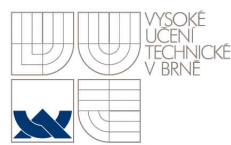


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

Vybrané partie z matematiky II

(Elektrotechnika, elektronika, komunikační a řídicí technika)

Irena Hlavičková
Edita Kolářová
Zdeněk Šmarda



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Ústav matematiky FEKT VUT v Brně, 2014

<http://www.umat.feec.vutbr.cz>

Tento text byl vytvořen v rámci realizace projektu CZ.1.07/2.2.00/15.0156,
Inovace výuky matematických předmětů v rámci studijních programů FEKT a FIT VUT v Brně.



Součástí tohoto učebního textu jsou odkazy na tzv. maplety, tj. programy vytvořené v prostředí Maple. Tyto odkazy jsou v textu zvýrazněny barvou, příp. uvozeny slovem *maplet*. Maplety ke svému běhu nevyžadují software Maple – je však nutné mít na klientském počítači nainstalováno prostředí Java a nastavenou vhodnou úroveň zabezpečení prohlížeče i prostředí Java. Po kliknutí na odkaz mapletu se v závislosti na softwarovém prostředí klientského počítače zobrazí různá hlášení o zabezpečení – všechny dialogy je třeba povolit a spouštění požadovaných prvků neblokovat.



Doplňující součástí tohoto učebního textu jsou příklady zpracované v [elektronické bance příkladů](#).

Obsah

Úvod	4
1 Základní pojmy z teorie integrálu funkce více proměnných	5
1.1 Plochy v \mathbb{R}^3	5
1.2 Výpočet n-rozměrného integrálu	10
1.3 Transformace integrálů	16
1.3.1 Polární souřadnice	16
1.3.2 Cylindrické souřadnice	17
1.3.3 Sférické souřadnice	19
2 Nevlastní vícerozměrný integrál	20
2.1 Míra neohraničených množin	20
2.2 Integrál neohraničené funkce přes ohraničenou množinu	22
2.3 Integrál funkce přes neohraničenou měřitelnou množinu	26
Cvičení	29
Výsledky	29
3 Impulzní funkce	30
3.1 Diracova zobecněná funkce $\delta(t)$	30
3.2 Vlastnosti Diracovy zobecněné funkce	32
3.3 Vztah jednotkové funkce a Diracova impulsu	35
3.4 Zobecněná derivace, derivace Diracovy distribuce	36
Cvičení	41
Výsledky	42
4 Řešení lineárních diferenciálních rovnic užitím váhové funkce	44
4.1 Cauchyova funkce, váhová funkce	44
4.2 Partikulární řešení nehomogenních rovnic	48
4.3 Vztah Diracova impulsu a váhové funkce	52
Cvičení	53
Výsledky	54
5 Systémy obyčejných diferenciálních rovnic	56
5.1 Základní pojmy	56
5.2 Existence a jednoznačnost řešení systémů dif. rovnic I. řádu	60

5.3	Systém lineárních diferenciálních rovnic I. řádu	62
5.3.1	Metoda variace konstant	64
5.4	Lineární systémy s konstantními koeficienty	66
5.4.1	Eliminační metoda	67
5.4.2	Metoda charakteristických čísel	71
5.4.3	Výpočet exponenciály matice	76
5.4.4	Metoda neurčitých koeficientů	80
5.5	Řešení lineárních systémů s nespojitou pravou stranou	83
5.6	Stabilita řešení systémů diferenciálních rovnic	88
5.6.1	Stabilita lineárních systémů	94
5.6.2	Hurwitzovo kritérium	96
5.6.3	Michajlovovo kritérium	98
	Cvičení	102
	Výsledky	106
	Literatura	111

Předmluva

Učební text Vybrané partie z matematiky II. vznikl inovací učebního textu Vybrané partie z matematiky autorů doc. RNDr. Zdeňka Šmardy, CSc. a Mgr. Ireny Růžičkové (viz. <http://matika.umat.feec.vutbr.cz/inovace/pred.php>) z roku 2005. Na základě analýzy potřeb oborových ústavů Fakulty elektrotechniky a komunikačních technologií (FEKT) VUT v Brně v oblasti aplikované matematiky bylo v roce 2010 doporučeno Radou studijních programů FEKT vytvořit z původního semestrálního předmětu dva navazující semestrální předměty Vybrané partie z matematiky I. a Vybrané partie z matematiky II., které by obsahovaly požadované nové tématické celky z oblasti aplikované matematiky.

Učební text Vybrané partie z matematiky II. navazuje na učební text Vybrané kapitoly z matematiky I. Kromě teorie nevlastního vícerozměrného integrálu a systémů diferenciálních rovnic, která byla převzata z původního textu a doplněna o grafické výstupy, jsou nově zařazeny tématické celky věnované impulzním funkcím, zobecněné derivaci a kvalitativním metodám řešení diferenciálních rovnic pomocí váhové funkce a její souvislosti s Diracovým impulsem. Jsou popsány i podmínky rovnovážného stavu dynamických systémů. K učebnímu textu byly vytvořeny maplety, které umožňují studentům generovat různé varianty příkladů s názorným řešením a případně i grafickým výstupem.

31. 3. 2014

Autoři

Úvod

Tento učební text by měl sloužit především posluchačům bakalářského studia FEKT VUT, kteří uvažují pokračovat v navazujícím magisterském studiu. Text předpokládá základní znalosti diferenciálního a integrálního počtu funkce více proměnných.

Cílem tohoto textu je vytvoření kontinuity matematických znalostí absolventů bakalářského studia při přechodu na navazující magisterské studium a to zejména v oblasti matematických modelů technických procesů reprezentovaných pomocí dynamických systémů.

Jeho obsahem je výklad nevlastního integrálu funkce více proměnných, spojitých dynamických systémů s využitím vlastností Diracova impulzu, které jsou reprezentovány obecně lineárními diferenciálními rovnicemi n -tého řádu, dále systémů lineárních diferenciálních rovnic s ohledem na kvalitativní metody řešení a to zejména eliminační metodu, metodu vlastních čísel a vektorů, metodu variace konstant, metodu neurčitých koeficientů a metodu založenou na výpočtu exponenciály matice. Závěrem jsou uvedeny dvě základní kritéria vyšetřování stability řešení a to Hurwitzovo a Michajlovovo kritérium. Jde o standardní součást matematické analýzy, která má velký význam v aplikacích.

Výklad nových důležitých pojmů obvykle motivujeme a doprovázíme ilustrujícím příkladem. Kromě toho je v textu zařazena řada řešených i neřešených příkladů, často i s aplikačním charakterem. Jejich počet je dostatečný k osvojení látky i samostatnému studiu.

1 Základní pojmy z teorie integrálu funkce více proměnných

1.1 Plochy v \mathbb{R}^3

Uvedme příklady zobrazení z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^3 , která budou mít význam v kapitolách vícerozměrného integrálu.

Příklad 1.1. Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, $M = \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle$,

$$\mathbf{f}(u, v) = (R \cos u \sin v, R \sin u \sin v, R \cos v), \quad R > 0.$$

Je tedy $u \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $v \in \langle 0, \pi \rangle$. Definující rovnice zobrazení \mathbf{f} můžeme napsat ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= f_1(u, v) = R \cos u \sin v \\ y &= f_2(u, v) = R \sin u \sin v \\ z &= f_3(u, v) = R \cos v \end{aligned} \quad (u, v) \in M.$$

$$\begin{aligned} \text{Odtud} \quad x^2 + y^2 + z^2 &= R^2 \cos^2 u \sin^2 v + R^2 \sin^2 u \sin^2 v + R^2 \cos^2 v = \\ &= R^2 \sin^2 v (\cos^2 u + \sin^2 u) + R^2 \cos^2 v = R^2. \end{aligned}$$

Tedy
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

což je implicitní rovnice *kulové plochy* o poloměru R se středem v počátku.

Geometrický význam daného zobrazení je na obrázku 1.1.

Příklad 1.2. Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, $M = \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle$,

$$\mathbf{f}(u, v) = (a \cos u \sin v, b \sin u \sin v, c \cos v),$$

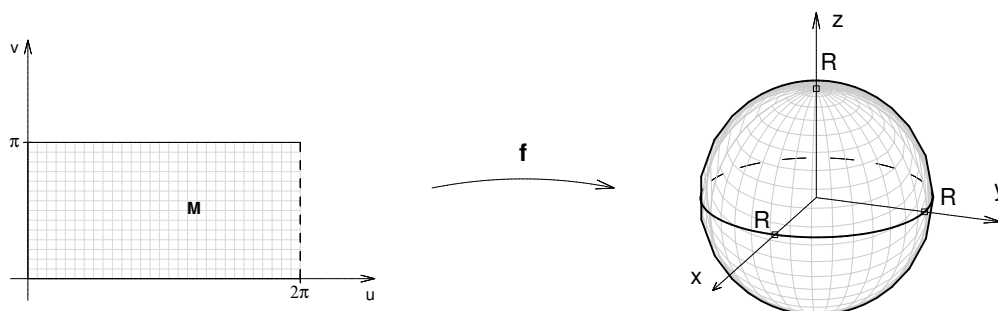
kde a, b, c jsou obecně navzájem různé kladné konstanty.

Je tedy opět $u \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $v \in \langle 0, \pi \rangle$ a platí

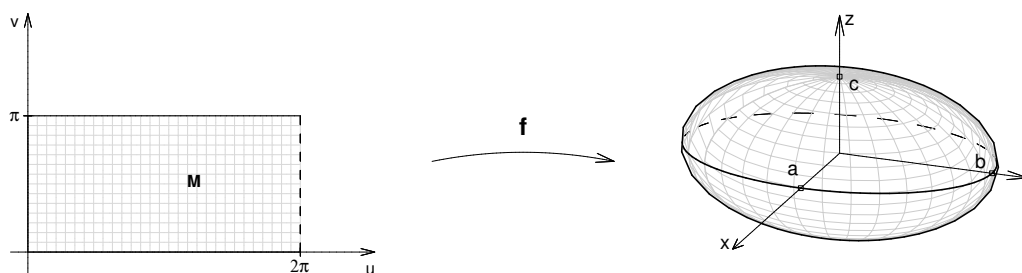
$$\begin{aligned} x &= a \cos u \sin v \\ y &= b \sin u \sin v \\ z &= c \cos v \end{aligned} \quad (u, v) \in M.$$

$$\text{Odtud} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u \sin^2 v + \cos^2 v = 1,$$

což je implicitní rovnice *trojosého elipsoidu*, který v případě $a = b$ přechází v *rotační elipsoid* s osou z (podobně i pro $a = c$ s osou y , $b = c$ s osou x). V případě $a = b = c$ pak v kulovou plochu (sféru). Geometrický význam zobrazení \mathbf{f} je na obrázku 1.2.



Obr. 1.1: Kulová plocha



Obr. 1.2: Trojosý elipsoid

Příklad 1.3. Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, $M = \langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$,

$$\mathbf{f}(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u^2),$$

kde a, b jsou obecně navzájem různé kladné konstanty. Tedy $u \in \langle 0, \infty \rangle$, $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a

$$\begin{aligned} x &= au \cos v \\ y &= bu \sin v \\ z &= u^2 \end{aligned} \quad (u, v) \in M.$$

Odtud

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v = u^2 = z.$$

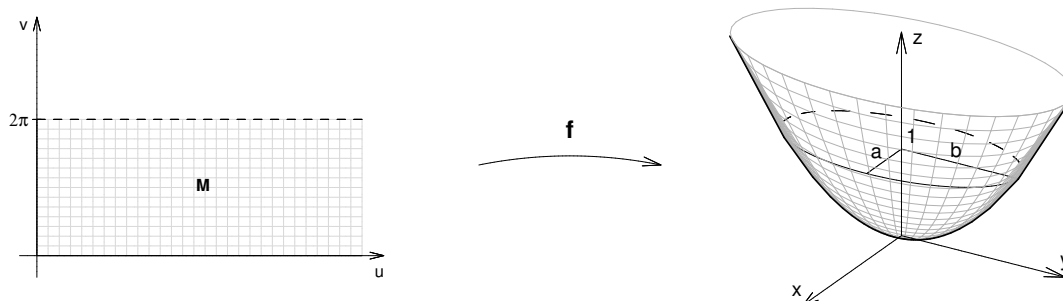
Tedy

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

což je rovnice *eliptického paraboloidu*. Je-li $a = b$, pak mluvíme o *rotačním paraboloidu*. Geometrický význam zobrazení \mathbf{f} je na obrázku 1.3.

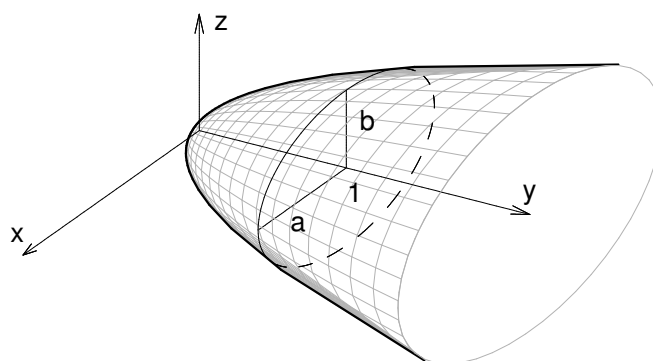
Rovnice $y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$ je opět rovnice eliptického paraboloidu s definujícími rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= au \cos v \\ y &= u^2 \\ z &= bu \sin v \end{aligned} \quad (u, v) \in M,$$



Obr. 1.3: Eliptický paraboloid

který má osu nikoliv v ose z , ale v ose y , viz obrázek 1.4.

Obr. 1.4: Eliptický paraboloid s osou v ose y

Podobně i $x = \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$ je rovnice eliptického paraboloidu s osou v ose x .

Příklad 1.4. Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, $M = (-\infty, \infty) \times \langle 0, 2\pi \rangle$,

$$\mathbf{f}(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u),$$

kde a, b jsou obecně navzájem různé kladné konstanty. Tedy $u \in (-\infty, \infty)$, $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a

$$\begin{aligned} x &= au \cos v \\ y &= bu \sin v \\ z &= u \end{aligned} \quad (u, v) \in M.$$

Odtud

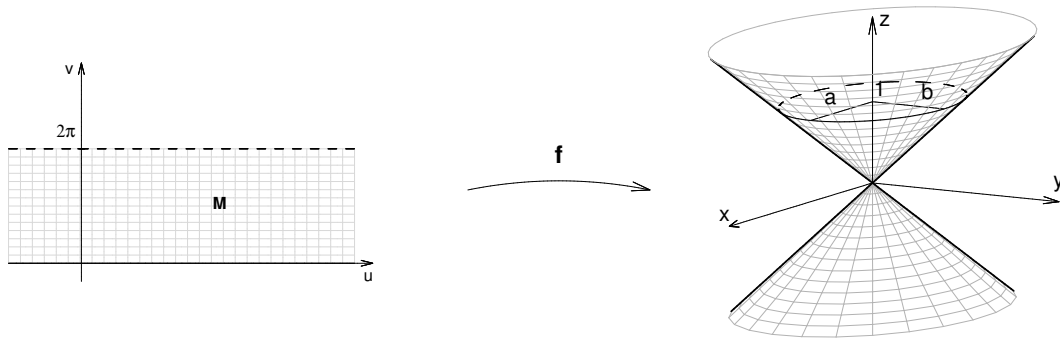
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v = u^2 = z^2.$$

Tedy

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

což je implicitní rovnice *eliptického kuželové plochy*. Je-li $a = b$, pak jedná se o *rotační kuželovou plochu*.

Geometrický význam zobrazení \mathbf{f} je na obrázku 1.5.



Obr. 1.5: Eliptická kuželová plocha

Rovnice $z = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}}$, resp. $z = -\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}}$, je rovnicí „horní“, resp. „dolní“ kuželové plochy.

Podobně $x^2 = \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$, resp. $y^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$, je rovnice kuželové plochy s osou v ose x , resp. v ose y .

Příklad 1.5. Necht' $M \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, $M = \langle 0, 2\pi \rangle \times (-\infty, \infty)$,

$$\mathbf{f}(u, v) = (a \cos u, b \sin u, v),$$

kde a, b jsou obecně navzájem různé kladné konstanty. Tedy $u \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $v \in (-\infty, \infty)$ a platí

$$\begin{aligned} x &= a \cos u \\ y &= b \sin u \quad (u, v) \in M. \\ z &= v \end{aligned}$$

Odtud

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 u + \sin^2 u = 1.$$

Tedy

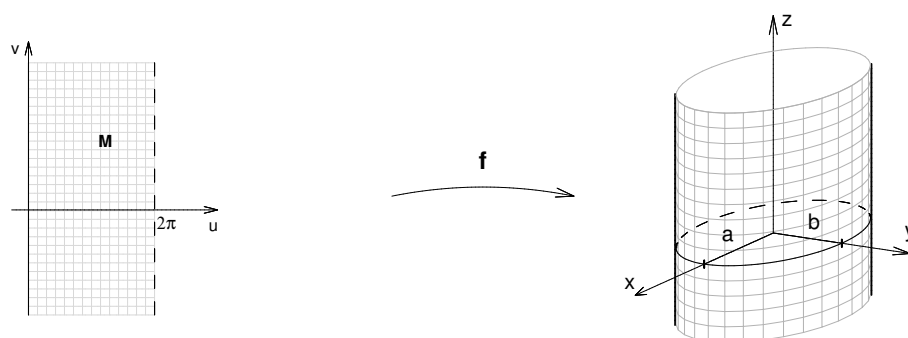
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

což je implicitní rovnice *eliptické válcové plochy*, $z \in (-\infty, \infty)$, s osou v ose z . Je-li $a = b$, jedná se o *rotační válcovou plochu*, tj $x^2 + y^2 = R^2$.

Geometrický význam zobrazení \mathbf{f} je na obrázku 1.6.

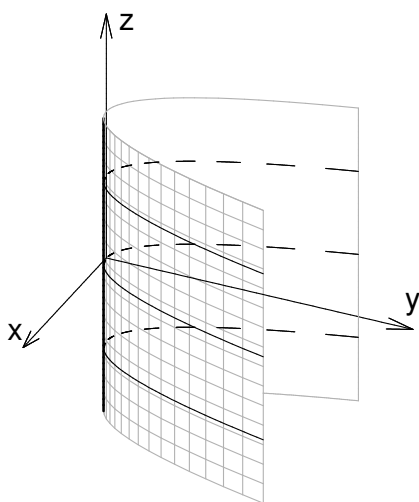
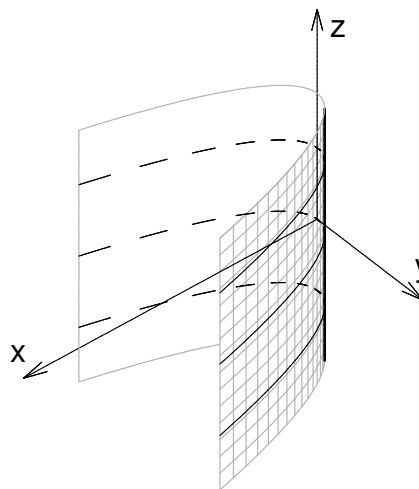
Podobně i $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, resp. $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, jsou eliptické válcové plochy s osami v ose y , resp. v ose x .

Analogicky $x^2 + z^2 = R^2$, resp. $y^2 + z^2 = R^2$, jsou rotační válcové plochy s osami v ose y , resp. v ose x .



Obr. 1.6: Eliptická válcová plocha

Odtud plyne, že rovnice kuželoseček v rovině jsou v prostoru rovnicemi válcových ploch. V případě rovnice paraboly, resp. hyperboly, mluvíme o *parabolické válcové ploše* (viz obrázky 1.7 a 1.8), resp. *hyperbolické válcové ploše*.

Obr. 1.7: Plocha $y = x^2$ Obr. 1.8: Plocha $y^2 = x$

Na parabolickou válcovou plochu $y = x^2$ se můžeme dívat jako na zobrazení

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ kde } M = (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty), \mathbf{f}(u, v) = (u, u^2, v), \text{ tj.}$$

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= u^2 \\ z &= v \end{aligned} \quad (u, v) \in M.$$

Podobně $y^2 = x$ lze reprezentovat zobrazením

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ kde } M = (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty), \mathbf{f}(u, v) = (u^2, u, v), \text{ tj.}$$

$$\begin{aligned}x &= u^2 \\y &= u \quad (u, v) \in M. \\z &= v\end{aligned}$$

1.2 Výpočet n-rozměrného integrálu

Výpočet n-rozměrného integrálu ($n \geq 2$) převádíme postupně na výpočet jednorozměrného integrálu. Uvažujme nejdříve dvojný integrál.

Věta 1.6. *Nechť $I \subset \mathbb{R}^2$ je kompaktní interval, $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$. Je-li $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ integrovatelná na I , pak existují integrály (dvojnásobné)*

$$\mathcal{I}_1 = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx, \quad \mathcal{I}_2 = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

a platí rovnost

$$\mathcal{I} = \int_I f(x, y) dx dy = \mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2.$$

Dvojměrný integrál se tedy vypočítá pomocí dvou určitých integrálů - postupnou integrací vždy podle jedné proměnné (analogie parciální derivace). Tento postup se přirozeným způsobem rozšíří na trojný (i n-rozměrný) integrál:

Nechť $I \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní interval, $I = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle$, a nechť $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovatelná funkce na I . Potom platí

$$\begin{aligned}\int_I f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) \cdots \right) dx_2 \right) dx_1 = \\ &= \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \left(\int_{a_{i_2}}^{b_{i_2}} \left(\cdots \left(\int_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{i_n} \right) \cdots \right) dx_{i_2} \right) dx_{i_1}\end{aligned}$$

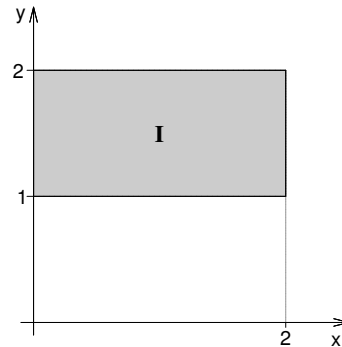
pro každou permutaci (i_1, i_2, \dots, i_n) množiny indexů $\{1, 2, \dots, n\}$.

Příklad 1.7. Vypočítejte integrál $\int_I x^2 y dx dy$, $I = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$.

Řešení. V tomto případě je kompaktní interval I obdélník.

$$\begin{aligned}\int_I x^2 y \, dx dy &= \int_0^2 \left(\int_1^2 x^2 y \, dy \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} dx = \\ &= \frac{3}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{3}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 4.\end{aligned}$$

Nebo

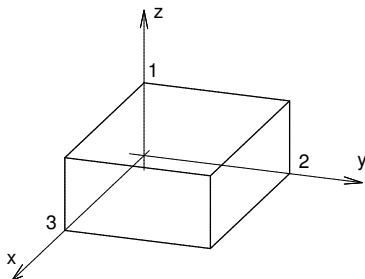


$$\int_I x^2 y \, dx dy = \int_1^2 \left(\int_0^2 x^2 y \, dx \right) dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=2} dy = \frac{8}{3} \int_1^2 y \, dy = \frac{8}{3} \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^2 = 4.$$

□

Příklad 1.8. Vypočítejte integrál $\int_I (x + y + z) \, dx dy dz$, $I = \langle 0, 3 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.

Řešení. V tomto případě je kompaktní interval kvádr.



$$\begin{aligned}\int_I (x + y + z) \, dx dy dz &= \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^3 (x + y + z) \, dx \right) dy \right) dz = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} + xy + xz \right]_{x=0}^{x=3} dy \right) dz = \\ &= 3 \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\frac{3}{2} + y + z \right) dy \right) dz = \\ &= 3 \int_0^1 \left[\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}y^2 + yz \right]_{y=0}^{y=2} dz = 3 \int_0^1 (5 + 2z) dz = 3 [5z + z^2]_0^1 = 18.\end{aligned}$$

□

Definice 1.9. V rovině rozumíme *elementární oblastí typu* $[x, y]$ množinu všech bodů $(x, y) \in M \subset \mathbb{R}^2$, jejichž souřadnice vyhovují nerovnostem

$$\begin{aligned}a &\leq x \leq b \\ f(x) &\leq y \leq g(x),\end{aligned}$$

kde $a, b, a < b$ jsou čísla a f, g jsou funkce spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$. Tedy

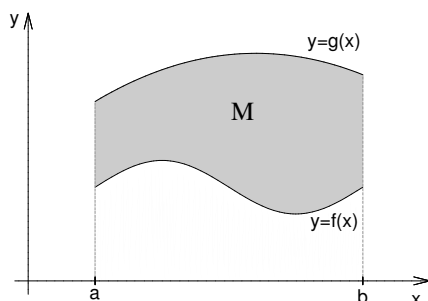
$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}. \quad \text{Viz obr.1.9}$$

Podobně je jistě možno definovat elementární oblast typu $[y, x]$; je jí taková množina $A \subset \mathbb{R}^2$ v rovině, pro jejíž body $(x, y) \in A$ platí nerovnosti

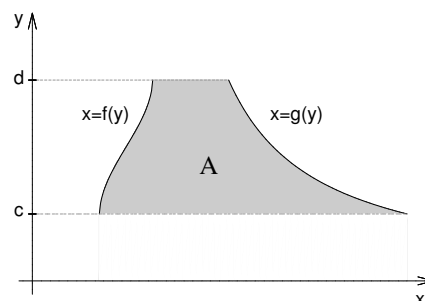
$$\begin{aligned} c &\leq y \leq d \\ f(y) &\leq x \leq g(y), \end{aligned}$$

kde funkce f, g jsou spojité na intervalu $\langle c, d \rangle$, tedy

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, f(y) \leq x \leq g(y)\}. \quad \text{Viz obr.1.10}$$



Obr. 1.9: Elem. oblast typu $[x, y]$



Obr. 1.10: Elem. oblast typu $[y, x]$

Jak tyto pojmy zobecníme do trojrozměrného prostoru?

Předně průmět do některé ze souřadnicových rovin musí být elementární oblast v rovině; mějme tedy množinu $M \subset \mathbb{R}^3$ takovou, že pro její body $(x, y, z) \in M$ platí $a \leq x \leq b$, $f_1(x) \leq y \leq g_1(x)$ – to znamená, že průmět množiny M do roviny xy je elementární oblast typu $[x, y]$.

Dále je potřeba omezit z -ové souřadnice; zde se již mohou vyskytovat funkce dvou proměnných. Tedy elementární oblastí typu $[x, y, z]$ v prostoru rozumíme množinu M , pro jejíž body $(x, y, z) \in M$ platí

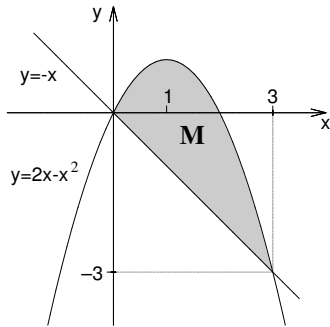
$$\begin{aligned} a &\leq x \leq b \\ f_1(x) &\leq y \leq g_1(x) \\ f_2(x, y) &\leq z \leq g_2(x, y) \end{aligned}$$

Podobně je možno definovat elementární oblasti typu $[y, z, x]$, $[z, y, x]$ atd.

Chceme-li tedy nějakou množinu $M \subset \mathbb{R}^3$ popsat jako elementární oblast, promítneme ji do některé souřadné roviny, průmět popíšeme jako elementární oblast a zbývající proměnnou ohraničíme dvěma funkcemi (plochami) obecně dvou proměnných.

Příklad 1.10. Rozhodněte, zda dané množiny jsou elementárními množinami.

a) Množina M ohraničená parabolou $y = 2x - x^2$ a přímkou $y = -x$.



Parabola $y = 2x - x^2$ má rovnici

$$y - 1 = -(x - 1)^2,$$

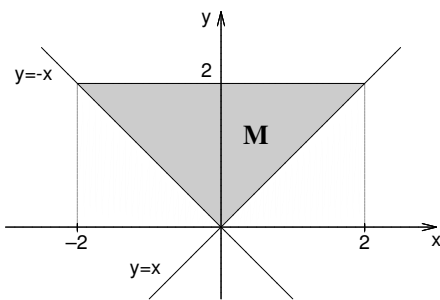
tedy vrchol v bodě $(1, 1)$, otevřená směrem dolů.

Průsečíky s přímkou $y = -x$ jsou v bodech $(0, 0)$, $(3, -3)$. Pro $(x, y) \in M$ tedy platí

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 3 \\ -x &\leq y \leq -x^2 + 2x \end{aligned}$$

Tedy M je elementární oblastí typu $[x, y]$.

b) Množina M zadaná nerovností $|x| \leq y \leq 2$.



Grafy funkcí $y = |x|$ a $y = 2$ se protínají v bodech $(-2, 2)$ a $(2, 2)$. Platí

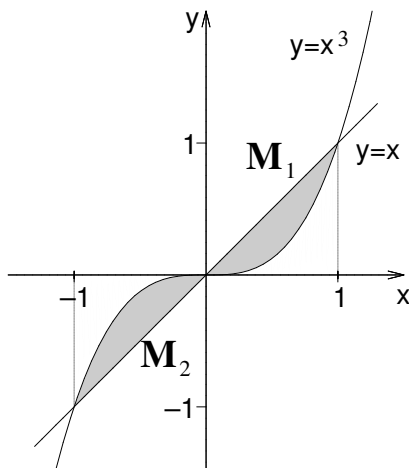
$$(x, y) \in M \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ |x| \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Výhodnější je v tomto případě vyjádření

$$(x, y) \in M \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ -y \leq x \leq y \end{cases}$$

Tedy M je elementární oblastí typu $[y, x]$.

c) Množina M ohraničená grafy funkcí $y = x$, $y = x^3$.



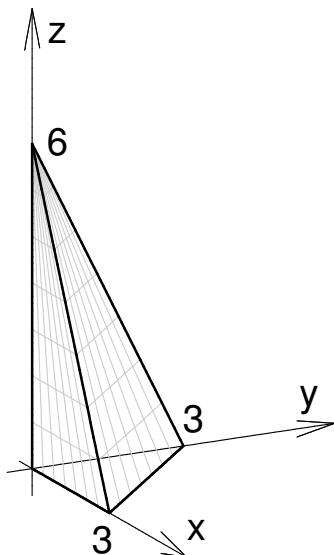
Množina M v tomto případě není elementární oblast; dá se vyjádřit jako sjednocení dvou elementárních oblastí, např. typu $[x, y]$:

$$M = M_1 \cup M_2$$

$$M_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq x\}$$

$$M_2 = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 0, x \leq y \leq x^3\}.$$

d) M je ohraničená plochami $2x + 2y + z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.



Rovina $2x + 2y + z = 6$ protíná souřadné osy v bodech o souřadnicích $x = 3$, $y = 3$, $z = 6$. Průmět množiny M do roviny je trojúhelník o vrcholech $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$. Platí tedy

$$(x, y, z) \in M \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 3 - x \\ 0 \leq z \leq 6 - 2x - 2y \end{cases}$$

M je v tomto případě čtyřstěn a jedná se o elementární oblast typu $[x, y, z]$.

Fubiniova věta pro výpočet integrálů se dá snadno rozšířit na elementární oblasti:

Věta 1.11. *Nechť*

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, d(x) \leq y \leq h(x)\}, \quad \text{resp.}$$

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, d_1(x) \leq y \leq h_1(x), d_2(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\},$$

kde d, h , resp. d_1, h_1, d_2, h_2 jsou spojité funkce. Pak, existuje-li

$$\mathcal{I} = \iint_M f(x, y) dx dy \quad \text{resp.} \quad \mathcal{I} = \iiint_M f(x, y, z) dx dy dz,$$

platí

$$\mathcal{I} = \int_a^b \left(\int_{d(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

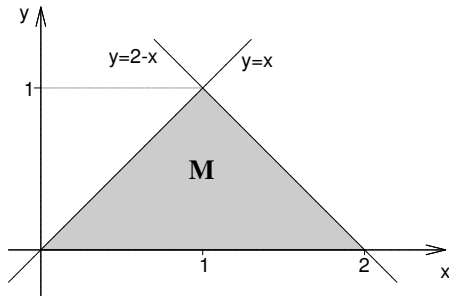
resp.

$$\mathcal{I} = \int_a^b \left(\int_{d_1(x)}^{h_1(x)} \left(\int_{d_2(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

Věta platí analogicky pro elementární oblasti typu $[y, x]$ nebo $[y, x, z]$ atd.

Příklad 1.12. Vypočtěte integrály

a) $\iint_M (x^2 + y) dx dy$, kde M je ohraničená přímkami $y = 0$, $y = x$, $x + y = 2$.



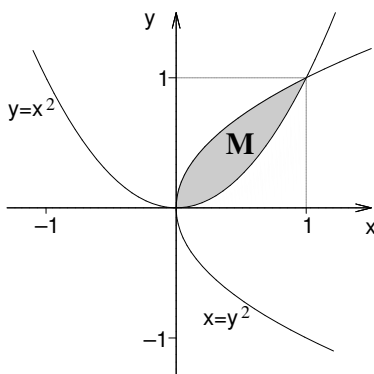
M je elementární oblast typu $[y, x]$ popsaná nerovnostmi

$$\begin{aligned} 0 &\leq y \leq 1 \\ y &\leq x \leq 2 - y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iint_M (x^2 + y) \, dx dy = \\ &= \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} (x^2 + y) \, dx \right) dy = \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + xy \right]_{x=y}^{x=2-y} dy = \int_0^1 \frac{2}{3} (4 - 3y - y^3) dy = \frac{2}{3} \left[4y - 3 \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{2}.$$

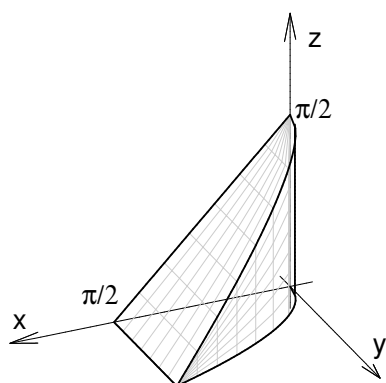
b) $\iint_M (x - y) \, dx dy$, kde M je ohraničená křivkami $y = x^2$, $y^2 = x$.



$$\begin{aligned} &\iint_M (x - y) \, dx dy = \\ &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x - y) \, dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left[xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \left(x^{3/2} - \frac{x}{2} - x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \left[\frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10} \right]_0^1 = 0.$$

c) $\iiint_M y \cos(z + x) \, dx dy dz$, kde M je ohraničená plochami $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $z = 0$, $x + z = \frac{\pi}{2}$.



Množina M je shora ohraničená rovinou $x + z = \frac{\pi}{2}$, dále souřadnicovými rovinami a parabolickou válcovou plochou $y = \sqrt{x}$. Průmět do souřadné roviny xy je shora ohraničen grafem funkce $y = \sqrt{x}$, dále osou x a přímkou $x = \frac{\pi}{2}$. Proto platí

$$\begin{aligned} \iiint_M y \cos(z+x) \, dx dy dz &= \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{x}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y \cos(z+x) \, dz \right) dy \right) dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{x}} [y \sin(z+x)]_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}-x} dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{x}} y(1 - \sin x) dy \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1 - \sin x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} + x \cos x - \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1.3 Transformace integrálů

Připomeňme, jak se počítal určitý integrál pomocí věty o substituci - stručně můžeme formulovat tuto větu takto:

Nechť f je integrovatelná funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$, φ diferencovatelná funkce. Potom

$$\int_a^b f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{array} \right| = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt,$$

přitom nové meze jsme obdrželi jako řešení rovnic $a = \varphi(t)$, $b = \varphi(t)$; tedy je-li φ prosté zobrazení, je $\langle \alpha, \beta \rangle = \varphi^{-1}(\langle a, b \rangle)$ -úplný vzor intervalu $\langle a, b \rangle$.

Analogicky budeme postupovat u transformací vícerozměrných integrálů, ovšem integrační obory již budou složitější a cílem při transformaci bude hlavně zjednodušit integrační obor - v určitém integrálu jsme zaváděli substituci, abychom zjednodušili integrand (k tomu budeme jistě přihlížet také).

Poznámka 1.13. V případě vícerozměrných integrálů hovoříme místo o substituci o transformaci, protože přecházíme od kartézských souřadnic k novým tzv. křivočarým souřadnicím - transformujeme souřadnice.

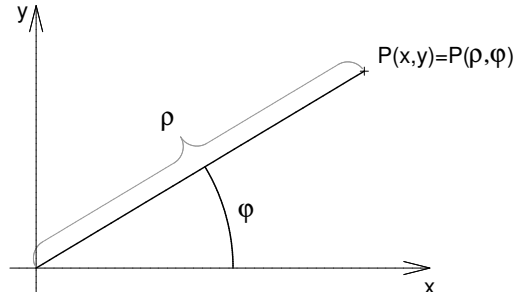
1.3.1 Polární souřadnice

Nejčastěji užívanou transformací v rovině je zobrazení pomocí *polárních souřadnic*. Zobrazení Φ je tvaru $\Phi(\rho, \varphi) = (\Phi_1(\rho, \varphi), \Phi_2(\rho, \varphi)) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$.

Transformační rovnice mají tvar

$$x = \Phi_1(\rho, \varphi) = \rho \cos \varphi$$

$$y = \Phi_2(\rho, \varphi) = \rho \sin \varphi$$



$$D\Phi(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho.$$

Jedná se o zobrazení $\Phi : \langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$ (nebo též $\Phi : \langle 0, \infty \rangle \times \langle -\pi, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$) a platí tedy vzorec

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \iint_A f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \cdot \rho d\rho d\varphi$$

Příklad 1.14. Vypočtěte $\iint_B \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, kde

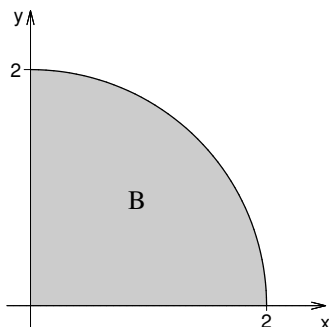
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Řešení. Máme

$$x = \rho \cos \varphi \quad \varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$$

$$y = \rho \sin \varphi \quad \rho \in \langle 0, 2 \rangle$$

V našem případě je tedy $A = \{(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$.



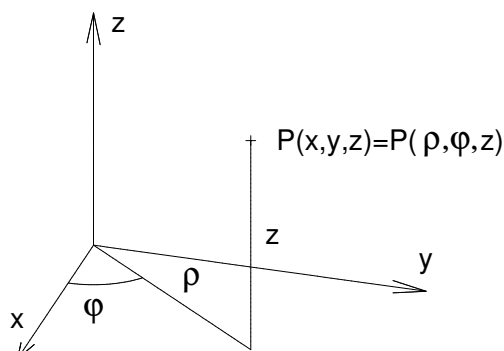
$$\begin{aligned} \iint_B \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_A \sqrt{\rho^2} \cdot \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 \rho^2 d\rho \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^2 d\varphi \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

□

1.3.2 Cylindrické souřadnice

Zobrazení Φ je tvaru

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = (\Phi_1(\rho, \varphi, z), \Phi_2(\rho, \varphi, z), \Phi_3(\rho, \varphi, z)) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z).$$



Transformační rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} x &= \Phi_1(\rho, \varphi, z) = \rho \cos \varphi \\ y &= \Phi_2(\rho, \varphi, z) = \rho \sin \varphi \\ z &= \Phi_3(\rho, \varphi, z) = z \end{aligned}$$

$$D\Phi(\rho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Jedná se o zobrazení $\Phi : \langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \times (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ (nebo též $\Phi : \langle 0, \infty \rangle \times \langle -\pi, \pi \rangle \times (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$) a platí

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_A f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \cdot \rho d\rho d\varphi dz$$

Cylindrické souřadnice používáme u integračních oborů, jejichž průměty do vhodné souřadnicové roviny lze vyšetřovat v polárních souřadnicích.

Příklad 1.15. Vypočítejte $\iiint_B (x^2 + y^2) dx dy dz$, kde

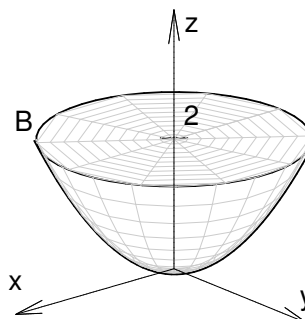
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq z \leq 2\}.$$

Řešení. Máme

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi & \varphi &\in \langle 0, 2\pi \rangle \\ y &= \rho \sin \varphi & \rho &\in \langle 0, 2 \rangle & |D\Phi| &= \rho \\ z &= z & z &\in \left\langle \frac{\rho^2}{2}, 2 \right\rangle \end{aligned}$$

Tedy $A = \{(\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \frac{\rho^2}{2} \leq z \leq 2\}$.

$$\begin{aligned} \iiint_B (x^2 + y^2) dx dy dz &= \iiint_A \rho^2 \cdot \rho d\rho d\varphi dz = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \left(\int_{\frac{\rho^2}{2}}^2 \rho^3 dz \right) d\rho \right) d\varphi = \dots = \frac{16\pi}{3}. \end{aligned}$$

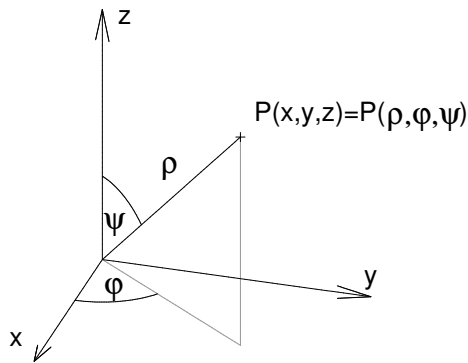


□

1.3.3 Sférické souřadnice

Zobrazení Φ je tvaru

$$\Phi(\rho, \varphi, \psi) = (\Phi_1(\rho, \varphi, \psi), \Phi_2(\rho, \varphi, \psi), \Phi_3(\rho, \varphi, \psi)) = (\rho \cos \varphi \sin \psi, \rho \sin \varphi \sin \psi, \rho \cos \psi).$$



Transformační rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} x &= \Phi_1(\rho, \varphi, \psi) = \rho \cos \varphi \sin \psi \\ y &= \Phi_2(\rho, \varphi, \psi) = \rho \sin \varphi \sin \psi \\ z &= \Phi_3(\rho, \varphi, \psi) = \rho \cos \psi \end{aligned}$$

$$D\Phi(\rho, \varphi, \psi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \psi & -\rho \sin \varphi \sin \psi & \rho \cos \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \sin \psi & \rho \cos \varphi \sin \psi & \rho \sin \varphi \cos \psi \\ \cos \psi & 0 & -\rho \sin \psi \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin \psi.$$

Jedná se o zobrazení $\Phi : \langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$ (nebo též $\Phi : \langle 0, \infty \rangle \times \langle -\pi, \pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$) a platí

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_A f(\rho \cos \varphi \sin \psi, \rho \sin \varphi \sin \psi, \rho \cos \psi) \cdot \rho^2 \sin \psi d\rho d\varphi d\psi$$

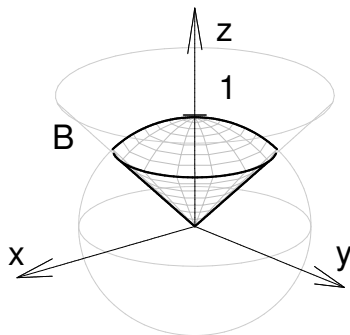
Příklad 1.16. Vypočtěte $\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, kde

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Řešení. Máme

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \sin \psi & \rho &\in \langle 0, 1 \rangle \\ y &= \rho \sin \varphi \sin \psi & \varphi &\in \langle 0, 2\pi \rangle \\ z &= \rho \cos \psi & \psi &\in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle \end{aligned}$$

Tedy $A = \{(\rho, \varphi, \psi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{4}\}.$



$$\begin{aligned} \iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz &= \\ &= \iiint_A \sqrt{\rho^2} \cdot \rho^2 \sin \psi d\rho d\varphi d\psi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^1 \rho^3 \sin \psi d\rho \right) d\psi \right) d\varphi = \\ &= \dots = \frac{\pi}{4} (2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

□

2 Nevlastní vícerozměrný integrál

2.1 Míra neohraničených množin

Definice 2.1. Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá *měřitelná*, jestliže pro každé $k \in \mathbb{N}$ je měřitelná ohraničená množina $A_k = A \cap \langle -k, k \rangle^n$ ($\langle -k, k \rangle^n$ je n -tá kartézská mocnina jednorozměrného intervalu $\langle -k, k \rangle$). V tom případě definujeme míru $\nu(A)$ takto:

$$\nu(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu(A_k). \quad (2.1)$$

Platí

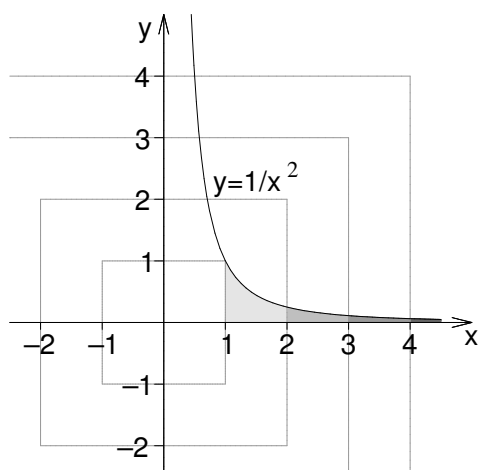
$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_k \subset \dots,$$

takže $\nu(A_1) \leq \nu(A_2) \leq \dots \leq \nu(A_k) \leq \dots$. Posloupnost čísel $\nu(A_k)$ ($k = 1, 2, \dots$) má tedy limitu. Tato limita však může být rovna $+\infty$. Například $\nu(\mathbb{R}^n) = +\infty$. Je-li A ohraničená množina, pak pro všechna dostatečně velká k je $A_k = A$, a tedy limita 2.1 je rovna míře $\nu(A)$, jak byla definována dříve.

Definice 2.2. Množina A se nazývá *nulová*, je-li $\nu(A) = 0$.

Příklad 2.3. Nechť $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle 1, \infty \rangle, 0 \leq y \leq 1/x^2\}$. Zjistěte, zda je A měřitelná, a v kladném případě stanovte míru $\nu(A)$.

Řešení. Zde $A_k = A \cap (\langle -k, k \rangle \times \langle -k, k \rangle) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle 1, k \rangle, 0 \leq y \leq 1/x^2\}$ (viz obrázek).



Množina A_k je zřejmě měřitelná a

$$\nu(A_k) = \int_1^k \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{k},$$

takže

$$\nu(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = 1.$$

Je vidět, že lze psát

$$\nu(A) = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx.$$

□

Někdy je vhodnější k vyšetřování měřitelnosti množiny $A \subset \mathbb{R}^n$ použít jiné posloupnosti množin, než jsou intervaly $\langle -k, k \rangle^n$.

Nechť $(K_m)_{m=1}^\infty$ je posloupnost ohraničených měřitelných množin v prostoru \mathbb{R}^n taková, že platí:

$$(1) K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_m \subset \dots,$$

$$(2) \text{ ke každému } k \in \mathbb{N} \text{ existuje množina } K_m \text{ tak, že } K_m \supset \langle -k, k \rangle^n.$$

V tomto případě budeme psát $K_m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ (množiny K_m „stejněměrně zaplňují prostor \mathbb{R}^n “). Je zřejmé, že

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$$

a že ke každé množině K_m existuje $l \in \mathbb{N}$ tak, že $K_m \subset \langle -l, l \rangle^n$, neboť K_m je ohraničená množina.

Příkladem posloupnosti $(K_m)_{m=1}^\infty$ je posloupnost koulí

$$\{p \in \mathbb{R}^n : |p - p_0| \leq r_m\},$$

kde $(r_m)_{m=1}^\infty$ je rostoucí posloupnost, $r_m \rightarrow \infty$.

Věta 2.4. *Nechť $K_m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, kde K_m jsou ohraničené měřitelné množiny. Pak množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná, právě když $A \cap K_m$ je měřitelná množina pro každé $m \in \mathbb{N}$. Přitom platí*

$$\nu(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \nu(A \cap K_m).$$

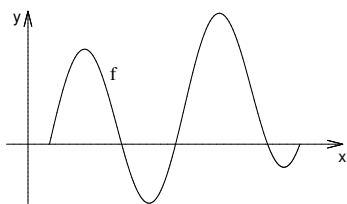
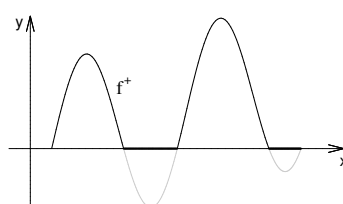
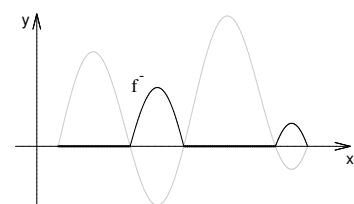
V dalších úvahách budeme používat následující označení:

Nechť $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je libovolná funkce, pak

$$f^+ = \max\{f, 0\} \quad (\text{tzv. kladná část funkce, viz obrázek 2.2 pro funkci jedné proměnné})$$

$$f^- = \max\{-f, 0\} \quad (\text{tzv. záporná část funkce, viz obrázek 2.3 pro funkci jedné proměnné})$$

Je zřejmé, že platí $f = f_+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$.

Obr. 2.1: f Obr. 2.2: f^+ Obr. 2.3: f^-

2.2 Integrál neohraničené funkce přes ohraničenou množinu

Teorii nevlastních jednorozměrných integrálů z BMA1 nelze dost dobře modifikovat pro funkce více proměnných. V této teorii byla dosti podstatná uspořádanost oboru reálných čísel. V jednorozměrném případě jsme měli jednak absolutně konvergentní, jednak neabsolutně konvergentní integrály. Ve vícerozměrném případě budeme uvažovat pouze absolutně konvergentní integrály. Základní schéma je toto: Nejdříve se definuje integrál pro nezáporné funkce. Pro funkce nabývající i záporných hodnot se použije rozklad

$$f = f^+ - f^-$$

a integrál funkce f se pak definuje vztahem

$$\int_A f d\nu = \int_A f^+ d\nu - \int_A f^- d\nu.$$

(Je třeba říci, že pro neohraničené funkce a množiny nekonečné míry se integrální součty již nehodí, limita integrálních součtů by ve většině případů neexistovala.)

Nechť f je nezáporná funkce na ohraničené měřitelné množině $A \subset \mathbb{R}^n$. Integrál

$$\int_A f d\nu = \int_A f d\nu_n$$

chceme definovat tak, aby byl mírou podgrafu P funkce f na A :

$$P = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in A, 0 \leq x_{n+1} \leq f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Zvolíme metodu „uřezávání“ podgrafu P . Pro každé přirozené k definujeme množinu

$$P_k = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in A, 0 \leq x_{n+1} \leq f(x_1, \dots, x_n), 0 \leq x_{n+1} \leq k\},$$

tedy

$$P_k = P \setminus \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in A, x_{n+1} > k\},$$

takže jsme „odřízli“ část podgrafu ležící nad rovinou $x_{n+1} = k$ (viz obr. 2.4)

Přitom

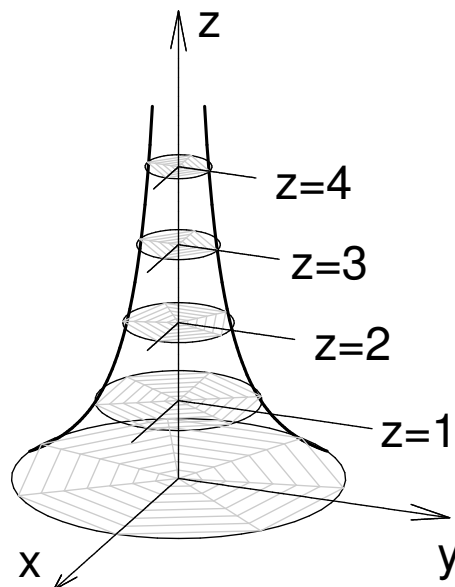
$$P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_k \subset \dots, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k = P.$$

Pro dostatečně velké $k \in \mathbb{N}$ je $A \subset \langle -k, k \rangle^n$ (A je ohraničená množina), takže pro $m \geq k$ je $P \cap \langle -m, m \rangle^{n+1} = P_m$. Jsou-li tudíž množiny P_k měřitelné v \mathbb{R}^{n+1} , je též P měřitelná množina a

$$\nu_{n+1}(P) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_{n+1}(P_k).$$

Množina P_k je podgrafem funkce $f_{(k)}$ na A :

$$f_{(k)} = \min\{f(p), k\} = \begin{cases} f(p), & \text{je-li } f(p) \leq k, \\ k, & \text{je-li } f(p) > k. \end{cases}$$



Obr. 2.4: „Uřezávání“ podgrafu

Funkce $f_{\langle k \rangle}$ jsou nezáporné a ohraničené a platí

$$f_{\langle 1 \rangle} \leq f_{\langle 2 \rangle} \leq \dots \leq f_{\langle k \rangle} \leq \dots \leq f,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{\langle k \rangle}(p) = f(p)$$

pro každé $p \in A$; je-li f ohraničená, je $f_{\langle k \rangle} = f$ od určitého k_0 počínaje.

Jsou-li funkce $f_{\langle k \rangle}$ integrovatelné, platí

$$\int_A f_{\langle 1 \rangle} d\nu \leq \int_A f_{\langle 2 \rangle} d\nu \leq \dots \leq \int_A f_{\langle k \rangle} d\nu \leq \dots,$$

takže existuje limita této posloupnosti. Přitom je

$$\nu_{n+1}(P_k) = \int_A f_{\langle k \rangle} d\nu,$$

takže

$$\nu_{n+1}(P) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_{\langle k \rangle} d\nu.$$

Chceme-li tudíž, aby platilo

$$\nu_{n+1}(P) = \int_A f d\nu$$

jako v případě ohraničené funkce, jeví se rozumné definovat integrál nezáporné funkce takto:

Definice 2.5. I. Nechť A je ohraničená měřitelná množina a f nezáporná funkce definovaná na A . Jsou-li funkce $f_{\langle k \rangle}$ ($k = 1, 2, \dots$) integrovatelné na A , definujeme

$$\int_A f d\nu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_{\langle k \rangle} d\nu \quad (2.2)$$

a říkáme, že tento *integrál existuje*.

Je-li limita v 2.2 konečná, říkáme, že $\int_A f d\nu$ *konverguje*, a funkci f nazýváme *integrovatelnou* na A . Je-li limita v 2.2 $+\infty$, říkáme, že $\int_A f d\nu$ *diverguje* ($k \rightarrow +\infty$).

II. Nechť f je funkce definovaná na A . Pak definujeme

$$\int_A f d\nu = \int_A f^+ d\nu - \int_A f^- d\nu, \quad (2.3)$$

existují-li integrály na pravé straně 2.3 a je-li aspoň jeden z nich konečný (rozdíl uvažujeme v \mathbb{R}^*). Jsou-li oba integrály konečné, říkáme, že integrál $\int_A f d\nu$ *konverguje*, a funkci f nazýváme *integrovatelnou* na A . Jsou-li oba integrály nekonečné nebo některý z nich neexistuje, říkáme, že $\int_A f d\nu$ *neexistuje*.

Poznámka 2.6. Integrál nezáporné funkce f přes množinu A existuje, právě když existují integrály $\int_A f_{\langle k \rangle} d\nu$. K tomu stačí, aby funkce f byla skoro všude spojitá v A .

Příklad 2.7. Zjistěte, pro která $p > 0$ konverguje integrál

$$S = \iint_A \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^p}, \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Řešení. Integrovaná funkce je kladná a spojitá pro $(x, y) \neq (0, 0)$ a tedy neohraničená v libovolném okolí počátku. Platí tedy pro $k \in \mathbb{N}$

$$f_{\langle k \rangle}(x, y) = \min\{f(x, y), k\} = \begin{cases} \frac{1}{(x^2 + y^2)^p} & \text{pro } \frac{1}{(x^2 + y^2)^p} \leq k \\ k & \text{pro } \frac{1}{(x^2 + y^2)^p} > k \end{cases}$$

$$\frac{1}{(x^2 + y^2)^p} \leq k \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{p}} - \text{což je vnějšek kružnic se středem v počátku}$$

$$\frac{1}{(x^2 + y^2)^p} > k \Leftrightarrow x^2 + y^2 < \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{p}} - \text{což je vnitřek kružnic se středem v počátku}$$

Položme $A_k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{p}} \leq x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$

$$A \setminus A_k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

$$\iint_A f_{\langle k \rangle}(x, y) dx dy = \iint_{A_k} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^p} + \iint_{A \setminus A_k} k dx dy$$

$$\iint_{A \setminus A_k} k dx dy = k \cdot \nu_2(A \setminus A_k) = k \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{A \setminus A_k} k dx dy = \lim_{k \rightarrow \infty} k \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{p}} = \begin{cases} +\infty & \text{pro } p > 1 \\ \pi & \text{pro } p = 1 \\ 0 & \text{pro } p < 1 \end{cases}$$

$$S_k = \iint_{A_k} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^p} = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2p}}}^1 \rho \cdot \frac{1}{\rho^{2p}} d\rho \right) d\varphi =$$

$$= (\text{pro } p \neq 1) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^{2-2p}}{2-2p} \right]_{\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2p}}}^1 d\varphi = 2\pi \frac{1}{2(1-p)} \left(1 - \left(\frac{1}{k}\right)^{(1-p)/p} \right)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \begin{cases} \frac{\pi}{1-p} & \text{pro } p < 1 \\ +\infty & \text{pro } p > 1 \end{cases}$$

$$\text{Pro } p = 1 \text{ je } S_k = \int_0^{2\pi} [\ln \rho]_{\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}}}^1 d\varphi = 2\pi \left(-\ln \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \right) = -2\pi \ln \sqrt{\frac{1}{k}} \rightarrow +\infty$$

Závěr:

$$\iint_A \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_A f_{\langle k \rangle}(x, y) dx dy = \begin{cases} \frac{\pi}{1-p} & \text{pro } p < 1 \\ +\infty & \text{pro } p \geq 1. \end{cases}$$

□

Uvedme nyní druhý přístup k výpočtu integrálu neohraničené funkce přes ohraničenou množinu, který je výhodný v případě nezáporné neohraničené funkce:

Definice 2.8. Nechť $X \in \mathbb{R}^n$ je bod, $(A_k)_1^\infty$ posloupnost množin z \mathbb{R}^n s následujícími vlastnostmi:

- 1) $X \in A_k$ pro $k = 1, 2, \dots$
- 2) $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = 0$ (d_k je průměr množiny A_k , tj. $d_k = \sup_{(X,Y) \in A_k} \rho(X, Y)$.)

Pak posloupnost $(A_k)_1^\infty$ nazveme *zúžující* posloupností k bodu X .

Definice 2.9. Nechť M je měřitelná, ohraničená oblast, $M \subset \mathbb{R}^n$, $X \in M$. Dále nechť $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ je neohraničená na nějakém okolí bodu X , ale ohraničená a integrovatelná na každé množině $M \setminus A$, kde A je měřitelná oblast obsahující bod X . Jestliže pro každou zúžující posloupnost $(A_k)_1^\infty$ k bodu X měřitelných množin A_k existuje

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{M \setminus A_k} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = I, \text{ pak } \int_M f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = I.$$

Lze dokázat, že v případě nezáporné funkce stačí vyšetřit existenci limity pro jednu zúžující posloupnost.

Tedy v předcházejícím příkladě, jelikož f je na A kladná, stačí zvolit zužující posloupnost $(A_k)_1^\infty$ k bodu $(0, 0)$ ve tvaru

$$A_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \frac{1}{k}\},$$

tedy $A \setminus A_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{k} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ a bude platit

$$\iint_A \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{A \setminus A_k} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^p}$$

Ověřte si výpočtem, že výsledek je totožný s výsledkem příkladu 2.7.

2.3 Integrál funkce přes neohraničenou měřitelnou množinu

Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina, která nemusí být ohraničená, f funkce definovaná na A .

Nejdříve budeme definovat integrál pro případ, že f je na A nezáporná. Chceme opět, aby integrál byl mírou podgrafu funkce f . Tentokrát budeme podgraf „uřezávat ze stran“, aby podstava podgrafu byla ohraničená množina.

Nechť $A_k = A \cap \langle -k, k \rangle^n$, množina A_k je pro každé $k \in \mathbb{N}$ ohraničená a měřitelná, má zřejmě konečnou míru. Přitom

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_k \subset \dots, \quad A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Existuje-li pro každé $k \in \mathbb{N}$ integrál $\int_{A_k} f d\nu$, plyne z nezápornosti funkce f , že

$$\int_{A_1} f d\nu \leq \int_{A_2} f d\nu \leq \dots \leq \int_{A_k} f d\nu \leq \dots;$$

existuje tedy limita posloupnosti těchto integrálů.

Definice 2.10. Je-li f nezáporná funkce na měřitelné množině A a existují-li integrály $\int_{A_k} f d\nu$, kde $A_k = A \cap \langle -k, k \rangle^n$, ($k = 1, 2, \dots$), definujeme

$$\int_A f d\nu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} f d\nu$$

a říkáme, že tento *integrál existuje*.

Je-li tato limita konečná, říkáme, že $\int_A f d\nu$ *konverguje*, a funkci f nazýváme *integrativní* na A . Je-li limita $+\infty$, říkáme, že $\int_A f d\nu$ *diverguje* ($k \rightarrow \infty$).

Nabývá-li f na množině A i záporných hodnot, definujeme integrál $\int_A f d\nu$ úplně stejně jako v II. části definice odst. 2.2.

Poznámka 2.11. Integrál nezáporné funkce existuje např. tehdy, je-li funkce f skoro všude spojitá na A .

V definici integrálu nezáporné funkce jsme se omezili na speciální množiny A_k (viz definici míry v odst. 2.1). Místo nich můžeme vzít množiny $A \cap K_m$, kde $K_m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ (viz odst. 2.2). To nám umožňuje tato věta:

Věta 2.12. *Nechť K_m ($m = 1, 2, \dots$) jsou ohraničené měřitelné množiny a $K_m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$. Nechť f je nezáporná funkce na A . Integrály $\int_{A_k} f d\nu$ ($k = 1, 2, \dots$) existují, právě když existují integrály $\int_{A \cap K_m} f d\nu$ ($m = 1, 2, \dots$), přičemž platí*

$$\int_A f d\nu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{A \cap K_m} f d\nu.$$

Příklad 2.13. Vypočtěte integrál

$$\iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^p}, p > 0$$

a zjistěte, pro která $p > 0$ konverguje.

Řešení. Integrand je kladná spojitá funkce, daný integrál tedy existuje. Je třeba zjistit, kdy bude mít konečnou hodnotu. Vzhledem k „tvaru“ integračního oboru A i k „tvaru“ integrované funkce se nabízí možnost volit množiny $K_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq m^2\}$ ($m = 1, 2, \dots$). Zřejmě $K_m \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ a množiny $A \cap K_m$ jsou pro $m > 1$ mezikruží. Je vhodné zavést polární souřadnice.

$$\begin{aligned} \iint_{A \cap K_m} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^p} &= \iint_{1 \leq x^2 + y^2 \leq m^2} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^p} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_1^m \frac{\rho}{\rho^{2p}} d\rho \right) d\varphi = \\ &= \begin{cases} 2\pi \ln m & \text{pro } p = 1 \\ \frac{\pi}{p-1} \left(1 - \frac{1}{m^{2(p-1)}} \right) & \text{pro } p \neq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Odtud

$$\iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^p} = \lim_{m \rightarrow \infty} \iint_{A \cap K_m} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^p} = \begin{cases} \frac{\pi}{p-1} & \text{pro } p > 1 \\ +\infty & \text{pro } p \leq 1. \end{cases}$$

Daný integrál konverguje pouze pro $p > 1$ a má hodnotu $\frac{\pi}{p-1}$. □

Příklad 2.14. Vypočtěte integrál

$$S = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Řešení. Integrovaná funkce je kladná spojitá funkce, daný integrál tedy existuje. Přitom podle definice je

$$\begin{aligned} S &= \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{\langle -k, k \rangle \times \langle -k, k \rangle} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{-k}^k e^{-x^2} dx \cdot \int_{-k}^k e^{-y^2} dy \right) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{-k}^k e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

Podle uvedené věty je však také

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{x^2+y^2 \leq k^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

a po zavedení polárních souřadnic dostaneme

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^k \rho e^{-\rho^2} d\rho \right) d\varphi = 2\pi \int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho = \pi \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \pi.$$

Je tedy $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. □

Příklad 2.15. Vypočtěte $\iint_A xy e^{-x^2-y^2} dx dy$, $A = \langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, \infty \rangle$.

Řešení. I. Jelikož $f(x, y)$ je nezáporná funkce, stačí vzít posloupnost čtvrtkruhů $(K_k)_1^{\infty}$ se středem v počátku, které stejnoměrně zaplňují množinu A .

$$K_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq k^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$\begin{aligned} \iint_{K_k} xy e^{-x^2-y^2} dx dy &= \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{array} \right| = \int_0^k \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi \cdot \rho \cdot e^{-\rho^2} d\varphi \right) d\rho = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^k \left[-\frac{\cos 2\varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 e^{-\rho^2} d\rho = \frac{1}{2} \int_0^k \rho^3 \cdot e^{-\rho^2} d\rho = \left| \begin{array}{l} \rho^2 = t \\ 2\rho d\rho = dt \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{k^2} t \cdot e^{-t} dt = \frac{1}{4} [-t e^{-t} - e^{-t}]_0^{k^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{-k^2 - 1}{e^{k^2}} + 1 \right) \\ \iint_A xy e^{-x^2-y^2} dx dy &= \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{K_k} xy e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{k^2 + 1}{e^{k^2}} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{4}}} \end{aligned}$$

II. Provedeme výpočet postupnou integrací:

$$\begin{aligned} \iint_A xy e^{-x^2-y^2} dx dy &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b xy e^{-x^2-y^2} dx \right) dy = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} y e^{-x^2-y^2} \right]_0^b \right) dy = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} y e^{-b^2-y^2} + \frac{1}{2} y e^{-y^2} \right) dy = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^a y e^{-y^2} dy = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{4} e^{-y^2} \right]_0^a = \underline{\underline{\frac{1}{4}}} \end{aligned}$$

□

Maplety

Odkaz na maplety:

1. [dvojný integrál](#),
2. [polární transformace](#),
3. [trojný integrál](#),
4. [cylindrická transformace](#),
5. [sférická transformace](#).

Cvičení

1. Vypočtěte uvedené nevlastní integrály

- a) $\iint_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq x\}$
- b) $\iint_A e^{\frac{x}{y}} dx dy$, A je množina ohraničená křivkami $y = 0$, $y = 1$,
 $x = 0$, $y = \sqrt{x}$.
- c) $\iint_A \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ x
- d) $\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dy}{1+x^2+y^2} dx dy$
- e) $\iint_A e^{-(x+y)} dx dy$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y, 0 < y < \infty\}$
- f) $\iiint_A \frac{1}{x^{1/3}y^{1/4}z^{1/5}} dx dy dz$, $A = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$
- g) $\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz$
- h) $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2-x_2^2-\dots-x_n^2} dx_1 dx_n \dots dx_n$ x

Výsledky

1. a) 2
- b) $\frac{1}{2}$
- c) $\frac{\pi}{2}$
- d) diverguje
- e) $\frac{1}{2}$
- f) $\frac{5}{2}$
- g) $\pi^{3/2}$
- h) $\sqrt{\pi^n}$

3 Impulzní funkce

3.1 Diracova zobecněná funkce $\delta(t)$

Při studiu mnoha přírodních jevů se setkáváme s veličinami, které jsou nulové vně malého intervalu a jejichž integrál je nenulový. Takový charakter má velká síla působící po velmi krátkou dobu (náráz), velké elektrické proudy působící jen velice krátkou dobu (elektrický impuls), které ale po tuto dobu nabývají velikých hodnot, takže integrál z této veličiny je nenulový. Z věty o střední hodnotě integrálu vyplývá, že funkční hodnoty takovéto funkce musí být velké a pro délku intervalu blížící se nule musí funkční hodnoty růst nade všechny meze.

Matematickou motivací následujících úvah může být nalezení derivace nespojitě funkce. U spojitých funkcí, které nemají v daném bodě derivaci např. absolutní hodnota $y = |x|$, můžeme za derivaci této funkce považovat funkci, jejíž integrál je zadanou funkcí. V tomto smyslu je derivací funkce $|x|$ funkce $\operatorname{sgn}(x)$, neboť:

$$|x| = \int_0^x \operatorname{sgn}(t) dt$$

Uvažujme Heavisideovu funkci jednotkového skoku $\eta(t)$, které je nespojitá v bodě 0. Tuto funkci můžeme považovat za limitu spojitých funkcí

$$F_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < -1/n, \\ \frac{n}{2} \left(t + \frac{1}{n}\right), & \text{pro } -1/n \leq t \leq 1/n, \\ 1, & \text{pro } 1/n \leq t. \end{cases}$$

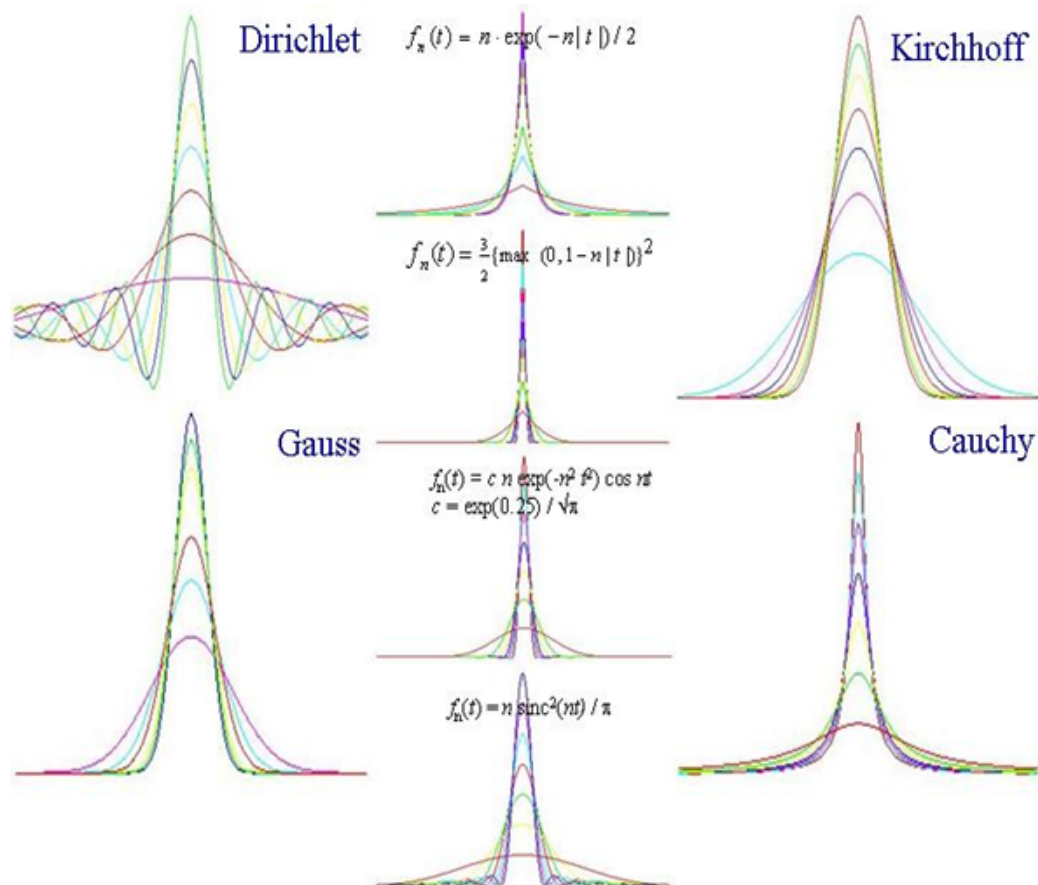
Tyto funkce jsou spojitě a mají derivaci:

$$F'_n(t) = f_n(t) = \frac{n}{2} \left(\eta\left(t - \frac{1}{n}\right) - \eta\left(t + \frac{1}{n}\right) \right).$$

Limitním přechodem pro funkce $f_n(t)$, bychom získali funkci nulovou s výjimkou jednoho bodu s neohrazenou funkční hodnotou. Integrál z takovéto funkce je ovšem nulový a tedy výše naznačený postup je nevyhovující. Budeme postupovat podobně jako u reálných čísel, kdy iracionální čísla chápeme jako limitu posloupnosti čísel racionálních blížících se k danému iracionálnímu číslu. Příkladem mohou být různé „definice“ čísla e:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right).$$

Podobně posloupnost obdélníkových kmitů $f_n(t)$ není jedinou posloupností funkcí, které jsou derivací funkcí majících za limitu Heavisideovu funkci jednotkového skoku. Stručně jsou uvedeny některé z nich:



Obr. 3.1: Příklady posloupnosti funkcí, které mají za limitu Heavisideovu funkci

Zobecněním těchto posloupností jsou tzv. jehlovité funkce:

Definice 3.1. Spojitou příp. po částech spojitou funkci $\delta(t, \lambda)$ argumentu t závislou na parametru λ se nazveme *jehlovitou*, jestliže platí:

1. $\delta(t, \lambda) = 0$ pro $|t| > \lambda$;
2. $\delta(t, \lambda) \geq 0$ pro $|t| < \lambda$;
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t, \lambda) dt = \int_{-\lambda}^{\lambda} \delta(t, \lambda) dt = 1$.

Uvažme limitní chování jehlovité funkce $\delta(t, \lambda)$ pro $\lambda \rightarrow 0$. Platí

- $\delta(t, \lambda) = 0$ pro $t \neq 0$ a $\lambda \rightarrow 0$.
- $\delta(0, \lambda) = \infty$ pro $\lambda \rightarrow 0$, což plyne užitím věty o střední hodnotě určitého integrálu.

To znamená, že limita jehlovité funkce v klasickém slova smyslu neexistuje, proto uvažujme limitní chování $\int_a^b f(t)\delta(t, \lambda)dt$ pro $\lambda \rightarrow 0$ a spojitou funkci $f(t) \in C[a, b]$.

I v tomto případě nastanou dva případy v závislosti na tom, zda interval $[a, b]$ obsahuje počátek či nikoli:

- Jestliže $0 \in [a, b]$, tj. $a < 0 < b$ a $\lambda \leq \min(|a|, b)$, pak platí

$$\int_a^b f(t)\delta(t, \lambda)dt = \int_{-\lambda}^{\lambda} f(t)\delta(t, \lambda)dt = f(\tau) \int_{-\lambda}^{\lambda} \delta(t, \lambda)dt = f(\tau),$$

kde $\tau \in (-\lambda, \lambda)$ je vhodné číslo, které existuje podle věty o střední hodnotě integrálu. Jestliže $\lambda \rightarrow 0$, pak i $\tau \rightarrow 0$ a ze spojitosti funkce $f(t)$ plyne $f(\tau) \rightarrow f(0)$. Tedy

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(t)\delta(t, \lambda)dt = f(0).$$

- Jestliže $0 \notin [a, b]$ pak pro dostatečně malé λ platí $\int_a^b f(t)\delta(t, \lambda)dt = 0$, tedy

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(t)\delta(t, \lambda)dt = 0.$$

Protože hodnota $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(t)\delta(t, \lambda)dt = f(0)$ resp. 0, tedy nezávisí na volbě konkrétní jehlové funkce $\delta(t, \lambda)$ můžeme použít stručnější zápis:

Definice 3.2. Položme

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(t)\delta(t, \lambda)dt = \int_a^b f(t)\delta(t)dt, \quad (3.1)$$

pak symbol $\delta(t)$ nazveme *Diracovou distribucí*, *Diracovým impulsem*. Diracova distribuce je tzv. zobecněnou funkcí, charakterizující limitní chování jehlové funkce $\delta(t, \lambda)$ pro $\lambda \rightarrow 0$.

3.2 Vlastnosti Diracovy zobecněné funkce

Z definičního vztahu (3.1) plynou následující identity:

$$\int_a^b f(t)\delta(t)dt = \begin{cases} f(0), & 0 \in [a, b], \\ 0, & 0 \notin [a, b]. \end{cases} \quad (3.2)$$

Označíme-li

$$\int_a^b f(t)\delta(t - t_0)dt = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(t)\delta(t - t_0, \lambda)dt,$$

pak platí

$$\int_a^b f(t)\delta(t-t_0)dt = \begin{cases} f(t_0), & t_0 \in [a, b], \\ 0, & t_0 \notin [a, b]. \end{cases} \quad (3.3)$$

Vlastnost (3.2), (3.3) se nazývá *filtrující vlastností* Diracovy distribuce.

Je-li $f(t) = 1$, pak

$$\int_a^b \delta(t)dt = \begin{cases} 1, & 0 \in [a, b], \\ 0, & 0 \notin [a, b], \end{cases} \quad \int_a^b \delta(t-t_0)dt = \begin{cases} 1, & t_0 \in [a, b], \\ 0, & t_0 \notin [a, b]. \end{cases}$$

Uvažujeme-li místo intervalu $[a, b]$ interval $(-\infty, \infty)$, pak platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = 1.$$

Diracova distribuce se v technických vědách často nazývá *funkcí jednotkového impulsu*. Pro Diracovu distribuci platí vlastnost "sudosti"

$$\int_a^b f(t)\delta(t)dt = \int_a^b f(t)\delta(-t)dt. \quad (3.4)$$

Tuto identitu lze dokázat následovně:

V integrálu $\int_a^b f(t)\delta(-t)dt$ zaveďme substituci $t = -u$, pak

$$\int_a^b f(t)\delta(-t)dt = - \int_{-a}^{-b} f(-u)\delta(u)du = \int_{-b}^{-a} f(-u)\delta(u)du. \quad (3.5)$$

Je-li $a < 0 < b$, pak $-b < 0 < -a$ a v důsledku filtrující vlastnosti Diracovy distribuce dostáváme

$$\int_{-b}^{-a} f(-u)\delta(u)du = f(0).$$

Podobně

$$\int_a^b f(t)\delta(t)dt = f(0).$$

Na základě relace (3.5) pak dostáváme identitu (3.4). Obecně platí

$$\int_a^b f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_a^b f(t)\delta(t_0-t)dt. \quad (3.6)$$

Nechť $a \neq 0$ libovolná konstanta, pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(at)dt = \frac{f(0)}{|a|}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(a(t-t_0))dt = \frac{f(t_0)}{|a|}. \quad (3.7)$$

Pro monotónní funkci, která má jednonásobný kořen v bodě 0, tj. $\varphi(0) = 0 \wedge \varphi'(0) \neq 0$, platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(\varphi(t))dt = \frac{f(0)}{|\varphi'(0)|} \quad (3.8)$$

Identitu (3.8) můžeme odvodit následovně:

I) Nejdříve budeme uvažovat, že $\varphi(t)$ je monotónní rostoucí diferencovatelná funkce, tedy $\varphi(-\infty) = -\infty$, $\varphi(\infty) = \infty$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) > 0$. Položme $\varphi(t) = x$, pak $t = \psi(x)$, $\psi(0) = 0$ je inverzní monotónní rostoucí funkce. Odtud

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(\varphi(t))dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\psi(x))}{\varphi'(\psi(x))}\delta(x)dx = \frac{f(\psi(0))}{\varphi'(\psi(0))} = \frac{f(0)}{\varphi'(0)}.$$

II) Necht' nyní $\varphi(t)$ je monotónní klesající diferencovatelná funkce, tedy $\varphi(-\infty) = \infty$, $\varphi(\infty) = -\infty$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) < 0$. Položme $\varphi(t) = x$, pak $t = \psi(x)$, $\psi(0) = 0$ je inverzní monotónní klesající funkce. Odtud

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(\varphi(t))dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\psi(x))}{\varphi'(\psi(x))}\delta(x)dx = \frac{f(\psi(0))}{|\varphi'(\psi(0))|} = \frac{f(0)}{|\varphi'(0)|}.$$

Tedy zkráceně můžeme psát

$$\delta(\varphi(t)) = \frac{\delta(t)}{|\varphi'(t)|}.$$

V obecném případě, kdy t_1, t_2, \dots, t_n jsou jednonásobnými kořeny funkce $\varphi(t)$, platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(\varphi(t))dt = \sum_{i=1}^n \frac{f(t_i)}{|\varphi'(t_i)|}. \quad (3.9)$$

Jelikož $\delta(t - t_0) = 0$ pro libovolné $t \neq t_0$, pak

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0). \quad (3.10)$$

Příklad 3.3. Pomocí filtrující vlastnosti Diracovy distribuce vypočtěte integrály

$$\int_{-1}^3 \cos 2t \delta(t)dt, \quad \int_0^{\infty} e^{-pt} \delta(t - 2)dt.$$

Řešení. První integrál vypočteme užitím vzorce (3.2), tedy

$$\int_{-1}^3 \cos 2t \delta(t)dt = \cos 2t \Big|_{t=0} = 1.$$

Druhý integrál vypočteme užitím vzorce (3.3), tedy

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \delta(t - 2)dt = e^{-pt} \Big|_{t=2} = e^{-2p}.$$

□

Příklad 3.4. Vypočtěte integrál $\int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + 2)\delta(5 - 5t)dt$.

Řešení. Postupně využijeme vlastnosti (4.12), (4.13) a dostáváme:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + 2)\delta(5 - 5t)dt = \frac{1}{5} \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + 2)\delta(1 - t)dt = \frac{1^2 + 2}{5} = \frac{3}{5}.$$

□

Příklad 3.5. Zjednodušte následující výrazy:

$$(t^2 + 3)\delta(t - 2), \quad e^{3t^2}\delta(t - 1).$$

Řešení. Užitím vzorce (3.10) dostáváme

$$(t^2 + 3)\delta(t - 2) = (2^2 + 3)\delta(t - 2) = 7\delta(t - 2), \quad e^{3t^2}\delta(t - 1) = e^3\delta(t - 1).$$

□

3.3 Vztah jednotkové funkce a Diracova impulsu

Připomeňme si nejdříve pojem jednotkové funkce (funkce jednotkového skoku) definované následovně:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

V aplikacích se však můžeme setkat i s jinými definicemi jednotkové funkce. Například symetrická jednotková funkce je tvaru

$$\eta_s(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ \frac{1}{2}, & t = 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Antisymetrické jednotkové funkce jsou tvaru

$$\eta_-(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

$$\eta_+(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Obecně jednotková funkce s časovým posuvem t_0 je definována následovně:

$$\eta(t - t_0) = \begin{cases} 1, & t > t_0, \\ 0, & t < t_0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Uvažujme nyní integrál

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau.$$

Jestliže $t < 0$, pak interval $(-\infty, t)$ neobsahuje bod $\tau = 0$ a platí tedy

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = 0.$$

Jestliže $t > 0$, pak interval $(-\infty, t)$ obsahuje bod $\tau = 0$ a platí

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = 1.$$

Odtud plyne

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

Tedy

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \eta(t). \quad (3.14)$$

Analogicky dostáváme

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau - t_0) d\tau = \eta(t - t_0). \quad (3.15)$$

3.4 Zobecněná derivace, derivace Diracovy distribuce

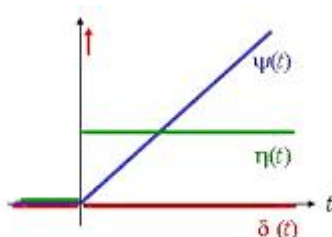
Z předchozí kapitoly vyplývá, že funkce jednotkového skoku je vlastně zobecněnou primitivní funkci Diracova impulsu. Tento vztah je podobný vztahu mezi jednotkovou funkcí $\eta(t)$ a identickou funkcí $\psi(t)$

$$\int_{-\infty}^t \eta(\theta) d\theta = \psi(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t > 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0 \end{cases}.$$

Diracovu distribuci jako derivaci funkce jednotkového skoku můžeme dále chápat jako derivaci identické funkce $\psi(t)$, tj.

$$\psi''(t) = \eta'(t) = \delta(t).$$

Situaci ilustruje následující obrázek



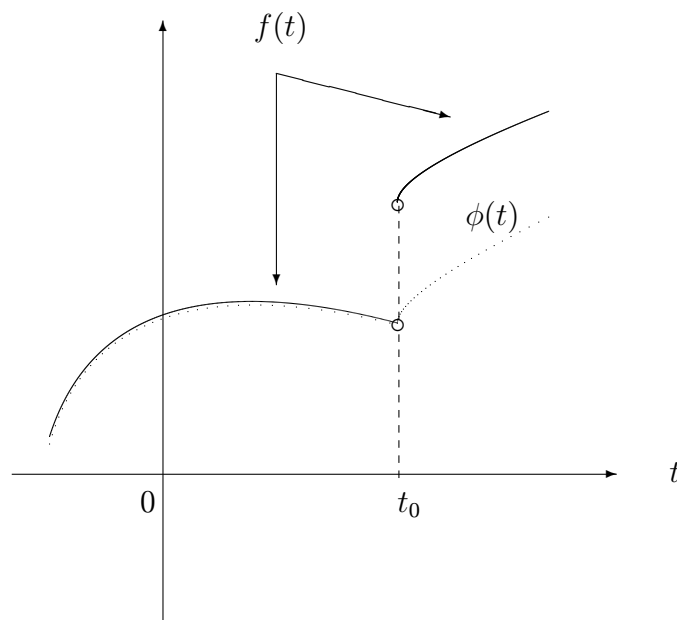
Uvažujme nyní funkci $f(t)$, která má v bodě $t = t_0$ nespojitost I. druhu a diferencovatelnou $\forall t \neq t_0$. Sestrojme pomocnou funkci $\phi(t)$ tak, že $\phi(t) \equiv f(t)$ pro $t < t_0$ a pro $t > t_0$ je rovna $f(t) - [f(t_0^+) - f(t_0^-)]$, kde

$$f(t_0^+) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t), \quad f(t_0^-) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t).$$

Tedy

$$\phi(t) = f(t) - [f(t_0^+) - f(t_0^-)] \eta(t - t_0), \quad (3.16)$$

t_0 je již bodem odstranitelné nespojitosti, takže lze funkci $\phi(t)$ dodefinovat tak, aby již byla spojitou funkcí.



Z rovnice (3.16) pak plyne

$$f(t) = \phi(t) + [f(t_0^+) - f(t_0^-)] \eta(t - t_0).$$

Zobecněnou derivací funkce $f(t)$ pak rozumíme derivaci

$$f'_z(t) = \phi'(t) + [f(t_0^+) - f(t_0^-)] \delta(t - t_0),$$

kde $\phi'(t)$ je klasická derivace, tedy pro $t \neq t_0$ platí $\phi'(t) = f'_k(t)$ (klasická derivace funkce $f(t)$). Odtud

$$f'_z(t) = f'_k(t) + [f(t_0^+) - f(t_0^-)] \delta(t - t_0). \quad (3.17)$$

Jestliže t_1, t_2, \dots, t_n jsou body nespojitosti I.druhu, pak platí

$$f'_z(t) = f'_k(t) + \sum_{i=1}^n [f(t_i^+) - f(t_i^-)] \delta(t - t_i).$$

Příklad 3.6. Vypočtěte zobecněnou derivaci funkce

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 3e^{-t}, & t > 0, \end{cases} \quad (3.18)$$

Řešení. Nejdříve vypočteme klasickou derivaci funkce, tj.

$$f'_k(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ -3e^{-t}, & t > 0, \end{cases} \quad (3.19)$$

Klasickou derivaci pak vyjádříme pomocí jednotkové funkce ve tvaru

$$f'_k(t) = -3e^{-t}\eta(t).$$

Dosazením do vzorce (3.17) dostáváme zobecněnou derivaci funkce (3.18)

$$f'_z(t) = -3e^{-t}\eta(t) + 3\delta(t).$$

Uvedený příklad můžeme také spočítat pomocí vzorce (3.10). Nejdříve vyjádříme funkci $f(t)$ pomocí jednotkové funkce ve tvaru $f(t) = 3e^{-t}\eta(t)$ a zderivujeme formálně jako součin dvou funkcí, tedy

$$f'_z(t) = -3e^{-t}\eta(t) + 3e^{-t}\delta(t)$$

a zjednodušíme pomocí vzorce (3.10), tj. $3e^{-t}\delta(t) = 3\delta(t)$. Odtud

$$f'_z(t) = -3e^{-t}\eta(t) + 3\delta(t).$$

□

Jak již víme, Diracův impulz charakterizuje limitní chování jehlovitých funkcí $\delta(t, \lambda)$ pro $\lambda \rightarrow 0$ v integrálu $\int_a^b f(t)\delta(t, \lambda)dt$. Tedy nemůžeme definovat

$$\delta'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{h}.$$

Je tedy přirozené uvažovat limitní chování integrálu

$$\int_a^b f(t) \frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{h} dt$$

pro $h \rightarrow 0$, $f(t) \in C^1(a, b)$, $(-h, h) \subset (a, b)$.

Tedy

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{h} dt &= \frac{1}{h} \left[\int_a^b f(t)\delta(t+h)dt - \int_a^b f(t)\delta(t)dt \right] \\ &= -\frac{f(0) - f(-h)}{h}. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b f(t) \frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{h} dt = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0) - f(-h)}{h} = -f'(0).$$

Položme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b f(t) \frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{h} dt = \int_a^b f(t) \delta'(t) dt.$$

Pak

$$\int_a^b f(t) \delta'(t) dt = \begin{cases} -f'(0) & \text{pro } 0 \in (a, b) \\ 0 & \text{pro } 0 \notin (a, b). \end{cases}$$

Zde užitý symbol $\delta'(t)$ nazýváme *derivací Diracovy distribuce*. Podobně

$$\int_a^b f(t) \delta'(t - t_0) dt = \begin{cases} -f'(t_0) & \text{pro } t_0 \in (a, b) \\ 0 & \text{pro } t_0 \notin (a, b). \end{cases}$$

Analogicky zavádíme n -tou derivací Diracova impulzu

$$\int_a^b f(t) \delta^{(n)}(t - t_0) dt = \begin{cases} (-1)^n f^{(n)}(t_0) & \text{pro } t_0 \in (a, b) \\ 0 & \text{pro } t_0 \notin (a, b). \end{cases} \quad (3.20)$$

Příklad 3.7. Vypočtěte integrály

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \delta'''(t) dt, \quad \int_0^{\infty} e^{-pt} \delta^{(n)}(t - t_0) dt, \quad t_0 > 0.$$

Řešení. V obou případech použijeme vzorec (3.20), pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \delta'''(t) dt = (-1)^3 (e^{-j\omega t})'''|_{t=0} = -j\omega^3.$$

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \delta^{(n)}(t - t_0) dt = (-1)^n (e^{-pt})^{(n)}|_{t=t_0} = p^n e^{-pt_0}.$$

□

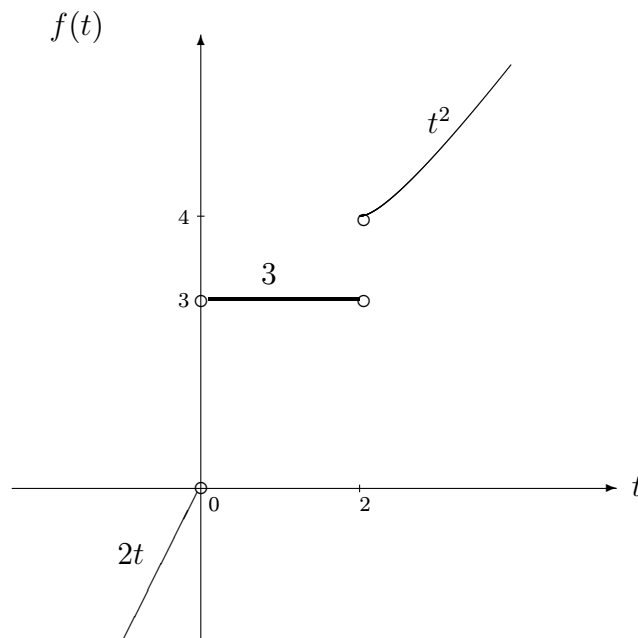
Poznámka 3.8. Je-li navíc jehlovitá funkce sudá v proměnné t je možné vyjádřit i integrál z funkce nespojitě v bodě 0:

$$\int_a^b f(t) \delta(t) dt = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) + \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) \right).$$

Příklad 3.9. Funkci

$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{pro } -\infty < t < 0 \\ 3 & \text{pro } 0 < t < 2 \\ t^2 & \text{pro } 2 < t < \infty \end{cases}$$

zapište jediným analytickým zápisem a určete její první a druhou zobecněnou derivaci.

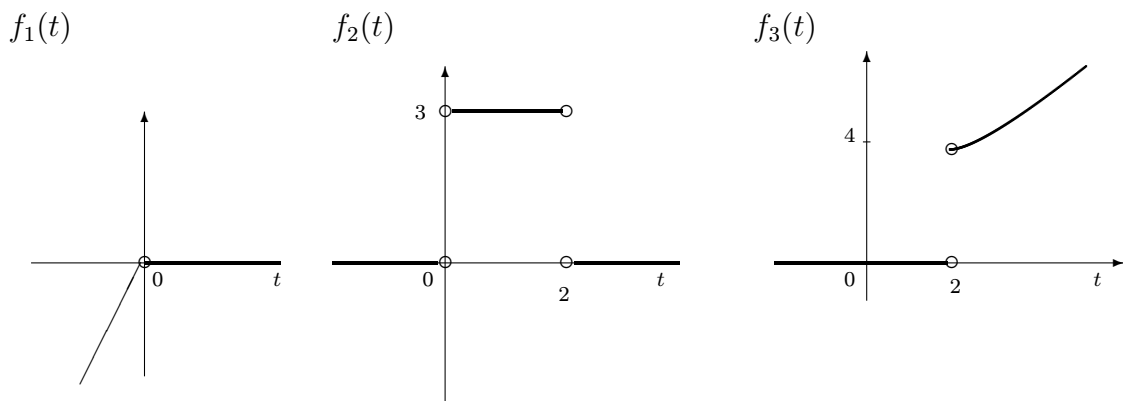


Řešení. Funkci $f(t)$ můžeme vyjádřit pomocí jednotkové funkce jako součet třech funkcí, tj. $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$, kde

$$f_1(t) = 2t - 2t\eta(t),$$

$$f_2(t) = 3(\eta(t) - \eta(t - 2)),$$

$$f_3(t) = t^2\eta(t - 2).$$



Po úpravě pak dostáváme

$$f(t) = 2t + (3 - 2t)\eta(t) + (t^2 - 3)\eta(t - 2).$$

Zobecněná derivace I. řádu je tvaru

$$\begin{aligned} f'_z(t) &= 2 - 2\eta(t) + (3 - 2t)\delta(t) + 2t\eta(t - 2) + (t^2 - 3)\delta(t - 2) \\ &= 2 - 2\eta(t) + 3\delta(t) + 2t\eta(t - 2) + \delta(t - 2). \end{aligned}$$

Zobecněná derivace II. řádu je pak tvaru

$$\begin{aligned} f_z''(t) &= -2\delta(t) + 3\delta'(t) + 2\eta(t-2) + 2t\delta(t-2) + \delta'(t-2) \\ &= -2\delta(t) + 3\delta'(t) + 2\eta(t-2) + 4\delta(t-2) + \delta'(t-2). \end{aligned}$$

Poznamenejme, že třetí zobecněná derivace bude pouze lineární kombinací funkce jednotkového impulsu a jeho derivací. \square

Cvičení

1. Zjednodušte následující výrazy:

$$\begin{array}{ll} a) (t^3 - 2)\delta(t - 2) & b) (2t^2 - 1)\delta(t + 3) \\ c) te^{t^2}\delta(t - 1) & d) t^3 + 2t^2 - 1)\delta(t - 2) \end{array}$$

2. Vypočtěte integrály:

$$\begin{array}{ll} a) \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \delta(t - \pi/2) dt & b) \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \delta(t - 2\pi) dt \\ c) \int_5^7 (t + 1)^2 \delta(t) dt & d) \int_0^{\pi} \cos 3t \delta(t - \pi/6) dt \end{array}$$

3. Vypočtěte integrály:

$$\begin{array}{ll} a) \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + 3)\delta(2t) dt & b) \int_{-\infty}^{\infty} (t + 4)\delta(-3t) dt \\ c) \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 - 1)\delta(2t - 8) dt & d) (t^3 - 1)\delta(3t + 6) dt \\ e) \int_{-\infty}^{\infty} (t + 1)\delta(3t - 9) dt & f) \int_{-1}^1 (t + e^{3t})\delta(3t - 6) dt. \end{array}$$

4. Vyjádřete dané funkce pomocí jednotkové funkce:

$$a) f(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < a; \\ 3, & \text{pro } t > a. \end{cases}$$

$$b) f(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < 0 \wedge t > 1; \\ 2, & \text{pro } 0 < t < 1. \end{cases}$$

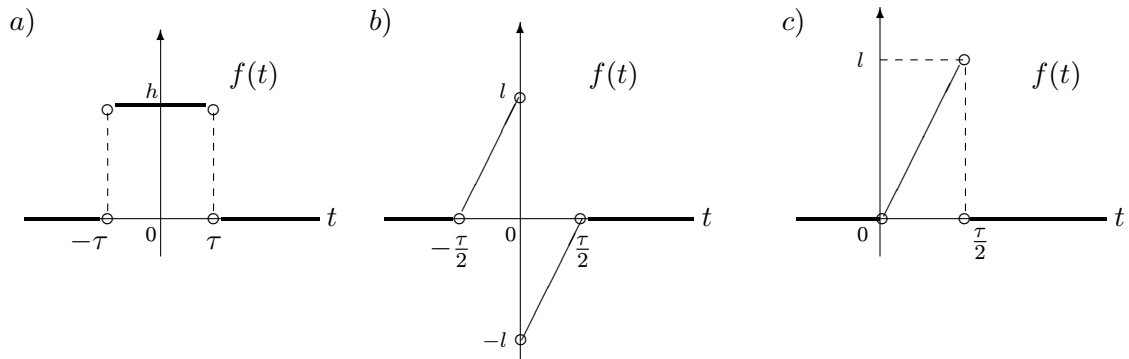
$$c) f(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } -\infty < t < 0; \\ t^3 + 1, & \text{pro } 0 < t < 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{pro } 1 < t < \infty. \end{cases}$$

$$d) f(t) = \begin{cases} t, & \text{pro } t < -1; \\ t + 1, & \text{pro } -1 < t < 1; \\ 3, & \text{pro } t > 1. \end{cases}$$

$$e) f(t) = \begin{cases} -3, & \text{pro } t < 0; \\ -2, & \text{pro } -0 < t < 1; \\ 1, & \text{pro } t > 1. \end{cases}$$

5. Vypočtěte zobecněné derivace funkcí uvedených v příkladu 4.

6. Vypočtěte zobecněné derivace funkcí znázorněných graficky:



7. Vypočtěte integrály:

$$a) \int_0^3 t^5 \delta''(t-2) dt \quad b) \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \delta'''(t) dt$$

$$d) \int_0^2 e^{3t} \delta'''(t-2) dt \quad d) \int_{-\infty}^{\infty} t^n \delta^{(n)}(t) dt$$

$$e) \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \delta^{(n)}(t) dt \quad f) \int_0^{\pi} \sin t \delta^{(n)}(t+2\pi) dt$$

Výsledky

1. a) $6\delta(t-2)$
b) $17\delta(t+3)$
c) $e\delta(t-1)$
d) $15\delta(t-2)$
2. a) 1
b) 0
c) -3
d) 0
3. a) $\frac{3}{2}$
b) $\frac{4}{3}$
c) $\frac{15}{2}$
d) -3
e) $\frac{4}{3}$
f) 0
4. a) $f(t) = 3\eta(t-a)$
b) $f(t) = 2[\eta(t) - \eta(t-1)]$
c) $f(t) = t + (t^3 - t + 1)\eta t - (t^3 + \frac{1}{2})\eta(t-1)$
d) $f(t) = (t+1)\eta(t+1) + (2-t)\eta(t-1)$
e) $f(t) = -3 + \eta t + 3\eta(t-1)$
5. a) $3\delta(t-a)$
b) $2\delta(t) - 2\delta(t-1)$
c) $1 - \eta(t) + 3t^2[\eta(t) - \eta(t-1)] + \delta(t) - \frac{3}{2}\delta(t-1)$
d) $\eta(t+1) - \eta(t-1) + \delta(t-1)$
e) $\delta(t) + 3\delta(t-1)$
6. a) $h\delta(t+\tau) - h\delta(t-\tau)$
b) $\frac{2l}{\tau} \left[\eta(t + \frac{\tau}{2}) - \eta(t - \frac{\tau}{2}) \right] - 2l\delta(t)$
c) $\frac{2l}{\tau} \left[\eta(t) - \eta(t - \frac{\tau}{2}) \right] - l\delta(t - \frac{\tau}{2})$
7. a) 160
b) 1
c) $-a^3 e^{2a}$
d) $(-1)^n n!$
e) 0 pro $n = 2k + 1$, $(-1)^k$ pro $n = 2k$.
f) 0

4 Řešení lineárních diferenciálních rovnic užitím váhové funkce

4.1 Cauchyova funkce, váhová funkce

Připomeňme nejdříve několik základních pojmů z teorie lineárních diferenciálních rovnic n -tého řádu.

Lineární diferenciální rovnici n -tého řádu nazveme rovnicí tvaru

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = f(t), \quad a_0(t) \neq 0. \quad (4.1)$$

Položme

$$L[y] = a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t). \quad (4.2)$$

Rovnici (4.1) pak můžeme psát ve tvaru

$$L[y] = f(t). \quad (4.3)$$

Spojitosť funkcí $a_i(t), f(t), i = 0, 1, \dots, n, a_0(t) \neq 0$, na intervalu (a, b) zajišťuje existenci a jednoznačnost řešení rovnice (4.1) splňující počáteční podmínky

$$y(t_0) = \alpha_0, \quad y'(t_0) = \alpha_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1}, \quad (4.4)$$

kde $\alpha_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ jsou reálná čísla. Úloha najít řešení rovnice (4.1) splňující počáteční podmínky (4.4) se nazývá *Cauchyovou úlohou*.

Obecné řešení (4.3) je tvaru $y(t) = y_0(t) + Y(t)$, kde $y_0(t)$ je obecné řešení homogenní rovnice $L[y] = 0$ a $Y(t)$ je libovolné partikulární řešení nehomogenní rovnice (4.3).

Uvažujme nyní homogenní lineární diferenciální rovnici $L[y] = 0$ s počátečními podmínkami

$$y(\tau) = y'(\tau) = \dots, = y^{(n-2)}(\tau) = 0, \quad y^{(n-1)}(\tau) = \frac{1}{a_0(\tau)}, \quad (4.5)$$

$\tau \in (a, b)$. Nechť $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ je fundamentální systém řešení rovnice $L[y] = 0$, pak obecné řešení je tvaru

$$y_0(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \cdots + c_ny_n(t),$$

kde konstanty c_1, c_2, \dots, c_n jsou řešením soustavy

$$\begin{aligned} c_1 y_1(\tau) + c_2 y_2(\tau) + \dots + c_n y_n(\tau) &= 0 \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-2)}(\tau) + c_2 y_2^{(n-2)}(\tau) + \dots + c_n y_n^{(n-2)}(\tau) &= 0 \\ c_1 y_1^{(n-1)}(\tau) + c_2 y_2^{(n-1)}(\tau) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(\tau) &= \frac{1}{a_0(\tau)}. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že konstanty c_1, c_2, \dots, c_n závisí na počátečním bodu $t = \tau \in (a, b)$, tedy $c_1 = c_1(\tau), c_2 = c_2(\tau), \dots, c_n = c_n(\tau)$. Odtud partikulární řešení rovnice $L[y] = 0$ lze psát ve tvaru

$$y_0(t, \tau) = c_1(\tau) y_1(t) + \dots + c_n(\tau) y_n(t) \quad (4.6)$$

a lze je tedy chápat jako funkci dvou proměnných t, τ . Funkce $y_0(t, \tau)$ se nazývá *Cauchyovou funkcí*.

Definice 4.1. *Váhovou funkcí* operátoru $L[y]$ nazveme funkci $k(t, \tau) \equiv 0$ pro $t < \tau$ a která pro $t > \tau$ je rovna partikulárnímu řešení rovnice $L[y] = 0$ splňující počáteční podmínky (4.5).

Váhovou funkci lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$k(t, \tau) = y_0(t, \tau) \eta(t - \tau).$$

Vlastnosti váhové funkce:

- i) $k(t, \tau) \equiv 0$ pro $t < \tau$.
- ii) $k(t, \tau)$ jako funkce proměnné t (při pevném τ) vyhovuje pro $t \neq \tau$ rovnici

$$L[k(t, \tau)] = 0.$$

- iii) Funkce $k(t, \tau)$ a její derivace včetně n -tého řádu jsou spojité na intervalu (a, b) s výjimkou bodu $t = \tau$, kde jsou spojité derivace pouze do $(n-2)$ -tého řádu, $(n-1)$ -tá derivace má v bodě $t = \tau$ nespojitost I. druhu se skokem

$$\frac{\partial^{(n-1)} k(t, \tau)}{\partial t^{n-1}} \Big|_{t=\tau^+} - \frac{\partial^{(n-1)} k(t, \tau)}{\partial t^{n-1}} \Big|_{t=\tau^-} = \frac{1}{a_0(\tau)}.$$

- iv) Pro $t = \tau$ platí:

$$k(\tau, \tau) = k'(\tau, \tau) = \dots = k^{(n-2)}(\tau, \tau) = 0, \quad k^{(n-1)}(\tau, \tau) = \frac{1}{a_0(\tau)}.$$

Příklad 4.2. Určete váhovou funkci lineárního diferenciálního operátoru

$$L[y] = ty' + y.$$

Řešení. Nejdříve vypočteme partikulární řešení homogenní rovnice $L[y] = 0$ s počáteční podmínkou

$$y(\tau) = \frac{1}{\tau}. \quad (4.7)$$

Řešením homogenní rovnice $ty' + y = 0$, která je rovnicí se separovanými proměnnými, dostáváme

$$\ln |y| = -\ln |t| + \ln C \Rightarrow y_0(t) = \frac{C}{t},$$

což je obecné řešení homogenní rovnice. Z počáteční podmínky (4.7) plyne

$$y(t) \Big|_{t=\tau} = \frac{C}{t} \Big|_{t=\tau} = \frac{1}{\tau}.$$

Odtud $C = 1$, $y_0(t, \tau) = \frac{1}{\tau}$. Tedy váhová funkce je tvaru

$$k(t, \tau) = \frac{1}{\tau} \eta(t - \tau).$$

□

Příklad 4.3. Určete váhovou funkci lineárního diferenciálního operátoru

$$L[y] = y' + a \cos t y.$$

Řešení. Vypočteme partikulární řešení homogenní rovnice $L[y] = 0$ s počáteční podmínkou $y(\tau) = 1$. Obecné řešení homogenní rovnice, což je opět rovnice se separovanými proměnnými, je tvaru

$$y_0(t) = C e^{-a \sin t}.$$

Z počáteční podmínky plyne, že konstanta $C = e^{a \sin \tau}$. Cauchyova funkce je tvaru

$$y_0(t, \tau) = e^{-a(\sin t - \sin \tau)}.$$

Odtud

$$k(t, \tau) = e^{-a(\sin t - \sin \tau)} \eta(t - \tau).$$

□

Příklad 4.4. Určete váhovou funkci lineárního diferenciálního operátoru

$$L[y] = y'' + \omega^2 y.$$

Řešení. Nejdříve vypočteme partikulární řešení homogenní rovnice $L[y] = 0$ s počátečními podmínkami

$$y(\tau) = 0, \quad y'(\tau) = 1. \quad (4.8)$$

Kořeny charakteristické rovnice $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ jsou $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$. Obecné řešení homogenní rovnice má tvar

$$y_0(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Konstanty C_1 , C_2 jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} C_1 \cos \omega \tau + C_2 \sin \omega \tau &= 0 \\ -C_1 \omega \sin \omega \tau + C_2 \omega \cos \omega \tau &= 1. \end{aligned}$$

Tedy

$$C_1 = -\frac{\sin \omega \tau}{\omega}, \quad C_2 = \frac{\cos \omega \tau}{\omega}.$$

Cauchyova funkce je pak tvaru

$$y(t, \tau) = -\frac{\sin \omega \tau}{\omega} \cos \omega t + \frac{\cos \omega \tau}{\omega} \sin \omega t = \frac{\sin \omega(t - \tau)}{\omega}.$$

a odtud váhová funkce

$$k(t, \tau) = \frac{\sin \omega(t - \tau)}{\omega} \eta(t - \tau).$$

□

Váhová funkce $k(t, \tau)$ je v tomto případě funkcí diferenčního argumentu $t - \tau$. V případě, že rovnice $L[y] = 0$ má konstantní koeficienty, tak váhová funkce $k(t, \tau)$ závisí pouze na diferenčním argumentu $t - \tau$, tj.

$$k(t, \tau) = k(t - \tau).$$

To plyne z následujícího: Rovnice $L[y] = 0$ je v tomto případě tvaru

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = 0. \quad (4.9)$$

Substitucí $t - \tau = s$ ($dt = ds$), kde τ je nyní pevná hodnota, dostáváme, že rovnice (4.9) je tvaru

$$a_0 y^{(n)}(s) + a_1 y^{(n-1)}(s) + \dots + a_{n-1} y'(s) + a_n y(s) = 0. \quad (4.10)$$

Tedy lineární operátor $L[y]$ zůstává stejný, ale v tomto případě při výpočtu váhové funkce je třeba uvažovat počáteční podmínky (4.5) pro $t - \tau = s = 0$, tj.

$$y(s) \Big|_{s=0} = y'(s) \Big|_{s=0}, \dots, y^{(n-2)}(s) \Big|_{s=0} = 0, \quad y^{(n-1)}(s) \Big|_{s=0} = \frac{1}{a_0}. \quad (4.11)$$

Váhová funkce v tomto případě závisí pouze na jedné proměnné s a tedy po dosazení $s = t - \tau$ dostáváme $k(s) = k(t - \tau)$.

Příklad 4.5. Určete váhovou funkci operátoru $L[y] = y'' - 4y' + 5y$.

Řešení. Nejdříve vypočteme partikulární řešení homogenní rovnice v našem případě již s konstantními koeficienty, tj. $y'' - 4y' + 5y = 0$ s počátečními podmínkami

$$y(s) \Big|_{s=0} = 0, \quad y'(s) \Big|_{s=0} = 1,$$

přičemž $y(t) \equiv 0$ pro $s < 0$. Kořeny charakteristické rovnice jsou $\lambda_{1,2} = 2 \pm j$ a tedy obecné řešení homogenní rovnice je tvaru

$$y_0(s) = e^{2s}(C_1 \cos s + C_2 \sin s).$$

Řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 &= 0 \\ 2(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + C_2 \cos 0 - C_1 \sin 0 &= 1 \end{aligned}$$

dostáváme, že $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ a dále

$$y_0(s) = e^{2s} \sin s, \quad k(s) = e^{2s} \sin s \eta(s).$$

Substitucí $s = t - \tau$ pak dostáváme váhovou funkci ve tvaru

$$k(t - \tau) = e^{2(t-\tau)} \sin(t - \tau) \eta(t - \tau).$$

□

4.2 Partikulární řešení nehomogenních rovnic

Nyní ukážeme jak lze pomocí váhové funkce určit partikulární řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice.

Věta 4.6. *Partikulární řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice $L[y] = f(t)$ s počátečními podmínkami*

$$y(t_0) = y'(t_0) = \dots = y^{(n-1)}(t_0) = 0 \tag{4.12}$$

je pro $t > t_0$ tvaru

$$Y(t) = \int_{t_0}^t k(t, \tau) f(\tau) d\tau, \tag{4.13}$$

kde $k(t, \tau)$ je váhová funkce lineárního operátoru $L[y]$.

Důkaz. Platnost věty dokážeme dosazením partikulárního řešení (4.13) a jeho derivací do rovnice (4.1). Derivací (4.13) podle parametru t , tj. obecně aplikací vzorce

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} g(t, \tau) d\tau = \int_{a(t)}^{b(t)} g'_t(t, \tau) d\tau + b'(t)g[t, b(t)] - a'(t)g[t, a(t)]$$

a využitím vlastnosti váhové funkce, tj.

$$k(t, t) = k'_t(t, t) = \dots = k_t^{(n-2)}(t, t) = 0, \quad k_t^{(n-1)}(t, t) = \frac{1}{a_0(t)}$$

dostáváme

$$\begin{aligned}
 Y'(t) &= \int_{t_0}^t k_t'(t, \tau) f(\tau) d\tau, \\
 Y''(t) &= \int_{t_0}^t k_t''(t, \tau) f(\tau) d\tau, \\
 &\vdots \\
 Y^{(n-1)}(t) &= \int_{t_0}^t k_t^{(n-1)}(t, \tau) f(\tau) d\tau, \\
 Y^{(n)}(t) &= \int_{t_0}^t k_t^{(n)}(t, \tau) f(\tau) d\tau + k_t^{(n-1)}(t, t) f(t) \\
 &= \int_{t_0}^t k_t^{(n)}(t, \tau) f(\tau) d\tau + \frac{f(t)}{a_0(t)}.
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Dosazením (4.13) a (4.14) do rovnice (4.1) dostaneme

$$\int_{t_0}^t \left[a_0(t) k_t^{(n)}(t, \tau) + a_1(t) k_t^{(n-1)}(t, \tau) + \dots + a_n(t) k(t, \tau) \right] f(\tau) d\tau + f(t) = f(t).$$

Protože $L[k(t, \tau)] = 0$, pak dostáme identitu $f(t) = f(t)$, tedy tvrzení věty je dokázáno. \square

Obecné řešení rovnice (4.1) je tvaru

$$y(t) = y_0(t) + Y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \dots + C_n(t) y_n(t) + \int_{t_0}^t k(t, \tau) f(\tau) d\tau, \tag{4.15}$$

kde $y_0(t)$ je obecné řešení homogenní rovnice $L[y] = 0$ a $Y(t)$ partikulární řešení nehomogenní rovnice $L[y] = f(t)$. Ze vztahu (3.5) pak můžeme vypočítat partikulární řešení nehomogenní rovnice splňující počáteční podmínky

$$y(t_0) = \alpha_0, \quad y'(t_0) = \alpha_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1}.$$

Konstanty C_1, C_2, \dots, C_n jsou pak řešením soustavy algebraických rovnic

$$\begin{aligned}
 C_1 y_1(t_0) + C_2 y_2(t_0) + \dots + C_n y_n(t_0) &= \alpha_0 \\
 C_1 y_1'(t_0) + C_2 y_2'(t_0) + \dots + C_n y_n'(t_0) &= \alpha_1 \\
 &\vdots \\
 C_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(t_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(t_0) &= \alpha_{n-1},
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

protože

$$Y(t_0) = Y'(t_0) = \dots = Y^{(n-1)}(t_0) = 0.$$

Příklad 4.7. Vyřešte Cauchyovu úlohu

$$y' + \cos t \, y = \cos t, \quad y(0) = 0.$$

Řešení. V příkladu 4.3 jsme našli váhovou funkci lineárního operátoru $L[y] = y' + \cos ty$ ve tvaru

$$k(t, \tau) = e^{-a(\sin t - \sin \tau)} \eta(t - \tau).$$

V našem případě je $a = 1$ a tedy váhová funkce je tvaru

$$k(t, \tau) = e^{-\sin t + \sin \tau} \eta(t - \tau).$$

Jelikož v našem případě se jedná o nulovou počáteční podmínku, tak partikulární řešení vypočteme podle vzorce (4.13), tj.

$$y(t) = \int_0^t e^{-\sin t + \sin \tau} \cos \tau d\tau = e^{-\sin t} e^{\sin \tau} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = 1 - e^{-\sin t}.$$

Tedy řešení Cauchyovy úlohy má tvar

$$y(t) = 1 - e^{-\sin t}.$$

□

Příklad 4.8. Vyřešte Cauchyovu úlohu

$$y'' + 9y = 2 \cos 3t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$$

Řešení. Dle příkladu (4.4) můžeme psát váhovou funkci operátoru $L[y] = y'' + 9y$ ve tvaru

$$k(t, \tau) = k(t - \tau) = \frac{1}{3} \sin 3(t - \tau) \eta(t - \tau).$$

Obecné řešení homogenní rovnice $y'' + 9y = 0$ je tvaru

$$y_0(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice má tvar

$$Y(t) = \int_0^t \frac{1}{3} \sin 3(t - \tau) 2 \cos 3\tau d\tau = \frac{t}{3} \sin 3t.$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice je pak tvaru

$$y(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t + \frac{t}{3} \sin 3t.$$

Systém (4.16) pro určení konstant C_1, C_2 lze pak psát ve tvaru

$$\begin{aligned} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 &= -2 \\ -3C_1 \sin 0 + 3C_2 \sin 0 &= 1. \end{aligned}$$

Odtud $C_1 = -2$, $C_2 = 1/3$. Řešením Cauchyovy úlohy je pak funkce

$$y(t) = -2 \cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{t}{3} \sin 3t = \frac{t+1}{3} \sin 3t - 2 \cos 3t.$$

□

Výpočet partikulárního řešení nehomogenní rovnice (4.1) s nenulovými počátečními podmínkami (4.4) se zjednoduší, jestliže uvažujeme normovaný systém řešení rovnice $L[y] = 0$.

Definice 4.9. Fundamentální systém řešení $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ homogenní rovnice $L[y] = 0$ nazveme *normovaným systémem řešení* v bodě $t = t_0$ jestliže jeho řešení vyhovují počátečním podmínkám

$$\begin{aligned} y_1(t_0) &= 1, \quad y_1'(t_0) = 0, \quad y_1''(t_0) = 0, \dots, \quad y_1^{(n-1)}(t_0) = 0 \\ y_2(t_0) &= 0, \quad y_2'(t_0) = 1, \quad y_2''(t_0) = 0, \dots, \quad y_2^{(n-1)}(t_0) = 0 \\ &\vdots \\ y_n(t_0) &= 0, \quad y_n'(t_0) = 0, \quad y_n''(t_0) = 0, \dots, \quad y_n^{(n-1)}(t_0) = 1, \end{aligned}$$

tedy

$$y_k^{(m)}(t_0) = \begin{cases} 1, & \text{pro } m = k - 1; \\ 0, & \text{pro } m \neq k - 1, \end{cases}$$

kde $k = 1, 2, \dots, n$ a $m = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Když fundamentální systém řešení $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ homogenní rovnice $L[y] = 0$ je normovaným systémem v bodě $t = t_0$, pak partikulární řešení nehomogenní rovnice (4.1) splňující nenulové počáteční podmínky

$$y(t_0) = \alpha_0, \quad y'(t_0) = \alpha_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1}.$$

je tvaru

$$y(t) = Y(t) + \sum_{k=1}^n \alpha_{k-1} y_k(t), \quad (4.17)$$

kde

$$Y(t) = \int_{t_0}^t k(t, \tau) f(\tau) d\tau$$

a $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ je normovaný systém řešení rovnice $L[y] = 0$. Tedy v tomto případě partikulární řešení nehomogenní rovnice (4.1) s nenulovými počátečními podmínkami (4.4) dostaneme z obecného řešení (4.15) volbou konstant $C_k = \alpha_{k-1}$, $k = 1, \dots, n$ a místo fundamentálního systému řešení rovnice $L[y] = 0$ uvažujeme normovaný systém řešení v bodě $t = t_0$.

Příklad 4.10. Uvažujme diferenciální rovnici (viz. Příklad 4.8)

$$y'' + 9y = 2 \cos 3t.$$

Řešení. Normovaný systém řešení homogenní rovnice $y'' + 9y = 0$ v bodě $t = 0$ splňuje počáteční podmínky

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0.$$

$$y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1.$$

Z obecného řešení homogenní rovnice

$$y_0(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t$$

a jeho první derivace

$$y_0'(t) = -3C_1 \sin 3t + 3C_2 \cos 3t$$

dostáváme z počátečních podmínek

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 \\ y_1'(0) &= 0 = -3C_1 \cdot 0 + 3C_2 \cdot 1. \end{aligned}$$

Tedy $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ a normované řešení v bodě $t = 0$ je tvaru

$$y_1(t) = \cos 3t.$$

Podobně vzhledem k počátečním podmínkám $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$ dostáváme druhé normované řešení ve tvaru

$$y_2(t) = \frac{1}{3} \cos 3t.$$

Pak partikulární řešení nehomogenní rovnice s počátečními podmínkami $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$ je podle vzorce (4.17) tvaru

$$y(t) = \frac{t}{3} \sin 3t - 2 \cos 3t + 1 \cdot \frac{1}{3} \sin 3t = \frac{t+1}{3} \sin 3t - 2 \cos 3t.$$

□

4.3 Vztah Diracova impulzu a váhové funkce

Dynamický systém, který je popsán lineárním diferenciálním operátorem $L[y]$, se nachází v *rovnovážném stavu* na intervalu (a, b) odpovídá-li reakce systému triviálnímu řešení, tj. $y(t) \equiv 0$. Předpokládejme, že na vstup rovnovážného systému, jehož práce je popsána lineárním diferenciálním operátorem $L[y]$, působí signál

$$f(t) = \delta(t - \tau, \lambda),$$

kde $\delta(t - \tau, \lambda)$ je jehlovitá funkce, λ je dostatečně malé, tj. signál trvá pouze od okamžiku $\tau - \lambda$ do $\tau + \lambda$ a vně intervalu je nulový. Budeme hledat reakci systému $y_\lambda(t)$ na tento signál, tj. budeme hledat řešení nehomogenní rovnice

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)y(t) = \delta(t - \tau, \lambda),$$

vyhovující nulovým počátečním podmínkám

$$y(t) \Big|_{t=\tau-\lambda} = y'(t) \Big|_{t=\tau-\lambda} = \dots = y^{(n-1)}(t) \Big|_{t=\tau-\lambda} = 0.$$

Tedy reakce systému $y_\lambda(t)$ je dle vzorce (4.13) tvaru

$$y_\lambda(t) = \int_{t_0}^t k(t, \tau) f(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t k(t, \tau) \delta(t - \tau, \lambda) d\tau = \int_{\tau-\lambda}^{\tau+\lambda} k(t, \tau) \delta(t - \tau, \lambda) d\tau.$$

Aplikujeme-li větu a střední hodnotě a využijeme-li vlastnost jehlovité funkce, tj. $\int_{-\lambda}^{\lambda} \delta(t, \lambda) dt = 1$, dostáváme reakci systému ve tvaru

$$y_\lambda(t) = \int_{\tau-\lambda}^{\tau+\lambda} k(t, \tau) \delta(t - \tau, \lambda) d\tau = k(t, \tau^*) \int_{\tau-\lambda}^{\tau+\lambda} \delta(t - \tau, \lambda) d\tau = k(t, \tau^*),$$

kde $\tau^* \in (\tau - \lambda, \tau + \lambda)$. Tedy

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} y_\lambda(t) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} k(t, \tau^*) = k(t, \tau).$$

Ale pro $\lambda \rightarrow 0$ jehlovitá funkce $\delta(t - \tau, \lambda)$ konverguje pod integračním znaménkem k Diracovu impulzu $\delta(t - \tau)$.

Jestliže na vstup rovnovážného systému v časový okamžik $t = \tau$ začne působit Diracův impulz $f(t) = \delta(t - \tau)$, pak systém přechází do nerovnovážného stavu s odezvou, která je popsána váhovou funkcí $k(t, \tau)$. Váhová funkce je tedy řešením rovnice

$$L[y] = \delta(t - \tau),$$

keré je pro $t < \tau$ identicky rovno nule. Váhovou funkci $k(t, \tau)$ pak nazýváme *reakcí Diracova impulzu* nebo také *impulzní přechodovou funkcí*.

Příklad 4.11. Určete váhovou funkci operátoru $L[y] = ay'$, kde a je konstanta.

Na základě předchozí teorie váhová funkce je řešením rovnice

$$ay' = \delta(t - \tau),$$

přičemž $y(t) \equiv 0$ pro $t < \tau$.

Řešení. Tedy

$$y(t) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^t \delta(t - \tau) dt + C = \frac{1}{a} \eta(t - \tau) + C.$$

Jelikož $y(t) \equiv 0$ a $\eta(t - \tau) \equiv 0$ pro $t < \tau$, pak $C = 0$. Tedy pro $t > \tau$ platí

$$y(t) = \frac{1}{a} \eta(t - \tau),$$

což znamená, že váhová funkce je tvaru

$$k(t, \tau) = \frac{1}{a} \eta(t - \tau).$$

□

Cvičení

1. Vypočtete váhové funkce lineárních diferenciálních operátorů:

a) $L[y] = y' + ay$, kde a je konstanta.

b) $L[y] = y' + aty$, kde a je konstanta.

c) $L[y] = 3y'' + 27y$.

d) $L[y] = 3y'' - 2y' - y$.

e) $L[y] = y' + \sin t y$.

2. Vypočtete partikulární řešení nehomogenních lineárních diferenciálních rovnic s nulovými počátečními podmínkami:

a) $y' + y = 0$, $y(0) = 0$.

b) $y' + ay = \sin \omega t$, $y(0) = 0$, a, ω jsou konstanty.

c) $y'' - 3y' + 2y = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$.

d) $y' + \sin 2t y = \sin 2t$, $y(\pi) = 0$.

e) $y'' + 4y = 2 \cos 2t$, $y(0) = y'(0) = 0$.

f) $ty' + y = t$, $y(1) = 0$.

3. Vypočtete partikulární řešení nehomogenních lineárních diferenciálních rovnic s nenulovými počátečními podmínkami:

a) $y'' + \omega^2 y = A \cos \omega t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, A, ω jsou konstanty.

b) $y'' + y = 1$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 1$.

c) $y' + 2y = e^{-t}$, $y(0) = 1$.

d) $y' + \sin 2t y = \sin 2t$, $y(\pi) = 1$.

e) $y' + \sin 2t y = \sin 2t$, $y(\pi) = e^{1/2}$.

f) $y' + \sin 2t y = \sin 2t$, $y(0) = 1$.

g) $y' + \sin 2t y = \sin 2t$, $y(0) = 3$.

h) $y'' + 4y = 2 \cos 2t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

i) $ty' + y = t$, $y(1) = 2$.

Výsledky

1. a) $k(t - \tau) = e^{-a(t-\tau)} \eta(t - \tau)$.
- b) $k(t, \tau) = e^{-\frac{a}{2}(t^2 - \tau^2)} \eta(t - \tau)$.
- c) $k(t - \tau) = \frac{1}{9} \sin 3(t - \tau) \eta(t - \tau)$.
- d) $k(t - \tau) = \frac{1}{4} (e^{t-\tau} - e^{-\frac{t-\tau}{3}}) \eta(t - \tau)$.
- e) $k(t, \tau) = e^{\frac{1}{2}(\cos 2t - \cos 2\tau)} \eta(t - \tau)$.

2. a) $1 - e^{-t}$.
b) $\frac{\omega e^{-at} + a \sin \omega t - \omega \cos \omega t}{a^2 + \omega^2}$.
c) $\frac{1}{2}(1 - 2e^t - e^{2t})$.
d) $1 - e^{-\sin^2 t}$.
e) $\frac{t}{2} \sin 2t$.
f) $\frac{1}{2}(t - \frac{1}{t})$.
3. a) $2 \cos \omega t + \frac{\sin \omega t}{\omega} (1 + \frac{At}{2})$.
b) $1 + \cos t - \sin t$.
c) e^{-t} .
d) 1.
e) $e^{\frac{1}{2} \cos 2t} - e^{-\sin^2 t} + 1$.
f) 1.
g) $1 + 2e^{-\sin^2 t}$.
h) $\cos 2t + \frac{1}{2}(t - 1) \sin 2t$.
i) $\frac{t^2 + 3}{2t}$.

5 Systémy obyčejných diferenciálních rovnic

5.1 Základní pojmy

Při studiu konkrétních fyzikálních systémů matematickými prostředky postupujeme zpravidla tak, že zvolíme jistý soubor fyzikálních veličin, pomocí nichž můžeme studovaný systém úplně popsat. Úloha vyšetřit chování takového systému se pak převádí na úlohu zjistit, jak se tyto vybrané veličiny, zvané obvykle *stavové veličiny* (nebo také *stavové proměnné*), mění s časem.

Stavové veličiny lze pro daný systém obecně vybrat mnoha způsoby a závisí do značné míry na fyzikální a technické formulaci studovaného problému. V této kapitole se nebudeme zabývat metodami výběru stavových veličin, ale budeme předpokládat, že problém, který máme řešit, je už pomocí stavových veličin formulován. Naším úkolem bude popsat metody, jak explicitně vyjádřit závislost těchto stavových veličin na čase.

Řada problémů přírodních i technických věd se matematicky formuluje pomocí systémů obyčejných diferenciálních rovnic. Nejjednodušším systémem obyčejných diferenciálních rovnic je *systém diferenciálních rovnic I. řádu rozřešený vzhledem k derivacím* (nazývá se též *normální systém*).

Je to systém rovnic tvaru

$$\begin{aligned}x'_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\x'_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\&\vdots \\x'_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n),\end{aligned}\tag{5.1}$$

kde f_i ($i = 1, \dots, n$) jsou reálné funkce definované na otevřené množině $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Systém (5.1) je výhodné přepsat do vektorového tvaru:

Označme $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)^T$, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)^T$, kde T značí transponovanou matici, tj. řádek se mění na sloupec a naopak. Systém (5.1) lze pak popsat ve tvaru

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})\tag{5.2}$$

Definice 5.1. Uvažujme systém diferenciálních rovnic (5.2), kde \mathbf{f} je vektorová funkce definovaná na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Zobrazení $\mathbf{u} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, kde $J \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, nazveme *řešením* systému (5.2), jestliže platí

$$1) (t, \mathbf{u}(t)) \in G \quad \forall t \in J$$

$$2) \text{ zobrazení } \mathbf{u} \text{ má derivaci na } J \text{ a platí } \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \quad \forall t \in J.$$

Nechť $\mathbf{u}_1(t)$, $t \in J_1$, $\mathbf{u}_2(t)$, $t \in J_2$, jsou dvě řešení systému (5.2). Řekneme, že $\mathbf{u}_1(t)$ je *prodloužením* $\mathbf{u}_2(t)$, jestliže $J_1 \supset J_2$ a pro každé $t \in J_2$ platí $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$.

Zpravidla nás zajímá takové řešení $\mathbf{v} : K \rightarrow \mathbb{R}^n$, $K \subset \mathbb{R}$, k němuž neexistuje řešení, které by bylo definováno na větším intervalu, než je interval K a přitom bylo prodloužením zobrazení \mathbf{v} . Takové řešení \mathbf{v} nazýváme **maximálním řešením**. Dá se dokázat, že ke každému řešení \mathbf{u} existuje maximální řešení \mathbf{v} , které je prodloužením řešení \mathbf{u} .

Definice 5.2. Nechť je dán bod $(t_0, \boldsymbol{\tau}) \in G$. *Cauchyovou* nebo též *počáteční úlohou* pro systém (5.2) nazýváme úlohu najít řešení $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ systému (5.2), pro něž platí

$$\mathbf{u}(t_0) = \boldsymbol{\tau} \tag{5.3}$$

neboli

$$u_1(t_0) = \tau_1, u_2(t_0) = \tau_2, \dots, u_n(t_0) = \tau_n. \tag{5.4}$$

Cauchyovu úlohu zpravidla zapisujeme ve tvaru

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\tau}. \tag{5.5}$$

O řešení \mathbf{u} , pro něž platí (5.3), říkáme, že je řešením Cauchyovy úlohy (5.5) nebo že je řešením systému (5.2) vyhovujícím počáteční podmínce (5.3).

Geometrické znázornění řešení

Je-li $\mathbf{u} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ řešení systému (5.2), nazýváme množinu $\mathbf{u}(J) = \{\mathbf{u}(t), t \in J\}$ *trajektorií* systému (5.2). Jestliže $\mathbf{u}(t_0) = \boldsymbol{\tau}$, říkáme, že trajektorie prochází v okamžiku t_0 bodem („stavem“) $\boldsymbol{\tau}$ prostoru \mathbb{R}^n (prostor \mathbb{R}^n v tomto případě také nazýváme *prostorem stavů* nebo též *fázovým prostorem*).

Zobrazení \mathbf{u} je *parametrizace trajektorie* $\mathbf{u}(J)$. Trajektorie může být za jistých podmínek křivka nebo jednobodová množina. Pojem trajektorie je vhodný zejména pro tzv. *autonomní systém*, což je systém tvaru

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Je-li $\mathbf{u}'(t) \neq \mathbf{o}$, je tento vektor tečným vektorem k trajektorii $\mathbf{u}(J)$ v bodě $\mathbf{u}(t)$, tento tečný vektor je vektorem pole \mathbf{f} v bodě $\mathbf{u}(t)$.

Příklad 5.3. Uvažujme systém

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_2 \\ x_2' &= x_1 \end{aligned}$$

Řešením je vektorová funkce

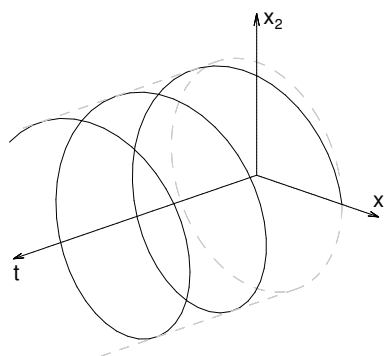
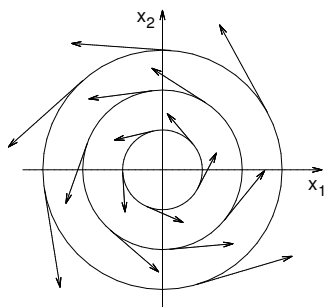
$$\mathbf{u}(t) = (r \cos(t + \varphi), r \sin(t + \varphi)), \quad t \in \mathbb{R},$$

ve složkovém tvaru

$$\begin{aligned} u_1(t) &= r \cos(t + \varphi) \\ u_2(t) &= r \sin(t + \varphi), \end{aligned}$$

kde r, φ jsou libovolná čísla. Pro $r \neq 0$ je trajektorie systému kružnice o poloměru $|r|$. Pro totéž r a různá φ dostaneme tutéž trajektorii, i když řešení jsou různá - jsou časově posunuta. Pro $r = 0$ dostaneme jako trajektorii jednobodovou množinu $\{(0, 0)\}$. Řešení, které má tuto trajektorii, je nulové (triviální) řešení: $u_1(t) = 0, u_2(t) = 0$. Bod $(0, 0)$ je tzv. rovnovážný (klidový) stav systému.

Trajektorie mají v každém bodě $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ směr pole $\mathbf{f}(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$ (viz obrázek 5.1).



Obr. 5.1: Trajektorie z příkladu 5.3.

Obr. 5.2: Charakteristika z příkladu 5.3.

Úplněji než trajektorie charakterizuje geometricky řešení $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ jeho graf, tj. množina

$$U = \{(t, u_1(t), \dots, u_n(t)) : t \in J\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Graf řešení \mathbf{u} je podmnožina prostoru $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, který se nazývá *rozšířený fázový prostor*. První složka \mathbb{R} kartézského součinu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je časová osa, druhá složka \mathbb{R}^n kartézského součinu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je fázový prostor soustavy (5.2).

Graf maximálního řešení se nazývá *charakteristika soustavy* (5.2). Množina všech charakteristik soustavy zcela tuto soustavu určuje.

Charakteristikou soustavy z příkladu (5.3) je množina

$$\{(t, r \cos(t + \varphi), r \sin(t + \varphi)) : t \in (-\infty, \infty)\},$$

a je to tedy šroubovice pro $r \neq 0$ (viz obrázek 5.2). Pro různá φ a stejné $r \neq 0$ dostáváme šroubovice posunuté ve směru osy t ; všechny tyto šroubovice se promítají do téže trajektorie.

Dále si ukážeme, že diferenciální rovnici n -tého řádu v explicitním tvaru lze chápat jako speciální případ systému (5.1). Nechť tedy

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}). \quad (5.6)$$

Označme $x_1 = x, x_2 = x', \dots, x_n = x^{(n-1)}$.

Platí

$$\begin{aligned} x'_1 &= x' &= x_2 \\ x'_2 &= x'' &= x_3 \\ &\vdots \\ x'_{n-1} &= x^{(n-1)} &= x_n \\ x'_n &= x^{(n)} &= f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

což vede k systému

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ x'_{n-1} &= x_n \\ x'_n &= f(t, x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (5.7)$$

To je systém tvaru (5.1), kde

$$\begin{aligned} f_1(t, x_1, \dots, x_n) &= x_2 \\ f_2(t, x_1, \dots, x_n) &= x_3 \\ &\vdots \\ f_{n-1}(t, x_1, \dots, x_n) &= x_n \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) &= f(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Zřejmě platí:

Funkce $u(t), t \in J$, je řešením rovnice (5.6) právě tehdy, když $(u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t))$ je řešením systému (5.7) a naopak, je-li $(u_1(t), \dots, u_n(t))$ řešením systému (5.7), je první složka $u_1(t)$ řešením rovnice (5.6).

Analogicky je možné i systémy vyššího řádu s osamostatněnými nejvyššími derivacemi převést na systémy prvního řádu s větším počtem neznámých.

Příklad 5.4. Uvažujme systém

$$\begin{aligned} y'' &= g(t, y, y', z, z', z'') \\ z''' &= h(t, y, y', z, z', z''), \end{aligned}$$

kde g, h jsou funkce definované na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^6$.

Řešení. Položme $y = x_1, y' = x_2, z = x_3, z' = x_4, z'' = x_5$.

Dostaneme systém

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= g(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \\ x'_3 &= x_4 \\ x'_4 &= x_5 \\ x'_5 &= h(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \end{aligned}$$

což je systém pěti rovnic I. řádu. □

5.2 Existence a jednoznačnost řešení systémů dif. rovnic I. řádu

Velmi důležitou otázkou je, zda Cauchyova úloha má řešení (otázka existence) a zda toto řešení je v jistém smyslu jediné (otázka jednoznačnosti).

Než přejdeme k formulaci podmínek existence a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy, připomeňme si některé důležité pojmy:

Definice 5.5. Vektorový prostor V nazveme *normovaný*, jestliže na V je definovaná *norma*, tj. reálná funkce $\|\cdot\| : \mathbf{u} \rightarrow \|\mathbf{u}\|$ mající následující vlastnosti:

- i) $\|\mathbf{u}\| > 0$, je-li $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, $\|\mathbf{o}\| = 0$
- ii) $\|\alpha\mathbf{u}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{u}\| \quad \forall \mathbf{u} \in V$ a každý skalár α
- iii) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

Pro vektorové prostory konečné dimenze je charakteristická tato vlastnost normy:

Máme-li ve vektorovém prostoru V konečné dimenze dvě libovolné normy $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$, pak jsou *ekvivalentní*, tj. existují kladná čísla α, β tak, že $\forall \mathbf{u} \in V, \mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, platí

$$\alpha \leq \frac{\|\mathbf{u}\|_1}{\|\mathbf{u}\|_2} \leq \beta.$$

Tato vlastnost je velmi důležitá, neboť například v úlohách o konvergenci nebo spojitosti můžeme pracovat s kteroukoliv normou.

Připomeňme ještě, že operace vektorového prostoru v \mathbb{R}^n , tj. sčítání vektorů, násobení vektoru skalárem apod. jsou definovány po složkách.

Jako normu $\|\cdot\|$ v \mathbb{R}^n můžeme používat kteroukoliv z tří navzájem ekvivalentních norem

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_1 &= \sum_{i=1}^n |u_i| \\ \|\mathbf{u}\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^n u_i^2 \right)^{1/2} \\ \|\mathbf{u}\|_3 &= \max\{|u_1|, |u_2|, \dots, |u_n|\}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Dále nechť $M_n(\mathbb{R})$ je vektorový prostor čtvercových matic n -tého řádu. V prostoru $M_n(\mathbb{R})$ můžeme zavést řadu norem, z nichž všechny jsou ekvivalentní (prostor $M_n(\mathbb{R})$ má dimenzi n^2). Pro nás v následujících úvahách budou důležité normy, pro něž kromě vlastností i), ii) a iii) platí ještě

$$\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$$

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})_1^n$, nejužívanější budou normy:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\|_r &= \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \quad (\text{řádková norma}) \\ \|\mathbf{A}\|_s &= \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \quad (\text{sloupcová norma}) \\ \|\mathbf{A}\|_r &= \sqrt{\sum_{i,k=1}^n |a_{ik}|^2} \quad (\text{euklidovská norma})\end{aligned}$$

Příklad 5.6. Uvažujme matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, pak

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\|_r &= \max\{1+0+3, 0+1+0, 1+2+2\} = \max\{4, 1, 5\} = \underline{5}; \\ \|\mathbf{A}\|_s &= \max\{1+0+1, 0+1+2, 3+0+2\} = \max\{2, 3, 5\} = \underline{5}; \\ \|\mathbf{A}\| &= \sqrt{1+0+9+0+1+0+1+4+4} = \sqrt{20}.\end{aligned}$$

□

Definice 5.7. Řekneme, že Cauchyova úloha $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\tau}$, má právě jedno řešení, jestliže pro každou dvojici řešení $\mathbf{u}(t)$, $t \in I$, $\mathbf{v}(t)$, $t \in J$, existuje okolí O bodu t_0 , $O \subset I \cap J$, tak, že $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t) \forall t \in O$.

Uvedme některé vlastnosti funkce \mathbf{f} , které zaručují jednoznačnou řešitelnost Cauchyovy úlohy.

Definice 5.8. Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je oblast. Vektorová funkce $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ se nazývá *lipschitzovská vzhledem k proměnné \mathbf{x}* na množině G , existuje-li konstanta $L > 0$ tak, že pro každou dvojici $(t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{y}) \in G$ platí

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq L \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \quad (5.9)$$

V podmínce (5.9) můžeme za normu $\|\cdot\|$ zvolit kteroukoliv z norem (5.8).

Důležitou třídu funkcí lipschitzovských vzhledem k proměnné \mathbf{x} v oblasti $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tvoří funkce mající na G ohraničené všechny své první parciální derivace podle proměnných x_1, x_2, \dots, x_n , tj. funkce takové, že existuje konstanta $M > 0$ tak, že platí

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \right| < M \text{ pro všechna } i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (t, x_1, \dots, x_n) \in G.$$

Věta 5.9 (O existenci a jednoznačnosti řešení). *Nechť je dána Cauchyova úloha*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\tau} \quad (5.10)$$

v oblasti $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a necht existují čísla α, β tak, že funkce \mathbf{f} je spojitá na množině

$$R = \{(t, \mathbf{x}) \in G : |t - t_0| \leq \alpha, \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\tau}\| \leq \beta\}$$

$$\text{Označme } M = \max_{(t, \mathbf{x}) \in R} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\|, \quad \delta = \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{M}\right\}.$$

Pak existuje řešení Cauchyovy úlohy (5.10) definované na intervalu $\langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \rangle$.

Je-li navíc funkce \mathbf{f} lipschitzovská vzhledem k \mathbf{x} na R , pak existuje jediné řešení Cauchyovy úlohy (5.10) definované na intervalu $\langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \rangle$.

5.3 Systém lineárních diferenciálních rovnic I. řádu

Necht $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$. Říkáme, že systém diferenciálních rovnic $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ je *lineární*, existuje-li maticová funkce $\mathbf{A}(t)$ typu (n, n) a vektorová funkce $\mathbf{b}(t)$ typu $(n, 1)$,

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

taková, že platí

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \quad \text{pro všechna } (t, \mathbf{x}) \in G.$$

Lineární systém diferenciálních rovnic I. řádu zapisujeme ve tvaru

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1(t) \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2(t) \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n(t) \end{aligned}$$

nebo stručně ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t). \quad (5.11)$$

Říkáme, že lineární systém (5.11) je *homogenní*, jestliže $b_i(t) = 0 \forall i = 1, \dots, n$ a $\forall t \in I$. Je-li pro nějaké $t \in I$ některá z funkcí b_i nenulová, pak lineární systém (5.11) nazýváme *nehomogenním*.

Je-li systém (5.11) matematickým modelem nějakého fyzikálního systému, pak maticová funkce $\mathbf{A}(t)$ popisuje chování prvků, z nichž je tento systém sestaven, a vektorová funkce \mathbf{b} popisuje vstup systému. Vektor \mathbf{x} je stavovým vektorem tohoto systému.

Podívejme se nyní na problém existence a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\tau}. \quad (5.12)$$

Nechť maticová funkce $\mathbf{A}(t)$ i vektorová funkce $\mathbf{b}(t)$ je spojitá na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$, pak i funkce $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ je spojitá na $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a tedy v dostatečně malém okolí každého bodu $(t, \mathbf{x}) \in G$ ohraničená. Dále platí

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = a_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

takže každá z funkcí f_i má v dostatečně malém okolí každého bodu $(t, \mathbf{x}) \in G$ ohraničené parciální derivace vzhledem k proměnným x_1, x_2, \dots, x_n . Je tedy \mathbf{f} lipschitzovská vzhledem k proměnné \mathbf{x} v jistém okolí každého bodu $(t, \mathbf{x}) \in G$. Odtud plyne následující tvrzení:

Věta 5.10. *Nechť maticová funkce $\mathbf{A}(t)$ a vektorová funkce $\mathbf{b}(t)$ jsou spojitě na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Pak pro každé $t_0 \in I$ a $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ má Cauchyova úloha*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\tau},$$

právě jedno řešení definované na celém intervalu I .

V dalším budeme automaticky předpokládat, že $\mathbf{A}(t), \mathbf{b}(t)$ jsou spojitě.

Uvažujme nyní homogenní systém lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned} \quad \text{tj. maticově} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (5.13)$$

Jsou-li $\mathbf{u}_1(t)$ a $\mathbf{u}_2(t)$ dvě řešení systému (5.13), $c \in \mathbb{R}$, pak také $\mathbf{u}_1(t) + \mathbf{u}_2(t)$ a $c \cdot \mathbf{u}_1(t)$ jsou řešení systému (5.13). Tedy řešení systému (5.13) tvoří vektorový prostor dimenze n .

Zvolme nyní nějakou bázi $\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_n(t)$ v prostoru řešení systému (5.13).

Označme $\mathbf{u}_i(t) = (u_{i1}(t), u_{i2}(t), \dots, u_{in}(t))^T$, $i = 1, \dots, n$.

Tuto bázi nazýváme *fundamentálním systémem řešení systému (5.13)*.

Matice

$$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} u_{11}(t) & \dots & u_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1}(t) & \dots & u_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

sestavená ze sloupců $\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_n(t)$ se nazývá *fundamentální matice systému (5.13)*.

Definice 5.11. Definujme pro libovolnou n -tici řešení $\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_n(t)$

$$W(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_{11}(t) & \dots & \mathbf{u}_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{u}_{n1}(t) & \dots & \mathbf{u}_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Uvedený determinant nazýváme *wronskiánem*.

Platí:

$$W(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \equiv 0 \text{ na } I, \text{ nebo } W(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \neq 0 \text{ na } I.$$

Věta 5.12. *n -tice řešení $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ systému (5.13) je lineárně nezávislá, právě tehdy když $W(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \neq 0$.*

Z této věty pak vyplývá, že fundamentální matice \mathbf{U} je regulární, a tedy k ní existuje inverzní matice $\mathbf{U}^{-1}(t)$.

Je-li $\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_n(t)$ fundamentální systém řešení systému (5.13), je obecné řešení systému (5.13) tvaru

$$\mathbf{u}(t) = c_1 \mathbf{u}_1(t) + \dots + c_n \mathbf{u}_n(t), \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}. \quad (5.14)$$

Označíme-li $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$, lze pak obecné řešení zapsat ve tvaru

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{c}, \quad (5.15)$$

kde $\mathbf{U}(t)$ je fundamentální matice systému (5.13).

Uvažujme nyní nehomogenní systém

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t). \quad (5.16)$$

Pak platí:

Je-li $\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_n(t)$ fundamentální systém řešení homogenního systému $\mathbf{u}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}$ a $\mathbf{u}_0(t)$ partikulární řešení systému (5.16), pak obecné řešení systému (5.16) má tvar

$$\mathbf{u}(t) = c_1 \mathbf{u}_1(t) + \dots + c_n \mathbf{u}_n(t) + \mathbf{u}_0(t), \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R},$$

v maticovém tvaru

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{c} + \mathbf{u}_0(t),$$

kde $\mathbf{U}(t)$ je fundamentální matice, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$.

5.3.1 Metoda variace konstant

Předpokládáme, že známe fundamentální systém řešení příslušného homogenního systému, zbývá popsat, jak najdeme partikulární řešení nehomogenního systému.

Myšlenka je obdobná jako u skalární rovnice, tj. nahradit v obecném řešení (5.14) konstanty c_1, \dots, c_n funkcemi $c_1(t), \dots, c_n(t)$ a najít partikulární řešení systému (5.16) ve tvaru

$$\mathbf{u}_0(t) = c_1(t)\mathbf{u}_1(t) + \dots + c_n(t)\mathbf{u}_n(t).$$

Označme $\mathbf{c}(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))^T$.

$$\text{Pak } \mathbf{u}_0(t) = \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{c}(t) \Rightarrow \mathbf{u}_0'(t) = \mathbf{U}'(t) \cdot \mathbf{c} + \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{c}'(t),$$

kde $\mathbf{U}(t)$ je fundamentální matice. Po dosazení do (5.16) máme

$$\mathbf{U}'(t) \cdot \mathbf{c}(t) + \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{c}'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{c}(t) + \mathbf{b}(t).$$

Jelikož $\mathbf{U}'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{U}(t)$, dostáváme, že

$$\mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{c}'(t) = \mathbf{b}(t) \Rightarrow \mathbf{c}'(t) = \mathbf{U}^{-1}(t) \cdot \mathbf{b}(t),$$

$$\text{tedy } \mathbf{c}(t) = \int \mathbf{U}^{-1}(t) \cdot \mathbf{b}(t) dt,$$

$$\text{pak } \mathbf{u}_0(t) = \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{c}(t) = \mathbf{U}(t) \cdot \int \mathbf{U}^{-1}(t) \cdot \mathbf{b}(t) dt$$

a obecné řešení systému (5.16) je tvaru

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{c} + \mathbf{u}_0(t) = \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{c} + \mathbf{U}(t) \cdot \int \mathbf{U}^{-1}(t) \cdot \mathbf{b} dt, \quad (5.17)$$

kde \mathbf{c} je libovolný sloupec konstant.

Příklad 5.13. Ověřte, že $\mathbf{u}_1(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, \frac{\cos t}{t} \right)^T$, $\mathbf{u}_2(t) = \left(\frac{-\cos t}{t}, \frac{\sin t}{t} \right)^T$ je fundamentální systém homogenní soustavy příslušné k

$$\begin{aligned} u_1' &= -\frac{u_1}{t} + u_2 + 2 \sin t, \\ u_2' &= -u_1 - \frac{u_2}{t} + 2 \cos t, \end{aligned} \quad t > 0,$$

a najděte jeho obecné řešení.

Řešení. Po dosazení do příslušných homogenních rovnic vyjde pro \mathbf{u}_1

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin t}{t} \right)' &= \frac{t \cos t - \sin t}{t^2} = -\frac{1}{t} \cdot \frac{\sin t}{t} + \frac{\cos t}{t}, \\ \left(\frac{\cos t}{t} \right)' &= \frac{-t \sin t - \cos t}{t^2} = -\frac{\sin t}{t} - \frac{1}{t} \cdot \frac{\cos t}{t} \end{aligned}$$

a pro \mathbf{u}_2

$$\begin{aligned} \left(\frac{-\cos t}{t} \right)' &= \frac{t \sin t + \cos t}{t^2} = -\frac{1}{t} \cdot \left(\frac{-\cos t}{t} \right) + \frac{\sin t}{t}, \\ \left(\frac{\sin t}{t} \right)' &= \frac{t \cos t - \sin t}{t^2} = -\left(\frac{-\cos t}{t} \right) - \frac{1}{t} \cdot \frac{\sin t}{t} \end{aligned}$$

tedy \mathbf{u}_1 i \mathbf{u}_2 jsou řešení homogenního systému. Označme

$$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sin t}{t} & -\frac{\cos t}{t} \\ \frac{\cos t}{t} & \frac{\sin t}{t} \end{pmatrix}, \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix}$$

Protože $\det \mathbf{U}(t) = \frac{\sin^2 t}{t^2} + \frac{\cos^2 t}{t^2} = \frac{1}{t^2} \neq 0$ pro $t > 0$, je $\mathbf{U}(t)$ fundamentální matice. Dále vypočteme $\mathbf{U}^{-1}(t)$. Postupně máme

$$\operatorname{adj} \mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sin t}{t} & \frac{\cos t}{t} \\ -\frac{\cos t}{t} & \frac{\sin t}{t} \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\mathbf{U}^{-1}(t) = \frac{\operatorname{adj} \mathbf{U}(t)}{\det \mathbf{U}(t)} = t^2 \operatorname{adj} \mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} t \sin t & t \cos t \\ -t \cos t & t \sin t \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{-1}(t) \cdot \mathbf{b}(t) &= \begin{pmatrix} t \sin t & t \cos t \\ -t \cos t & t \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2t \sin^2 t + 2t \cos^2 t \\ -2t \sin t \cos t + 2t \sin t \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tedy

$$\int \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{b}(t) dt = \begin{pmatrix} \int 2t dt \\ \int 0 dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Partikulární řešení má proto tvar

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{U}(t) \int \mathbf{U}^{-1}(t) \cdot \mathbf{b}(t) dt = \begin{pmatrix} \frac{\sin t}{t} & -\frac{\cos t}{t} \\ \frac{\cos t}{t} & \frac{\sin t}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \sin t \\ t \cos t \end{pmatrix}$$

a obecné řešení je

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{c} + \mathbf{u}_0(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sin t}{t} & -\frac{\cos t}{t} \\ \frac{\cos t}{t} & \frac{\sin t}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \sin t \\ t \cos t \end{pmatrix},$$

tj.

$$\begin{aligned} u_1(t) &= c_1 \frac{\sin t}{t} - c_2 \frac{\cos t}{t} + t \sin t, \\ u_2(t) &= c_1 \frac{\cos t}{t} - c_2 \frac{\sin t}{t} + t \cos t, \end{aligned} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

5.4 Lineární systémy s konstantními koeficienty

Obecně neumíme najít fundamentální systém homogenního systému, pokud jsou koeficienty skutečně funkcemi t . V případě, že jde o konstanty, je situace výrazně příznivější, neboť jsme schopni v podstatě efektivně najít fundamentální systém (až na problém nalezení kořenů polynomů).

Uvažujme tedy systém

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned} \quad \text{tj. maticově} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (5.18)$$

kde \mathbf{A} je konstantní matice. Ke standardním metodám patří postup založený na Jordánově kanonickém tvaru matice, který ovšem vyžaduje znalost Weierstrassovy teorie elementárních dělitelů. Dále je to postup využívající normální systém vektorů matice, který vyžaduje znalost Weyrovy teorie a Weyrových charakteristik. Jak teorie elementárních dělitelů, tak jí ekvivalentní Weyrova teorie patří do lineární algebry a jde o relativně složité výsledky. Jejich znalost je mimo rámec běžných znalostí, které inženýři z této oblasti mívají. Z toho důvodu úplný popis obecného řešení systému činí potíže.

My si ukážeme nejprve tzv. eliminační metodu, která je sice co do algoritmu jednoduchá, ale nedají se dost dobře teoreticky popsat komplikace, které mohou nastat. Proto se pro větší systémy nehodí. Dále si všimneme metody využívající normální systém vektorů, ale jen ve speciálních případech. V posledních letech se objevily nové, velice účinné metody, které bohužel zatím nejsou příliš rozšířené. Lze říci, že jsou jednodušší než výše zmíněné metody (mají podstatně menší nároky na znalosti hlubších partií lineární algebry). Jsou vesměs založeny na Cayleyově-Hamiltonově větě.

5.4.1 Eliminační metoda

Tato metoda je použitelná i na nehomogenní systémy tvaru

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + \alpha_1(t), \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n + \alpha_n(t), \end{aligned} \quad (5.19)$$

kde a_{ij} jsou konstanty a $\alpha_i(t)$ jsou funkce, mající dostatečný počet derivací.

Princip spočívá v tom, že se systém n rovnic prvního řádu převede na jedinou lineární rovnici n -tého řádu (s konstantními koeficienty). Naznačíme si nyní postup.

I. Zvolíme jednu rovnici v (5.19), např. první, a tu zderivujeme. Vyjde

$$x''_1 = a_{11}x'_1 + \cdots + a_{1n}x'_n + \alpha'_1(t).$$

Do pravé strany této rovnice dosadíme za x'_1, \dots, x'_n z (5.19). Po úpravě dostaneme nějakou rovnici tvaru

$$x''_1 = b_1x_1 + \cdots + b_nx_n + \beta(t), \quad b_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n.$$

II. Získanou rovnici opět zderivujeme, tj. dostaneme rovnici

$$x'''_1 = b_1x'_1 + \cdots + b_nx'_n + \beta'(t),$$

a do ní znovu dosadíme z (5.19) za x'_1, \dots, x'_n . Vyjde

$$x'''_1 = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n + \gamma(t), \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n.$$

III. Tento postup opakujeme, až dostaneme rovnici

$$x_1^{(n)} = d_1 x_1 + \cdots + d_n x_n + \delta(t), \quad d_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n.$$

IV. Nyní máme soustavu rovnic tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + \alpha(t), \\ x_1'' &= b_1x_1 + \cdots + b_nx_n + \beta(t), \\ &\vdots \\ x_1^{(n)} &= d_1x_1 + \cdots + d_nx_n + \delta(t). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Z tohoto systému postupně vyloučíme neznámé x_2, \dots, x_n , a to tak, že nejprve z první rovnice v (5.20) vypočteme např. x_2 a dosadíme do zbývajících rovnic. Tím se počet rovnic o jednu sníží a nebude zde již x_2 . Nyní opět z první ze zbývajících rovnic, tj. z té, která obsahuje x_1'' , vypočteme např. x_3 , dosadíme do ostatních atd. Nakonec nám vyjde jedna rovnice n -tého řádu pro $x_1(t)$. Najdeme obecné řešení této rovnice, které bude obsahovat n konstant.

V. Obecný tvar $x_1(t)$ dosadíme do levých stran v (5.20) a ze vzniklých rovnic již pouze algebraicky vypočítáme $x_2(t), \dots, x_n(t)$.

Úskalím této metody je, že v kroku IV. se může stát, že nedojdeme až k $x_1^{(n)}$, ale již dříve nastane situace, kdy se všechny neznámé x_2, \dots, x_n vyruší. Tedy pro $x_1(t)$ dostaneme rovnici řádu nižšího než n . Její obecné řešení bude proto obsahovat méně než n konstant. Pak nezbyvá než dosadit $x_1(t)$ do (5.19) a obdobně jako pro $x_1(t)$ vytvořit z těchto rovnic diferenciální rovnici pro $x_2(t)$. To se může několikrát opakovat. Musíme pokračovat tak dlouho, až dostaneme n integračních konstant. Jinými slovy, může se stát, že se systém nepodaří převést na jednu rovnici n -tého řádu, ale na několik rovnic nižších řádů (součet jejich řádů je ovšem n). Je obtížné popsat, kdy tato situace nastane. Souvisí to jednak s tím, pro kterou neznámou budeme vytvářet diferenciální rovnici a zda jsou některé složky vlastních vektorů v řádku odpovídajícím zvolené neznámé nulové, jednak se strukturou normálního systému vektorů (viz následující kapitoly).

Příklad 5.14. Najděte obecné řešení systému

$$\begin{aligned} x_1' &= 4x_1 - 3x_2 + \sin t \\ x_2' &= 2x_1 - x_2 - 2\cos t. \end{aligned}$$

Řešení. Vytvoříme např. rovnici pro neznámou x_1 . Derivací první rovnice dostaneme

$$x_1'' = 4x_1' - 3x_2' + \cos t,$$

tedy

$$x_1'' = 4(4x_1 - 3x_2 + \sin t) - 3(2x_1 - x_2 - 2\cos t) + \cos t = 10x_1 - 9x_2 + 4\sin t + 4\cos t$$

Ze systému

$$\begin{aligned} x_1' &= 4x_1 - 3x_2 + \sin t \\ x_1'' &= 10x_1 - 9x_2 + 4\sin t + 4\cos t \end{aligned} \tag{5.21}$$

vyloučíme x_2 . Odečteme-li trojnásobek první rovnice od druhé, dostaneme

$$x_1'' - 3x_1' = -2x_1 + \sin t + 7 \cos t \quad \Rightarrow \quad x_1'' - 3x_1' + 2x_1 = 7 \cos t + \sin t. \quad (5.22)$$

Charakteristická rovnice je pak tvaru

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$$

Obecné řešení rovnice (5.22) je

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}.$$

Partikulární řešení budeme hledat ve tvaru

$$u_0(t) = a \cos t + b \sin t.$$

Odtud

$$\begin{aligned} u_0' &= -a \sin t + b \cos t \\ u_0'' &= -a \cos t - b \sin t \end{aligned}$$

a po dosazení do (5.22) máme

$$\begin{aligned} -a \cos t - b \sin t + 3a \sin t - 3b \cos t + 2a \cos t + 2b \sin t &= 7 \cos t + \sin t, \\ (a - 3b) \cos t + (3a + b) \sin t &= 7 \cos t + \sin t. \end{aligned}$$

Tedy musí platit

$$\begin{aligned} a - 3b &= 7 \\ 3a + b &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad a = 1, b = -2.$$

Celkově

$$u_1(t) = u(t) + u_0(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + \cos t - 2 \sin t.$$

Dosazením obecného řešení $u_1(t)$ za x_1 do první rovnice v (5.21) vypočteme $x_2 = u_2(t)$.

Tedy

$$\begin{aligned} c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} - \sin t - 2 \cos t &= 4c_1 e^t + 4c_2 e^{2t} + 4 \cos t - 8 \sin t - 3u_2(t) + \sin t, \\ \text{tj. } u_2(t) &= c_1 e^t + \frac{2}{3} c_2 e^{2t} + 2 \cos t - 2 \sin t. \end{aligned}$$

Maticově výsledek zapíšeme takto

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{2t} + \cos t - 2 \sin t \\ c_1 e^t + \frac{2}{3} c_2 e^{2t} + 2 \cos t - 2 \sin t \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} \cos t - 2 \sin t \\ 2 \cos t - 2 \sin t \end{pmatrix}.$$

Tedy fundamentální systém řešení homogenní soustavy je

$$\mathbf{u}_1(t) = (e^t, e^t)^T, \quad \mathbf{u}_2(t) = (e^{2t}, \frac{2}{3} e^{2t})^T$$

a fundamentální matice je tvaru

$$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & \frac{2}{3} e^{2t} \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 5.15. Najděte obecné řešení systému

$$\begin{aligned}x_1' &= -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\x_2' &= x_1 + x_3 \\x_3' &= 6x_1 - 6x_2 + 5x_3.\end{aligned}$$

Řešení. Vytvoříme rovnici pro x_1 . Derivujeme první rovnici a po dosazení vyjde

$$\begin{aligned}x_1'' &= -3x_1' + 4x_2' - 2x_3' = \\&= -3(-3x_1 + 4x_2 - 2x_3) + 4(x_1 + x_3) - 2(6x_1 - 6x_2 + 5x_3) = x_1.\end{aligned}$$

Pro x_1 tedy dostáváme (ani není třeba psát systém (5.20) a provádět eliminaci), že

$$x_1'' - x_1 = 0.$$

Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 1 = 0$ má kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 1$ a obecné řešení má tvar

$$u_1(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Po dosazení do první rovnice máme

$$c_1 e^t - c_2 e^{-t} = -3c_1 e^t - 3c_2 e^{-t} + 4x_2 - 2x_3$$

$$\text{a odtud } x_3 = 2x_2 - 2c_1 e^t - c_2 e^{-t}.$$

Z druhé rovnice pak vyjde

$$x_2' = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + 2x_2 - 2c_1 e^t - c_2 e^{-t} \Rightarrow x_2' = 2x_2 - c_1 e^t.$$

To je lineární rovnice prvního řádu. Charakteristická rovnice je $\lambda - 2 = 0$, tj. $\lambda = 2$, a obecné řešení homogenní rovnice je

$$u(t) = c_3 e^{2t}.$$

Dále určíme partikulární řešení nehomogenní rovnice. Pravá strana $-c_1 e^t$ je typu konstanta krát exponenciála, přitom číslo $+1$ není kořenem charakteristické rovnice. Řešení lze proto najít ve tvaru $u_0(t) = a e^t$. Po dosazení vyjde

$$a e^t = 2a e^t - c_1 e^t \Rightarrow a = 2a - c_1 \Rightarrow a = c_1.$$

Obecný tvar x_2 je tudíž

$$u_2(t) = u(t) + u_0(t) = c_3 e^{2t} + c_1 e^t.$$

Zbývá určit algebraicky $x_3 = u_3(t)$. To lze např. z druhé rovnice zadání dosazením za $x_2 = u_2(t)$, $x_1 = u_1(t)$, odkud ihned vyjde

$$u_3(t) = u_2'(t) - u_1(t) = 2c_3 e^{2t} + c_1 e^t - c_1 e^t - c_2 e^{-t} = -c_2 e^{-t} + 2c_3 e^{2t}.$$

Maticový zápis je

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^t \\ -c_2 e^{-t} + 2c_3 e^{2t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

□

Jak se můžete snadno přesvědčit, v předchozím příkladu by při osamostatnění kterékoliv neznámé došlo k „rozpadnutí“ na jednu rovnici druhého řádu a jednu rovnici prvního řádu. Je snadné si představit, že u systému s větším počtem neznámých by se za této situace stala eliminační metoda velmi nepřehlednou a pracnou.

5.4.2 Metoda charakteristických čísel

Uvažujme homogenní lineární soustavu s konstantními koeficienty

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (5.23)$$

kteřou též nazýváme lineární autonomní soustavou. Ukážeme, že fundamentální systém řešení soustavy (5.23) lze získat algebraickými prostředky.

Hledejme nenulové řešení soustavy ve tvaru

$$\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t} \cdot \mathbf{v},$$

kde λ je skalár, \mathbf{v} n -rozměrný vektor (sloupcový). Pak $\mathbf{u}'(t) = \lambda e^{\lambda t} \mathbf{v}$ a dosazením do (5.23) dostaneme

$$\lambda e^{\lambda t} \mathbf{v} = \mathbf{A} (e^{\lambda t} \mathbf{v}) = e^{\lambda t} \mathbf{A} \mathbf{v},$$

odkud po vykrácení $e^{\lambda t}$ máme

$$\mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}. \quad (5.24)$$

Z lineární algebry je známo, že číslo λ , k němuž existuje vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ tak, že platí (5.24), se nazývá *charakteristické číslo* (nebo též *vlastní číslo*) *matice* \mathbf{A} a vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, pro nějž platí (5.24), se nazývá *charakteristický* (nebo též *vlastní*) *vektor matice* \mathbf{A} , příslušný k charakteristickému číslu λ .

Vektor \mathbf{v} je tedy řešením lineární homogenní soustavy algebraických rovnic

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v} = \mathbf{o} \quad (5.25)$$

(\mathbf{I} je jednotková matice n -tého řádu). Soustava (5.25) má netriviální řešení, právě když

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (5.26)$$

Funkce

$$F(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$$

je algebraický polynom n -tého stupně a nazývá se *charakteristický polynom matice* \mathbf{A} a rovnice

$$F(\lambda) = 0$$

nebo též rovnice (5.26) se nazývá *charakteristická rovnice matice* \mathbf{A} . Charakteristická čísla jsou tedy kořeny charakteristické rovnice. Avšak algebraická rovnice může mít i komplexní kořeny. Proto je účelné uvažovat i komplexní řešení soustavy (5.23). Bude-li λ komplexní charakteristické číslo, pak příslušný charakteristický vektor \mathbf{v} bude rovněž komplexní.

Definice 5.16. Množina všech charakteristických čísel matice \mathbf{A} (tj. všech kořenů charakteristického polynomu) se nazývá *spektrum matice \mathbf{A}* ; označíme je $\sigma(\mathbf{A})$. Jsou-li všechna charakteristická čísla jednoduchými kořeny charakteristické rovnice, říkáme, že \mathbf{A} má *jednoduché spektrum*.

Je-li λ charakteristické číslo matice \mathbf{A} , je množina všech vektorů $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, pro něž platí (5.25), lineární podprostor \mathbb{C}^n , nazývá se *charakteristický podprostor*. Tento podprostor je tvořen všemi charakteristickými vektory příslušnými k charakteristickému číslu λ a vektorem \mathbf{o} .

Dimenze charakteristického podprostoru je nejvýše rovna násobnosti charakteristického čísla jakožto kořene charakteristické rovnice.

Budeme předpokládat, že matice \mathbf{A} má jednoduché spektrum

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}.$$

Dimenze každého charakteristického podprostoru je v tomto případě rovna 1.

Nechť \mathbf{v}_i je charakteristický vektor příslušný k charakteristickému číslu λ_i ($i = 1, \dots, n$). Jelikož charakteristické vektory příslušné k různým charakteristickým číslům jsou lineárně nezávislé, vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ tvoří bázi prostoru \mathbb{C}^n . Matice

$$\mathbf{U}(t) = (e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1, \dots, e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n) \quad (5.27)$$

je fundamentální matice soustavy (5.23). Obecné řešení je tedy tvaru

$$\mathbf{u}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n, \quad (5.28)$$

kde $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}^n$. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ reálná čísla, pak charakteristické vektory jsou rovněž reálné a v tomto případě bude fundamentální matice (5.27) rovněž reálná.

Nechť nyní $\lambda = \alpha + j\beta$ je komplexní charakteristické číslo matice \mathbf{A} . V teorii komplexní proměnné platí tzv. Eulerův vztah

$$e^\lambda = e^{\alpha + j\beta} = e^\alpha \cdot e^{j\beta} = e^\alpha \cdot (\cos \beta + j \sin \beta)$$

Označme $\operatorname{Re} z$ a $\operatorname{Im} z$ reálnou a imaginární část komplexního čísla z . Pak platí

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2j},$$

tj. $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ jsou lineárními kombinacemi z a \bar{z} .

Je-li λ charakteristické číslo matice \mathbf{A} , pak i $\bar{\lambda}$ je charakteristické číslo \mathbf{A} a podobně, je-li \mathbf{v} charakteristický vektor odpovídající λ , pak $\bar{\mathbf{v}}$ je charakteristický vektor odpovídající $\bar{\lambda}$.

Tedy systém (5.23) má dvojici řešení

$$\hat{\mathbf{u}}_1 = e^{\lambda t} \mathbf{v}, \quad \hat{\mathbf{u}}_2 = e^{\bar{\lambda} t} \bar{\mathbf{v}},$$

a tudíž i řešení

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\hat{\mathbf{u}}_1 + \hat{\mathbf{u}}_2}{2} = \operatorname{Re} e^{\lambda t} \mathbf{v} \quad \text{a} \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\hat{\mathbf{u}}_1 - \hat{\mathbf{u}}_2}{2j} = \operatorname{Im} e^{\lambda t} \mathbf{v}.$$

Důležité je, že v tomto případě jsou již $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ reálné funkce.

Příklad 5.17. Najděte obecné řešení systému

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 2x_2 \\ x_2' &= 4x_1 + 3x_2. \end{aligned}$$

Řešení. Matice soustavy je tvaru $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 \\ F(\lambda) &= 0 \quad \text{pro} \quad \lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1 \\ \sigma(\mathbf{A}) &= \{5, -1\} \end{aligned}$$

Charakteristické vektory jsou pak řešení soustav

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow (\mathbf{A} - 5\mathbf{I}) \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) \mathbf{v}_2 &= \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{I}) \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\text{tj.} \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

První soustava je tedy tvaru

$$\begin{aligned} -4v_{11} + 2v_{12} &= 0 \\ 4v_{11} - 2v_{12} &= 0, \end{aligned}$$

obecné řešení je $v_{11} = t, v_{12} = 2t$, volbou $t = 1$ dostáváme $\mathbf{v}_1 = (1, 2)^T$.

Druhá soustava je tvaru

$$\begin{aligned} 2v_{21} + 2v_{22} &= 0 \\ 4v_{21} + 4v_{22} &= 0, \end{aligned}$$

obecné řešení je pak $v_{21} = t, v_{22} = -t$, volbou $t = 1$ dostáváme $\mathbf{v}_2 = (1, -1)^T$.

Tedy obecné řešení systému je

$$\mathbf{u}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t},$$

$$\text{tj.} \quad \begin{aligned} u_1(t) &= c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t} \\ u_2(t) &= 2c_1 e^{5t} - c_2 e^{-t}. \end{aligned}$$

□

Příklad 5.18. Najděte obecné řešení systému

$$\begin{aligned}x_1' &= -7x_1 + x_2 \\x_2' &= -2x_1 - 5x_2.\end{aligned}$$

Řešení. Matice soustavy je tvaru $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}F(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -7 - \lambda & 1 \\ -2 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 12\lambda + 37 \\ \lambda_1 &= -6 + j, \quad \lambda_2 = -6 - j, \quad \sigma(\mathbf{A}) = \{-6 + j, -6 - j\}.\end{aligned}$$

Stačí najít charakteristický vektor například k $\lambda_1 = -6 + j$.

$$\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I} = \mathbf{A} - (-6 + j)\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 - j & 1 \\ -2 & 1 - j \end{pmatrix}.$$

Pro charakteristický vektor $\mathbf{v}_1 = (v_{11}, v_{12})^T$ platí rovnice

$$(-1 - j)v_{11} + v_{12} = 0 \quad (\text{druhá rovnice je nezávislá}).$$

Charakteristický vektor je tedy například $\mathbf{v}_1 = (1, 1 + j)^T$ a charakteristický vektor příslušný k $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ je $\overline{\mathbf{v}_1} = (1, 1 - j)^T$.

Soustava má fundamentální systém řešení

$$e^{(-6+j)t} (1, 1 + j)^T, \quad e^{(-6-j)t} (1, 1 - j)^T.$$

Soustava má ovšem též reálný fundamentální systém řešení

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1(t) &= \operatorname{Re} (e^{(-6+j)t} (1, 1 + j)^T) \\ \mathbf{u}_2(t) &= \operatorname{Im} (e^{(-6+j)t} (1, 1 + j)^T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Jelikož } e^{(-6+j)t} (1, 1 + j)^T &= e^{-6t} \cdot (e^{jt}, (1 + j)e^{jt})^T = \\ &= e^{-6t} \cdot (\cos t + j \sin t, \cos t - \sin t + j \cdot (\cos t + \sin t))^T,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{tak } \mathbf{u}_1(t) &= e^{-6t} \cdot (\cos t, \cos t - \sin t)^T \\ \mathbf{u}_2(t) &= e^{-6t} \cdot (\sin t, \cos t + \sin t)^T\end{aligned}$$

Obecné řešení je pak tvaru

$$\mathbf{u}(t) = c_1\mathbf{u}_1(t) + c_2\mathbf{u}_2(t) = c_1e^{-6t} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + c_2e^{-6t} \cdot \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

□

Podstatně komplikovanější situace nastává, když není možné vytvořit bázi z vlastních vektorů. K tomu dojde, když algebraická násobnost některého charakteristického čísla λ

(tj. násobnost tohoto čísla jako kořene charakteristické rovnice) je ostře větší než jeho geometrická násobnost (tj. počet parametrů, které vyjdou při řešení soustavy $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{o}$).

V tomto případě je třeba doplnit nezávislou soustavu charakteristických vektorů na tzv. *normální systém*, což je relativně obtížné:

Nechť λ je charakteristické číslo, k němuž přísluší k -členný řetězec tzv. *zobecněných charakteristických vektorů* $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$, tedy

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{k-1}, \dots, (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1, (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{o},$$

kde \mathbf{v}_1 je charakteristický vektor, pak k sloupců

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 e^{\lambda t} \\ \mathbf{u}_2 &= (t\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) e^{\lambda t} \\ \mathbf{u}_3 &= \left(\frac{t^2}{2}\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\right) e^{\lambda t} \\ &\vdots \\ \mathbf{u}_k &= \left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\mathbf{v}_1 + \frac{t^{k-2}}{(k-2)!}\mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_k\right) e^{\lambda t} \end{aligned}$$

tvoří lineárně nezávislá řešení systému (5.23). Lze dokázat, že systém sloupců, který sestavíme tímto způsobem ze všech řetězců zobecněných charakteristických vektorů, tvoří fundamentální systém řešení soustavy (5.23).

Příklad 5.19. Najděte obecné řešení systému

$$\begin{aligned} x_1' &= 17x_1 + 9x_2 \\ x_2' &= -25x_1 - 13x_2. \end{aligned}$$

Řešení. Charakteristická rovnice je

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 17 - \lambda & 9 \\ -25 & -13 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0.$$

Ta má dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = 2$. Pro charakteristický vektor $\mathbf{v}_1 = (v_{11}, v_{12})^T$ máme soustavu $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{o}$, tj.

$$\begin{aligned} 15v_{11} + 9v_{12} &= 0 \\ -25v_{11} - 15v_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Protože jedna rovnice je násobkem druhé, je její obecné řešení tvaru $v_{11} = -\frac{3}{5}t$, $v_{12} = t$, $t \in \mathbb{R}$. Volbou $t = 5$ dostáváme $\mathbf{v}_1 = (-3, 5)^T$. Další nezávislý charakteristický vektor nemáme. Vypočteme tedy zobecněný charakteristický vektor, který bude řešením soustavy $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$, tj.

$$\begin{aligned} 15v_{21} + 9v_{22} &= -3 \\ -25v_{21} - 15v_{22} &= 5, \end{aligned}$$

Rovnice jsou opět lineárně závislé a jejich obecné řešení je $v_{21} = \frac{-1 - 3t}{5}$, $v_{22} = t$. Volbou $t = 3$ dostáváme $\mathbf{v}_2 = (-2, 3)^T$.

Fundamentální systém řešení je pak tvaru

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{2t} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \mathbf{u}_2(t) = (t\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)e^{2t} = \begin{pmatrix} -3t - 2 \\ 5t + 3 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Obecné řešení je tedy

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -3c_1 e^{2t} - c_2(3t + 2)e^{2t} \\ u_2(t) &= 5c_1 e^{2t} + c_2(5t + 3)e^{2t}. \end{aligned}$$

□

5.4.3 Výpočet exponenciály matice

Všimněme si systému $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, když $n = 1$, tj. když jde o jedinou rovnici tvaru $x' = Ax$, kde A je konstanta. To je homogenní lineární rovnice, kterou řešíme jako rovnici se separovanými proměnnými. Tedy

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = At + \ln c \quad \Rightarrow \quad x(t) = c \cdot e^{At}.$$

Tedy fundamentální „matice“ (je jednorozměrná) je e^{At} . Ukazuje se, že i v obecném případě je možné zapsat fundamentální matici ve tvaru exponenciály, je však třeba nejprve vhodně definovat, co exponenciální funkcí z matice budeme rozumět.

Vyjdeme ze známého rozvoje funkce e^t , $t \in \mathbb{R}$, do Taylorovy řady. Platí

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$$

Dosadíme do této řady za t formálně matici $\mathbf{A}t$. Vyjde (za 1 dáme jednotkovou matici \mathbf{I}):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^n}{n!} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \dots$$

Dostáváme nekonečnou řadu matic. Ta představuje po složkách n^2 nekonečných řad funkcí jedné reálné proměnné. Lze ukázat, že všechny tyto řady jsou konvergentní pro každé $t \in \mathbb{R}$. Jejich součty vytvoří po složkách novou matici, která se označuje $e^{\mathbf{A}t}$. Ta je definovaná pro každé $t \in \mathbb{R}$ a platí

$$(e^{\mathbf{A}t})' = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t},$$

kde derivaci provádíme jako normálně po složkách. Z přechodního vztahu bezprostředně plyne, že sloupce matice $e^{\mathbf{A}t}$ tvoří řešení systému (5.23). Navíc zřejmě $e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I}$, tj. tyto sloupce jsou lineárně nezávislé (pro $t = 0$ a tudíž pro každé $t \in \mathbb{R}$) a představují tedy fundamentální systém. Matice $e^{\mathbf{A}t}$ je pak fundamentální maticí systému (5.23), která je v nule rovna jednotkové matici.

Máme tedy velice elegantní a stručné označení fundamentální matice systému (5.23). Tento zápis má ale i další přednosti. Pro libovolné čtvercové matice \mathbf{C} a \mathbf{D} , které jsou zaměnitelné (tj. $\mathbf{CD} = \mathbf{DC}$), totiž platí

$$e^{\mathbf{C}}e^{\mathbf{D}} = e^{\mathbf{C}+\mathbf{D}} = e^{\mathbf{D}}e^{\mathbf{C}}.$$

Odtud volbou $\mathbf{C} = \mathbf{A}t$, $\mathbf{D} = -\mathbf{A}t$ plyne

$$e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{O}} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad (e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t}.$$

Tedy inverzní matice k exponenciále z $\mathbf{A}t$ je exponenciála z $-\mathbf{A}t$. Použijme tento výsledek na variaci konstant. Ze vzorce (5.17) dostaneme

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c} + e^{\mathbf{A}t} \int e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{b}(t) dt.$$

Pokusme se vzorec upravit tak, aby dával přímo řešení počáteční úlohy s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Za tím účelem zapíšeme sloupec konstant \mathbf{c} ve tvaru $e^{-\mathbf{A}t_0}\mathbf{x}_0$ a zvolíme tu primitivní funkci k $e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{b}(t)$, která je v t_0 rovna nulovému sloupci, tj. $\int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{b}(s) ds$. Vyjde

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t_0}\mathbf{x}_0 + e^{\mathbf{A}t} \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{b}(s) ds = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{b}(s) ds. \quad (5.29)$$

Pro čtenáře obeznámeného s Laplaceovou transformací je vhodné připomenout, že vztah (5.29) má značný význam v teorii systémů, které jsou popsány soustavou lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Zde $\mathbf{b}(t)$ má většinou charakter vstupu. Obvykle se zde předpokládá, že $t_0 = 0$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = \mathbf{o}$ (systém je na počátku v klidu) a $t \geq 0$. Pak

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{b}(s) ds.$$

Integrál na pravé straně má tvar *konvoluce*. Pro Laplaceův obraz potom platí

$$\mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\} = \mathcal{L}\{e^{\mathbf{A}t} * \mathbf{b}(t)\} = \mathcal{L}\{e^{\mathbf{A}t}\} \cdot \mathcal{L}\{\mathbf{b}(t)\};$$

zde $*$ značí konvoluci. Matice $\mathcal{L}\{e^{\mathbf{A}t}\}$ se nazývá *přenosová*. Tedy Laplaceův obraz výstupu je roven součinu přenosové matice a Laplaceova obrazu vstupu.

Vraťme se však k otázce nalezení explicitního tvaru $e^{\mathbf{A}t}$. Existuje řada postupů, jak definovat a vyčíslit funkce (ne jen expoenciálu) z matic.

Matici $e^{\mathbf{A}t}$ lze např. určit tak, že najdeme dosud uvedenými metodami fundamentální systém soustavy (5.23), pro nějž platí

$$\mathbf{x}_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{x}_n(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Odpovídající fundamentální matice tvořená těmito sloupci je vzhledem k jednoznačnosti řešení počáteční úlohy právě $e^{\mathbf{A}t}$.

Existují však i elegantnější metody, založené na následující větě.

Věta 5.20 (Cayley-Hamilton). Jestliže \mathbf{A} je libovolná čtvercová matice a $\varphi(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ její charakteristický mnohočlen, platí

$$\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{O},$$

tj. \mathbf{A} je kořenem svého charakteristického mnohočlenu.

Existuje řada novějších metod, založených na předchozí větě, ale nejsou bohužel příliš známé. My si uvedeme aspoň jeden výsledek, který je zformulován v následující větě.

Věta 5.21. Nechť \mathbf{A} je čtvercová matice a

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

její charakteristická rovnice. Nechť $x(t)$ je řešení diferenciální rovnice se stejnými koeficienty

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0,$$

které splňuje počáteční podmínky

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-2)}(0) = 0, \quad x^{(n-1)}(0) = 1.$$

Označme

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Pak je

$$e^{\mathbf{A}t} = z_1(t)\mathbf{I} + z_2(t)\mathbf{A} + \dots + z_n(t)\mathbf{A}^{n-1}.$$

Z praktického hlediska tedy stačí umět řešit jednu rovnici n-tého řádu. Zcela odpadnou problémy s násobnými kořeny charakteristické rovnice - zatímco u systémů nám značně komplikovaly situaci (mohli jsme mít málo nezávislých vlastních vektorů), u jedné rovnice vyššího řádu nepředstavují vážnější problém.

Příklad 5.22. Najděte obecné řešení systému

$$\begin{aligned} x_1' &= -2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_2' &= x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ x_3' &= x_1 - x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Řešení. Charakteristická rovnice je

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 & -2 \\ 1 & -2 - \lambda & 2 \\ 1 & -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(\lambda + 1)^3.$$

Nyní najdeme řešení rovnice

$$x''' + 3x'' + 3x' + x = 0.$$

Její charakteristická rovnice má trojnásobný kořen $\lambda_{1,2,3} = -1$. Tedy obecné řešení má tvar

$$x(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2)e^{-t}.$$

Potřebujeme partikulární řešení, pro něž $x(0) = x'(0) = 0, x''(0) = 1$. Vypočteme

$$\begin{aligned} x'(t) &= (c_2 + 2c_3 t)e^{-t} - (c_1 + c_2 t + c_3 t^2)e^{-t}, \\ x''(t) &= 2c_3 e^{-t} - 2(c_2 + 2c_3 t)e^{-t} + (c_1 + c_2 t + c_3 t^2)e^{-t}. \end{aligned}$$

Z počátečních podmínek dostaneme

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 - c_1 &= 0 & \Rightarrow & c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = \frac{1}{2}. \\ 2c_3 - 2c_2 + c_1 &= 1 \end{aligned}$$

Hledané řešení

$$x(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{-t} \quad \Rightarrow \quad x'(t) = (t - \frac{1}{2} t^2) e^{-t}, \quad x''(t) = (1 - 2t + \frac{1}{2} t^2) e^{-t}.$$

Dále určíme

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} t^2 e^{-t} \\ (t - \frac{1}{2} t^2) e^{-t} \\ (1 - 2t + \frac{1}{2} t^2) e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + t + \frac{1}{2} t^2) e^{-t} \\ (t + t^2) e^{-t} \\ \frac{1}{2} t^2 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Konečně vypočítáme

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= (1 + t + \frac{1}{2} t^2) e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (t + t^2) e^{-t} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{1}{2} t^2 e^{-t} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & t & -2t \\ t & 1-t & 2t \\ t & -t & 1+2t \end{pmatrix} e^{-t}. \end{aligned}$$

Obecné řešení má tudíž tvar

$$\begin{aligned} x_1 &= (c_1(1-t) + c_2 t - 2c_3 t) e^{-t} \\ x_2 &= (c_1 t + c_2(1-t) + 2c_3 t) e^{-t} \\ x_3 &= (c_1 t - c_2 t + c_3(1+2t)) e^{-t}. \end{aligned}$$

□

5.4.4 Metoda neurčitých koeficientů

K nalezení partikulárního řešení nehomogenní rovnice máme univerzální metodu variace konstant. Ta je však někdy dost pracná. U lineárních rovnic n -tého řádu s konstantními koeficienty jsme viděli, že je v případě speciálního tvaru pravé strany možné najít partikulární řešení mnohem snáze metodou neurčitých koeficientů. To lze udělat i u systému tvaru

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad (5.30)$$

kde \mathbf{A} je konstantní matice a prvky $\mathbf{b}(t)$ jsou kvazipolynomy, tj. $\mathbf{b}(t)$ je lineární kombinací funkcí tvaru $t^k e^{\alpha t} \cos \beta t$. respektive $t^k e^{\alpha t} \sin \beta t$. Všimneme si postupně některých speciálních případů.

Věta 5.23. *Nechť $\mathbf{b}(t)$ je sloupec, jehož složky jsou polynomy stupně nejvýše m . Nechť nula je k -násobný kořen charakteristické rovnice matice \mathbf{A} . Pak existuje partikulární řešení systému (5.30), jehož složky jsou polynomy stupně nejvýše $m + k$.*

Platí, že $k = 0$, právě tehdy když $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Všimněte si, že na rozdíl od jedné rovnice vyššího řádu nelze u systémů předpokládat, že složky řešení jsou tvaru $t^k P_m(t)$, kde $P_m(t)$ je polynom stupně m . V řešení mohou být s nenulovými koeficienty i nižší mocniny než k -té.

Věta platí, i když prvky \mathbf{A} a popřípadě koeficienty polynomů ve složkách $\mathbf{b}(t)$ jsou komplexní čísla.

Příklad 5.24. Najděte partikulární řešení systému

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 - 3x_2 + t \\ x_2' &= x_1 + 4x_2 - 1. \end{aligned}$$

Řešení. Je

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 11 \neq 0, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sloupec $\mathbf{b}(t)$ obsahuje nejvýše lineární polynom, tedy $m = 1, k = 0$. Musí proto existovat řešení tvaru

$$x_1 = at + b, \quad x_2 = ct + d \quad \Rightarrow \quad x_1' = a, \quad x_2' = c.$$

Po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned} a &= 2(at + b) - 3(ct + d) + t & \Rightarrow & \quad t(-2a + 3c) + a - 2b + 3d = t \\ c &= at + b + 4(ct + d) - 1 & \Rightarrow & \quad t(-a - 4c) - b + c - 4d = -1. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů vyjde

$$\begin{aligned} -2a &+ 3c &= & 1 \\ -a &- 4c &= & 0 \\ a - 2b &+ 3d &= & 0 \\ -b &+ c - 4d &= & -1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{4}{11}, \quad b = \frac{20}{121}, \quad c = \frac{1}{11}, \quad d = \frac{28}{121}.$$

Partikulární řešení tedy je

$$x_1 = -\frac{4}{11}t + \frac{20}{121}, \quad x_2 = \frac{1}{11}t + \frac{28}{121}.$$

□

Podobně lze postupovat, když $\mathbf{b}(t)$ obsahuje exponenciály nebo siny a kosiny. Vzhledem ke značné komplikovanosti výpočtů však obvykle postupujeme jinak.

Věta 5.25. *Nechť sloupec pravých stran je tvaru $e^{\alpha t} \mathbf{p}_m(t)$, kde $\alpha \in \mathbb{C}$ a složky sloupce \mathbf{p}_m jsou polynomy stupně nejvýše m . Pak substituce $\mathbf{x} = e^{\alpha t} \mathbf{u}$ převede systém $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + e^{\alpha t} \mathbf{p}_m(t)$ v nehomogenní systém, kde složky sloupce pravých stran jsou polynomy stupně nejvýše m .*

Důkaz. *Protože*

$$\mathbf{x}'(t) = (e^{\alpha t} \mathbf{u}(t))' = \alpha e^{\alpha t} \mathbf{u}(t) + e^{\alpha t} \mathbf{u}'(t),$$

po dosazení

$$\alpha e^{\alpha t} \mathbf{u} + e^{\alpha t} \mathbf{u}' = \mathbf{A} e^{\alpha t} \mathbf{u} + e^{\alpha t} \mathbf{p}_m(t),$$

z čehož po úpravě a vykrácení výrazem $e^{\alpha t} \neq 0$ vyjde

$$\mathbf{u}' = (\mathbf{A} - \alpha \mathbf{I})\mathbf{u} + \mathbf{p}_m(t). \quad (5.31)$$

□

Příklad 5.26. Najděte partikulární řešení systému

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - 2x_2 + e^t \\ x_2' &= x_1 + 2x_2 + te^t. \end{aligned}$$

Řešení. Substitucí $\mathbf{x} = e^t \mathbf{u}$ přejde podle věty (5.25) náš systém v systém (5.31), tj.

$$\begin{aligned} u_1' &= -2u_2 + 1 \\ u_2' &= u_1 + u_2 + t, \end{aligned}$$

Ten má podle věty (5.23) ($m = 1, k = 0$) řešení tvaru

$$u_1 = at + b, \quad u_2 = ct + d \quad \Rightarrow \quad u_1' = a, \quad u_2' = c$$

a po dosazení vychází

$$\begin{aligned} a &= -2(ct + d) + 1 \\ c &= at + b + ct + d + t. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů dostaneme

$$\begin{aligned} 2c &= 0 \\ -a - c &= 1 \\ a + 2d &= 1 \\ -b - d &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad a = -1, \quad b = -1, \quad c = 0, \quad d = 1.$$

Tedy $u_1 = -t - 1, u_2 = 1$ a partikulární řešení daného systému je

$$x_1 = -(t+1)e^t, \quad x_2 = e^t.$$

□

Nakonec si všimneme případu pro siny a kosiny. Užitím předchozí věty a Eulerova vzorce se snadno odvodí následující tvrzení

Věta 5.27. *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{p}(t)$ je sloupec, jehož prvky jsou polynomy. Je-li $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + j\mathbf{x}_2$ řešením systému*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{p}(t)e^{(\alpha+\beta j)t},$$

je $\mathbf{x}_1 = \operatorname{Re} \mathbf{x}$ řešením systému

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{p}(t)e^{\alpha t} \cos \beta t$$

a $\mathbf{x}_2 = \operatorname{Im} \mathbf{x}$ je řešením systému

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{p}(t)e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Příklad 5.28. Najděte partikulární řešení systému

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 + \cos t \\ x_2' &= x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Řešení. Položme $\alpha = 0, \beta = 1, \mathbf{p}(t) = (1, 0)^T$. Podle věty (5.27) budeme řešit systém

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 + e^{jt} \\ x_2' &= x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Nyní zavedeme podle věty (5.25) substituci $\mathbf{x} = \mathbf{u}e^{jt}$. Systém (5.31) má tvar

$$\begin{aligned} u_1' &= -ju_1 + u_2 + 1 \\ u_2' &= u_1 - (1+j)u_2. \end{aligned}$$

Ten má podle věty (5.23) ($m = 0, k = 0$) řešení tvaru

$$u_1 = a, \quad u_2 = b, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Po dosazení vyjde

$$\begin{aligned} 0 &= -ja + b + 1 \\ 0 &= a - (1+j)b. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice dosadíme $a = (1+j)b$ do první a dostaneme

$$0 = -j(1+j)b + b + 1 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{-1}{2-j} = -\frac{2+j}{(2-j)(2+j)} = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}j.$$

Pak $a = (1+j)b = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}j$. Proto

$$u_1 = -\frac{1}{5}(1+3j)e^{jt}, \quad u_2 = -\frac{1}{5}(2+j)e^{jt}.$$

Pomocí Eulerova vztahu vyjde

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{5}(1+3j)(\cos t + j \sin t) = -\frac{1}{5} \cos t + \frac{3}{5} \sin t + j(-\frac{3}{5} \cos t - \frac{1}{5} \sin t) \\ u_2 &= -\frac{1}{5}(2+j)(\cos t + j \sin t) = -\frac{2}{5} \cos t + \frac{1}{5} \sin t + j(-\frac{1}{5} \cos t - \frac{2}{5} \sin t). \end{aligned}$$

Vypočteme reálné části (viz věta (5.27)) a dostaneme hledané řešení:

$$x_1 = \operatorname{Re} u_1 = -\frac{1}{5} \cos t + \frac{3}{5} \sin t, \quad x_2 = \operatorname{Re} u_2 = -\frac{2}{5} \cos t + \frac{1}{5} \sin t.$$

□

Je-li $\mathbf{b}(t)$ součtem několika typů speciálních pravých stran, použijeme princip superpozice. Např. bychom rozdělili

$$\mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + e^t \cos 2t - 4 \sin t \\ 2 - \cos t + 6e^t \\ 3e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \cos 2t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

a určili postupně pět partikulárních řešení.

Z předchozích výsledků vyplývá, že všechna řešení systému (5.30), kde složky $\mathbf{b}(t)$ jsou kvazipolynomy, jsou opět kvazipolynomy. Speciálně to tedy platí pro homogenní systémy. To umožňuje využít pro řešení Laplaceovu transformaci.

Jak jsme již konstatovali dříve, jsou uvedené metody efektivní jen zdánlivě. U systémů větších rozměrů totiž obecně ztroskotáme na nalezení kořenů charakteristické rovnice. Přesto jsou tyto výsledky nesmírně důležité. Dávají nám totiž velmi podrobné informace o struktuře řešení systémů s konstantními koeficienty (které často slouží jako aproximace nelineárních systémů). To umožňuje usuzovat na chování těchto lineárních systémů. Např. existují metody, které umožňují efektivně a celkem snadno zjistit, zda všechny kořeny (charakteristického) polynomu leží ve vymezené části komplexní roviny, např. vlevo od imaginární osy (tzv. *Hurwitzovo kritérium*). To ovšem znamená, že všechny složky řešení obsahují exponenciály tvaru $e^{\alpha t}$ se záporným α . Pak pro $t \rightarrow \infty$ konvergují všechna řešení k nule. To je podstatná informace u reálných systémů (jsou tzv. *asymptoticky stabilní*, tj. mají tendenci se ustalovat).

5.5 Řešení lineárních systémů s nespojitou pravou stranou

V předcházejících kapitolách jsme předpokládali, že pravé strany uvažovaných diferenciálních rovnic, respektive jejich koeficienty jsou spojité funkce. Avšak mnohé aplikace diferenciálních rovnic nám ukazují, že skutečnost je zcela jiná. Například v teorii řízení, kde k ovládání systémů popsaných diferenciálními rovnicemi se používají parametry, které se mění skokem, tj. jsou nespojité. Tak je tomu i u elektrických sítí, kde různá relé mění skokem svou polohu. Diferenciální rovnice se spojitou pravou stranou jsou jako model takových systémů nepostačující.

Z těchto důvodů matematikové hledali cestu, jak zobecnit pojem řešení diferenciálních rovnic na podobné nespojité případy. uvažujme např. diferenciální rovnici prvního řádu v explicitním tvaru s počáteční podmínkou

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (5.32)$$

Formální integrací na intervalu $[t_0, t]$ dostaneme

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad (5.33)$$

což je integrální rovnice. její řešení podstatně závisí na tom, jaký použijeme integrál. V případě běžného Riemannova integrálu je přirozeným předpokladem spojitost $f(t, x)$ a pak dostáváme naše dosavadní výsledky, kdy řešení má spojitou derivaci. Je však možné použít jiný integrál. Jako asi nejvýznamější se ukázala volba tzv. Lebesgueova integrálu. Přirozenými předpoklady na $f(t, x)$ umožňující použití tohoto integrálu jsou tzv. Carathéodoryho podmínky [7]. Řešení rovnice ((5.32)) je pak absolutně spojitě a má derivaci pouze skoro všude a ta splňuje rovnici ((5.32)) také skoro všude (nějaká vlastnost platí skoro všude, jestliže není splněna na množině Lebesgueovy míry nula). Podrobné poučení o této teorii viz. [7].

Naším úkolem není zkoumat různá zobecnění řešení, které vyžadují znalost často komplikovaných integračních teorií. Omezíme se pouze na lineární systémy s po částech spojitými koeficienty. Ty jsou v aplikacích většinou zcela postačující a přitom výsledky jsou jednoduché.

Definice 5.29. Nechť $J = (a, b)$ je ohraničený otevřený interval. Řekneme, že funkce $g(t)$ je po částech spojitá na intervalu J , jestliže existují čísla

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$$

tak, že $g(t)$ je spojitá na každém otevřeném podintervalu (t_{i-1}, t_i) , $i = 1, \dots, k$ a v krajních bodech těchto podintervalů existují konečné jednostranné limity. V případě neohrančeného intervalu J nazveme $g(t)$ po částech spojitou, je-li po částech spojitá na každém ohraničeném podintervalu $I \subset J$ (tj. v každém ohraničeném podintervalu je pouze konečný počet bodů nespojitosti).

Definice 5.30. Uvažujme systém n lineárních diferenciálních rovnic I. řádu

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t). \quad (5.34)$$

Předpokládejme, že všechny koeficienty $a_{ij}(t)$, $b_j(t)$, $i, j = 1, \dots, n$, jsou po částech spojitě na otevřeném intervalu J . Označme I množinu všech bodů nespojitosti všech těchto koeficientů. Tedy $I \subset J$ je konečná množina.

Pak sloupcový vektor $\mathbf{x} = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ nazveme řešením rovnice ((5.34)), jestliže platí:

- i) $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ jsou spojitě na J .
- ii) pro každé $t \in J \setminus I$ existují derivace $x'_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ a platí

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad t \in J \setminus I.$$

Tedy řešení splňuje rovnici ((5.34)) jen v těch bodech, kde jsou všechny koeficienty rovnice spojitě. V bodech nespojitosti koeficientů derivace $\mathbf{x}'(t)$ vůbec neexistuje. Řešení však musí být spojitě. Dá se zjistit, že v bodech nespojitosti koeficientů existují jednostranné derivace, které jsou ale různé.

Věta 5.31. *Nechť koeficienty $a_{ij}(t)$, $b_j(t)$, $i, j = 1, \dots, n$, jsou po částech spojitě na otevřeném intervalu J . Pak pro každé $t_0 \in J$ a $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}^n$ má počáteční úloha*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

právě jedno řešení, které existuje na celém intervalu J .

Podobně jako v případě spojitých koeficientů lze dokázat, že množina řešení homogenní rovnice tvoří vektorový prostor dimenze n , lze zavést fundamentální matice, platí princip superpozice apod.

Na závěr si všimneme, co dostaneme, když předchozí definici a větu aplikujeme na lineární diferenciální rovnici n -tého řádu

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t). \quad (5.35)$$

Ta je ekvivalentní systému

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= -a_0(t)x_1 - a_1(t)x_2 - a_2(t)x_3 - \dots - a_{n-1}(t)x_n + b(t), \end{aligned}$$

kde $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T = (x, x', \dots, x^{(n-1)})^T$.

Předpokládejme, že koeficienty $a_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ a $b(t)$ jsou po částech spojitě na J . Protože $x_1(t), \dots, x_n(t)$ jsou spojitě, dostáváme, že $\mathbf{x}(t)$ je řešením ((5.35)), jestliže

- i) $\mathbf{x}(t)$ má spojitě derivace na J až do $(n-1)$ -ho řádu včetně.
- ii) pro $t \in J \setminus I$ (I je množina bodů nespojitosti koeficientů) existuje $x^{(n)}$.
- iii) pro $t \in J \setminus I$ je splněna rovnice ((5.35)).

Poznámka 5.32. Jsou-li koeficienty $\mathbf{A}(t)$ po částech konstantní a koeficienty $\mathbf{b}(t)$ po částech rovny kvazipolynomům, lze na vhodných podintervalech použít předchozí výsledky o systémech s konstantními koeficienty a speciálními pravými stranami. Při přechodu přes bod nespojitosti $t \in J$ je jen třeba jednotlivé úseky řešení spojitě navázat. Totéž platí pro rovnici ((5.35)). Postup si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 5.33. Najděte řešení počáteční úlohy

$$x'' + x = \operatorname{sgn} t, \quad x(\pi) = 0, \quad x'(\pi) = 1. \quad (5.36)$$

V našem případě je $J = (-\infty, \infty)$, $I = \{0\}$. Najdeme obecné řešení homogenní rovnice jejíž koeficienty jsou spojitě a dokonce konstantní. Charakteristická rovnice má tvar

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm j.$$

Obecné řešení je pak tvaru

$$x = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Nejprve budeme uvažovat $t \in (0, \infty)$ tj. $b(t) = 1$. Existuje pak partikulární řešení tvaru $x_1(t) = a_1$, kde $a_1 \in \mathbb{R}$. Po dosazení do rovnice ((5.36)) dostáváme

$$0 + a_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1,$$

tedy

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 1 \quad \Rightarrow \quad x'(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t.$$

Z počátečních podmínek dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 \cos \pi + c_2 \sin \pi + 1 & \Rightarrow & \quad 0 = -c_1 + 1 \\ 1 &= -c_1 \sin \pi + c_2 \cos \pi & \Rightarrow & \quad 1 = -c_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1, \quad c_2 = -1.$$

Tedy

$$x(t) = \cos t - \sin t + 1, \quad t \in (0, \infty).$$

Ze spojitosti $x(t)$ plyne

$$x(0) = \cos 0 - \sin 0 + 1 = 2, \quad x'(0) = -\sin 0 - \cos 0 = -1.$$

Pro $t \in (-\infty, 0)$ je $b(t) = -1$, tedy musí existovat partikulární řešení ve tvaru $x_2(t) = a_2$, kde $a_2 \in \mathbb{R}$. Po dosazení do rovnice ((5.36)) dostáváme

$$0 + a_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad a_2 = -1,$$

tedy

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - 1 \quad \Rightarrow \quad x'(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t.$$

Nyní musí platit

$$\begin{aligned} 2 &= c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 - 1 & \Rightarrow & \quad 2 = c_1 - 1 \\ -1 &= -c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 & \Rightarrow & \quad -1 = c_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 3, \quad c_2 = -1.$$

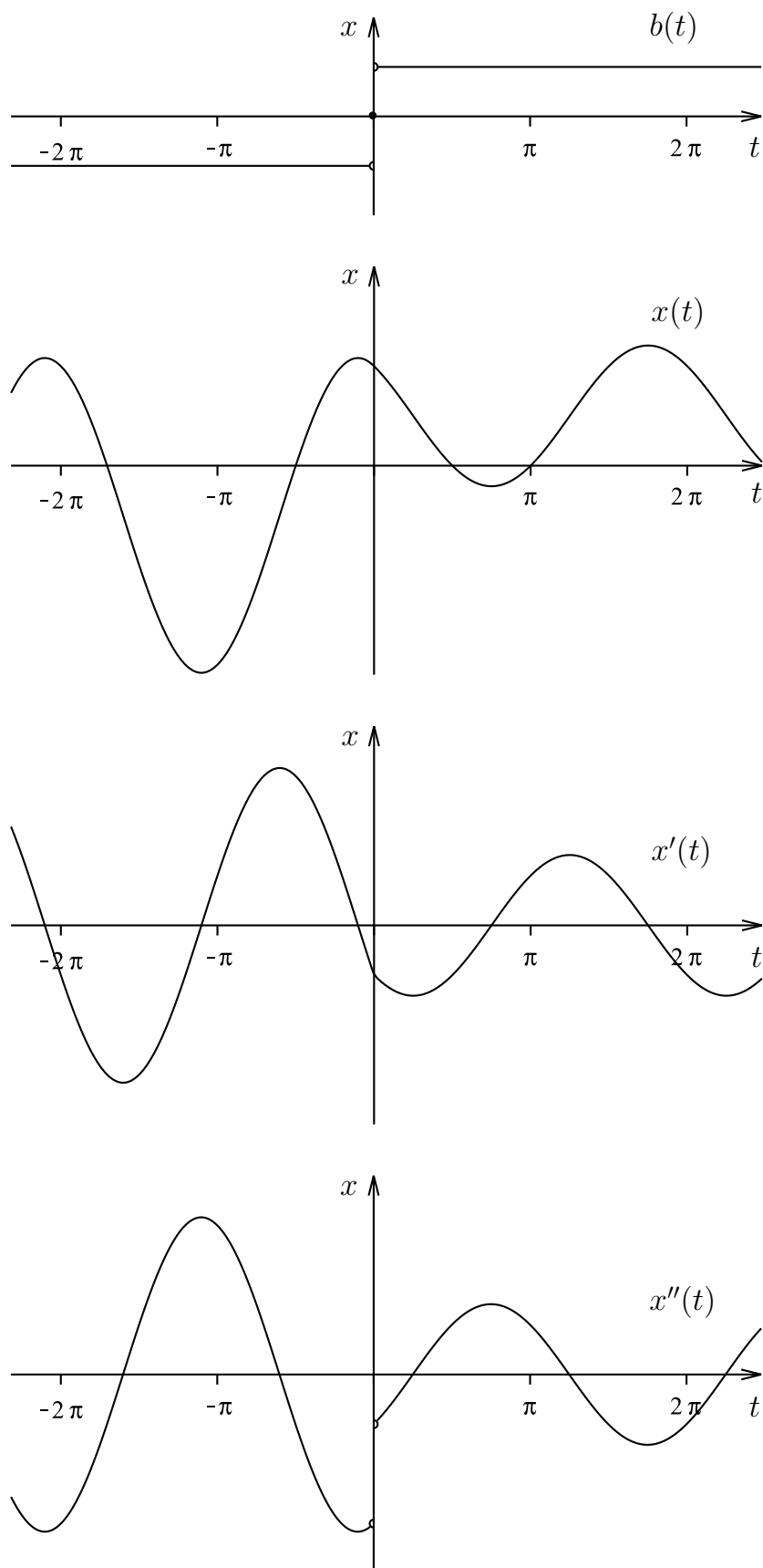
Tedy

$$x(t) = 3 \cos t - \sin t - 1, \quad t \in (-\infty, 0).$$

Celkově tedy máme

$$x(t) = \begin{cases} 3 \cos t - \sin t - 1, & t < 0, \\ \cos t - \sin t + 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Průběh řešení a jeho derivací je znázorněn na obr. (5.3). Všimněme si, že v bodě $t = 0$ má $x(t)$ derivaci, $x'(t)$ je spojitá, ale nemá derivaci v bodě $t = 0$. Snadno lze spočítat, že jednostranné derivace jsou $x''_-(0) = -3$, $x''_+(0) = -1$, tedy $x''_-(0) \neq x''_+(0)$, tedy $x''(t)$ v tomto bodě neexistuje.



Obr. 5.3: Řešení počáteční úlohy $x'' + x = \operatorname{sgn} t$, $x(\pi) = 0$, $x'(\pi) = 1$.

5.6 Stabilita řešení systémů diferenciálních rovnic

Uvažujme systém diferenciálních rovnic ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (5.37)$$

Daný konkrétní systém (5.37) může být matematickým modelem celé řady různých mechanických, elektrotechnických, biologických a jiných systémů. Chování těchto systémů je pak popsáno vlastním řešením systému (5.37), který může mít obecně nekonečně mnoho řešení, odpovídajících různým volbám jeho počátečního stavu.

U většiny systémů požadujeme, aby jejich chování bylo v nějakém smyslu blízké jednomu předem danému chování systému (např. setrvání v klidu, v periodickém pohybu, apod.).

Předpokládejme, že (5.37) je matematickým modelem nějakého fyzikálního systému S , jehož jeden pracovní režim je popsán daným řešením \mathbf{v} systému (5.37). To znamená, že pro každé t udává vektor $\mathbf{v}(t)$ hodnoty stavových proměnných v okamžiku t . V počátečním okamžiku t_0 nabývají stavové proměnné systému S hodnotu $\mathbf{v}(t_0)$.

V praxi však tyto počáteční hodnoty stavových proměnných systému S získáme zpravidla měřeními a takto naměřené hodnoty \mathbf{x}_0 jsou pouze aproximacemi skutečných hodnot $\mathbf{v}(t_0)$. Spojitá závislost řešení na počáteční hodnotě zaručuje, že chyba, které se dopustíme při měření počátečních hodnot, nezkrusí podstatně informaci o charakteru vyšetřovaného řešení na konečném časovém intervalu.

Přesněji, ke každému předem danému intervalu $\langle t_0, t_1 \rangle$ a ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta = \delta(\varepsilon, t_0, t_1) > 0$ tak, že když naměřené počáteční hodnoty \mathbf{x}_0 stavových proměnných \mathbf{x} se budou v okamžiku t_0 lišit od skutečných počátečních hodnot $\mathbf{v}(t_0)$ o méně než δ , budou se vypočtené hodnoty $\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ stavových proměnných \mathbf{v} v okamžiku t lišit od skutečných hodnot stavových proměnných $\mathbf{v}(t) \forall t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ o méně než ε .

Velikou závadou tohoto odhadu je závislost odchylky δ počátečních hodnot na délce časového intervalu $\langle t_0, t_1 \rangle$. Se zvětšováním délky intervalu jsme zpravidla nuceni zmenšovat číslo δ .

Z fyzikálních a technických důvodů je přirozené požadovat, aby číslo δ bylo dostatečně velké i pro libovolně velké délky časových intervalů $t_1 - t_0$. Proto se studuje taková závislost řešení na počátečních údajích t_0, \mathbf{x}_0 , ve které odchylka δ závisí pouze na počátečním okamžiku t_0 a přípustné odchylce řešení ε a nezávisí na délce časového intervalu $t_1 - t_0$. Studium takové závislosti představuje náplň teorie stability.

Uvedme ještě jeden pohled na problematiku stability.

Předpokládejme, že na fyzikální systém S , popsáný přibližně systémem (5.37), působí nějaké poruchy vyvolané zásahy, které nejsme schopni do modelu zahrnout a při sestavování rovnic (5.37) je zanedbáváme. Kdybychom je totiž chtěli respektovat, pak bychom museli v každém okamžiku, ve kterém poruchy působí, provádět na našem modelu korekci např. v nastavení okamžitých hodnot stavových proměnných. To je velmi obtížně realizovatelné, a proto je vhodnější tyto poruchy zanedbat a určit, jak velké chyby se

tímto zjednodušením dopouštíme. To je opět problematika, která spadá do rámce teorie stability.

V následujícím textu se budeme zabývat studiem různých typů stability řešení systému (5.37) a budeme předpokládat, že $\mathbf{f}(t, \mathbf{o}) = \mathbf{o}$, takže $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ má *triviální řešení*, které budeme značit \mathbf{o} .

Nejdříve ukážeme, že omezení našich úvah na studium stability triviálního řešení \mathbf{o} nikterak nezmenšuje obecnost dalších úvah a přitom značně zjednodušuje symboliku i formulace.

Předpokládejme, že chceme vyšetřovat řešení \mathbf{v} systému

$$\mathbf{y}' = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}) \quad (5.38)$$

definované na nějakém intervalu I . Provedme v systému (5.38) substituci

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{v}. \quad (5.39)$$

Jelikož funkce \mathbf{v} je řešením systému (5.38), platí

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{v}(t)) \quad \forall t \in I,$$

a tedy

$$\mathbf{x}' = \mathbf{y}' - \mathbf{v}' = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{g}(t, \mathbf{v}) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x} + \mathbf{v}) - \mathbf{g}(t, \mathbf{v}) \quad (5.40)$$

Označíme-li

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x} + \mathbf{v}) - \mathbf{g}(t, \mathbf{v}),$$

dostaneme z (5.40) systém

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{o}) = \mathbf{o}, \quad (5.41)$$

takže systém (5.41) má triviální řešení \mathbf{o} . Na toto triviální řešení se transformací (5.39) zobrazuje řešení \mathbf{v} systému (5.38). Vyšetříme-li vlastnosti triviálního řešení \mathbf{o} systému (5.41), pak pomocí transformace (5.39) můžeme výsledky přenést na řešení \mathbf{v} systému (5.38).

Předpokládejme v následujícím, že existuje interval $I = (\alpha, \infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a oblast $H \subset \mathbb{R}^n$ obsahující počátek tak, že zobrazení \mathbf{f} je spojitě na oblasti $G = I \times H$ a pro každý bod $(t_0, \mathbf{x}_0) \in G$ je Cauchyova úloha

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (5.42)$$

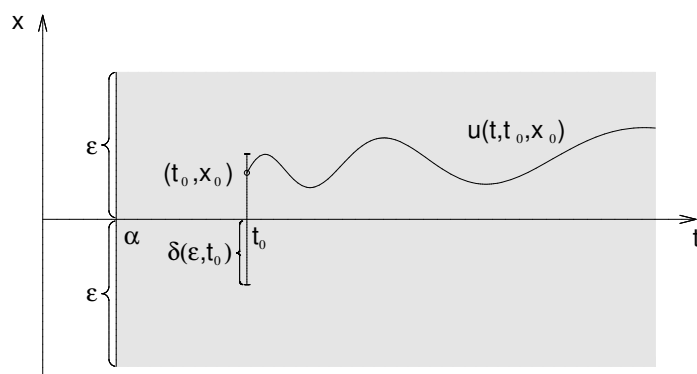
jednoznačně řešitelná a nechť $\mathbf{f}(t, \mathbf{o}) = \mathbf{o} \quad \forall t > \alpha$.

Definice 5.34. Řekneme, že triviální řešení \mathbf{o} systému

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (5.43)$$

je *stabilní* (viz obrázek (5.4)), jestliže ke každému $t_0 > \alpha$ a každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ tak, že pro všechny počáteční hodnoty $\mathbf{x}_0 \in H$, $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ a pro všechna $t \geq t_0$ platí, že řešení $\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ Cauchyovy úlohy (5.42) splňuje nerovnost

$$\|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon. \quad (5.44)$$



Obr. 5.4: Triviální řešení je stabilní.

Příklad 5.35. Ukažte, že triviální řešení rovnice

$$x' = kx$$

je stabilní pro každé $k \leq 0$.

Řešení. Funkce $f(t, x) = kx$ je spojitá a lipschitzovská vzhledem k proměnné x pro všechna $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Můžeme tedy volit $\alpha = -\infty$, $I = (-\infty, \infty)$, $H = \mathbb{R}$, $G = I \times \mathbb{R}$. Cauchyova úloha

$$x' = kx, \quad x(t_0) = x_0$$

má řešení $u(t, t_0, x_0) = x_0 e^{k(t-t_0)}$, $t \in I$.

$$\text{Tedy } |u(t, t_0, x_0)| = |x_0| \cdot e^{k(t-t_0)} \leq |x_0| \quad \text{pro všechna } k \leq 0, t \geq t_0.$$

Zvolíme-li $\delta = \varepsilon$, bude podle (5.44) platit

$$|u(t, t_0, x_0)| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } t \geq t_0, k \leq 0, |x_0| < \delta.$$

Tedy triviální řešení je stabilní. □

Příklad 5.36. Ukažte, že triviální řešení systému

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_1 \end{aligned} \tag{5.45}$$

je stabilní.

Řešení. Cauchyova úloha pro systém (5.45) s počáteční podmínkou $x_1(t_0) = x_{01}$, $x_2(t_0) = x_{02}$ má pro každé $t_0 \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$ řešení

$$\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} x_{01} \cos(t - t_0) + x_{02} \sin(t - t_0) \\ -x_{01} \sin(t - t_0) + x_{02} \cos(t - t_0) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pro normu řešení dostáváme odhad

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| &= |x_{01} \cos(t - t_0) + x_{02} \sin(t - t_0)| + | -x_{01} \sin(t - t_0) + x_{02} \cos(t - t_0)| \leq \\ &\leq |x_{01}| + |x_{02}| + |x_{01}| + |x_{02}| = 2(|x_{01}| + |x_{02}|) = 2\|\mathbf{x}_0\|.\end{aligned}$$

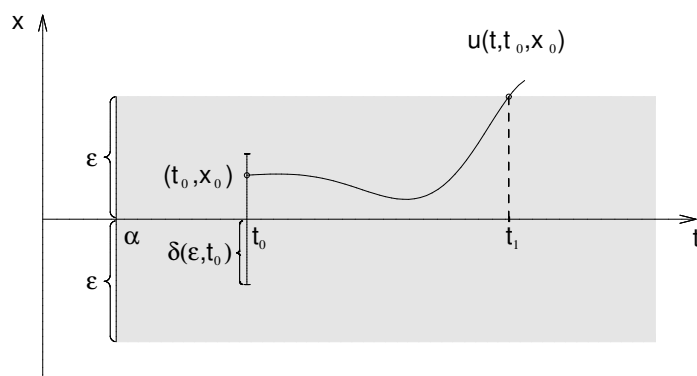
Položíme-li $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, dostaneme

$$\|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| \leq 2\|\mathbf{x}_0\| < 2\delta = \varepsilon \quad \text{pro všechna } t \geq t_0.$$

Tedy triviální řešení je stabilní. □

Triviální řešení, které není stabilní, nazveme *nestabilním*.

Volně můžeme říci, že triviální řešení systému (5.43) je nestabilní právě tehdy, existuje-li okamžik t_0 a číslo $\varepsilon > 0$ tak, že v každém libovolně malém okolí počátku existuje bod \mathbf{x}_0 tak, že řešení $\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ se vzdálí od triviálního řešení o více než ε , neboli existuje $t_1 > t_0$ tak, že $\|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| > \varepsilon$ pro $t > t_1$ (viz obrázek (5.5)).



Obr. 5.5: Triviální řešení není stabilní.

Příklad 5.37. Ukažte, že triviální řešení systému

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_1\end{aligned}\tag{5.46}$$

je nestabilní.

Řešení. Cauchyova úloha pro systém (5.46) s počáteční podmínkou $x_1(t_0) = x_{01}, x_2(t_0) = x_{02}$ má řešení

$$\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \left((x_{01} + x_{02})e^{t-t_0} + (x_{01} - x_{02})e^{-(t-t_0)}, (x_{01} + x_{02})e^{t-t_0} - (x_{01} - x_{02})e^{-(t-t_0)} \right)$$

Zvolme $\varepsilon = 1, t_0 = 0$, pak pro libovolné $\delta > 0$ můžeme volit $\mathbf{x}_0 = \left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)^T, t_1 > -\ln \frac{\delta}{2}$ a dostaneme odhad

$$\|\mathbf{u}(t_1, t_0, \mathbf{x}_0)\| = \|\mathbf{u}(t_1, 0, \mathbf{x}_0)\| = \left\| \frac{1}{2} (\delta e^{t_1}, \delta e^{t_1}) \right\| =$$

$$= \frac{1}{2} \delta e^{t_1} \cdot \|(1, 1)\| = \frac{1}{2} \delta e^{t_1} (|1| + |1|) = \delta e^{t_1} > \delta e^{-\ln \frac{\delta}{2}} = \delta \cdot \frac{2}{\delta} = 2 > \varepsilon.$$

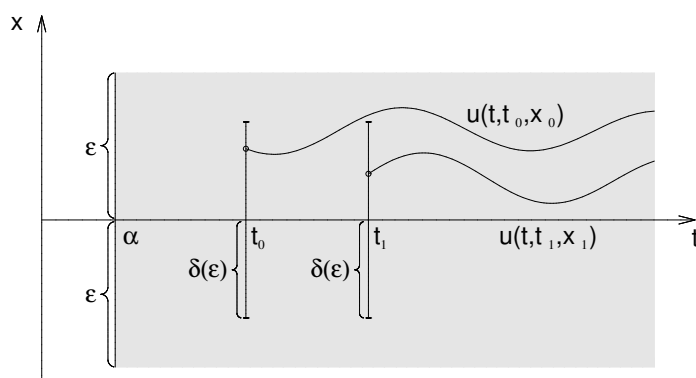
Triviální řešení systému (5.46) je nestabilní. \square

Definice 5.38. Řekneme, že triviální řešení systému

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

je *stejněměrně stabilní* (viz obrázek (5.6)), jestliže je stabilní a číslo δ v definici (5.34) nezávisí na volbě počátečního okamžiku t_0 , tj. když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tak, že pro každé $\mathbf{x}_0 \in H \subset \mathbb{R}^n$, $t, t_0 \in \mathbb{R}$, vyhovující nerovnostem $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$, $t \geq t_0 > \alpha$ platí

$$\|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon.$$



Obr. 5.6: Triviální řešení je stejněměrně stabilní.

Všimneme-li si podrobněji příkladů (5.35), (5.36), (5.37), zjistíme, že triviální řešení ve všech případech jsou stejněměrně stabilní, neboť δ závisí pouze na ε a nikoli na t_0 . Tuto vlastnost mají všechny autonomní systémy, tj. systémy tvaru $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Platí, že když triviální řešení autonomního systému je stabilní, pak je stejněměrně stabilní. Pro neautonomní systémy to neplatí.

Příklad 5.39. Uvažujme Cauchyovu úlohu

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 \\ x_2' &= (\sin \ln t + \cos \ln t - 1)x_2 \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou $x_1(t_0) = x_{01}$, $x_2(t_0) = x_{02}$.

Pak pro každé $(t_0, \mathbf{x}_0) \in I \times \mathbb{R}^2$, $I = (1, \infty)$, má úloha řešení

$$\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0) = (x_{01} e^{-t+t_0}, x_{02} e^{-t(1-\sin \ln t)+t_0(1-\sin \ln t_0)}), \quad t > 1.$$

Pro normu tohoto řešení dostáváme odhad

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| &= |x_{01} e^{-(t-t_0)}| + |x_{02} e^{-t(1-\sin \ln t) + t_0(1-\sin \ln t_0)}| \leq \\ &\leq |x_{01}| + |x_{02}| e^{2t_0} \leq (|x_{01}| + |x_{02}|) e^{2t_0} = \|\mathbf{x}_0\| e^{2t_0} \quad \text{pro všechna } t \geq t_0. \end{aligned}$$

Vidíme, že v odhadu se vyskytuje jak počáteční hodnota \mathbf{x}_0 , tak i počáteční okamžik t_0 . Zvolíme-li např. $\delta = \varepsilon e^{-2t_0}$, dostaneme

$$\|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| \leq \|\mathbf{x}_0\| e^{2t_0} < \delta e^{2t_0} = \varepsilon e^{-2t_0} \cdot e^{2t_0} = \varepsilon.$$

Je tedy triviální řešení stabilní, nikoli však stejnoměrně stabilní.

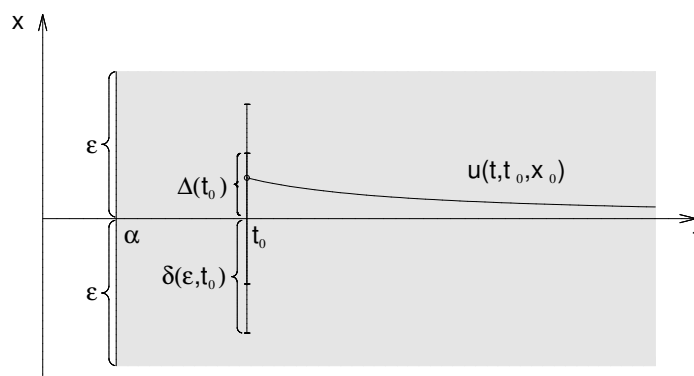
Definice 5.40. Řekneme, že triviální řešení systému

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

je *asymptoticky stabilní* (viz obrázek (5.7)), jestliže

- i) je stabilní
- ii) existuje číslo $\Delta > 0$ tak, že pro každé $\mathbf{x}_0 \in H \subset \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{x}_0\| < \Delta$ a každé $t_0 > \alpha$ platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| = 0.$$



Obr. 5.7: Triviální řešení je asymptoticky stabilní.

Analogickým způsobem definujeme *stejnouměrnou asymptotickou stabilitu* triviálního řešení systému $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$.

Podmínka ii) v definici (5.40) znamená, že ke každému $\varepsilon > 0$, $t_0 > \alpha$, $\mathbf{x}_0 \in H \subset \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{x}_0\| < \Delta$, existuje číslo $T = T(\varepsilon, t_0, \mathbf{x}_0)$ tak, že pro všechna $t > t_0 + T$ je $\|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$.

Příklad 5.41. Ukažte, že triviální řešení systému

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 \\x_2' &= -x_1\end{aligned}$$

není asymptoticky stabilní.

Řešení. V příkladu (5.36) jsme ukázali, že triviální řešení je stabilní (dokonce je stejnoměrně stabilní). Musíme tedy ukázat, že není splněna podmínka ii) v definici (5.40). Řešením Cauchyovy úlohy

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 & x_1(t_0) &= x_{01} \\x_2' &= -x_1 & x_2(t_0) &= x_{02}\end{aligned}$$

je vektorová funkce

$$\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0) = (x_{01} \cos(t - t_0) + x_{02} \sin(t - t_0), -x_{01} \sin(t - t_0) + x_{02} \cos(t - t_0)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pro normu tohoto řešení (použijeme euklidovskou normu) dostáváme

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| &= ((u_1(t, t_0, \mathbf{x}_0))^2 + (u_2(t, t_0, \mathbf{x}_0))^2)^{1/2} = \\&= (x_{01}^2 \cos^2(t - t_0) + 2x_{01}x_{02} \cos(t - t_0) \sin(t - t_0) + x_{02}^2 \sin^2(t - t_0) + \\&\quad + x_{01}^2 \sin^2(t - t_0) - 2x_{01}x_{02} \sin(t - t_0) \cos(t - t_0) + x_{02}^2 \cos^2(t - t_0))^{1/2} = \\&= (x_{01}^2 + x_{02}^2)^{1/2} = \|\mathbf{x}_0\|,\end{aligned}$$

takže pro $\|\mathbf{x}_0\| \neq 0$ platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| = \|\mathbf{x}_0\| \neq 0.$$

Tedy triviální řešení není asymptoticky stabilní. □

Dá se dokázat, že při ověřování podmínek stability triviálního řešení stačí podmínky ověřit pro jedno libovolné $t_0 > \alpha$ a pak už musí platit pro všechna $t > \alpha$.

5.6.1 Stabilita lineárních systémů

Uvažujme nyní nehomogenní lineární systém diferenciálních rovnic

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \tag{5.47}$$

kde $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{b}(t)$ jsou spojité na intervalu $I = (\alpha, \infty) \subset \mathbb{R}$. Pak libovolné řešení $\mathbf{u}(t)$ systému (5.47) je *stabilní*, resp. *asymptoticky stabilní*, resp. *nestabilní*, právě když triviální řešení homogenního systému

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

je stabilní, resp. asymptoticky stabilní, resp. nestabilní.

V lineárních systémech nastane tedy právě jeden z těchto případů:

I) Všechna řešení jsou stabilní.

II) Všechna řešení jsou asymptoticky stabilní.

III) Všechna řešení jsou nestabilní.

Proto v případě I) říkáme, že lineární systém je stabilní, v případě II) říkáme, že lineární systém je asymptoticky stabilní, a v případě III) říkáme, že lineární systém je nestabilní.

Při vyšetřování stability nehomogenního systému (5.47) se tedy stačí omezit na vyšetřování stability triviálního řešení systému

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (5.48)$$

Věta 5.42. *Triviální řešení systému (5.48) je stabilní právě tehdy, když existuje $K > 0$ tak, že*

$$\|\mathbf{U}(t)\| \leq K, \quad t \in I,$$

kde $\mathbf{U}(t)$ je fundamentální matice řešení systému (5.48). (Tedy každé řešení systému je ohraničené.)

Odtud plyne, že je-li nehomogenní systém (5.47) stabilní, pak jsou buď všechna řešení ohraničená, nebo neohraničená pro $t \rightarrow \infty$.

Poznamenejme ještě, že u nelineárních systémů z ohraničenosti všech jeho řešení neplyne obecně jejich stabilita.

Věta 5.43. *Triviální řešení systému (5.48) je asymptoticky stabilní právě tehdy, když*

$$\|\mathbf{U}(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{pro } t \rightarrow \infty,$$

kde $\mathbf{U}(t)$ je fundamentální matice řešení systému (5.48). (Tedy všechna řešení systému (5.48) konvergují pro $t \rightarrow \infty$ k nule.)

Uvažujme nyní homogenní systém lineárních diferenciálních rovnic

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (5.49)$$

kde \mathbf{A} je konstantní reálná čtvercová matice typu (n, n) .

V tomto případě je systém (5.49) speciálním případem autonomního systému $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, kde $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Tedy stabilita triviálního řešení systému (5.49) je ekvivalentní s jeho stejnoměrnou stabilitou a podobně asymptotická stabilita triviálního řešení systému (5.49) je ekvivalentní se stejnoměrnou asymptotickou stabilitou.

Věta 5.44. *Nechť je dán systém (5.49). Jestliže všechna charakteristická čísla matice \mathbf{A} mají záporné reálné části, pak triviální řešení daného systému je stejnoměrně asymptoticky stabilní. Existuje-li charakteristické číslo matice \mathbf{A} s kladnou reálnou částí, pak triviální řešení je nestabilní.*

Poznámka 5.45. O stabilitě lineárního systému (5.49) nelze rozhodnout pomocí věty (5.44) v případě, že žádné charakteristické číslo matice \mathbf{A} nemá kladnou reálnou část, ale mezi charakteristickými čísly se vyskytují čísla s nulovou reálnou částí. V tomto případě může být lineární systém stabilní nebo nestabilní. Podmínky stability, resp. nestability, uvedené ve větě (5.44) jsou tedy postačující, nikoli nutné. Podmínky asymptotické stability jsou nutné a postačující.

Lze dokázat, že v případě, že všechna charakteristická čísla matice \mathbf{A} mají záporné nebo nulové reálné části, přičemž všechna charakteristická čísla s nulovou reálnou částí mají násobnost jedna, je uvažovaný lineární systém stabilní (nikoli však asymptoticky stabilní).

5.6.2 Hurwitzovo kritérium

Jelikož charakteristická čísla systému (5.49) jsou kořeny charakteristického polynomu

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_n\lambda^n,$$

budou nás zajímat polynomy, jejichž všechny nulové body mají záporné reálné části. Takové polynomy se nazývají *hurwitzovské polynomy* a příslušné kritérium *Hurwitzovo kritérium*:

Nechť je dán polynom

$$f(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n, \quad n \geq 1, \quad a_0 > 0, \quad a_n \neq 0 \quad (5.50)$$

s reálnými koeficienty. *Hurwitzovou maticí* polynomu (5.50) nazýváme matici

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \quad (5.51)$$

kde klademe $a_s = 0$ pro $s < 0$ a $s > n$. Platí toto tvrzení:

Všechny nulové body polynomu (5.50) mají záporné reálné části právě tehdy, když determinanty $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ jsou kladné, přičemž

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{2k-1} & a_{2k-2} & a_{2k-3} & a_{2k-4} & \cdots & a_k \end{vmatrix}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Mají-li všechny nulové body polynomu (5.50) záporné reálné části, musí být všechny jeho koeficienty a_j , $j = 0, \dots, n$, kladné.

Dá se ukázat, že pro $n = 2$ je tato podmínka i postačující, tj. že polynom $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$ je hurwitzovský právě tehdy, když $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

Pro polynomy vyšších stupňů je tato podmínka pouze nutná. Tak například polynom

$$f(z) = 30 + 4z + z^2 + z^3$$

má nulové body $-3, 1+3j, 1-3j$, tedy dva kořeny mají kladné reálné části, i když všechny koeficienty daného polynomu jsou kladné.

Příklad 5.46. Zjistěte, zda polynom

$$f(z) = 3 + 2z + 7z^2 + 3z^3 + z^4$$

je hurwitzovský.

Řešení. Všechny koeficienty polynomu f jsou kladné, takže tento polynom může být hurwitzovský. Použijeme Hurwitzovo kritérium:

$a_0 = 3, a_1 = 2, a_2 = 7, a_3 = 3, a_4 = 1$, tedy

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 = 2 > 0, & \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 5 > 0 \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 > 0 \\ \Delta_4 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \Delta_3 = 11 > 0. \end{aligned}$$

Podmínky Hurwitzova kritéria jsou splněny, takže polynom je hurwitzovský. □

Příklad 5.47. Vyšetřete stabilitu systému

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_4 \\ x_4' &= 0. \end{aligned}$$

Řešení.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 1)^2.$$

Tedy charakteristická čísla matice \mathbf{A} jsou $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \lambda_4 = 1$. Matice \mathbf{A} má charakteristické číslo s kladnou reálnou částí, tedy systém je nestabilní. □

Příklad 5.48. Vyšetřete stabilitu řešení $\mathbf{u}(t) = (\sin t, t + \cos t, 1 + \sin t)^T$ systému

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-t \\ 1 \\ 1-t \end{pmatrix}.$$

Řešení. Stačí vyšetřit stabilitu triviálního řešení homogenního systému

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & -2 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^2 + 1)(\lambda - 1) = 0.$$

Tedy $\lambda_1 = j$, $\lambda_2 = -j$, $\lambda_3 = 1$. Protože existuje charakteristické číslo matice \mathbf{A} s kladnou reálnou částí, je triviální řešení homogenního systému nestabilní a tudíž i řešení $\mathbf{u}(t)$ daného nehomogenního systému je nestabilní. \square

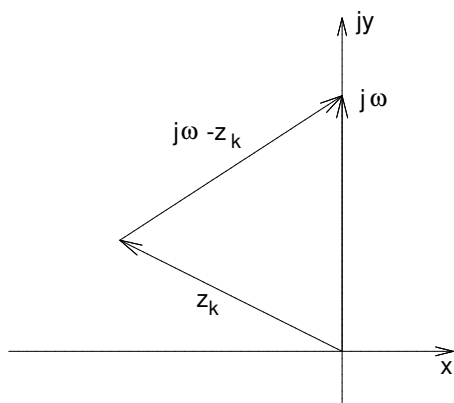
5.6.3 Michajlovovo kritérium

Uvažujme polynom

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad (5.52)$$

který nemá kořeny ležící na imaginární ose. Rozložme polynom $P(z)$ na součin kořenových činitelů, tj.

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$



Nechť bod $z = j\omega$, $\omega \in (-\infty, \infty)$, se pohybuje zdola nahoru po imaginární ose. Z obrázku je zřejmé, že když $\operatorname{Re} z_k < 0$, tak při změně ω od $-\infty$ do $+\infty$ se vektor $z - z_k = j\omega - z_k$ otočí o úhel π proti směru hodinových ručiček a funkce $\arg(z - z_k)$ má přírůstek $+\pi$. Jestliže tedy všechny kořeny polynomu $P(z)$ mají záporné reálné části, argument polynomu $P(z)$ bude mít přírůstek $n\pi$, protože přírůstek argumentu součinu se rovná součtu přírůstků argumentů jednotlivých činitelů.

Kdyby alespoň jeden z kořenů z_j , $j \in \{1, \dots, n\}$ měl kladnou reálnou část, přírůstek argumentu činitele $z - z_j$ by měl hodnotu $-\pi$ (odpovídající vektor se otáčí ve směru pohybu hodinových ručiček) a přírůstek argumentu polynomu $P(z)$ by byl menší než $n\pi$.

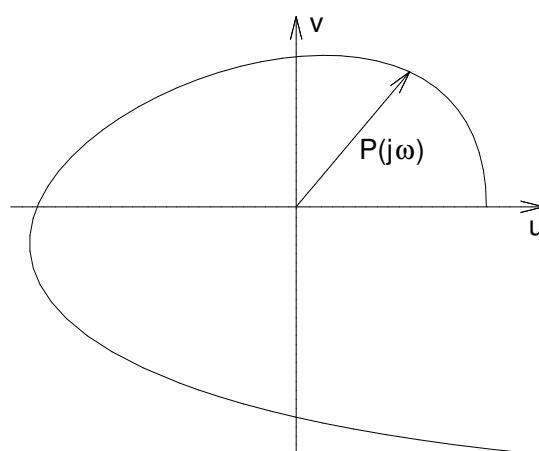
Dosaďme nyní do (5.52) $z = j\omega$. Pak platí

$$P(j\omega) = u(\omega) + j v(\omega),$$

kde

$$\begin{aligned} u(\omega) &= a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots \\ v(\omega) &= a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots \end{aligned}$$

$P(j\omega)$ pak reprezentuje vektor v komplexní rovině (u, v) . Při změně parametru ω od $-\infty$ do $+\infty$ vytváří koncový bod daného vektoru křivku, kterou nazýváme *hodografem* vektorové funkce $w = P(j\omega)$ (nebo též Michajlovovou křivkou), viz obrázek (5.8).



Obr. 5.8: Michajlovova křivka

Tedy pro $\omega \in (-\infty, \infty)$ se vektor $P(j\omega)$ otočí o úhel φ . Jestliže polynom $P(z)$ má m kořenů s kladnou reálnou částí a $n - m$ kořenů se zápornou reálnou částí, pak

$$\varphi = (n - m)\pi + m(-\pi) = (n - 2m)\pi.$$

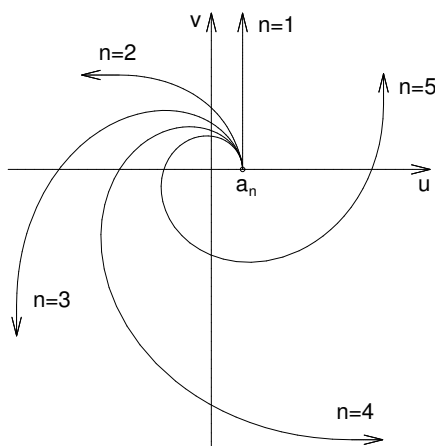
Jelikož funkce $u(\omega)$ je sudá, Michajlovova křivka je symetrická podle osy u , což znamená, že můžeme konstruovat Michajlovovu křivku pouze pro $\omega \in (0, \infty)$, přičemž

$$\varphi = (n - m)\frac{\pi}{2} + m \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = (n - 2m)\frac{\pi}{2}. \quad (5.53)$$

Již víme, že řešení systému (5.47) je asymptoticky stabilní, jestliže všechny kořeny příslušné charakteristické rovnice mají záporné reálné části, tj. m se musí v (5.53) rovnat nule, což vede k následujícímu kritériu stability.

Michajlovovo kritérium. Polynom (5.52) je Hurwitzův, jestliže Michajlovova křivka pro $\omega \in (0, \infty)$ neprochází počátkem a platí $\varphi = n \cdot \frac{\pi}{2}$.

Na obrázku (5.9) jsou zobrazeny typické Michajlovovy křivky pro polynomy stupňů $n = 1, 2, 3, 4, 5$ v případě, že všechny kořeny mají zápornou reálnou část.

Obr. 5.9: Michajlovovy křivky pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Příklad 5.49. Michajlovovým kritériem rozhodněte o stabilitě systému

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 \\x_2' &= x_3 \\x_3' &= x_4 \\x_4' &= -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4.\end{aligned}$$

Řešení. Charakteristická rovnice je tvaru

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Dále platí

$$\begin{aligned}P(j\omega) &= \omega^4 - 2j\omega^3 - 3\omega^2 + 2j\omega + 1, \\u(\omega) &= \omega^4 - 3\omega^2 + 1 \\v(\omega) &= -2\omega^3 + 2\omega = 2\omega(1 - \omega^2) = 2\omega(1 - \omega)(1 + \omega).\end{aligned}$$

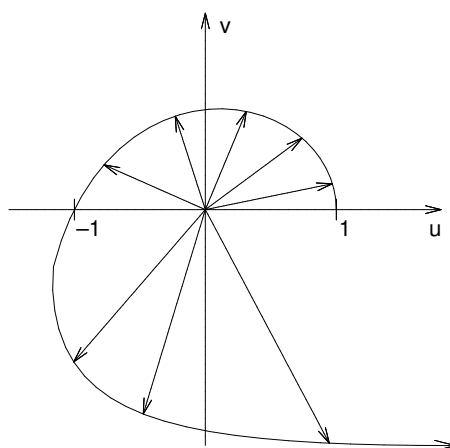
Hledejme nyní kořeny rovnic $u(\omega) = 0$, $v(\omega) = 0$, $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$.

$$\begin{aligned}u(\omega) = 0 &\Leftrightarrow \omega^4 - 3\omega^2 + 1 = 0 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \\v(\omega) = 0 &\Leftrightarrow 2\omega(1-\omega)(1+\omega) = 0 \Rightarrow \omega_3 = 0, \omega_4 = 1.\end{aligned}$$

Sestavme tabulku hodnot $u = u(\omega)$, $v = v(\omega)$ pro vypočtené hodnoty parametru ω , a to vzestupně vzhledem k ω :

ω	0	$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$	1	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$	∞
u	1	0	-1	0	+
v	0	+	0	-	-

K průběhu Michajlovovy křivky nám stačí určit pouze znaménka funkčních hodnot včetně případu, kdy $\omega \rightarrow \infty$. Jelikož $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{v}{u} = 0$, průběh Michajlovovy křivky lze znázornit následovně:



Obr. 5.10: Michajlovova křivka k příkladu (5.49)

Tedy pro $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$ se vektor $P(j\omega)$ otočí o úhel $\varphi = 2\pi$. Aby polynom $P(\lambda)$ byl dle Michajlovova kritéria Hurwitzovský, musí v našem případě platit $\varphi = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$, což je splněno. Odtud plyne, že vyšetřovaný systém je asymptoticky stabilní. \square

Z výše uvedeného vyplývá, že jsou-li všechny reálné části kořenů polynomu (5.52) záporné, platí:

- 1) Při pohybu ω od 0 do ∞ se bude vektor $w = P(j\omega)$ otáčet pouze proti směru pohybu hodinových ručiček a Michajlovova křivka bude střídavě protínat jak reálnou, tak imaginární osu roviny (u, v) .
- 2) Celkový počet těchto průsečíků (včetně průsečíku pro $\omega = 0$) se bude rovnat stupni polynomu $P(z)$.
- 3) Michajlovova křivka nemůže procházet počátkem souřadnic, protože pro určitou hodnotu ω by muselo platit $P(j\omega) = 0$, což by byl spor s podmínkou, že polynom $P(z)$ nemá kořeny ležící na imaginární ose.

Tento rozbor nám umožňuje zformulovat Michajlovovo kritérium v následujícím, snadno ověřitelném tvaru:

Jestliže polynom $P(z)$ nemá kořeny na imaginární ose, pak nutnou a postačující podmínkou pro existenci kořenů $P(z)$ pouze se zápornou reálnou částí je, aby:

- 1) Při rostoucím $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$ se vektor $P(j\omega)$ pohyboval proti směru pohybu hodinových ručiček.

- 2) Všechny kořeny rovnic $u(\omega) = 0, v(\omega) = 0$ byly reálné a navzájem se střídaly. (Tj. mezi dvěma následujícími kořeny jedné rovnice musí ležet jeden kořen druhé rovnice.)

Jestliže všechny koeficienty polynomu $P(z)$ jsou kladné, stačí ověřit pouze podmínku 2).

Na závěr zdůrazněme, že výše uvedená kritéria stability pro systémy lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu platí vzhledem k „ekvivalenci“ systémů lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu a lineárních diferenciálních rovnic n -tého řádu (viz kapitola (5.1)) i pro vyšetřování stability lineárních diferenciálních rovnic n -tého řádu.

Příklad 5.50. Pomocí Michajlovova kritéria zjistěte, zda je stabilní diferenciální rovnice

$$x^{(4)} + x''' + 10x'' + 4x' + 9x = 0.$$

Řešení. Charakteristická rovnice je tvaru

$$P(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + 10\lambda^2 + 4\lambda + 9 = 0$$

Tedy $P(j\omega) = \omega^4 - 10\omega^2 + 9 - j(\omega^3 - 4\omega)$.

Odtud

$$\begin{aligned} u(\omega) &= \omega^4 - 10\omega^2 + 9 = 0 &\Rightarrow \omega_{1,2} = \pm 1, \omega_{3,4} = \pm 3 \\ v(\omega) &= -\omega^3 + 4\omega = 0 &\Rightarrow \omega_1 = 0, \omega_{2,3} = \pm 2 \end{aligned}$$

Stačí nám uvažovat pouze kořeny z intervalu $\langle 0, \infty \rangle$. Vidíme, že všechny jsou reálné a navzájem se střídají, z čehož plyne, že polynom $P(\lambda)$ je hurwitzovský, a tedy vyšetřovaná rovnice je asymptoticky stabilní. \square

Bude doplněno o další příklady později na základě zkušenosti získaných v rámci testování výstupu.

Maplety

Odkaz na maplety:

1. [řešení diferenciálních rovnic](#),
2. [exponenciální matice](#),
3. [vlastní čísla](#).

Cvičení

1. Řešte uvedené systémy eliminační metodou

a)
$$\begin{aligned} x_1' &= 4x_1 - 2x_2 \\ x_2' &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1' &= -3x_1 + 2x_2 \\ x_2' &= -2x_1 + x_2 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 \\ x_2' &= -2x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

$$\text{d) } \begin{aligned} x_1' &= 2x_1 - x_2 + 2 \\ x_2' &= 4x_1 - 2x_2 + 2 \end{aligned}$$

$$\text{e) } \begin{aligned} x_1' &= 3x_1 + 2x_2 + 4e^{5t} \\ x_2' &= x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

$$\text{f) } \begin{aligned} x_1' &= 2x_1 - x_2 \\ x_2' &= -x_1 + 2x_2 - 5e^t \sin t \end{aligned}$$

$$\text{g) } \begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2' &= x_1 + x_2 - x_3 \\ x_3' &= -x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

$$\text{h) } \begin{aligned} x_1' &= -x_1 - x_2 + t^2 \\ x_2' &= -x_2 - x_3 \\ x_3' &= -x_3 + t \end{aligned}$$

$$\text{i) } \begin{aligned} 6x_1' &= x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 10e^t \\ 2x_2' &= -x_1 - x_2 + x_3 \\ 3x_3' &= x_1 - 2x_2 + x_3 + e^t \end{aligned}$$

2. Metodou variace konstant řešte následující systémy

$$\text{a) } \begin{aligned} x_1' &= -3x_1 - 4x_2 + 2t & x_1(0) &= 0 \\ x_2' &= x_1 + x_2 + t & x_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \begin{aligned} x_1' &= x_2 + \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ x_2' &= -x_1 + \operatorname{tg} t \end{aligned}$$

$$\text{c) } \begin{aligned} x_1' &= -x_1 + 2x_2 \\ x_2' &= -3x_1 + 4x_2 + \frac{e^{3t}}{e^{2t} + 1} \end{aligned}$$

$$\text{d) } \begin{aligned} x_1' &= -4x_1 - 2x_2 + \frac{2}{e^t - 1} & x_1(\ln 2) &= 0 \\ x_2' &= 6x_1 + 3x_2 - \frac{3}{e^t - 1} & x_2(\ln 2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } x'_1 &= x_1 - 2x_2 + e^t \\ x'_2 &= -3x_1 + 2x_2 + te^t \\ \text{f) } x'_1 &= -x_1 - x_2 + t^2 \\ x'_2 &= -x_2 - x_3 + 2t \\ x'_3 &= -x_3 + t \end{aligned}$$

3. Metodou charakteristických čísel řešte dané systémy

$$\text{a) } \begin{aligned} x'_1 &= 2x_1 - 3x_2 \\ x'_2 &= x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \begin{aligned} x'_1 &= 2x_1 + x_2 \\ x'_2 &= -x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \begin{aligned} x'_1 &= x_1 + x_2 \\ x'_2 &= -2x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

$$\text{d) } \begin{aligned} x'_1 &= x_1 - x_2 - x_3 \\ x'_2 &= x_1 + x_2 \\ x'_3 &= 3x_1 + x_3 \end{aligned}$$

$$\text{e) } \begin{aligned} x'_1 &= x_1 - x_2 + x_3 \\ x'_2 &= x_1 + x_2 - x_3 \\ x'_3 &= -x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

$$\text{f) } \begin{aligned} x'_1 &= -x_2 - x_3 \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \end{aligned}$$

$$\text{g) } \begin{aligned} x'_1 &= -x_2 + x_3 \\ x'_2 &= -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \\ x'_3 &= 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ x'_4 &= 2x_2 - 2x_3 \end{aligned}$$

4. Metodou neurčitých koeficientů vypočtete partikulární řešení systémů

$$\text{a) } \begin{aligned} x'_1 &= 2x_1 + 4x_2 - 8 \\ x'_2 &= 3x_1 + 6x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x'_1 &= 3x_1 + 2x_2 + 4e^{5t} \\ x'_2 &= x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x'_1 &= 2x_1 - x_2 \\ x'_2 &= -x_1 + 2x_2 - 5e^t \sin t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } x'_1 &= 2x_1 + 3x_2 + 5t \\ x'_2 &= 3x_1 + 2x_2 + 8e^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } x'_1 &= x_2 + \sin t \\ x'_2 &= -x_1 + \cos t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } x'_1 &= x_1 - x_2 \\ x'_2 &= x_2 - x_3 \\ x'_3 &= -x_1 + x_3 + t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } 6x'_1 &= x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 10e^t \\ 2x'_2 &= -x_1 - x_2 + x_3 \\ 3x'_3 &= x_1 - 2x_2 + x_3 + e^t \end{aligned}$$

5. Vyšetřete z hlediska stability triviální řešení systémů:

$$\begin{aligned} \text{a) } x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= -2x_1 - 3x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= 3x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x'_1 &= -3x_2 \\ x'_2 &= 3x_1 \end{aligned}$$

6. Pomocí Hurwitzova kritéria rozhodněte o asymptotické stabilitě následujících lineárních diferenciálních rovnic a systémů lineárních diferenciálních rovnic.

$$\begin{aligned} \text{a) } x'_1 &= 3x_2 \\ x'_2 &= -3x_1 - 5x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= -x_3 \\ x'_3 &= x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{aligned}$$

- c) $x_1' = -x_2$
 $x_2' = x_3$
 $x_3' = x_1 - x_2 - 2x_3$
- d) $x^{(4)} + 4x''' + 6x'' + 8x' + x = 0$
- e) $x^{(4)} + 5x'' + 9x = 0$

7. Michajlovovým kritériem vyšetřete stabilitu následujících systémů lineárních diferenciálních rovnic a lineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů.

- a) $x_1' = x_2$
 $x_2' = x_3$
 $x_3' = x_1$
- b) $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$
- c) $x_1' = x_2$
 $x_2' = x_3$
 $x_3' = x_4$
 $x_4' = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 - 2x_4$
- d) $y^{(5)} + y^{(4)} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0$

Výsledky

1. a) $x_1 = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$
 $x_2 = c_1 e^{2t} + \frac{1}{2} c_2 e^{3t}$
- b) $x_1 = e^{-t}(c_1 + 2c_2 t)$
 $x_2 = e^{-t}(c_1 + c_2(1 + 2t))$
- c) $x_1 = e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$
 $x_2 = e^{2t} c_1 (\cos t - \sin t) + e^{2t} c_2 (\cos t + \sin t)$
- d) $x_1 = c_1 t + c_2 + t^2 + 2t$
 $x_2 = c_1(2t - 1) + 2c_2 + 2t^2 + 2t$
- e) $x_1 = c_1 e^t + 2c_2 e^{4t} + 3e^{5t}$
 $x_2 = -c_1 e^t + c_2 e^{4t} + e^{5t}$
- f) $x_1 = c_1 e^t + c_2 e^{3t} + e^t(2 \cos t - \sin t)$
 $x_2 = c_1 e^t - c_2 e^{3t} + e^t(2 \cos t + \sin t)$
- g) $x_1 = (c_1 + c_2 t)e^t + c_2 e^{2t}$
 $x_2 = c_1 e^t + c_2(t - 2)e^t$
 $x_3 = c_1 e^t + c_2(t - 1)e^t + c_3 e^{2t}$

$$\begin{aligned} x_1 &= -e^{-t}(c_1 t + \frac{1}{2}c_2 t^2 - c_3) + t^2 - t + 1 \\ \text{h) } x_2 &= e^{-t}(c_1 + c_2 t) - t + 2 \\ x_3 &= -c_2 e^{-t} + t - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t + e^t \\ \text{i) } x_2 &= 2c_1 - \frac{1}{2}c_2(\cos t + \sin t) + \frac{1}{2}c_3(\cos t - \sin t) \\ x_3 &= 3c_1 + \frac{1}{2}c_2(\sin t - \cos t) - \frac{1}{2}c_3(\cos t + \sin t) + e^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ a) } x_1 &= 14(1 - e^{-t}) - 2t(3 + 4e^{-t}) \\ x_2 &= -9(1 - e^{-t}) + t(5 + 4e^{-t}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 \cos t + c_2 \sin t + \operatorname{tg} t \\ \text{b) } x_2 &= -c_1 \sin t + c_2 \cos t + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} - e^t \ln(e^{2t} + 1) + 2e^{2t} \operatorname{arctg} e^t \\ \text{c) } x_2 &= c_1 e^t + 3c_2 e^{2t} - e^t \ln(e^{2t} + 1) + 3e^{2t} \operatorname{arctg} e^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 2e^{-t} \ln(e^t - 1) \\ \text{d) } x_2 &= -3e^{-t} \ln(e^t - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 2c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t} + \frac{1}{9}(3t + 1)e^t \\ \text{e) } x_2 &= -3c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t} + \frac{1}{3}e^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-t}(c_1 t^2 + c_2 t + c_3) + t^2 - 3t + 3 \\ \text{f) } x_2 &= e^{-t}(-2c_1 t - c_2) + t \\ x_3 &= 2c_1 e^{-t} + t - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ a) } x_1 &= 3c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ x_2 &= c_1 e^t + c_2 e^{-t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= (c_1 + c_2 t)e^{3t} \\ \text{b) } x_2 &= (c_1 + c_2(1 + t))e^{3t} \end{aligned}$$

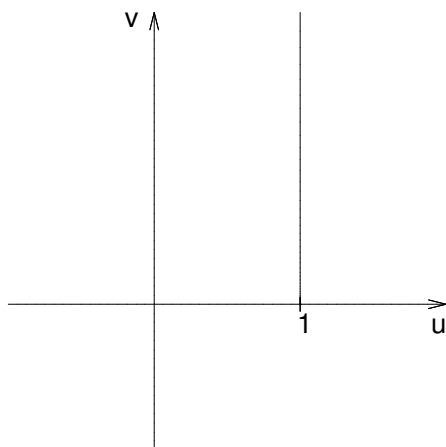
$$\begin{aligned} x_1 &= e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) \\ \text{c) } x_2 &= e^{2t}(c_1(\cos t - \sin t) + c_2(\cos t + \sin t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= (2c_2 \sin 2t + 2c_3 \cos 2t)e^t \\ \text{d) } x_2 &= (c_1 - c_2 \cos 2t + c_3 \sin 2t)e^t \\ x_3 &= (-c_1 - 3c_2 \cos 2t + 3c_3 \sin 2t)e^t \end{aligned}$$

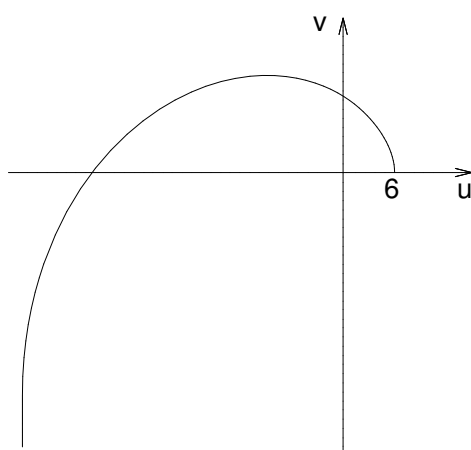
$$\begin{aligned} x_1 &= (c_1 + c_2 t)e^t + c_3 e^{2t} \\ \text{e) } x_2 &= c_1 e^t + c_2(t - 2)e^t \\ x_3 &= c_1 e^t + c_2(t - 1)e^t + c_3 e^{2t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 + c_2 e^t + c_3 e^t \\ \text{f) } x_2 &= -c_2 e^t \\ x_3 &= -c_3 e^t \end{aligned}$$

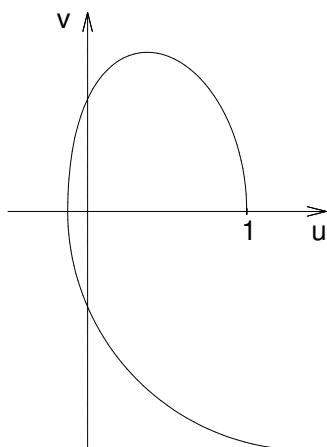
- $$\begin{aligned}x_1 &= c_1(1 + 2t^2) + 2c_2t + c_3 + c_4 \\x_2 &= -2c_1t - c_2 + c_4 \\g) \quad x_3 &= 2c_1t + c_2 + c_4 \\x_4 &= -4c_1t^2 - 4c_2t - 2c_3\end{aligned}$$
4. a) $\mathbf{u}_0(t) = (-6t + 1, 3t)^T$
b) $\mathbf{u}_0(t) = (3e^{5t}, e^{5t})^T$
c) $\mathbf{u}_0(t) = (e^t(2 \cos t - \sin t), e^t(2 \cos t + \sin t))^T$
d) $\mathbf{u}_0(t) = (-3e^t + 2t - \frac{13}{5}, e^t - 3t + \frac{12}{5})^T$
e) $\mathbf{u}_0(t) = (t \sin t, t \cos t)^T$
f) $\mathbf{u}_0(t) = (\frac{1}{6}(t^2 + 2t + 2), \frac{1}{6}t^2, \frac{1}{6}(t^2 - 2t))^T$
g) $\mathbf{u}_0(t) = (e^t, 0, e^t)^T$
5. a) Stejně asymptoticky stabilní
b) Nestabilní
c) Stejně asymptoticky stabilní
6. a) Asymptoticky stabilní
b) Asymptoticky stabilní
c) Asymptoticky nestabilní
d) Asymptoticky stabilní
e) Asymptoticky nestabilní
7. a) Nestabilní, viz obrázek (5.11)
b) Asymptoticky stabilní, viz obrázek (5.12)
c) Asymptoticky stabilní, viz obrázek (5.13)
d) Asymptoticky stabilní, viz obrázek (5.14)



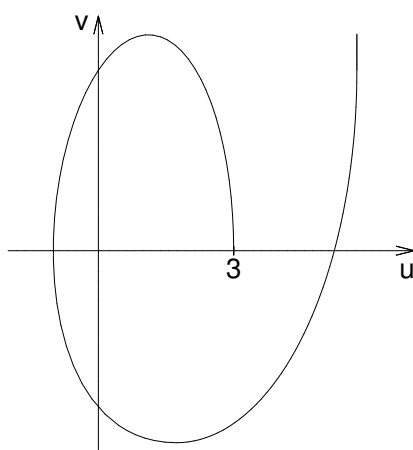
Obr. 5.11: Michajlovova křivka z příkladu (7a))



Obr. 5.12: Michajlovova křivka z příkladu (7b))



Obr. 5.13: Michajlovova křivka z příkladu (7c))



Obr. 5.14: Michajlovova křivka z příkladu (7d))

Literatura

- [1] Brabec, J., Hrůza, B.: *Matematická analýza II*, SNTL/ALFA, Praha, 1986
- [2] Brabec, J.: *Matematická analýza II/2*, ČVUT Praha, 1980. Učební text.
- [3] Budak, B. M., Fomin, S. V.: *Multiple Integrals, Field Theory and Series*, Mir, Moskva, 1973
- [4] Diblík, J., Růžičková, M.: *Obyčejné diferenciální rovnice*, EDIS-vydavatelstvo ŽU, 2008.
- [5] Krupková, V.: *Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných*, VUT v Brně, nakladatelství VUTIUM, 1999. Učební text.
- [6] Kuben, J.: *Obyčejné diferenciální rovnice*, VA Brno, 1995. Učební text.
- [7] Kurzweil, J.: *Obyčejné diferenciální rovnice*, SNTL, Praha 1978.
- [8] Medveď, M.: *Dynamické systémy*, VEDA, Bratislava, 1988.
- [9] Nagy, J., Nováková, E., Vacek, M.: *Vektorová analýza*, Matematika pro vysoké školy technické sešit VIII. SNTL Praha, 1984.
- [10] Nagy, J.: *Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic*, Matematika pro vysoké školy technické sešit XV. SNTL Praha, 1980.
- [11] Nagy, J.: *Stabilita řešení obyčejných diferenciálních rovnic*, Matematika pro vysoké školy technické sešit XVI. SNTL Praha, 1980.
- [12] Pták, P.: *Diferenciální rovnice, Laplaceova transformace*, ČVUT v Praze, 1999.
- [13] Ráb, M.: *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*, MU Brno, PřF, 1998.
- [14] Sikorski, R.: *Diferenciální a integrální počet funkce více proměnných*, ACADEMIA Praha, 1973.