí $\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\sum_{i=1}^n i\right)^2$.

Ukázka 8.24: Nyní určíme součet čtverců prvních n lichých čísel. Z ukázky 8.9 vyplývá

$$n^2 \leftrightarrow \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n i^2 \leftrightarrow \frac{z^2(z+1)}{(z-1)^4} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Podobně pomocí věty o derivaci předmětu a věty o částečném součtu nalezneme

$$(-1)^n \leftrightarrow \frac{z}{z+1}, \quad (-1)^n n \leftrightarrow -\frac{z}{(z+1)^2}, \quad (-1)^n n^2 \leftrightarrow \frac{z(1-z)}{(z+1)^3}, \quad \sum_{i=1}^n (-1)^i i^2 \leftrightarrow -\frac{z^2}{(z+1)^3},$$

což implikuje

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i i^2 = \frac{1}{2} (-1)^n n(n+1).$$

Pro hledaný součet tedy platí

$$\sum_{i=0}^n (2i+1)^2 = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=0}^n (2i+1)^2 + \sum_{i=0}^n (2i)^2 + \sum_{i=0}^n (2i+1)^2 - \sum_{i=0}^n (2i)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{2n+1} k^2 - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k k^2 \right].$$

Na základě dosažených výsledků, kde za n dosadíme $2n+1$, máme dále

$$\sum_{i=0}^n (2i+1)^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} (2n+1)(2n+2)(4n+3) - \frac{1}{2} (-1)^{2n+1} (2n+1)(2n+2) \right]$$

a proto
$$\sum_{i=0}^n (2i+1)^2 = \frac{1}{6} (2n+1)(2n+2)(2n+3).$$

Ukázka 8.25: Nakonec nalezneme ještě v praxi použitelný konečný součet

$$\sum_{i=1}^n p^i \sin iq, \quad p, q \in \mathbf{C}.$$

Označme $f_n = p^n \sin iq = p^n (\exp(jqn) - \exp(-jqn)) / (2j) = u^n / (2j) - v^n / (2j)$, přitom $u = p \exp(jq)$, $v = p \exp(-jq)$. Podle ukázky 9.2 spočítejme obraz

$$F(z) = \frac{1}{2j} \frac{z}{z-u} - \frac{1}{2j} \frac{z}{z-v} = \frac{z p \sin q}{(z-u)(z-v)}.$$

Aplikací věty o konečném součtu pak zjistíme, že

$$\sum_{i=0}^n f_i \leftrightarrow \frac{z^2 p \sin q}{(z-u)(z-v)(z-1)} \equiv G(z).$$

Funkce $G(z)$ má tři jednoduché póly a je regulární v nekonečnu. Proto podle definice platí

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n f_i &= \operatorname{res}_{z=u} (z^{n-1} G(z)) + \operatorname{res}_{z=v} (z^{n-1} G(z)) + \operatorname{res}_{z=1} (z^{n-1} G(z)) = \\ &= \lim_{z \rightarrow u} \frac{z^{n+1} p \sin q}{(z-v)(z-1)} + \lim_{z \rightarrow v} \frac{z^{n+1} p \sin q}{(z-u)(z-1)} + \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^{n+1} p \sin q}{(z-u)(z-v)} = \\ &= \frac{u^{n+1}}{2j(u-1)} - \frac{v^{n+1}}{2j(v-1)} + \frac{p \sin q}{p^2 - 2p \cos q + 1} = \frac{p \sin q + p^{n+1} (p \sin nq - \sin(n+1)q)}{p^2 - 2p \cos q + 1}. \end{aligned}$$

Pro danou sumu tedy získáme relaci

$$\sum_{i=0}^n p^i \sin iq = p \frac{\sin q - p^n \sin(n+1)q + p^{n+1} \sin nq}{p^2 - 2p \cos q + 1}.$$

8.6 Příklady ke kapitole 8

Příklad 8.1: Pomocí transformace Z najděte obraz následující posloupnosti

$$\left\{0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{32}, 0, \frac{1}{128}, \mathbf{K}\right\}.$$

Příklad 8.2: Spočtěte konvoluci posloupností $f_n * g_n$, kde

a) $f_n = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \mathbf{K}\}$, $g_n = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \mathbf{K}\}$,

b) $f_n = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \mathbf{K}\}$, $g_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \mathbf{K}\right\}$,

c) $f_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \mathbf{K}\right\}$, $g_n = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \mathbf{K}\}$.

Příklad 8.3: Transformujte posloupnost $f_n = \sin(nc)$.

Příklad 8.4: Určete předmět funkce $F(z) = \frac{7z^2 + 2z - 1}{z(z^2 - 1)}$.

9 Výsledky

Vstupní test

Příklad 1.1: Význam uvedených symbolů je tento: \forall pro všechny, \exists existuje, $\exists!$ existuje právě jeden, \Rightarrow implikace, \Leftrightarrow ekvivalence, \times kartézský součin, \cup sjednocení, \cap průnik, \subset je částí, \in je prvkem, \notin není prvkem, \rightarrow konverguje. [zpět](#)

Příklad 1.2: Označme první výrok jako p a druhý výrok jako q . Pak platí $\neg(p \Rightarrow q) = p \wedge \neg q$. To znamená, že hledaná negace našeho složeného výroku je $(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq -2) \wedge (\exists a, b, c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : ax^2 + bx + c \neq 0)$. Pravdivost tohoto výroku je zřejmá. [zpět](#)

Příklad 1.3: Uvedené symboly představují postupně množinu \mathbb{N} přirozených, \mathbb{I} celých, \mathbb{Q} racionálních, \mathbb{R} reálných, \mathbb{C} komplexních a $\overline{\mathbb{C}}$ komplexních (včetně nekonečna) čísel [zpět](#)

Příklad 1.4: Jedná se o množinu reálných čísel, která jsou větší než číslo a a menší než číslo b . Jedná se tedy o otevřený interval (a, b) . [zpět](#)

Příklad 1.5: Imaginární jednotka, kterou v oblasti elektrotechniky zpravidla označujeme symbolem j , je definována relací $j^2 + 1 = 0$ nebo $j^2 = -1$. V Gaussově komplexní rovině je znázorněna bodem, který leží na kladné svisele poloose ve vzdálenosti jedna od počátku. Poznamenejme, že není správné psát $j = \sqrt{-1}$. V tomto případě by totiž platilo $j^2 = \sqrt{-1} \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$ a to je spor s definicí imaginární jednotky. [zpět](#)

Příklad 1.6: Algebraický, trigonometrický a exponenciální tvar komplexního čísla je postupně: $z = x + jy$, $z = r(\cos j + j \sin j)$, $z = r \exp(jj)$, přičemž $x = r \cos j$, $y = r \sin j$. [zpět](#)

Příklad 1.7: Modul komplexního čísla je v Gaussově rovině znázorněn vzdáleností tohoto čísla od počátku soustavy souřadnic, argument komplexního čísla je úhel počítaný proti směru chodu hodinových ručiček, který svírá spojnice tohoto bodu s počátkem a vodorovná osa. Komplexní číslo a odpovídající komplexně sdružené číslo jsou umístěny symetricky vzhledem k vodorovné ose. [zpět](#)

Příklad 1.8: Moivreova věta zní: $(\cos j + j \sin j)^n = \cos nj + j \sin nj$, kde $n \in \mathbb{N}$. [zpět](#)

Příklad 1.9: Odmocňování komplexního čísla se provádí podle vzorce

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{j+2kp}{n} + j \sin \frac{j+2kp}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

který představuje celkem n hodnot. [zpět](#)

Příklad 1.10: Hledáme všechny hodnoty $z_k = \sqrt[n]{1}$. Protože $1 = 1 \cdot (\cos(0) + j \sin(0))$, vzorec pro z_k má tvar:

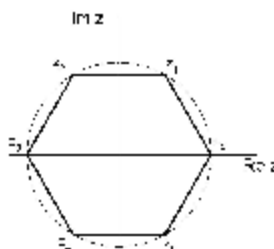
$$z_k = \sqrt[6]{1} \cdot \left(\cos \frac{0+2kp}{6} + i \sin \frac{0+2kp}{6} \right) \text{ pro } k = 0,1,2,3,4,5.$$

$$\text{Dostáváme tedy } z_0 = 1, \quad z_1 = \cos \frac{2p}{6} + i \sin \frac{2p}{6} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z_2 = \cos \frac{4p}{6} + i \sin \frac{4p}{6} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = \cos \frac{6p}{6} + i \sin \frac{6p}{6} = -1,$$

$$z_4 = \cos \frac{8p}{6} + i \sin \frac{8p}{6} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_5 = \cos \frac{10p}{6} + i \sin \frac{10p}{6} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Grafickým znázorněním těchto řešení pak vznikne pravidelný šestiúhelník: [zpět](#)



Příklad 1.11: Z rovnice přímky p vyjádříme $y = 2x + c$ a dosadíme do středového tvaru rovnice kružnice k : $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$. Po dosazení a úpravě dostáváme kvadratickou rovnici $5x^2 + (4c-2)x + c^2 + 2c + 6 = 0$ s parametrem c . Diskriminant této rovnice je $D = -4(c^2 + 14c + 29)$. Přímka p je tedy tečnou kružnice k , je-li $D = 0$, její sečnou, je-li $D > 0$ a její vnější přímkou, je-li $D < 0$. Přitom $D = 0$ právě když bude splněna kvadratická rovnice pro $c^2 + 14c + 29 = 0$, jejíž diskriminant je $D_1 = 80$. Rovnice má tedy dva reálné kořeny $c_{1,2} = \frac{-14 \pm 4\sqrt{5}}{2}$ neboli $c_1 = \frac{-14 + 4\sqrt{5}}{2}$, $c_2 = \frac{-14 - 4\sqrt{5}}{2}$. Celkem jsme tedy dospěli k

tvrzení: Přímka p je tečnou kružnice k pro $c \in \{-7 - 2\sqrt{5}; -7 + 2\sqrt{5}\}$, sečnou pro $c \in (-7 - 2\sqrt{5}, -7 + 2\sqrt{5})$ a vnější přímkou pro $c \in (-\infty, -7 - 2\sqrt{5}) \cup (-7 + 2\sqrt{5}, +\infty)$. [zpět](#)

Příklad 1.12: Derivace $f'(x)$ zadané funkce $f(x)$ v bodě x_0 je definována relací $f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Geometrický význam: směrnice tečny ke křivce $y = f(x)$ v bodě x_0 . Fyzikální význam: rychlost hmotného bodu pohybujícího se po dráze $y = f(x)$ v okamžiku x_0 . [zpět](#)

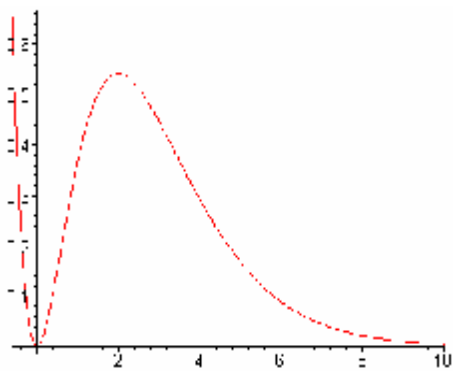
Příklad 1.13: Diferenciál funkce $f(x)$ je dán relací $df = f'(x)dx$. Úplný (totální) diferenciál funkce $f(x,y)$ je definován jako $df = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$, jsou-li obě parciální derivace v okolí bodu $[x,y]$ spojité. Vyjadřuje přibližně přírůstek funkce $f(x,y)$. [zpět](#)

Příklad 1.14: Funkce $f(x)$ má jeden nulový bod v $x = 0$ a je kladná pro všechna ostatní $x \in \mathbb{R}$. První derivace je rovna $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x}$. Má dva nulové body $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$. Je kladná na intervalu $(0, 2)$ a záporná na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(2, \infty)$. Funkce $f(x)$ je tedy na prvním intervalu rostoucí, na druhém a třetím je klesající. Dále je vidět, že v bodě

x_1 nastává lokální minimum a v bodě x_2 lokální maximum. Druhá derivace je rovna $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$. Má opět dva nulové body $x_3 = 2 - \sqrt{2}$ a $x_4 = 2 + \sqrt{2}$. Je kladná na intervalu $(-\infty, 2 - \sqrt{2})$ a $(2 + \sqrt{2}, +\infty)$, a záporná na $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$. Naše funkce je tudíž na prvním a druhém intervalu konvexní, na třetím je konkávní. Body x_3 a x_4 jsou body inflexe. Asymptota bez směrnice neexistuje. Pokusíme se tedy najít asymptotu se směrnicí:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = 0.$$

Tedy asymptota se směrnicí tvaru $y = ax + b$ je v našem případě rovna: $y = 0$ pro $x \rightarrow \infty$. Pro $x \rightarrow -\infty$ asymptota neexistuje.



[zpět](#)

Příklad 1.15: Neurčitý integrál $F(x) = \int f(x) dx$ je funkce, jejíž derivace je integrand $f(x)$ neurčitého integrálu. Nazývá se též primitivní funkcí. Naproti tomu je určitý integrál $\int_a^b f(x) dx$ číslo, které numericky vyjadřuje obsah plochy omezené přímkami $x = a$, $y = 0$, $x = b$ a čarou $y = f(x)$. [zpět](#)

Příklad 1.16:

$$\int x^3 e^{3x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x^3, \quad u' = 3x^2 \\ v' = e^{3x}, \quad v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right| = \frac{1}{3} x^3 e^{3x} - \int 3x^2 \frac{1}{3} e^{3x} dx =$$

$$\frac{1}{3} x^3 e^{3x} - \int x^2 e^{3x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2, \quad u' = 2x \\ v' = e^{3x}, \quad v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right| = \frac{1}{3} x^3 e^{3x} - \frac{1}{3} x^2 e^{3x} + \int \frac{2}{3} x e^{3x} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad u' = 1 \\ v' = e^{3x}, \quad v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right| = \frac{1}{3} x^3 e^{3x} - \frac{1}{3} x^2 e^{3x} + \frac{2}{3} \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{2}{3} \int \frac{1}{3} e^{3x} dx =$$

$$= \frac{1}{27} (9x^3 - 9x^2 + 6x - 2). \quad \text{zpět}$$

Příklad 1.17: Nejprve je třeba rozložit zadanou funkci na parciální zlomky:

$$\frac{5}{x^3 + 2x^2 + 5x} = \frac{5}{x(x^2 + 2x + 5)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 2x + 5}$$

$$5 = ax^2 + bx^2 + 2ax + cx + 5a$$

tj. $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$.

Dostáváme tedy

$$\frac{5}{x^3 + 2x^2 + 5x} = \frac{1}{x} - \frac{x+2}{x^2 + 2x + 5}.$$

Po úpravě

$$\frac{5}{x^3 + 2x^2 + 5x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{2x+4}{x^2 + 2x + 5} - \frac{1}{(x+1)^2 + 4}.$$

Nyní můžeme integrovat:

$$\int \frac{5}{x^3 + 2x^2 + 5x} dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 5) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right). \quad \text{zpět}$$

Příklad 1.18: $\int_0^{\infty} (4+5t)e^{-bt} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c (4+5t)e^{-bt} dt = Q_1 + Q_2 = Q.$

$$Q_1 = \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\frac{-4}{b} e^{-bt} \right]_0^c = \lim_{c \rightarrow \infty} \left(\frac{-4}{b} e^{-bc} + \frac{4}{b} \right) = \frac{4}{b},$$

$$Q_2 = \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\frac{-5}{b} t e^{-bt} - \frac{5}{b^2} e^{-bt} \right]_0^c = \lim_{c \rightarrow \infty} \left(\frac{-5}{b} c e^{-bc} - \frac{5}{b^2} e^{-bc} + \frac{5}{b^2} \right) = \frac{5}{b^2},$$

$$Q = \frac{4}{b} + \frac{5}{b^2}. \quad \text{zpět}$$

Kontrolní příklady ke kapitole 2

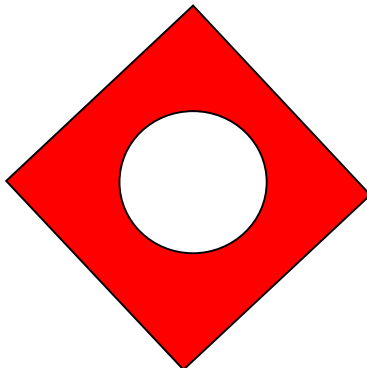
Příklad 2.1: Pro existenci funkce $z = \frac{\sqrt{1 - \ln(|x| + |y|)}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$ je nutnou podmínkou spl-

nění nerovností: $1 - \ln(|x| + |y|) \leq 0$ a současně $x^2 + y^2 - 1 > 0$, které lze převést na nerovnosti: $|x| + |y| \leq e$ a současně $x^2 + y^2 > 1$. Definiční obor můžeme potom vyjádřit jako množinu

$Df = \{(x, y) \mid 1 - \ln(|x| + |y|) \leq 0 \text{ a současně } x^2 + y^2 - 1 > 0\}$. Tuto množinu můžeme také graficky znázornit jako rovinnou oblast.

První nerovnost znázorníme v jednotlivých kvadrantech jako část poloroviny ležící pod resp. nad přímkou $|x| + |y| = e$ v návaznosti na odstranění absolutních hodnot v jednotlivých kvadrantech. Druhá nerovnost představuje vnějšek kružnice se středem v počátku o poloměru 1 (viz. obrázek).

Definiční obor



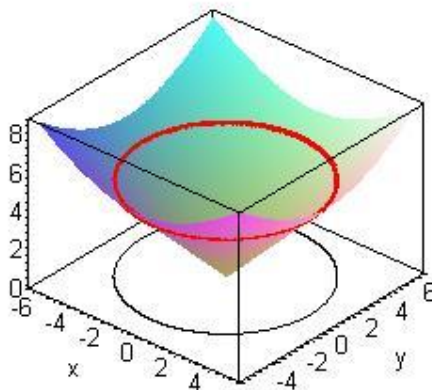
Příklad 2.2: Nejdříve určíme funkční hodnotu v zadaném bodě (tzv. „výšku“ vrstevnice):

$$c = z(2,5) = \sqrt{2^2 + 5^2 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 5 + 2} = \sqrt{25} = 5$$

Dále řešíme rovnici $c = z(x, y)$:

$$5 = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2} \Leftrightarrow 5^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = (x+1)^2 + (y-1)^2$$

Což je rovnice kružnice se středem v bodě $S = [-1, 1]$ o poloměru 5 (viz. obrázek)



To znamená, že bodem $X = [2, 5]$ procházející vrstevnice je funkce $y = 1 + \sqrt{24 - 2x - x^2}$, která má první derivaci $y' = \frac{-2 - 2x}{2\sqrt{24 - 2x - x^2}}$ a pro $x = 2$ dostáváme $y'(2) = -\frac{3}{4}$, což můžeme interpretovat tak, že $\dot{\mathbf{t}} = (1, -3/4)$ je tečným vektorem vrstevnice v bodě $X = [2, 5]$.
K určení gradientu funkce musíme spočítat parciální derivace:

$$z'_x = \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+y^2+2x-2y+2}} \quad z'_y = \frac{2y-2}{\sqrt{x^2+y^2+2x-2y+2}}$$

a gradient v obecném bodě $X = [x, y]$ je roven

$$\text{grad}(z(x, y)) = (z'_x, z'_y) = \left(\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+y^2+2x-2y+2}}, \frac{2y-2}{\sqrt{x^2+y^2+2x-2y+2}} \right)$$

v bodě $X = [2, 5]$ dostáváme $\text{grad}(z(2, 5)) = \left(\frac{6}{\sqrt{25}}, \frac{8}{\sqrt{25}} \right) = \left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5} \right)$. Protože skalární součin

vektorů $\mathbf{r} \cdot \text{grad}(z(2, 5)) = \left(1, \frac{-3}{4} \right) \cdot \left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5} \right) = 0$ je nulový, je zřejmé, že gradient je kolmý na vrstevnici.

Příklad 2.3: Ukažte, že funkce $z = j(x^2 + y^2)$, kde j je diferencovatelná funkce, vyhovuje

$$\text{rovnici } y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Nejdříve vypočteme parciální derivace $z'_x = j'(x^2 + y^2)2x$ $z'_y = j'(x^2 + y^2)2y$ dosazení do rovnice dostáváme

$$yz'_x - xz'_y = yj'(x^2 + y^2)2x - xj'(x^2 + y^2)2y = 0.$$

Příklad 2.4: Ukažte, že funkce zadaná implicitně rovnicí $4x^4 - 4x^2 + y^2 = 0$ a bodem $[1/\sqrt{2}, 1]$ má v tomto bodě lokální maximum.

Zadanou rovnici budeme postupně dvakrát derivovat s tím, že proměnná y je neznámá funkce proměnné x

$16x^3 - 8x + 2yy' = 0$. Odtud po dosazení $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = 1$ vypočteme

$$y'(1/\sqrt{2}, 1) = -\frac{16\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + 8\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}.$$

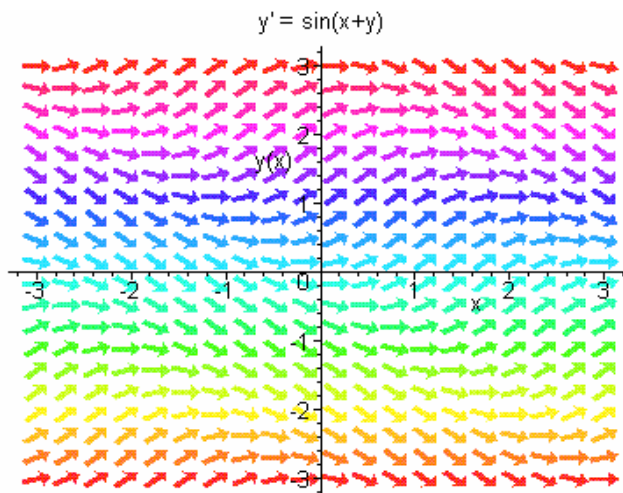
Analogicky vypočteme i druhou derivaci z rovnice $48x^2 - 16 + 2(y')^2 + 2y'' = 0$

$$y''(1/\sqrt{2}, 1) = -\frac{48\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 16 + 2 \cdot 0}{2} = -4.$$

To znamená, že funkce daná implicitně má v daném bodě lokální maximum.

Kontrolní příklady ke kapitole 3

Příklad 3.1 Pravá strana rovnice je definovaná a spojitá na oblasti E_2 . Směrové pole přiřazuje každému bodu $[x, y] \in E_2$ vektor $(1, \sin(x + y))$. To znamená:

**Příklad 3.2**

Derivováním první rovnice podle x dostaneme:

$$\frac{1}{1 + \frac{u^2}{x^2}} \cdot \frac{xu' - u}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + u^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2(x + uu')}{\sqrt{x^2 + u^2}} = 0, x \neq 0.$$

Po úpravě je

$$\frac{u'(x-u) - (u+x)}{x^2 + u^2} = 0$$

a odtud $u' = \frac{x+u}{x-u}.$

Diferenciální rovnici můžeme upravit na tvar

$$y' = \frac{x+y}{x-y}, \quad y \neq x.$$

Funkce u tedy vyhovuje zadané diferenciální rovnici.

Příklad 3.3

Nejprve určíme všechna řešení diferenciální rovnice a z nich vybereme řešení splňující počáteční podmínku. Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými. To znamená, že všechna řešení u dostaneme integrací zadané rovnice. Dostaneme:

$$u(x) = \int \cos^2 x \, dx + C,$$

kde C je libovolná konstanta a $x \in R$. Platí

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos(2x)) \, dx$$

a tedy

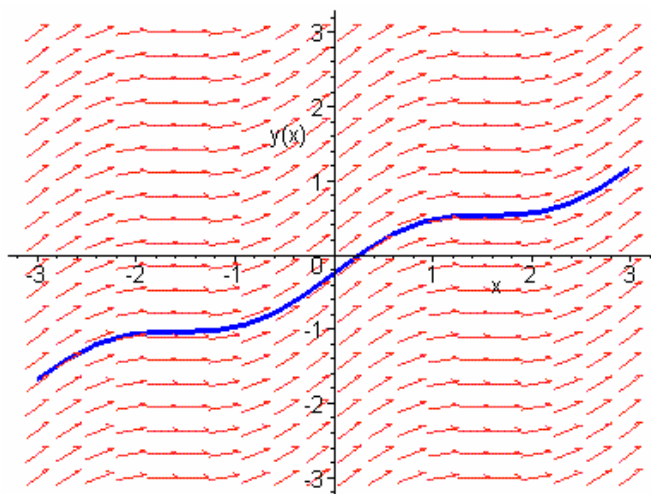
$$u(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin(2x) \right) + C \quad \text{pro } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aby byla splněna počáteční podmínka, musí platit

$$u\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{p}{8} + \frac{1}{4} + C = \frac{p}{8}.$$

To znamená $C = -\frac{1}{4}$. Řešením dané Cauchyovy úlohy je tedy funkce

$$u(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin(2x) \right) - \frac{1}{4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Na obrázku je znázorněno směrové pole (červené šipky) a řešení $u(x)$ (modrá křivka).

Příklad 3.4 Jde o lineární rovnici. Nejprve nalezneme řešení homogenní rovnice

$$y' - 2xy = 0.$$

To je rovnice se separovanými proměnnými, tj.

$$\frac{dy}{y} = 2x dx.$$

Řešením je funkce

$$y(x) = Ce^{x^2}.$$

Řešení nehomogenní (zadané) rovnice najdeme metodou variace konstanty. Hledáme jej tedy ve tvaru $y(x) = C(x)e^{x^2}$. Derivováním podle x dostaneme

$$y'(x) = C'(x)e^{x^2} + C(x)2xe^{x^2}.$$

Dosazením do zadané rovnice máme

$$C'(x)e^{x^2} + C(x)2xe^{x^2} - 2xC(x)e^{x^2} = 2xe^{x^2}$$

tj.

$$\begin{aligned} C'(x) &= 2x \\ C(x) &= x^2 + K, \end{aligned}$$

kde K je libovolná reálná konstanta.

Řešením jsou tedy funkce

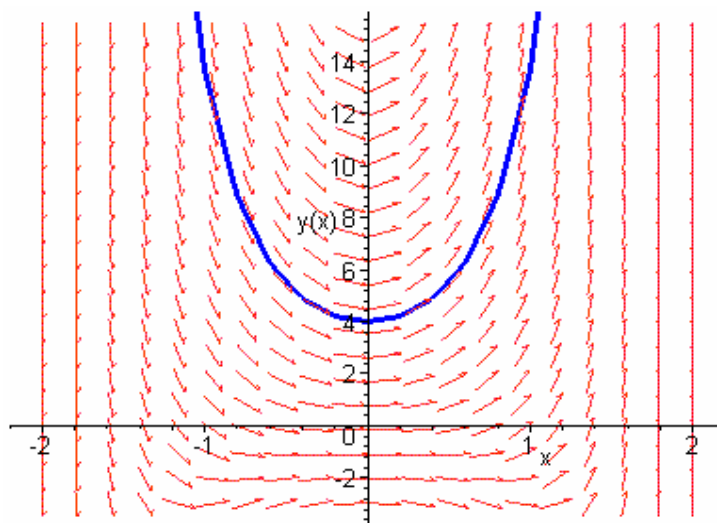
$$y(x) = (x^2 + K)e^{x^2}.$$

Z počáteční podmínky $y(0) = 4$ ihned dostaneme $K = 4$.

Hledané řešení má potom tvar

$$y(x) = (x^2 + 4)e^{x^2}.$$

Graf řešení (společně se směrovým polem rovnice) pak vypadá takto:



Příklad 3.5 I. Homogenní rovnice je

$$y''' + 2y'' + y' = 0,$$

charakteristická rovnice je

$$l^3 + 2l^2 + l = 0.$$

Její kořeny jsou $l_1 = 0$, $l_{2,3} = -1$. Tudíž obecné řešení je

$$y(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x}.$$

II. K určení partikulárního řešení nehomogenní rovnice použijeme princip superpozice. Položme $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \sin(x)$.

První část pravé strany $f_1(x) = x^2$ je typu $f(x) = P_n(x)$, kde $n = 2$. Protože navíc má charakteristická rovnice jednoduchý kořen 0, předpokládáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_1(x) = x^1(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx.$$

Odtud

$$y_1'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow y_1'' = 6ax + 2b \Rightarrow y_1''' = 6a$$

a po dosazení máme

$$6a + 12ax + 4b + 3ax^2 + 2bx + c = x^2,$$

tj.

$$3ax^2 + (12a + 2b)x + 6a + 4b + c = x^2.$$

Porovnáním koeficientů vyjde

$$x^2: 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$x^1: 12a + 2b = 0 \Rightarrow b = -2$$

$$x^0: 6a + 4b + c = 0 \Rightarrow c = 6.$$

Partikulární řešení je

$$y_1(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 6x.$$

Druhá část pravé strany $f_2(x) = \sin(x)$ je typu

$$f(x) = P_m(x)e^{ax} \cos(bx) + Q_n(x)e^{ax} \sin(bx),$$

kde $P(x) \equiv 0$, $Q(x) \equiv 1$, $n = 0$, $a = 0$, $b = 1$. Protože navíc číslo $0 + 1i = i$ není kořenem charakteristické rovnice, předpokládáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_2(x) = x^0(a \cos x + b \sin x) = a \cos x + b \sin x.$$

Odtud

$$y_2'(x) = -a \sin x + b \cos x \Rightarrow y_2'' = -a \cos x - b \sin x \Rightarrow y_2''' = a \sin x - b \cos x$$

a po dosazení vyjde

$$a \sin x - b \cos x - 2a \cos x - 2b \sin x - a \sin x + b \cos x = \sin x,$$

tj.

$$-2a \cos x - 2b \sin x = \sin x.$$

Porovnáním vyjde:

$$\cos x: -2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\sin x: -2b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}.$$

Partikulární řešení je

$$y_2(x) = -\frac{1}{2} \sin x.$$

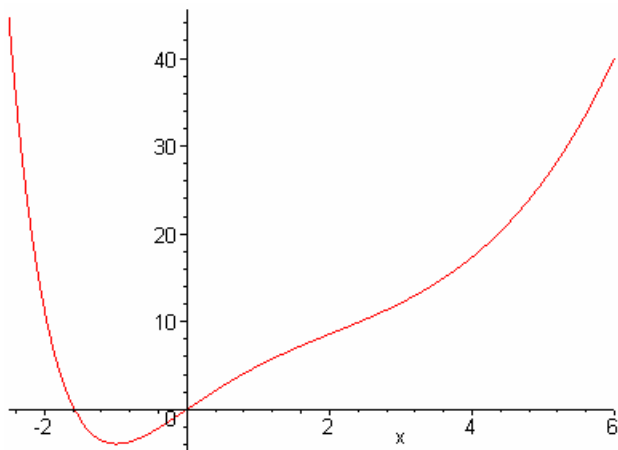
Partikulární řešení celé naší rovnice je pak

$$y_1(x) + y_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 6x - \frac{1}{2} \sin x$$

a obecné řešení je

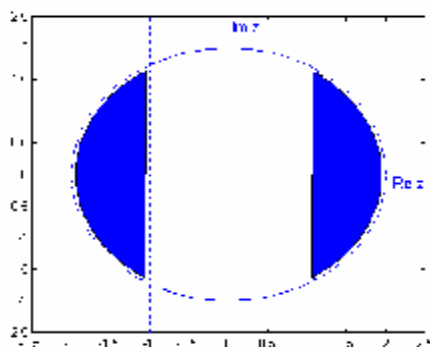
$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 6x - \frac{1}{2} \sin x.$$

Například pro $c_1 = 4$, $c_2 = -4$, $c_3 = -4$ má řešení následující tvar:

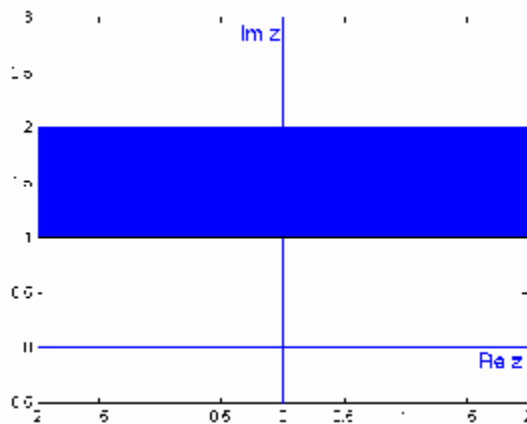


Kontrolní příklady ke kapitole 4.12

Příklad 4.1 a) Množinu $M = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| > 1, |z| < 4\}$ lze znázornit takto:



Zřejmě se jedná o množinu otevřenou, ohraničenou a 2-násobně souvislou.



b) Množinu $M = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |\operatorname{Im} z| \leq 2\}$ lze znázornit takto.

Zřejmě se jedná o množinu uzavřenou, neohraničenou a souvislou.

Příklad 4.2 Poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ je dán vzorcem $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$.

Tedy

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n (n+1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e. \end{aligned}$$

Příklad 4.3 Vyjádříme si nejprve rovnici kružnice pomocí reálné a imaginární složky proměnné z . Předpokládejme tedy, že $z = x + jy$. Potom :

$$x^2 + y^2 + x - jx + jy + y + x + jx - jy + y + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1.$$

Dále předpokládejme, že $w = u + jv$. Funkční vyjádření pak přejde na tvar: $u + jv = 2x + 2jy + x - jy - 1$, tj. $u + jv = 3x - 1 + jy$. Dostáváme tak vyjádření :

$$y = v, \quad x = \frac{u+1}{3}.$$

Abychom našli rovnici křivky, na kterou se zobrazí zadaná kružnice, stačí nyní dosadit:

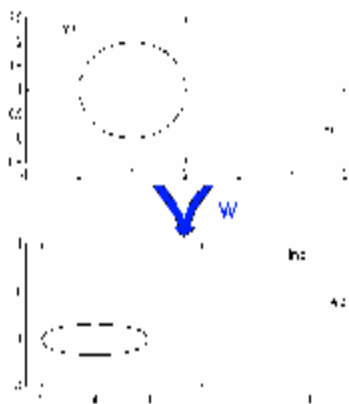
$$\frac{(u+1)^2}{9} + v^2 + \frac{2}{3}(u+1) + 2v + 1 = 0$$

$$u^2 + 8u + 9v^2 + 18v + 16 = 0$$

$$(u+4)^2 - 16 + 9(v+1)^2 - 1 + 16 = 0$$

$$\frac{(u+4)^2}{9} + (v+1)^2 = \frac{1}{9}.$$

Hledaná křivka je tedy elipsa.



Příklad 4.4 Máme $u'_x = 3x^2 - 3y^2 + 6x$, $u'_y = -6xy - 6y$.

Musí platit $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$. Integrací u'_x podle y dostáváme:

$$v = 3x^2y - y^3 + 6xy + c(x)$$

Dále $v'_x = 6xy + 6y + c'(x)$. Porovnáním s u'_y máme $c'(x) = 0$.

Tj. $c(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Tedy $f(z) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1 + j(3x^2y - y^3 + 6xy + c)$.

Pro $y = 0$ platí $f(z) = f(x)$, tj.

$$f(z) = z^3 + 3z^2 + 1 + jc.$$

Další podmínka je $f(0) = 1$. Máme $f(0) = 1 + jc$, tzn. $c = 0$.

Hledaná holomorfní funkce má tedy tvar:

$$f(z) = z^3 + 3z^2 + 1.$$

Příklad 4.5

$$\begin{aligned} w &= f_4(f_3(f_2(f_1(z)))) = f_4(f_3(f_2(e^{\frac{1}{2}j(a-b)} \cdot z))) = \\ &= f_4(f_3(|a|e^{\frac{1}{2}j(a-b)} \cdot z + |b|e^{\frac{1}{2}j(b-a)} \cdot \bar{z})) = \\ &= f_4(|a|e^{\frac{1}{2}j(a-b)} \cdot e^{\frac{1}{2}j(a+b)} \cdot z + |b|e^{\frac{1}{2}j(b-a)} \cdot e^{\frac{1}{2}j(a+b)} \cdot \bar{z}) = \\ &= |a|e^{\frac{1}{2}j(a-b)} \cdot e^{\frac{1}{2}j(a+b)} \cdot z + |b|e^{\frac{1}{2}j(b-a)} \cdot e^{\frac{1}{2}j(a+b)} \cdot \bar{z} + c = \\ &= |a|e^{ja} \cdot z + |b|e^{jb} \cdot \bar{z} + c = az + b\bar{z} + c. \end{aligned}$$

A to jsme měli ukázat.

Příklad 4.6 a) Platí $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + j \cdot \arg(z) + 2kpj$.

$$\begin{aligned} \text{Tedy } \operatorname{Ln}(-9j) &= \ln(-9j) + 2kpj = \ln 9 + j \cdot \frac{3}{2}p + 2kpj = \\ &= 2 \ln 3 + \left(\frac{3}{2} + 2k\right)pj. \end{aligned}$$

b) Platí $z^c = e^{c \cdot \operatorname{Ln} z}$.

$$\begin{aligned} \text{Tj. } (-2)^{\sqrt{2}} &= e^{\sqrt{2} \operatorname{Ln}(-2)} = e^{\sqrt{2}(\ln(2) + jp + 2kpj)} = 2^{\sqrt{2}} \cdot e^{\sqrt{2}(2k+1)pj} = \\ &= 2^{\sqrt{2}} \left(\cos \sqrt{2}(2k+1)p + j \cdot \sin \sqrt{2}(2k+1)p \right). \end{aligned}$$

Kontrolní příklady ke kapitole 5

Příklad 5.1 Máme $z = 1 + tj$, tj. $dz = j dt$.

$$\int_g z dz = \int_{-1}^1 (1 + tj)j dt = \int_{-1}^1 -t dt + j \int_{-1}^1 1 dt = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + 2j = 2j$$

Příklad 5.2 a) $n = 2$:

$$\begin{aligned} \int_g (z-1)^2 dz &= \int_0^{2p} r^2 e^{2jt} r j e^{jt} dt = r^3 j \int_0^{2p} e^{3jt} dt = r^3 j \left[\frac{e^{3jt}}{3j} \right]_0^{2p} = \\ &= \frac{r^3 j}{3j} (e^{6pj} - e^0) = r^3(1-1) = 0 \end{aligned}$$

b) $n = -1$:

$$\int_g \frac{1}{z-1} dz = \int_0^{2p} \frac{1}{r e^{jt}} r j e^{jt} dt = j \int_0^{2p} dt = 2pj$$

Příklad 5.3 Integrál nejprve upravíme $\int_g \frac{dz}{z(z^2-1)} = \int_g \frac{1}{z(z+1)(z-1)} dz$ a použijeme Cauchyho vzorec. Funkce $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ je zřejmě na kružnici g , jakož i v jejím vnitřku, holomorfní. Podle Cauchyho vzorce tedy máme:

$$\int_g \frac{dz}{z(z^2-1)} = \int_g \frac{1}{z(z+1)(z-1)} dz = 2pj \left[\frac{1}{z(z+1)} \right]_{z=1} = pj.$$

Příklad 5.4 Využijeme vztahu $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ pro $|q| < 1$. Upravme nejprve danou funkci $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{-1}{z-2} + \frac{1}{z-3}$.

Pak

$$\frac{-1}{z-2} = \frac{-1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} \quad \text{pro } \left|\frac{2}{z}\right| < 1,$$

tj. $|z| > 2$;

$$\frac{1}{z-3} = \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \quad \text{pro } \left|\frac{z}{3}\right| < 1, |z| < 3.$$

Celkem dostáváme

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \quad \text{pro } 2 < |z| < 3.$$

Příklad 5.5 a) Laurentova řada pro $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots$;

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!} z^{-1} + \frac{1}{2!} z^{-2} + \dots$$

Regulární část je tvořena číslem 1, hlavní část má nekonečně mnoho členů. Bod $z = 0$ je tedy *podstatnou singularitou*.

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{\sin z}{z} &= \frac{1}{z} \sin z = \frac{1}{z} \left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) = \\ &= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + \dots \end{aligned}$$

Řada má pouze regulární část, jde tudíž o *odstranitelnou singularitu*.

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{\sin z}{z^3} &= \frac{1}{z^3} \left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!} + \dots \end{aligned}$$

Pro hlavní část platí $a_{-2} = 1$, $a_n = 0$ pro $n > 2$. V tomto případě jde tedy o *pól 2. řádu*.

Příklad 5.6 a) Uvažujeme funkci $g(z) = \frac{1}{f(z)} = z^3 - z^5 = z^3(1-z)(1+z)$. Tato funkce má nulové body $z_i = 0, 0, 0, 1, -1$. Funkce $f(z)$ má tedy v bodě $z = 0$ pól 3. řádu, v bodě $z = 1$ a $z = -1$ pól 1. řádu.

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_0 f &= \operatorname{res} f(z)_{z=0} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \left(z^n \frac{1}{z^3 - z^5} \right)^{(n-1)} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \left(z^3 \frac{1}{z^3 - z^5} \right)'' \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - z^2} \right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2(1 + 4z^2)}{(1 - z^2)^2} = 1, \end{aligned}$$

$$\operatorname{res}_1 f = \lim_{z \rightarrow 1} \left((z-1) \frac{1}{z^3 - z^5} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{-1}{z^3(1+z)} \right) = -\frac{1}{2},$$

$\operatorname{res}_{-1} f = -\frac{1}{2}$, neboť součet reziduí ve všech bodech singulárních bodech (včetně bodu $z = \infty$, kde je ovšem rovno nule) musí být roven nule.

b) Singulární body získáme z rovnosti $\sin z = 0$. Řešením jsou body $z = k\pi \dots$ jde o póly 1. řádu.

Pro pól 1. řádu platí:

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z)}{g'(z)} \Big|_{z_0}.$$

V našem případě

$$\operatorname{res}_{k\pi} f(z) = \frac{1}{\cos k\pi} = (-1)^k.$$

Příklad 5.7 Vydeme z následujících vztahů:

$$e^{jx} = z, \quad \cos x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \sin x = \frac{z - \bar{z}}{2j}, \quad dx = -j \frac{dz}{z}$$

a uvažujme kružnici $K : z = e^{jt}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Pak

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} (\cos^4 x + \sin^4 x) dx = -j \int_K \left[\left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right)^4 + \left(\frac{1}{2j} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right)^4 \right] \frac{dz}{z} = \\ &= -j \int_K \left[\left(\frac{z^2 + 1}{2z} \right)^4 + \left(\frac{z^2 - 1}{2jz} \right)^4 \right] \frac{dz}{z} = -\frac{j}{2^4} \int_K \left[(z^2 + 1)^4 + \frac{1}{j^4} (z^2 - 1)^4 \right] \frac{dz}{z} = \\ &= -\frac{j}{2^4} \int_K [2z^8 + 12z^4 + 2] \frac{dz}{z^5} = -\frac{j}{2^4} \cdot 2\pi j \cdot \sum_{|z| \leq 1} \operatorname{res} \frac{1}{z^5} (2z^8 + 12z^4 + 2) \end{aligned}$$

Singulárním bodem je bod $z_0 = 0$ a jde o pól 5. řádu. Pak

$$I = \frac{p}{2^3} \operatorname{res}_{z_0} \frac{1}{z^5} (2z^8 + 12z^4 + 2) = \frac{p}{8} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{4!} \left(z^5 \frac{1}{z^5} (2z^8 + 12z^4 + 2) \right)^{(4)} =$$

$$\frac{p}{8} \frac{1}{4!} \lim_{z \rightarrow 0} (3360z^4 + 288) = \frac{p}{8} \frac{1}{24} \cdot 288 = \frac{3p}{2}.$$

Příklad 5.8 Funkce $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$ je v Gaussově horní polorovině holomorfní

s výjimkou dvou prostých pólů $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j$, $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j$.

Dále zřejmě platí, že funkce $z \cdot f(z)$ konverguje k nule stejnoměrně.

Máme tedy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = 2p j \cdot \left(\operatorname{res}_{z_1} \frac{1}{z^4 + 1} + \operatorname{res}_{z_2} \frac{1}{z^4 + 1} \right)$$

$$\operatorname{res}_{z_1} \frac{1}{z^4 + 1} = \frac{1}{(z^4 + 1)'} \Big|_{z_1} = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j \right)^3} = \frac{1}{-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}j}$$

$$\operatorname{res}_{z_2} \frac{1}{z^4 + 1} = \frac{1}{4z_2^3} = \frac{1}{4 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j \right)^3} = \frac{1}{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}j}.$$

Celkem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = 2p j \cdot \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}j} + \frac{1}{-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}j} \right) \right) =$$

$$= p j \frac{2\sqrt{2}j}{-2-2} = \frac{\sqrt{2}}{2} p.$$

Kontrolní příklady ke kapitole 6

Příklad 6.1 Vyšetřujeme funkci $f(t) = e^{2t} \cdot h(t)$. Je třeba ověřit 3 definiční podmínky:

- 1) $f(t)$ i $f'(t) = 2e^{2t} \cdot h(t)$ jsou po částech spojité,
- 2) $f(t) = 0$ pro $t < 0$,

$$3) \quad |f(t)| = f(t) = e^{2t} \cdot h(t) \leq M \cdot e^{st} \quad \forall t \in \mathfrak{R}$$

zřejmě stačí volit $M = 1, s = 3$.

$$\begin{aligned} \text{Příklad 6.2} \quad h(t) * \exp(-t) &= \int_0^t h(t) \cdot \exp(-t-t) dt = \int_0^t \exp(-t-t) dt = \\ &= [-\exp(-t-t)]_0^t = -1 + \exp(-t) = \exp(-t) - 1. \end{aligned}$$

Příklad 6.3 Funkce $f(t)$ je periodická s periodou $T = \frac{2p}{w}$. Rozepíšeme původní funkci

$$\text{takto:} \quad f(t) = f_T(t) + f(t-T), \text{ kde funkce } f_T = \begin{cases} f(t) & t \in \langle 0, T \rangle \\ 0 & t \notin \langle 0, T \rangle \end{cases}.$$

$$\text{Pak obraz } F(p) = F_T(p) + F(p) \exp(-pT) \quad , \text{ tj. } F(p) = \frac{F_T(p)}{1 - \exp(-pT)},$$

$$\text{Kde } F_T(p) = \int_0^T f_T(t) \exp(-pt) dt = \int_0^T \cos(wt) \exp(-pt) dt.$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos(wt) \exp(-pt) dt &= \left| \begin{array}{l} u = \cos(wt) \quad u' = -\sin(wt) \cdot w \\ v' = \exp(-pt) \quad v = -\frac{1}{p} \exp(-pt) \end{array} \right| = \\ &= \left[-\frac{1}{p} \exp(-pt) \cos(wt) \right]_0^T - \int_0^T \frac{1}{p} w \sin(wt) \exp(-pt) dt = \left| \begin{array}{l} u = \sin(wt) \quad u' = \cos(wt) \cdot w \\ v' = \exp(-pt) \quad v = -\frac{1}{p} \exp(-pt) \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \exp(-pT) + \left[\frac{1}{p} \exp(-pt) \sin(wt) \right]_0^T - \int_0^T \frac{w^2}{p^2} \cos(wt) \exp(-pt) dt = \\ &= \frac{1}{p} (1 - \exp(-pT)) - \frac{w^2}{p^2} \int_0^T \cos(wt) \exp(-pt) dt \\ &\Rightarrow \left(1 + \frac{w^2}{p^2} \right) \int_0^T \cos(wt) \exp(-pt) dt = \frac{1}{p} (1 - \exp(-pT)) \\ &\Rightarrow \int_0^T \cos(wt) \exp(-pt) dt = \frac{p^2}{p^2 + w^2} \frac{1}{p} (1 - \exp(-pT)). \end{aligned}$$

Celkem tedy

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + w^2}.$$

Příklad 6.4 Nejprve je třeba transformovat zadanou rovnici. Platí:

$$L(y''') = p^3 Y - p^2 y(0) - py'(0) - y''(0),$$

$$L(y'') = p^2 Y - py(0) - y'(0),$$

kde $L(y) = Y$ značí Laplaceovu transformaci y . Rovnice pak přejde na rovnici:

$$2p^3 Y - 0 - 0 - 8 + 4p^2 Y - 0 - 0 = 0.$$

Tj.

$$Y(2p^3 + 4p^2) = 8$$

$$Y = \frac{8}{(2p^3 + 4p^2)}.$$

Máme tedy řešení $Y(p)$. Nyní je třeba nalézt vzor, tj. funkci $y(t)$. K tomu bude vhodné použít rozklad na parciální zlomky

$$\frac{8}{(2p^3 + 4p^2)} = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+2} = 2 \frac{1!}{p^2} - \frac{0!}{p} + \frac{1}{p - (-2)}.$$

Hledané řešení diferenciální rovnice je tedy

$$y(t) = 2t - 1 + \exp(-2t).$$

Příklad 6.5 Opět provedeme transformaci zadané rovnice:

$$p^2 Y - py(0) - y'(0) + pY - y(0) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$Y(p^2 + p) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$Y = \frac{1}{(p^2 + p)(p^2 + 1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \frac{1}{p+1} - \frac{1}{2} \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Řešení má potom tvar

$$y = 1 - \frac{1}{2} \exp(-t) - \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} \sin t.$$

Kontrolní příklady ke kapitole 7

Příklad 7.1 Uvažujeme funkci f jako periodickou s periodou $2p$. Máme tedy

$$T = 2p, \quad w = \frac{2p}{T} = 1. \text{ Funkce je sudá } \Rightarrow b_n = 0, n = 0, 1, 2, \mathbf{K}$$

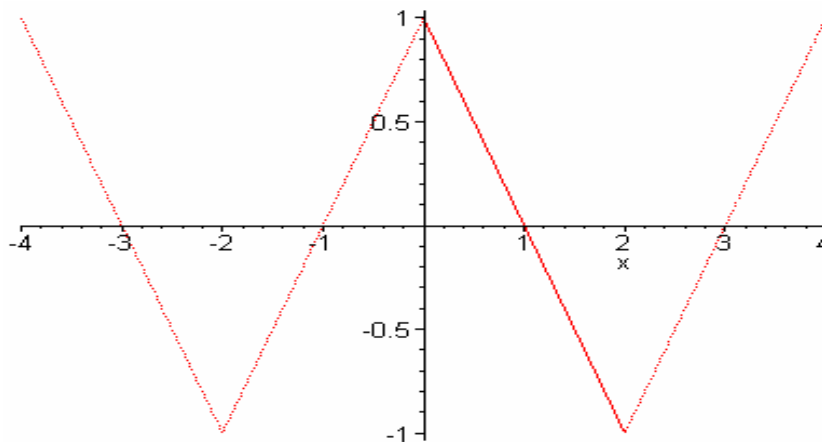
$$\text{Dále} \quad a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p x^2 dx = \frac{2}{p} \frac{p^3}{3} = \frac{2}{3} p^2,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2p} \int_{-p}^p x^2 \cos nx dx = \frac{2}{p} \int_0^p x^2 \cos nx dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \quad u' = 2x \\ v' = \cos nx \quad v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right| = \\ &= \frac{2}{p} \left(\left[x^2 \frac{\sin nx}{n} \right]_0^p - \int_0^p \frac{2x}{n} \sin nx dx \right) = \left| \begin{array}{l} u = x \quad u' = 1 \\ v' = \sin nx \quad v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right| = \\ &= \frac{2}{p} \left(\frac{2}{n} \left[x \frac{\cos nx}{n} \right]_0^p - \frac{2}{n} \int_0^p \frac{1}{n} \sin nx dx \right) = \frac{4}{n^2} \cos np - \frac{4}{pn^2} \left[\frac{1}{n} \sin nx \right]_0^p = \\ &= \frac{4}{n^2} \cos np = \frac{4}{n^2} (-1)^n. \end{aligned}$$

Fourierova řada má tedy tvar:

$$f(x) = \frac{p^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, \quad x \in \langle -p, p \rangle.$$

Příklad 7.2 Máme-li najít kosinový rozvoj $f(x) = 1 - x$ pro $x \in \langle 0, 2 \rangle$, musíme zadanou funkci doplnit na sudou periodickou funkci f^* , tj.



$$T = 4, \quad w = \frac{2p}{T} = \frac{p}{2}. \text{ Funkce je sudá } \Rightarrow b_n = 0, n = 0, 1, 2, \mathbf{K}$$

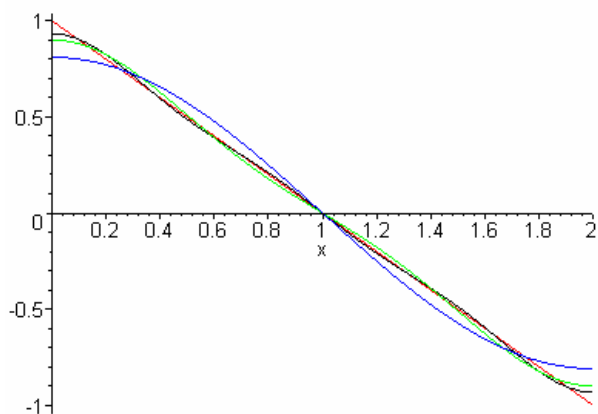
$$\text{Dále} \quad a_0 = \int_0^2 (1 - x) dx = 0,$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f^*(x) \cos \frac{np x}{2} dx = \int_0^2 f^*(x) \cos \frac{np x}{2} dx = \int_0^2 (1-x) \cos \frac{np x}{2} dx = \\
 &= \left[\frac{2}{np} (1-x) \sin \frac{np x}{2} \right]_0^2 + \frac{2}{np} \int_0^2 \sin \frac{np x}{2} dx = \frac{4}{n^2 p^2} \left[-\cos \frac{np x}{2} \right]_0^2 = \\
 \frac{4}{n^2 p^2} (1 - \cos np) &= \begin{cases} 0 & n \text{ sudé} \\ \frac{8}{n^2 p^2} & n \text{ liché} \end{cases} .
 \end{aligned}$$

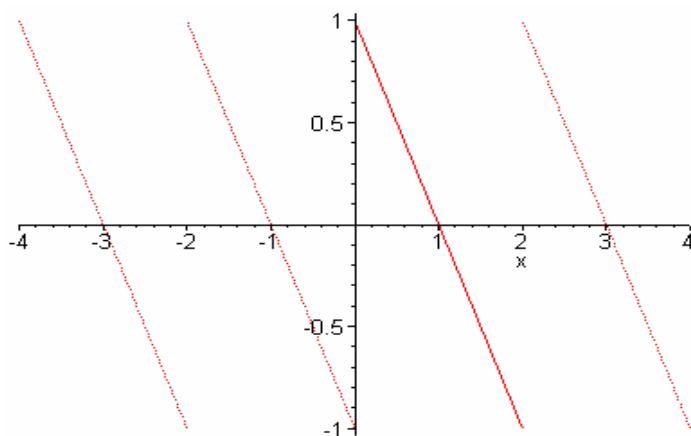
Fourierův kosinový rozvoj pak vypadá takto:

$$f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 p^2} (1 - \cos np) \cos \frac{np x}{2}, \quad x \in \langle 0, 2 \rangle.$$

Jak vypadá tento rozvoj pro $n=1, 3, 5$ ilustruje následující obrázek:



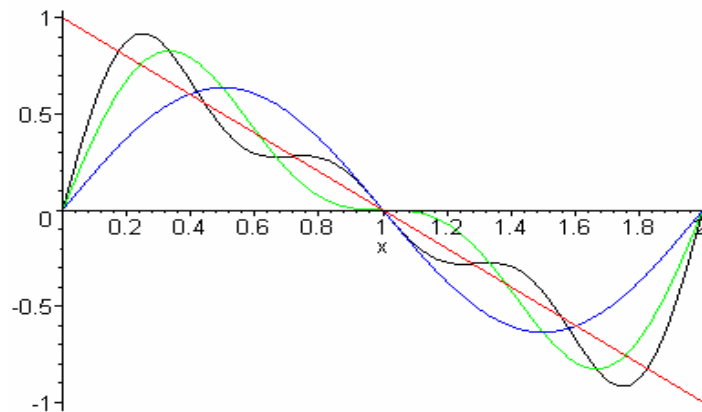
Příklad 7.3



Fourierův sinový rozvoj pak vypadá takto:

$$f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^n + 1}{np} \sin \frac{np x}{2}, \quad x \in \langle 0, 2 \rangle.$$

Jak vypadá tento rozvoj pro $n=3,5,7$ ilustruje následující obrázek



Kontrolní příklady ke kapitole 8

Příklad 8.1 Posloupnost má tvar $f_n = \frac{1}{2^{n+1}}(1 - (-1)^n)$.

Transformace Z má podle definice tvar

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{2^n z^n} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2z)^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2z}\right)^n \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2z}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{2z}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2z + 4z^2 - 2z + 4z^2}{1 - 4z^2} \right) = \frac{4z^2}{1 - 4z^2}. \end{aligned}$$

Příklad 8.2 Přímo z definice konvoluce dostáváme:

a) $f_n = 2^n, g_n = 2^n,$

$$2^n * 2^n = \sum_{k=0}^n 2^k \cdot 2^{n-k} = \sum_{k=0}^n 2^n = (n+1) \cdot 2^n;$$

b) $f_n = 2^n, g_n = 2^{-n},$

$$2^n * 2^{-n} = \sum_{k=0}^n 2^k \cdot 2^{-n-k} = \sum_{k=0}^n 2^{-n} = (n+1) \cdot 2^{-n};$$

c) $f_n = 2^{-n}, g_n = 2^n,$

$$2^{-n} * 2^n = \sum_{k=0}^n 2^{-k} \cdot 2^{n-k} = 2^n \sum_{k=0}^n 2^{-2k} = 2^n \frac{1 - 2^{-2(n+1)}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} (2^n - 2^{-n-2}).$$

Příklad 8.3 Nejprve přepíšeme funkční předpis zadané posloupnosti pomocí exponenciální funkce:

$$f_n = \sin(nc) = \frac{\exp(jnc) - \exp(-jnc)}{2j} = \frac{1}{2j} \left((\exp(jc))^n - (\exp(-jc))^n \right).$$

Potom

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2j} \left(\frac{z}{z - \exp(jc)} - \frac{z}{z - \exp(-jc)} \right) = \frac{1}{2j} \left(\frac{z^2 - z \exp(-jc) - z^2 + z \exp(jc)}{(z - \exp(jc))(z - \exp(-jc))} \right) = \\ &= \frac{1}{2j} \frac{z \cdot 2j \cdot \sin(c)}{z^2 - 2 \cos(c) \cdot z + 1} = \frac{z \sin(c)}{z^2 - 2z \cdot \cos(c) + 1}. \end{aligned}$$

Příklad 8.4 Nejprve rozložíme zadanou funkci na parciální zlomky:

$$\frac{7z^2 + 2z - 1}{z(z^2 - 1)} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z + 1} + \frac{4}{z - 1}.$$

Pro zpětnou transformaci racionálních zlomků platí **Věta 9.5** a **Věta 9.6**. V našem případě tedy dostáváme

$$f_n = \{0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \mathbf{K}\} + 2 \cdot \{0, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \mathbf{K}\} + 4 \cdot \{0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \mathbf{K}\},$$

tj.
$$f_n = \{0, 7, 2, 6, 2, 6, 2, \mathbf{K}\}.$$

Seznam použité literatury

- [1] Abramowitz M., Stegun I.A.: Handbook of Mathematical Functions. National Bureau of Standards, 1964 (též ruský překlad z roku 1979).
- [2] Čermák J., Ženíšek A.: Matematika III. Skriptum VUT v Brně, 2001.
- [3] Diblík J., Baštinec J.: Matematika III. Skriptum VUT v Brně, 1991.
- [4] Ditkin V.A., Kuzněcov P.T.: Příručka operátorového počtu. NČSAV Praha 1954.
- [5] Elaydi S.N.: An Introduction to Difference Equations. Springer Verlag 1999.
- [6] Eliáš J., Horváth J., Kajan J.: Zbierka úloh z vyššej matematiky 3. Alfa Bratislava 1971.
- [7] Eliáš J., Horváth J., Kajan J.: Zbierka úloh z vyššej matematiky 4. Alfa Bratislava 1972.
- [8] Erdelyi A et al.: Tables of Integral Transforms. McGraw-Hill, New York 1954.
- [9] Frank L.: Matematika. SNTL Praha, 1973.
- [10] Fuchs P.: Matematika 2 – Laboratorní příklady. ET
- [11] Hlávka J., Klátil J., Kubík S.: Komplexní proměnná v elektrotechnice. SNTL Praha 1990.
- [12] Horová I.: Numerické metody. Skriptum MU v Brně, 1999.
- [13] Jirásek F., Čipera S., Vacek M.: Sběrka řešených příkladů z matematiky II. SNTL Praha, 1989.
- [14] Jirásek F., Benda J., Čipera S., Vacek M.: Sběrka řešených příkladů z matematiky III. SNTL Praha, 1989.
- [15] Kalas J., Ráb M.: Obyčejné diferenciální rovnice. Skriptum MU Brno, 1995.
- [16] Kamke E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I. AVG Leipzig, 1961 (též rusky Nauka Moskva, 1965).
- [17] Kolářová E.: Matematika 2 – Sběrka příkladů. ET
- [18] Kuben J.: Obyčejné diferenciální rovnice. Skriptum VA v Brně, 1991.
- [19] Kufner A., Kadlec J.: Fourierovy řady. Academia Praha 1969.
- [20] Kurzweil J.: Obyčejné diferenciální rovnice. SNTL Praha, 1978.
- [21] Lavrentěv M.A., Šabat B.V.: Metody teorii funkcij komplexnogo peremennogo. Izdatelstvo F-M literatury Moskva, 1958 (rusky).
- [22] Mayer D.: Úvod do teorie obvodů. SNTL Praha 1978.
- [23] Moon P., Spenser D.E.: Teoria pola. Państwowe wydawnictwo naukowe Warszawa, 1966 (polsky).
- [24] Nekvinda M., Šrubař J., Vild J.: Úvod do numerické matematiky. SNTL Praha 1976.
- [25] Přikryl P.: Numerické metody matematické analýzy. SNTL Praha, 1985.

- [26] Pták P.: Calculus II, A Course for Engineers. Skriptum ČVUT Praha, 1997.
- [27] Rektorys K.: Přehled užití matematiky. SNTL Praha 1963.
- [28] Škrášek J., Tichý Z.: Základy aplikované matematiky II. SNTL Praha 1986.
- [29] Šulista M.: Základy analýzy v komplexním oboru. SNTL Praha, 1981.
- [30] Valsa J., Dědek L., Čermák P.: Teoretická elektrotechnika II. Skriptum VUT v Brně, 1991.
- [31] Veit J.: Integrální transformace. SNTL Praha, 1979.
- [32] Vitásek E.: Numerické metody. SNTL Praha, 1987.