VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

Statistika, stochastické procesy, operační výzkum

(Elektrotechnika a komunikační technologie)

Jaromír Baštinec

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Ústav matematiky FEKT VUT v Brně, 2014

http://www.umat.feec.vutbr.cz

Tento text byl vytvořen v rámci realizace projektu CZ.1.07/2.2.00/15.0156,
Inovace výuky matematických předmětů v rámci studijních programů FEKT a FIT VUT v Brně.

Součástí tohoto učebního textu jsou odkazy na tzv. maplety, tj. programy vytvořené v prostředí Maple. Tyto odkazy jsou v textu zvýrazněny barvou, příp. uvozeny slovem *maplet*. Maplety ke svému běhu nevyžadují software Maple – je však nutné mít na klientském počítači nainstalováno prostředí Java a nastavenou vhodnou úroveň zabezpečení prohlížeče i prostředí Java. Po kliknutí na odkaz mapletu se v závislosti na softwarovém prostředí klientského počítače zobrazí různá hlášení o zabezpečení – všechny dialogy je třeba povolit a spouštění požadovaných prvků neblokovat.

Součástí tohoto učebního textu jsou odkazy na tzv. webMathematica applety, tj. programy vytvořené v prostředí webMathematica. Tyto odkazy jsou v textu zvýrazněny barvou, příp. uvozeny slovy *matematický software*, *webMathematica applet* apod. Applety ke svému běhu nevyžadují software Mathematica – je však nutné mít na klientském počítači nainstalováno prostředí Java a nastavenou vhodnou úroveň zabezpečení prohlížeče i prostředí Java. Po kliknutí na odkaz appletu se v závislosti na softwarovém prostředí klientského počítače mohou zobrazit různá hlášení o zabezpečení – všechny dialogy je třeba povolit a spouštění požadovaných prvků neblokovat.

Doplňující součástí tohoto učebního textu jsou příklady zpracované v elektronické bance příkladů.

Doplňující součástí tohoto učebního textu jsou příklady zpracované v elektronické bance příkladů.

Obsah

Úvod

Motto:
Učitel Vám může pootevřít dvéře,
vstoupit už musíte sami.

Čínské přísloví

Předmluva

Studijní materiál, který máte v rukou je nově zpracovaný materiál pro předmět Statistika, stochastické procesy, operační výzkum, který je určet pro studentky a studenty doktorských studijnch programů na fakultě elektrotechniky a komunikačních technologií Vysokého učení technického v Brně.

Na základě zkušeností s pilotním ročníkem bylo do textu zařazeno i důkladné opakování potřebného matematického aparátu a teorie pravděpodobností. Až po vybudování těchto základů bylo přistoupeno k výkladu jednotlivých částí předmětu.

Protože osnova předmětu je velmi obsáhlá, tak tomu odpovídá i rozsah studijního materiálu. Byla zde snaha zahrnout do textu vše potřebné nejen pro studium daného předmětu, ale i pro případné pozdější aplikace a použití pro řešení konkrétních technických problémů.

Autor uvítá Vaše připomínky a návrhy.

V Brně 31. 3. 2014 Autor

Označení

$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbb{I}$	množina iracionálních čísel
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
(a,b)	otevřený interval od a do b
$\langle a,b\rangle$	uzavřený interval od a do b
$[a,b]$	jiné označení pro uzavřený interval od a do b,
$P_n(x)$	polynom n-tého stupně proměnné x
$A_{m,n}$	matice typu m,n (s m řádky a n sloupci)
$A=(a_{ij})$	matice s prvky a_{ij}
I	jednotková matice
$\mathcal{O}$	nulová matice
$det\,A=\lvert A\rvert$	determinant matice A
A^{-1}	matice inverzní k matici A
$adj\,A$	matice adjungovaná k matici A
A_{ks}	algebraický doplněk prvku a_{ks}
$hod\,(A)$	hodnost matice A
$(\mathbb{R}^n,+,.)$	vektorový prostor všech uspořádaných n-tic
$\dim P$	dimenze prostoru P.
$a\cdot a$	skalární součin vektorů a,b
$\lVert x\rVert$	norma vektoru x
$\langle A\rangle$	lineární obal množiny A
$M_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}$	matice přechodu od báze $\mathcal{A}$ k bázi $\mathcal{A}'$
$a\perp b$	vektor a je ortogonální na vektor b
$f\vert_V=g$	zúžení funkce na podmnožinu
$A\times B$	kartézský součim množin A,B
$a\times b$	vektorový součin vektorů a,b
$[a,b,c]$	smíšený součin vektorů a,b,c
$\lVert A\rVert$	míra množiny A
$\square$	konec důkazu
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$	posloupnost prvků x_n
$A\cap B$	průnik množin A,B
$A\cup B$	sjednocení množin A,B
$\emptyset$	prázdná množina, jev nemožný
I	jev jistý
$\bar{A}$	jev opačný k jevu A
μ	průměr základního souboru
σ^2	rozptyl základního souboru
$\bar{x}$	výběrový průměr
s^2	výběrový rozptyl
s	výběrová směrodatná odchylka
m_k	obecný moment k-tého řádu
M_k	centrální moment k-tého řádu
C	kovariace
R	koeficient korelace
sgn	$\operatorname{sgn} x=0$ pro $x=0$, $\operatorname{sgn} x=1$ pro $x>0$, $\operatorname{sgn} x=-1$ pro $x<0$.

1 Pravděpodobnost

Průvodce studiem

Se základy teorie pravděpodobnosti jste se seznámili v předmětu Matematika 3. Protože budeme potřebovat pravděpodobnost v průběhu celeho kurzu, zařadili jsme zde důkladné opakování.

Nejdříve si řekneme co jsou to jevy, ketré budeme studovat, zavedeme si klasickou i axiomatickou pravděpodobnost, ukážeme si použití při výpočtech pravděpodobností.

Potom si nadefinujeme náhodnou veličinu a budeme dále studovat její vlastnosti.

Uvedeme si nejčastěji používaná rozdělění a to jak diskrétní, tak i spojitá. V závěru se seznámíme s limitními větami, které nám mohou dobře posloužit při nahrazení jednoho rozdělení jiným, se ketrým se bude lépe počítat.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- Řešit základní úlohy z pravděpodobnosti.
- Pracovat s náhodnou veličinou a jejími charakteristikami.
- Zvládát základní rozdělení a práci s nimi.
- Pracovat s tabulkami hodnot vybraných náhodných veličin.

1.1 Jevy a jejich vlastnosti

Definice 1.1. Na neprázdné množině B definujme operace $\cap$ (průnik) a $\cup$ (sjednocení), které splňují podmínky:

1.

a)	$a \cap b = b \cap a,$	$a \cup b = b \cup a$
b)	$a \cap a = a,$	$a \cup a = a$
c)	$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c),$	$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$
d)	$a \cup (a \cap b) = a,$	$a \cap (a \cup b) = a$
e)	$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c),$	$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$

2. V množině B existuje největší prvek I a nejmenší prvek $\emptyset$, pro které platí:
   a) $a \cap \emptyset = \emptyset, \quad a \cup \emptyset = a$
   b) $a \cap I = a, \quad a \cup I = I$

3. Ke každému prvku $a \in B$ existuje *komplement* $\bar{a}$, pro který platí:

   $a \cap \bar{a} = \emptyset, \quad a \cup \bar{a} = I$

Potom $\mathcal{B} = (B, \cap, \cup, \emptyset, I, \bar{\ })$ nazveme *Booleovou algebrou*

Definice 1.2. *Jevem* nazveme výsledek provedeného pokusu.

Jevy mohou být jisté, náhodné, nemožné. Je to dělení relativní, vždy vztažené na daný soubor podmínek.

Definice 1.3. *Jistým jevem* nazveme jev, který za daného systému podmínek musí vždy nastat. Značíme jej I. *Nemožným jevem* nazveme jev, který za daného systému podmínek nastat nemůže. Značíme jej $\emptyset$.

Příklad 1.4. Při hodu hrací kostkou bude:

jev jistý	-	padne kladný počet bodů,
jev náhodný	-	počet bodů,
jev nemožný	-	padne záporný počet bodů.

1.2 Definice, základní vlastnosti, příklady

Definice 1.5. Jev B je *následkem* jevu A (jev A je částí jevu B), jestliže při nastoupení jevu A nastupuje vždy i jev B.

Označení: $A \subset B$.

Věta 1.6. *Pro libovolné jevy A, B, C platí:*

1. $A \subset A$.

2. $A \subset B, B \subset C \Longrightarrow A \subset C$.

Příklad 1.7. A - při hodu kostkou padne čtyřka.
B - při hodu kostkou padne sudé číslo,
potom je jev $A \subset B$.

Definice 1.8. Jestliže současně platí $A \subset B$ a $B \subset A$, pak jsou jevy A, B *ekvivalentní* a píšeme $A = B$.

Věta 1.9. *Pro libovolné jevy A, B, C platí:*

1. $A = A$.

2. $A = B \Longleftrightarrow B = A$.
3. $A = B, B = C \Longrightarrow A = C$.

Definice 1.10. *Průnik* C jevů A, B se nazývá jev ekvivalentní se současným nastoupením jevů A, B. Značíme $C = A \cap B$.

Věta 1.11. *Pro libovolné jevy A, B, C platí:*

1. $A \cap A = A$.
2. $A \cap B = B \cap A$.
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
4. $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$.
5. $(A \cap B) \subset A$.
6. $(A \cap B) \subset B$.
7. $C \subset A, C \subset B \Longrightarrow C \subset (A \cap B)$.

Definice 1.12. *Sjednocením* jevů A, B se nazývá jev C, ekvivalentní s nastoupením alespoň jednoho z jevů A, B. Označení $C = A \cup B$.

Věta 1.13. *Pro libovolné jevy A, B, C platí:*

1. $A \cup A = A$.
2. $A \cup B = B \cup A$.
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
4. $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$.
5. $A \subset A \cup B$.
6. $B \subset A \cup B$.
7. $A \subset C, B \subset C \Rightarrow (A \cup B) \subset C$.

Věta 1.14. *Pro libovolný jev A platí:*

1. $\emptyset \subset A, A \subset I$.
2. $\emptyset \cap A = \emptyset, I \cap A = A$.
3. $\emptyset \cup A = A, I \cup A = I$.

Definice 1.15. *Jevem opačným* k jevu A rozumíme jev ekvivalentní s tím, že jev A nenastoupí. Označujeme jej $\bar{A}$.

Věta 1.16. *Pro libovolný jev A platí:*

1. $\overline{(\bar{A})} = A$.
2. $A \cup \bar{A} = I, A \cap \bar{A} = \emptyset$.

Věta 1.17. *Pro libovolné jevy A, B platí de Morganovy vzorce:*

1. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.
2. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

1.3 Elementární jevy

Definice 1.18. *Elementární jevy* jsou takové jevy, různé od jevu $\emptyset$, které se nedají rozložit na další jevy různé od jevu $\emptyset$.
Jev E je elementární, když ze vztahu $E = A \cup B$ plyne $E = A$ nebo $E = B$.
Jestliže máme množinu elementárních jevů $\{E_i, i \in J\}$, pro kterou platí $\bigcup\limits_{i \in J} E_i = I$, pak mluvíme o *úplném systému elementárních jevů.*

Definice 1.19. Jevy A, B se nazývají *disjunktní* (navzájem neslučitelné), nemohou-li nastat současně, tzn. $A \cap B = \emptyset$.

Věta 1.20. *Dva různé elementární jevy jsou navzájem disjunktní.*

Důkaz. Mějme dva různé elementární jevy E_1, E_2. Označme

$$X = E_1 \cap E_2,$$

$$Y = E_1 \cap \bar{E}_2,$$

$$Z = \bar{E}_1 \cap E_2.$$

Potom

$$X \cup Z = E_2,$$

$$X \cup Y = E_1$$

a podle definice 1.18 proto platí, že buď $X = E_1$ a nebo $Y = E_1$.
a) Nechť $Y = E_1$, potom

$$E_1 = E_1 \cap \bar{E}_2,$$

$$X = E_1 \cap E_2,$$

dosazením dostaneme

$$X = (E_1 \cap \bar{E}_2) \cap E_2 = E_1 \cap \emptyset = \emptyset.$$

b) Nechť $X = E_1$, potom

$$E_1 = E_1 \cap E_2 \Rightarrow E_1 \subset E_2.$$

A současně

$$X \cap Z = \emptyset \Rightarrow X = \emptyset.$$

□

1.4 Axiomatická definice pravděpodobnosti

Autorem axiomatické teorie pravděpodobnosti, přijaté dnes na celém světě, byl sovětský matematik A. N. Kolmogorov. Jeho teorie byla poprvé publikována v roce 1933 a je budována na základě teorie množin a teorie míry.

Věta 1.21. *Nechť M je množina jevů, pro kterou platí:*

1. $A, B \in M \Rightarrow A \cup B \in M, A \cap B \in M$,
2. $\emptyset \in M, I \in M$,
3. $A \in M \Rightarrow \bar{A} \in M$.

Potom $(M, \cup, \cap, \emptyset, I, ^{-})$ je Booleova algebra.

Definice 1.22. *σ-algebrou* nazýváme Booleovu algebru jevů v případě, že jevů může být nekonečně mnoho a platí, že ke každé posloupnosti jevů $\{A_1, A_2, \dots\}$ existuje jejich sjednocení $\bigcup\limits_i A_i$ a průnik $\bigcap\limits_i A_i$.

Definice 1.23. Označme M nějakou σ-algebru jevů. *Pravděpodobnost*, že za určité situace nastane jev $A \in M$ vyjadřuje hodnota funkce $p(A)$, která splňuje podmínky:

1. $p(A) \geq 0 \ \forall A \in M$,
2. $p(I) = 1$,
3. pro množinu navzájem disjunktních jevů $\{A_i\}, i \in J$, J je indexační množina, platí

$$p\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) = \sum_{i \in J} p(A_i).$$

Dvojici (M, p) budeme nazývat *pravděpodobnostním prostorem.*

Věta 1.24. *Nechť (M, p) je pravděpodobnostní prostor. Potom platí:*

1. *Jestliže* $A, B \in M, A \cap B = \emptyset \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
2. $p(\emptyset) = 0$.
3. $p(A) \leq 1$.
4. $p(A) = 1 - p(\bar{A})$.
5. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$,
6. $A \subset B \Longrightarrow p(A) \leq p(B)$.

1.5 Klasická pravděpodobnost

Věta 1.25. *Nechť (M, p) je pravděpodobnostní prostor, M je konečná σ-algebra, která obsahuje n elementárních jevů, tvořících úplný systém elementárních jevů*

$$\{E_i, i = 1, \ldots, n\} \text{ takově, že } p(E_1) = p(E_2) = \cdots = p(E_n) = \frac{1}{n}.$$

Nechť jev $A \in M$ lze rozložit na m navzájem různých elementárních jevů. Potom platí

$$p(A) = \frac{m}{n}.$$

Věta 1.26. *Věta o geometrické pravděpodobnosti.*
Nechť (M, p) je pravděpodobnostní prostor. Nechť σ-algebra jevů je systém podmnožin A množiny I, které mají míru $\|A\|$. Potom

$$p(A) = \frac{\|A\|}{\|I\|}.$$

1.6 Podmíněná pravděpodobnost

Definice 1.27. Nechť (M, p) je pravděpodobnostní prostor. Nechť nastoupil jev $B \in M$, $p(B) \neq 0$. *Podmíněnou pravděpodobností* jevu $A \in M$ za předpokladu, že jev B nastal nazveme výraz

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Poznámka 1.28. Jiné označení pro podmíněnou pravděpodobnost používané v literatuře je $p(A/B)$.

Věta 1.29. *Vlastnosti podmíněné pravděpodobnosti.*

1. $p_B(\emptyset) = 0$.
2. $p_B(B) = 1$.
3. $A \in M, A \cap B = \emptyset \Rightarrow p_B(A) = 0$.
4. $A \in M, B \subset A \Rightarrow p_B(A) = 1$.
5. $A \in M, B \subset A \Rightarrow p_A(B) = \dfrac{p(B)}{p(A)}$.
6. $p_I(A) = p(A)$.

Věta 1.30. *Nechť (M, p) je pravděpodobnostní prostor, $A, B \in M$. Potom pro pravděpodobnost průniku jevů A, B platí*

$$p(A \cap B) = p_B(A) \cdot p(B).$$

Věta 1.31. *Nechť (M, p) je pravděpodobnostní prostor, $A, B \in M, p(A) \neq 0, p(B) \neq 0$. Potom platí*

$$p_B(A) \cdot p(B) = p_A(B) \cdot p(A).$$

Věta 1.32. *Nechť (M, p) je pravděpodobnostní prostor, $A_i \in M, i = 1, \dots, n$. Pro výpočet pravděpodobnosti současného nastoupení n jevů platí*

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = p(A_1) \cdot p_{A_1}(A_2) \cdot p_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots p_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

1.7 Nezávislé jevy

Definice 1.33. Nechť (M, p) je pravděpodobnostní prostor. Jevy $A, B \in M$ jsou *nezávislé*, jestliže platí aspoň jedna z podmínek:

1. $p(B) = 0$ nebo $p_B(A) = p(A)$,
2. $p(A) = 0$ nebo $p_A(B) = p(B)$,

Podmínky 1. a 2. definice 1.33 jsou ekvivalentní. Při důkazech stačí proto prověřit platnost jen jedné z nich.

Věta 1.34. *Jevy $A, B \in M$ jsou nezávislé, právě tehdy, když platí*

$$p(A \cap B) = p(A)p(B). \tag{1.1}$$

Důkaz.
a) Nechť platí vztah (1.1).
Potom je-li $p(B) = 0$, jsou podle definice 1.33 jevy A, B nezávislé.
Je-li $p(B) \neq 0$, potom

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)p(B)}{p(B)} = p(A).$$

a podle definice 1.33 jsou jevy A, B nezávislé.
b) Nechť jsou jevy A, B nezávislé, potom je-li $p(B) = 0$ vztah (1.1) platí. Je-li $p(B) \neq 0$, potom

$$p(A) = p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \Rightarrow p(A \cap B) = p(A)p(B).$$

I v tomto případě vztah (1.1) platí. □

Definice 1.35. Nechť (M, p) je pravděpodobnostní prostor, $M_1 \subset M$. Jevy množiny M_1 jsou *navzájem nezávislé*, jestliže pro každý jev $A \in M_1$ platí, že je nezávislý na libovolném jevu podmnožiny $M_2 \subset \{M_1 \setminus \{A\}\} = M_1 \cap \bar{A}_1$.

Věta 1.36. *Nechť (M, p) je pravděpodobnostní prostor, $A_i \in M, i = 1, \dots, n$. Jestliže jevy množiny $\{A_1, \dots, A_n\}$ jsou navzájem nezávislé, potom*

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = p(A_1)p(A_2) \dots p(A_n).$$

Příklad 1.37. Házíme dvěma kostkami. Jev A_1 - padne liché číslo na první kostce, jev A_2 - padne liché číslo na druhé kostce, jev A_3 - součet na obou kostkách je sudé. Určete pravděpodobnosti jevů A_1, A_2, A_3 a jejich nezávislost.

Řešení.
$$p(A_1) = \frac{1}{2}, \quad p(A_2) = \frac{1}{2}, \quad p(A_3) = \frac{1}{2}.$$
$$p_{A_2}A_1 = \frac{p(A_1 \cap A_2)}{p(A_2)} = \frac{\frac{9}{36}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = p(A_1).$$
Jevy A_1, A_2 jsou nezávislé.
$$p_{A_3}A_1 = \frac{p(A_1 \cap A_3)}{p(A_3)} = \frac{\frac{9}{36}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = p(A_1).$$
Jevy A_1, A_3 jsou nezávislé.
$$p_{A_1 \cap A_2}A_3 = 1 \neq p(A_3).$$
Jevy A_1, A_2, A_3 jsou závislé. □

Věta 1.38. *Nechť (M, p) je pravděpodobnostní prostor. Pro každý jev $A \in M$ platí*

1. *$\emptyset, A$ jsou nezávislé jevy,*
2. *I, A jsou nezávislé jevy.*

Věta 1.39. *Jevy $A, B \in M$ jsou nezávislé, jsou-li nezávislé jevy $A, \bar{B}$ či $\bar{A}, B$ či $\bar{A}, \bar{B}$.*

1.8 Úplná pravděpodobnost

Věta 1.40. *O úplné pravděpodobnosti.*
Nechť (M, p) je pravděpodobnostní prostor a $\{B_1, \dots, B_n\}$ je úplný systém navzájem disjunktních jevů ze σ-algebry M, pro které platí $p(B_j) \neq 0, j = 1, \dots, n$. Potom pro libovolný jev $A \in M$ platí
$$p(A) = \sum_{j=1}^{n} p_{B_j}(A) \cdot p(B_j).$$

Příklad 1.41. Máme n klobouků a v každém je a bílých a b černých kuliček. Z prvního klobouku náhodně vyjmeme jednu kuličku a přendáme ji do druhého, poté z druhého klobouku přendáme jednu kuličku do třetího, atd., z $n-1$ klobouku přendáme jednu kuličku do posledního klobouku. Z posledního klobouku vyjmeme jednu kuličku. Určete pravděpodobnost, že bude bílá.

Řešení. Pravděpodobnost vytažení bílé kuličky z prvního klobouku je
$$p(B1) = \frac{a}{a+b}.$$

Pravděpodobnost vytažení bílé kuličky z druhého klobouku je podle věty 1.40 o úplné pravděpodobnosti

$$p(B2) = \left(\frac{a+1}{a+b+1}\right)\left(\frac{a}{a+b}\right) + \left(\frac{a}{a+b+1}\right)\left(\frac{b}{a+b}\right) =$$

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)\left(\frac{a+1}{a+b+1} + \frac{b}{a+b+1}\right) = \frac{a}{a+b}.$$

Máme tedy $p(B1) = p(B2)$. Pokračujeme dále po indukci a dostaneme

$$p(B1) = p(B2) = \cdots = p(Bn).$$

□

1.9 Bayesova věta

Věta 1.42. *Bayesova věta.*
Nechť (M, p) je pravděpodobnostní prostor a $\{B_1, \ldots, B_n\}$ je úplný systém navzájem disjunktních jevů ze σ-algebry M, pro které platí $p(B_j) \neq 0, j = 1, \ldots, n$. Potom pro libovolný jev $A \in M$, pro kterě platí $p(A) \neq 0$, platí Bayesův vzorec pro $k = 1, \ldots, n$

$$p_A(B_k) = \frac{p_{B_k}(A) \cdot p(B_k)}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_{B_j}(A) \cdot p(B_j)}.$$

Příklad 1.43. Ve skupině 10 studentů, kteří se dostavili ke zkoušce, jsou 3 připraveni výborně, 4 dobře , 2 průměrně a 1 špatně. Materiál ke zkoušce obsahuje 20 otázek. Výborně připravený student odpoví na všechny otázky, dobře připravený na 16, průměrně připravený na 10 a špatně připravený na 5. Náhodně vybraný student odpověděl správně na všechny tři náhodně zadané otázky. Určete pravděpodobnost, že šlo o špatně připraveného studenta.

Řešení. Použijeme Bayesův vzorec. Jev A – student odpověděl na všechny tři zadané otázky. Úplný systém disjunktních jevů je
H_1 – výborně připravený student,
H_2 – dobře připravený student,
H_3 – průměrně připravený student,
H_4 – špatně připravený student.

$$\begin{aligned} p_{H_1}(A) &= 1, \\ p_{H_2}(A) &= \frac{16}{20}\frac{15}{19}\frac{14}{18} \doteq 0.491, \\ p_{H_3}(A) &= \frac{10}{20}\frac{9}{19}\frac{8}{18} \doteq 0.105, \\ p_{H_4}(A) &= \frac{5}{20}\frac{4}{19}\frac{3}{18} \doteq 0.009. \\ p_A(H_4) &= \frac{p_{H_4}(A)p(H_4)}{\sum_{j=1}^{4} p_{H_j}(A)p(H_j)} \doteq 0.002. \end{aligned}$$

□

1.10 Opakované pokusy

Věta 1.44. *Bernoulliova posloupnost nezávislých pokusů.*
Provedeme n po sobě jdoucích pokusů, přičemž při každém pokusu může nebo nemusí nastat jev A. Nechť jsou výsledky pokusů na sobě nazávislé a nechť dále v každém z pokusů platí, že $p(A) = p, p(\bar{A}) = q = 1 - p$, neboli pravděpodobnost nastoupení jevu A je v každém pokusu stále stejná. Potom pravděpodobnost, že jev A nastane během n pokusů právě k-krát, $k \leq n$ je rovna

$$b(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Věta 1.45. *Věta o závislých pokusech*
Nechť je dán soubor N prvků, z nichž M vykazuje sledovaný znak a $N - M$ prvků tento znak nemá. Vybereme postupně náhodně n prvků, z nichž žádný nevracíme zpět. Pravděpodobnost toho, že vybereme právě k prvků majících sledovaný znak a $n - k$ prvků, které tento znak nemají (jev A) je rovna

$$p(A) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

1.11 Náhodná veličina

Věta 1.46. *Nechť U je σ-algebra číselných množin, generovaná intervaly $(-\infty, a), a \in \mathbb{R}$. Potom platí:*

1. $\langle a, +\infty) \in U \ \forall a \in \mathbb{R}$,
2. $(a, +\infty) \in U, \ (-\infty, a) \in U$,
3. $\langle a, b\rangle \in U, \ (a, b) \in U$,
4. $\{x\} \in U \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Definice 1.47. *Náhodná veličina* $\mathbb{X}$ je reálná funkce $\mathbb{X}(\omega)$ definovaná na pravděpodobnostním prostoru $(M, p), \omega \in M$, taková, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ je množina $\{\omega \in M | \mathbb{X}(\omega) < x\}$ náhodným jevem. T.j. hodnota náhodné veličiny je jednoznačně určena pokusem a $\forall x \in \mathbb{R}$ můžeme určit pravděpodobnost $p = p(\mathbb{X} < x)$.

Pomocí náhodné veličiny dosáhneme toho, že každý jev si promítneme na číselnou osu a můžeme studovat jeho vlastnosti nezávisle na podmínkách daného konkrétního pokusu, jehož výsledkem je sledovaný jev.

1.12 Distribuční funkce

Definice 1.48. Nechť $\mathbb{X}$ je náhodná veličina definovaná na (U, p). Funkci $F(x)$ definovanou vztahem

$$F(x) = p(\mathbb{X} \in (-\infty, x)) = p(\mathbb{X} < x)$$

nazveme *distribuční funkcí* náhodné veličiny $\mathbb{X}$.

Věta 1.49. *Vlastnosti distribuční funkce.*
Nechť $F(x)$ je distribuční funkce. Potom pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$.
2. *$F(x)$ je neklesající funkce.*
3. *$F(x)$ je spojitá zleva, tj.* $\lim_{h\to 0^-} F(x+h) = F(x)$.
4. $\lim_{x\to -\infty} F(x) = 0, \lim_{x\to +\infty} F(x) = 1$.
5. $p(\mathbb{X} = x) = \lim_{h\to 0^+} F(x+h) - F(x)$.
6. $p(x_1 \leq \mathbb{X} < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

1.13 Diskrétní a spojitá náhodná veličina

Definice 1.50. Nechť $F(x)$ je stupňovitá funkce, tzn. že existuje posloupnost $\{x_n\}, n = 1, 2, \ldots$ taková, že na intervalech $(x_n, x_{n+1}]$ je $F(x)$ konstantní. Potom $\mathbb{X}$ nazveme *diskrétní* náhodnou veličinou.
Nechť $F(x)$ je spojitá a po částech hladká na množině $\mathbb{R}$. Potom $\mathbb{X}$ nazveme *spojitou* náhodnou veličinou.

Důsledek 1.51. *V bodě x, kde je $F(x)$ spojitá platí $p(\mathbb{X} = x) = 0$.*

Věta 1.52. *Nechť je dána funkce $F(x)$ definovaná na $\mathbb{R}$. Splňuje-li $F(x)$ podmínky $1 - 4$ věty 1.49, pak existuje náhodná veličina $\mathbb{X}$, definovaná na (U, p) s distribuční funkcí $F(x)$.*

1.14 Vlastnosti náhodné veličiny

Definice 1.53. Nechť $\mathbb{X}$ je diskrétní náhodná veličina nabývající hodnot z konečné, nebo spočetné, číselné množiny S (množina S je množina bodů nespojitosti distribuční funkce $F(x)$). Na množině S definujeme funkci $f(x_i)$ vztahem

$$f(x_i) = p(\mathbb{X} = x_i), \ \forall x_i \in S, \ i = 1, 2, \ldots.$$

Potom funkci $f(x)$ nazveme *frekvenční funkcí* náhodné veličiny $\mathbb{X}$.

Věta 1.54. *Pro distribuční funkci $F(x)$ diskrétní náhodné veličiny $\mathbb{X}$ nabývající hodnot z množiny S a frekvenční funkci $f(x_i)$ platí*

$$F(x) = \sum_{x_i \in S,\, x_i < x} f(x_i).$$

Věta 1.55. *Pro frekvenční funkci $f(x)$ diskrétní náhodné veličiny $\mathbb{X}$ nabývající hodnot z množiny S platí*

$$\sum_{x_i \in S} f(x_i) = 1.$$

Příklad 1.56. Sestavte frekvenční funkci pro Bernoulliovu posloupnost nezávislých jevů pro $n = 5$ a $p = 0.2$.

Řešení. Podle věty 1.44 máme $f(k) = b(n,p,k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. Po dosazení dostaneme

$$f(k) = b(5, 0.2, k) = \binom{5}{k} 0.2^k 0.8^{5-k}, \; k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

k	0	1	2	3	4	5
$f(k)$	0.32768	0.40960	0.20480	0.05120	0.00640	0.00032

Tím máme určenou hledanou frekvenční funkci. □

Definice 1.57. Nechť $\mathbb{X}$ je spojitá náhodná veličina s distribuční funkcí $F(x)$. *Funkcí hustoty pravděpodobnosti* náhodné veličiny $\mathbb{X}$ nazveme reálnou funkci $f(x)$ pro kterou platí:

1. $f(x) \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$,
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$,
3. $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Důsledek 1.58. *1. V bodě x, kde je $F(x)$ spojitá, platí $f(x) = F'(x)$.*

2. Funkce hustoty $f(x)$ je spojitá, nebo po částech spojitá.

3. Platí $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

Příklad 1.59. Máme zadanou funkci

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in \langle a, b \rangle, \\ 0, & x \notin \langle a, b \rangle. \end{cases}$$

Ověřte, že se jedná o funkci hustoty některé náhodné veličiny a určete její distribuční funkci.

Řešení.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a} x \Big|_a^b = \frac{1}{b-a}(b-a) = 1.$$

Protože funkce $f(x)$ je nezáporná, jedná se o funkci hustoty.

Pro distribuční funkci platí

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Po integraci dostaneme

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

□

Věta 1.60. *Pro spojitou náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ s distribuční funkcí $F(x)$ a pro libovolná reálná čísla $x_1, x_2, x_1 < x_2$ platí*

$$p(x_1 < \mathbb{X} < x_2) = p(x_1 \leq \mathbb{X} \leq x_2) = p(x_1 < \mathbb{X} \leq x_2) = p(x_1 \leq \mathbb{X} < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Věta 1.61. *Pro spojitou náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ s funkcí hustoty $f(x)$ a pro libovolná reálná čísla $x_1, x_2, x_1 < x_2$ platí*

$$p(x_1 \leq \mathbb{X} \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt.$$

Důsledek 1.62. *Funkce hustoty $f(x)$ je buď spojitá a nebo po částech spojitá funkce. Dále platí $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.*

1.15 Vícerozměrná náhodná veličina

Definice 1.63. Nechť $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \ldots, \mathbb{X}_n$ jsou náhodné veličiny definované na pravděpodobnostních prostorech $(U_1, p_1), (U_2, p_2), \ldots, (U_n, p_n)$. Nechť všechny veličiny jsou stejného typu (buď diskrétní a nebo spojité). Potom n-tici $(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \ldots, \mathbb{X}_n)$ nazveme *n-rozměrnou náhodnou veličinou.*

V případě $n = 2$ dostaneme dvourozměrnou náhodnou veličinu, kterou budeme označovat jako dvojici $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Definice 1.64. Nechť $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ je dvourozměrná náhodná veličina. *Simultání distribuční funkcí* $F(x, y)$ budeme nazývat funkci definovanou vztahem

$$F(x, y) = p(\mathbb{X} < x \wedge \mathbb{Y} < y).$$

Věta 1.65. *Simultání distribuční funkce $F(x, y)$ dvourozměrné náhodné veličiny $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ má následující vlastnosti:*

1. $0 \leq F(x, y) \leq 1$,
2. $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2 \Longrightarrow F(x_1, y_1) \leq F(x_2, y_2)$,
3. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0^- \\ y\to y_0^-}} F(x, y) = F(x_0, y_0)$,

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = \lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F(x,y) = 0,$

5. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} F(x,y) = 1.$

Definice 1.66. Jsou-li u dvourozměrné náhodné veličiny $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ obě veličiny $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ diskrétní, pak hovoříme o diskrétní dvourozměrné náhodné veličině, která nabývá nejvýše spočetně mnoha hodnot tvořících množinu $T = \{(x_i,y_j), i = 1,2,\dots, j = 1,2,\dots\}$. Na T definujeme *simultání frekvenční funkci*

$$f(x_i,y_j) = p(\mathbb{X} = x_i, \mathbb{Y} = y_j).$$

Věta 1.67. *Pro dvourozměrnou diskrétní náhodnou veličinu platí*

$$F(x,y) = \sum_{\substack{x_i<x\\ y_j<y}} f(x_i,y_j),$$

$$\sum_{(x_i,y_j)\in T} f(x_i,y_j) = 1.$$

Definice 1.68. Jsou-li u dvourozměrné náhodné veličiny $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ obě veličiny $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ spojité, pak hovoříme o spojité dvourozměrné náhodné veličině. *Simultání funkce hustoty* $f(x,y)$ je funkce pro kterou platí

1. $f(x,y) \geq 0 \ \forall x,y \in \mathbb{R}$,
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$,
3. $F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{y}\left(\int\limits_{-\infty}^{x} f(u,v)du\right)dv.$

Věta 1.69. *Pro dvourozměrnou spojitou náhodnou veličinu platí*

1. $p(\mathbb{X} = x, \mathbb{Y} = y) = 0 \ \forall x,y \in \mathbb{R}$,

2. V bodech spojitosti funkce hustoty je $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$.

1.16 Marginální rozložení

Věta 1.70. *Mějme dvourozměrnou náhodnou veličinu* $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$*. Každá z veličin* $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ *má svoje rozdělení. Nechť* $\mathbb{X}$ *má distribuční funkci* $F_1(x)$*,* $\mathbb{Y}$ *má distribuční funkci* $F_2(y)$ *a* $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *má simultání distribuční funkci* $F(x,y)$*. Pak platí*

1. $p(\mathbb{X} < x) = p(\mathbb{X} < x, \mathbb{Y} \in (-\infty,+\infty))$, *2.* $p(\mathbb{Y} < y) = p(\mathbb{X} \in (-\infty, +\infty), \mathbb{Y} < y)$,

3. $F_1(x) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y)$,

4. $F_2(y) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y)$.

Definice 1.71. Distribuční funkce $F_1(x), F_2(y)$ se nazývají *marginální* (okrajové) distribuční funkce.

Definice 1.72. Pro diskrétní dvourozměrnou náhodnou veličinu $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ se simultání frekvenční funkcí $f(x_i, y_j)$ definujeme *marginální* (okrajové) frekvenční funkce $f_1(x_i)$, $f_2(y_j)$ následovně: Nechť $\mathbb{X}$ nabývá hodnot z množiny T_1, $\mathbb{Y}$ nabývá hodnot z množiny T_2, potom

$$f_1(x_i) = \sum_{y_j \in T_2} f(x_i, y_j), \ \ f_2(y_j) = \sum_{x_i \in T_1} f(x_i, y_j).$$

Pro spojitou dvourozměrnou náhodnou veličinu $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ se simultání funkcí hustoty $f(x, y)$ definujeme *marginální* (okrajové) funkce hustoty $f_1(x), f_2(y)$ následovně:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy,$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

1.17 Nezávislé náhodné veličiny

Definice 1.73. Nechť $\mathbb{X}$ je náhodná veličina definovaná na pravděpodobnostním prostoru (U, p_1), $\mathbb{Y}$ je náhodná veličina definovaná na pravděpodobnostním prostoru (U, p_2). Jestliže pro všechny množiny $A, B \in U$ jsou jevy $\mathbb{X} \in A$, $\mathbb{Y} \in B$ navzájem nezávislé (t.j. platí $p(\mathbb{X} \in A, \mathbb{Y} \in B) = p_1(\mathbb{X} \in A) \cdot p_2(\mathbb{Y} \in B)$), pak nazýváme $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ *nezávislými náhodnými veličinami.*

Věta 1.74. *Nechť $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ je dvourozměrná náhodná veličina se simultání distribuční funkcí $F(x, y)$. Nechť $F_1(x), F_2(y)$ jsou marginální distribuční funkce. Potom $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ jsou nezávislé náhodné veličiny právě tehdy, když*

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y).$$

Věta 1.75. *Nechť $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ je diskrétní dvourozměrná náhodná veličina se simultání frekvenční funkcí $f(x_i, y_j)$. Nechť $f_1(x_i), f_2(y_j)$ jsou marginální frekvenční funkce. Potom $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ jsou nezávislé náhodné veličiny právě tehdy, když*

$$f(x_i, y_j) = f_1(x_i) \cdot f_2(y_j).$$

Věta 1.76. *Nechť $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ je spojitá dvourozměrná náhodná veličina se simultání funkcí hustoty $f(x, y)$. Nechť $f_1(x), f_2(y)$ jsou marginální funkce hustoty. Potom $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ jsou nezávislé náhodné veličiny právě tehdy, když*

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Důkaz.
a) Nechť $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ jsou nezávislé náhodné veličiny, potom platí $F(x,y) = F_1(x)F_2(y)$.

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 (F_1(x)F_2(y))}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_1(x)}{\partial x}\frac{\partial F_2(y)}{\partial y} = f_1(x)f_2(y).$$

b) Platí-li $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, potom

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_1(x)f_2(y)dxdy =$$

$$\int_{-\infty}^{x} f_1(x)dx \int_{-\infty}^{y} f_2(y)dy = F_1(x)F_2(y).$$

Veličiny $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ jsou nezávislé. □

Příklad 1.77. Nechť $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ je spojitá náhodná veličina se simultání funkcí hustoty

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x \in [-1,1], y \in [-1,1], \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Rozhodněte, zda jsou $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ nezávislé.

Řešení. Pro marginální funkce hustoty platí

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx.$$

Po integraci dostaneme

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{2}, & x \in [-1,1], \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Analogicky pro druhou proměnnou dostaneme

$$f_2(y) = \begin{cases} 0, & y < -1, \\ \frac{1}{2}, & y \in [-1,1], \\ 0, & y > 1. \end{cases}$$

Takže platí $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ a podle věty 1.76 jsou $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ nezávislé. □

1.18 Transformace náhodných veličin

Definice 1.78. Mějme pravděpodobnostní prostor (U, p). Nechť $y = y(x)$ je funkce definovaná na $(-\infty, +\infty)$ přiřazující každé množině $A \in U$ množinu $B = \{x | y(x) \in A\}$, pro kterou platí $B \in U$. Nechť $\mathbb{X}$ je náhodná veličina. Funkcí náhodné veličiny $\mathbb{X}$ rozumíme náhodnou veličinu $\mathbb{Y} = y(\mathbb{X})$, která nabývá hodnoty y právě když náhodná veličina $\mathbb{X}$ nabude takové hodnoty x, že platí $y = y(x)$. Pro libovolnou množinu $A \in U$ a $B = \{x | y(x) \in A\}$ platí

$$p(\mathbb{Y} \in A) = p(\mathbb{X} \in B).$$

Věta 1.79. *Nechť $\mathbb{Y} = y(\mathbb{X})$ je fukce náhodné veličiny $\mathbb{X}$. Nechť náhodná veličina $\mathbb{Y}$ má distribuční funkci $G(y)$. Potom platí*

$$G(y_0) = p(\mathbb{Y} < y_0) = p(\mathbb{X} \in \{x|y(x) < y_0\}).$$

Příklad 1.80. Nechť náhodná veličina $\mathbb{X}$ má distribuční funkci $F(x)$. Určete distribuční funkci náhodné veličiny $\mathbb{Y} = \mathbb{X}^2$.

Řešení. Postupujeme přesně podle předchozí věty.
1) Nechť $y_0 \leq 0$. Potom $\{x|x^2 < y_0\} = \emptyset$, a proto

$$G(y_0) = p(\mathbb{Y} < y_0) = p(\mathbb{X} \in \{x|x^2 < y_0 \leq 0\}) = 0.$$

2) Nechť $y_0 > 0$. Potom $\{x|x^2 < y_0\} = (-\sqrt{y_0}, \sqrt{y_0})$ a tedy

$$G(y_0) = p(\mathbb{Y} < y_0) = p(-\sqrt{y_0} < \mathbb{X} < \sqrt{y_0}) = F(\sqrt{y_0}) - F(-\sqrt{y_0}).$$

Proto

$$G(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}), & y > 0. \end{cases}$$

□

Věta 1.81. *Nechť $g(x)$ je monotonně rostoucí funkce. Jestliže $\mathbb{X}$ je náhodná veličina s distribuční funkcí $F(x)$. Potom $\mathbb{Y} = g(\mathbb{X})$ je náhodná veličina s distribuční funkcí*

$$G(y) = F(g^{-1}(y)).$$

Věta 1.82. *Nechť $g(x)$ je monotonně klesající funkce. Jestliže $\mathbb{X}$ je náhodná veličina s distribuční funkcí $F(x)$. Potom $\mathbb{Y} = g(\mathbb{X})$ je náhodná veličina s distribuční funkcí*

$$G(y) = 1 - F(g^{-1}(y)).$$

Věta 1.83. *Nechť $g(x)$ je ryze monotonní funkce. Jestliže $\mathbb{X}$ je náhodná veličina s distribuční funkcí $F(x)$ a funkcí hustoty $f(x)$. Potom $\mathbb{Y} = g(\mathbb{X})$ je náhodná veličina s funkcí hustoty*

$$h(y) = f\left(g^{-1}(y)\right) \left| \frac{d}{dy}(g^{-1}(y)) \right|.$$

Důsledek 1.84.

$$y = ax + b, a \neq 0 \Rightarrow g(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

1.19 Charakteristiky náhodných veličin

Definice 1.85. Nechť $\mathbb{X}$ je diskrétní náhodná veličina s frekvenční funkcí $f(x_i)$ definovaná na množině S. *Obecným momentem k-tého řádu* $m_k(\mathbb{X})$ náhodné veličiny $\mathbb{X}$ nazveme

$$m_k(\mathbb{X}) = \sum_{x_i \in S} x_i^k f(x_i), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Definice 1.86. Nechť $\mathbb{X}$ je spojitá náhodná veličina s funkcí hustoty $f(x)$. *Obecným momentem k-tého řádu* $m_k(\mathbb{X})$ náhodné veličiny $\mathbb{X}$ nazveme

$$m_k(\mathbb{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

pokud integrál vpravo existuje.

Definice 1.87. *Střední hodnotou* náhodné veličiny $\mathbb{X}$ nazveme číslo $E(\mathbb{X}) = m_1(\mathbb{X})$.

Důsledek 1.88. *Aritmetický průměr je speciálním případem střední hodnoty v případě, že* $f(x_i) = c > 0, \forall i$.

Důkaz. Mějme diskrétní náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ s frekvenční funkcí $f(x_i) = \frac{1}{n}, i = 1, 2, \dots, n$ Potom střední hodnota $E(\mathbb{X})$ je

$$E(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \bar{x}.$$

□

Definice 1.89. Nechť $\mathbb{X}$ je diskrétní náhodná veličina s frekvenční funkcí $f(x_i)$ definovaná na množině S. *Centrálním momentem k-tého řádu* $M_k(\mathbb{X})$ náhodné veličiny $\mathbb{X}$ nazveme

$$M_k(\mathbb{X}) = \sum_{x_i \in S} (x_i - E(\mathbb{X}))^k f(x_i), \quad k = 1, 2, \dots.$$

Definice 1.90. Nechť $\mathbb{X}$ je spojitá náhodná veličina s funkcí hustoty $f(x)$. *Centrálním momentem k-tého řádu* $M_k(\mathbb{X})$ náhodné veličiny $\mathbb{X}$ nazveme

$$M_k(\mathbb{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(\mathbb{X}))^k f(x)dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

pokud integrál vpravo existuje.

Důsledek 1.91. *Pro libovolnou náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ platí* $M_1(\mathbb{X}) = 0$.

Důkaz.

$$M_1(\mathbb{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(\mathbb{X}))\, f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (xf(x) - E(\mathbb{X})f(x))\, dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx - E(\mathbb{X}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = E(\mathbb{X}) - E(\mathbb{X}) = 0.$$

□

Definice 1.92. *Rozptylem* (disperzí) náhodné veličiny $\mathbb{X}$ nazveme číslo $D(\mathbb{X}) = M_2(\mathbb{X})$.

Věta 1.93. *Nechť $\mathbb{X}$ je náhodná veličina. Potom pro náhodnou veličinu $\mathbb{Y} = a\mathbb{X} + b, a \neq 0$ platí*

$$E(\mathbb{Y}) = aE(\mathbb{X}) + b,$$

$$D(\mathbb{Y}) = a^2 D(\mathbb{X}).$$

Důkaz. Podle důsledku 1.84 věty 1.83 platí

$$y = ax + b, a \neq 0 \Rightarrow g(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Dále

$$E(\mathbb{Y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} y g(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right) dy = (*).$$

Zavedeme si substituci

$$y = ax + b,$$
$$dy = a dx.$$

Pro $a > 0$ zůstavají hranice beze změny, pro $a < 0$ se změní na opačné.

$$(*) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ax+b}{|a|} f(x)|a| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (axf(x) + bf(x))\, dx = aE(\mathbb{X}) + b.$$

Pro rozptyl máme analogicky

$$D(\mathbb{Y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbb{Y} - E(\mathbb{Y}))^2 g(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax + b - aE(\mathbb{X}) - b)^2 \frac{1}{|a|} f(x)|a| dx =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} a^2 (x - E(\mathbb{X}))^2 f(x) dx = a^2 D(\mathbb{X}).$$

□

Věta 1.94. *Nechť $\mathbb{X}$ je náhodná veličina. Potom pro náhodnou veličinu $\mathbb{Y} = (\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))^2$ platí*

$$D(\mathbb{X}) = E(\mathbb{Y}).$$

Věta 1.95. *Nechť $\mathbb{X}$ je náhodná veličina. Potom platí*

$$D(\mathbb{X}) = E(\mathbb{X}^2) - (E(\mathbb{X}))^2.$$

Důkaz.

$$D(\mathbb{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(\mathbb{X}))^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x^2 - 2E(\mathbb{X})x + (E(\mathbb{X}))^2\right) f(x) dx =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - 2E(\mathbb{X}) \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx + (E(\mathbb{X}))^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx =$$
$$E(\mathbb{X}^2) - 2E(\mathbb{X})E(\mathbb{X}) + (E(\mathbb{X}))^2 = E(\mathbb{X}^2) - (E(\mathbb{X}))^2.$$

□

Definice 1.96. Nechť $\mathbb{X}$ je náhodná veličina. Číslo $\sigma(\mathbb{X}) = \sqrt{D(\mathbb{X})}$ nazveme *směrodatnou odchylkou* náhodné veličiny $\mathbb{X}$.

Definice 1.97. *Normovaná náhodná veličina* k náhodné veličině $\mathbb{X}$ je

$$\mathbb{U} = \frac{\mathbb{X} - E(\mathbb{X})}{\sigma(\mathbb{X})}.$$

Věta 1.98. *Pro normovanou náhodnou veličinu* $\mathbb{U}$ *platí*

$$E(\mathbb{U}) = 0, \ \ D(\mathbb{U}) = 1.$$

Důkaz.

$$\mathbb{U} = \frac{\mathbb{X} - E(\mathbb{X})}{\sigma(\mathbb{X})} = \frac{1}{\sigma(\mathbb{X})}\mathbb{X} - \frac{E(\mathbb{X})}{\sigma(\mathbb{X})}.$$

Podle věty 1.93

$$E(\mathbb{U}) = \frac{1}{\sigma(\mathbb{X})}E(\mathbb{X}) - \frac{E(\mathbb{X})}{\sigma(\mathbb{X})} = 0.$$

Dále podle téže věty

$$D(\mathbb{U}) = \frac{1}{(\sigma(\mathbb{X}))^2}D(\mathbb{X}) = \frac{1}{D(\mathbb{X})}D(\mathbb{X}) = 1.$$

□

Definice 1.99. Nechť $\mathbb{X}$ je náhodná veličina. Číslo

$$k_1 = \frac{M_3(\mathbb{X})}{(\sigma(\mathbb{X}))^3}$$

nazveme *koeficientem šikmosti* náhodné veličiny $\mathbb{X}$.

Definice 1.100. Číslo

$$k_2 = \frac{M_4(\mathbb{X})}{(\sigma(\mathbb{X}))^4} - 3$$

nazveme *koeficientem špičatosti* náhodné veličiny $\mathbb{X}$.

Věta 1.101. *Nechť* $\mathbb{X}$ *je náhodná veličina. Koeficient šikmosti i koeficient špičatosti se nemění při lineární transformaci. T.j.* $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$*:*

$$k_1(a\mathbb{X} + b) = k_1(\mathbb{X}),$$

$$k_2(a\mathbb{X} + b) = k_2(\mathbb{X}),$$

Věta 1.102. *Platí:*

1. *Pro symetrickou náhodnou veličinu* $\mathbb{X}$ *je* $k_1(\mathbb{X}) = 0$.
2. *Pro náhodnou veličinu s rozdělením protáhlejším vpravo je* $k_1 > 0$ *a pro náhodnou veličinu s rozdělením protáhlejším vlevo je* $k_1 < 0$.
3. *Pro normální rozdělení je* $k_2 = 0$.
4. *Má-li náhodná veličina symetrické rozdělení a je-li* $k_2 > 0$*, potom je funkce hustoty pro* $x \to \pm\infty$ *větší než funkce hustoty normálního rozdělení se stejnou střední hodnotou.*
5. *Má-li náhodná veličina symetrické rozdělení a je-li* $k_2 < 0$*, potom je funkce hustoty pro* $x \to \pm\infty$ *menší než funkce hustoty normálního rozdělení se stejnou střední hodnotou.*

Definice 1.103. Nechť $0 < p < 1$. p-*kvantil* náhodné veličiny $\mathbb{X}$ je číslo x_p takové, že $F(x_p) \leq p$, $F(x_p + 0) > p$.

Poznámka 1.104. p-kvantil není určen jednoznačně. Je-li $\mathbb{X}$ spojitá náhodná veličina je $F(x_p) = p$.

Definice 1.105. 0.5-kvantil ve nazývá *medián.*

Definice 1.106. *Modus* $\tilde{x}$ spojité náhodné veličiny $\mathbb{X}$ je bod, pro který platí $f(\tilde{x}) \geq f(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

Příklad 1.107. Náhodná veličina má funkci hustoty

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x < 0, \\ a(3x - x^2), & \text{pro } 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{pro } x > 3. \end{cases}$$

Určete parametr a, střední hodnotu a rozptyl.

Řešení. Musí platit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^3 a(3x - x^2)dx = a\left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = a\left[\frac{27}{2} - 9\right] = 1 \to a = \frac{2}{9}.$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^3 \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{9}x^3\right)dx = \left[\frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{18}x^4\right]_0^3 = 6 - \frac{9}{2} = 1.5.$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 f(x)dx = E(x^2) - (E(x))^2 = \int_0^3 \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{9}x^4\right)dx - 1.5^2 =$$

$$\left[\frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{45}x^5\right]_0^3 - 1.5^2 = 2.7 - 2.25 = 0.45.$$

□

Příklad 1.108. Graf funkce hustoty náhodné veličiny X tvoří na intervalu $[0, a]$ přímka spojující body $(0, 2/a)$ a $(a, 0)$. Mimo interval $[0, a]$ je funkce hustoty nulová. Určete: hodnotu parametru a, střední hodnotu a rozptyl.

Řešení.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ -\dfrac{2}{a^2}x + \dfrac{2}{a} & x \in [0, a], \\ 0 & x > a. \end{cases}$$

Musí platit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^a \left(-\frac{2}{a^2}x + \frac{2}{a}\right)dx = -\frac{2}{a^2}\frac{x^2}{2} + \frac{2}{a}x\Big|_0^a = -\frac{2}{a^2}\frac{a^2}{2} + \frac{2}{a}a = 1.$$

Každá hodnota $a > 0$ vyhovuje.

$$E(x) = \int_0^a \left(-\frac{2}{a^2}x^2 + \frac{2}{a}x\right)dx = -\frac{2}{3}a + a = \frac{a}{3}.$$

$$D(x) = \frac{a^2}{18}.$$

□

1.20 Číselné charakteristiky dvourozměrných náhodných veličin

Definice 1.109. *Centrálním bodem* dvourozměrné náhodné veličiny $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ nazveme bod $(E(\mathbb{X}), E(\mathbb{Y}))$.

Definice 1.110. Nechť $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ jsou náhodné veličiny. Hodnotu

$$K(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = E(\mathbb{X}\mathbb{Y}) - E(\mathbb{X})E(\mathbb{Y})$$

nazýváme *kovariací* náhodných veličin $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$.

Věta 1.111. *Platí:*

1. $K(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = K(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$.
2. $K(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = 0$ *pro nezávislé náhodné veličiny* $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$.
3. $K(\mathbb{X}, \mathbb{X}) = D(\mathbb{X})$.
4. $K(\mathbb{X}, \mathbb{X}) = E(\mathbb{X}^2) - [E(\mathbb{X})]^2$.

Definice 1.112. Nechť $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ jsou náhodné veličiny. Hodnotu

$$R(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \frac{K(\mathbb{X}, \mathbb{Y})}{\sigma(\mathbb{X})\sigma(\mathbb{Y})}$$

nazýváme *korelačním koeficientem* náhodných veličin $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$.

Věta 1.113. *Platí:*

1. $-1 \leq R(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \leq 1$.
2. $R(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = R(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$.
3. $R(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = 0$ *pro nezávislé* $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$.
4. *Je-li* $\mathbb{Y} = a\mathbb{X} + b, a \neq 0$, *potom* $R(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) =$ *sign* a.

Příklad 1.114. Dvourozměrná náhodná veličina $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ má funkci hustoty

$$f(x, y) = \begin{cases} a(x^2 + y^2), & \text{pro } x^2 + y^2 \leq r^2, \\ 0, & \text{pro } x^2 + y^2 > r^2. \end{cases}$$

Určete koeficient a.

Řešení. Koeficient a určíme z rovnice

$$a\int\int(x^2+y^2)dxdy=1,$$

kde integrujeme přes kružnici $x^2+y^2=r^2$. Přejdeme k polárním souřadnicím a dostaneme

$$a\int_0^{2\pi}\int_0^r \varrho^3 d\varrho d\varphi=1,$$

$$\frac{r^4}{4}2\pi a=1,$$

$$a=\frac{2}{\pi r^4}.$$

□

Příklad 1.115. Dvourozměrná náhodná veličina $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ má funkci hustoty

$$f(x,y)=\begin{cases} a\sin(x+y), & \text{v oblasti } D,\\ 0, & \text{mimo oblast } D,\end{cases}$$

kde oblast D je určena nerovnostmi $0\le x\le \pi/2, 0\le y\le \pi/2$.
Určete

1. Koeficient a,
2. Střední hodnoty $E(x),E(y)$,
3. Směrodatné odchylky $\sigma(x),\sigma(y)$,
4. Koeficient korelace.

Řešení. 1. Musí platit

$$a\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin(x+y)dydx=1.$$

Odtud

$$a\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin(x+y)dydx=-a\int_0^{\pi/2} cos(x+y)|_0^{\pi/2}\,dx=$$

$$-a\int_0^{\pi/2}(\sin x+\cos x)dx=a\,(\sin x-\cos x)|_0^{\pi/2}=2a.$$

$$a=\frac{1}{2}.$$

2.

$$E(x)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}x\sin(x+y)dydx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}xdx\int_0^{\pi/2}\sin(x+y)dy=$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos(x+y)|_0^{\pi/2}\,xdx=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[\cos(x+\frac{\pi}{2})-\cos x\right]xdx=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x\,[\sin x + \cos x]\,dx = \frac{1}{2}x\,[\sin x - \cos x]|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}[\sin x - \cos x]\,dx =$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\,(\cos x + \sin x)|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Stejným způsobem dostaneme

$$E(y) = \frac{\pi}{4}.$$

3.

$$D(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(x+y)dydx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x^2\cos(x+y)\Big|_0^{\pi/2} dx - \frac{\pi^2}{16} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x^2(\sin x + \cos x)dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$\frac{1}{2}\,x^2(\sin x - \cos x)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x(\sin x - \cos x)dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$\frac{\pi^2}{8} + x(\sin x + \cos x)|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}(\sin x + \cos x)dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} + (\sin x - \cos x)|_0^{\pi/2} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2.$$

Stejným způsobem dostaneme $D(y) = D(x)$.

$$\sigma(x) = \sigma(y) = \sqrt{\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2}.$$

4.

$$K(x,y) = E(xy) - E(x)E(y) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} xy\sin(x+y)dydx - \frac{\pi}{4}\frac{\pi}{4} =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x\left(\int_0^{\pi/2} y\sin(x+y)dy\right)dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$\frac{8\pi - 16 - \pi^2}{16}.$$

$$R(x,y) = \frac{K(x,y)}{\sigma(x)\sigma(y)} = \frac{8\pi - 16 - \pi^2}{\pi^2 + 8\pi - 32} \approx -0.2454$$

□

1.21 Regresní koeficient a regresní přímka

Nechť $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ jsou náhodné veličiny. Nechť náhodná veličina $\mathbb{Z}$ je lineární funkcí náhodných veličin $\mathbb{Y}, \mathbb{X}$, tj. $\mathbb{Z} = \mathbb{Y} - k\mathbb{X}$. Hledáme takové k, aby $D(\mathbb{Z})$ bylo minimální.

$$D(\mathbb{Z}) = D(\mathbb{Y} - k\mathbb{X}) = E((\mathbb{Y} - k\mathbb{X})^2) - (E(\mathbb{Y} - k\mathbb{X}))^2 =$$

$$E(\mathbb{Y}^2) - 2kE(\mathbb{Y}\mathbb{X}) + k^2E(\mathbb{X}^2) - (E(\mathbb{Y}))^2 + 2kE(\mathbb{X})E(\mathbb{Y}) - k^2(E(\mathbb{X}))^2 =$$
$$D(\mathbb{Y}) + k^2D(\mathbb{X}) - 2kK(\mathbb{X}, \mathbb{Y}).$$
$$\frac{d}{dk}D(\mathbb{Z}) = 2kD(\mathbb{X}) - 2K(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = 0.$$
$$k = \frac{K(\mathbb{X}, \mathbb{Y})}{D(\mathbb{X})} = R(\mathbb{X}, \mathbb{Y})\frac{\sigma(\mathbb{Y})}{\sigma(\mathbb{X})}.$$

Definice 1.116. *Koeficientem regrese* náhodné veličiny nazýváme číslo

$$k = \frac{K(\mathbb{X}, \mathbb{Y})}{D(\mathbb{X})} = R(\mathbb{X}, \mathbb{Y})\frac{\sigma(\mathbb{Y})}{\sigma(\mathbb{X})}.$$

Důsledek 1.117. *Hodnota k nám dává minimum $D(\mathbb{Z})$.*

Důkaz. Hledáme minimum, takže si vezmeme první derivaci a položíme ji rovnu nule

$$\frac{d}{dk}D(\mathbb{Z}) = 0$$

a pro druhou derivaci platí

$$\frac{d^2}{dk^2}D(\mathbb{Z}) = 2D(\mathbb{X}) > 0,$$

takže máme první derivace je rovna nule a druhá je kladná. Tím dostáváme, že v k nabývá funkce $D(\mathbb{Z})$ svého minima. □

Definice 1.118. Přímku

$$y - E(\mathbb{Y}) = k(x - E(\mathbb{X}))$$

nazýváme *regresní přímkou* náhodné veličiny $\mathbb{Y}$ vzhledem k náhodné veličině $\mathbb{X}$.

Příklad 1.119. Nechť $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ je diskrétní náhodná veličina se simultání frekvenční funkcí

$x_i \backslash y_i$	0	1	2	$f(x_i)$
0	0.2	0.1	0.05	0.35
1	0	0.3	0	0.3
2	0	0.2	0.15	0.35
$f(y_j)$	0.2	0.6	0.2	1

Určete regresní přímku.

Řešení. Určíme postupně $E(\mathbb{X}), E(\mathbb{Y}), D(\mathbb{X}), D(\mathbb{Y})$.

$$E(\mathbb{X}) = 0 \cdot 0.35 + 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.35 = 1.$$

$$E(\mathbb{Y}) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.2 = 1.$$
$$D(\mathbb{X}) = (0-1)^2 0.35 + (1-1)^2 0.3 + (2-1)^2 0.35 = 0.7.$$
$$D(\mathbb{Y}) = (0-1)^2 0.2 + (1-1)^2 0.6 + (2-1)^2 0.2 = 0.4.$$

Dále

$$E(\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y}) = 0 \cdot (0.2 + 0.1 + 0.05) + 1 \cdot 03 + 2 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.15 = 1.3.$$

Kovariace

$$K(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = 1.3 - 1\cdot 1 = 0.3.$$

Koeficient korelace

$$R(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \frac{0.3}{\sqrt{0.4}\sqrt{0.7}} = 0.567.$$

Regresní koeficient

$$k = 0.567\frac{\sqrt{0.4}}{\sqrt{0.7}} = 0.429.$$

Regresní přímka má potom tvar

$$y - 1 = 0.429(x-1),$$

$$y = 0.429x + 0.571.$$

□

1.22 Nejužívanější rozložení diskrétních náhodných veličin

1. **Klasické rozložení**. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má klasické rozložení s parametrem $n \in \mathbb{N}$, jestliže

$$f(x) = p(\mathbb{X}=x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pro } x = 1,2,\ldots,n, \\ 0 & \text{pro zbývající případy.} \end{cases}$$

Věta 1.120. *Má-li náhodná veličina $\mathbb{X}$ klasické rozložení s parametrem $n \in \mathbb{N}$, potom platí:*

$$E(\mathbb{X}) = \frac{n+1}{2},$$

$$D(\mathbb{X}) = \frac{n^2-1}{12}.$$

2. **Binomické rozložení** $Bi(n,p)$. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má binomické rozložení s parametry $n \in \mathbb{N}$ a $p \in (0,1)$, jestliže

$$f(i) = p(\mathbb{X}=i) = \begin{cases} \binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} & \text{pro } i = 0,1,2,\ldots,n, \\ 0 & \text{pro zbývající případy.} \end{cases}$$

Věta 1.121. *Má-li náhodná veličina $\mathbb{X}$ binomické rozložení $Bi(n,p)$, potom platí:*

$$E(\mathbb{X}) = np,$$

$$D(\mathbb{X}) = np(1-p),$$

$$k_1 = \frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}},$$

$$k_2 = \frac{1 - 6p(1-p)}{np(1-p)},$$

kde k_1 je koeficient šikmosti a k_2 je koeficient špičatosti. Modus $\tilde{x}$ je určen nerovnicí $(n+1)p - 1 \leq \tilde{x} \leq (n+1)p$.

Důsledek 1.122. *V případě, že $(n+1)p$ je celé číslo, budeme mít pro modus dvě hodnoty.*

Důsledek 1.123. *$Bi(n, \frac{1}{2})$ má symetrickou frekvenční funkci.*

3. **Alternativní rozložení** $A(p)$. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má alternativní rozložení s parametrem $p \in (0, 1)$, jestliže

$$f(1) = p, \quad f(0) = 1 - p.$$

Věta 1.124. *Má-li náhodná veličina $\mathbb{X}$ alternativní rozložení $A(p)$, potom platí:*

$$E(\mathbb{X}) = p,$$

$$D(\mathbb{X}) = p(1-p),$$

$$k_1 = \frac{1 - 2p}{\sqrt{p(1-p)}},$$

$$k_2 = \frac{1 - 6p(1-p)}{p(1-p)},$$

kde k_1 je koeficient šikmosti a k_2 je koeficient špičatosti.

$$A(p) \equiv Bi(1, p).$$

4. **Poissonovo rozložení** $Po(\lambda)$. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má Poissonovo rozložení s parametrem $\lambda \in \mathbb{R}^+$, jestliže

$$f(i) = p(\mathbb{X} = i) = \begin{cases} \frac{\lambda^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda} & \text{pro } i = 0, 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{pro zbývající případy.} \end{cases}$$

Věta 1.125. *Má-li náhodná veličina $\mathbb{X}$ Poissonovo rozložení $Po(\lambda)$, potom platí:*

$$E(\mathbb{X}) = \lambda,$$

$$D(\mathbb{X}) = \lambda,$$

$$k_1 = \lambda^{-\frac{1}{2}},$$

$$k_2 = \lambda^{-1},$$

kde k_1 je koeficient šikmosti a k_2 je koeficient špičatosti.

Důsledek 1.126. *$E(\mathbb{X}) = D(\mathbb{X}) = \lambda$ je charakteristickou vlastností Poissonova rozložení.*

Příklad 1.127. Určete střední hodnotu diskrétní náhodné veličiny s frekvenční funkci

$$p(\mathbb{X} = m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Řešení. Jde o náhodnou veličinu s Poissonovým rozložením.

$$E(\mathbb{X}) = \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Protože

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = e^{\lambda},$$

po dosazení dostaneme

$$E(\mathbb{X}) = \lambda.$$

□

5. **Negativní binomické rozložení** $Nbi(n, p)$. Máme Bernoulliovskou posloupnost nezávislých pokusů, přičemž při každém z nich může nastat jev A s pravděpodobností p. Kolik pokusů je třeba udělat, aby nastal jev A po n-té? Jestliže náhodná veličina $\mathbb{X}$ nabývá hodnoty počtu pokusů, při nichž jev A nenastal předtím než nastal po n-té a $\mathbb{X} = x_i$, pak jev A nastal po n-té v $(x_i + n)$-tém pokusu.

   Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má negativní binomické rozložení s parametry $n \in \mathbb{N}$ a $p \in (0, 1)$, jestliže

$$f(x_i) = p(\mathbb{X} = x_i) = \begin{cases} \binom{x_i+n-1}{n-1} p^n (1-p)^{x_i} & \text{pro } x_i = 0, 1, 2, \ldots, n = 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{pro zbývající případy.} \end{cases}$$

Věta 1.128. *Má-li náhodná veličina $\mathbb{X}$ negativní binomické rozložení $Nbi(n, p)$, potom platí:*

$$E(\mathbb{X}) = n\frac{1-p}{p},$$

$$D(\mathbb{X}) = n\frac{1-p}{p^2}.$$

6. **Geometrické rozložení** $Ge(p)$. Jde o rozložení $Nbi(1, p)$. Máme Bernoulliovskou posloupnost nezávislých pokusů, přičemž při každém z nich může nastat jev A s pravděpodobností p. Náhodná veličina se rovná počtu nezávislých pokusů, které končí při prvním úspěšném pokusu. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má geometrické rozložení s parametrem $p \in (0, 1)$, jestliže

$$f(x_i) = p(\mathbb{X} = x_i) = \begin{cases} p(1-p)^{x_i} & \text{pro } x_i = 0, 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{pro zbývající případy.} \end{cases}$$

Věta 1.129. *Má-li náhodná veličina $\mathbb{X}$ geometrické rozložení $Ge(p)$, potom platí:*

$$E(\mathbb{X}) = \frac{1-p}{p},$$

$$D(\mathbb{X}) = \frac{1-p}{p^2}.$$

7. **Hypergeometrické rozložení** $H(N, M, n)$. Máme soubor N prvků, z nichž celkem M má dannou vlastnost, $N > M$. Náhodná veličina nabývá hodnoty počtu prvků vykazujících sledovanou vlastnost v souboru n prvků, vybraných bez vracení ze sledovaného souboru N prvků. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má hypergeometrické rozložení s parametry $N, M, n \in \mathbb{N}, N > M$, jestliže

$$f(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}},$$

Věta 1.130. *Má-li náhodná veličina $\mathbb{X}$ hypergeometrické rozložení $H(N, M, n)$, potom platí:*

$$E(\mathbb{X}) = n\frac{M}{N},$$

$$D(\mathbb{X}) = n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{n}\right)\frac{N-n}{N-1}.$$

1.23 Nejužívanější rozložení spojitých náhodných veličin

1. **Rovnoměrné rozložemní**. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má rovnoměrné rozložení, jestliže má konstantní hustotu pravděpodobnosti na celém intervalu hodnot, kterých může nabýt. Funkce hustoty je

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } x \in [a, b], \\ 0 & \text{pro } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Distribuční funkce je

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pro } x \in [a, b], \\ 1 & \text{pro } x > b. \end{cases}$$

Věta 1.131. *Má-li náhodná veličina $\mathbb{X}$ rovnoměrné rozložení, potom platí:*

$$\begin{aligned} E(\mathbb{X}) &= \frac{1}{2}(a+b), \\ D(\mathbb{X}) &= \frac{1}{12}(b-a)^2, \\ k_1 &= 0, \\ k_2 &= \frac{(b-a)^4}{80} - 3, \end{aligned}$$

kde k_1 je koeficient šikmosti a k_2 je koeficient špičatosti.

2. **Normální rozložení** $No(\mu, \sigma)$. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má normální rozložení s parametry $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, jestliže má funkci hustoty

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

a distribuční funkci

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt.$$

Věta 1.132. *Má-li náhodná veličina $\mathbb{X}$ normální rozložení $No(\mu, \sigma)$, potom platí:*

$$E(\mathbb{X}) = \mu,$$
$$D(\mathbb{X}) = \sigma^2.$$

Důkaz:

$$E(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Zavedeme si substituci

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = t \Rightarrow x = \sigma t + \mu \Rightarrow dx = \sigma dt.$$

Po dosazení máme

$$E(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + \mu)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} dt = \mu.$$

Protože první integrál je integrálem z liché funkce, který je roven nule, a druhý integrál je roven $\sqrt{2\pi}$.

3. **Exponenciální rozložení** $E(A, d)$. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má exponenciální rozložení s parametry $A \in \mathbb{R}, d > 0$, jestliže má funkci hustoty

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq A, \\ \frac{1}{d}\mathrm{e}^{-\frac{x-A}{d}} & x > A, \end{cases}$$

a distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq A, \\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x-A}{d}} & x > A. \end{cases}$$

Věta 1.133. *Má-li náhodná veličina $\mathbb{X}$ exponenciální rozložení $E(A, d)$, potom platí:*

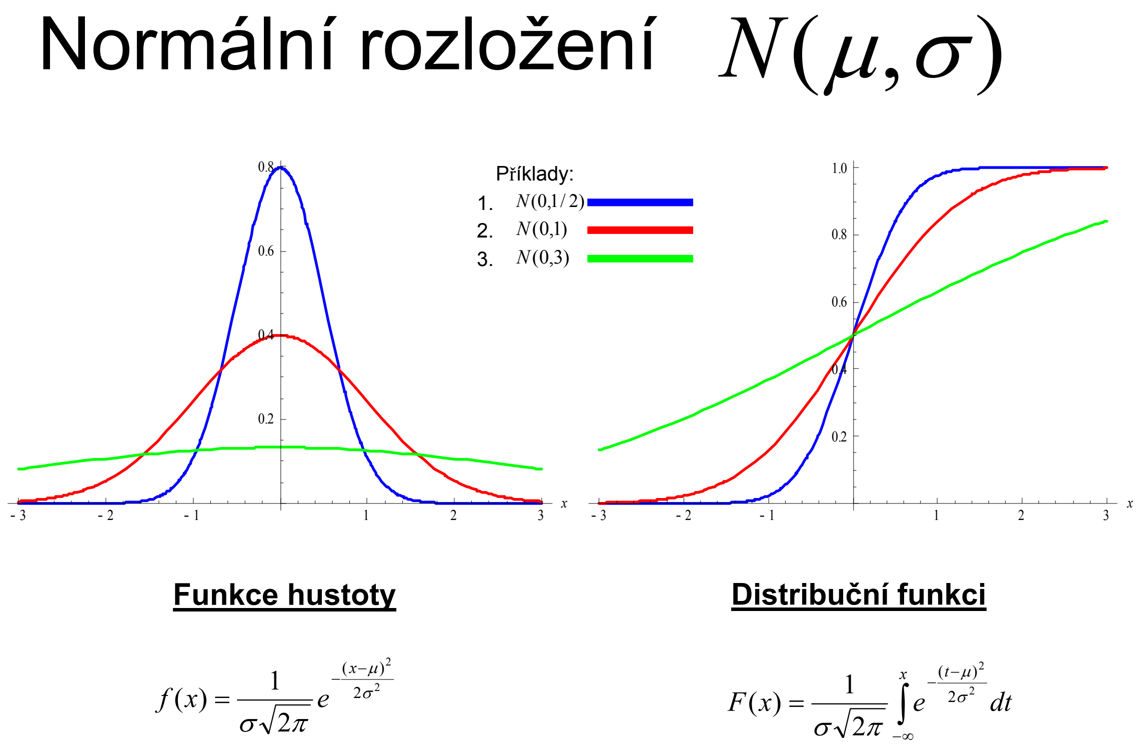
$$\begin{aligned} E(\mathbb{X}) &= A + d, \\ D(\mathbb{X}) &= d^2. \end{aligned}$$

4. **Gama rozložení** $\Gamma(m, d)$. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má gama rozložení s parametry $m > 0, d >$ > 0, jestliže má funkci hustoty

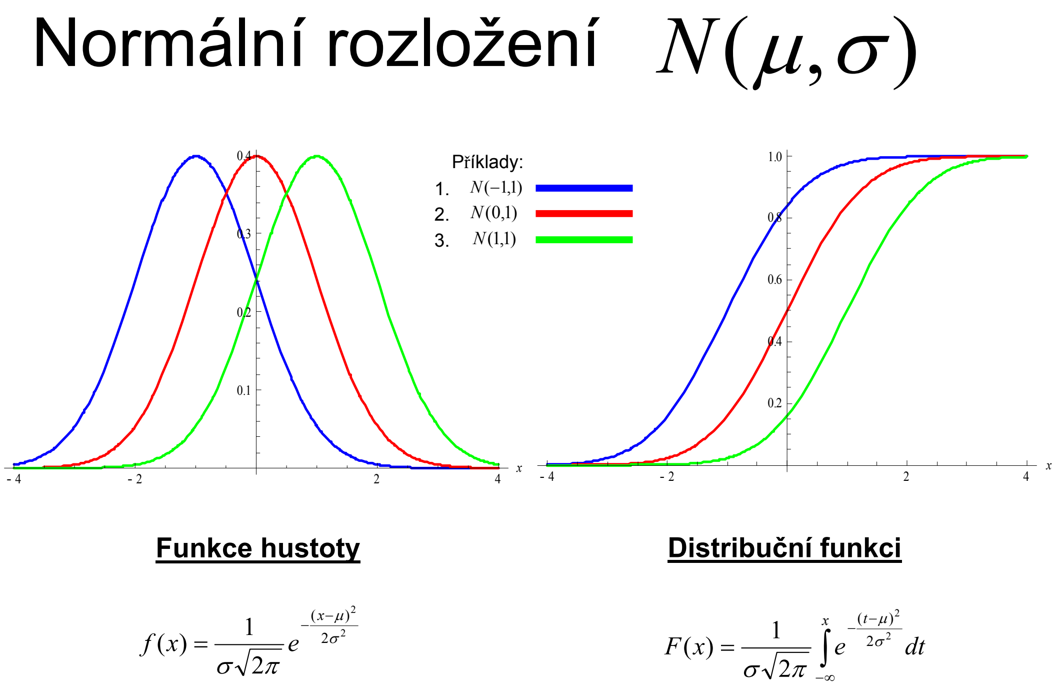
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{\Gamma(m)d^m}\mathrm{e}^{-\frac{x}{d}} x^{m-1}, & x > 0, \end{cases}$$

kde

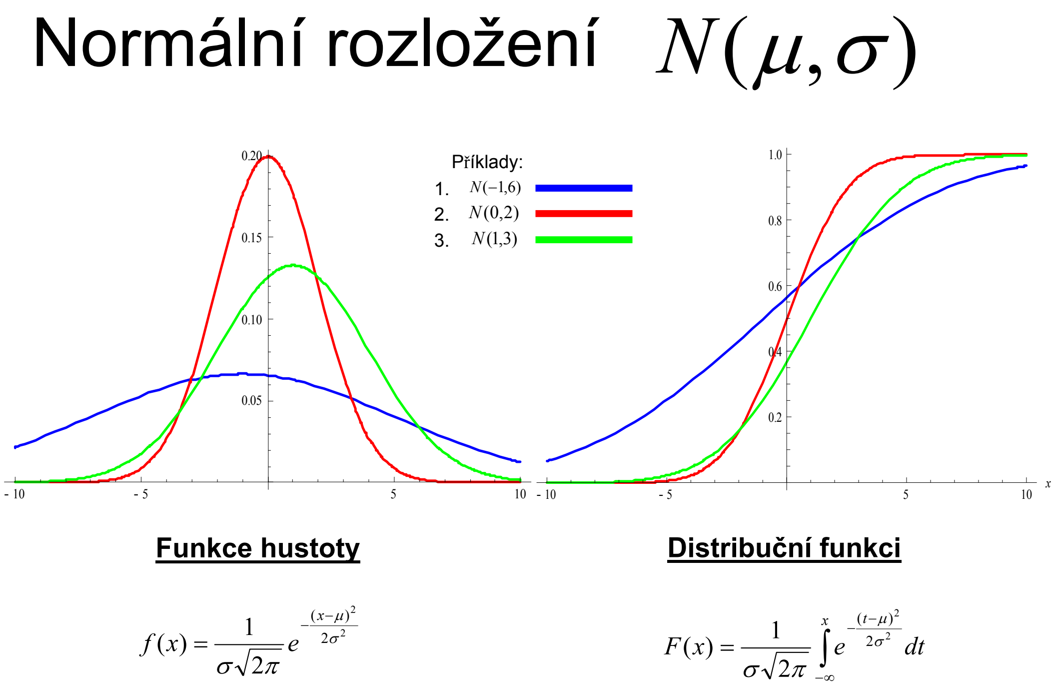
$$\Gamma(m) = \int_0^m \mathrm{e}^{-t} t^{m-1} dt.$$



Obr. 1.1: Normální rozložení 1



Obr. 1.2: Normální rozložení 2



Obr. 1.3: Normální rozložení 3

Věta 1.134. *Má-li náhodná veličina $\mathbb{X}$ gama rozložení $\Gamma(m,d)$, potom platí:*

$$E(\mathbb{X}) = md,$$

$$D(\mathbb{X}) = md^2.$$

Důsledek 1.135. *Pro $m=1$ je $\Gamma(1,d) \equiv E(0,d)$.*

5. **Beta rozložení** $Be(p,q)$. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má beta rozložení s parametry $p>0, q>0$, jestliže má funkci hustoty

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0,1), \\ \frac{1}{B(p,q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}, & x \in (0,1), \end{cases}$$

kde

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx.$$

Věta 1.136. *Má-li náhodná veličina $\mathbb{X}$ beta rozložení $Be(p,q)$, potom platí:*

$$\begin{aligned} E(\mathbb{X}) &= \frac{p}{p+q}, \\ D(\mathbb{X}) &= \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}, \\ B(p,q) &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \end{aligned}$$

6. **Pearsonovo rozložení** χ^2.(čti chí-kvadrát) Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má rozložení χ^2 s k stupni volnosti, jestliže má funkci hustoty

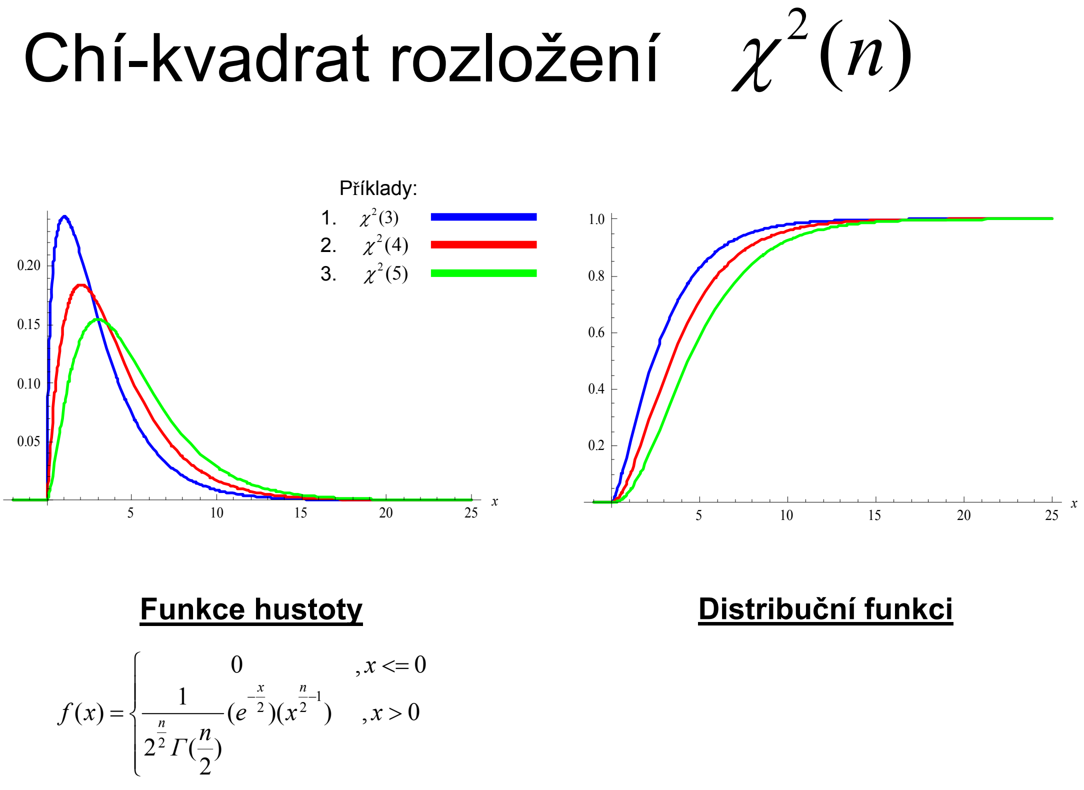
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(\frac{k}{2})} \left(e^{-\frac{x}{2}}\right) \left(x^{\frac{k}{2}-1}\right) & x > 0. \end{cases}$$

Věta 1.137. *Má-li náhodná veličina $\mathbb{X}$ rozložení χ^2 s k-stupni volnosti, potom platí:*

$$\begin{aligned} E(\mathbb{X}) &= k, \\ D(\mathbb{X}) &= 2k, \\ k_1 &= \frac{4}{\sqrt{2k}}, \\ k_2 &= \frac{12}{k}, \end{aligned}$$

kde k_1 je koeficient šikmosti a k_2 je koeficient špičatosti.

$$\Gamma(\frac{k}{2}, 2) \equiv \chi^2(k).$$



Obr. 1.4: Pearsonovo rozložení

7. **Studentovo rozložení** t. Mějme dvě nezávislé náhodné veličiny $\mathbb{U}, \mathbb{Y}$. Nechť má $\mathbb{U}$ rozložení $No(0,1)$ a $\mathbb{Y}$ má rozložení χ^2. Utvořme náhodnou veličinu

$$\mathbb{T} = \frac{\mathbb{U}}{\sqrt{\frac{\mathbb{Y}}{k}}}.$$

Náhodná veličina $\mathbb{T}$ má rozložení t o k stupních volnosti s funkcí hustoty pro $k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{k}B(\frac{1}{2}, \frac{k}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} =$$

$$\frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\sqrt{\pi k}\Gamma(\frac{k}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}.$$

Pro $k \to +\infty$ konverguje t-rozložení k rozložení $No(0,1)$.

Věta 1.138. *Má-li náhodná veličina $\mathbb{X}$ Studentovo rozložení $t(k)$, potom platí:*

$$\begin{aligned} E(\mathbb{X}) &= 0, \\ D(\mathbb{X}) &= \frac{k}{k-2}, \quad \textit{pro } k > 2, \\ k_1 &= 0, \\ k_2 &= \frac{6}{k-4}, \end{aligned}$$

kde k_1 je koeficient šikmosti a k_2 je koeficient špičatosti.

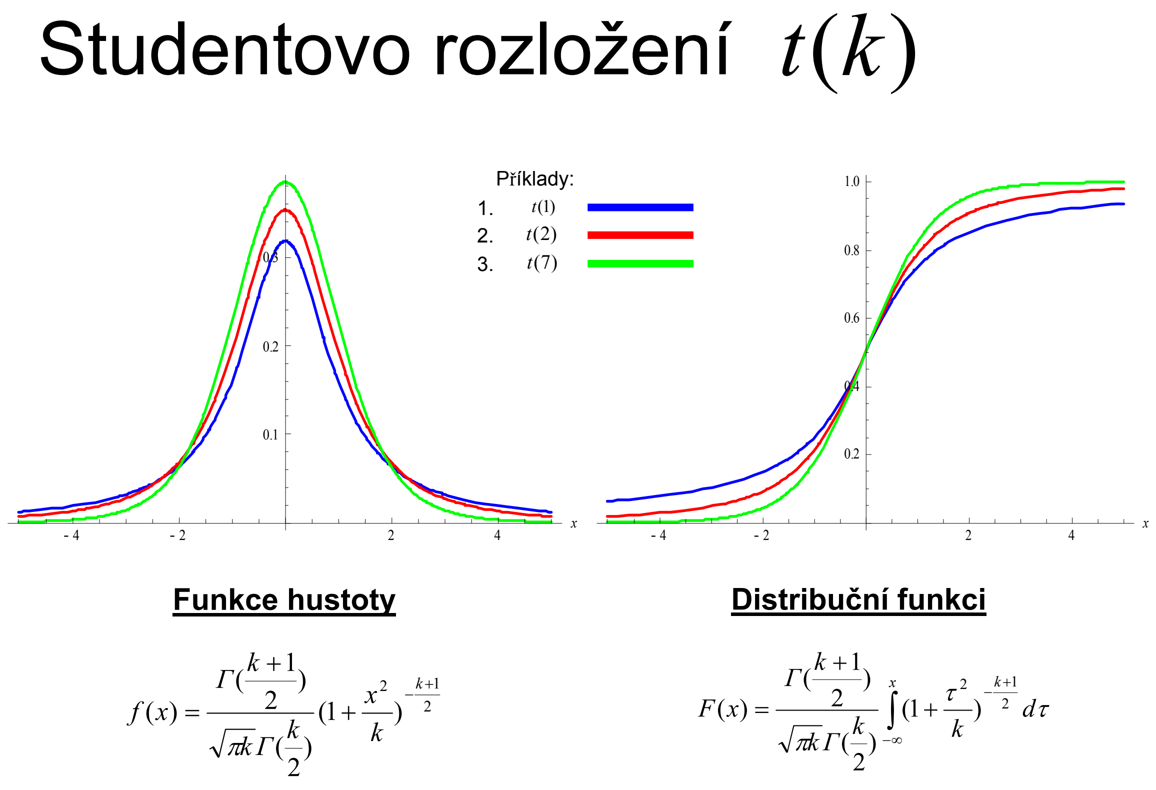
8. **Fisherovo - Snedecorovo rozložení** F. Mějme dvě nezávislé náhodné veličiny $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$. Nechť má $\mathbb{X}$ rozložení $\chi^2(n_1)$ a $\mathbb{Y}$ má rozložení $\chi^2(n_2)$. Utvořme náhodnou veličinu

$$\mathbb{F} = \frac{\frac{\mathbb{X}}{n_1}}{\frac{\mathbb{Y}}{n_2}}.$$

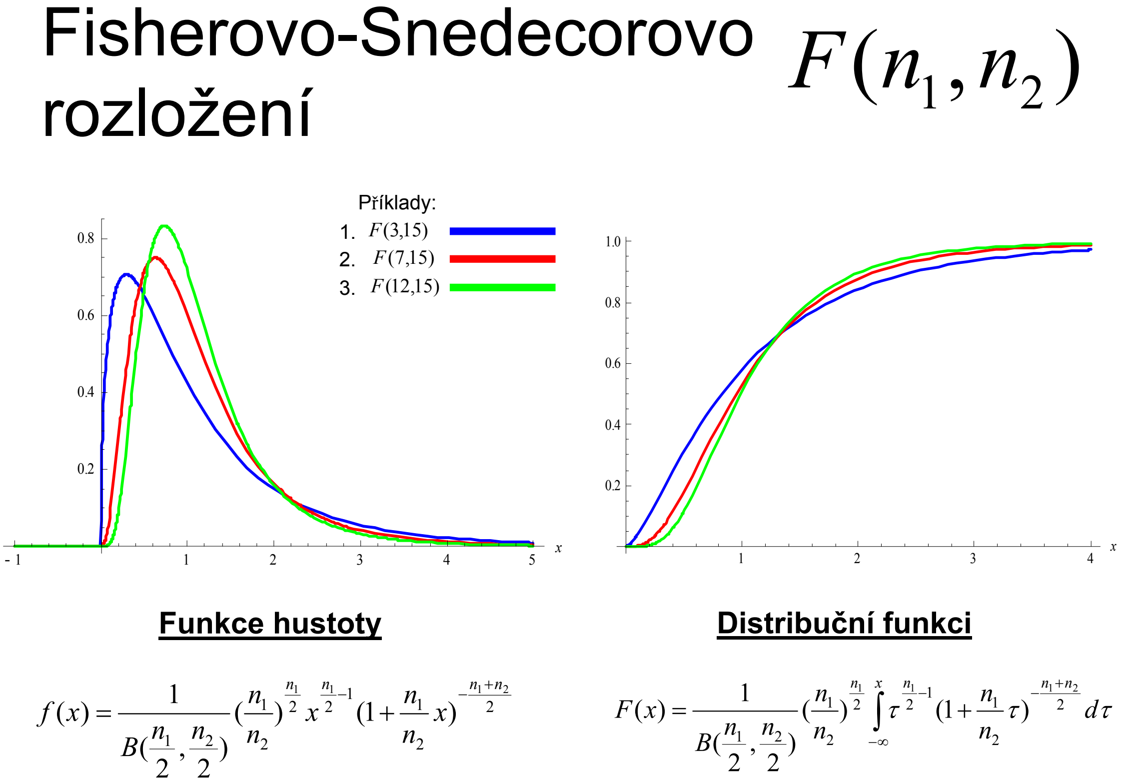
Náhodná veličina $\mathbb{F}$ má rozložení $F(n_1, n_2)$ o n_1 a n_2 stupních volnosti s funkcí hustoty pro $n_1, n_2 \in \mathbb{N}, x > 0$

$$f(x) = \frac{1}{B(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2})} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} x^{\frac{n_1}{2}-1}(1 + \frac{n_1}{n_2}x)^{-\frac{n_1+n_2}{2}},$$

$$f(x) = 0, \quad \text{pro} \quad x < 0.$$

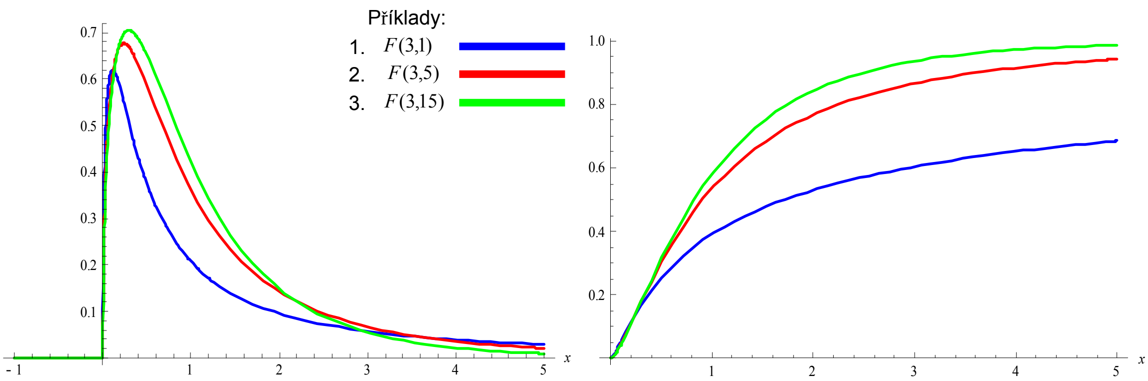


Obr. 1.5: Studentovo rozložení



Obr. 1.6: Fisherovo - Snedecorovo rozložení 1

Fisherovo-Snedecorovo rozložení $F(n_1, n_2)$



Funkce hustoty

$$f(x) = \frac{1}{B(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2})} (\frac{n_1}{n_2})^{\frac{n_1}{2}} x^{\frac{n_1}{2}-1} (1 + \frac{n_1}{n_2} x)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}$$

Distribuční funkci

$$F(x) = \frac{1}{B(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2})} (\frac{n_1}{n_2})^{\frac{n_1}{2}} \int_{-\infty}^{x} \tau^{\frac{n_1}{2}-1} (1 + \frac{n_1}{n_2} \tau)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} d\tau$$

Obr. 1.7: Fisherovo - Snedecorovo rozložení 2

9. **Weibullovo rozložení** $W(\delta, b, k)$. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má rozložení $W(\delta, b, k)$ o $\delta >$ $> 0, k > 0, b \in \mathbb{R}$, jestliže má funkci hustoty

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\delta}(x-b)^{k-1} \exp\left(-\frac{(x-b)^k}{\delta}\right), & \text{pro } x \geq b, \\ 0, & \text{pro } x < b. \end{cases}$$

Důsledek 1.139. $W(\delta, b, 1) \equiv E(b, \delta)$.

Weibulovo rozložení pro $k > 1$ modeluje životnost zařízení podléhajícího opotřebení a nebo únavě materiálu.

Weibulovo rozložení pro $k < 1$ modeluje životnost zařízení, kde dochází k poruchám v důsledku skrytých vad, nikoliv opotřebením.

1.24 Vlastnosti normálního rozložení

Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má normální rozložení s parametry $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, jestliže má funkci hustoty

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

a distribuční funkci

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\dfrac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Je to nejdůležitější rozdělení spojité náhodné veličiny. Je použitelné všude tam, kde kolísání náhodné veličiny je způsobeno součtem velkho počtu nepatrných a vzájemně nezávislých jevů a vlivů.

Modus $\tilde{x} = \mu$, $f(\mu) = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}$.

Inflexní body $x = \mu \pm \sigma$.

Věta 1.140. *Pro náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ s normálním rozložením $No(\mu, \sigma)$ platí*

$$E(\mathbb{X}) = \mu, \quad D(\mathbb{X}) = \sigma^2.$$

Věta 1.141. *Je-li $\mathbb{X}$ náhodná veličina s normálním rozložením $No(\mu, \sigma)$, potom normovaná náhodná veličina $\mathbb{U}$ k náhodné veličině $\mathbb{X}$ má normální rozložení $No(0, 1)$.*

Distribuční funkce náhodné veličiny $\mathbb{X}$ s normálním rozložením $No(\mu, \sigma)$ je tvaru

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Tento integrál nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

Definice 1.142. *Laplaceovou funkcí* nazveme

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Laplaceova funkce je distibuční funkce normálního normovaného rozložení.

Hodnoty funkce $\Phi(u)$ jsou uvedeny v tabulce 1.1 a 1.2.

Věta 1.143. *Nechť $F(x)$ a $\Phi(u)$ jsou distribuční funkce normálního rozložení a normovaného normálního rozložení. Potom*

$$F(x) \equiv \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Důsledek 1.144. *Buď $\mathbb{X}$ náhodná veličina s normálním rozložením $No(\mu,\sigma)$. Potom pro libovolné $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$ platí*

$$p(x_1 \leq \mathbb{X} \leq x_2) = \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right).$$

Věta 1.145. *Pro Laplaceovu funkci platí*

$$\Phi(0) = 0.5,$$

$$\Phi(-t) = 1 - \Phi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Věta 1.146. Zákon tří sigma
Pro náhodnou veličinu s rozložením $No(\mu,\sigma)$ platí,

$$P(\mu - 3\sigma < \mathbb{X} < \mu + 3\sigma) > 99.7\%.$$

Důkaz. Náhodná veličina má rozložení $No(\mu,\sigma)$, potom

$$P(\mu - 3\sigma < \mathbb{X} < \mu + 3\sigma) = \Phi\left(\frac{\mu+3\sigma-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-3\sigma-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-3\sigma}{\sigma}\right) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 = 0.997...$$

□

Tab. 1.1: **Hodnoty Laplaceovy funkce $\Phi(u)$ I.**

u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$
0,00	0,5000000	0,30	0,6179114	0,60	0,7257469	0,90	0,8159399	1,20	0,8849303
0,01	0,5039894	0,31	0,6217195	0,61	0,7290691	0,91	0,8185887	1,21	0,8868606
0,02	0,5079783	0,32	0,6255158	0,62	0,7323711	0,92	0,8212136	1,22	0,8887676
0,03	0,5119665	0,33	0,6293000	0,63	0,7356527	0,93	0,8238145	1,23	0,8906514
0,04	0,5159534	0,34	0,6330717	0,64	0,7389137	0,94	0,8263912	1,24	0,8925123
0,05	0,5199388	0,35	0,6368307	0,65	0,7421539	0,95	0,8289439	1,25	0,8943502
0,06	0,5239222	0,36	0,6405764	0,66	0,7453731	0,96	0,8314724	1,26	0,8961653
0,07	0,5279032	0,37	0,6443088	0,67	0,7485711	0,97	0,8339768	1,27	0,8979577
0,08	0,5318814	0,38	0,6480273	0,68	0,7517478	0,98	0,8364569	1,28	0,8997274
0,09	0,5358564	0,39	0,6517317	0,69	0,7549029	0,99	0,8389129	1,29	0,9014747
0,10	0,5398278	0,40	0,6554217	0,70	0,7580363	1,00	0,8413447	1,30	0,9031995
0,11	0,5437953	0,41	0,6590970	0,71	0,7611479	1,01	0,8437524	1,31	0,9049021
0,12	0,5477584	0,42	0,6627573	0,72	0,7642375	1,02	0,8461358	1,32	0,9065825
0,13	0,5517168	0,43	0,6664022	0,73	0,7673049	1,03	0,8484950	1,33	0,9082409
0,14	0,5556700	0,44	0,6700314	0,74	0,7703500	1,04	0,8508300	1,34	0,9098773
0,15	0,5596177	0,45	0,6736448	0,75	0,7733726	1,05	0,8531409	1,35	0,9114920
0,16	0,5635595	0,46	0,6772419	0,76	0,7763727	1,06	0,8554277	1,36	0,9130850
0,17	0,5674949	0,47	0,6808225	0,77	0,7793501	1,07	0,8576903	1,37	0,9146565
0,18	0,5714237	0,48	0,6843863	0,78	0,7823046	1,08	0,8599289	1,38	0,9162067
0,19	0,5753454	0,49	0,6879331	0,79	0,7852361	1,09	0,8621434	1,39	0,9177356
0,20	0,5792597	0,50	0,6914625	0,80	0,7881446	1,10	0,8643339	1,40	0,9192433
0,21	0,5831662	0,51	0,6949743	0,81	0,7910299	1,11	0,8665005	1,41	0,9207302
0,22	0,5870604	0,52	0,6984682	0,82	0,7938919	1,12	0,8686431	1,42	0,9221962
0,23	0,5909541	0,53	0,7019440	0,83	0,7967306	1,13	0,8707619	1,43	0,9236415
0,24	0,5948349	0,54	0,7054015	0,84	0,7995458	1,14	0,8728568	1,44	0,9250663
0,25	0,5987063	0,55	0,7088403	0,85	0,8023375	1,15	0,8749281	1,45	0,9264707
0,26	0,6025681	0,56	0,7122603	0,86	0,8051055	1,16	0,8769756	1,46	0,9278550
0,27	0,6064199	0,57	0,7156612	0,87	0,8078498	1,17	0,8789995	1,47	0,9292191
0,28	0,6102612	0,58	0,7190427	0,88	0,8105703	1,18	0,8809999	1,48	0,9305634
0,29	0,6140919	0,59	0,7224047	0,89	0,8132671	1,19	0,8829768	1,49	0,9318879

Tab. 1.2: **Hodnoty Laplaceovy funkce $\Phi(u)$ II.**

u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$
1,50	0,9331928	1,80	0,9640697	2,10	0,9821356	2,40	0,9918025	4,50	0,9999966
1,51	0,9344783	1,81	0,9648521	2,11	0,9825708	2,41	0,9920237	5,00	0,9999997
1,52	0,9357445	1,82	0,9656205	2,12	0,9829970	2,42	0,9922397	5,50	0,9999999
1,53	0,9369916	1,83	0,9663750	2,13	0,9834142	2,43	0,9924506		
1,54	0,9382198	1,84	0,9671159	2,14	0,9838226	2,44	0,9926564		
1,55	0,9394392	1,85	0,9678432	2,15	0,9842224	2,45	0,9928572		
1,56	0,9406201	1,86	0,9685572	2,16	0,9846137	2,46	0,9930531		
1,57	0,9417924	1,87	0,9692581	2,17	0,9849966	2,47	0,9932443		
1,58	0,9429466	1,88	0,9699460	2,18	0,9853713	2,48	0,9934309		
1,59	0,9440826	1,89	0,9706210	2,19	0,9857379	2,49	0,9936128		
1,60	0,9452007	1,90	0,9712834	2,20	0,9860966	2,50	0,9937903		
1,61	0,9463011	1,91	0,9719334	2,21	0,9864474	2,51	0,9939634		
1,62	0,9473839	1,92	0,9725711	2,22	0,9867906	2,52	0,9941323		
1,63	0,9484493	1,93	0,9731966	2,23	0,9871263	2,53	0,9942969		
1,64	0,9494974	1,94	0,9738102	2,24	0,9874545	2,54	0,9944574		
1,65	0,9505285	1,95	0,9744119	2,25	0,9877755	2,55	0,9946139		
1,66	0,9515428	1,96	0,9750021	2,26	0,9880894	2,56	0,9947664		
1,67	0,9525403	1,97	0,9755808	2,27	0,9883962	2,57	0,9949151		
1,68	0,9535213	1,98	0,9761482	2,28	0,9886962	2,58	0,9950600		
1,69	0,9544860	1,99	0,9767045	2,29	0,9889893	2,59	0,9952012		
1,70	0,9554345	2,00	0,9772499	2,30	0,9892759	2,60	0,9953388		
1,71	0,9563671	2,01	0,9777844	2,31	0,9895559	2,70	0,9965330		
1,72	0,9572838	2,02	0,9783083	2,32	0,9898296	2,80	0,9974449		
1,73	0,9581849	2,03	0,9788217	2,33	0,9900969	2,90	0,9981342		
1,74	0,9590705	2,04	0,9793248	2,34	0,9903581	3,00	0,9986501		
1,75	0,9599408	2,05	0,9798178	2,35	0,9906133	3,20	0,9993129		
1,76	0,9607961	2,06	0,9803007	2,36	0,9908625	3,40	0,9996631		
1,77	0,9616364	2,07	0,9807738	2,37	0,9911060	3,60	0,9998409		
1,78	0,9624620	2,08	0,9812372	2,38	0,9913437	3,80	0,9999277		
1,79	0,9632730	2,09	0,9816911	2,39	0,9915758	4,00	0,9999683		

1.25 Limitní věty

Věta 1.147. První Čebyševova nerovnost
Nechť $\mathbb{X}$ je náhodná veličina, která nabývá pouze nezáporných hodnot. Potom

$$p(\mathbb{X} \geq 1) \leq E(\mathbb{X}).$$

Důkaz. Nechť $\mathbb{X}$ je diskrétní náhodná veličina s frekvenční funkcí $f(x)$. Potom pro nezáporné x_i platí

$$p(\mathbb{X} > 1) = \sum_{x_i \geq 1} f(x_i) \leq \sum_{x_i \geq 1} x_i f(x_i) \leq \sum_{x_i \geq 0} x_i f(x_i) = E(\mathbb{X}).$$

□

Věta 1.148. Druhá Čebyševova nerovnost
Pro každou náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ a pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$p\left(|\mathbb{X} - E(\mathbb{X})| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(\mathbb{X})}{\varepsilon^2}$$

Důkaz.

$$p(|\mathbb{X} - E(\mathbb{X})| \geq \varepsilon) = 1 - p(|\mathbb{X} - E(\mathbb{X})| < \varepsilon)$$

$$p(|\mathbb{X} - E(\mathbb{X})| \geq \varepsilon) = p\left(\frac{|\mathbb{X} - E(\mathbb{X})|}{\varepsilon} \geq 1\right) = p\left(\frac{|\mathbb{X} - E(\mathbb{X})|^2}{\varepsilon^2} \geq 1\right).$$

Podle první Čebyševovy nerovnosti pro náhodnou veličinu s nezápornými hodnotami platí

$$p\left(\frac{|\mathbb{X} - E(\mathbb{X})|^2}{\varepsilon^2} \geq 1\right) \leq E\left(\frac{|\mathbb{X} - E(\mathbb{X})|^2}{\varepsilon^2}\right) = \frac{D(\mathbb{X})}{\varepsilon^2}.$$

Je tedy

$$1 - p(|\mathbb{X} - E(\mathbb{X})| < \varepsilon) \leq \frac{D(\mathbb{X})}{\varepsilon^2}.$$

Po úpravě dostaneme tvrzení věty. □

Příklad 1.149. Pomocí druhé Čebyševovy nerovnosti odhadněte pravděpodobnost

$$p(|\mathbb{X} - E(\mathbb{X})| < 0.1)$$

pro náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ s rozložením $E(3, \frac{1}{20})$.

Řešení. Pro náhodnou veličinu s exponenciálním rozložením $E(A, d)$ platí

$$E(\mathbb{X}) = A + d \Rightarrow E(\mathbb{X}) = 3 + \frac{1}{20} = 3.05,$$

$$D(\mathbb{X}) = d^2 \Rightarrow D(\mathbb{X}) = 0.0025.$$

Dosadíme

$$p(|\mathbb{X} - E(\mathbb{X})| < \varepsilon) = p(|\mathbb{X} - 3.05| < 0.1) \geq 1 - \frac{0.0025}{0.01} = 1 - 0.25 = 0.75.$$

□

Věta 1.150. Bernouliova věta, Zákon velkých čísel
Nechť náhodná veličina $\mathbb{X}$ má rozložení $Bi(n,p)$, potom pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí

$$p\left(\left|\frac{\mathbb{X}}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Důkaz. Podle druhé Čebyševovy nerovnosti platí

$$p\left(\left|\frac{\mathbb{X}}{n} - E\left(\frac{\mathbb{X}}{n}\right)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D\left(\frac{\mathbb{X}}{n}\right)}{\varepsilon^2}.$$

Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má binomické rozložení $Bi(n,p)$ a proto

$$E(\mathbb{X}) = np, \quad D(\mathbb{X}) = np(1-p).$$

Podle věty 1.93 máme

$$E\left(\frac{\mathbb{X}}{n}\right) = E\left(\frac{1}{n}\mathbb{X}\right) = \frac{1}{n}E(\mathbb{X}) = \frac{1}{n}np = p,$$

$$D\left(\frac{\mathbb{X}}{n}\right) = \frac{1}{n^2}D(\mathbb{X}) = \frac{1}{n^2}np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Po dosazení dostaneme

$$p\left(\left|\frac{\mathbb{X}}{n} - E\left(\frac{\mathbb{X}}{n}\right)\right| < \varepsilon\right) = \left(\left|\frac{\mathbb{X}}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D\left(\frac{\mathbb{X}}{n}\right)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

□

Důsledek 1.151. *Nechť náhodná veličina $\mathbb{X}$ má rozložení $Bi(n,p)$, potom pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí*

$$\lim_{n\to+\infty} p\left(\left|\frac{\mathbb{X}}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Příklad 1.152. Mějme náhodnou veličinu s binomickým rozložením $Bi(1000; 0.514)$. Určete:
a) Pravděpodobnost, že relativní četnost se bude od pravděpodobnosti lišit o méně než 0.02.
b) Kolik musíme udělat pokusů, aby jsme s pravděpodobností alespoň 0.95 mohli očekávat, že se relativní četnost bude lišit od pravděpodobnosti o méně než 0.02?

Řešení. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má binomické rozložení $Bi(n,p)$ a proto

$$E(\mathbb{X}) = np, \quad D(\mathbb{X}) = np(1-p).$$

Relativní četnost je veličina $\frac{\mathbb{X}}{n}$.
a) Podle Bernoulliovy věty máme

$$p\left(\left|\frac{\mathbb{X}}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Dosazením dostaneme

$$p\left(\left|\frac{\mathbb{X}}{1000} - 0.514\right| < 0.02\right) \geq 1 - \frac{0.514(1-0.514)}{1000 \cdot 0.02^2} = 0.3755.$$

b) Opět podle Bernouliovy věty máme

$$p\left(\left|\frac{\mathbb{X}}{n}-0.514\right|<0.02\right)\geq 1-\frac{0.514(1-0.514)}{n\cdot 0.02^2}\geq 0.95.$$

Vyřešíme poslední nerovnost

$$1-\frac{0.514(1-0.514)}{n\cdot 0.02^2}\geq 0.95$$

a dostaneme

$$n\geq 12490.$$

□

Věta 1.153. Lindebergova - Levyho věta, Centrální limitní věta
Nechť $\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2,\ldots,\mathbb{X}_n$ jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny, které mají všechny stejnou střední hodnotu μ a stejný rozptyl σ^2. Potom pro dostatečně velké n má náhodná veličina

$$\mathbb{Y}=\frac{\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2+\cdots+\mathbb{X}_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

přibližně normální rozložení $No(0,1)$.

Důsledek 1.154. *Nechť $\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2,\ldots,\mathbb{X}_n$ jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny, které mají všechny stejnou střední hodnotu μ a stejný rozptyl σ^2. Potom pro dostatečně velké n pro náhodnou veličinu $\mathbb{Y}=\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2+\cdots+\mathbb{X}_n$ a pro libovolné $x_1,x_2\in\mathbb{R},x_1<x_2$ platí*

$$p\left(x_1\leq\mathbb{Y}\leq x_2\right)\doteq\Phi\left(\frac{x_2-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

$$E(\mathbb{Y})=n\mu,\quad D(\mathbb{Y})=n\sigma^2.$$

Věta 1.155. Moivreova - Laplaceova věta
Nechť náhodná veličina $\mathbb{X}$ má binomické rozložení $Bi(n,p)$. Jestliže je n dostatečně velké a p není blízké ani k nule ani k jedné, potom lze toto binomické rozložení aproximovat normálním rozložením $No(\mu,\sigma)$, kde $\mu=np,\sigma=\sqrt{np(1-p)}$.

Důsledek 1.156. *Nechť $\mathbb{X}$ má binomické rozložení $Bi(n,p)$. Potom pro dostatečně velké n, v praxi $n>30$, p které není blízké ani k nule ani k jedné a pro libovoln $x_1,x_2\in\mathbb{R},x_1<x_2$ platí*

$$p\left(x_1\leq\mathbb{X}\leq x_2\right)\doteq\Phi\left(\frac{x_2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

$$E(\mathbb{X})=n\mu,\quad D(\mathbb{X})=n\sigma^2.$$

Aproximace se považuje za vyhovující pro

$$np(1-p)>9\quad a\quad \frac{1}{n+1}<p<\frac{n}{n+1}.$$

Příklad 1.157. Pravděpodobnost nastoupení jevu A v každém pokuse je rovna 0.7. Pomocí Moivre-Laplaceovy věty odhadněte, kolikrát musíme opakovat pokus, abychom s pravděpodobností 0.9 mohli očekávat, že se relativní četnost bude odlišovat od pravděpodobnosti o méně než 0.05?

Řešení. Máme náhodnou veličinu s binomickým rozložením, které můžeme aproximovat normálním rozložením.

$$\left|\frac{X}{n} - 0.7\right| < 0.05,$$

$$0.65n < X < 0.75n.$$

$$p(0.65n < X < 0.75n) = \Phi\left(\frac{0.75n - 0.7n}{\sqrt{n \cdot 0.7 \cdot 0.3}}\right) - \Phi\left(\frac{0.65n - 0.7n}{\sqrt{n \cdot 0.7 \cdot 0.3}}\right) =$$

$$\Phi\left(\frac{0.05n}{\sqrt{n \cdot 0.7 \cdot 0.3}}\right) - \Phi\left(-\frac{0.05n}{\sqrt{n \cdot 0.7 \cdot 0.3}}\right) = 2\Phi\left(\frac{0.05n}{\sqrt{n \cdot 0.7 \cdot 0.3}}\right) - 1 = 0.9$$

$$\Phi\left(\frac{0.05n}{\sqrt{n \cdot 0.7 \cdot 0.3}}\right) = 0.95$$

$$\frac{0.05\sqrt{n}}{\sqrt{21}} = 1.645$$

$$n = 228.65$$

Musíme provést alespoň 229 pokusů.
Podle přesnosti Vámi použitých hodnot Laplaceovy funkce se může numerický výsledek odlišovat

□

Příklad 1.158. Bylo provedeno 100 nezávislých pokusů. Pravděpodobnost nastoupení jevu A je v každém pokuse rovna 0.2. Určete pravděpodobnost, že počet nastoupení jevu A bude větší než 15 a menší než 30.

Řešení. Náhodná veličina udávající počet nastoupení jevu A má binomické rozložení $Bi(100; 0.2)$. Budeme je aproximovat normálním rozložením $No(\mu, \sigma)$, kde

$$\mu = np = 100 \cdot 0.2 = 20,$$

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8} = \sqrt{16} = 4.$$

Proto

$$p\,(15 < \mathbb{X} < 30) = \Phi\left(\frac{30-20}{4}\right) - \Phi\left(\frac{15-20}{4}\right) =$$

$$\Phi(2.5) - \Phi(-1.5) = 0.99379 - (1 - 0.89435) = 0.88814.$$

□

Příklad 1.159. Pravděpodobnost nastoupení jevu A je v každém pokusu rovna p, které není blízké ani k nule ani k jedné . Jestliže je n dostatečně velké ($n > 100$), jaká je pravděpodobnost, že počet nastoupení jevu A bude od α do β.

Řešení. Pomocí Moivre-Laplaceovy věty dostáváme

$$P(\alpha < x < \beta) = P\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{\beta - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

□

Věta 1.160. Poissonova
Mějme posloupnost $\{\mathbb{X}_n\}$ *náhodných veličin s rozložením* $Bi(n, p_n), n = 1, 2 \ldots$. *Nechť* $p_n \to 0$ *pro* $n \to +\infty$ *a* $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, *kde* $\lambda > 0$ *je konstanta. Potom*

$$\lim_{n\to+\infty} p(\mathbb{X}_n = i) = \lim_{n\to+\infty} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \frac{\lambda^i}{i!} \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Neboli binomické rozložení v limitě přechází v Poissonovo.
V praxi pro $n > 30$ a $p < 0.1$ můžeme $Bi(n, p)$ aproximovat rozložením $Po(\lambda = np)$ s chybou menší než 10^{-2}.

Pojmy k zapamatování

- Definovali jsme si pravděpodobnost a odvodili si její základní vlastnosti.
- Zavedli jsme si náhodnou veličinu a ulázali si, jak se s ní pracuje.
- Uvedli sme si některé nejužívanější rozložení diskrétních i spojitých náhodných veličin.
- Speciální pozornost jsme věnovali normálnímu rozložení.
- Seznámili jsme se s limitními větami.

Kontrolní otázky

1. Co rozumíme pojmem rozptyl?
2. K čemu nám slouží náhodná veličina?
3. Kde se všude můžete setkat s normálním rozložením?

Cvičení

1. Obrazovka radaru je kruhová o poloměru r. Při zapnutí se na ní náhodně objeví svítící bod znamenající letící objekt. Určete pravděpodobnost, že svítící bod bude od středu obrazovky vzdálen o méně než $\frac{r}{2}$.

2. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má funkci hustoty

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a. \end{cases}$$

   Určete 1) parametr a, 2) pravděpodobnost, že náhodná veličina $\mathbb{X}$ bude ležet v intervalu $\left(\frac{a}{2}, a\right)$.

3. Může být pro některou spojitou náhodnou veličinu $\mathbb{X}$
   a) distribuční funkce větší než 1?
   b) funkce hustoty větší než 1?
   c) distribuční funkce záporná?
   d) funkce hustoty záporná?

4. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má Laplaceovo rozložení s funkcí hustoty

$$f(x) = a \cdot e^{-\lambda|x|},$$

kde $\lambda > 0$ je konstanta příslušná k danému rozložení. Určete a) paramatr a, b) distribuční funkci, c)$E(\mathbb{X})$, d) $D(\mathbb{X})$.

5. Továrna vyrobí za směnu 20 000 diod. Pravděpodobnost výroby vadné diody je 0.02. Jaká je pravděpodobnost, že počet vadných diod za směnu bude nejvýše 450.

6. Továrna vyrobí za směnu 15 000 čipů. Pravděpodobnost výroby vadného čipu je 0.03. Jaká je pravděpodobnost, že počet vadných čipů za směnu bude nejvýše 475.

7. Je dána funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ ax^2, & 0 \le x < 1, \\ a(2-x)^2, & 1 \le x < 2, \\ 0, & x \ge 2. \end{cases}$$

Určete: a) parametr a tak, aby funkce $f(x)$ byla funkcí hustoty, b) střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku, c) koeficienty šikmosti a špičatosti.

8. Pravděpodobnost poruchy stroje za dobu T je rovna 0.2. Určete pravděpodobnost, že ze 100 strojů stejného typu, které pracují nezávisle na sobě, bude mít poruchu 14 až 26 strojů. Řešte a) pomocí binomického rozložení, b) pomocí Čebyševovy nerovnosti, c) pomocí Moivre-Laplaceovy věty.

9. Odhadněte pomocí Moivre-Laplaceovy věty, kolik je třeba provést nezávislých pokusů, abychom s pravděpodobností 0.8 získali alespoň pětkrát kladný výsledek, jestliže při každém pokusu nastane kladný výsledek s pravděpodobností 0.05.

10. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má pro $x > 0$ funkci hustoty $f(x) = Axe^{-h^2x^2}$, kde $h > 0$ je parametr, a pro $x \le 0$ je $f(x) = 0$. Určete 1) koeficient A, 2) modus $\mathcal{M}$, 3) střední hodnotu a rozptyl 4) pravděpodobnost, že náhodná veličina bude menší než $\mathcal{M}$.

11. Odhadněte pomocí Moivre-Laplaceovy věty, kolik je třeba provést nezávislých pokusů, abychom s pravděpodobností 0.9 získali alespoň šestkrát kladný výsledek, jestliže při každém pokusu nastane kladný výsledek s pravděpodobností 0.04.

12. Pro náhodnou veličinu X, která má rozložení $F(2,k)$ určete
1)$P(X \ge x)$, 2) distribuční funkci.

13. Náhodný pokus spočívá ve vytažení 4 karet z důkladně promíchané sady 32 karet. Určete pravděpodobnost, že budou vytaženy karty červená sedma, zelená desítka, žaludský král a kulové eso v uvedeném pořadí.

14. Máme 10 krabic. V každé je 10 koulí. V i-té krabici je i černých a $10-i$ bílých koulí. Náhodně vybereme krabici a z ní vyjmeme jednu kouli. Jaká je pravděpodobnost, že bude černá?

Výsledky

1. Použijeme geometrickou pravděpodobnost

$$p(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\pi \frac{r^2}{4}}{\pi r^2} = \frac{1}{4}.$$

2. 1) Parametr a určíme z podmínky pro funkci hustoty

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Proto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-a}^{a} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\pi}.$$

2) $$p\left(\frac{\frac{1}{\pi}}{2} < \mathbb{X} < \frac{1}{\pi}\right) = \frac{1}{3}.$$

3. Přímo z definice plyne: a)ne, b) ano, c)ne, d) ne.

4. $a = \frac{\lambda}{2}$,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda x}, & x > 0, \end{cases}$$

$E(\mathbb{X}) = 0$,

$D(\mathbb{X}) = \frac{2}{\lambda^2}$.

5. Máme $n = 20000, p = 0.02$. Potom

$$\bar{x} = np = 20000 \cdot 0.02 = 400, \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 19.79898987.$$

$$p(\mathbb{X} \leq 450) = F(450) = \Phi\left(\frac{450 - 400}{19.79898987}\right) = \Phi(2.52538136179) = 0.99413.$$

6. Máme $n = 15000, p = 0.03$, potom

$$\bar{x} = np = 15000 \cdot 0.03 = 450, \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 20.893.$$

$$p(\mathbb{X} \leq 475) = F(475) = \Phi\left(\frac{475 - 450}{20.893}\right) = \Phi(1.196573) = 0.884268.$$

7.

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = a\int_0^1 x^2 dx + a\int_1^2 (2-x)^2 dx = a\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 - a\frac{(2-x)^3}{3}\bigg|_1^2 = \frac{a}{3} + \frac{a}{3}.$$

Odtud $a = \frac{3}{2}$.

$$m_1 = E(X) = \frac{3}{2}\int_0^1 x^3 dx + \frac{3}{2}\int_1^2 x(2-x)^2 dx = \frac{3}{2}\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\left(6 - \frac{28}{3} + \frac{15}{4}\right) = 1,$$

$$m_2 = \frac{3}{2}\int_0^1 x^4 dx + \frac{3}{2}\int_1^2 x^2(2-x)^2 dx = \frac{3}{10} + 14 + \frac{45}{2} = 1.1,$$
$$m_3 = \frac{3}{2}\int_0^1 x^5 dx + \frac{3}{2}\int_1^2 x^3(2-x)^2 dx = \frac{1}{4} + \frac{45}{2} - \frac{186}{5} + \frac{63}{4} = 1.3,$$
$$m_4 = \frac{3}{2}\int_0^1 x^6 dx + \frac{3}{2}\int_1^2 x^4(2-x)^2 dx = \frac{3}{14} + \frac{186}{5} - 63 + \frac{381}{14} = 1\frac{22}{35}.$$
$$M_1 = 0,$$
$$M_2 = m_2 - (m_1)^2 = 0.1,$$
$$M_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2(m_1)^3 = 0,$$
$$M_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6(m_1)^2m_2 - 3(m_1)^4 = \frac{1}{35}.$$

Potom
$$E(X) = m_1 = 1, D(X) = M_2 = 0.1, \sigma = \sqrt{D(X)}, k_1 = \frac{M_3}{\sigma^3} = 0,$$
$$k_2 = \frac{M_4}{\sigma_4} - 3 = \frac{\frac{1}{35}}{0.01} - 3 = -\frac{1}{7}.$$

8.
$$p(14 \le X \le 26) = p(|X-20| \le 6) = p(|X-20| < 7).$$

a) Přímý výpočet pomocí biomického rozložení je velmi zdlouhavý!
$$p(14 \le X \le 26) = \sum_{k=14}^{26} \binom{100}{k} \cdot 0.2^k 0.8^{100-k}$$

b) Podle Čebyševovy nerovnosti máme
$$p(|X-20| < 7) \ge 1 - \frac{np(1-p)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8}{7^2} = 1 - \frac{16}{49} = 0.6735...$$

c) Podle Moivre-Laplaceovy věty máme:
$$p(14 \le X \le 26) = p\left(-1.5 \le \frac{x-20}{4} \le 1.5\right) = 2\Phi(1.5) - 1 = 0.8664...$$

9. Máme $Bi(n, 0.05)$ a máme určit n.
$$P(5 \le X < n) = \Phi\left(\frac{n - 0.05n}{\sqrt{n0.05 \cdot 0.95}}\right) - \Phi\left(\frac{5 - 0.05n}{\sqrt{n0.05 \cdot 0.95}}\right) = 0.8,$$
$$\Phi\left(\sqrt{n}\cdot\sqrt{19}\right) - \Phi\left(\frac{5 - 0.05n}{\sqrt{n0.05 \cdot 0.95}}\right) = 0.8,$$
protože je $n > 5$ je $\sqrt{n}\cdot\sqrt{19} > 4$ a proto můžeme předpokládat, že $\Phi(\sqrt{n}\cdot\sqrt{19}) = 1$. Potom
$$1 - \Phi\left(\frac{5 - 0.05n}{\sqrt{n0.05 \cdot 0.95}}\right) = 0.8,$$
$$\Phi\left(\frac{5 - 0.05n}{\sqrt{0.0475n}}\right) = 0.2,$$
$$\frac{5 - 0.05n}{\sqrt{0.0475n}} = -0.8416,$$
$$n \ge 144.$$

10. 1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow A = 2h^2.$$

2)

$$\mathcal{M} = \frac{1}{h\sqrt{2}}$$

3)

$$E(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2h}, \quad D(X) = \frac{4-\pi}{4h^2}$$

4)

$$P(X < \mathcal{M}) \approx 0.393.$$

11. Máme $Bi(n, 0.04)$ a máme určit n.

$$P(6 \le X < n) = \Phi\left(\frac{n - 0.04n}{\sqrt{n0.04 \cdot 0.96}}\right) - \Phi\left(\frac{6 - 0.04n}{\sqrt{n0.04 \cdot 0.96}}\right) = 0.9,$$

$$\Phi\left(\sqrt{n} \cdot \sqrt{24}\right) - \Phi\left(\frac{6 - 0.04n}{\sqrt{n0.04 \cdot 0.96}}\right) = 0.9,$$

protože je $n > 6$ je $\sqrt{n} \cdot \sqrt{24} > 5$ a proto můžeme předpokládat, že $\Phi(\sqrt{n} \cdot \sqrt{24}) = 1$. Potom

$$1 - \Phi\left(\frac{6 - 0.04n}{\sqrt{n0.04 \cdot 0.96}}\right) = 0.9,$$

$$\Phi\left(\frac{6 - 0.04n}{\sqrt{0.0384n}}\right) = 0.1,$$

$$\frac{6 - 0.04n}{\sqrt{0.0384n}} = -1.289,$$

$$n \ge 247.$$

12. Prostým dosazením dostaneme

1)$P(X \ge x) = (1 + \frac{2x}{k})^{-k/2}$

2)

$$F(x) = 1 - \left(1 - \frac{2x}{k}\right)^{-\frac{k}{2}}.$$

13.

$$P = \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{31} \cdot \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{29} = 1.1587 \cdot 10^{-6}.$$

14. Použijeme větu o úplné pravděpodobnosti.

Označme A vytažení černé koule. Pravděpodobnost výběru i-té krabice je

$$p(B_i) = \frac{1}{10}.$$

Jevy B_i, $i = 1, 2. \ldots, 10$ tvoří úplný systém jevů. Proto

$$P(A) = \sum_{i=1}^{10} p_{B_i}(A)p(B_i) = \sum_{i=1}^{10} \frac{i}{10}\frac{1}{10}.$$

Maplety

V následujících mapletech si můžete některé studované pojmy přiblížit, případně si sestavit vlastní zadání příkladů.

1. Opakování pojmů z kombinatoriky
2. Binomické rozložení pravděpodobnosti
3. Aproximace binomického rozložení normálním
4. Exponenciální rozložení pravděpodobnosti
5. Geometrické rozložení pravděpodobnosti
6. Hypergeometrické rozložení pravděpodobnosti
7. Normální rozložení pravděpodobnosti
8. Kvantily normálního rozložení pravděpodobnosti
9. Poissonovo rozložení pravděpodobnosti
10. Fisher-Snedocorovo rozložení pravděpodobnosti
11. Studentovo rozložení pravděpodobnosti
12. Distribuční a frekvenční (pravděpodobnostní) funkce
13. Určitý integrál
14. Integrování
15. Derivování

2 Matematická statistika

Průvodce studiem

V této kapitole se budeme věnovat matematické statistice. S jejími základy jste se setkali v předmětu Matematika 3.

Protože od té doby už uběhlo dost času, provedeme si zde důkladné opakování a potom se nově budeme věnovat testování statistických hypotéz.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- Zpracovávat dat ze statistického souboru.
- Zformulovat nulovou hypotézu.
- Vhodným testem rozhodnout o platnosti nulové hypotézy.

2.1 Úvod

Ze všech existujících výroků o statistice si připomeneme jen dva:

1. *Existují tři druhy lží:*
   - *(a) lež obyčejná*
   - *(b) předvolební sliby*
   - *(c) statistika*
2. V pohádce *Princové jsou na draka* zazněl refrén písně od Zdeňka Svěráka:

   Statistika nuda je,
   má však cenné údaje,
   neklesejte na mysli,
   ona vám to vyčíslí.

Někde mezi těmito dvěma výroky leží podstata statistiky.

Statistika nám může pomoci odhalit skrytou strukturu procesu, který máme popsán dosti velkým počtem měření, údajů, ... Pokud je hodnot příliš mnoho, tak se můžeme v nich „ztratit“. Statistika nás učí, jak postupovat a jakým způsobem hledat podstatné údaje o každém souboru hodnot.

2.2 Náhodný výběr, zpracování statistického materiálu.

S těmito pojmy jste se stkali už v předmětu Matematika 3. Provedeme si opakování a zavedeme si jejich označení:
Základní soubor = množina hodnot se kterou pracujeme. Výběr= $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
n je rozsah výběru.
$[x_{\min}, x_{\max}]$ variační obor.
$R = x_{\max} - x_{\min}$ variační rozpětí.
Pokud pracujeme s rozsáhlejším výběrem, můžeme jej rozdělit do tříd.
Třídy - navzájem disjunktní množiny, jednoznačná zařaditelnost prvků.
Délka třídy - většinou se volí stejná délka h.
Počet tříd k bývá většinou mezi 7 až 15, popřípadě roven $\sqrt{n}$.

$$k = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{h}.$$

Jinak využijeme empirické vztahy

$$k = 0.08R,$$

$$h < \frac{1}{12}R < 2h.$$

Každému prvku dané třídy přiřazujeme stejnou hodnotu - třídní znak.
Absolutní četnost n_i = počet prvků v i-té třídě.

$$\sum_i n_i = n.$$

Relativní četnost $f_i = \dfrac{n_i}{n}$ - často bývá uváděna v procentech.
Platí

$$\sum_i f_i = 1$$

Důkaz.

$$\sum_i f_i = \sum_i \frac{n_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_i n_i = \frac{1}{n} n = 1.$$

□

Kumulativní absolutní četnost $N_i = \sum_{s\leq i} n_s$.
Kumulativní relativní četnost $F_i = \sum_{s\leq i} f_s$.

$$N_k = n, \qquad F_k = 1.$$

Relativní četnost f_i představuje empirickou hodnotu pravděpodobnosti, že náhodná veličina $\mathbb{X}$ nabude hodnoty z i-té třídy.
F_i je empirická hodnota distribuční funkce.
Variační řada = roztřídění do dvojic (x_i, f_i) a nebo (x_i, n_i).
Grafické způsoby zobrazení:
Graf - množina bodů $\{(x_i, n_i), i = 1, \ldots, k\}$.
Polygon - lomená čára spojující body (x_i, n_i).
Histogram - stupňovitá čára ohraničující obdelníky, jejichž základnou jsou rozsahy tříd a výškou odpovídající třídní četnosti.
Úsečkový diagram - množina úseček rovnoběžných s osou y, vycházejících ze středu třídy a s délkou n_i.

2.3 Výběrové charakteristiky a jejich vlastnosti

Definice 2.1. 1. Výběrový průměr

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

2. Výběrový rozptyl

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

3. Výběrová směrodatná odchylka

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

4. Výběrový obecný moment k-tého řádu

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k.$$

5. Výběrový centrální moment k-tého řádu

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^k.$$

6. Výběrové rozpětí
$$v = \max_{i=1,\dots,n}\{x_i\} - \min_{i=1,\dots,n}\{x_i\}.$$
7. Výběrová kovariace
$$C = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$
8. Výběrový koeficient korelace
$$R = \frac{C}{s(x)s(y)}.$$

Věta 2.2. *Nechť $X = (x_1, \dots, X_n)$ je náhodný výběr z rozložení, které má střední hodnotu μ a rozptyl σ^2. Potom*
$$E(\bar{X}) = \mu,$$
$$D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n},$$
$$E(s^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Důkaz.
$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i) = \frac{1}{n}n\mu = \mu,$$
$$D(\bar{X}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D\left(\frac{x_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{D(X)}{n}.$$
□

Věta 2.3. *Nechť $\mathbb{X}$ má rozložení $No(\mu, \sigma)$. Potom*
$$\bar{x} \textit{ má rozložení } No\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$
$$\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \textit{ má rozložení } No\,(0,1)\,,$$
$$\frac{s^2}{\sigma^2} \textit{ má rozložení } \chi^2(n-1),$$
$$\frac{\bar{x}-\mu}{s}\sqrt{n-1} \textit{ má rozložení } t(n-1).$$

2.4 Základní bodové a intervalové odhady.

Požadavky na odhad:
Nechť G je výběrová charakteristika parametru a. Potom požadujeme:
a) Nestranost: $a = E(G)$.
b) Konzistentnost: $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|E(G) - a| < \varepsilon) = 1$.
Se zvětšujícím se rozsahem výběru se zmenšuje počet chyb.

2.4.1 Bodové odhady

$$E(\bar{X}) = \mu,$$
$$D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n},$$
$$E(s^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Proto

$$\mu := \bar{X},$$
$$\sigma^2 := \frac{n}{n-1}s^2,$$
$$\sigma := \sqrt{\frac{n}{n-1}}s.$$

2.4.2 Odhady parametrů normálního rozložení

Intervalovým odhadem střední hodnoty μ při známém rozptylu σ^2 je interval

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}},$$

kde $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ je $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ kvantil normovaného normálního rozložení.

$$u_{0.975} = 1.96,$$

$$u_{0.995} = 2.576.$$

Intervalovým odhadem střední hodnoty μ při neznámém rozptylu σ^2 je interval

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n-1}}t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n-1}}t_{1-\frac{\alpha}{2}},$$

kde $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ je $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ kvantil Studentova rozložení s $k = n-1$ stupni volnosti, s je výběrová směrodatná odchylka.
Intervalovým odhadem rozptylu σ^2 je interval

$$\frac{n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}s^2 \leq \sigma^2 \leq \frac{n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}s^2,$$

kde χ^2_a je a kvantil χ^2 rozložení s $k = n - 1$ stupni volnosti.

Příklad 2.4. Určete 99% interval spolehlivosti pro parametr μ náhodné veličiny $\mathbb{X}$ s normálním rozložením s rozptylem $\sigma^2 = 7,4$ máme-li výběr o rozsahu $n = 32$ s průměrem $\overline{x} = 15.344$.

Řešení. Jde o určení intervalu spolehlivosti při známém rozptylu.

$$\overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \overline{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}},$$

po dosazení pro $u_{0.995} = 2.576$ dostaneme $14.12 \leq \mu \leq 16.58$. □

Příklad 2.5. Statistický soubor byl získán měřením parametrů 20 výrobků a má střední hodnotu $\bar{x} = 0.149$ a směrodatnou odchylku $s = 0.0468$. Určete 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ základního souboru. Postup zdůvodněte.

Řešení. Máme $n = 20$, $\bar{x} = 0.149$, $s = 0.0468$, proto pro interval spolehlivosti platí

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n-1}} t(1 - \frac{\alpha}{2}) \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n-1}} t(1 - \frac{\alpha}{2}),$$

kde $t(1 - \frac{\alpha}{2})$ je kritická hodnota Studentova rozložení. Z tabulek určíme $t(0.975) = 2.093$ pro $k = 20 - 1 = 19$ stupňů volnosti.

$$0.149 - \frac{0.0468}{\sqrt{19}} 2.093 \leq \mu \leq 0.149 + \frac{0.0468}{\sqrt{19}} 2.093,$$

$$0.127 \leq \mu \leq 0.171.$$

□

2.5 Testování statistických hypotéz.

Statistickou hypotézou H rozumíme každé tvrzení o rozložení náhodné veličiny $\mathbb{X}$, které děláme na základě provedeného výběru. Toto tvrzení se bude týkat buď distribuční funkce, nebo funkce hustoty, nebo frekvenční funkce.

Postup, kterým rozhodujeme o správnosti hypotézy, se nazývá testem. Rozhodneme-li, že je hypotéza správná, řekneme, že jsme hypotézu přijali, v opačném případě řekneme, že jsme hypotézu zamítli. Každé rozhodnutí provádíme na jisté *hladině významnosti*, která nám udává pravděpodobnost chyby. V praxi se pracuje v drtivé většině s hladinami 1% a 5%.

S každým testem je spojena náhodná veličina Q, která je testovacím kritériem. Veličina Q nabývá hodnot závislých na vyslovené hypotéze H i na charakteristikách náhodného výběru. Q je náhodná veličina a přísluší jí určité rozložení.

Testy mohou být jednostranné a dvoustranné.

Pro jednostranný test platí:
Jestliže p je zvolená hladina významnosti a platí

$$p(Q \leq x_{1-p}) \geq 1 - p,$$

kde x_{1-p} je $(1-p)$-kvantil náhodné veličiny Q, neboli

$$Q \in (-\infty, x_{1-p})$$

s pravděpodobností alespoň $1-p$, potom přijímáme hypotézu H. V opačném pípadě ji zamítáme.

Místo označení $(1-p)$-kvantil se používá i označení kritická hodnota na hladině významnosti p.

Pro dvoustranný test platí:
Hypotézu H přijímáme v případě, že platí

$$p(x_{p_1} \leq Q \leq x_{1-p_2}) = 1 - p,$$

kde $p_1 + p_2 = p$.

Pokud má veličina Q symetrické rozložení a pracujeme s dvoustranným testem, potom má $U = \dfrac{Q-\mu}{\sigma}$ symetrické rozložení podle nuly a potom hypotézu H přijímáme v případě, že platí

$$p(-u_{1-p/2} \leq U \leq u_{1-p/2}) = 1 - p,$$

kde u_α je α-kvantil náhodné veličiny U.

Rozložení Q je závislé na provedeném výběru. Je nutno sledovat podmínky, kdy můžeme který test použít.

2.6 Testy významnosti

2.6.1 Test významnosti rozdílu mezi dvěma rozptyly

Uvažujme dva výběry s rozsahy n_1, n_2 a s charakteristikami $\bar{x_1}, s_1, \bar{x_2}, s_2$, které byly odebrány ze dvou normálně rozložených základních souborů s parametry $\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2$. Testovacím kriteriem je veličina

$$F = \frac{s_1^2 \dfrac{n_1}{n_1 - 1}}{s_2^2 \dfrac{n_2}{n_2 - 1}},$$

které přísluší F rozložení s $n_1 - 1, n_2 - 1$ stupni volnosti. Pokud je F menší než kritická hodnota $F_{\alpha/2}$ nemáme důvod odmítnout předpoklad, že rozptyly se liší nepodstatně. Kritické hodnoty jsou tabelovány pro $\alpha/2 = 0.025$ a 0.005, tj. jsou uvedeny v tabulkách kritických hodnot F rozložení s $n_1 - 1, n_2 - 1$.

Při použití je třeba dbát, aby $F \geq 1$. To znamená, že do čitatele vždy musíme dosadit větší hodnotu, než do jmenovatele. Podle tohoto pravidla jsou sestaveny i tabulky kritických hodnot.

2.6.2 Test významnosti rozdílu výběrového průměru a průměru základního souboru

V praxi se často vyskytují případy, že známe určitou hodnotu μ, kterou považujeme za střední hodnotu základního souboru S a potřebujeme prověřit, zda se výběrový průměr odlišuje od μ jen náhodně či nikoliv.

Testovacím kriteriem je veličina

$$t = \frac{|\bar{x} - \mu|}{s}\sqrt{n-1},$$

které přísluší t-rozložení s $(n-1)$ stupni volnosti.

Nulovou hypotézu zamítáme pro $t > t(\alpha)$, kde $t(\alpha)$ je kritická hodnota Studentova rozložení.

Při použití předpokládáme, že základní soubor S má alespoň přibližně normální rozložení. Pokud tomu tak není, nemůžeme test použít.

2.6.3 Test významnosti rozdílu dvou výběrových průměrů

Test významnosti rozdílu dvou výběrových průměrů, jestliže F-testem prokážeme, že $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Jestliže F-testem prokážeme, že pro dané α je $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, potom jako testovacího kritéria použijeme veličiny

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}}\sqrt{\frac{(n_1+n_2-2)n_1 n_2}{n_1+n_2}},$$

které přísluší Studentovo rozložení s (n_1+n_2-2) stupni volnosti. Pokud je t větší jak kritická hodnota $t(\alpha)$, zamítáme nulovou hypotézu o rovnosti výběrových průměrů.

Test významnosti rozdílu dvou výběrových průměrů, jestliže F-testem prokážeme, že $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Jestliže F-testem prokážeme, že pro dané α je $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, potom jako testovací kritérium použijeme veličiny

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1-1} + \dfrac{s_2^2}{n_2-1}}},$$

jeho hodnotu srovnáváme s kritickou hodnotou $t^*(\alpha)$, kde

$$t^*(\alpha) = \frac{t_1(\alpha)\dfrac{s_1^2}{n_1-1} + t_2(\alpha)\dfrac{s_2^2}{n_2-1}}{\dfrac{s_1^2}{n_1-1} + \dfrac{s_2^2}{n_2-1}},$$

kde $t_1(\alpha)$ je kritická hodnota Studentova rozložení s (n_1-1) stupni volnosti a $t_2(\alpha)$ je kritická hodnota Studentova rozložení s (n_2-1) stupni volnosti. Pokud je t větší jak kritická hodnota $t^*(\alpha)$, zamítáme nulovou hypotézu o rovnosti výběrových průměrů.

Příklad 2.6. Mějme dva výběry s charakteristikami $\overline{x} = 62, s_x^2 = 16, n_x = 10, \overline{y} = 60, s_y^2 = 15, n_y = 14$. Testujte hypotézu, že oba výběry mají stejné střední hodnoty na hladině významnosti 5%.

Řešení: Jde o test významnosti rozdílu dvou výběrových průměru při neznámých rozptylech. Nejdříve prověříme F-testem, zda se rozptyly rovnají.

$$F = \frac{\frac{n_x}{n_x-1}s_x^2}{\frac{n_y}{n_y-1}s_y^2} = \frac{\frac{10}{9}16}{\frac{14}{13}15} = 1.100052910.$$

Protože $F_{0.975}(9;13) = 3.09$, tak nemáme důvod zamítnout hypotézu, že rozptyly jsou shodné. Nyní testujeme hypotézu, že $\overline{x} = \overline{y}$.

$$t = \frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{n_x s_x^2 + n_y s_y^2}}\sqrt{\frac{n_x n_y (n_x+n_y)}{n_x+n_y}} = 1.23$$

a protože $t_{0.975}(22) = 2.074$ můžeme prohlásit, že rozdíl výběrových průměrů není statisticky významný na hladině 5%.

Příklad 2.7. Dva statistické soubory s rozsahy $n_1 = 20$ a $n_2 = 10$ a charakteristikami $\bar{x}_1 = 10.24, \bar{x}_2 = 11.09, s_1^2 = 4.231, s_2^2 = 18.457$ byly získány náhodným výběrem ze souboru s normálním rozložením. Na hladině významnosti 1% testujte hypotézu, že výběry mají stejnou střední hodnotu.

Řešení. F-test rozdílu mezi rozptyly.

$$F = \frac{18.547\frac{10}{9}}{4.231\frac{20}{19}} = 9.2093.$$

Na hladině 1% je kritická hodnota $F(9;19) \in [4.730; 5.111]$. Protože testovací kritérium je větší než kritická hodnota, jsou rozptyly vyznamně odlišné.
t-test rozdílu mezi průměry.

$$t = \frac{|\bar{x}_1-\bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1-1} - \frac{s_2^2}{n_2-1}}},$$

$$t = \frac{11.09-10.24}{\sqrt{\frac{4.213}{19} + \frac{19.457}{9}}} = 0.5637.$$

Kritická hodnota $t = 3.212$, proto nemáme důvod zamítnout hypotézu o rovnosti průměrů.

□

2.6.4 Test významnosti rozdílu dvou výběrových průměrů pro párové hodnoty

Máme n-párů měření, neboli máme dva výběry o stejném rozsahu, mezi nimiž je logické spojení. Pracujeme s rozdíly $d_i = x_{1i} - x_{2i}$.

Předpokládejme, že jsme ze dvou přibližně normálně rozložených základních souborů s parametry $\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2$ odebrali po jednom výběru. Rozsahy obou výběrů jsou stejné a jejich prvky tvoří páry. Testovacím kritériem je

$$t = \frac{|\bar{d}|}{s_d}\sqrt{n-1},$$

kde

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_i d_i,$$

$$s_d = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_i (d_i - \bar{d})^2}.$$

Testovací kritérium má Studentovo rozložení s $(n-1)$ stupni volnosti.

2.6.5 Test významnosti rozdílu dvou relativních hodnot

V praxi se často vyskytuje otázka, zda se určitý jev vyskytuje v jednom souboru častěji než ve druhém. Stanovíme si relativní četnost výskytu sledovaného jevu

$$f_i = \frac{m_i}{n_i} = \frac{\text{počet výskytů jevu}}{\text{počet všech pokusů}}, \quad i = 1, 2.$$

Relativní četnost výskytu sledovaného jevu v základním souboru odhadneme veličinou

$$\hat{f} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}.$$

Testujeme nulovou hypotézu, že oba soubory pocházejí ze stejného základního souboru. Testovacím kritériem je veličina

$$t = |f_1 - f_2| \frac{\sqrt{\dfrac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}}{\sqrt{\hat{f}(1-\hat{f})}}.$$

Tomuto testovacímu kritériu přísluší při dostatečně velkých n_1, n_2 zhruba normální rozložení $No(0,1)$. Jestliže je $t > u(\alpha)$, zamítáme nulovou hypotézu o rovnosti relativních hodnot.

Tuto metodu nemůžeme použít, jesliže máme výběry s malými rozsahy a nebo jestliže některá z veličin f_1, f_2 nabývá hodnot z intervalu $[0; 0.2]$ a nebo $[0.8; 1]$. V těchto případech používáme cyklometrickou transformaci. Testovacím kritériem je potom veličina

$$t = 2\left|\arcsin\sqrt{f_1} - \arcsin\sqrt{f_2}\right| \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}},$$

která má opět normální rozložení.

2.7 Testy shody

Testujeme, zda výběr pochází z určitého základního souboru, zda dva výběry pocházejí z téhož základního souboru, zda zvolené teoretické rozložení základního souboru může být modelem pro studovaný soubor.

2.7.1 χ^2-test pro jeden výběr

Výsledky pozorování roztřídíme určitým způsobem do k tříd. V jednotlivých třídách získáme experimentální četnosti n_{ej}, které nám podávají informaci o výsledcích experimentu. Zvolíme si teoretické rozložení, které budeme považovat za model. Rozdělíme jej do stejných tříd a podle stejného kritéria jako u experimentálních hodnot, čímž získáme teoretické četnosti n_{tj}.

Nulová hypotéza – četnosti se liší jen náhodně.

Testovacím kritériem je

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_{ej} - n_{tj})^2}{n_{tj}},$$

které má χ^2 rozložení s $k-1$ stupni volnosti. Jesliže je hodnota testovacího kritéria větší než kritická hodnota χ^2 rozložení, potom zamítáme nulovou hypotézu a tvrdíme, že se četnosti od sebe významně liší.

Při použití χ^2 testu musíme respektovat podmínky:
1) Pro $k = 2$ a $n_{tj} < 5$ test nemůžeme použít.
2) Pro $k > 2$ může být nejvýše 20% $n_{tj} < 5$ a žádná nesmí být nulová.

Příklad 2.8. Byla provedena anketa mezi studenty ve věku 19 – 20 let o tom, čemu se nejvíce věnují ve svém volném čase. H_0 – zájem je rozdělen rovnoměrně, hladina významnosti 5%.

obor	n_e	n_t
divadlo	15	20
koncert	6	20
film	34	20
četba	11	20
televize	7	20
sport	47	20

Řešení. Použijeme χ^2 test.

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{2} \frac{(n_{ej} - n_{tj})^2}{n_{tj}} = 69.8,$$

z tabulek určíme

$$\chi^2_{(1-0.05)}(6-1) = 11.070.$$

Protože pozorovaná statistika je větší než kritická hodnota, zamítáme nulovou hypotézu a tvrdíme, že zájem není rozdělen rovnoměrně. □

Poznámka 2.9. Všichni dotazovaní studenti se, podle svého vyjádření, ve volném čase věnují *ušlechtilým* zábavám. Zcela chybí alkohol, sex, hazardní hry, ... ⇒ Údaje založené pouze na odpovědích dotazovaných jsou zatíženy výraznou chybou, která plyne většinou z toho, že se dotazovaní snaží ukázat jako dokonalí a zamlžují své skutečné zájmy a chování. Platí i pro anonymní dotazníky.

Příklad 2.10.

X	1	2	3	4	5	6	7 a více
n_j	8	8	11	10	8	7	8
ν_j	5.496	8.790	11.724	11.724	9.378	6.252	6.630

Rozhodněte, zda náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ zadanou jejími četnostmi n_j můžeme pokládat za výběr z Poissonova rozložení s četnostmi ν_j.

Řešení. Jedná se o χ^2-test pro jeden výběr.

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{7} \frac{(n_j - \nu_j)^2}{\nu_j} = 2.086$$

Protože máme 7 tříd a Poissonovo rozložení má jeden parametr, tak se jedná o χ^2 rozložení s šesti stupni volnosti. $\chi^2_{0.95} = 12.6$ a my nemáme důvod zamítnout naši hypotézu, takže výběr můžeme pokládat za výběr z Poissonova rozložení. □

2.7.2 Kolmogorovův - Smirnovovův test pro jeden výběr

Výsledky pozorování si roztřídíme stejně jako v předchozím případě. Zvolíme si teoretické rozložení. Tento test můžeme použít i v případech, kdy se nedoporučuje použití χ^2 testu. Při testu se hodnotí rozdíl kumulativnich absolutních četností

$$N_{ej} = \sum_{i=1}^{i} n_{ej}, \quad N_{tj} = \sum_{i=1}^{i} n_{tj}.$$

Testovacím kritériem je

$$D_1 = \frac{1}{n} \max_j |N_{ej} - N_{tj}|,$$

kde n je celkový počet prvků.

Jestliže hodnota testovacího kritéria je větší než kritická hodnota Kolmogorovova-Smirnovova rozložení, zamítáme nulovou hypotézu. Kritické hodnoty jsou běžně uvedeny v tabulkách kritických hodnot Kolmogorovova-Smirnovova testu pro $n < 40$. Pro vyšší hodnoty je počítáme podle vztahů

$$D_1(p = 5\%) = \frac{1.36}{\sqrt{n}}, \quad D_1(p = 1\%) = \frac{1.63}{\sqrt{n}}.$$

Příklad 2.11. Byl sledován počet vadných výrobků během jedné směny. Rozhodněte o platnosti H_0, že počet zmetků je rozdělen rovnoměrně na hladině významnosti 5%.

Řešení.

hodina	n_e	n_t	N_e	N_t	—$N_e - N_t$|
1	29	58	29	58	29
2	7	58	36	116	80
3	27	58	63	174	111
4	61	58	124	232	108
5	87	58	321	290	79
6	110	58	422	348	74
7	101	58	422	406	16
8	42	58	464	464	0

$$D_1 = \frac{1}{n} \max_j |N_{ej} - N_{tj}| = \frac{1}{464} 111 = 0.239.$$

Pozorovanou statistiku srovnáme s hodnotou

$$D_{1,p=5\%} = \frac{1.36}{\sqrt{464}} = 0.063.$$

Protože $D_1 > D_{1;p=5\%}$ zamítáme H_0 a tvrdíme, že zmetkovitost není rozložena rovnoměrně. □

Poznámka 2.12. Pokud pracujeme s jiným jak rovnoměrným rozložením, tak si musíme dopočítat potřebné hodnoty.

2.7.3 Kolmogorovův - Smirnovovův test pro dva nezávislé výběry

Zajímá nás, zda dva výběry pocházejí ze stejného základního souboru. Testujeme rozdíl kumulativních četností. Testovacím kritériem je v případě, že oba soubory mají stejné rozsahy, ne větší než 40, veličina

$$D_2 = \max_j |N_{1j} - N_{2j}|.$$

Kritické hodnoty jsou uvedeny v tabulce kritických hodnot Kolmogorovova - Smirnovovova testu pro dva nezávislé výběry.

Poznámka 2.13. Neplést si Kolmogorovův - Smirnovovův test pro jeden výber a Kolmogorovův - Smirnovovův test pro dva nezávislé výběry. Tabulky kritických hodnot se od sebe liší.

Jestliže soubory mají rozsahy větší než 40 (nyní mohou být i různé), potom používáme relativní kumulativní četnosti

$$F_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{j} n_i.$$

Testovacím kritériem je

$$D_2 = \max_j |F_{1,j} - F_{2,j}|.$$

Kritické hodnoty počítáme podle vztahů

$$D_2(p = 5\%) = 1.36\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}, \quad D_2(p = 1\%) = 1.63\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}.$$

Pokud je testovací kritérium větší než kritická hodnota, zamítáme nulovou hypotézu.

Příklad 2.14. Máme dva výběry o 25 prvcích zadaných jejich četnostmi. Na hladině významnosti 5% rozhodněte, zda se jedná o výběry ze stejného základního souboru.

Řešení. Hodnoty si zapíšeme do tabulky:

n_1	0	2	1	2	5	8	6	1
n_2	1	0	2	0	6	9	5	2
N_1	0	2	3	5	10	18	24	25
N_2	1	1	3	3	9	18	23	25
$\|N_1 - N_2\|$	1	1	0	2	1	0	1	0

$$D_2 = \max_j |N_{1j} - N_{2j}| = 2.$$

Z tabulek určíme kritickou hodnotu

$$D_2(0.05; 25) = 10.$$

Protože $D_2 < D_2(0.05; 25)$ nemáme důvod zamítnout H_0 a tvrdíme, že oba výběry pocházejí ze stejného základního souboru. □

Příklad 2.15. Máme dva výběry s jejich četnostmi. Na hladině významnosti 5% rozhodněte, zda se jedná o výběry ze stejného základního souboru.

n_1	0	15	17	99	81	42	51	28	10	9	10	2	2	0	1	0	1	0	1
n_2	2	4	3	23	91	150	101	35	13	9	8	10	5	1	3	1	0	0	0

Řešení. Protože $n_1 = 369$ a $n_2 = 459$, použijeme kumulativní četnosti.

$$D_2 = \max_j |F_{1j} - F_{2j}| = 0.313.$$

Kritickou hodnotu si vypočítáme podle vzorce

$$D_2(p = 5\%) = 1.36\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}} = 0.095.$$

Protože $D_2 > D_2(0.05)$ zamítáme H_0 a tvrdíme, že oba výběry nepocházejí ze stejného základního souboru. □

Poznámka 2.16. Tabulka v zadání může mít i tvar

x_i	α	β	γ	δ	ε	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	π	ϱ	σ	τ	ϕ
n_1	0	15	17	99	81	42	51	28	10	9	10	2	2	0	1	0	1	0	1
n_2	2	4	3	23	91	150	101	35	13	9	8	10	5	1	3	1	0	0	0

,

kde $\alpha, \beta, \ldots, \phi \in \mathbb{R}$ jsou libovolná čísla. Postup řešení bude opět zcela stejný, protože při použití Kolmogorovova - Smirnovova testu nehrají žádnou roli hodnoty x_i, ale pouze četnosti se kterou se tyto hodnoty vyskytují.

2.7.4 Test homogenity dvou binomických rozložení

Nechť p_1 je pravděpodobnost, že nastane jev A. Nechť v m nezávislých pokusech nastal jev A celkem X-krát. Opakujeme nezávislé pokusy za změněných podmínek, takže jev A nastává s pravděpodobností p_2. Nechť v n dalších nezávislých pokusech nastal jev A celkem Y-krát. Na základě těchto údajů chceme testovat hypotézu $H_0 : p_1 = p_2$. H_0 se někdy nazývá hypotéza homogenity. Je to jedna z nejstarších a stále se velmi často vyskytujících statistických úloh.

Označme si relativní četnosti

$$x = \frac{X}{m}, \qquad y = \frac{Y}{n}.$$

Všude dále v této části budeme předpokládat, že $x(1-x) + y(1-y) \neq 0$, t.j. jevy X, Y nejsou ani jisté ani nemožné.

Z centrální limitní věty (věta 1.153) vyplývá, že při dostatečně velkých hodnotách m, n můžeme použít aproximace

$$x \approx No\left(p_1, \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{m}}\right), \quad y \approx No\left(p_2, \sqrt{\frac{p_2(1-p_2)}{n}}\right).$$

Přitom jsme využili toho, že

$$E(x) = E\left(\frac{X}{m}\right) = \frac{1}{m}E(X) = \frac{1}{m}mp_1 = p_1.$$

$$D(x) = D\left(\frac{X}{m}\right) = \frac{1}{m^2}D(X) = \frac{1}{m^2}mp_1(1-p_1) = \frac{p_1(1-p_1)}{m}.$$

Pro y analogicky.

Protože x a y jsou nezávislé náhodné veličiny, dostáváme

$$\frac{x - y - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{m} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n}}} \approx No(0,1).$$

Platí-li H_0, pak v čitateli dosadíme $(p_1 - p_2) = 0$. Ve jmenovateli však neznámé hodnoty p_1 a p_2 zůstávají. Za ně se dosazují jejich odhady. Dá se dokázat, že se tím limitní rozložení nezmění a zůstává stále typu $No(0,1)$. Odhady parametrů p_1 a p_2 lze pořídit dvojím způsobem. Podle toho rozeznáváme dvě základní varianty testu homogenity.

V prvním případě použijeme pro odhad parametru p_1 hodnotu relativní četnosti x a pro p_2 hodnotu y. Zákon velkých čísel (věta 1.150) nám zaručuje, že

$$x \to p_1, \quad y \to p_2.$$

Při testu hypotézy H_0 nejdříve vypočteme veličinu

$$U_a = \frac{|x-y|}{\sqrt{\dfrac{x(1-x)}{m} + \dfrac{y(1-y)}{n}}}.$$

Jestliže je $U_a \geq u(1 - \frac{\alpha}{2})$ zamítáme H_0.

Ve druhém případě se vychází důsledně z toho, že při platnosti H_0 máme $p_1 = p_2$. Tuto společnou hodnotu odhadneme pomocí

$$z = \frac{X+Y}{m+n} = \frac{mx+ny}{m+n}.$$

Potom vypočítáme

$$U_b = \frac{|x-y|}{\sqrt{z(1-z)\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)}}.$$

Je-li $U_b \geq u(1 - \frac{\alpha}{2})$ zamítáme H_0.

Věta 2.17. *Je-li $m = n$, pak $U_b \leq U_a$ a rovnost platí tehdy a jen tehdy, když $x = y$.*

Důkaz. Funkce $f(x) = x(1-x)$ je konkávní na intervalu $[0,1]$. Proto existuje $\gamma \in [0,1]$ takové, že
$$\forall a, b \in [0,1] : f(\gamma a + (1-\gamma)b) \geq \gamma f(a) + (1-\gamma) f(b).$$
Nechť $\gamma = \frac{1}{2}, a = x, b = y$, potom
$$\frac{1}{2}(x+y)\left(1 - \frac{1}{2}(x+y)\right) \geq \frac{1}{2}x(1-x) + \frac{1}{2}y(1-y). \tag{2.1}$$
Při $m = n$ máme $z = \dfrac{x+y}{2}$.

Ve vzorci pro U_a máme ve jmenovateli pod odmocninou
$$\frac{z}{m}\left(\frac{1}{2}x(1-x) + \frac{1}{2}y(1-y)\right)$$
a ve vzorci pro U_b máme ve jmenovateli pod odmocninou
$$\frac{z}{m}\left(\frac{x+y}{2}\left(1 - \frac{x+y}{2}\right)\right).$$
Z nerovnosti (2.1) proto po dosazení plyne $|U_b| \leq |U_a|$.

Rovnost v (2.1) nastává pouze v případě $x = y$. □

Poznámka 2.18. Pro $m \neq n$ mezi U_a, U_b není žádný jednoduchý vztah.

Přesnější test homogenity dostaneme s využitím transformace stabilizující rozptyl
$$U = 2\sqrt{\frac{mn}{m+n}}\left(\arcsin\sqrt{x} - \arcsin\sqrt{y}\right).$$
Je-li $|U| > u(1 - \frac{\alpha}{2})$, potom H_0 zamítáme.

Pro $m = n$ můžeme ještě použít zpřesnění pomocí transformace
$$U^* = \sqrt{2m+1}\left(\arcsin\sqrt{\frac{8X+3}{8m+6}} - \arcsin\sqrt{\frac{8Y+3}{8m+6}}\right).$$
Je-li $|U^*| > u(1 - \frac{\alpha}{2})$, potom H_0 zamítáme.

Příklad 2.19. Mějme dva výběry se stejným rozsahem $m = n = 50$ a hodnotami četností $X = 21, Y = 11$. Můžeme je považovat za výběry z téhož rozložení?

Řešení. Máme $x = 0.42, y = 0.22, z = 0.32$. Dosazením dostaneme pro $\alpha = 5\%$ hodnoty testovacích kritérií
$$U_a = 2.195,$$

$$U_b = 2.144,$$
$$U = 2.168,$$
$$U^* = 2.141.$$

Protože $u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = 1.96$ je menší než vypočítané statistiky, zamítáme H_0 a tvrdíme, že výběry nepochází ze stejného souboru. □

Poznámka 2.20. Postup uvedený v předchozím případě je ilustrační. V praxi je třeba vždy předem vybrat test a ten potom použít.
Nelze provést několik testů a potom si vybrat ten, který udává takové výsledky, které nám vyhovují.

2.7.5 Wilcoxův test pro párové hodnoty

Slouží pro párové hodnoty x_i a y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Určíme si rozdíly $d_i = x_i - y_i$ mezi párovými hodnotami (stejně jako při t-testu, viz 2.6.4). Nulové hodnoty d_i dále neuvažujeme. Zbývajícím hodnotám d_j přiřadíme pořadí: t.j. bez ohledu na znaménko seřadíme hodnoty d_i od nejmenší po největší, nejmenší hodnotě přiřadíme pořadové číslo jedna, další hodnotě dvě, atd, až největší přiřadíme hodnotu m, kde m je počet nenulových hodnot d_i. Pokud jsou některá d_j, $j = k, k+1, \ldots, k+\ell, k+\ell \leq m$ stejná, přiřadíme všem průměr pořadí $\frac{1}{\ell+1}\sum_{j=k}^{k+\ell} j$. Sečteme pořadí příslušná ke kladným hodnotám d_i a pořadí příslušná k záporným hodnotám d_i. Za předpokladu nulové hypotézy, tj. že máme párové hodnoty pocházející ze stejného základního souboru, by potom měly být součty kladných i záporných pořadí shodné. V praxi to ale většinou neplatí. Menší ze součtů označíme T. Pokud je $T \leq T_p$ zamítáme nulovou hypotézu a tvrdíme, že soubory nemají společný základ. Kritické hodnoty jsou tabelovány pro $m < 25$. Pro vetší počet hodnot má T přibližně normální rozdělení s parametry

$$\mu = \frac{m(m+1)}{4}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{m(m+1)(m+2)}{24}}.$$

Odpovídající normovaná náhodná veličina

$$u = \frac{T-\mu}{\sigma} = \frac{T - \dfrac{m(m+1)}{4}}{\sqrt{\dfrac{m(m+1)(m+2)}{24}}}$$

má pro $p = 5\%$ hodnoty ± 1.96 a pro $p = 1\%$ hodnoty ± 2.58. Je-li u mimo tento interval, zamítáme H_0.

Příklad 2.21. Pomocí metod A, B byly získány výsledky

A	18	43	32	28	3	38	27	12	46	6
B	24	45	30	23	2	38	18	15	39	9

Rozhodněte, zda jsou metody ekvivalentní.

Řešení. Určíme si rozdíly a přiřadíme jim pořadí

i	A	B	d_i	P^+	P^-
1	18	24	-6		7
2	43	45	-2		2.5
3	32	30	2	2.5	
4	28	23	5	6	
5	3	2	1	1	
6	38	38	0		
7	27	18	9	9	
8	12	15	-3		4.5
9	46	39	7	8	
10	6	9	-3		4.5
				26.5	18.5

Při určování pořadí si hodnoty $|d_i|$ seřadíme podle velikosti

d_i	1	2	2	3	3	5	6	7	9
očíslování	1	2	3	4	5	6	7	8	9
pořadí	1	2.5	2.5	4.5	4.5	6	7	8	9

Testovacím kritériem je hodnota $T = 18.5$. Z tabulek kritických hodnot obdržíme $T_{0.05}(9) = 6$. Protože $T > T_{0.05}$, nemáme důvod zamítnout nulovou hypotézu a tvrdíme, že metody A, B jsou ekvivalentní na hladině významnosti 5%. □

Poznámka 2.22. Při řešení je třeba počítat hodnoty d_i stále stejně. V našem případě bylo $d_i = A_i - B_i$.

Poznámka 2.23. Dále je zde podstatná odlišnost od předchozích testů. Pro zamítnutí nulové hypotézy je třeba, aby hodnota testovacího kritéria byla **menší** než daná kritická hodnota.

2.7.6 Kruskalův - Wallisův test

Tento test je neparametrickou obdobou analýzy rozptylu jednoduchého třídění a je zobecněním dvouvýběrového Wilcoxova testu. Bývá používán zejména tehdy, jde-li o výběry z rozložení, které se *značně odlišují od normálního.*

Nechť $Y_{i1}, \dots, Y_{in}$, je výběr z nějakého rozložení se spojitou distribuční funkcí $F_i, i = 1, \dots, k$. Nechť všechny tyto výběry jsou na sobě nezávislé. Budeme testovat hypotézu

$$H_0 : F_1(x) = \dots = F_k(x), \quad \text{pro všechna } x.$$

Všechny veličiny Y_{ij} dohromady vytváří sdružený náhodný výběr o rozsahu $n = n_1 + \dots + n_k$. Veličiny Y_{ij} se uspořádají do rostoucí posloupnosti a každé z nich přiřadíme její pořadí R_{ij} ve sdruženém výběru. Tato pořadí můžeme zapsat do schématu uvedeného v tabulce

Výběr	Pořadí veličin ve výběru				Součet pořadí
1	R_{11}	R_{12}	$\cdots$	R_{1n_1}	T_1
2	R_{21}	R_{22}	$\cdots$	R_{2n_2}	T_2
...	...	...	...	...	...
k	R_{k1}	R_{k2}	$\cdots$	R_{kn_k}	T_k

Celkový počet všech pořadí je

$$T_1 + \cdots + T_k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Jako testovací kritérium použijeme

$$Q = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i} - 3(n+1).$$

Věta 2.24. *Nechť $X_1, \ldots, X_N$ je náhodný výběr ze spojitého rozložení. Nechť $g_1, \ldots, g_k$ je rozklad množiny $\{1, \ldots, N\}$ na disjunktní neprázdné podmnožiny. Nechť $a(i)$ a c_i jsou daná čísla, $i = 1, \ldots, N$. Označme*

$$\bar{a} = \frac{1}{N} \sum a(i), \qquad \sigma_a^2 = \frac{1}{N} \sum [a(i) - \bar{a}]^2.$$

Nechť

$$Q_j = \sum_{i \in g_j} a(R_i), \qquad Q = \frac{N-1}{N\sigma_a^2} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j} (Q_j - E(Q_j))^2.$$

Pak $E(Q) = k - 1$.

Důkaz. Mějme

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} c_i(j) a(R_i),$$

kde

$$c_i(j) = \begin{cases} 1, & \text{pro } \ i \in g(j), \\ 0, & \text{pro } \ i \notin g(j). \end{cases}$$

Označme

$$\bar{c}(j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} c_i(j).$$

Je-li R_i pořadím i-té veličiny, potom platí

$$S = \sum_{i=1}^{N} c_i a(R_i),$$

$$\bar{a} = \frac{1}{N} \sum a(i),$$

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{N}\sum(a(i)-\bar{a})^2,$$
$$\bar{c} = \frac{1}{N}\sum c(i),$$
$$\sigma_c^2 = \frac{1}{N}\sum(c(i)-\bar{c})^2.$$

Potom za předpokladu platnosti H_0 platí

$$E(s) = N\bar{a}\bar{c}, \quad D(s) = \frac{N^2}{N-1}\sigma_a^2\sigma_c^2.$$

Proto

$$D(Q_j) = \frac{N^2}{N-1}\sigma_a^2\sigma_c^2$$

kde

$$\sigma_c^2 = \frac{1}{N}\sum_{i+1}^{N}(c_i(j)-\bar{c}(j))^2 = \frac{1}{N}\sum_{i+1}^{N}\left(c_i^2(j)-(\bar{c}(j))^2\right) =$$
$$= \frac{n_j}{N} - \left(\frac{n_j}{N}\right)^2 = \frac{n_j}{N}\left(1-\frac{n_j}{N}\right).$$

Potom

$$E(Q) = \frac{N-1}{N\sigma_a^2}\sum\frac{1}{n_j}D(Q_j) = \frac{N-1}{N\sigma_a^2}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n_j}\frac{N^2}{N-1}\sigma_a^2\frac{n_j}{N}\left(1-\frac{n_j}{N}\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{k}\left(1-\frac{n_j}{N}\right) = k-1.$$

□

Je-li v datech více než 25% shod, používá se korigovaná statistika

$$Q_{korig} = \frac{Q}{1-(n^3-n)^{-1}\sum(t_i^3-t_i)},$$

kde $t_1, t_2, \dots$ jsou počty shodných pozorování v jednotlivých skupinkách veličin majících tutéž hodnotu. Za platnosti H_0 má Q asymptoticky χ^2 rozloření, když všechna n_i rostou nade všechny meze. Jelikož jsme dokázali, že $E(Q) = k-1$, půjde o χ^2 rozložení s $(k-1)$ stupni volnosti. Proto nulovou hypotézu zamítáme pro $Q \geq \chi^2(\alpha, k-1)$.

Kruskalův-Wallisův test je citlivý zejména na ty případy, kdy se jednotlivé distribuční funkce od sebe liší posunutím.

Zamítneme-li H_0, je třeba obvykle rozhodnout, které dvojice výběrů se od sebe významně liší. Označme $t_i = T_i/n_i, i = 1, \dots, k$. Nechť $h(\alpha, k-1)$ je kritická hodnota Kruskalova - Wallisova testu na hladině α. Při malých rozsazích výběru se $h(\alpha, k-1)$ najde ve speciálních tabulkách a při větších rozsazích se použije aproximace $h(\alpha, k-1) \doteq \chi^2(\alpha, k-1)$. Prohlásíme, že se distribuční funkce i-tého a j-tého výběru od sebe významně liší, jestliže platí

$$|t_i - t_j| > \sqrt{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right) n(n+1)h(\alpha, k-1)}. \tag{2.2}$$

Pravděpodobnost, že alespoň u jedné z $k(k-1)/2$ dvojic distribučních funkcí F_i, F_j bude vypočteno, že se F_i a F_j vyznamně odlišují, ačkoli ve skutečnosti platí hypotéza H_0, přitom nepřekročí α.

Je-li rozsah všech výběrů stejný, $n_1 = \cdots = n_k = m$ (takže jde o vyvážené třídění), lze použít následující postup:

Pro menší hodnoty m a k jsou kritické hodnoty pro $|T_i - T_j|$ tabelovány. Při větších hodnotách se užije následující postup: Nechť $q_{k,\infty}(\alpha)$ je kritická hodnota rozpětí k nezávislých náhodných veličin s rozložením $No(0,1)$ a zavádí se takto: Je-li $\xi_1, \cdots, \xi_k$ výběr z $No(0,1)$, označíme $R = \xi_{(k)} - \xi_{(1)}$ jeho rozpětí. Pak $q_{k,\infty}(\alpha)$ je číslo definované podmínkou

$$P\left[R \geq q_{k,\infty}(\alpha)\right] = \alpha.$$

Prohlásíme, že se F_i a F_j od sebe liší, když

$$|t_i - t_j| > q_{k,\infty}(\alpha)\sqrt{\frac{1}{12}k(km+1)}. \tag{2.3}$$

Ačkoliv při vyváženém třídění lze použít obou metod, dává se přednost druhé, protože je citlivější.

Příklad 2.25. Máme dány výrobní náklady u čtyř firem, které se ucházejí o zakázku, nebo máme hektarové výnosy u čtyř různých zemědělců,
nebo máme dánu týdenní spotřebu piva u čtyř studentů FEKT VUT,
nebo máme dán soubor hodnot

skupina A	19.3	18.0	21.6	22.3	20.9	20.1	24.0
skupina B	22.1	26.5	25.2	25.0	24.3	21.9	26.7
skupina C	23.7	20.8	19.8	24.1	22.2	22.4	22.9
skupina D	17.2	16.6	16.9	17.5	21.3	15.2	19.0

Máme rozhodnout, zda se hodnoty v jednotlivých skupinách od sebe významně liší.

Řešení. Hodnotám přiřadíme jejich pořadí

skupina A	8	6	15	17	12	10	22
skupina B	20	27	26	25	24	14	28
skupina C	21	11	9	23	16	18	19
skupina D	4	2	3	5	13	1	7

Máme $n_1 = 7, i = 1, 2, 3, 4.$

$$T_1 = 90 \quad T_2 = 164, \quad T_3 = 117, \quad T_4 = 35.$$

Hodnota testovacího kritéria je $Q = 18.369$. Protože $Q > \chi^2(0.05; 3) = 7.81$, zamítáme nulovou hypotézu, že všechny 4 soubory pocházejí z rozdělení se stejnou distribuční funkcí.

Vypočteme

$$t_i = \frac{T_i}{n_i}, i = 1, 2, 3, 4.$$

$$t_1 = 12.257, \quad t_2 = 23.429, \quad t_3 = 16.714, \quad t_4 = 5.$$

Kritické hodnoty jsou 12.59, podle první metody, a 11.3 podle druhé metody. Použijeme druhou hodnotu, protože je menší a tedy přesnější. Pro rozdíly $t_i - t_j$ dostaneme

$i \backslash j$	B, j=2	C, j=3	D,j=4
skupina A, $i = 1$	-10.57	-3.86	7.86
skupina B, $i = 2$		6.72	18.43
skupina C, $i = 3$			11.71

Srovnáním s kritickou hodnotou dostaneme, že D se liší od B, D se liší od C. □

Poznámka 2.26. Je třeba upozornit na to, že přiřazování pořadí náhodným veličinám je sice monotónní transformací, ale tato transformace je nelineární. Tato nelinearita může vést k paradoxním výsledkům.

Příklad 2.27. V továrně jsou 2 dílny, v každé je 6 strojů, z nichž jsou 2 od výrobce A, 2 od výrobce B a 2 od výrobce C. V tabulce jsou uvedeny výkonosti strojů a jim příslušné pořadí.

Dílna č.1:

Výrobce	výkonost		pořadí		součet pořadí
A	5.89	5.98	3	5	8
B	5.81	5.90	2	4	6
C	5.80	5.99	1	6	7

Dílna č.2:

Výrobce	výkonost		pořadí		součet pořadí
A	5.69	5.74	3	5	8
B	5.63	5.71	2	4	6
C	5.62	6.00	1	6	7

Pro celou továrnu potom máme

Výrobce	výkonost				pořadí				součet pořadí
A	5.89	5.98	5.69	5.74	8	10	3	5	26
B	5.81	5.90	5.63	5.71	7	9	2	4	22
C	5.80	5.99	5.62	6.00	6	11	1	12	30

Uspořádání pořadí je dáno relací $A \succ C \succ B$ a je v obou dílnách stejné, dokonce i součty pořadí jsou v obou dílnách stejné, ale v celé továrně je uspořádání $C \succ A \succ B$. Je to v rozporu s uspořádáním v dílnách.

2.7.7 Friedmanův test

Nechť Y_{ij} jsou nezávislé náhodné veličiny se spojitými distribučními funkcemi F_{ij} pro $i = 1, \ldots, I, j = 1, \ldots, J$. Friedmanovým testem se testuje hypotéza H_0, že F_{ij} nezávisí na j (zatímco na i záviset může).

Pro každé i zvlášť se určuje pořadí R_{ij} veličiny Y_{ij}. (Jde tedy jen o určení pořadí mezi veličinami $Y_{i1}, \ldots, Y_{iJ}$)

Za platnosti H_0 je splněna podmínka

H_0^*: pro každé i je vektor $(R_{i1}, \ldots, R_{iJ})^T$ roven kterékoli permutaci čísel $1, \ldots, J$ se stejnou pravděpodobností $(1/J!)$ a všechny vektory $(R_{i1}, \ldots, R_{iJ})^T$ pro $i = 1, \ldots, I$ jsou na sobě nezávislé.

Protože všechny vlastnosti Friedmanova testu jsou odvozeny pouze z předpokladu platnosti H_0^*, lze často tento test použít za obecnějších podmínek, než vyplývá z jeho původní formulace.

Teoretický tvar statistiky Friedmanova testu je

$$Q = \frac{12}{IJ(J+1)} \sum_{j=1}^{J} \left[\sum_{i=1}^{I} R_{ij} - \frac{1}{2} I(J+1) \right]^2. \tag{2.4}$$

Věta 2.28. *Platí-li H_0^*, pak $E(Q) = J - 1$.*

Důkaz. Snadno se zjistí, že platí

$$E(R_{ij}) = \frac{J+1}{2}$$

pro všechna i a j. Proto

$$\left[\sum_{i=1}^{I} R_{ij} - \frac{1}{2} I(J+1) \right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{I} (R_{ij} - R(R_{IJ}) \right]^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{I} (R_{ij} - R(R_{IJ})^2 + \sum \sum_{i \neq \ell} (R_{ij} - E(R_{ij}))(R_{\ell i} - E(R_{\ell j}).$$

Vzhledem k nezávislostem náhodných veličin dostáváme pro kovariaci $cov(R_{ij}, R_{\ell j}) = 0$ pro $i \neq \ell$. Dále platí

$$D(R_{ij}) = \frac{(J+1)(J-1)}{2}.$$

Proto

$$E(Q) = \frac{12}{IJ(J+1)} \sum_{j=1}^{J} \left[\sum_{i=1}^{I} D(R_{ij}) + \sum\sum_{i \neq \ell} cov(R_{ij}, R_{\ell j}) \right] =$$

$$\frac{12}{IJ(J+1)} JI \frac{(J+1)(J-1)}{12} = J - 1.$$

□

Věta 2.29. *Platí*

$$Q = \frac{12}{IJ(J+1)} \sum_{j=1}^{J} \left(\sum_{i=1}^{I} R_{ij} \right)^2 - 3I(J+1). \tag{2.5}$$

Důkaz. Dostaneme úpravou vzorce (2.4). □

Výpočty se provádějí podle vzorce (2.5).

Hypotézu H_0^* (a tedy i hypotézu H_0) zamítáme, když Q překročí kritickou hodnotu Friedmanova testu na hladine α (kritické hodnoty jsou tabelovány). Při větších hodnotách I se za tuto kritickou hodnotu bere kritická hodnota $\chi^2(\alpha, J-1)$.

Zamítneme-li H_0, zajímá nás, pro které dvojice j a t se distribuční funkce F_{ij} a F_{it} od sebe významně liší. Označme

$$R_{.j} = \sum_{i=1}^{I} R_{ij}.$$

Jakmile $|R_{.j} - R_{.t}|$ je větší nebo rovno tabelované kritické hodnotě, zamítá se rovnost $F_{ij} = F_{it}$. Tato porovnání se dělají pro všechny dvojice $j < t$. Asymptoticky jsou kritické hodnoty pro tato mnohonásobná porovnávání rovny

$$q_{J,\infty}(\alpha) \sqrt{\frac{1}{12} IJ(J+1)}. \tag{2.6}$$

Kritické hodnoty $q_{J,\infty}(\alpha)$ byly definovány v části 2.7.6. Vzorec (2.6) se používá už při $I > 5$.

Příklad 2.30. 31 dobrovolníků bylo náhodně rozděleno do dvou skupin po 16-ti a 15-ti osobách, každý člen první skupiny dostal sklenici džusu říznutého vodkou, každý člen druhé skupiny dostal pouze džus. Všichni byli podrobeni zrychlenému inteligenčnímu testu a přitom byl měřen jejich tep. Pomocí Friedmanova testu rozhodněte pro každou skupinu zvlášť, zda se tep mění náhodně nebo zda se promítá nějaký systematický vliv času.

1 skupina					2 skupina			
t	**1**	**2**	**3**		**t**	**1**	**2**	**3**
1	63	66	77		**1**	70	64	69
2	60	70	80		**2**	66	63	61
3	89	80	88		**3**	95	82	80
4	82	80	83		**4**	78	71	80
5	70	72	71		**5**	64	59	65
6	53	69	66		**6**	100	88	84
7	85	93	92		**7**	86	85	92
8	86	81	84		**8**	65	58	67
9	58	65	68		**9**	66	77	73
10	70	72	71		**10**	90	70	82
11	80	76	72		**11**	76	65	74
12	95	83	82		**12**	88	77	86
13	78	90	84		**13**	84	81	64
14	87	82	86		**14**	83	72	86
15	85	93	92		**15**	104	99	86
16	83	98	88		-	-	-	-

Řešení. Údaje zase nahradíme pořadím (v každém řádku zvlášť)

1 skupina					2 skupina			
t	**1**	**2**	**3**		**t**	**1**	**2**	**3**
1	1	2	3		**1**	3	2	1
2	1	2	3		**2**	3	2	1
3	3	1	2		**3**	3	2	1
4	2	1	3		**4**	2	1	3
5	1	3	2		**5**	2	1	3
6	1	3	2		**6**	3	2	1
7	1	3	2		**7**	2	1	3
8	3	1	2		**8**	2	1	3
9	1	2	3		**9**	1	3	2
10	1	3	2		**10**	3	1	2
11	3	2	1		**11**	3	1	2
12	3	2	1		**12**	3	1	2
13	1	3	2		**13**	3	2	1
14	3	1	2		**14**	2	1	3
15	1	3	2		**15**	3	2	1
16	1	3	2		-	-	-	-

Potom dostaneme:

1 skupina	**2 skupina**
I=16 J=3 Q=2,375 $Q \prec \chi^2(3-1;0,05) = 5,99$ Nemáme důvod zamítnout hypotézu, že u 1 skupiny se tepová frekvence mění náhodně	I=15 J=3 Q=8,533 $Q \succ \chi^2(3-1;0,05) = 5,99$ U 2 skupiny se tep nemění náhodně, něco ji tedy ovlivňuje $R_{.1} - R_{.2} = 16$ $R_{.1} - R_{.3} = 8$ $R_{.2} - R_{.3} = -8$ Kritická hodnota $T = 12,8$ (z tabulek nebo odhad podle (2.6), v obou případech dostaneme stejnou hodnotu) $\lvert R_{.1} - R_{.2}\rvert \succ T$ => u druhé skupiny je prokázán rozdíl v tepové frekvenci

□

2.7.8 Andersonův-Kannemanův test

Někdy se místo Friedmanova testu používá Andersonův-Kannemanův test.

Friedmanův test odpovídá situaci, kdy na každém z I objektů (bloků) je aplikováno J ošetření. Leckdy nejde o ošetření v pravém slova smyslu, ale prostě veličina je nějakým způsobem na každém sledovaném objektu zaznamenána v J časových okamžicích. Opět označíme R_{ij} pořadí, které je připsáno j-tému ošetření v i-tém bloku. Nechť D_{jm} je počet bloků, ve kterých ošetření j dostalo pořadí m. Matice

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1J} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{J1} & \cdots & D_{JJ} \end{pmatrix}$$

se nazývá *incidenční maticí.* Označme

$$\chi^2_{AK} = \frac{J-1}{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{m=1}^{J} \left(D_{jm} - \frac{I}{J} \right)^2 .$$

Platí-li hypotéza H_0, pak má χ^2_{AK} asymptotické rozložení $\chi^2\left((J-1)^2\right)$. V případě, že

$$\chi^2_{AK} \geq \chi^2(\alpha, \left((J-1)^2\right)$$

zamítáme H_0.

Andersonův-Kannemanův test je citlivější proti větší třídě alternativ než Friedmanův test.

Příklad 2.31. Použijeme stejné zadání jako u příkladu 2.30.

Řešení. Sestavíme si incidenční matici (tj. kolikrát se který prvek vyskytuje v kterém sloupci):

1 skupina	**2 skupina**
$D = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 10 & 4 \end{pmatrix}$ $\chi^2_{AK} = 10$ $\chi^2_{AK} \succ \chi^2(4; 0,05) = 9,49$ $\chi^2_{AK} \succ \chi^2(\alpha; (J-1)^2)$ Tep se nemění náhodně	$D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 9 & 5 & 1 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ $\chi^2_{AK} = 8,533$ Tep se mění náhodně

□

2.8 Testy extrémních odchylek

Slouží k eliminaci hrubých chyb při měření. Předpokládáme, že pracujeme se souborem s přibližně normálním rozložením. Naměřené hodnoty si seřadíme podle velikosti $x_1 \leq \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$. Extrémní odchylka se může týkat buď x_1, nebo x_n. Nedoporučuje se provádět testy extrémních odchylek opakovaně. Dochází tím ke zkreslení údajů.

2.8.1 Grubbsův test

Určíme si průměr $\bar{x}$ a směrodatnou odchylku s. Testovací kritéria jsou

$$T_n = \frac{x_n - \bar{x}}{s}, \qquad T_1 = \frac{\bar{x} - x_1}{s}.$$

Kritické hodnoty $T_1(p) = T_n(p)$ jsou tabelovány. Jestliže je hodnota testovacího kritéria větší než kritická hodnota, potom se jedná o hodnotu zatíženou extrémní chybou, proto ji vyloučíme ze souboru a dále ji neuvažujeme.

Příklad 2.32. Měřením byly získány hodnoty

$$83; 88; 84; 78; 82; 82; 86; 81; 98; 83; 85; 80.$$

Prověřte, zda není hodnota 98 výsledekem hrubé chyby.

Řešení. Vypočítáme průměr a směrodatnou odchylku

$$\bar{x} = 84.1\overline{66} \quad s = 4.846.$$

Dosazením dostanem

$$T = \frac{x_n - \bar{x}}{s} = \frac{98 - 84.166}{4.846} = 2.825.$$

Z tabulek určíme $T_{0.05}(12) = 2.663$.
Protože je $T > T_{0.05}(12)$, zamítáme H_0 a hodnotu 98 vyřadíme ze souboru jako důsledek hrubé chyby. Znovu si určíme průměr a směrodatnou odchylku:

$$\bar{x} = 82.91 \quad s = 2.68.$$

Došlo k výrazné změně – ke snížení směrodatné odchylky. □

2.8.2 Dixonův test

Testovací kritéria jsou

$$Q_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}, \qquad Q_1 = \frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1}.$$

Kritické hodnoty $Q_n(p) = Q_1(p)$ jsou tabelovány. Jestliže je hodnota testovacího kritéria větší než kritická hodnota, potom se jedná o hodnotu zatíženou extrémní chybou, proto ji vyloučíme ze souboru a dále ji neuvažujeme.

Příklad 2.33. Použijeme stejné hodnoty jako v předchozím případě:

$$83; 88; 84; 78; 82; 82; 86; 81; 98; 83; 85; 80.$$

Prověřte, zda není hodnota 98 výsledekem hrubé chyby.

Řešení. Dosazením dostanem

$$Q_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1} = \frac{98 - 88}{98 - 78} = 0.5.$$

Z tabulek určíme $Q_{0.05}(12) = 0.482$.
Protože je $Q_n > Q_{0.05}(12)$, zamítáme H_0 a hodnotu 98 vyřadíme ze souboru jako důsledek hrubé chyby. □

Pojmy k zapamatování

- V této kapitole jsme se zabývali matematickou statistikou. S jejími základy jste se setkali v předmětu Matematika 3.
- Zopakovali jsme si práci se základním souborem a s tříděním dat.
- Uvedli jsme si základní statisrtické testy.
- Ukázali jsme si použitelnost a také omezení jednotlivých testů.

Kontrolní otázky

1. Co rozumíme pojmem třídní znak?
2. Kdy nemůžeme použít χ^2 test?
3. Jaký je předpoklad pro použití testu extrémních odchylek?

Cvičení

1.

$\mathbf{X}$	0.1	2	3	4	5	6	7 a více
n_j	8	8	11	10	8	7	8
ν_j	5.496	8.790	11.724	11.724	9.378	6.252	6.630

Rozhodněte, zda náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ zadanou jejími četnostmi n_j můžeme pokládat za výběr z Poissonova rozložení s četnostmi ν_j na hladině významnosti 95%.

2. Mějme dva výběry s charakteristikami $\overline{x} = 62, s_x^2 = 16, n_x = 10, \overline{y} = 60, s_y^2 = 15, n_y = = 14$. Testujte hypotézu, že oba výběry mají stejné střední hodnoty. Pracujte na hladině významnosti 5%.

3. Obrazovka radaru je kruhová o poloměru r. Při zapnutí se na ní náhodně objeví svítící bod znamenající letící objekt. Určete pravděpodobnost, že svítící bod bude od středu obrazovky vzdálen o méně než $\frac{r}{2}$.

4. Náhodn veličina $\mathbb{X}$ má funkci hustoty

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a. \end{cases}$$

Určete 1) parametr a, 2) pravděpodobnost, že náhodná veličina $\mathbb{X}$ bude ležet v intervalu $\left(\frac{a}{2}, a\right)$, 3) načrtněte graf funkce hustoty.

5. Může být pro některou spojitou náhodnou veližinu $\mathbb{X}$
a) distribuční funkce větší než 1?
b) funkce hustoty větší než 1?
c) distribuční funkce záporná?
d) funkce hustoty záporná?

6. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má Laplaceovo rozložení s funkcí hustoty

$$f(x) = a \cdot e^{-\lambda|x|},$$

kde $\lambda > 0$ je konstanta příslušná k danému rozložení. Určete a) paramatr a, b) distribuční funkci, c)$E(\mathbb{X})$, d) $D(\mathbb{X})$.

7. Určete interval spolehlivosti pro střední hodnotu a rozptyl na hladině významnosti 1% pro výběrové hodnoty:

$$6.4; 7.6; 9.2; 5.8; 3.1; 5.4; 7.5; 8.2; 6.1; 5.5; 4.8.$$

8. Továrna vyrobí za směnu 20 000 diod. Pravděpodobnost výroby vadné diody je 0.02. Jaká je pravděpodobnost, že počet vadných diod za směnu bude nejvýše 450.

9. Při výstupní kontrole byly měřením 50 výrobků získány hodnoty

x_j	12	14	16	18	20	22	24	26
f_j	1	4	10	14	12	6	2	1

Horní řádek je třídní znak a dolní je četnost. Na hladině významnosti 5% testujte hypotézu, zda základní soubor má normální rozložení se střední hodnotou 19.5 a rozptylem 8.1.

10. Měřením 12 vzorků pomocí metod X, Y byly získány hodnoty

x_j	24.14	36.99	29.10	31.12	48.82	48.43	38.11	37.62	57.21	41.43	38.94	45.77
y_j	24.26	37.31	28.95	31.66	49.33	48.90	38.37	38.11	57.44	42.01	39.28	46.15

Rozhodněte, zda na hladině významnosti 1% jsou metody rovnocenné.

Výsledky

1. Použijeme χ^2-test pro jeden výběr.

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{7} \frac{(n_j - \nu_j)^2}{\nu_j} = 2.086$$

Protože máme 7 tříd a Poissonovo rozložení má jeden parametr, tak se jedná o χ^2 rozložení s šesti stupni volnosti. $\chi^2_{0.95} = 11.1$ a my nemáme důvod odmítnou naši hypotézu, takže výběr můžeme pokládat za výběr z Poissonova rozložení s pravděpodobností 95%.

2. Jde o test významnosti rozdílu dvou výběrových průměru při neznámých rozptylech. Nejdříve prověříme F-testem, zda se rozptyly rovnají.

$$F = \frac{\frac{n_x}{n_x-1}s_x^2}{\frac{n_y}{n_y-1}s_y^2} = \frac{\frac{10}{9}16}{\frac{14}{13}15} = 1.1.00052910.$$

Protože $F_{0.975}(9;13) = 3.31$, tak nemáme důvod zamítnout hypotézu, že rozptyly jsou shodné. Nyní testujeme hypotézu, že $\overline{x} = \overline{y}$.

$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{n_x s_x^2 + n_y s_y^2}} \sqrt{\frac{n_x n_y (n_x + n_y - 2)}{n_x + n_y}} = 1.178$$

a protože $t_{0.975}(22) = 2.074$ můžeme prohlásit, že rozdíl výběrových průměrů není statisticky významný na hladině 5%.

3. Použijeme geometrickou pravděpodobnost

$$p(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\pi\frac{r^2}{4}}{\pi r^2} = \frac{1}{4}.$$

4. 1) Parametr a určíme z podmínky pro funkci hustoty

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Proto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-a}^{a} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\pi}.$$

2)$p\left(\frac{\frac{1}{\pi}}{2} < \mathbb{X} < \frac{1}{\pi}\right) = \frac{1}{3}.$

5. Přímo z definice plyne: a)ne, b) ano, c)ne, d) ne.

6.
$$a = \frac{\lambda}{2},$$
$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$
$$E(\mathbb{X}) = 0,$$
$$D(\mathbb{X}) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

7. Výběrové charakteristiky jsou
$$\bar{x} = 6.3283, s^2 = 2.9382, s = 1.7141.$$
Použijeme vztahy
$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n-1}} t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n-1}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}$$
a
$$\frac{n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} s^2 \leq \sigma^2 \leq \frac{n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} s^2.$$
Dostaneme
$$5.0296 \leq \mu \leq 7.535,$$
$$1.578 \leq \sigma^2 \leq 9.95.$$

8. Máme $n = 20000, p = 0.02$. Potom
$$\bar{x} = np = 20000 \cdot 0.02 = 400, \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 19.79898987.$$
$$p(\mathbb{X} \leq 450) = F(450) = \Phi\left(\frac{450 - 400}{19.79898987}\right) = \Phi(2.52538136179) = 0.99413.$$

9. Použijeme Kolmogorovův-Smirnovovův test pro jeden výběr. Máme zadané četnosti, proto si musíme dopočítat odpovídající hodnoty normálního rozložení. F_j budou kumulativní četnosti, $u_j = \dfrac{x_j + 1 - 19.5}{\sqrt{8.1}}$ budou normovanéhodnoty v pravém bodě třídního intervalu, Φ_j budou odpovídající hodnoty distribuční funkce

x_j	12	14	16	18	20	22	24	26
f_j	1	4	10	14	12	6	2	1
F_j	1	5	15	29	41	47	49	50
u_j	-1.94	-1.24	-0.53	0.17	0.87	1.57	2.27	2.98
Φ_j	0.0262	0.1075	0.2980	0.5675	0.8078	0.9418	0.9884	0.9986

Maximální hodnota rozdílu $\Phi_j - F_j/50$ je 0.0125. Kritická hodnota se určí podle vztahu
$$D_{0.95} = \frac{1.36}{\sqrt{50}} = 0.192.$$
Protože testovací statistika je menší než kritická hodnota, nemáme důvod zamítnout hypotézu, že základní soubor má normální rozložení se střední hodnotou 19.5 a rozptylem 8.1. χ^2 test nemůžeme použít, protože výběr nesplňuje podmínky - polovina četností je menší jak 5.

10. Použijeme Wilcoxonův test pro párové hodnoty. Nejdříve si určíme rozdíly d_j a přiřadíme jim pořadí p_j:

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_j	24.14	36.99	29.10	31.12	48.82	48.43	38.11	37.62	57.21	41.43	38.94	45.77
y_j	24.26	37.31	28.95	31.66	49.33	48.90	38.37	38.11	57.44	42.01	39.28	46.15
d_j	-0.12	-0.32	0.15	-0.45	-0.51	-0.47	-0.26	-0.49	-0.23	-0.58	-0.34	-0.38
p_j+			2									
p_j-	1	5		8	11	9	4	10	3	12	6	7

Hodnota testovacího kritéria je $T = 2$. Z tabulek pro $n = 12$ a $\alpha = 0.01$ dostaneme $T_\alpha = 7$. Protože $T < T_\alpha$ zamítáme nulovou hypotézu a tvrdíme, že metody X,Y jsou rozdílné.

Maplety

V následujících mapletech si můžete některé studované pojmy přiblížit, případně si sestavit vlastní zadání příkladů.

1. Kvantily normálního rozložení pravděpodobnosti
2. Fisher-Snedocorovo rozložení pravděpodobnosti
3. Studentovo rozložení pravděpodobnosti

3 Operační výzkum

Průvodce studiem

V této kapitole si nejdříve jsme nejdříve na různých příkladech z praxe ukážeme, že všechny se dají popsat pomocí lineárních funkcí a tedy že se dají řešit metodami lineárního programování.

Dále se budeme nejdříve zabývat grafickým řešením a následnou analýzou citlivosti, tj. tím, jak se změní řešení při změně některého ze vstupních parametrů úlohy.

Potom přejdeme k algebraickému řešení. Ukážeme si převedení úlohy na kanonický tvar pomocí pomocných proměnných a případné použití umělých proměnných. Seznámíte se se simplexovou metodou řešení úloh lineárního programování.

Budeme se věnovat i některým úskalím simplexové metody, zejména degeneraci, neexistenci nebo nejednoznačnosti řešení.

Potom přejdeme k problematice nelineárního programování a ukážeme si, že za určitých podmínek jsme schopni i v těchto případech nalézt optimální řešení.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- Slovně zadanou úlohu vyjádřit matematickými vztahy.
- Převést úlohu na kanonický tvar.
- Umět používat pomocné a umělé proměnné.
- Řešit úlohy lineárního programování.
- Provádět analýzu citlivosti.
- Chápat omezení a úskalí řešení úlok lineárního programování.
- Umět rozhodnout, zda je úloha nelineárního programování řešitelná.
- Použít v praxi mwetody nelineárního programování.

3.1 Úvod

Jak už název napovídá, jedná se o výzkum operací. Systematický výzkum v této vědní oblasti byl zahájen v průběhu druhé světové války, tj. operace, o kterých se zde mluví, byly původně operace vojenského charakteru: taktické, organizační a v neposlední řadě zásobovací. Jako příklad problémů, které se v té době řešily, si můžeme vzít následující úkol: Jakým způsobem rozmístit náklad do stanoveného počtu lodí, aby bylo možné plnit bojové úkoly i za situace, že některé z přepravních lodí budou nepřítelem potopeny.

Metody operačního výzkumu tedy spojuje zejména oblast praxe, ve které vznikaly – spadá sem optimální rozdělování surovin, výrobků a pracovních sil, plánování projektů, úlohy zásobování, řešení problémů opotřebení a obnovy zařízení, otázky spojené s čekáním na obsluhu, výběr nej-lepší strategie, stanovení harmonogramu činností, atd. Po válce se výzkum těchto otázek nezastavil, protože dané poznatky nacházely své uplatnění zejména v ekonomice, kde se setkáváme prakticky se stejnými situacemi (ekonomika je také trochu válka).

Z teoretického hlediska jsou však problémy vzniklé na jednom bitevním poli řešeny v mnoha oblastech matematiky: problém optimálního rozdělení zdrojů a pracovních sil se převedl na hledání maxima nebo minima lineární funkce (disciplína: lineární programování) nebo nelineární funkce (disciplíny: matematické programování nebo nelineární programování). Plánování projektu našlo své řešení v úlohách síťové analýzy (teorie grafu). Volba optimální strategie podnítila rozvoj celého vědního oboru – teorie strategických her. Teorie pravděpodobnosti přinesla svou trochu do mlýna v otázkách front (nemyslí se fronty válečné, ale fronty v opravně, menze, bance, na maso nebo na mobil). Sekvenční, opakující se procesy vedly k rozvoji dynamického programování, řešícího úlohy užitím rekurzívních optimalizačních algoritmů.

3.2 Lineární programování

Úkolem lineárního programování je najít řešení úlohy:

nalezněte minimum (nebo maximum) funkce $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ za omezujících podmínek

$$x_j \geq 0 \text{ pro } j = 1, 2, \ldots, n \text{ (tzv. triviální podmínky)},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \text{ (nebo } = b_i \text{ nebo } \geq b_i\text{) pro } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Příklad 3.1. Společnost RED, s.r.o. vlastní závod na výrobu vnitřních a venkovních nátěrů domů. K výrobě se používá dvou základních surovin A, B. Maximální denní dostupnost suroviny A je 6 tun, suroviny B 8 tun. Na výrobu jedné tuny vnějšího nátěru je potřeba 1 tuna A a 2 tuny B, na výrobu jedné tuny vnitřního nátěru 2 tuny A a 1 tuna B. Pruzkum trhu ukázal, že

a) denní výroba vnitřního nátěru nesmí překročit denní výrobu vnějšího nátěru o více než 1 tunu;

b) denní výroba vnitřního nátěru nesmí překročit 2 tuny.

Prodejní cena 1 tuny vnějšího nátěru je 3000 dolarů, vnitřního 2000 dolarů. Jaké množství obou nátěrů musí společnost vyrábět, aby byl její obrat maximální?

Matematická formulace úlohy:

1. označíme proměnné:
   x ... denní výroba vnějšího nátěru (v tunách)
   y ... denní výroba vnitřního nátěru

2. budeme hledat maximum funkce $z = 3x+2y$, která vyjadřuje denní obrat (v tisících dolaru).

3. omezující podmínky:

   – omezení na spotřebu suroviny A:
   na výrobu vnějšího nátěru se spotřebuje x tun suroviny A denně
   na výrobu vnitřního nátěru se spotřebuje $2y$ tun suroviny A denně
   maximální dostupnost suroviny A je 6 tun denně
   celkem tedy dostáváme omezení: **1.** $x + 2y \leq 6$

   – omezení na spotřebu suroviny B: **2.** $2x + y \leq 8$

   – ad pruzkum trhu a): **3.** $y - x \leq 1$

   – ad pruzkum trhu b): **4.** $y \leq 2$

   – triviální omezení, chceme vyrobit kladné množství obou nátěru:
   5. $x \geq 0$
   6. $y \geq 0$.

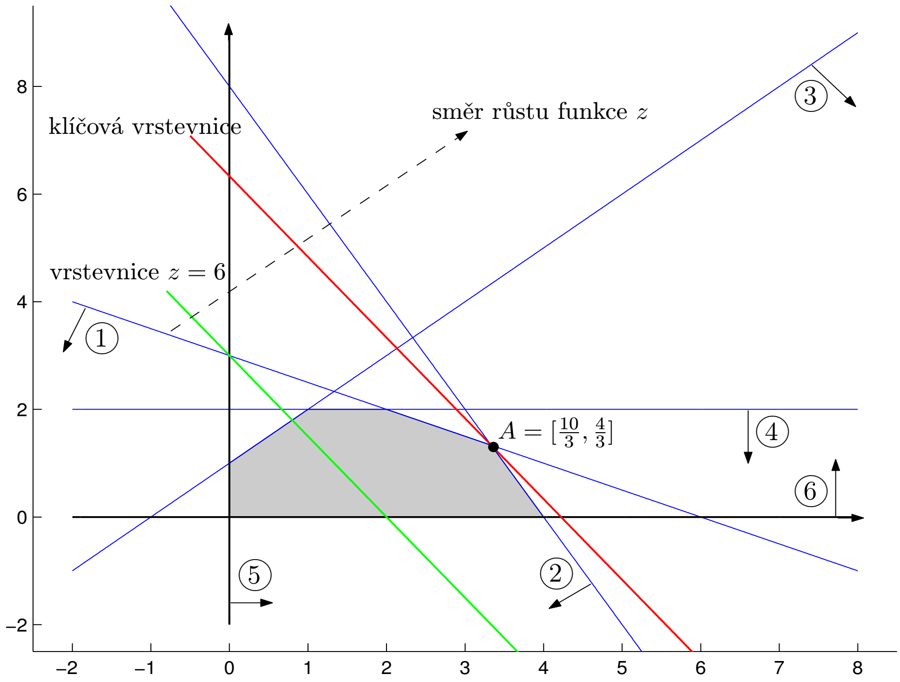
3.2.1 Grafické řešení úlohy lineárního programování

Zabývejme se nyní nejprve grafickým řešením našeho matematického modelu. Z geometrického významu řešení úlohy lze totiž odvodit obecný algebraický postup řešení. Vše bude vysvětleno na příkladu výroby dvou nátěru.

Ad Příklad 3.1. Nalezněte maximum funkce $z = 3\,x + 2\,y$ za omezení

$$\begin{array}{ll} \mathbf{1}. & x + 2\,y \leq 6 \\ \mathbf{2}. & 2\,x + y \leq 8 \\ \mathbf{3}. & -x + y \leq 1 \\ \mathbf{4}. & y \leq 2 \\ \mathbf{5}. & x \geq 0 \\ \mathbf{6}. & y \geq 0 \end{array}$$

Řešení. Jedná se o úlohu nalezení globálního extrému funkce z na množině přípustných hodnot (označme ji M) zadané šesti omezeními. Každé omezení jednoznačně určuje jednu polorovinu. Všechna omezení musí platit současně, tj. množina M je průnikem šesti polorovin (viz obr.3.1):



Obr. 3.1: Grafické znázornění řešení Příkladu 3.1.

Studujme nyní vrstevnice funkce z na množině M:
Vrstevnicemi jsou křivky tvaru $3\,x + 2\,y = d$, kde d je hodnota vrstevnice; tj. rovnoběžné přímky $y = -\frac{3}{2} + \frac{d}{2}$. Pokud libovolnou z těchto vrstevnic posunujeme ve směru růstu funkce z (= směru růstu konstanty d) kolmém na všechny vrstevnice, dojdeme k optimálnímu řešení, kterým je poslední neprázdný průnik vrstevnice s maximální hodnotou na M a množiny M.
V našem případě je optimum v bodě A, který získáme jako prusečík přímek **1.** a **2.** . Optimální hodnota funkce z v bodě A je

$$z(A) = 3 \cdot \frac{10}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{38}{3}.$$

Poznámka 3.2. Protože grafem funkce z je rovina, optimum musí ležet v některém vrcholu množiny přípustných hodnot (nebo ve více vrcholech, pokud klíčová vrstevnice prochází více vrcholy).

Optimální řešení neexistuje, pokud

– množina M je prázdná

– množina M je neohraniečná ve směru růstu funkce z.

Definice 3.3. Netriviální omezení se nazývají

– **klíčová** ... pokud prochází bodem optima

– **neklíčová** ... pokud neprochází bodem optima.

3.2.2 Analýza citlivosti na základě grafického náhledu

Zabývejme se nyní chvíli analýzou citlivosti, tj. tím, jak se změní řešení při změně některého ze vstupních parametru úlohy. Podle toho, jaký parametr se mění, odpovězme u Příkladu 3.1 na následující otázky:

a) Jak moc má smysl zvyšovat pravou stranu klíčových omezení, aby se zlepšovala optimální hodnota funkce z?

b) Jak moc má smysl snížit pravou stranu neklíčových omezení, aby hodnota optima zůstala zachována?

c) Pokud bychom chtěli zajistit zvýšení pravé strany některého z klíčových omezení, které z nich má největší prioritu?

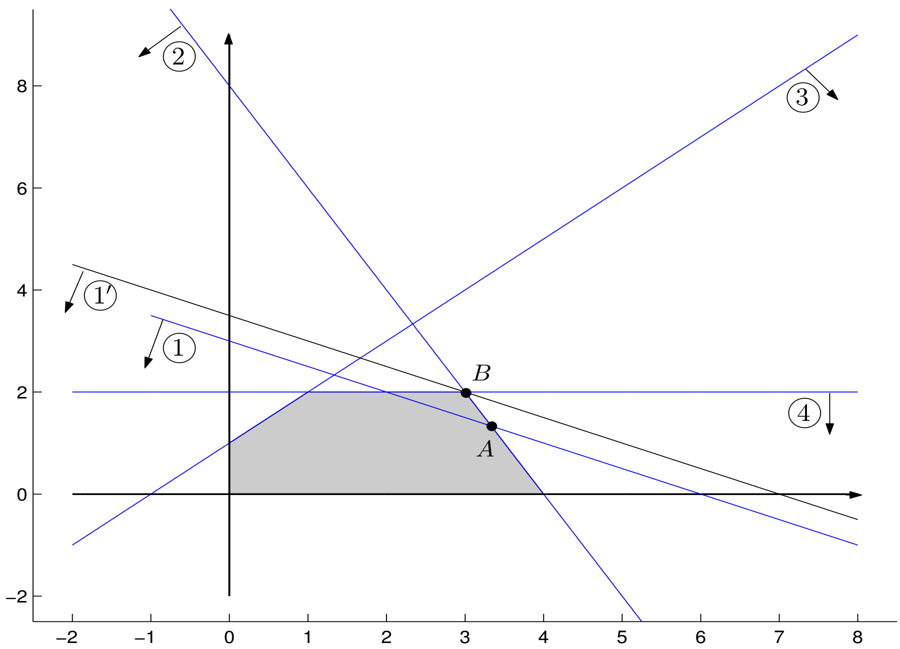
d) Jak moc můžeme měnit koeficienty funkce z, aby bod optima zůstal zachován? (funkčí hodnota v bodě optima se samozřejmě změní)

Ad Příklad 3.1.

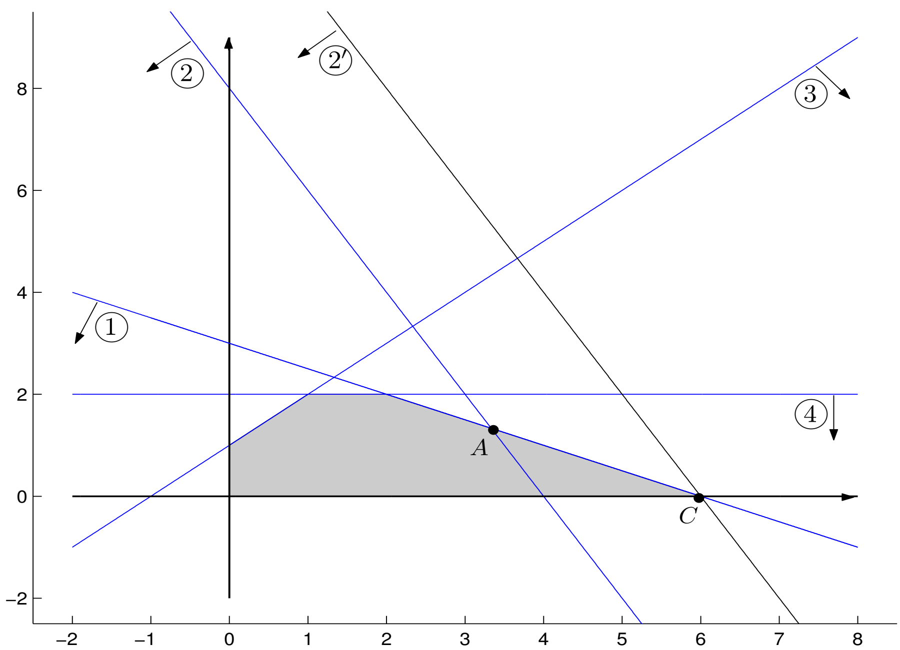
ad a) Klíčová omezení jsou **1.** a **2.** .
Omezení **1.** : $x + 2\,y \leq 6$
Graficky je tato situace znázorněna na obr.3.2. Pokud posunujeme přímku **1.** ve směru růstu funkce z, při posunu až do **1.'** se toto omezení stává nadbytečným, neboť množina přípustných hodnot se nemění přidáním nebo odebráním omezení **1.'** . Posunovat **1.** dále než do **1.'** tedy nemá smysl.
Nahradíme-li tedy v našem případě omezení **1.** omezením **1.'**, optimum bude nyní v bodě B, což je prusečík omezení **2.** a **4.** :

$$B = [3; 2] \Rightarrow z(B) = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 13$$

$$B \in \mathbf{1.}' \Rightarrow \mathbf{1.}' : x + 2\,y \leq 7$$



Obr. 3.2: Grafické znázornění posunutí přímky klíčového omezení.



Obr. 3.3: Grafické znázornění posunutí přímky klíčového omezení.

Omezení **2.** : $2\,x + y \leq 8$

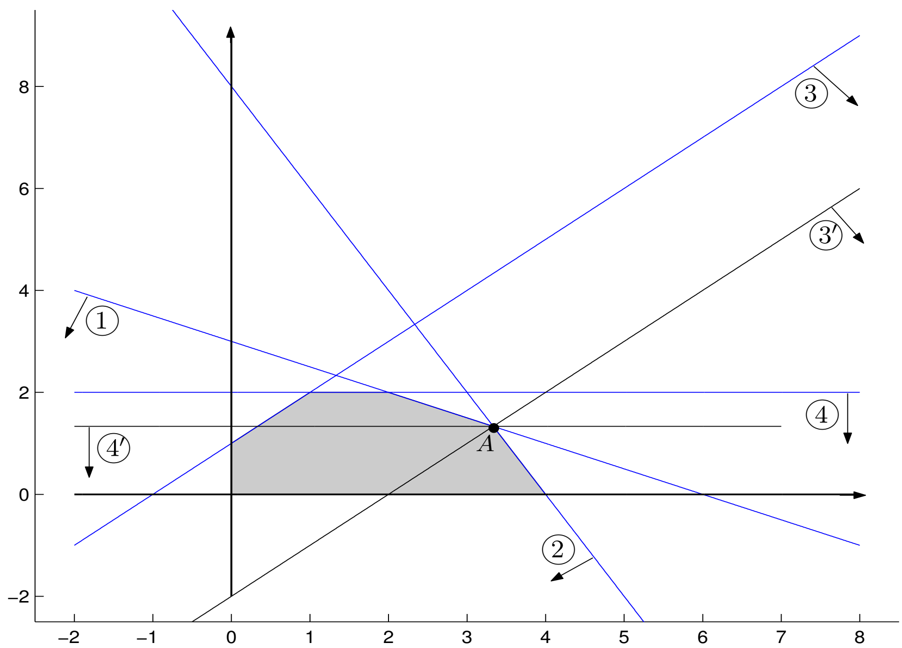
Graficky je tato situace znázorněna na obr.3.3. Přímku **2.** má smysl posunovat až do **2.’** , kdy se omezení **2.’** stává nadbytečným (jeho přidáním nebo odebráním se nemění množina přípustných hodnot).

Nahradíme-li v našem případě omezení **2.** omezením **2.’** , optimum nastane v bodě C, což je průsečík omezení **1.** a **6.** :

$$C = [6; 0] \Rightarrow z(C) = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 0 = 18$$

$$C \in \mathbf{2.}' \Rightarrow \mathbf{2.}' : 2\,x + y \leq 12$$

ad b) Neklíčová netriviální omezení jsou **3.** a **4.** . Protože neprochází bodem optima A původní úlohy, můžeme jejich pravou stranu snižovat, aniž by se bod optima změnil. Tato situace je znázorněna na obr.3.4.



Obr. 3.4: Grafické znázornění posunutí přímek neklíčových omezení.

Omezení **3.** lze měnit až na **3.’** , tj.

$$A \in \mathbf{3.}' \Rightarrow \mathbf{3.}' : -x + y \leq -2.$$

Omezení **4.** lze měnit až na **4.’** , tj.

$$A \in \mathbf{4.}' \Rightarrow \mathbf{4.}' : y \leq \frac{4}{3}.$$

V obou případech změny zůstává optimum v bodě $A = [\frac{10}{3}, \frac{4}{3}]$, tj. $z(A) = \frac{38}{3}$ je optimální funkční hodnota.

ad c) Modifikace netriviálních omezení si shrneme do tabulky:

omezení	pravá strana se změní o ...	změna funkce z	jednotková změna z
1	$7-6=1$ (bod optima ... B)	$z(B)-z(A)=\frac{1}{3}$	$\frac{1/3}{1}=\frac{1}{3}$
2	$12-8=4$ (bod optima ... C)	$z(C)-z(A)=\frac{16}{3}$	$\frac{16/3}{4}=\frac{4}{3}$
3	$-2-1=-3$ (bod optima ... A)	$z(A)-z(A)=0$	$\frac{0}{-3}=0$
4	$\frac{4}{3}-2=-\frac{2}{3}$ (bod optima ... A)	$z(A)-z(A)=0$	$\frac{0}{-2/3}=0$

Údaje uvedené v posledním sloupci tabulky jsou tzv. *stínové ceny*, tj. stínová cena příslušná danému omezení = změna funkce z při jednotkovém zvýšení pravé strany klíčového omezení a nebo jednotkovém snížení pravé strany neklíčového omezení.

Stínové ceny neklíčových omezení jsou vždy nulové. Maximální stínová cena určuje omezení s největší prioritou změny pravé strany, tj. omezení **2** má největší prioritu změny pravé strany.

ad d) Odpovězme např. na otázku, jaká změna koeficientu a funkce $z = a\,x + 2\,y$ ještě zachová bod optima A?

Odpověď lze opět odvodit z geometrického názoru: Aby bod A zůstal bodem optima, vrstevnice funkce z musí mít sklon mezi dvěma mezními hodnotami určenými sklony přímek **1** a **2** :

$$\left.\begin{array}{rl} \text{přímka } \mathbf{1}: & y=-\frac{1}{2}x+3 \\ \text{vrstevnice funkce } z: & y=-\frac{a}{2}x+\frac{d}{2} \\ \text{přímka } \mathbf{2}: & y=-\frac{4}{2}x+8 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l}\text{porovnáním koefi-}\\ \text{cientů } x \text{ máme:}\end{array}$$

$$-\frac{a}{2} \in \left\langle -\frac{1}{2}; -\frac{4}{2} \right\rangle \Rightarrow a \in \langle 1;4\rangle\,.$$

Tj. bodem optima zůstane bod A, pokud cena venkovního nátěru se pohybuje v rozmezí od 1 do 4 tisíc dolaru.

Z příkladu je vidět, že analýza citlivosti je stejně důležitá jako řešení původní úlohy.

3.2.3 Algebraické řešení úlohy lineárního programování Simplexová metoda

Geometrická metoda hledání řešení úlohy LP je vhodná pouze pro úlohy, které obsahují jen dvě proměnné. Pokud má úloha LP větší počet proměnných, musíme použít algebraickou metodu. Přitom úloha musí být v *kanonickém tvaru.* Pokud úloha není v kanonickém tvaru, musíme ji nejdříve na tento tvar převést.

Pro kanonický tvar platí, že

- všechna omezení jsou rovnicemi
- všechna omezení mají nezápornou pravou stranu
- pro všechny proměnné x_j platí: $x_j \geq 0$

Příklad 3.4. Následující úlohu upravte na kanonický tvar:

Nalezněte minimum funkce $z = 2\,x_1 + 3\,x_2$ za omezení

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 10 \\ -2\,x_1 + 3\,x_2 &\leq -5 \\ 7\,x_1 - 4\,x_2 &\leq \;\;6 \\ x_1 &\in \;\mathbb{R} \\ x_2 &\geq \;\;0 \end{aligned}$$

Řešení. Zápornou pravou stranu druhého omezení jednoduše odstraníme vynásobením nerovnosti číslem (-1).

Nerovnost převedeme na rovnici tak, že v případě $\leq$ k levé straně přičteme, v případě $\geq$ od levé strany odečteme, novou nezápornou pomocnou proměnnou p.

Posledním problémem je nahradit neohraničenou proměnnou $x_1 \in \mathbb{R}$ nějakými nezápornými proměnnými. Toho lze docílit substitucí $x_1 = x_1' - x_1''$, kde $x_1' \geq 0,\ x_1'' \geq 0$. Libovolné reálné číslo lze vyjádřit jako rozdíl dvou nezáporných čísel, např.:

$$\begin{aligned} x_1 = 2 \quad &\Rightarrow \quad x_1' = 2,\ x_1'' = 0 \\ x_1 = -3 \quad &\Rightarrow \quad x_1' = 0,\ x_1'' = 3. \end{aligned}$$

Kanonický tvar úlohy tedy bude:

Nalezněte minimum funkce $z = 2\,(x_1' - x_1'') + 3\,x_2$ za omezení

$$\begin{aligned} x_1' - x_1'' + x_2 &= 10 \\ 2\,x_1' - 2\,x_1'' - 3\,x_2 - p_1 &= \;5 \\ 7\,x_1' - 7\,x_1'' - 4\,x_2 + p_2 &= \;6 \end{aligned}$$

$$x_1' \geq 0,\ x_1'' \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0.$$

$\square$

Převod na kanonický tvar je sympatický v tom, že zachovává řešení původní úlohy. Tedy řešení úlohy v kanonickém tvaru je stejné jako řešení původní úlohy (omezíme-li se na původní proměnné).

Při algebraickém řešení se využívá toho faktu, že optimum funkce z musí nastat v některém z vrcholu množiny přípustných hodnot. V algoritmu řešení tedy najdeme nějaký libovolný vrchol množiny přípustných hodnot. Potom vybereme ten z jeho sousedních vrcholů, ve kterém nastane největší *zlepšení* funkce z (*zlepšení* = zvýšení pokud hledáme maximum a snížení pokud hledáme minimum) a přesuneme se do něj. Proces výběru sousedního vrcholu, který *zlepšuje* funkci z, opakujeme tak dlouho, dokud to jde. Když všechno dobře dopadne, dojdeme na konci procesu do optimálního vrcholu.

Ještě poznámka k názvu metody: pokud množina přípustných hodnot je ohraničená a počet jejích vrcholu je o 1 větší než její dimenze, nazýváme ji simplex. Odtud i název simplexová metoda, neboť se v daném kroku pohybujeme mezi vrcholy určitého simplexu.

Celou metodu vysvětlíme na našem příkladu 3.1 výroby nátěru. Kanonický tvar úlohy je:

Nalezněte maximum funkce $z = 3\,x + 2\,y$ za omezení

$$\begin{array}{rcrcccccccl} x & + & 2\,y & + & p_1 & & & & & = & 6 \\ 2\,x & + & y & & & + & p_2 & & & = & 8 \\ -x & + & y & & & & & + & p_3 & = & 1 \\ & & y & & & & & & +p_4 & = & 2 \end{array}$$

$$x,\, y,\, p_1,\, p_2,\, p_3,\, p_4 \geq 0.$$

Při převodu na kanonický tvar jsme si zavedli pomocné proměnné p_1, p_2, p_3, p_4.

Řešení: Kanonický tvar úlohy přepíšeme do tzv. *simplexové tabulky*:

	x	y	p_1	p_2	p_3	p_4	řešení
z	-3	-2	0	0	0	0	$= 0$
p_1	1	2	1	0	0	0	6
p_2	2	1	0	1	0	0	8
p_3	-1	1	0	0	1	0	1
p_4	0	1	0	0	0	1	2

V prvním řádku tabulky jsou označeny sloupce jednotlivých proměnných. Ve druhém řádku jsou zapsány koeficienty rovnice $z - 3\,x - 2\,y = 0$, je třeba si jen uvědomit tvar funkce z se všemi proměnnými

$$z = 3\,x + 2\,y + 0\,p_1 + 0\,p_2 + 0\,p_3 + 0\,p_4.$$

V dalších řádcích jsou zapsány koeficienty jednotlivých omezujících rovnic. V našem případě omezení tvoří systém 4 rovnic o 6 neznámých. Najdeme jisté jeho řešení následovně: Vybereme 4 proměnné, tzv. *bázické* proměnné (v našem případě p_1, p_2, p_3, p_4). Označení bázických proměnných je v prvním sloupci tabulky, v řádku z jsou koeficienty u bázických proměnných rovny 0 a v tabulce tvoří sloupce příslušné bazickým proměnným jednotkovou matici. Ostatní, tzv. *nebázické* proměnné, položíme rovny 0, tj. $x = 0$, $y = 0$. Tím vznikne systém 4 rovnic o 4 neznámých p_1, p_2, p_3, p_4, který má jediné řešení. Protože příslušná matice systému je jednotková, vektor pravých stran je přímo vektorem řešení, tj.

$$p_1 = 6,\ p_2 = 8,\ p_3 = 1,\ p_4 = 2.$$

Tímto zpusobem jsme našli souřadnice výchozího vrcholu simplexu

$$\boldsymbol{x}^0 = (0, 0, 6, 8, 1, 2).$$

Přechod na sousední vrchol simplexu lze algebraicky zařídit tak, že jednu z nebázických proměnných zaměníme za jednu z bázických a pak postup opakujeme, nebázické proměnné položíme rovny 0, zbylý systém s bázickými proměnnými vyřešíme.
Poznámka k terminologii:

- *přípustné řešení* — — — libovolný bod množiny přípustných hodnot (nemusí být vrcholem), jehož všechny souřadnice jsou nezáporné

- *přípustné bázické řešení* — — — takové přípustné řešení, které odpovídá některému vrcholu množiny přípustných hodnot.

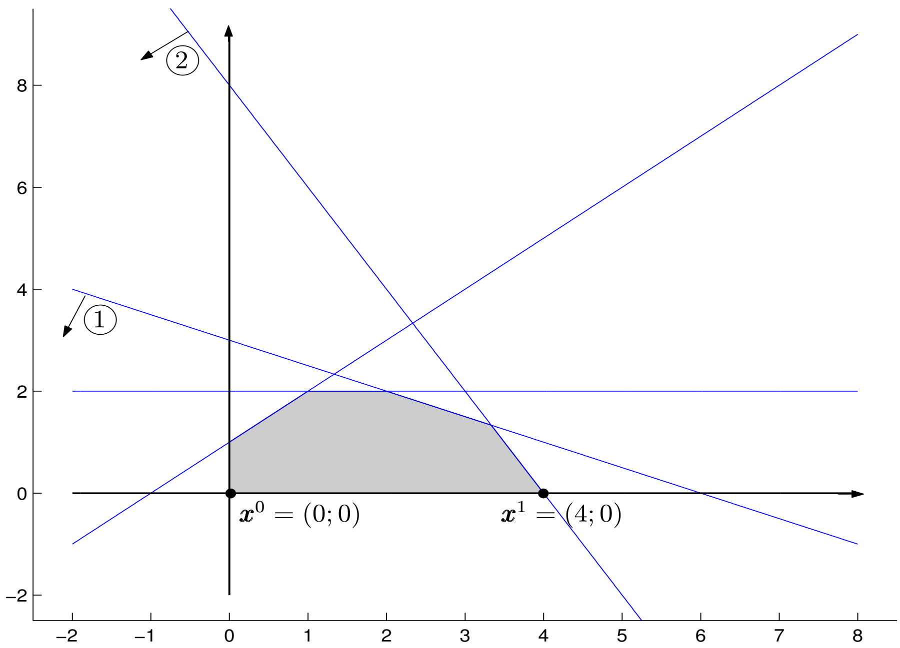
Realizujme nyní přechod do sousedního vrcholu, který nejvíce *zlepší* hodnotu funkce z:

a) Za vstupní proměnnou vybereme x, protože příslušný koeficient v řádku funkce z je nejvíce záporný, tj. při převodu na druhou stranu rovnice nejvíce zvýší hodnotu funkce z. Pokud už žádné číslo v řádku z není záporné, dané přípustné řešení je už optimální.

b) Proměnná x určuje sloupec, ve kterém vybereme kladné hodnoty. K těmto hodnotám vypočteme tzv. kladné změny neboli podíly (příslušná pravá strana)/(hodnota ve sloupci): $\frac{6}{1}$ a $\frac{8}{2}$. Minimální z těchto kladných změn určuje řádek, jehož proměnná je výstupní: v našem případě minimální kladná změna je $\frac{8}{2}$, tj. p_2 je výstupní proměnná. Prvek na průsečíku vstupního sloupce a výstupního řádku se nazývá *pivotový prvek.*

	x	y	p_1	p_2	p_3	p_4	řešení
z	-3	-2	0	0	0	0	0
p_1	**1**	2	1	0	0	0	**6**
p_2	**2**	1	0	1	0	0	**8**
p_3	-1	1	0	0	1	0	1
p_4	0	1	0	0	0	1	2

Důvod výběru řádku s minimální kladnou změnou:



Obr. 3.5: Grafické znázornění přechodu mezi dvěma vrcholy.

Náš výchozí vrchol je $\boldsymbol{x}^0 = (0;0)$. Vstupní sloupec určuje, že největší nárůst funkční hodnoty funkce z nastane pro proměnnou x, tj. budeme se pohybovat ve směru růstu proměnné x (= v kladném směru osy x). Následující vrchol množiny přípustných hodnot v tomto směru $\boldsymbol{x}^1 = (4;0)$ je dán prvním nejbližším omezením, které protne osu x, což je omezení **2** s kladnou změnou 4, nikoli omezení **1** s kladnou změnou 6 (bod $(6;0)$ není vrcholem M). Minimální kladná změna (= 4) vyjadřuje změnu souřadnice x při přechodu z vrcholu $\boldsymbol{x}^0$ do $\boldsymbol{x}^1$.

Nakonec ještě poznamenejme, že kladná změna nemusí obecně znamenat vzrůst x-ové souřadnice; kladný směr = směr růstu funkce z při maximalizaci, resp. směr klesání z při minimalizaci.

Nyní eliminačními úpravami zajistíme, aby se na místě pivotového prvku objevila hodnota 1 a zbylé hodnoty vstupního sloupce byly 0 (včetně koeficientu v řádku z).

POZOR - K danému řádku lze přičítat násobek pouze pivotového (= výstupního) řádku, **žádného dalšího!**

Tímto dodatečným omezením se totiž docílí důležité vlastnosti, že sloupce odpovídající novým bázickým proměnným budou opět vytvářet jednotkovou matici (i když jejich pořadí bude přeházené) a navíc bude splněna důležitá podmínka (která musí být zaručena v každém kroku simplexové tabulky), že koeficienty v řádku z příslušné bázickým proměnným jsou rovny 0:

	x	y	p_1	p_2	p_3	p_4	řešení
z	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	0	12
p_1	0	$\boldsymbol{\frac{3}{2}}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	**2**
x	1	$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	**4**
p_3	0	$\boldsymbol{\frac{3}{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	**5**
p_4	0	**1**	0	0	0	1	**2**

V posledním sloupci řádku pro funkci z je uvedena její nová hodnota (ve vrcholu $\boldsymbol{x}^1$). Ta se zvýšila o násobek příslušného koeficientu v řádku funkce z (= 3) a kladné změny proměnné x (= 4), tj. o $3 \cdot 4 = 12$.
Nebázické proměnné položíme rovny 0, tj.

$$y = 0$$
$$p_2 = 0.$$

Dostáváme nové bázické řešení:

$$p_1 = 2$$
$$x = 4$$
$$p_3 = 5$$
$$p_4 = 2.$$

Nový vrchol, do kterého jsme se dostali, má tedy souřadnice

$$\boldsymbol{x}^1 = (4, 0, 2, 0, 5, 2).$$

Algoritmus pokračuje dalším krokem: záporná hodnota v řádku z určuje vstupní proměnnou y, výstupní proměnná je určena minimální kladnou změnou

$$\min\left\{\frac{2}{3/2}, \frac{4}{1/2}, \frac{5}{3/2}, \frac{2}{1}\right\} = \frac{4}{3},$$

která nastane v 1.řádku (= p_1 řádek).

Po normalizaci pivotového prvku a vynulování vstupního sloupce pomocí přičtení násobků pivotového řádku k nepivotovým řádkům dostáváme tabulku

	x	y	p_1	p_2	p_3	p_4	řešení
z	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$12\frac{2}{3}$
y	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
x	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
p_3	0	0	-1	1	1	0	3
p_4	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$

Nová hodnota funkce z se zvýšila o $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}$, tj. o $\frac{2}{3}$.
Nebázické proměnné položíme rovny 0, tj.

$$\begin{aligned} p_1 &= 0 \\ p_2 &= 0. \end{aligned}$$

Dostáváme nové bázické řešení:

$$\begin{aligned} y &= \tfrac{4}{3} \\ x &= \tfrac{10}{3} \\ p_3 &= 3 \\ p_4 &= \tfrac{2}{3}. \end{aligned}$$

Nový vrchol, do kterého jsme se dostali, má tedy souřadnice

$$\boldsymbol{x}^2 = (\frac{10}{3}, \frac{4}{3}, 0, 0, 3, \frac{2}{3}).$$

Protože v řádku funkce z už nejsou záporné hodnoty, nalezené řešení je optimální, tj.

$$x = \frac{10}{3},\ y = \frac{4}{3}$$

je optimální množství denní výroby obou nátěrů.

Poznámka k výběru vstupní proměnné:

1) Výběr sloupce odpovídajícího záporné, ale ne nejvíce záporné hodnotě v řádku z by také vedl ke zvýšení hodnoty funkce z, ale to zvýšení by nebylo největší možné.

2) Při minimalizaci je v algoritmu jediný rozdíl: vstupní sloupec je ten, který odpovídá maximální kladné hodnotě v řádku z (ta při převodu na druhou stranu rovnice nejvíce zmenší funkční hodnotu).

3.2.4 Analýza citlivosti pomocí výstupní simplexové tabulky

Celou analýzu citlivosti lze provést pomocí simplexové tabulky, a to i v úlohách pro vyšší dimenzi, kde už grafické řešení není možné. Odpovědi na jednotlivé otázky analýzy citlivosti lze vyčíst ze závěrečné (výstupní) simplexové tabulky. Postup si opět ukážeme na příkladu 3.1:

a) Jaký je význam optimálních hodnot $p_1 = p_2 = 0,\ p_3 = 3,\ p_4 = \frac{2}{3}$, kde hodnoty p_1, p_2, p_3, p_4 jsou koeficienty optimálního řešení?

   $p_1 = p_2 = 0$ ... omezení **1** , **2** jsou klíčová, obě suroviny jsou maximálně využity (jedná se o omezení dostupnosti zdrojů)

   $p_3 = 3$ ... pravou stranu omezení **3** lze snížit při zachování optima o hodnotu 3, tj.

   3' : $-x + y \leq -2$ ... denní výroba vnějšího nátěru může překročit denní výrobu vnitřního nátěru až o 2 tuny (jedná se o omezení poptávky)

   $p_4 = \frac{2}{3}$ ... pravou stranu **4** lze snížit o $\frac{2}{3}$, tj.

   4' : $y \leq \frac{4}{3}$ ... poptávka muže být ještě o $\frac{2}{3}$ snížena.

b) Řádek funkce z v optimální tabulce udává stínové ceny příslušné jednotlivým omezením → každé omezení je neoddělitelně spjato s jednou pomocnou proměnnou.

   stínová cena omezení **1** je rovna $\frac{1}{3}$ → snížení pravé strany **1** o 1 povede ke snížení obratu o $\frac{1}{3}$ tisíce dolaru

   2 $\frac{4}{3}$

   3 0

   4 0 → kdyby stínová cena **4** byla místo 0 kladná, znamenalo by to, že má smysl zvyšovat poptávku po vnitřním nátěru, čehož lze docílit zvýšením podílu společnosti na trhu.

c) Informace o změně pravých stran klíčových omezení.
   Jak moc má smysl zvyšovat pravou stranu omezení **1**? Kdybychom toto omezení uvažovali ve tvaru $x + 2\,y \leq 6 + \Delta_1$, výsledná simplexová tabulka by byla tatáž až na sloupec pravých stran:

	x	y	p_1	p_2	p_3	p_4	řešení
z			$\frac{1}{3}$				$12\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\Delta_1 \geq 0$
y			$\frac{2}{3}$				$\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\Delta_1 \geq 0$
x			$-\frac{1}{3}$				$\frac{10}{3} - \frac{1}{3}\Delta_1 \geq 0$
p_3			-1				$3 - 1\Delta_1 \geq 0$
p_4			$-\frac{2}{3}$				$\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\Delta_1 \geq 0$

Modifikace pravých stran (= koeficienty u Δ_1) je určena koeficienty ve sloupci výstupní tabulky odpovídajícím pomocné proměnné p_1 v omezení **1** .
Nerovnosti uvedené v pravém sloupci tabulky musí platit, aby řešení bylo přípustné. Vyřešením máme $\Delta_1 \in [-2; 1]$, tj. dostupnost suroviny A má smysl zvýšit o 1 tunu.

Analogicky lze rozebrat i další klíčové omezení **2** . Přitom výsledek získaný pro dané klíčové omezení platí pro tu situaci, že pravé strany ostatních omezení neměníme (vždy sledujeme změnu pouze jednoho omezení).

d) Informace o změně koeficientu funkce z.
Sledujme vliv změny koeficientu u proměnné x: $z = (3 + \delta_1)\, x + 2\, y$.
Optimální tabulka:

	x	y	p_1	p_2	p_3	p_4	řešení
z	0	0	$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\delta_1\right)$	$\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\delta_1\right)$	0	0	$12\frac{2}{3} + \frac{10}{3}\delta_1$
y							
x	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
p_3							
p_4							

Koeficienty u δ_1 jsou dány hodnotami v řádku x v mimobázických sloupcích.
Aby se jednalo o maximum, musí platit

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\delta_1 \geq 0,\ \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\delta_1 \geq 0 \ \Rightarrow \delta_1 \in [-2; 1]\,,$$

tj. koeficient u x ve funkci z musí být v intervalu $[3 - 2; 3 + 1] = [1; 4]$.

Situace změny nebázického koeficientu je ještě jednodušší: $z = 3\, x + 2\, y + (0 + \delta_3)\, p_1$ způsobí optimální tabulku s řádkem z ve tvaru

	x	y	p_1	p_2	p_3	p_4	řešení
z	0	0	$\frac{1}{3} - \delta_3$	$\frac{4}{3}$	0	0	$12\frac{2}{3}$

U δ_3 je při maximalizaci vždy koeficient -1, při minimalizaci vždy koeficient $+1$.

e) Při analýze citlivosti jsme se dosud nezabývali otázkou, co způsobí změna koeficientů na levé straně některého omezení. K této otázce se vrátíme v kapitole 3.3 a zodpovíme ji s využitím teorie duality.

3.2.5 Obecný tvar simplexové metody s využitím umělých proměnných

Pokud sloupce odpovídající počátečním bázickým proměnným ve vstupní tabulce simplexové metody nevytváří jednotkovou matici, nenulové souřadnice příslušného bázického řešení nejsou přímo rovny pravým stranám simplexové tabulky – tato matice je získána až vyřešením příslušného systému rovnic. A zde se může stát, že některá souřadnice řešení bude záporná, tedy výchozí bázické řešení nebude přípustné.

Příklad 3.5. Minimalizujte funkci $z = 4\,x_1 + x_2$ za podmínek

$$\begin{aligned} 3\,x_1 + x_2 &= 3 \\ 4\,x_1 + 3\,x_2 &\geq 6 \\ x_1 + 2\,x_2 &\leq 4 \end{aligned}$$

$$x_1,\, x_2 \geq 0.$$

Řešení. Kanonický tvar úlohy bude:

Najděte minimum funkce $z = 4\,x_1 + x_2$ za podmínek

$$\begin{aligned} 3\,x_1 + x_2 \phantom{{}- p_1 + p_2} &= 3 \\ 4\,x_1 + 3\,x_2 - p_1 \phantom{{}+ p_2} &= 6 \\ x_1 + 2\,x_2 \phantom{{}- p_1} + p_2 &= 4 \end{aligned}$$

$$x_1,\, x_2,\, p_1,\, p_2 \geq 0.$$

Vstupní simplexová tabulka má tvar

	x_1	x_2	p_1	p_2	řešení
z	-4	-1	0	0	0
x_2	3	1	0	0	3
p_1	4	3	-1	0	6
p_2	1	2	0	1	4

Za vstupní bázické proměnné jsme zvolili x_2, p_1, p_2, tj. položili jsme $x_1 = 0$. Vyřešíme příslušný systém rovnic

$$\left.\begin{array}{rcl} x_2 & & = 3 \\ 3\,x_2 - p_1 & & = 6 \\ 2\,x_2 & + p_2 & = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcr} x_2 = & 3 \\ p_1 = & 3 \\ p_2 = & -2 \end{array}$$

Dané řešení $(0, 3, 3, -2)$ není přípustné, protože jeho čtvrtá souřadnice je záporná. Nejedná se tedy o vrchol množiny přípustných hodnot. $\square$

Abychom zaručili, že nalezené vstupní bázické řešení bude přípustné, použijeme jedné ze dvou následujících metod využívajících tzv. umělé proměnné.

a) *Dvoufázová metoda*

1.fáze: Přidáme do levých stran systému nerovností další proměnné, díky nimž zde vznikne jednotková podmatice a řešíme úlohu lineárního programování s novou funkcí r (ta se vždy minimalizuje, i kdyby původní úloha byla maximalizace):

Najděte minimum funkce $r = u_1 + u_2$ za podmínek

$$\begin{array}{rcl} 3\,x_1 + x_2 + u_1 & = & 3 \\ 4\,x_1 + 3\,x_2 - p_1 + u_2 & = & 6 \\ x_1 + 2\,x_2 + p_2 & = & 4 \end{array}$$

$$x_1,\, x_2,\, p_1,\, p_2,\, u_1,\, u_2 \geq 0.$$

Vstupní simplexová tabulka má pak tvar

		x_1	x_2	p_1	u_1	u_2	p_2	řešení
min	r	0	0	0	-1	-1	0	0
	u_1	3	1	0	1	0	0	3
	u_2	4	3	-1	0	1	0	6
	p_2	1	2	0	0	0	1	4

Zvolili jsme bázické proměnné u_1, u_2, p_2 a položili $x_1 = x_2 = p_1 = 0$. Ovšem nemůžeme provést optimalizační krok, protože není splněna podmínka, o které už byla řeč: koeficienty v řádku funkce r v bázických sloupcích musí být rovny 0. Abychom vynulovali koeficienty -1 ve sloupcích u_1, u_2, a přitom zachovali nuly ve sloupci p_2, přičteme k řádku r řádky u_1, u_2:

		$\mathbf{x}_1$	x_2	p_1	u_1	u_2	p_2	řešení
min	r	7	4	-1	0	0	0	9
	$\mathbf{u}_1$	**3**	1	0	1	0	0	**3**
	u_2	**4**	3	-1	0	1	0	**6**
	p_2	**1**	2	0	0	0	1	**4**

Nyní mužeme provést optimalizaci:

$$\boldsymbol{x}^0 = (0, 0, 0, 3, 6, 4).$$

Vstupní sloupec určíme podle maximálního kladného prvku v řádku r, výstupní řádek podle minimální kladné změny $\min\left\{\frac{3}{3}, \frac{6}{4}, \frac{4}{1}\right\} = \frac{3}{3}$.

		x_1	$\mathbf{x}_2$	p_1	u_1	u_2	p_2	řešení
min	r	0	$\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{7}{3}$	0	0	2
	x_1	1	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	**1**
	$\mathbf{u}_2$	0	$\mathbf{\frac{5}{3}}$	-1	$-\frac{4}{3}$	1	0	**2**
	p_2	0	$\mathbf{\frac{5}{3}}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	**3**

Optimalizace:

$$\boldsymbol{x}^1 = (1, 0, 0, 0, 2, 3)$$

$\max r = \frac{5}{3} \Rightarrow$ vstupní souřadnice je x_2
$\min\left\{\frac{1}{1/3}, \frac{2}{5/3}, \frac{3}{5/3}\right\} = \frac{2}{5/3}$

	x_1	x_2	p_1	u_1	u_2	p_2	řešení
r	0	0	0	-1	-1	0	0
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
p_2	0	0	1	1	-1	1	1

Optimum úlohy je

$$\boldsymbol{x}^2 = \left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 0, 0, 0, 1\right),$$

protože v řádku funkce r (mimo pravou stranu, která neslouží k určování vstupní proměnné) už není kladný prvek.
Všimněme si také, že $r(\boldsymbol{x}^2) = 0$. Kdyby tomu tak nebylo a optimální funkční hodnota by byla nenulová, znamenalo by to, že původní úloha (s funkcí z) nemá řešení, tj. 2.fází metody bychom už nepokračovali.

2.fáze: Nyní se vrátíme k minimalizaci funkce z původní úlohy, přičemž omezení opíšeme z výstupní tabulky 1.fáze. Přitom sloupce u_1, u_2 vyloučíme, protože nejsou bázické. Kdyby některá z proměnných u_1, u_2 byla bázická v optimální tabulce 1.fáze, museli bychom ji uvažovat i ve 2.fázi a zajistit, aby vypadla z báze (Dautzig 1963).
Řešíme tedy úlohu:

najděte minimum funkce $z = 4\,x_1 + x_2$ za podmínek

$$\begin{aligned} x_1 \quad + \tfrac{1}{5}\,p_1 \quad &= \tfrac{3}{5} \\ x_2 - \tfrac{3}{5}\,p_1 \quad &= \tfrac{6}{5} \\ p_1 + p_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$x_1,\, x_2,\, p_1,\, p_2 \geq 0.$$

Systém podmínek nyní obsahuje sloupce, ze kterých lze složit jednotkovou matici, čili volbou bázických proměnných x_1, x_2, p_2 a položením $p_1 = 0$ dostaneme už přípustné bázické řešení:

		x_1	x_2	p_1	p_2	řešení
min	z	-4	-1	0	0	0
	x_1	1	0	$\mathbf{\frac{1}{5}}$	0	$\mathbf{\frac{3}{5}}$
	x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
	p_2	0	0	$\mathbf{1}$	1	$\mathbf{1}$
	z	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{18}{5}$

Protože v bázických sloupcích řádku z nejsou nuly, musíme tento řádek upravit před prováděním optimalizačního kroku.
Nyní mužeme provést optimalizaci:

$$\boldsymbol{x}^0 = \left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 0, 1\right);\ z(\boldsymbol{x}^0) = \frac{18}{5}.$$

max $z = \frac{1}{5} \Rightarrow p_1$ je vstupní proměnná
min $\left\{\frac{3/5}{1/5}, \frac{1}{1}\right\} = 1 \Rightarrow p_2$ je výstupní proměnná.

	x_1	x_2	p_1	p_2	řešení
z	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{17}{5}$
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
x_2	0	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$
p_1	0	0	1	1	1

Optimalizace:

$$\boldsymbol{x}^1 = \left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}, 1, 0\right); \; z(\boldsymbol{x}^1) = \frac{17}{5}.$$

Dostáváme tedy optimální řešení úlohy:

$$x_1 = \frac{2}{5}; \; x_2 = \frac{9}{5}.$$

b) *Penalizační metoda*
Tato metoda je ekvivalentní dvoufázové metodě – rozdíl je však v tom, že obě fáze jsou zabudovány najednou v jedné úloze lineárního programování.

Ad Příklad 3.5 Najděte minimum funkce $z = 4x_1 + x_2 + M(u_1 + u_2)$, kde M je libovolně velká kladná konstanta (v případě maximalizace funkce z by u M bylo znaménko –) za podmínek

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \phantom{{}- p_1} + u_1 \phantom{{}+ u_2 + p_2} &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - p_1 \phantom{{}+ u_1} + u_2 \phantom{{}+ p_2} &= 6 \\ x_1 + 2x_2 \phantom{{}- p_1 + u_1 + u_2} + p_2 &= 4 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, p_1, p_2, u_1, u_2 \geq 0.$$

Protože M muže nabývat vysokých hodnot, pro optimum úlohy musí platit $u_1 = u_2 = 0$. Pokud to nenastane, původní úloha nemá řešení.
Systém omezení je tedy stejný jako v 1.fázi dvoufázové metody, pouze došlo ke změně funkce z.

		x_1	x_2	p_1	u_1	u_2	p_2	řešení
min	z	-4	-1	0	$-M$	$-M$	0	0
$\longleftarrow$	u_1	**3**	1	0	1	0	0	**3**
	u_2	**4**	3	-1	0	1	0	**6**
	p_2	**1**	2	0	0	0	1	**4**
	z	$-4+7M$	$-1+4M$	$-M$	0	0	0	$9M$

Před použitím optimalizačního kroku musíme opět vynulovat bázické pozice v řádku z.
Optimalizace:

$$\boldsymbol{x}^0 = (0, 0, 0, 3, 6, 4); \; z(\boldsymbol{x}^0) = 9\,M$$

max $z = -4 + 7\,M \Rightarrow x_1$ je vstupní proměnná
min $\left\{\frac{3}{3}, \frac{6}{4}, \frac{4}{1}\right\} = \frac{3}{3} \Rightarrow u_1$ je výstupní proměnná.

		x_1	x_2	p_1	u_1	u_2	p_2	řešení
min	z	0	$\frac{1+5M}{3}$	$-M$	$\frac{4-7M}{3}$	0	0	$4+2M$
$\longleftarrow$	x_1	1	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	**1**
	u_2	0	$\mathbf{\frac{5}{3}}$	-1	$\frac{4}{3}$	1	0	**2**
	p_2	0	$\mathbf{\frac{5}{3}}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	**3**

Optimalizace:

$$\boldsymbol{x}^1 = (1,0,0,0,2,3);\ z(\boldsymbol{x}^1) = 4 + 2\,M$$

max $z = \frac{1+5M}{3} \Rightarrow x_2$ je vstupní proměnná
min $\left\{\frac{1}{1/3}, \frac{2}{5/3}, \frac{3}{5/3}\right\} = \frac{6}{5} \Rightarrow u_2$ je výstupní proměnná.

		x_1	x_2	p_1	u_1	u_2	p_2	řešení
min	z	0	0	$\frac{1}{5}$	$(\frac{8}{5} - M)$	$(-\frac{1}{5} - M)$	0	$\frac{18}{5}$
	x_1	1	0	$\mathbf{\frac{1}{5}}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\mathbf{\frac{3}{5}}$
	x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
$\longleftarrow$	p_2	0	0	**1**	1	-1	1	**1**

Optimalizace:

$$\boldsymbol{x}^2 = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 0, 0, 0, 1);\ z(\boldsymbol{x}^2) = \frac{18}{5}$$

max $z = \frac{1}{5} \Rightarrow p_1$ je vstupní proměnná
min $\left\{\frac{3/5}{1/5}, \frac{1}{1}\right\} = 1 \Rightarrow p_2$ je výstupní proměnná.

	x_1	x_2	p_1	u_1	u_2	p_2	řešení
z	0	0	0	$(\frac{7}{5} - M)$	$-M$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{17}{5}$
x_1	1	0	0	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$
p_1	0	0	1	1	-1	1	1

Optimalizace:

$$\boldsymbol{x}^3 = (\frac{2}{5}, \frac{9}{5}, 1, 0, 0, 0);\ z(\boldsymbol{x}^3) = \frac{17}{5}$$

je optimum, protože v řádku funkce z (mimo pravou stranu) nejsou už kladné hodnoty.
Dostáváme tedy optimální řešení úlohy:

$$x_1 = \frac{2}{5};\ x_2 = \frac{9}{5}.$$

V úloze jsme při řešení mohli místo abstraktního M použít dostatečně velkou hodnotu, např. $M = 10\,000$. Ale (zejména v počítačovém zpracování algoritmu) při použití konkrétního M dochází k zaokrouhlovací chybě. Proto je výhodnější používat abstraktní M (i v programu, lze totiž dodefinovat algebraické operace sčítání, násobení a porovnávání hodnot obecně i pro abstraktní M s využitím pomocné proměnné, do které je možné ukládat koeficient u M).

Příklad 3.6. Je nutné v následujících úlohách použít umělé proměnné?

a) Najděte maximum funkce $z = x_1 + x_2$ za omezení

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + 3\,x_2 &= 5 \\ 7\,x_1 + 2\,x_2 &\leq 6 \end{aligned}$$

$$x_1,\, x_2 \geq 0.$$

b) Najděte minimum funkce $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ za omezení

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} &= 7 \\ 4\,x_1 + 3\,x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 &\leq 8 \end{aligned}$$

$$x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4 \geq 0.$$

Řešení. ad a) Ano, úloha přeformulovaná pro užití simplexové metody zní:

maximalizujte funkci $z = x_1 + x_2 - Mu$ za podmínek

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + 3\,x_2 + u \phantom{{}+p} &= 5 \\ 7\,x_1 + 2\,x_2 \phantom{{}+u} + p &= 6 \end{aligned}$$

$$x_1,\, x_2,\, u,\, p \geq 0.$$

Příslušná simplexová tabulka:

		x_1	x_2	u	p	řešení
max	z	-1	-1	M	0	0
	u	2	3	1	0	5
	p	7	2	0	1	6
	z	$-1-2M$	$-1-3M$	0	0	$-5M$

Nesmíme zapomenout vynulovat bázické koeficienty v řádku z, aby byla tabulka připravená pro optimalizační krok!

ad b) Ne, samotná omezení obsahují už jednotkovou podmatici

		x_1	x_2	x_3	x_4	řešení
min	z	-1	-1	-1	-1	0
	x_3	2	1	1	0	7
	x_4	4	3	0	1	8
	z	5	3	0	0	15

Musíme opět vynulovat bázické pozice v řádku z.

□

3.2.6 Úskalí simplexové metody

a) *Degenerace*

- **matematicky:** bázická souřadnice řešení je rovna 0, tj. může se stát, že jednomu vrcholu množiny přípustných hodnot odpovídá více kroků simplexové tabulky; speciálně je zde nebezpečí tzv. zacyklení, tj. procházení několika vrcholu množiny přípustných hodnot stále dokola, aniž bychom šli k optimálnímu vrcholu.
- **prakticky:** některé omezení je nadbytečné, ale většinou nepoznáme, které to je.
- **řešení:** zkusíme v algoritmu pokračovat, zacyklení většinou nenastane, nebo lze zacyklení většinou vyloučit tím, že pro volbu výstupního řádku na chvíli uvažujeme místo nul na pravé straně systému malá $\varepsilon > 0$.

Příklad 3.7. Maximalizujte funkci $z = 3\,x_1 + 9\,x_2$ za podmínek

$$x_1 + 4\,x_2 \leq 8$$
$$x_1 + 2\,x_2 \leq 4$$

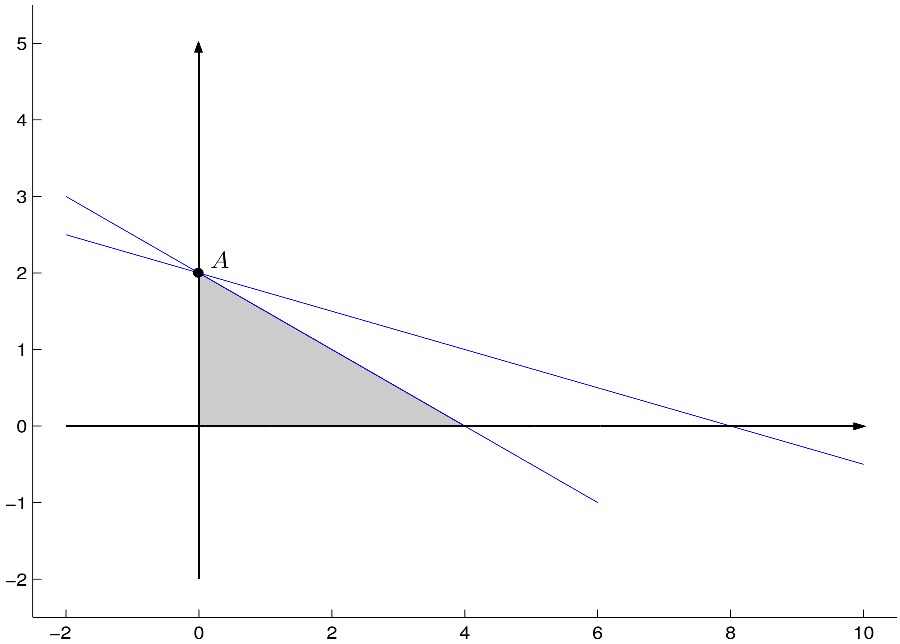
$$x_1,\, x_2 \geq 0.$$

Řešení: Grafické řešení je znázorněno na obr.3.6.

První z obou netriviálních omezení je nadbytečné; optimum je v bodě $A = [0; 2]$.

b) *Více optimálních řešení*

- **matematicky:** nebázický koeficient v řádku z je roven 0 ve výstupní simplexové tabulce; pak pokud s proměnnou příslušnou tomuto koeficientu vstoupíme do báze, příslušné řešení bude rovněž optimální.



Obr. 3.6: Grafické řešení příkladu 3.7.

– **prakticky:** optimum není pouze v obou vrcholech $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2$, ale v každém bodě hrany mezi nimi $\alpha\, \boldsymbol{x}^1 + (1-\alpha)\, \boldsymbol{x}^2$, kde $\alpha \in \langle 0; 1 \rangle$.
  Pokud optimum nastane ve 3 vrcholech $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^3$, nastane rovněž v každém bodě trojúhelníka těmito vrcholy určeného $\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{x}^1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}^2 + \alpha_3 \boldsymbol{x}^3$, kde $\alpha_i \in [0; 1]$ a platí $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ (tzv. *konvexní kombinace* vrcholu).

Příklad 3.8. Maximalizujte funkci $z = 2\, x_1 + 4\, x_2$ za omezení

$$\begin{aligned} x_1 + 2\, x_2 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1,\, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

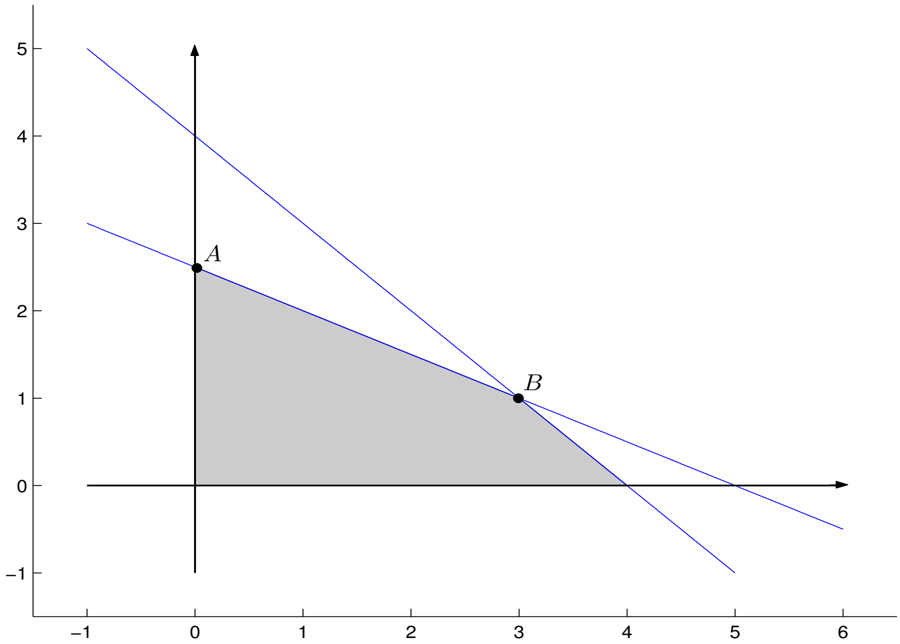
Řešení: Grafické řešení je znázorněno na obr.3.7.

Libovolný bod úsečky AB je řešením, tj.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in [0; 1]\,.$$

c) *Neomezené řešení*

– **matematicky:** všechny hodnoty ve vstupním sloupci v některém optimalizačním kroku jsou ≤ 0, tj. neexistuje žádná kladná změna pro daný sloupec.



Obr. 3.7: Grafické řešení příkladu 3.8.

- **prakticky:** úloha není dobře formulována (chybí určité omezení, popřípadě některý parametr není dobře odhadnut).
- **řešení:** řekneme, že funkce z je ve směru svého *zlepšování* neomezená, popřípadě dodáme další omezení nebo přehodnotíme koeficienty úlohy.

Příklad 3.9. Maximalizujte funkci $z = 2\,x_1 + 4\,x_2$ za omezení

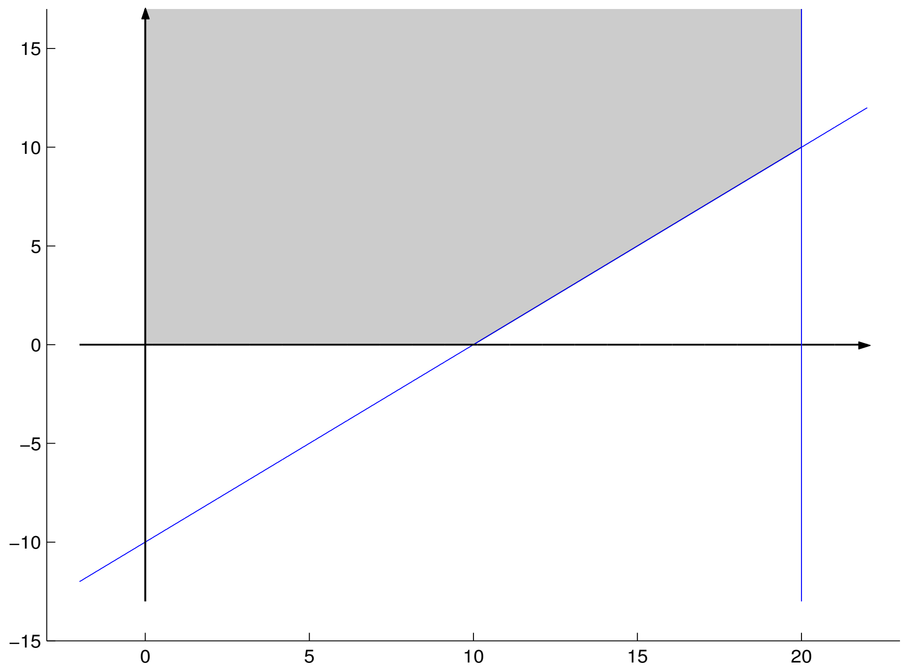
$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \end{aligned}$$

$$x_1,\, x_2 \geq 0.$$

Řešení: Grafické řešení je znázorněno na obr.3.8.
Množina přípustných hodnot je neohraničená ve směru růstu funkce z.

d) *Množina přípustných hodnot je prázdná*

- **matematicky:** v 1.fázi dvoufázové metody je optimální hodnota kladná.
- **prakticky:** úloha není dobře formulována, omezení jsou v rozporu.
- **řešení:** některá omezení odstraníme.



Obr. 3.8: Grafické řešení příkladu 3.9.

3.3 Dualita v úlohách lineárního programování

Tato kapitola je uvedením do teorie duality. Co to je dualita? Kromě původní (primární) úlohy nyní budeme definovat ještě tzv. *duální* úlohu. Při studiu vztahu mezi primární a duální úlohou uvidíme, že obě úlohy někdy *stojí proti sobě* (v něčem se liší), jindy *jsou v souladu* (v něčem jsou stejné nebo se doplňují), ale vždy jsou navzájem rovnocenné, žádná není nadřazena té druhé. Snad při studiu tohoto vztahu duality bude učiněn pokrok alespoň v oblasti lineárního programování.

3.3.1 Formulace duální úlohy lineárního programování

Původní úlohu lineárního programování označujeme jako *primární:*

nalezněte minimum (nebo maximum) funkce $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ za omezujících podmínek

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$x_j \geq 0 \text{ pro } j = 1, 2, \ldots, n.$$

K této úloze konstruujeme tzv. *duální* úlohu podle následujících pravidel:

primární úloha	duální úloha
minimalizace	maximalizace, všechna omezení typu $\leq$, proměnné neohraničené
maximalizace	minimalizace, všechna omezení typu $\geq$, proměnné neohraničené

Vztah koeficientů primární a duální úlohy je možné znázornit v tabulce:

$$
\begin{array}{l|cccccc|c|ll}
 & \multicolumn{6}{c}{\text{primární proměnné}} & & & \\
 & x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_n & & & \\
\cline{2-7}
\text{pravé strany duálních omezení} \rightarrow & c_1 & c_2 & \dots & c_j & \dots & c_n & & & \\
\cline{2-8}
 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & b_1 & y_1 & \\
 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & b_2 & y_2 & \\
\text{koeficienty levých stran duálních omezení} & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \text{duální proměnné} \\
 & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} & b_m & y_m & \\
\cline{2-8}
\multicolumn{1}{l}{} & & & & \uparrow & & & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & & \\
\multicolumn{1}{l}{} & & & & \multicolumn{3}{c}{j\text{-té duální omezení}} & \multicolumn{3}{l}{\text{koeficienty duální funkce } w}
\end{array}
$$

Příklad 3.10. Formulujte duální úlohu k úloze:

$$\text{maximalizujte funkci } z = 5\,x_1 + 12\,x_2 + 4\,x_3 \text{ za podmínek}$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2\,x_2 + x_3 &\leq 10 \\
2\,x_1 - x_2 + 3\,x_3 &= 8
\end{aligned}
$$

$$x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0.$$

Řešení. Nejprve formulujeme kanonický tvar primární úlohy:

$$\text{maximalizujte funkci } z = 5\,x_1 + 12\,x_2 + 4\,x_3 + 0\,p \text{ za podmínek}$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2\,x_2 + x_3 + p &= 10 \\
2\,x_1 - x_2 + 3\,x_3 \phantom{{}+p} &= 8
\end{aligned}
$$

$$x_1,\, x_2,\, x_3,\, p \geq 0.$$

Duální úloha je tedy tvaru:

$$\text{minimalizujte funkci } w = 10\,y_1 + 8\,y_2 \text{ za podmínek}$$

$$\begin{aligned} y_1 + 2\,y_2 &\geq 5 \\ 2\,y_1 - y_2 &\geq 12 \\ y_1 + 3\,y_2 &\geq 4 \end{aligned}$$

$$y_1 \geq 0;\ y_2 \in \mathbb{R},$$

tj. na y_2 není kladeno žádné omezení.

□

Příklad 3.11. Formulujte duální problém k následujícímu:

minimalizujte funkci $z = 5\,x_1 - 2\,x_2$ za omezení

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\geq -3 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 &\leq 5 \end{aligned}$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0.$$

Řešení. Nejprve kanonický tvar primární úlohy:

minimalizujte funkci $z = 5\,x_1 - 2\,x_2 + 0\,p_1 + 0\,p_2$ za podmínek

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + p_1 &= 3 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + p_2 &= 5 \end{aligned}$$

$$x_1,\ x_2,\ p_1,\ p_2 \geq 0.$$

Duální úloha je tvaru:

maximalizujte funkci $w = 3\,y_1 + 5\,y_2$ za podmínek

$$\begin{aligned} y_1 + 2\,y_2 &\leq 5 \\ -y_1 + 3\,y_2 &\leq -2 \end{aligned}$$

$$y_1,\ y_2 \leq 0.$$

□

Příklad 3.12. Formulujte duální problém k následujícímu:

maximalizujte funkci $z = 5\,x_1 + 6\,x_2$ za omezení

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 &= 5 \\ -x_1 + 5\,x_2 &\geq 3 \\ 4\,x_1 + 7\,x_2 &\leq 8 \end{aligned}$$

$$x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \geq 0.$$

Řešení. Kanonický tvar primární úlohy:

$$\text{maximalizujte funkci } z = 5\,x_1' - 5\,x_1'' + 6\,x_2 + 0\,p_1 + 0\,p_2 \text{ za podmínek}$$

$$\begin{aligned}
x_1' - \quad x_1'' + 2\,x_2 \qquad\qquad &= 5\\
-x_1' + \quad x_1'' + 5\,x_2 - p_1 \qquad &= 3\\
4\,x_1 - 4\,x_1'' + 7\,x_2 \qquad + p_2 &= 8
\end{aligned}$$

$$x_1',\, x_1'',\, x_2,\, p_1,\, p_2 \geq 0.$$

Duální úloha je tvaru:

$$\text{minimalizujte funkci } w = 5\,y_1 + 3\,y_2 + 8\,y_3 \text{ za podmínek}$$

$$\begin{aligned}
y_1 - \quad y_2 + 4\,y_3 &\geq 5\\
-y_1 + \quad y_2 - 4\,y_3 &\geq -5\\
2\,y_1 + 5\,y_2 + 7\,y_3 &\geq 6\\
-y_2 \qquad &\geq 0\\
y_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

$$y_1 \in \mathbb{R}.$$

Všimněme si, že sloučením prvních dvou podmínek vznikne rovnost a že na proměnnou y_1 není vztaženo žádné omezení. □

3.3.2 Vztah mezi řešením primární a duální úlohy

Vyřešme nyní primární úlohu a úlohu k ní duální a všimněme si souvislostí mezi jednotlivými simplexovými tabulkami.

Ad Příklad 3.10. Vyřešme nejprve primární úlohu. Kanonický tvar doplníme umělou proměnnou u s cílem vytvoření jednotkové podmatice:

$$\text{maximalizujte funkci } z = 5\,x_1 + 12\,x_2 + 4\,x_3 + 0\,p - Mu \text{ za podmínek}$$

$$\begin{aligned}
x_1 + 2\,x_2 + \quad x_3 + p \qquad &= 10\\
2\,x_1 - \quad x_2 + 3\,x_3 \qquad + u &= 8
\end{aligned}$$

$$x_1,\, x_2,\, x_3,\, p,\, u \geq 0.$$

Nyní je vše připraveno pro provedení simplexové metody pro primární úlohu.

	max $z =$	5	12	4	$\mathbf{0}$	$-M$	
		x_1	x_2	x_3	p	u	řešení
krok 0:	z	-5	-12	-4	0	M	$=0$
	p	1	2	1	1	0	10
$x_3 \leftrightarrow$	u	2	-1	$\mathbf{3}$	0	1	8
	z	$-5-2M$	$-12+M$	$-4-3M$	0	0	$-8M$

Nejprve jsme museli vynulovat bázické pozice v řádku z. Duální omezení odpovídající počáteční bázi získáme z tabulky ze sloupců p a u. Tj. jsou to omezení

$$\begin{aligned} y_1 &\geq \ \ 0 \\ y_2 &\geq -M \end{aligned}$$

(do pravých stran bereme původní nevynulované koeficienty s nezměněným znaménkem ve sloupcích bázických proměnných p a u).

		x_1	x_2	x_3	p	u	řešení
krok 1:	z	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{40}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}+M$	$\frac{32}{3}$
$x_2 \leftrightarrow$	p	$\frac{1}{3}$	$\mathbf{\frac{7}{3}}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{22}{3}$
	x_3	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$

		x_1	x_2	x_3	p	u	řešení
krok 2:	z	$-\frac{3}{7}$	0	0	$\frac{40}{7}$	$-\frac{4}{7}+M$	$\frac{368}{7}$
	x_2	$\frac{1}{7}$	1	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{22}{7}$
$x_1 \leftrightarrow$	x_3	$\mathbf{\frac{5}{7}}$	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{26}{7}$

		x_1	x_2	x_3	p	u	řešení
krok 3:	z	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5}+M$	$54\frac{4}{5}$
	x_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$
	x_1	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{26}{5}$

Dostáváme optimální řešení:

$$x_1 = \frac{26}{5}, \ x_2 = \frac{12}{5}, \ x_3 = 0.$$

Z tabulky můžeme také vyčíst optimální koeficienty funkce z příslušné primární počáteční bázi – hodnoty označené čárkovaně.
Nyní vyřešme duální úlohu převedenou na kanonický tvar doplněný o umělé proměnné:

minimalizujte funkci $w = 10\,y_1 + 8\,y_2' - 8\,y_2'' + M\,(u_1 + u_2 + u_3)$ za podmínek

$$\begin{aligned}
y_1 + 2\,y_2' - 2\,y_2'' - p_1 \qquad\qquad + u_1 \qquad\qquad &= 5\\
2\,y_1 - y_2' + y_2'' \qquad - p_2 \qquad\qquad + u_2 \qquad &= 12\\
y_1 + 3\,y_2' - 3\,y_2'' \qquad\qquad - p_3 \qquad\qquad + u_3 &= 4
\end{aligned}$$

$$y_1,\ y_2',\ y_2'',\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ u_1,\ u_2,\ u_3 \geq 0.$$

krok 0:

min $w =$	10	8	-8	0	0	0	**M**	**M**	**M**	
	y_1	y_2'	y_2''	p_1	p_2	p_3	u_1	u_2	u_3	řešení
w	-10	-8	8	0	0	0	$-M$	$-M$	$-M$	$=0$
u_1	1	2	-2	-1	0	0	1	0	0	5
u_2	2	-1	1	0	-1	0	0	1	0	12
u_3	1	3	-3	0	0	-1	0	0	1	4
w	$-10+4M$	$-8+4M$	$8-4M$	$-M$	$-M$	$-M$	0	0	0	$21M$

Primární omezení odpovídající počáteční duální bázi jsou

$$\begin{aligned}
x_1 &\leq M\\
x_2 &\leq M\\
x_3 &\leq M
\end{aligned}$$

(do pravých stran opět bereme původní nevynulované koeficienty s nezměněným znaménkem u bázických proměnných u_1, u_2, u_3).

krok 4:

	y_1	y_2'	y_2''	p_1	p_2	p_3	u_1	u_2	u_3	řešení
w	0	0	0	$-\frac{26}{5}$	$-\frac{12}{5}$	0	$\frac{26}{5}-M$	$\frac{12}{5}-M$	$-M$	$54\frac{4}{5}$
p_3	0	0	0	$-\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	-1	$\frac{3}{5}$
y_2''	0	-1	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$
y_1	1	1	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{29}{5}$

Dostáváme optimální řešení:

$$y_1 = \frac{29}{5},\ y_2 = y_2' - y_2'' = 0 - \frac{2}{5} = -\frac{2}{5}.$$

Z tabulky můžeme také vyčíst optimální koeficienty funkce w odpovídající počáteční duální bázi – hodnoty označené čárkovaně.

Vztah mezi řešením primární a duální úlohy:

1) optimální hodnota funkce z = optimální hodnota funkce w

2) $\left(\text{vektor optimálních koeficientů funkce } z \text{ příslušných počáteční primární bázi} \right) = \left(\text{vektor rozdílů levé minus pravé strany duálních omezení příslušných počáteční primární bázi} \right)$

Ad Příklad 3.10 Příslušná vektorová rovnice z bodu 2) vztahu mezi primární a duální úlohou zde má tvar

$$\begin{pmatrix} \frac{29}{5} \\ -\frac{2}{5} + M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - 0 \\ y_2 - (-M) \end{pmatrix} \Rightarrow y_1 = \frac{29}{5},\ y_2 = -\frac{2}{5},\ w = 54\frac{4}{5}.$$

Čili pomocí řešení primární úlohy jsme z tohoto vztahu získali řešení duální úlohy. Naopak uvážíme-li, že duální úloha k duální úloze je původní primární úloha, lze pomocí řešení duální úlohy určit řešení primární úlohy:

$$\begin{pmatrix} \frac{26}{5} - M \\ \frac{12}{5} - M \\ -M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - M \\ x_2 - M \\ x_3 - M \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = \frac{26}{5},\ x_2 = \frac{12}{5},\ x_3 = 0,\ z = 54\frac{4}{5}.$$

Z porovnání primární a duální úlohy vidíme, že

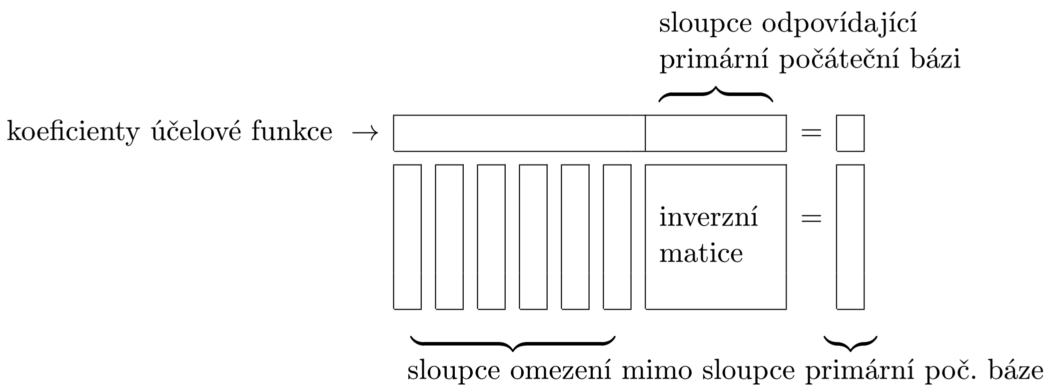
$\left(\text{libovolná funkční hodnota přípustného bázického řešení maximalizace} \right) \leq \left(\text{libovolná funkční hodnota přípustného bázického řešení minimalizace} \right)$

bez ohledu na to, která úloha je primární a která duální. Když tedy známe *dobré* řešení minimalizace a *dobré* řešení maximalizace (dobré v tom smyslu, že funkční hodnoty v obou případech se od sebe moc neliší), můžeme s jistotou vědět, že skutečné optimum obou úloh má funkční hodnotu v intervalu určeném těmito dvěma *dobrými* funkčními hodnotami.

3.3.3 Pojem inverzní matice

V k-tém kroku simplexové tabulky lze všechny hodnoty této tabulky určit na základě tzv. inverzní matice (a zadání primární a duální úlohy):

tabulka k-tého kroku:



a) určení sloupců omezení mimo sloupce počáteční báze:

$$\begin{pmatrix} \text{sloupec} \\ \text{v } k\text{-tém} \\ \text{kroku} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{inverzní ma-} \\ \text{tice v } k\text{-tém} \\ \text{kroku} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{sloupec} \\ \text{v 0-tém} \\ \text{kroku} \end{pmatrix}$$

Ad Příklad 3.10. *krok 1*: určení sloupce proměnné x_1:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

krok 2: určení sloupce pravých stran:

$$\begin{pmatrix} \frac{22}{7} \\ \frac{26}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$$

b) určení koeficientů účelové funkce:
Nejprve určíme hodnoty duálních proměnných y_i podle vztahu

$$\begin{pmatrix} \text{vektor pro-} \\ \text{měnných } y_i \text{ v} \\ k\text{-tém kroku} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{vektor koeficientů} \\ \text{nad inverzní ma-} \\ \text{ticí v } k\text{-tém kroku} \\ \text{primární tabulky} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{inverzní} \\ \text{matice} \\ \text{v } k\text{-tém} \\ \text{kroku} \end{pmatrix},$$

a pak lze vypočíst primární řádek účelové funkce z vektorové rovnice

$$\begin{pmatrix} \text{vektor koefici-} \\ \text{entů u } x_j \text{ úče-} \\ \text{lové funkce v } k\text{-} \\ \text{tém kroku} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{vektor rozdílů levé minus} \\ \text{pravé strany odpovídají-} \\ \text{cího duálního omezení s} \\ \text{hodnotami proměnných } y_i \\ \text{z } k\text{-tého kroku} \end{pmatrix}.$$

Ad Příklad 3.10. V našem příkladu máme vždy v daném kroku nad inverzní maticí následující koeficienty primární účelové funkce:

krok	báze	koeficienty účelové funkce nad inverzní maticí
0	(p, u)	$(0, -M)$
1	(p, x_3)	$(0, 4)$
2	(x_2, x_3)	$(12, 4)$
3	(x_2, x_1)	$(12, 5)$

(všimněte si, že v 0-tém kroku bereme původní koeficienty s nezměněným znaménkem).
Tj. například hodnoty v řádku funkce z ve 3.(= optimálním) kroku simplexové tabulky určíme následovně:
Nejprve najdeme hodnoty y_i ve 3.kroku

$$(y_1, y_2) = (12, 5) \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \left(\frac{29}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

a pak příslušné koeficienty funkce z ve 3.kroku:

$$\begin{pmatrix} \text{koeficient u } x_1 \\ \text{koeficient u } x_2 \\ \text{koeficient u } x_3 \\ \text{koeficient u } p \\ \text{koeficient u } u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + 2\,y_2 - 5 \\ 2\,y_1 - y_2 - 12 \\ y_1 + 3\,y_2 - 4 \\ y_1 - 0 \\ y_2 - (-M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{29}{5} \\ -\frac{2}{5} + M \end{pmatrix}.$$

c) Určení hodnoty účelové funkce v k-tém kroku:

dosazením sloupce řešení z k-tého kroku do účelové funkce vypočteme její hodnotu v k-tém kroku.

Pomocí sloupců příslušných inverzní matici lze tedy získat hodnoty ve všech ostatních sloupcích. Toto lze využít při programování algoritmu simplexové metody – více o tom v kapitole 3.

3.3.4 Ekonomická interpretace duality

Uvažujme následující primární a duální úlohu:

P:
$$\boxed{\begin{array}{c} \text{maximalizujte funkci } z = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ za omezujících podmínek} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, m, \\ x_j \geq 0 \text{ pro } j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}}$$

D: $\boxed{\begin{array}{c}\text{minimalizujte funkci } w = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i \text{ za omezujících podmínek} \\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \text{ pro } j = 1, 2, \dots, n, \\ y_i \geq 0 \text{ pro } i = 1, 2, \dots, m.\end{array}}$

Jednotlivé koeficienty a funkce mají následující ekonomický význam:

c_j ... zisk jednotkového výstupu činnosti j (obyčejně je diktován trhem)
b_i ... dostupné množství zdroje i
a_{ij} ... množství zdroje i potřebné pro jednotkový výstup činnosti j
z ... zisk
y_i ... cena jednotkového množství zdroje i (= tzv. stínová cena – udává, jak moc jednotkové zvýšení dostupnosti zdroje i zvýší zisk z)
w ... využití zdrojů (odčerpání zdrojů)

Ad Příklad 3.10 Význam optimálních hodnot $y_1 = \frac{29}{5}$, $y_2 = -\frac{2}{5}$.
Abychom zvýšili optimum funkce z, musíme

- zvýšit dostupnost zdroje 1
- snížit dostupnost zdroje 2.

Vždy platí $z \leq w$.
Řešení není optimální, pokud zisk $z <$ využití zdrojů w
$\max z$ ... maximalizujeme zisk
$\min w$ ... minimalizujeme využití zdrojů pro daný zisk

Podmínka optimality v k-tém kroku maximalizace ... koeficient funkce z u proměnné x_j je roven $\underset{\substack{\uparrow \\ z_j \text{ ... tzv. připsaná cena}}}{\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i} - c_j \geq 0$.

Pokud $\underset{\substack{\uparrow \\ z_j \text{ ... tzv. redukovaná cena}}}{z_j - c_j} \geq 0$, tj. $z_j \geq c_j$, proměnná x_j nemůže být vstupní proměnnou optimalizačního kroku (zvyšování proměnné x_j nepřinese větší zisk).

ad primární úloha: položky b_i lze někdy zvýšit (stínové ceny určují prioritu) novými investicemi

ad duální úloha: aby se zvýšila ziskovost činnosti j, snažíme se snížit její připsanou cenu $z_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$, což se obyčejně dosahuje snížením koeficientu spotřeby a_{kj} odpovídajícího největší duální souřadnici y_k

Příklad 3.13. Uvažujme výrobní halu, kde tři různé typy výrobků prochází každý třemi různými linkami. Limity doby přístupu ke každé lince jsou po řadě 430, 460 a 420 minut denně a jednotkový zisk výrobků je 3,2 a 5. Tabulka udává dobu (v minutách) průchodu výrobků jednotlivými linkami:

	výrobek 1	výrobek 2	výrobek 3
linka 1	1	2	1
linka 2	3	0	2
linka 3	1	4	0

Řešení. Primární úloha bude tvaru:

maximalizujte denní zisk $z = 3\,x_1 + 2\,x_2 + 5\,x_3$ za podmínek

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 + x_3 &\le 430 \\ 3\,x_1 + 2\,x_3 &\le 460 \\ x_1 + 4\,x_2 &\le 420 \end{aligned}$$

$$x_1,\, x_2,\, x_3 \ge 0.$$

Výstupní simplexová tabulka má tvar:

	x_1	x_2	x_3	p_1	p_2	p_3	řešení
z	4	0	0	1	2	0	1350
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
p_3	2	0	0	-2	1	1	20

Analýza: optimální řešení neobsahuje výrobek 1 ($x_1 = 0$), tj. tento výrobek není ziskový ($z_1 > c_1 = 3$), ale můžeme jej ziskovým učinit snížením z_1 ($z_1 = y_1 + 3\,y_2 + y_3$). Protože z duální úlohy získáváme duální řešení

$$y_1 = 1$$
$$y_2 = 2$$
$$y_3 = 0,$$

má smysl něco dělat jen s první a druhou linkou, větší priorita je dávána druhé lince.

Zkoumejme tedy druhou nerovnost primární úlohy; její pravou stranu zvyšovat zatím nechceme, zabývejme se tedy snížením koeficientů na levé straně:

	výrobek 1	výrobek 2	výrobek 3
linka 1	1	2	1
linka 2	$3-r$	0	2
linka 3	1	4	0

Jak velké musí být r, aby se stal výrobek 1 ziskovým? Tak, aby $z_1 \leq c_1$, tj. $1 + (3 - r)\,2 \leq 3 \Rightarrow r \geq 2$.

□

3.3.5 Duální simplexová metoda

Jestliže v případě maximalizační úlohy není řešení optimální, aspoň pro jeden koeficient j přepočítávané funkce z platí:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j < 0, \text{ tj.}$$

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i < c_j.$$

Všimneme-li si blíže omezení $(*)$, toto omezení se vyskytuje v duální úloze, ale s opačnou nerovností $(\geq)$. Tedy primární řešení není optimální $\Leftrightarrow$ příslušné duální řešení je nepřípustné. Odtud plyne hlavní myšlenka duální simplexové metody:

> Pokud primární bázické řešení je nepřípustné (některá jeho souřadnice je < 0), ale platí podmínka optimality ($z_j - c_j \geq 0$ pro všechna j), snažíme se duální simplexovou metodou přejít do vrcholu, který stále splňuje podmínku optimality, a navíc už je přípustný (jeho souřadnice ≥ 0). První takový vrchol, do kterého touto metodou dorazíme, je optimum primární úlohy.

Postup: na rozdíl od regulární simplexové metody probíhá optimalizační krok v opačném pořadí – nejprve vybereme výstupní řádek (a sice podle nejvíce záporné souřadnice ve sloupci pravých stran), a potom vstupní sloupec (podle minimální absolutní hodnoty podílu *koeficient v řádku funkce / koeficient ve výstupním řádku*, přičemž kladné a nulové jmenovatele vypouštíme; pokud takové jsou všechny, úloha nemá přípustné řešení).

Příklad 3.14. Minimalizujte funkci $z = 2\,x_1 + x_2$ za podmínek

$$\begin{aligned} 3\,x_1 + x_2 &\geq 3 \\ 4\,x_1 + 3\,x_2 &\geq 6 \\ x_1 + 2\,x_2 &\leq 3 \\ x_1,\, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Řešení. Pokud první dvě nerovnosti vynásobíme (-1), vyhneme se použití umělých proměnných, ale za cenu toho, že nalezené bázické řešení není přípustné:

	x_1	x_2 ↓	p_1	p_2	p_3	řešení
z	-2	-1	0	0	0	0
p_1	-3	-1	1	0	0	-3
← p_2	-4	-3	0	1	0	-6
p_3	1	2	0	0	1	3

$\Rightarrow$ podmínka optimality je splněna (koeficienty jsou ≤ 0)

Z hodnot v posledním sloupci je vidět, že řešení je nepřípustné; pokusíme se nalézt přípustný vrchol pomocí duální simplexové metody:
Výstupní řádek určíme pomocí maximálně záporné souřadnice řešení – to je v našem případě $p_2 = -6$. V tomto řádku p_2 jsou dva záporné koeficienty – k nim vytvoříme podíly $|z - hodnota/p_2 - hodnota|$: $\left|\frac{-2}{-4}\right|$, $\left|\frac{-1}{-3}\right|$. Minimální z nich je ten druhý, vstupní sloupec tedy bude x_2.

Zbytek algoritmu je stejný jako u původní simplexové metody. Na místo pivotového prvku (-3) se snažíme dostat v dalším kroku hodnotu $(+1)$, ostatní hodnoty v pivotovém sloupci chceme vynulovat, a to skrze přičtení jistého násobku pivotového řádku k danému řádku. Dostaneme tabulku

	x_1 ↓	x_2	p_1	p_2	p_3	řešení
z	$-\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	2
p_1	$-\frac{5}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	-1
x_2	$\frac{4}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	2
← p_3	$-\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	1	-1

$\Rightarrow$ podmínka optimality je stále splněna

Z hodnot v posledním sloupci je vidět, že řešení opět není přípustné; zopakujeme tedy optimalizační krok duální simplexové metody:
Výstupní řádek si můžeme vybrat z řádků p_1 a p_3 díky minimální hodnotě (-1). Vyberme

tedy například řádek p_3. Jediná záporná hodnota určuje vstupní sloupec x_1.

	x_1	x_2	p_1	p_2	p_3	řešení
z	0	0	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{12}{5}$
p_1	0	0	1	-1	-1	0
x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{5}$
p_3	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$

Z hodnot v posledním sloupci je vidět, že řešení je přípustné, a tedy i optimální. □

3.3.6 Analýza citlivosti v celé své kráse

a) **Změna pravé strany některého omezení:** Může vést jen k tomu, že řešení nebude přípustné (některá souřadnice bude < 0), podmínka optimality zůstane zachována $\Rightarrow$ můžeme pokračovat použitím duální simplexové metody.

Ad Příklad 3.1. Změníme-li v zadání úlohy pravou stranu omezení **1** na 7 a pravou stranu omezení **2** na 4, výstupní tabulka simplexové metody změněné úlohy se bude od výstupní tabulky původní úlohy lišit pouze ve sloupci pravých stran – řešení bude ale nepřípustné (některá jeho souřadnice bude < 0). Po jednom kroku duální simplexové metody dospějeme k optimu (jehož hodnota bude horší). Podrobněji viz samostatné cvičení.

b) **Přidání nového omezení:** Výsledek pozměněné úlohy se nemění, pokud bod optima toto omezení splňuje. V opačném případě musíme doplnit omezení na rovnost (pomocnou proměnnou), vyloučit z této rovnosti optimální bázické proměnné původní úlohy (do nové báze se navíc přidá nová pomocná proměnná, čili původní simplexová tabulka je doplněna o řádek i sloupec) a případně použít duální simplexovou metodu, pokud je to potřeba.

Ad Příklad 3.1. Chceme-li k omezením původní úlohy přidat podmínku $x \leq 3$, doplněním na rovnost máme $x + p_5 = 3$, výstupní simplexová tabulka původní úlohy se doplní o řádek a sloupec. Protože proměnná x je bázická, musíme přidaný řádek upravit tím, že od něj odečteme řádek **x** . Tak se poruší nezápornost pravé strany tabulky a provedením jednoho kroku duální simplexové dospějeme k novému optimálnímu řešení (funkční hodnota v něm bude nižší – to se ale dalo čekat, že přidáním dalšího omezení se nezlepší funkční hodnota optima). Podrobněji samostatně.

c) **Změna koeficientů účelové funkce:** Jeden způsob přepočtu byl popsán na str.109. Uveďme zde ještě jeden způsob pro přepočet změny koeficientů, které stojí u bázických proměnných výstupní tabulky původní úlohy. Tento způsob užívá duálních proměnných a duálních omezení. Vysvětlíme jej na příkladu.

Ad Příklad 3.1. Pokud funkce v původní úloze bude změněna na $z = 5\,x + 4\,y$, pořadí koeficientů vzhledem k bázi výstupní tabulky je $\dfrac{y \quad x \quad p_3 \quad p_4}{4 \quad 5 \quad 0 \quad 0}$, a tedy

$$\begin{pmatrix} y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4, & 5, & 0, & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

Pomocí rozdílů levých a pravých stran duálních omezení určíme nový z-řádek ve výstupní tabulce:

$$\begin{aligned} \text{nový koeficient u} \quad x&:\ \ y_1 + 2\,y_2 - y_3 - 5 = 0 \\ y&:\ \ 2\,y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 4 = 0 \\ p_1&:\ \ y_1 = 1 \\ p_2&:\ \ y_2 = 2 \\ p_3&:\ \ y_3 = 0 \\ p_4&:\ \ y_4 = 0 \end{aligned}$$

Vlastně stačilo přepočítat jen nebázické koeficienty, protože bázické jsou rovny nule. Všechny nové z-koeficienty jsou ≥ 0, tj. bod optima se nezmění (i když funkční hodnota v něm ano). Pokud by některý koeficient byl záporný, museli bychom najít simplexovou metodou zlepšení.

Kdyby funkce v původní úloze byla změněna na $z = 4\,x + y$, po přepočtení z-koeficientů by bylo nutné provést jeden krok simplexové metody, abychom našli nový bod optima.

d) Změna levých stran omezení: Má smysl analyzovat jen změnu nebázického sloupce levé strany (při bázické změně je lepší vyřešit celou úlohu znovu); z příslušné duální nerovnosti lze hned zjistit, zda se neporušila podmínka optimality.

Ad Příklad 3.1. Pro $z = 4\,x + y$ a změnu druhého sloupce levých stran $a_{12} = 4$, $a_{22} = 3$ má příslušné duální omezení tvar $4\,y_1 + 3\,y_2 + y_3 + y_4 \geq 1$. Po výpočtu duálních proměnných vidíme, že podmínka platí.

Porušení podmínky optimality řeší klasická simplexová metoda.

e) Přidání nové činnosti (nového sloupce): – tj. změna funkce z i matice (a_{ij}) současně (pokud se na situaci díváme tak, že sloupec tam už dříve byl, ale všechny jeho koeficienty byly nulové).

Přidání nové činnosti má smysl jen tehdy, pokud zlepší hodnotu optima. Vysvětlíme přepočet na příkladu.

Ad Příklad 3.1. Přidáním nového výrobku do našich úvah vznikne úloha maximalizujte funkci $z = 3\,x + 2\,y + \frac{3}{4}\,n$ za podmínek

$$\begin{aligned} x + 2\,y + \tfrac{3}{4}\,n &\leq 6\\ 2\,x + y + \tfrac{3}{4}\,n &\leq 8\\ -x + y - \phantom{\tfrac{3}{4}\,}n &\leq 1\\ y \phantom{+ \tfrac{3}{4}\,n} &\leq 2\\ x,\, y,\, n &\geq 0. \end{aligned}$$

Protože proměnnou n považujeme za nebázickou, duální řešení zůstává stejné: $y_1 = \frac{1}{3}$, $y_2 = \frac{4}{3}$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$. Nové duální omezení $\frac{3}{4}\,y_1 + \frac{3}{4}\,y_2 - y_3 \geq \frac{3}{2}$ není splněno, příslušný z-koeficient je roven $\frac{3}{4}\,y_1 + \frac{3}{4}\,y_2 - y_3 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}$. Zbytek sloupce proměnné n vypočteme pomocí inverzní matice:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\\ \frac{3}{4}\\ -1\\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\\ -1\\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Nyní, protože z-koeficient v novém sloupci je záporný, přidáme jej k optimální tabulce původní úlohy a provedeme jeden krok klasické simplexové metody. Dostaneme nové řešení, které zlepší hodnotu optima původní úlohy.

f) **Při změně pravých a levých stran omezení současně:** Dochází zde ke složitějším změnám a je výhodnější celou úlohu vyřešit znovu, analýza citlivosti už není tak pomocná.

Duální simplexová metoda nachází své využití nejen při analýze citlivosti, ale i v některých dalších algoritmech, např. v metodě řezů celočíselného lineárního programování.

3.4 Nelineární programování

3.4.1 Úvod

Jak plyne z názvu, jde o případ, kdy jsou omezení nebo účelová funkce (nebo obojí) nelineární. Praktický problém, vedoucí na nelineární programování: Výnos zemědělské plodiny je závislý v prvé řadě na množství srážek (včetně závlah) a na množství dodaných živin. Závislosti nejsou lineární. Na příklad s rostoucím množstvím srážek výnos nejdříve roste, pak však klesá (na příklad obilí polehne, sníží se kvalita zrna díky plísním apod.). Podobně při přehnojení umělými hnojivy přestává úměrně růst výnos. Pokud jde o vlastní účelovou funkci, není samozřejmě k dispozici žádný exaktní vzorec. Je třeba vycházet jednak z odborných studií, jednak z dat zjištěných mnohaletým pozorováním pro danou oblast, z bonity a vododržnosti půdy atd. Je přitom třeba se omezit na nejvýše kvadratické závislosti, neboť jen pro tento případ je k dispozici rozumná početní metoda. V našem případě bude kvadratický vztah jistě stačit a může se k němu dospět na příklad aproximací reálných dat parabolou pomocí metody nejmenších čtverců.

3.4.2 Základní pojmy

Připomeneme si některé základní pojmy.
Označení: symbolem $\bar{x}$ budeme značit sloupcový vektor, $\bar{x}^T$ vektor k němu transponovaný, tj. vektor řádkový:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \bar{x}^T = (x_1, \dots, x_n)\,.$$

.

Definice 3.15. Funkce $f(x,y)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ (lokální) minimum, existuje-li takové okolí tohoto bodu, že pro všechny jeho body $[x,y]$ platí

$$f(x,y) \geq f(x_0, y_0).$$

Jestliže platí tato podmínka pro (nějakou) oblast M (to znamená: existuje takový bod $[x_0, y_0] \in M$, že pro všechny body $[x,y] \in M$ platí $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$), říkáme, že funkce f nabývá v bodě $[x_0, y_0]$ absolutního minima na oblasti M.

Podobně se definuje maximum.
Ostré extrémy: místo neostrých nerovností ostré.
Volný extrém: lokální extrém, který není vázán dalšími podmínkami (zejména se přitom uvažuje celý definiční obor funkce). Může jich být víc - např. $\sin x$ má nekonečně mnoho maxim v bodech $\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Definice 3.16. Lze-li každé dva body A, B množiny M spojit úsečkou ležící v M, potom nazýváme takovou množinu *konvexní*.

Věta 3.17. *V konvexní množině M lze libovolný bod X úsečky AB vyjádřit jako konvexní lineární kombinací $X = \lambda A + (1-\lambda)B, \quad \lambda \in [0,1]$.*

Definice 3.18. Funkce f se nazývá *konvexní* na oblasti M, platí-li pro libovolné dva body A, B této oblasti:

$$f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B).$$

Poznámka 3.19. Latinsky convexus = vypouklý, vypuklý.

Mějme spojitě diferencovatelnou funkci f. Z matematické analýzy víme, že nutnou podmínkou pro existenci volného extrému je, že první derivace je rovna nule. U funkcí více proměnných se všechny parciální derivace prvního řádu musí rovnat nule. Bod, ve kterém jsou všechny (první) parciální derivace nulové se nazývá stacionární. Platí tedy následující tvrzení

Lemma 3.4.1. Buď f spojitě diferencovatelná funkce (jedné nebo více proměnných). Nabývá-li funkce f v bodě A volného extrému, je A stacionárním bodem, tj. všechny první parciální derivace jsou zde nulové.

Příklad 3.20. Určete extrémy funkcí $f(x) = (x-3)^2$ a $g(x) = x^3$.

Řešení. Určíme si první derivace: $f' = 2(x-3)$ a položíme ji rovnu nule. V bodě $x = 3$ je absolutní minimum.
$g' = 3x2$ a opět ji položíme rovnu nule. V bodě $x = 0$ však není extrém, ale inflexní bod. □

Poznámka 3.21. Připomínáme: Rovnost nule pro první derivaci je podmínka nutná, ale ne postačující. Pro rozhodování o extrému potřebujeme znát i derivace druhého řádu.

Představme si jednoparametrický systém funkcí $f(\bar{x}) = c$ (nadploch), kde c je volitelná konstanta. Pro jisté konkrétní c jde o geometrické místo bodů, v nichž funkce f nabývá stejné hodnoty c .

Typickým příkladem jsou vrstevnice - čáry (v základně, řekněme v rovině dané hladinou moře), nad nimiž má terén stejnou výšku. U potenciálových polí (např. elektrických) se užívá zase pojem hladina (ekvipotenciální hladina). Všechny tyto pojmy znamenají matematicky totéž a nebudeme mezi nimi rozlišovat.

Definice 3.22. Gradient (gradientní vektor) funkce $f(\bar{x})$ v bodě $\bar{x_0}$ je vektor parciálních derivací podle jednotlivých proměnných.

$$\nabla f(\bar{x}_0) = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right|_{\bar{x}=\bar{x}_0},$$

$$\nabla^T f(\bar{x}) = \left.\left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n}\right)\right|_{\bar{x}=\bar{x}_0}.$$

Věta 3.23. *Gradient je vektor kolmý na nadplochu $f(\bar{x}) = c_0$ v bodě $\bar{x}_0$ a má směr maximálního růstu funkční hodnoty v soustavě nadploch $f(\bar{x}) = c$.*

Situaci nejlépe ozřejmí příklad.

Příklad 3.24. Určete gradient funkce $z = f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$.

Řešení. Gradient funkce z je vektor $(2(x_1-2), 2(x_2-2))$. Tento vektor je kolmý na vlnoplochu v libovolném bodě roviny. Má tedy směr poloměru příslušné vlnoplochy a směřuje ven z kružnice. Na příklad v bodě $[2,1]$ je gradient $(0,-2)$, v bodě $[0,0]$ je gradient $(-4,-4)$, v bodě $[3,3]$ je to $(2,2)$ a ve středu $[2,2]$ je gradient $(0,0)$. Poslední fakt je připomenutím známé a již citované věty z matematické analýzy: má-li diferencovatelná funkce v jistém bodě extrém, pak jsou zde všechny parciální derivace nulové (jde o tzv. stacionární bod). Závěrem: gradient funkce f v daném bodě je vektor parciálních derivací funkce f v tomto bodě. Je zde kolmý na vrstevnici (hladinu) a má směr největšího růstu funkce f. □

Při hledání stacionárního bodu se omezíme na diferencovatelné funkce jedné a dvou proměnných. Případ více proměnných je zobecněním úvah pro dvě proměnné.

U funkce jedné proměnné $F(x)$ hledáme bod x, ve kterém je $F'(x) = 0$. Označíme-li $F'(x) = f(x)$, je třeba řešit obecnou rovnici $f(x) = 0$. Z řady metod, které nabízí numerická matematika, je pro naše účely patrně nejlepší metoda Newtonova. Postupuje se takto: zvolíme výchozí iteraci x_0. V bodě x_0 vedeme k funkci $f(x)$ tečnu. Průsečík této tečny s osou x je další iterací kořene; označíme ji x_1. Postup opakujeme, až se dvě po sobě jdoucí iterace téměř neliší. Prakticky: Rovnice tečny v bodě x_0 je

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Její průsečík s osou x

$$y = 0.$$

Dosadíme z druhé rovnice do první:

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

a odtud

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Newtonova metoda je metoda iterační: další přiblížení řešení se počítá z předchozího podle stále stejného předpisu. Tedy:

1. Zvolíme nultou iteraci x_0.

2. Vypočteme další iteraci z předešlé podle vzorce

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

3. Jestliže $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$ končíme. Za hledaný kořen prohlásíme $x \equiv x_{i+1}$; když ne, opakujeme bod 2.

Místo geometrického odvození můžeme tentýž výsledek dostat z Taylorovy řady. Protože platí

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

Omezíme se na lineární část rozvoje, tedy $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ a položíme jej roven 0 (tj. spočteme průsečík této lineární části s osou x), což samozřejmě vede ke stejnému výsledku jako výše.

Funkce dvou a více proměnných.

Hledejme stacionární bod funkce $F(x, y)$, tj. bod, ve kterém je

$$\frac{\partial F(x,z)}{\partial x} = F_x = 0, \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = F_y = 0.$$

Označme pro přehlednost $F_x = f(x, y), \;\; F_y = g(x, y)$. Máme tedy řešit soustavu (obecně nelineárních) rovnic

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0, \\ g(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Vyjdeme opět z počáteční iterace (x_0, y_0) . Taylorova řada v okolí bodu (x_0, y_0) pro funkci f je tvaru

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0) +$$

$$\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y - y_0)^2\right] + \dots$$

Analogicky pro $g(x, y)$. Označme si přírůstky

$$h = (x - x_0), \text{ tj. } x = x_0 + h,$$

$$k = (y - y_0), \text{ tj. } y = y_0 + k.$$

Omezíme se na lineární části Taylorových řad a položíme je rovny nule:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k = 0,$$

$$g(x_0 + h, y_0 + k) \approx g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)h + g_y(x_0, y_0)k = 0.$$

Jde o soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých h, k. Vyřešíme a dostaneme první iteraci. Celý postup opakujeme, až se dvě po sobě jdoucí iterace liší o méně, než zvolená přesnost. (Geometrický smysl: nahradíme obě funkce tečnými rovinami. Ty protnou rovinu xOy ve dvou přímkách a tyto přímky se protínají v další iteraci.)

Pro 3 a více proměnných je úvaha analogická. Newtonova metoda je pro obecnou soustavu nelineárních rovnic s diferencovatelnými funkcemi nejpoužívanější. Její slabinou je, že někdy začne iterační proces oscilovat mezi dvěma body blízko kořene a kořen se pak v případě potřeby musí upřesnit ručně (například níže popsanou gradientní metodou).

Gradientní metoda

Využívá toho, že vektor gradientu udává směr největšího růstu funkce. Řekněme, že hledáme lokální minimum funkce dvou proměnných $F(x, y)$. Vyjdeme tedy opět z nějakého výchozího bodu (x_0, y_0). Vypočteme v něm gradient a postupujeme v opačném směru (hledáme minimum, při hledání maxima postupujeme ve směru gradientu) o jistý násobek gradientu. Právě volba tohoto tzv. kroku je slabinou metody. Empiricky zjištěný vhodný krok je někde mezi 0,05 až 0,25 gradientu. Na počítači je pomoc snadná: zvolíme několik různých kroků a zvolíme ten, pro který poklesne gradient (jeho absolutní hodnota) co nejvíce. Postup s novou iterací opakujeme, až se dostaneme do bodu, kde je gradient (až na zvolenou přesnost) nulový.

Gradientní metodu si lze snadno představit na výstupu na horu. Gradient udává směr nejprudšího stoupání k vrcholu, minus gradient naopak nejprudší klesání (= směr spádnice). Nejkratší cesta na vrchol sleduje stále směr gradientu (pokud je kopec hladká plocha, šli bychom po hladké křivce). Gradientní metodou bychom tuto křivku aproximovali takto: postoupíme vždy kousek přímo, tam změníme směr podle aktuálního gradientu a zase postoupíme kousek přímo atd. Místo hladké čáry postupu k vrcholu bychom tedy postupovali po lomené čáře, jejíž průmět do roviny by se skládal z úseček.

3.4.3 Obecná úloha nelineárního programování

Nalézt globální extrém účelové funkce $f(\bar{x})$ v oblasti, určené soustavou omezení $g_i(\bar{x}) \leq 0$.

Některé třídy úloh se označují speciálními názvy:

- kvadratické programování: kvadratická účelová funkce, lineární omezení
- konvexní programování: účelová funkce i omezení jsou konvexní funkce
- separabilní programování: bez smíšených členů (na př. pro $f(\bar{x}) = \sum f_j(\bar{x}_j)$)
- lomené programování: účelová funkce a omezení jsou podíly lineárních funkcí.

Příklad 3.25. mějme $f(x, y) = (x-2)^2 + (y-2)^2$ a hledáme její minimum při omezeních
a) $0 \leq x \leq 4, \ \ 0 \leq y \leq 1,$
b) $0 \leq x \leq 1, \ \ 0 \leq y \leq 1,$
c) $0 \leq x \leq 4.5, \ \ 0 \leq y \leq 3.5.$

Řešení: Snadno se nahlédne, že účelová funkce má absolutní minimum 0 v bodě [2,2]. Toto minimum není vázáno žádnými omezujícími podmínkami; jde tedy o minimum volné. Vázaný extrém je extrém v oblasti přípustných řešení M, jež je určena omezeními. V našich případech jde o body:
a) bod (2,1) - leží na hranici M,
b) bod (1,1) - jde o vrchol oblasti M,
c) bod (2,2) - vnitřní bod M.

Již z této poměrně jednoduché úlohy kvadratického programování je vidět, že metodika řešení bude podstatně jiná (a daleko složitější) než u úloh lineárního programování.

3.4.4 Hledání vázaného extrému pro konvexní problém

Řešení úlohy nelineárního programování je hledání vázaného extrému.

Mějme konvexní úlohu: minimalizujte funkci

$$f(\bar{x}), \text{kde } \bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

za podmínek

$$g_i(\bar{x}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$
$$\bar{x} \geq 0,$$

kde účelová funkce f i veškerá omezení jsou konvexní, spojitě diferencovatelné funkce.

Uveďme základní fakta o konvexních funkcích a konvexních množinách:

Věta 3.26. *Průnik konvexních množin je konvexní množina.*

Věta 3.27. *Nechť Ω je množina bodů v $\mathbb{R}_n$, splňující omezení , $\bar{x} \geq 0$, , $g_i(\bar{x}) \leq 0$, $i = = 1, 2, \ldots, m$. Jsou-li všechny funkce $g_i(\bar{x})$ konvexní, je i Ω konvexní množina a nebo bude prázdná.*

Důkaz. Nechť $\bar{x}, \bar{y}$ jsou dva body z Ω. Je třeba dokázat, že jejich konvexní kombinace

$$\bar{z} = \lambda\bar{x} + (1 - \lambda)\bar{y}$$

patří do Ω , to jest, že splňuje daná omezení.
a) $\bar{z} \geq \bar{0}$ evidentně.
b) Platí

$$g_i(\bar{z} = g_i(\lambda\bar{x}(1 - \lambda)\bar{y}) \leq \lambda g_i(\bar{x}) + (1 - \lambda)g_i(\bar{y}) \leq 0,$$

neboť

$$g_i(\bar{x}) \leq 0, \quad g_i(\bar{y}) \leq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad 1 - \lambda \geq 0.$$

□

Věta 3.28. *Každá funkce konvexní na konvexní množině $\sum\Omega$ má zde nejvýše jedno lokální minimum.*
Existuje-li lokální minimum, pak je minimem globálním a dosahuje se na konvexní množině, která je podmnožinou množiny $\sum\Omega$.

Důkaz. Předpokládejme, že minimum nastává v bodě $\bar{x}_0$. Nechť $\bar{x}_0 \in \Omega$. Pro velmi malé λ leží bod $\lambda\bar{x} + (1 - \lambda)\bar{x}_0$ v ε-okolí (tj. ve vzdálenosti menší než ε) bodu $\bar{x}_0$ a funkční hodnota v tomto bodě je větší nebo rovna hodnotě v minimu, tj.

$$f(\bar{x}_0) \leq f\left[(1 - \lambda)\bar{x}_0 + \lambda\bar{x}\right] \leq (1 - \lambda)f(\bar{x}_0) + \lambda f(\bar{x}) \Rightarrow \lambda f(\bar{x}_0) \leq \lambda f(\bar{x}) \Rightarrow f(\bar{x}_0) \leq f(\bar{x}).$$

Tím je dokázána existence jediné minimální hodnoty (pokud existuje). Zbývá dokázat, že když je této minimální hodnoty dosaženo ve dvou různých bodech, je jí dosaženo i v libovolném bodu úsečky, těmito body určené, tj. v konvexní kombinaci těchto bodů: Nechť funkce nabývá minimální hodnoty z_0 ve dvou bodech $\bar{x}_0, \bar{x}_1$. Potom

$$z_0 \leq f\left[(1-\lambda)\bar{x}_0 + \lambda\bar{x}_1\right] \leq (1-\lambda)f(\bar{x}_0) + \lambda f(\bar{x}_1) = y_0,$$

což jsme dokazovali. □

Příklad 3.29. Jde pouze o funkce jedné proměnné:

a) $\Omega = (0, 10)$ (otevřený interval), $f(x) = 2x$. Funkce nemá na Ω minimum (ani maximum).

b) $\Omega = [0, 10]$ (uzavřený interval), $f(x) = 2x$. Minimum $z_0 = 0$ je v bodě 0, maximum $z_1 = 20$ je v bodě 10.

c) $\Omega = (0, 10)$ (nebo $\Omega = [0, 10)$ apod.), $f(x) = 7$. Minimum (maximum) $z_0 = 7$, v libovolném bodě.

d) $\Omega = (0, 10)$,$f(x) = (x-3)^2$. Minimum $z = 0$ je v bodě 3.

Intuitivně je zřejmé, a dá se to i dokázat, že pokud je konvexní oblast Ω uzavřená, bude minimum (konvexní funkce) existovat. To je také případ úlohy konvexního programování, jak jsme ji formulovali. Všechna omezení jsou totiž neostré nerovnosti, oblast přípustných řešení Ω je tudíž uzavřená.

Pro důkaz klíčové věty celé teorie konvexního programování budeme potřebovat ještě dvě pomocná tvrzení:

Věta 3.30. *Funkce $f(\bar{x})$, definovaná a diferencovatelná na otevřené konvexní množině Ω je zde konvexní právě když pro všechna $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \Omega$ platí*

$$f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_2) \geq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\nabla^T f(\bar{x}_2).$$

Důkaz. $\Leftarrow$: Buď $\bar{x}_3$ konvexní kombinace bodů $\bar{x}_1, \bar{x}_2$, tj. $\bar{x}_3 = \lambda\bar{x}_1 + (1-\lambda)\bar{x}_2$. Potom $\bar{x}_3 \in \Omega$ (Ω je konvexní) a dále

$$f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_3) \geq (\bar{x}_1 - \bar{x}_3)^T \nabla f(\bar{x}_3),$$

$$f(\bar{x}_2) - f(\bar{x}_3) \geq (\bar{x}_2 - \bar{x}_3)^T \nabla f(\bar{x}_3).$$

Utvořme konvexní kombinaci levých a také pravých stran předchozích nerovností, tzn. první nerovnost násobme λ, druhou $(1-\lambda)$ a sečtěme.

$$\lambda f(\bar{x}_1) - \lambda f(\bar{x}_3) + (1-\lambda)f(\bar{x}_2) - (1-\lambda)f(\bar{x}_3) \geq \lambda(\bar{x}_1 - \bar{x}_3)^T \nabla f(\bar{x}_3) + (1-\lambda)(\bar{x}_2 - \bar{x}_3)^T \nabla f(\bar{x}_3).$$

Po úpravě dostaneme:

$$\lambda f(\bar{x}_1) + (1-\lambda)f(\bar{x}_2) \geq f(\bar{x}_3) + \left[\lambda\bar{x}_1^T + (1-\lambda)\bar{x}_2^T\right] \nabla f(\bar{x}_3) - \bar{x}_3^T \nabla f(\bar{x}_3) = f\bar{x}_3).$$

První implikace je dokázána.

⇒: Konvexnost f znamená že platí

$$\lambda f(\bar{x}_1) + (1-\lambda) f(\bar{x}_2) \geq f\left[\lambda \bar{x}_1 + (1-\lambda)\bar{x}_2\right].$$

Po úpravě dostaneme

$$\lambda f(\bar{x}_1) - \lambda f(\bar{x}_2) \geq f\left[\lambda \bar{x}_1 + (1-\lambda)\bar{x}_2\right] - f(\bar{x}_2).$$

Obě strany dělíme λ, $(\lambda > 0)$:

$$f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_2) \geq \frac{1}{\lambda}\left\{f\left[\lambda \bar{x}_1 + (1-\lambda)\bar{x}_2\right] - f(\bar{x}_2)\right\} = \frac{f\left[\bar{x}_2 + \lambda(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\right] - f(\bar{x}_2)}{\lambda}. \quad (3.1)$$

Derivace ve směru $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ funkce f v bodě $\bar{x}_2$ je

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f\left[\bar{x}_2 + \lambda(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\right] - f(\bar{x}_2)}{\lambda |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^T}{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|} \nabla f(\bar{x}_2).$$

Je tedy

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^T \nabla f(\bar{x}_2) = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \lim_{\lambda \to 0} \frac{f\left[\bar{x}_2 + \lambda(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\right] - f(\bar{x}_2)}{\lambda |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}.$$

Tento výraz ovšem dostaneme, když rozšíříme pravou stranu (3.1) zlomkem $\dfrac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}$ a provedeme limitní přechod. Tvrzení tedy platí. □

Význam: Věta říká, že přírůstek konvexní funkce v libovolném směru je větší, než přírůstek tečny (tečné roviny, nadroviny) v tomto směru, že tedy konvexní funkce je nad tečnou (nad tečnou nadrovinou) v libovolném směru.

Následující věta rovněž zobecňuje fakt známý z diferenciálního počtu jedné proměnné a znamená toto: konvexní funkce nabývá v jistém bodě minima, jestliže ve všech směrech od tohoto bodu roste.

Věta 3.31. *Konvexní, spojitě diferencovatelná funkce na konvexní množině Ω nabývá globálního minima v bodě $\bar{x}_0 \in \Omega$ právě tehdy, když $(\bar{x} - \bar{x}_0)^T \nabla f(\bar{x}_0) \geq 0$ pro všechna $\bar{x} \in \Omega$.*

Důkaz. ⇒: Nechť f nabývá minima v $\bar{x}_0$. Je-li $\bar{x}_0$ vnitřní bod, je zde $\nabla f(\bar{x}_0)$ - jasné. Jestliže je to bod krajní (leží na hranici), uvážíme, že platí

$$f(\bar{x}_0) \leq f\left[\lambda \bar{x} + (1-\lambda)\bar{x}_0\right]$$

a tedy i platí

$$\frac{1}{\lambda} f\left[\lambda \bar{x} + (1-\lambda)\bar{x}_0\right] - f(\bar{x}_0) \geq 0.$$

Odtud stejným obratem jako ve druhé části důkazu věty 3.30 dostaneme

$$(\bar{x} - \bar{x}_0)^T \nabla f(\bar{x}_0) \geq 0.$$

$\Leftarrow$ Podle věty 3.30 je $f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_2) \geq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^T \nabla f(\bar{x}_2)$ a dále je tento výraz ≥ 0 (předpoklad), tedy $f(\bar{x}) \geq f(\bar{x}_0)$, což jsme dokazovali. $\square$

Věty 3.27 a 3.28 ukazují, že úloha konvexního programování má smysl, že účelová funkce bude nabývat jediného minima, a to buď v jediném bodě, nebo v nekonečné konvexní množině (podobně jak je tomu u lineárního programování).

Základní myšlenka řešení: úloha se převede na hledání speciálního volného extrému, tzv. sedlového bodu Lagrangeovy funkce. Ta je definována takto:

$$F(\bar{x}, \bar{l}) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} l_i g_i(\bar{x}). \tag{3.2}$$

l_i (často se značí λ_i) jsou tzv. Lagrangeovy multiplikátory (Lagrangeovy neurčité koeficienty). [1]

Úloha o sedlovém bodě.

Pro Lagrangeovu funkci $F(\bar{x}, \bar{l})$ najděte nezáporné vektory $\bar{x}_0, \bar{l}_0$ tak, aby platilo

$$F(\bar{x}_0, \bar{l}) \leq F(\bar{x}_0, \bar{l}_0) \leq F(\bar{x}, \bar{l}_0). \tag{3.3}$$

Hledá se tedy maximum vzhledem k $\bar{l}$ a minimum vzhledem k $\bar{x}$ (oba výsledné vektory jsou přitom ve všech složkách nezáporné).

Věta 3.32. *Sedlový bod $(\bar{x}_0, \bar{l}_0)$ Lagrangeovy funkce je řešením úlohy konvexního programování.*

Důkaz. Rozepišme si (3.3) a dostaneme:

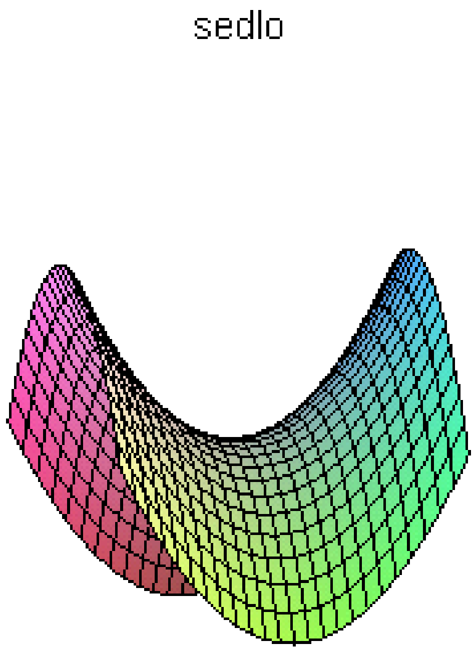
$$f(\bar{x}_0) + \sum l_i g_i(\bar{x}_0) \leq f(\bar{x}_0) + \sum l_{0i} g_i(\bar{x}_0) \leq f(\bar{x}) + \sum l_{0i} g_i(\bar{x}).$$

Z levé nerovnosti

$$\sum l_i g_i(\bar{x}_0) \leq \sum l_{0i} g_i(\bar{x}_0)$$

plyne, že $g_i(\bar{x}_0) \leq 0$ pro všechna i.

[1] J. L. Lagrange (1736-1813), fenomenální matematik a fyzik, nadaný výjimečnou představivostí. Zabýval se problematikou vázaných extrémů ve variačním počtu, pohybem těles v silových polích aj. Zformuloval pohybové rovnice (tzv. Lagrangeovy rovnice), na nichž se dá vybudovat prakticky celá klasická mechanika. Na jeho práce navázal W. Hamilton, který ve svých 20 letech (1825) objevil princip minimálního účinku (Hamiltonův princip), patrně nejhlubší a nejzávažnější fyzikální zákon vůbec, jímž se řídí veškerý volný i vázaný pohyb těles a elektrických a magnetických nábojů při působení sil, jakož i pohyb světelného paprsku.



Obr. 3.9: Sedlový bod

Pokud by bylo některé, řekněme $g_k(\bar{x}_0) > 0$, stačí volit $l_i = 0$ pro $i \neq k$, l_k dostatečně velké, abychom vlevo dostali velké číslo a nerovnost byla porušena.

Další důležitý důsledek: $\sum l_{0i} g_i(\bar{x}_0) = 0$. Skutečně, kdyby bylo $\sum l_{0i} g_i(\bar{x}_0) < 0$ (kladné být nemůže), položme $\bar{l} = \dfrac{\bar{l}_0}{2}$ a z (3.1) máme

$$\frac{1}{2} \sum l_{0i} g_i(\bar{x}_0) \leq \sum l_{0i} g_i(\bar{x}_0) \leq 2 \cdot \frac{1}{2} \sum l_{0i} g_i(\bar{x}_0) \Rightarrow \sum l_{0i} g_i(\bar{x}_0) \geq 0,$$

což je spor s předpokladem.

Uvážíme-li nulovou hodnotu $\sum l_{0i} g_i(\bar{x}_0)$ ve středním součtu (3.1), dostaneme

$$f(\bar{x}_0) \leq f(\bar{x}) + \sum l_{0i} g_i(\bar{x}).$$

Suma vpravo je nekladná ($l_{0i} \geq 0, \quad g_i(\bar{x}) \leq 0$), je tedy

$$f(\bar{x}_0) \leq f(\bar{x})$$

a $\bar{x}_0$ je řešením úlohy konvexního programování. □

Věta 3.33. *Je-li $\bar{x}_0$ řešením úlohy konvexního programování, pak existuje vektor $\bar{l}_0$ tak, že $(\bar{x}_0, \bar{l}_0)$ je sedlový bod Lagrangeovy funkce.*

Důkaz je zdlouhavý a vyžaduje značný aparát. Zájemce odkazuji na specializovanou literaturu.

Langange vyvinul metodu multiplikátorů pro variační počet. Tam je vysoce efektivní, zatímco v nelineárním programování je hledání sedlového bodu obtížné. Východiskem je následující věta:

Věta 3.34. **(Kuhn-Tuckerova)** *Vektor $\bar{x}_0$ je řešením úlohy konvexního programování, když a jen když existuje vektor $\bar{l}_0$ takový, že je splněno následujících šest (Kuhn-Tuckerových) podmínek:*

$$\frac{\partial F(\bar{x}_0, \bar{l}_0)}{\partial x_j} \geq 0, \quad \text{pro všechna } j, \tag{3.4}$$

$$\bar{x}_0^T \frac{\partial F(\bar{x}_0, \bar{l}_0)}{\partial \bar{x}} = \sum_{j=1}^{n} x_{0j} \left(\frac{\partial f(\bar{x}_0)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} l_i \frac{\partial g_i(\bar{x}_0)}{\partial x_j} \right) = 0, \tag{3.5}$$

$$\bar{x}_0 \geq \bar{0} \qquad \text{(standardní podmínka nezápornosti řešení)} \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial F(\bar{x}_0, \bar{l}_0)}{\partial l_i} = g_i(\bar{x}_0) \leq 0 \qquad \text{(omezení)} \tag{3.7}$$

$$\bar{l}_0^T \frac{\partial F(\bar{x}_0, \bar{l}_0)}{\partial l_i} = \sum_{i=1}^{m} l_{0i} g_i(\bar{x}_0) \tag{3.8}$$

$$\bar{l}_0 \geq \bar{0} \tag{3.9}$$

Ilustrujme si tuto ne právě jednoduchou větu na praktickém příkladu.

Příklad 3.35. Mějme hledat minimum účelové funkce

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 - 50 = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2$$

na množině Ω , dané nerovnostmi

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 1, \\ x_1 + x_2 &\leq 4, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Řešení. Funkce f nabývá absolutního minima v bodě $[5, 5]$. Vrstevnice jsou soustředné kružnice se středem v tomto bodě. Hledaný vázaný extrém (řešení naší úlohy) je zřejmě bod, ve kterém se dotýká vrstevnice s nejmenší funkční hodnotou oblasti Ω. Je jím zřejmě bod $[2, 2]$. Ověříme si teď Kuhn-Tuckerovy podmínky:

$$g_1(\bar{x}) = -x_1 \leq 1,$$

$$g_2(\bar{x}) = x_1 + x_2 - 4 \leq 0,$$

$$F(\bar{x}, \bar{l}) = f + l_1 g_1 + l_2 g_2 \equiv x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2 + l_1(-x_1) + l_2(x_1 + x_2 - 4).$$

Parciální derivace Lagrangeovy funkce podle x_1, x_2 označme v_1, v_2:

$$v_1 = 2x_1 - 10 - l_1 + l_2,$$

$$v_2 = 2x_2 - 10 + l_2.$$

Jak víme z důkazu věty 3.32, musí být v bodě optima $l_i g_i = 0$ (viz také (3.8)), odtud $l_1 = 0$. Podle (3.5) je také $x_j v_j = 0$, a protože $x_1 > 0, x_2 > 0$, bude $v_1 = v_2 = 0$. Odtud $l_2 = 10 - 2x_2 = 10 - 4 = 6$. Uvedené hodnoty $(x_1 = 2, x_2 = 2, v_1 = v_2 = 0, g_1 = -2, g_2 = = 0, l_1 = 0, l_2 = 6)$ vyhovují Kuhn-Tuckerovým podmínkám. □

Důkaz. Věty 3.34:
Úvodní část: Buď $\bar{x}_0$ řešením úlohy konvexního programování. Extrém může nastat (tj. $\bar{x}_0$ může ležet) buď uvnitř nebo na hranici Ω. Pokud leží na hranici, je aspoň jedna omezující podmínka splněna jako rovnost.

V důkazu věty 3.32 je zdůrazněn tento výsledek: všechny součiny $l_i g_i$ jsou v optimu nulové. Z toho zejména plyne: leží-li řešení (optimum) $\bar{x}_0$ uvnitř Ω, budou všechny multiplikátory nulové (neboť všechny podmínky jsou splněny jako ostré nerovnosti, tj. $g_i(\bar{x}_0) < 0$). Leží-li optimum na hranici, budou některé podmínky splněny jako nulové (pro ty nadplochy, na kterých optimum leží), ostatní jako ostré nerovnosti. Nenulové pak mohou být jen ty multiplikátory, které přísluší nulovým podmínkám.

Důkaz implikace $\Rightarrow$ (předpokládejme, že $\bar{x}_0$ je řešením úlohy, dokážeme (3.4) až (3.9)):

(3.4): a) Leží-li $\bar{x}_0$ uvnitř Ω, potom, protože minimalizuje $F(\bar{x}, \bar{l}_0)$, je $\nabla F(\bar{x}_0, \bar{l}_0) = \bar{0}$.

b) Leží-li $\bar{x}_0$ na hranici, uspořádejme podmínky tak, že $g_i(\bar{x}_0) < 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$, $g_i(\bar{x}_0) = 0$ pro $i = k + 1, \ldots, m$. Je $L_{0i} = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$ a

$$\frac{\partial F(\bar{x}_0, \bar{l}_0)}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=k+1}^{m} l_{0i} \frac{\partial g_i(\bar{x}_0, \bar{l}_0)}{\partial x_j} = 0.$$

c) Jestliže $\bar{x}_0$ neleží na hranici, dané funkcemi g_i (potom ale $l_1 = l_2 = \cdots = l_m = 0$), avšak platí-li pro určité j, že $x_{0j} = 0$ (jde rovněž o hranici, avšak danou implicitní podmínkou nezápornosti $\bar{x} \geq 0$), můžeme zavést hraniční funkci $g_{m+1}(\bar{x}) \equiv -x_j \leq 0$ a rozšířenou Lagrangeovu funkci $\tilde{F} = F - l_{m+1}x_j$. Poněvadž ale $l_1 = l_2 = \cdots = l_m = 0$, je $F = f$.

Dále:

$$\frac{\partial \tilde{F}(\bar{x}_0, \bar{l}_0)}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - l_{0,m+1} = 0,$$

a poněvadž $l_{m+1} \geq 0$, je

$$\frac{\partial F(\bar{x}_0, \bar{l}_0)}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0.$$

d) Nastanou-li obě situace b) a c) současně (což je samozřejmě možné), bude

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - l_{0,m+1} + \sum_{i=k+1}^{m} l_{0i} \frac{\partial g_i(\bar{x}_0, \bar{l}_0)}{\partial x_j} = 0.$$

První a třetí člen však dávájí dohromady F, takže

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = l_{0,m+1} \geq 0.$$

(3.5) je důsledkem:

$$x_{0j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_j} \geq 0, \qquad x_{0j} > 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0.$$

(3.6), (3.7) jsou podmínky úlohy.

(3.8) je víckrát zmiňovaný důsledek z důkazu věty 3.32.

(3.9) byla rovněž ukázána v důkazu věty 3.32.

Opačná implikace: Ať platí Kuhn-Tuckerovy podmínky. Podle věty 3.30 je

$$F(\bar{x}, \bar{l}_0) \geq F(\bar{x}_0, \bar{l}_0) + (\bar{x} - \bar{x}_0)^T \left[\frac{\partial F(\bar{x}_0, \bar{l}_0)}{\partial \bar{x}}\right] = F(\bar{x}_0, \bar{l}_0) + \bar{x}^T \nabla F(\bar{x}_0, \bar{l}_0) - \bar{x}_0^T F(\bar{x}_0, \bar{l}_0).$$

Třetí člen je nula dle (3.6), druhý je nezáporný (jde o kladný násobek derivace ve směru, a ta je v minimu kladná, resp. nezáporná), je tedy

$$F(\bar{x}, \bar{l}_0) \geq F(\bar{x}_0, \bar{l}_0).$$

Druhou nerovnost dokážeme takto: $F(\bar{x}_0, \bar{l})$ je lineární v $\bar{l}$, tedy konvexní. Proto

$$F(\bar{x}_0, \bar{l}) = F(\bar{x}_0, \bar{l}_0 + (\bar{l} - \bar{l}_0)^T \left[\frac{\partial F(\bar{x}_0, \bar{l}_0)}{\partial \bar{l}}\right] = F(\bar{x}_0, \bar{l}_0) + \bar{l}^T \left[\frac{\partial F(\bar{x}_0, \bar{l}_0)}{\partial \bar{l}}\right] - \bar{l}_0^T \left[\frac{\partial F(\bar{x}_0, \bar{l}_0}{\partial \bar{l}}\right].$$

(rovnost platí proto, že funkce je lineární, její přírůstek v libovolném směru je roven přírůstku tečné nadroviny v tomto směru). Třetí sčítanec je nula podle (3.8), druhý je záporný podle (3.7). Takže na závěr máme

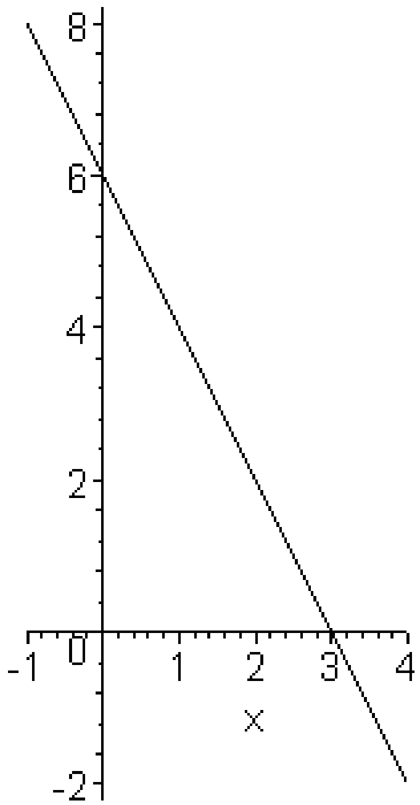
$$F(\bar{x}_0, \bar{l}) \leq F(\bar{x}_0, \bar{l}_0).$$

Obě nerovnosti dohromady znamenají, že jde o sedlový bod, tedy řešení úlohy. $\square$

Je-li hledané minimum konvexní funkce uvnitř Ω, jde o stacionární bod, v němž jsou derivace účelové funkce nulové. Ten bychom uměli najít i bez Kuhn-Tuckerovy věty, proto si tohoto případu nebudeme všímat.

Je-li hledané minimum na hranici Ω, uplatní se v plné míře Lagrangeova idea hledání vázaného extrému metodou neurčitých koeficientů. Pokusme se tuto ideu vyložit na následujícím příkladu:

Příklad 3.36. Máme najít minimum funkce $f = (x+2)^2+(y-2)^2$ na oblasti Ω vyznačené na obrázku,



Obr. 3.10: Zadání příkladu 3.36

tedy pro

$$2x + y - 6 \leq 0, \qquad -x \leq 0,\ -y \leq 0.$$

Řešení. Oblast Ω je tedy ohraničena třemi přímkami:

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &\equiv 2x + y - 6, \\ g_2(x, y) &\equiv -x = 0, \\ g_3(x, y) &\equiv -y = 0. \end{aligned}$$

Vrstevnice jsou kružnice se středem v bodě $[-2, 2]$, minimum je v hraničním bodě $[0, 2]$ na hraniční přímce $x = 0$. Úlohu lze řešit takto:

1. Najdeme volné minimum. Vidíme, že neleží v Ω, proto pokračujeme dále.
2. Najdeme minimum f na každé hraniční přímce zvlášť (řešení právě takové úlohy podal Lagrange). Z těchto minim najdeme nejmenší.

V bodu 2 bychom tedy řešili tři úlohy. Náhodou bychom dostali přípustné řešení, neboť bod [0,2], kde je nejmenší z těchto hodnot, leží v Ω. □

Kdyby však šlo o účelovou funkci $\tilde{f} = (x+3)^2 + (y-9)^2$, nevedla by tato metoda k cíli, neboť "nejmenší z nejmenších" hodnot nastává sice v bodě přímky $2x + y - 6 = 0$, ale mimo Ω (pro záporné x). Je tedy zřejmě třeba uvažovat všechny hraniční úsečky současně. Příslušná Lagrangeova funkce by byla

$$\tilde{F}(x,y) = f(x,y) + l_1 g_1 + l_2 g_2 + l_3 g_3.$$

Říkejme jí třeba úplná Lagrangeova funkce. Řešením úlohy konvexního programování je sedlový bod právě této funkce, to jest bod, ve kterém jsou všechny parciální derivace podle x, y, l_1, l_2, l_3 rovny nule.

Z lineárního programování je známo, že je možné podmínky nezápornosti z modelu vytěsnit, to jest zařídit, aby se v početním modelu přímo nevyskytovaly. Samozřejmě se však při výpočtu respektují. Kuhn s Tuckerem se pokusili, a to se zdarem, o podobné. Vyloučili z Lagrangeovy funkce podmínky nezápornosti. Tím si značně zkomplikovali odvození, tedy důkaz svých podmínek, ovšem výsledkem bylo zjednodušení početního modelu. Ten se v kvadratickém případě nápadně podobá modelu z lineárního programování (viz příští odstavec), a také se podobně řeší.

Pro náš praktický příklad to znamená, že se místo

$$\tilde{F}(x,y) = f(x,y) + l_1 g_1 + l_2 g_2 + l_3 g_3 = x^2 + y^2 + 4x - 4y + l_1(2x + y - 6) + l_2(-x) + l_3(-y)$$

pracuje s redukovanou funkcí

$$F(x,y) = f(x,y) + l_1 * g_1 = x^2 + y^2 + 4x - 4y + l_1(2x + y - 6).$$

Cenou za toto zjednodušení pak je fakt, že derivace této funkce mohou být v optimu i kladné (nejen rovny nule).

3.4.5 Formulace Kuhn-Tuckerových podmínek pro početní model

Pro přesné a zároveň srozumitelné znění věty užijeme úpravu:
- označme v_j parciální derivaci Lagrangeovy funkce podle proměnné x_j, dále označme v_{0j} hodnotu této derivace v bodě $(\bar{x}_0, \bar{l}_0)$, tedy

$$v_j = \frac{\partial F(\bar{x}, \bar{l})}{\partial x_j}, \qquad v_{0j} = \frac{\partial F(\bar{x_0}, \bar{l_0})}{\partial x_j},$$

- označme d_i záporně vzatou derivaci Lagrangeovy funkce podle l_i, tj.

$$d_i = -\frac{\partial F(\bar{x}, \bar{l})}{\partial l_i} = -g_i(\bar{x}),$$

- d_{0i} pak hodnotu d_i v bodě $(\bar{x}_0, \bar{l}_0)$, tedy

$$d_i = -g_i(\bar{x}), \qquad d_{0I} = -g_i(\bar{x}_0).$$

Kuhn-Tuckerova věta 3.34 potom bude nabývat tvaru:

Věta 3.37. **Kuhn-Tuckerova věta:** *Vektor $\bar{x}_0$ je řešením úlohy konvexního programování tehdy a jen tehdy, když existuje takový vektor $\bar{l}_0$, že je splněno následujících šest (Kuhn-Tuckerových) podmínek:*

$$\bar{v}_0 \geq \bar{0}, \qquad \text{to znamená, že } v_{0j} \geq 0 \;\; \forall j = 1, \ldots, n, \tag{3.10}$$
$$\bar{x}_0^T \bar{v}_0 = 0, \tag{3.11}$$
$$\bar{x}_0 \geq 0, \qquad \text{(standardní podmínka nezápornosti řešení)} \tag{3.12}$$
$$\bar{d}_0 \geq \bar{0}, \qquad \text{(omezení)} \tag{3.13}$$
$$\bar{l}_0^T \bar{d}_0 = 0, \tag{3.14}$$
$$\bar{l}_0 \geq \bar{0}. \tag{3.15}$$

Podmínky (3.10), (3.12), (3.13), (3.15) jsou podmínky nezápornosti - všechny proměnné jsou v optimu nezáporné. Podmínky (3.11) a (3.14) jsou vylučovací: vždy aspoň jedna ze stejnolehlých párových proměnných x_{0j}, v_{0j}, respektive l_{0j}, d_{0j} je v optimu rovna nule. Podmínky jsou nutné a postačující. Jakmile se nám podaří najít bod, ve kterém jsou splněny, máme řešení. Jako v lineárním případě nemusí být řešení jediné.

Příklad 3.38. Najděte minimum funkce

$$(x + y - 8)^2 = x^2 + y^2 + 2xy - 16x - 16y + 64,$$

za podmínek

$$x + y \leq 2, \quad x, y \geq 0.$$

Řešení. Řešením je celá úsečka $[0, 2][2, 0]$. □

3.4.6 Cvičení

Hledání volného extrému kvadratické funkce.

Příklad 3.39. Funkce $z = x^2 + y^2$. Pokuste se určit, o jakou plochu se jedná. Jaké čáry jsou její vrstevnice $z = c, \;\; c \in \mathbb{R}$. Určete gradient funkce z v bodech (2,3), (1,1). Jaký má směr?

Řešení. Vrstevnice jsou kružnice se středem v počátku. Pro $x = 0$ bude $z = y^2$, tedy parabola. Analogicky pro $y = 0$. Plocha je tedy rotační paraboloid.

Gradient je vektor parciálních derivací, zde $(2x, 2y)$. Pro bod $(1, 1)$ dostaneme vektor $(2, 2)$. Tento vektor je kolmý na vrstevnici v daném bodě a má směr maximálního růstu funkce z.

Pro bod $(2, 3)$ dostaneme vektor $(4, 6)$. Tento vektor je kolmý na vrstevnici v daném bodě a má směr maximálního růstu funkce z. □

Příklad 3.40. Pozměňte funkci z předešlého příkladu na $z = x^2 + 3y^2$. O jakou plochu půjde teď?

Řešení. Opět paraboloid, nikoli však rotační. Vrstevnice jsou elipsy. □

Příklad 3.41. Najděte volné maximum funkce $4x + 3y - x^2 - 3y^2$. Určete gradient této funkce v bodech $(-1, -1), (2, 0), (3, 5)$.

Příklad 3.42. Gradientní metodou najděte extrém funkce $F(x, y) = x^2 + \mathrm{e}^{-x} + y^2 + \mathrm{e}^{-2y}$.

Řešení. Gradientní metoda hledání volného extrému spočívá v postupném přibližování se k extrému pomocí gradientu. vypočteme si gradient

$$\operatorname{grad}(F) = (2x - \mathrm{e}^{-x}, 2y - 2\mathrm{e}^{-2y}).$$

Hledáme stacionární bod, tj. bod, v němž je gradient nulový (tzn. obě parciální derivace jsou nulové). Z tvaru funkce usoudíme, že hledaný extrém je minimum.

Zvolíme nějak, co možná rozumně, výchozí bod - na příklad $(0, 0)$ - a spočteme v něm gradient. Při této volbě to je $\operatorname{grad}(F(0, 0)) = (-1, -2)$. Postoupíme o jistý krok v opačném směru, tj. ve směru největšího poklesu funkce, se snahou zmenšovat gradient až k nule. Volba vhodného kroku je největší slabinou metody.

Pokusme se o krok $0,2$. Postoupíme tedy k bodu $(0, 0) + 0,2(1, 2) = (0.2, 0.4)$. Zde je gradient $(0.4 - e - 0.4, 0.8 - 2e - 0.8) = (-0.27032, -0.0986)$. Gradient se zmenšil, krok jsme zvolili vhodně. Podobně postupujeme dál. Jak je zřejmé, jde o metodu postupných aproximací. □

Příklad 3.43. Tutéž úlohu jako v příkladu 3.42 řešte Newtonovou metodou.

Řešení. Řešíme soustavu dvou nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} f(x, y) &\equiv 2x - \mathrm{e}^{-x} = 0, \\ g(x, y) &\equiv 2y - 2\mathrm{e}^{-2y}. \end{aligned}$$

Soustava

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f \\ -g \end{pmatrix},$$

zde

$$\begin{pmatrix} 2 + \mathrm{e}^{-x} & 0 \\ 0 & 2 + 4\mathrm{e}^{-2y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + \mathrm{e}^{-x} \\ -2y + 2\mathrm{e}^{-2y} \end{pmatrix}.$$

odtud dostaneme

$$h\left(2+\mathrm{e}^{-x}\right)=-2x+\mathrm{e}^{-x},$$
$$k\left(2+4\mathrm{e}^{-2y}\right)=-2y+2\mathrm{e}^{-2y}$$

Takže po úpravě máme

$$\begin{aligned} h &= \frac{-2x+\mathrm{e}^{-x}}{2+\mathrm{e}^{-x}}, \\ k &= \frac{-2y+2\mathrm{e}^{-2y}}{2+4\mathrm{e}^{-2y}}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Za nultou iteraci volíme počátek, tj. bod $(0,0)$. Vyjde $h=\frac{1}{3}$, $k=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. První iterace:

$$x_1=x_0+h=0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3},$$
$$y_1=y_0+k=0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Gradient v tomto bodě je

$$\operatorname{grad}(F)|_{[x_1,y_1]}=(f(x_1,y_1),g(x_1,y_1))=(-0.04986,-0.36016).$$

Po dosazení první iterace do soustavy (3.16) vyjde $h=0.03885$, $k=0.08885$ a druhá iterace vyjde

$$x_2=0.3721833, \qquad y_2=0.42218$$

s gradientem

$$\operatorname{grad}(F(x_2,y_2)=(0.055138,-0.0153),$$

což je po druhém kroku velmi dobrý mezivýsledek. □

3.4.7 Kvadratické programování

Úvod

Jinou variantou nelineárního programování je kvadratické programování. Jde o případ, kdy je účelová funkce $f(\bar{x})$ kvadratická a hraniční funkce omezujících podmínek $g_i(\bar{x})$ lineární.

Lineární funkce jsou konvexní. Je-li konvexní i účelová funkce, platí Kuhn-Tuckerovy podmínky (viz věta 3.34, 3.37). Lagrangeova funkce je kvadratická v x_j, lineární v l_i, derivace, vystupující v Kuhn-Tuckerových podmínkách jsou tedy lineární výrazy. Úloha je tak linearizována a lze ji řešit upravenou simplexovou metodou. (Pokud hledáme maximum konkávní účelové funkce, převedeme úlohu na minimalizační tak, že obrátíme znaménko účelové funkce a tím z ní učiníme funkci konvexní.)

Pro složitější případy, než je konvexní kvadratická úloha, není k dispozici obecná metoda řešení. Vyvstávají tedy dvě otázky:

- Je třída konvexních kvadratických úloh tak prakticky významná, aby stálo za to se jí podrobně zabývat?

- Jak jednoduše poznat, zda je kvadratická funkce konvexní?

Odpověď na první otázku je kladná, praktických problémů vedoucích na kvadratické programování, je značné množství.

Odpověď na druhou otázku dává teorie kvadratických forem, vypracovaná v souvislosti s analytickou geometrií kvadratických útvarů (kuželoseček a kvadrik).

Kvadratické formy

Definice 3.44. Kvadratická forma $f(\bar{x})$ je výraz

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_i x_j = \bar{x}^T C\bar{x},$$

kde $C = (c_{ij}), i, j = 1, 2, \ldots, n$ je symetrická matice, která se nazývá maticí kvadratické formy.

Příklad 3.45. Ke kvadratické formě

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2$$

najděte její matici

Řešení.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Platí

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2.$$

Koeficient u kvadrátu jsou na hlavní diagonále, na pozici i, j a j, i je polovina koeficientu u smíšeného součinu x_ix_j. □

Definice 3.46. Kvadratická forma se nazývá *pozitivně definitní*, jestliže nabývá hodnoty 0 jen v případě, že všechna x_i jsou rovna 0, v ostatních případech je kladná.

$$\forall(\bar{x}) \neq 0 \Rightarrow f(\bar{x}) > 0.$$

$$\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow f(\bar{x}) = 0.$$

Kvadratická forma se nazývá *pozitivně semidefinitní*:

$$\forall(\bar{x}) \neq 0 \Rightarrow f(\bar{x}) \geq 0.$$

(tj. vždy je nezáporná)

Věta 3.47. *Pozitivně semidefinitní kvadratická forma je konvexní.*

Důkaz. Buď $f(\bar{x}) = \bar{x}^T C\bar{x}$ pozitivně semidefinitní kvadratická forma. Dokazujeme nerovnost

$$f\left[\lambda\bar{x}_1 + (1-\lambda)\bar{x}_2\right] - \lambda f(\bar{x}_1) - (1-\lambda)f(\bar{x}_2) \le 0.$$

Vyjádřeno maticově

$$\begin{gathered}
\left[\lambda\bar{x}_1 + (1-\lambda)\bar{x}_2\right]^T C\left[\lambda\bar{x}_1 + (1-\lambda)\bar{x}_2\right] - \lambda\bar{x}_1^T C\bar{x}_1 - (1-\lambda)\bar{x}_2^T C\bar{x}_2 = \\
\lambda^2\bar{x}_1^T C\bar{x}_1 + (1-\lambda)^2\bar{x}_2^T C\bar{x}_2 + 2\lambda(1-\lambda)\bar{x}_1^T C\bar{x}_1 - \lambda\bar{x}_1^T C\bar{x}_1 - (1-\lambda)\bar{x}_2^T C\bar{x}_2 = \\
(\lambda^2-\lambda)\bar{x}_1^T C\bar{x}_1 + (1-\lambda)\left[(1-\lambda)\bar{x}_2^T C\bar{x}_2 - \lambda\bar{x}_2^T C\bar{x}_2\right] + 2\lambda(1-\lambda)\bar{x}_1^T C\bar{x}_1 = \\
-\lambda(1-\lambda)\left[(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^T C(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\right].
\end{gathered}$$

Součin před hranatou závorkou je záporný, forma v závorce nezáporná, součin je tedy ≤ 0. □

Pro zjištění, zda je kvadratická forma pozitivně definitní, se užívá

Věta 3.48. Sylvestrovo kriterium
Nechť C je symetrická matice kvadratické formy f (tj. $f = \bar{x}^T C\bar{x}$). Jestliže jsou všechny hlavní minory matice C kladné, je forma f pozitivně definitní.

Příklad 3.49. Zjistěte Sylvestrovým kriteriem, zda forma $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 7x^2 + 2x_1x_2 + + 4x_2x_3$ je pozitivně definitní.

Řešení. Máme

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix},$$

první minor je $1 > 0$, druhý minor je

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

třetí je

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$

Všechny hlavní minory jsou kladné, forma tedy je pozitivně definitní. □

Příklad 3.50. x^2 je pozitivně definitní kvadratická forma.

Libovolná funkce $x^2 + bx + c$ je konvexní (jen posunutá) např. $x^2 - 2x - 1$.

O tom, zda je kvadratická funkce konvexní, rozhoduje pouze kvadratická část této funkce (kvadratická forma). Lineární část vyjadřuje pouze posunutí vzhledem k počátku, absolutní člen pak posunutí funkce vůči základně.

Formulace úlohy kvadratického programování

Hledáme minimum účelové funkce

$$f(\bar{x}) = \sum_{k,j=1}^{n} c_{kj} x_k x_j + \sum J = 1^n p_j x_j,$$

za podmínek

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \leq b_i,$$
$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Maticový zápis:

$$\min \text{ funkce } \bar{x}^T C \bar{x} + \bar{p}^T \bar{x},$$
$$A\bar{x} \leq \bar{b},$$
$$\bar{x} \geq 0,$$

$$\text{kde} \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \quad A = (a_{ij}), i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Předpokládejme, že C je symetrická a pozitivně semidefinitní (jde tedy o konvexní úlohu). zavedením Kuhn-Tuckerových podmínek převedeme úlohu do tvaru, vhodného pro řešení simplexovou metodou.

Lagrangeova funkce :

$$F(\bar{x}, \bar{l}) = \bar{x}^T C \bar{x} + \bar{p}^T \bar{x} + \bar{l}(A\bar{x} - \bar{b}),$$

kde $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_n)$.

Podle (3.4) dostaneme

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{x}} = 2\bar{x}^T C + \bar{p} + \bar{l}A \geq 0, \tag{3.17}$$

$$\bar{x}\frac{\partial F}{\partial \bar{x}} = \bar{x}(2\bar{x}^T C + \bar{p} + \bar{l}A) = 0, \quad \text{viz } (3.5)$$
$$A\bar{x} - \bar{b} \leq 0, \quad \text{(omezení)}$$
$$\bar{x} \geq 0, \quad \bar{l} \geq 0.$$

Označíme

$$\bar{v} = \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^T$$

a dosadíme do (3.17):

$$2\bar{x}^T C + \bar{l}A - \bar{v} = -\bar{p},$$

$$A\bar{x} + \bar{d} = \bar{b}, \qquad \text{(doplněk proměnné } d\text{)}$$
$$\bar{x}^T\bar{v} = 0,$$
$$\bar{x} \geq 0, \;\; \bar{l} \geq 0, \;\; \bar{v} \geq 0.$$

Úloha se řeší upravenou simplexovou metodou.

Úplný předpis pro řešení úlohy kvadratického programování

1. Jde-li o maximalizaci, problém max $\tilde{f}(\bar{x})$ převedeme na minimalizaci:

$$\min f(\bar{x}) := -\tilde{f}(\bar{x}).$$

2. Sylvestrovým kritériem zjistíme, zda kvadratická část f je pozitivně definitní (nebo aspoň semidefinitní). Pokud ano, následuje bod 3. V opačném případě nemůžeme obecně garantovat řešení.

3. Můžeme najít absolutní minimum $f(\bar{x})$ (stacionární bod - hledá se snadno). Leží-li uvnitř oblasti přípustných řešení, je úloha vyřešena. Pokud ne (nebo pokud jsme absolutní minimum vůbec nehledali), použijeme Wolfeho nebo jednofázovou metodu (najde minimum i uvnitř oblasti).

Příklad 3.51. Pro úlohu: Určete maximum funkce

$$h(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_1 + x_2$$

za podmínek

$$x_1 + x_2 \leq 5, \quad x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0,$$

sestavte (v případě potřeby) výchozí model podle Kuhn-Tuckerovy věty.

Řešení. Nejdříve zjistíme, zda volný extrém leží v oblasti přípustných řešení, tj. parciální derivace podle x_1, x_2 se musí rovnat nule:

$$-2x_1 - 2x_2 + 4 = 0,$$

$$-2x_1 - 4x_2 + 1 = 0.$$

Máme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Řešení je: $x_1 = 3.5, \quad x_2 = -1.5$ leží mimo oblast přípustných řešení.

Převedeme úlohu na minimalizační; $-h = f(x1, x2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_1 - x_2 \Rightarrow \min$.

Sylvestrovým kriteriem snadno ověříme, že kvadratická forma je kladně definitní. Matice formy má tvar:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

první minor je roven 1, druhý rovněž 1.

Jde tedy o konvexní problém. Sestavíme Lagrangeovu funkci. Máme jedinou netriviální omezující podmínku $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 5 \leq 0$. Lagrangeova funkce tedy obsahuje jediný multiplikátor λ:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_1 - x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 5).$$

Označme vektor parciálních derivací Lagrangeovy funkce podle x_1, x_2:

$$\bar{v} = \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) = (v_1, v_2).$$

U nás je

$$v_1 = 2x_1 + 2x_2 - 4 + \lambda, \qquad v_2 = 2x_1 + 4x_2 - 1 + \lambda.$$

Tyto dvě rovnosti upravíme (na pravé straně bude absolutní člen) a dostaneme tak první dvě rovnice modelu:

$$2x_1 + 2x_2 + \lambda = 4, \tag{3.18}$$

$$2x_1 + 4x_2 + \lambda = 1. \tag{3.19}$$

Třetí rovnicí bude (naše jediné netriviální) omezení. Po zavedení doplňkové proměnné d máme

$$x_1 + x_2 + d = 5 \tag{3.20}$$

Čtvrtou rovnicí je druhá Kuhn-Tuckerova podmínka

$$\bar{x}^T \bar{v} = 0. \tag{3.21}$$

Pátou rovnicí je čtvrtá Kuhn-Tuckerova podmínka, která má obecně tvar $\bar{\lambda}^t \bar{d} = 0$, v našem případě tedy

$$\lambda \cdot d = 0. \tag{3.22}$$

Zbývají triviální podmínky nezápornosti všech proměnných

$$\bar{x} \geq 0, \ \ \bar{\lambda} \geq 0, \ \ \bar{v} \geq 0, \ \ \bar{d} \geq 0. \tag{3.23}$$

Tím je výchozí model sestaven. Multiplikátor byl značen λ - nezamění se s 1. □

Pojmy k zapamatování

– V této kapitole jsme ukázali matematickou formulaci úlohy lineárního programování, jejíž tvar obecně zní:

nalezněte minimum (maximum) funkce $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ za omezujících podmínek

$$x_j \geq 0 \text{ pro } j = 1, 2, \ldots, n \text{ (tzv. triviální podmínky)},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \text{ (nebo } = b_i \text{ nebo } \geq b_i) \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, m.$$

- Dále jsme se zabývali grafickým řešením této úlohy a následnou analýzou citlivosti, tj. tím, jak se změní řešení při změně některého ze vstupních parametrů úlohy. Sledovali jsme především změny netriviálních omezení, které mohou být dvojího druhu:
- Klíčová … pokud prochází bodem optima.
- Neklíčová … pokud neprochází bodem optima.
- Kromě toho jsme se také věnovali algebraickému řešení – tzv. *simplexové metodě.* Pro její použití jsme definovali tzv. *kanonický tvar* úlohy lineárního programování, který je charakteristický tím, že
  - Všechna omezení jsou rovnicemi.
  - Všechna omezení mají nezápornou pravou stranu.
  - Pro všechny proměnné x_j platí: $x_j \geq 0$.
- Úlohu lineárního programování lze řešit algebraicky pomocí *simplexové tabulky* následujícím způsobem:
  1. Úlohu převedeme na kanonický tvar (přidáním pomocných proměnných, vynásobením (-1), substitucí $x_i = x_i' - x_i''$ pro neomezenou proměnnou x_i).
  2. Dodáme umělé proměnné u_i do některých rovnic, abychom zaručili existenci jednotkové matice.
  3. Vynulujeme koeficinty funkce z u proměnných určujících jednotkovou matici.
  4. Sestavíme vstupní simplexovou tabulku, do prvního řádku zapíšeme rovnici $z - \sum$(kombinace nebázických proměnných) = absolutní člen, do ostatních řádků opíšeme omezení.
- Věnovali jsme se i některým úskalím simplexové metody, zejména degeneraci, neexistenci nebo nejednoznačnosti řešení.
- Dále byl podán stručný úvod do teorie duality. Nejprve jsme původní úlohu lineárního programování (její kanonický tvar) označili jako *primární.* K této úloze konstruujeme tzv. *duální* úlohu podle následujících pravidel:

primární úloha	duální úloha
minimum	maximum, všechna omezení typu $\leq$, proměnné neohraničené
maximum	minimum, všechna omezení typu $\geq$, proměnné neohraničené

- Na příkladu jsme pak pomocí simplexové metody zkoumali vztah mezi řešením primární a duální úlohy.
- Dále jsme zjistili, že všechny hodnoty simplexové tabulky lze určit pomocí tzv. inverzní matice. Toto lze využít zejména při programování algoritmu simplexové metody a také při analýze citlivosti.
- Zajímavá je také ekonomická interpretace duality, která se dá velice stručně charakterizovat jako maximalizace zisku z při současné minimalizaci využití zdrojů w pro daný zisk.
  V souvislosti s dualitou jsme se zabývali duální simplexovou metodou, jejíž hlavní myšlenka zní:

Pokud primární bázické řešení je nepřípustné (některá jeho souřadnice je < 0), ale platí podmínka optimality ($z_j - c_j \geq 0$ pro všechna j), snažíme se duální simplexovou metodou přejít do vrcholu, který stále splňuje podmínku optimality, a navíc už je přípustný (jeho souřadnice ≥ 0). První takový vrchol, do kterého touto metodou dorazíme, je optimum primární úlohy.

– Poznatků z teorie duality jsme využili k získání efektivnějších postupů v analýze citlivosti.
– Pokračovali jsme problematikou nelineárního programování.
– Ukázali jsme si některé metody řešení úloh konvexního a kvadratického programování.

Kontrolní otázky

1. U následujících výroků rozhodněte, zda se jedná o výrok pravdivý či nepravdivý.
   1. Abychom mohli formulovat duální úlohu, primární úloha musí být v kanonickém tvaru.
   2. Duální úloha existuje jen tehdy, pokud primární úloha je úlohou minimalizace.
   3. Koeficienty duální funkce w zapsané v simplexové tabulce jsou totéž co pravé strany primárních omezení.
   4. Optimální hodnota funkce z je menší než optimální hodnota funkce w.
   5. I když primární řešení není optimální, příslušné duální řešení je přípustné.
   6. Pokud primární řešení je přípustné, příslušné duální řešení je optimální.
   7. Pokud příslušné duální řešení je přípustné, primární řešení je optimální.
   8. Pokud je alespoň jedna hodnota v posledním sloupci simplexové tabulky kladná, řešení primární úlohy je přípustné.
   9. Přidáním nového omezení se optimální hodnota funkce z může zlepšit.

Odpovědi na otázky
1 – A, 2 – N, 3 – A, 4 – N, 5 – N, 6 – N, 7 – A, 8 – N, 9 – N.

Cvičení

1. Uvažujte následující úlohu lineárního programování:

$$\text{najděte maximum funkce } z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 \text{ za podmínek} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 &= 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

   a) Formulujte k této úloze úlohu duální.
   b) Najděte řešení duální úlohy pomocí optimální tabulky primární úlohy.

2. Uvažujte následující úlohu lineárního programování:

najděte maximum funkce $z = 5\,x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3$ za podmínek
$$\begin{aligned} x_1 + 5\,x_2 + 2\,x_3 &= 30 \\ x_1 - 5\,x_2 - 6\,x_3 &\le 40 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

a) Formulujte k této úloze úlohu duální.

b) Najděte řešení duální úlohy pomocí optimální tabulky primární úlohy.

3. Vyřešte duální simplexovou metodou úlohu:

najděte minimum funkce $z = 2\,x_1 + 3\,x_2$ za podmínek
$$\begin{aligned} 2\,x_1 + 3\,x_2 &\le 30 \\ x_1 + 2\,x_2 &\ge 10 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

4. Uvažujte zadání z příkladu 2. Proveďte následující analýzu citlivosti:

a) jak se změní řešení při změně pravé strany na $\begin{pmatrix} 35 \\ 15 \end{pmatrix}$?

b) jak se změní řešení při přidání nového omezení $x_1 + x_3 \le 5$?

c) jak se změní řešení při změně funkce z na $z = x_1 + x_2 - 2\,x_3$?

d) jak se změní řešení při změně 2.sloupce omezení na $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Výsledky

ad 1. ad a) formulace duální úlohy: minimalizujte funkci $w = 4\,y_1 + 8\,y_2$ za podmínek $y_1 + y_2 \ge 2$, $y_1 + 4\,y_2 \ge 4$, $y_1 \ge 4, y_2 \ge -3$; ad b) $\boldsymbol{y} = (4, 0)$; $w(\boldsymbol{y}) = 16$.

ad 2. ad a) formulace duální úlohy: minimalizujte funkci $w = 30\,y_1 + 40\,y_2$ za podmínek $y_1 + y_2 \ge 5$, $5\,y_1 - 5\,y_2 \ge 2$, $2\,y_1 - 6\,y_2 \ge 3$, $y_1 \in \mathbb{R}, y_2 \ge 0$; ad b) $\boldsymbol{y} = (5, 0)$; $w(\boldsymbol{y}) = 150$.

ad 3. $\boldsymbol{x} = (0, 5)$; $z(\boldsymbol{x}) = 15$.

ad 4. ad a) $\boldsymbol{x} = \left(30, 0, \frac{5}{2}\right)$, $z(\boldsymbol{x}) = \frac{315}{2}$; ad b) $\boldsymbol{x} = (5, 5, 0)$, $z(\boldsymbol{x}) = 35$; ad c) hodnota optima se nemění $\boldsymbol{x} = (30, 0, 0)$, změní se pouze hodnota účelové funkce $z(\boldsymbol{x}) = 30$; ad d) nic se nezmění.

4 Stochastické procesy

Průvodce studiem

Budeme se zabývat některými typy náhodných procesů. Ukážeme si jejich rozdělení a některé způsoby řešení problémů, které tyto procesy popisují.

V první kapitole jsme se zabývali teorií pravděpodobností. Vždy jsme přepokládali, že náhodná veličina, náhodná proměnná dosáhne během pokusu některou, předem nám neznámou, hodnotu, ale tato hodnota bude pouze jedna jediná. Tento postup ale nevyhovuje při popisu řady dalších jevů, protože zanedbává závislost náhodné proměnné na čase.

Ukážeme si základní vlastnosti náhodných procesů a naučíme se je popsat a pracovat s nimi.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- Rozeznat deterministický a náhodný proces.
- Sestavit matici Markovského řetezce.
- Odlišit od sebe homogenní a nehomogenní Markovské řetězce.
- Pracovat s maticí pravděpodobností přechodů a maticí intenzit.
- Používat transformace pro klasifikaci Markovských řetězců.

4.1 Základní pojmy

S náhodnými procesy, které závisejí na čase, se můžeme setkat v řadě oblastí vědy, techniky a vyskytují se i v normálním životě, jenom o tom každý neví.

Vezměme si hromadění se prvků, které mají projít určitým systémem, ošetřením, tj. procesy hromadné obsluhy. Typickým příkladem je fronta zákazníků před pokladnou, počet vozidel před křižovatkou, zatížení telefonního uzlu. Dalším příkladem mohou být modely obnovy, tedy proces kdy dochází k postupnému vyřazování prvků ze souboru a jejich nahrazení jinými prvky. V demografii se takovými prvky rozumí úmrtí a narození.

Úvahy o nutnosti vybudovat teorii náhodných procesů vyslovil už A. Poincaré (1854 - 1912). První náznaky realizace je možné nalézt u L. Bacheliera (1870). Skutečné vybudování matematických základů náhodných procesů je spojeno se jmény A.A. Markova (1856 - 1922), A.J. Chinčina (1894 - 1959) a A.N. Kolmogorova (1903 - 1987).

Procesem budeme rozumět každý děj, který může probíhat v technické, ekonomické a matematické oblasti. Přitom jednotlivé procesy můžeme rozdělit na disjunktní třídy (tj. každý proces je možné jednoznačně zařadit do právě jedné třídy). Rozeznáváme procesy

- deterministické
- náhodné
- smíšené

Deterministický proces – vždy jej můžeme popsat nebo předpokládat o jaký proces se jedná. Pro funkci času $f(t), t \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, nebo $f(t), t \in [a, b], a < b, a, b \in \mathbb{R}$, vždy budeme znát její hodnotu. Jinak řečeno: u deterministického procesu při daných vstupních podmínkách vždy dokážeme určit výsledek procesu.

Příklad 4.1. Měděnou spirálu připojíme ke zdroji. Znamená to, že spirálou poteče proud a spirála se začne ohřívat. Můžeme změřit proud a napětí zdroje a na základě toho můžeme určit, jakým způsobem se šíří teplo ve spirále, jaký je její tepelný výkon atd. Jedná se o deterministický proces.

Stochastický proces (Náhodný proces) - pro každé „t“ budeme znát jen pravděpodobnost s níž může daný případ nastat.

Příklad 4.2. Turbulence v atmosféře, počasí, atd.

Obchodní strategie, restrukturalizace podniku, výroby a její dopad na míru zisku, atd.

Působení léků.

Vedlejší účinky léku.

V přemětu Matematika 3 jste se setkali s opakovanými pokusy (Bernouliovská posloupnost pokusů), kdy v každém pokusu nastal sledovaný jev vždy se stejnou pravděpodobností. V praxi se však velmi často setkáváme s tím, že výsledek jednoho pokusu závisí na výsledcích předchozích pokusů. Budeme se tím nyní zabývat.

Obecný náhodný proces je množina náhodných veličin, která závisí na určitém počtu parametrů a ty jsou definovány na množině reálných čísel.

Uvedeme si nyní přesnou definici pojmu.

Definice 4.3. Nechť $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ je pravděpodobnostní prostor, nechť $T \subset \mathbb{R}$. Posloupnost reálných náhodných veličin $\{X_t; t \in T\}$ definovaných na $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ se nazývá náhodný proces.

Definice 4.4. Pro $T = \mathbb{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \ldots\}$ nebo $T \subset \mathbb{Z}$ máme proces s diskrétním časem, neboli časovou řadu.
Pro $T = [a; b]$, kde $-\infty < a < b < +\infty$ je $\{X_t; t \in T\}$ proces se spojitým časem.

Definice 4.5. Dvojice $(S; \mathcal{E})$, kde S je množina hodnot náhodných veličin X_t a $\mathcal{E}$ je σ-algebra podmnožin S, se nazývá stavový prostor procesu $\{X_t; t \in T\}$. Pokud náhodné veličiny X_t nabývají pouze diskrétních hodnot, říkáme, že jde o proces s diskrétními stavy, nabývají-li hodnot z nějakého intervalu, mluvíme o procesu se spojitými stavy.

Vždycky se budeme rozhodovat podle toho, jestli budeme pracovat s diskrétním časem nebo s časem spojitým.

Náhodné procesy jsou založeny na pravděpodobnosti, na náhodě, nebo jinak řečeno na nejistotě. To je jejich hlavní odlišnost od deterministických procesů, které nám dávají za shodných vstupních podmínek vždy stejný výsledek.

Obecný náhodný proces bude pro nás množina náhodných veličin, které zavisí na určitém počtu parametrů, které budeme brát z množiny reálných čísel.

V aplikacích (technických, ekonomických, ...) se pracuje především s náhodnými procesy, které závisí na jedné proměnné - na čase. Takové náhodné procesy budeme nazývat *stochastickými*.

Jestliže pracujeme s diskrétní množinou proměnných (diskrétní časová množina, např. sled měření s přesně určeným intervalem mezi jednotlivými měřeními), potom se stochastický proces nazývá **Markovský řetězec**, nebo Markovův řetězec [1]. Jestliže pracujeme se spojitou proměnnou (spojitým časem), potom mluvíme o Markovském procesu se spojitým časem.

4.2 Markovské řetězce

Jedná se o nejjednodušší typ z Markovských procesů. Předpokládáme, že máme diskrétní množinu hodnot (například diskrétní časovou množinu) a jí odpovídající diskrétní množinu výsledků - stavů.

Máme diskrétní čas i diskrétní stavy. Markovské řetězce (MŘ) používáme pro popis systémů, které se mohou nacházet v daný čas v jednom z konečného počtu stavů, respektive v jednom z nekonečného, ale spočetného počtu stavů.

Příklad 4.6. Připomeneme si:
Množina celých kladných čísel: $Z^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ je nekonečná, ale spočetná.
Pouze nekonečná množina se dá bijektivně zobrazit na svoji podmnožinu.

$$2 \cdot Z^+ = \{2, 4, 6...\}$$

$$\forall a \in Z = 2a \in 2Z$$

$$2Z^+ \subset Z^+$$

[1] A.A. Markov (1850 -1932), ruský a sovětský matematik. V roce 1907 zavedl základní pojmy náhodných procesů s diskrétním časem a konečným počtem stavů. V roce 1936 A.N. Kolmogorov zobecnil tyto pojmy pro spočetnou množinu stavů. V současné době je teorie Markovských procesů jednou z nejrozšířenějších částí aplikací teorie pravděpodobnosti.

Nekonečná množina je spočetná, jestliže množinu dokážeme očíslovat a tím spočítat.
Množina racionálních čísel je spočetná.
Množina reálných čísel je nespočetná.

Uvedeme si nyní přesnou definici:

Definice 4.7. Markovská vlastnost
Řekneme, že posloupnost náhodných pokusů, respektive posloupnost diskrétních náhodných proměnných

$$\{X_n,\ n = 0, 1, 2, \dots\}, \tag{4.1}$$

které nabývají pouze hodnot z množiny celých nezáporných čísel, tvoří Markovský řetězec, jestliže pro každé $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ a pro každou posloupnost celých nezáporných čísel $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ platí

$$p\left(X_n = x_n / X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}\right) = p\left(X_n = x_n / X_{n-1} = x_{n-1}\right), \tag{4.2}$$

kde výraz $p(A/B)$ označuje podmíněnou pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B.

Jinak řečeno: Předpokládejme, že máme náhodný proces, který v čase t nabývá hodnot $s(t) = a$, kde a je celé nezáporné číslo. Potom platí

$$p\left(s(n) = j / s(n-1) = i, s(n-2) = k, \dots, s(1) = l, s(0) = m\right) =$$

$$= p\left(s(n) = i / s(n-1) = j\right).$$

Neboli pravděpodobnost, že v momentě n nastane jev j za předpokladu, že se v předešlých dobách (okamžicích měření) vyskytovaly různé jiné stavy je určena pouze stavem v době $n-1$. Mluvíme potom o podmíněné pravděpodobnosti přechodu ze stavu i do stavu j, ke kterému došlo v době od $n-1$ do n.

Pro pravděpodobnosti přechodu platí

$$0 \le p_{ij} \le 1, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \tag{4.3}$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} p_{ij} = 1, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \tag{4.4}$$

Pravděpodobnosti přechodu se obvykle udávají ve formě tzv. matice pravděpodobností přechodu:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{P}$ je čtvercová matice konečného nebo nekonečného stupně. Pro její prvky platí podle (4.3), že jsou nezáporné a podle (4.4) je řádkový součet vždy roven jedné. Každá matice s těmito vlastnostmi (všechny prvky jsou nezáporné a řádkový součet je vždy roven jedné) se nazývá stochastickou maticí. Pokud je navíc i každý sloupcový součet roven jedné, potom mluvíme o dvojnásobně stochastické matici.

Věta 4.8. *Libovolná mocnina stochastické matice je opět stochastickou maticí.*

Součin dvou stochastických matic je opět stochastickou maticí.

Důkaz. Mějme dvě stochastické matice téhož řádu n.

$$A = (a_{ij}), \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1, \forall i, \quad 0 \le a_{ij} \le 1, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$B = (b_{ij}), \quad \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 1, \forall i, \quad 0 \le b_{ij} \le 1, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Potom

$$A \cdot B = C = (c_{ij}), \text{ kde } C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Tím máme dokázané druhé tvrzení věty. První tvrzení se dokazuje analogicky. □

Chování celého systému je tedy určeno:

1. Vektorem absolutních pravděpodobností v počáteční moment

$$\bar{\mathbf{p}}(n) = (p_1(n), p_2(n), \ldots, p_N(n)), \qquad n = 1, 2, \ldots, N,$$

   kde $p_i(n)$ je pravděpodobnost, že v momentě n je systém ve stavu i.

2. Maticí pravděpodobnosti přechodu

$$\mathbb{P} = (p_{ij}(n)),$$

   kde $p_{ij}(n)$ je podmíněná pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j mezi okamžiky $n-1$ a n, neboli $p(s(n) = j/s(n-1) = i)$.

Protože jednotlivé stavy tvoří úplný systém jevů, bude i pro počáteční vektor platit

$$0 \le p_i(n) \le 1, \quad \sum_{i} p_i(n) = 1$$

Definice 4.9. V případe kdy pravděpodobnosti $p_{ij}(n)$ nebudou přímo záviset na hodnotě n, tj. nezávisí na okamžiku, kdy k přechodu došlo, potom mluvíme o **homogenním Markovském řetezci,** tj. $p_{ij}(n) = p_{ij}$.

Definice 4.10. Jestliže $p_{ij}(n)$ závisí na hodnotě n, pak mluvíme o **nehomogenním Markovském řetezci** .

Neboli u homogeního Markovského řetezce je matice pravděpodobností přechodů $\mathbb{P} = (p_{ij}(n)) = (p_{ij})$ konstantní maticí, která nezavisí na čase, zatímco u nehomogenního Markovského řetězce je matice pravděpodobností přechodů $\mathbb{P} = (p_{ij}(n))$ funkcí času.

Nechť ν je libovolné celé nezáporné číslo. Potom pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j za $n(n = 0, 1, 2, \dots)$ kroků označíme

$$p_{ij}^{(n)} = P\{s_{\nu+n} = j/s_n = i\}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

přitom položíme

$$p_{ij}^{(1)} = p_{ij}.$$

Věta 4.11. *Nechť n, k jsou libovolná přirozená čísla a i, j jsou libovolná nezáporná čísla. Potom pro pravděpodobnosti přechodu platí vztahy*

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{i\nu}^{(n)} \cdot p_{\nu j}. \tag{4.5}$$

$$p_{ij}^{(n+k)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{i\nu}^{(n)} \cdot p_{\nu j}^{(k)}. \tag{4.6}$$

Vztahy (4.5) a (4.5) se nazývají **Chapman-Kolmogorovy rovnice**

Věta 4.12. *Nechť $n \geq 2$ je libovolné přirozené číslo a nechť i, j jsou libovolná celá nezáporná čísla. Potom pro matici pravděpodobností přechodu platí*

$$\mathbb{P}^n = \{p_{ij}^{(n)}\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, \tag{4.7}$$

kde $\mathbb{P}^n$ je n-tá mocnina matice pravděpodobností přechodu $\mathbb{P}$ pro jeden krok.

4.3 Homogenní Markovské řetězce

Mějme homogenní Markovský řetězec s maticí pravděpodobností přechodů $\mathbb{P} = (p_{ij})$. Potom platí:

Věta 4.13. *Pravděpodobnosti p_{ij}, které vytvářejí matici pravděpodobnosti přechodů $\mathbb{P}$, musí splňovat následující podmínky.*

1. $p_{ij} \geq 0, \forall i, j \in \{0, 1, 2 \dots N\}$;
2. $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} = 1, \forall i, j \in \{0, 1, 2 \dots N\}$, *tj. každý řádek tvoří úplnou množinu jevů.*

Nyní můžeme MŘ popsat na základě znalosti vektoru $\bar{\mathbf{p}}(n)$ a matice $\mathbb{P} = (p_{ij})$ (matice přechodu) pomocí vztahu

$$\bar{\mathbf{p}}(n+1) = \bar{\mathbf{p}}(n) \cdot \mathbb{P}.$$

Postupným dosazováním můžeme dojít k výrazu

$$\bar{\mathbf{p}}(n+1) = \bar{\mathbf{p}}(0) \cdot \mathbb{P}^{n+1}, \tag{4.8}$$

kde $\bar{\mathbf{p}}(0)$ – je vektor určující počáteční stav, $\mathbb{P}$- je čtvercová matice řádu N. Jinými slovy: jestliže známe pravděpodobnosti výskytu jednotlivých stavů v počátku Markovského procesu popsaného maticí $\mathbb{P}$, potom můžeme pomocí MŘ popsat pravděpodobnosti výskytu jednotlivých stavů v každém dalším momentě.

Důkaz. vztahu 4.8:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{p}}(1) &= \bar{\mathbf{p}}(0) \cdot \mathbb{P}, \\ \bar{\mathbf{p}}(2) = \bar{\mathbf{p}}(1) \cdot \mathbb{P} = (\bar{\mathbf{p}}(0) \cdot \mathbb{P}) \cdot \mathbb{P} &= \bar{\mathbf{p}}(0) \cdot \mathbb{P}^2, \\ \bar{\mathbf{p}}(3) = \bar{\mathbf{p}}(2) \cdot \mathbb{P} = (\bar{\mathbf{p}}(0) \cdot \mathbb{P}^2) \cdot \mathbb{P} &= \bar{\mathbf{p}}(0) \cdot \mathbb{P}^3, \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Použitím matematické indukce dostaneme tvrzení. □

Poznámka 4.14. Připomínám, že násobení matic není komutativní, tj. obecně pro libovolné dvě matice A, B

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Takže vždy záleží na pořadí násobení.

Poznámka 4.15. Připomínám, že obecně nemůžeme vynásobit libovolné dvě matice. Jestliže máme matici $A = (a_{ij})$, kde $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, tj. matice A má m řádků a n sloupců, a matici $B = (b_{kl})$, kde $k = 1, \ldots, p$, $l = 1, \ldots, q$, takže máme dvě matice typů (m, n) a (p, q), potom je definován součin $A \cdot B$ (v uvedeném pořadí) pouze tehdy, když $n = p$. Počet sloupců první matice se musí rovnat počtu řádků matice druhé. Výsledná matice je potom typu (m, q).

Příklad 4.16. Mějme MŘ se stavy „1“ a „2“. Nechť jsme v době „0“ ve stavu „1“. Pravděpodobnost tohoto jevu označíme $p_1(0)$. Jestliže budeme v době „0“ ve stavu „2“, potom označíme pravděpodobnost tohoto jevu $p_2(0)$.

V dalším momentu „1“ se můžeme ocitnout ve stavu „1“ dvojím způsobem: buď setrváním ve stavu „1“ a nebo přechodem do stavu „1“ ze stavu „2“. Potom

$$p_1(1) = p_1(0) \cdot p_{11} + p_2(0) \cdot p_{21} = \sum_i p_i(0) \cdot p_{i1},$$

kde p_{11}, p_{21} jsou prvky matice $\mathbb{P}$ (jde o první sloupec) a $p_1(0), p_2(0)$ jsou složky vektoru absolutních pravděpodobnoistí $\bar{\mathbf{p}}(0)$ v době „0“.

Jestliže v momentě „0“ může nastat více možností, bude mít vektor absolutních pravděpodobností více členů.

Pomocí vektoru absolutních pravděpodobností $\bar{\mathbf{p}}$ a matice $\mathbb{P}$ můžeme určit rozdělení pravděpodobností v libovolný moment pro každý z možných N stavů. Jednotlivé pravděpodobnosti $p_i(k), i = 1, 2, \ldots, N, k = 1, 2 \ldots$ počítáme pomocí vztahů:

$$\begin{aligned}
p_1(1) &= p_1(0)p_{11} + p_2(0)p_{21} + \cdots + p_N(0)p_{N1},\\
p_2(1) &= p_1(0)p_{12} + p_2(0)p_{22} + \cdots + p_N(0)p_{N2},\\
\ldots & \quad \ldots\\
p_N(1) &= p_1(0)p_{1N} + p_2(0)p_{2N} + \cdots + p_N(0)p_{NN}.
\end{aligned}$$

Nebo při maticovém zápisu

$$\bar{\mathbf{p}}(1) = \bar{\mathbf{p}}(0)\mathbb{P}.$$

Analogicky platí

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{p}}(2) = \bar{\mathbf{p}}(1)\mathbb{P} = (\bar{\mathbf{p}}(0)\mathbb{P}) \cdot \mathbb{P} = \bar{\mathbf{p}}(0)\mathbb{P}^2,\\
\bar{\mathbf{p}}(3) = \bar{\mathbf{p}}(2)\mathbb{P} = \bar{\mathbf{p}}(0)\mathbb{P}^3,\\
\ldots\\
\bar{\mathbf{p}}(n) = \bar{\mathbf{p}}(0)\mathbb{P}^n.
\end{aligned}$$

Chování homogenních MŘ po konečném počtu časových intervalů je tedy popsáno pomocí vektoru výchozích absolutních pravděpodobností a mocnin matice přechodu.

Ptejme se: Jaká je pravděpodobnost přechodu ze stavu „i“ do stavu „j“ v průběhu „n“ časových intervalů?

Tyto pravděpodobnosti jsou dány prvky matice přechodu $\mathbb{P}^n$, označíme je $p_{ij}^{(n)}$ jde o prvky matice $\mathbb{P}^n$, ale nezískáme je pouhým umocněním prvků p_{ij}, ale jako prvek mocniny matice.

Příklad 4.17.

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\\
A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\\
A^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\\
\ldots & \quad \ldots\\
A^n &= \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dostali jsme $\forall n$

$$\begin{aligned}
p_{11}^{(n)} &= 1,\\
p_{21}^{(n)} &= 0,\\
p_{22}^{(n)} &= 1,
\end{aligned}$$

ale $p_{12}^{(n)} = n$.

Přitom na hlavní diagonále matice $\mathbb{P}^n$ dostáváme pravděpodobnosti $p_{ii}^{(n)}$ návratu do téhož stavu po „n“ časových intervalech.

4.4 Klasifikace stavů

Definice 4.18. Jestliže je prvek na hlavní diagonále $p_{ii}^{(n)}$ různý od nuly pro všechna „n“, tak potom hovoříme o **rekurentních stavech** (je možné se vrátit na počátek).

V opačných případech mluvíme o **tranzientních stavech**.

Definice 4.19. Rekurentní stavy mohou být takové, že návrat do výchozího stavu může nastat kdykoliv, potom mluvíme o **ergodických stavech**, nebo může nastat až po provedení konečného počtu kroků, potom mluvíme o **periodických stavech** a nebo až po provedení nekonečného (ale spočetného) počtu kroků (tj. až v limitě) pak mluvíme o stavech **rekurentních nulových.**

Definice 4.20. Hodnoty $p_{ij}^{(n)}$ nám dovolují rozlišit **dosažitelné a nedosažitelné stavy**, tzv. jestliže $p_{ij}^{(n)} > 0 \Rightarrow$ stav „j“ je dosažitelný ze stavu „i“ po provedení určitého počtu kroků po „n“ časových intervalech.

V opačném případe, tj. když $p_{ij}^{(n)} = 0$, jde o nedosažitelný stav.

Definice 4.21. Stavy vzájemně dosažitelné nazveme **souslednými**. Skupinu vzájemně sousledných stavů nazveme **uzavřenou třídou**.

Je-li v MŘ pouze jedna taková třída, potom nazýváme tento řetězec **nerozložitelný**. V opačném případě nazýváme tento řetězec **rozložitelný** .

Definice 4.22. Tvoří-li všechny stavy řetězce uzavřenou třídu a jestliže jsou navíc ergodické, potom mluvíme o **regulárním řetězci**.

Definice 4.23. Jestliže pro jeden nebo víc stavů platí $p_{ii}^{(n)} = 1$, nebo $p_{ii}^{(n)} \to 1$, tj. setrvání ve stavu „i“ je stav jistý a jestliže do těchto stavů existuje vstup, potom mluvíme o stavech **pohlcujících (absorpčních)**.

Ostatní stavy pak nutně musí být tranzientní, protože se postupně jejích pravděpodobnosti blíží k nule. MŘ, které obsahují tyto stavy se nazývaji **absorpčními**.

Poznámka 4.24. Blokové matice – jestliže matici rozdělíme několika vodorovnými a svislými čarami na podmatice, které nazveme bloky, potom máme blokovou matici.

Příklad 4.25. Mějme matici A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Potom můžeme psát $A = \begin{pmatrix} B & I \\ I & C \end{pmatrix}$,

kde $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Blokové matice můžeme použít pro klasifikaci MŘ.
Je-li MŘ rozložitelný potom pří vhodném přečíslování jednotlivých stavů můžeme v matici $\mathbb{P}$ vytvořit nulovou podmatici O.

A dostaneme:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{B} \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

kde A, B jsou čtvercové matice.

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathrm{Q} & \mathrm{O} \\ \mathrm{R} & \mathrm{S} \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

kde Q, S - jsou čtvercové matice, přičemž Q obsahuje rekurentní stavy a S obsahuje tranzientní stavy.

Jestliže je P rozložitelná na tvar:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathrm{O} & \mathrm{C} \\ \mathrm{D} & \mathrm{O} \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

kde C, D jsou čtvercové matice a O je nulové čtvercová matice, pak bude systém oscilovat mezi dvěma množinami stavů a příslušná matice $\mathbb{P}$ bude popisovat periodický řetězec.

Není-li matice $\mathbb{P}$ rozložitelná, jedná se o regulární řetězec, kde všechny stavy tvoří uzavřený celek, přičemž z každého stavu lze přejít do ostatních a naopak.

Příklad 4.26. Mějme MŘ, který má ceklkem čtyři stavy, přičemž ze stavu „1“ můžeme přejít pouze do stavu „3“ a naopak, a ze stavu „2“ můžeme přejít pouze do stavu „4“ a naopak. Matice pravděpodobnosti přechodů bude potom mít tvar

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix}.$$

Dostali jsme matici periodického řetězce.

Příklad 4.27. Mějme MŘ, který má celkem pět stavů, přičemž ze stavu „1“ můžeme přejít pouze do stavu „3“, ze stavu „2“ můžeme přejít pouze do stavu „4“, ze stavu „3“ můžeme přejít pouze do stavu „5“, ze stavu „4“ můžeme přejít pouze do stavu „1“ a ze stavu „5“ můžeme přejít pouze do stavu „2“. Matice pravděpodobnosti přechodů bude potom mít tvar

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nulové podmatice nejsou čtvercové.
Pokud poslední dva řádky přehodíme na první místa, dostaneme jednotkovou matici. To ale znamená, že všechny stavy jsou sousledné a tvoří jen jednu uzavřenou třídu. Jedná se tedy o regulární řetězec.

4.5 Regulární Markovské řetězce

Není-li matice $\mathbb{P}$ rozložitelná, potom se podle definice 4.22 jedná o regulární řetězec, kde všechny stavy tvoří uzavřený celek, přičemž z každého stavu lze přejít do ostatních a naopak.

Definice 4.28. Matici pravděpodobnosti přechodu $\mathbb{P}$ nazveme regulární, je-li „$\mathbb{P}^n$“ pro určité „n“ bez nulových prvků.

Příklad 4.29. Mějme celočíselnou matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

která obsahuje i nulové prvky. Ale její mocnina

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

už žádné nulové prvky neobsahuje.

Příklad 4.30. Mějme stochastickou matici

$$B = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 3 & 0 & 7 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix},$$

která obsahuje i nulové prvky. Potom

$$B^2 = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 46 & 40 & 14 \\ 35 & 41 & 24 \\ 15 & 10 & 75 \end{pmatrix},$$

už žádné nulové prvky neobsahuje.

Důsledek 4.31. *Je-li $\mathbb{P}$ regulární, potom není rozložitelná na žádný z typů (4.9), (4.10), (4.11).*

Poznámka 4.32. POZOR! Neplést si pojmy regulární matice, tj matice jejíž determinant je nenulový, s regulární maticí pravděpodobnosti přechodu, která je maticí regulárního Markovského řetezce.

Příklad 4.33. Mějme dánu matici

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Protože $\det C = 0$ (matice má dva stejné řádky), jedná se o singulární matici. Současně ale je matice C^2 bez nulových prvků (Ověřte!), takže se jedná o regulární matici pravděpodobností přechodu.

Věta 4.34. *Je-li $\mathbb{P}$ regulární potom matice „$\mathbb{P}^n$“ konverguje k limitní matici A, kde A je matice tvořena prvky $a_1, a_2, ...a_N$, kde všechny řádky jsou stejné.*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_N \\ a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{pmatrix}$$

Všechny řádky limitní matice A jsou stejné a tvoří tzv. limitní vektor $\vec{a} = (a_1, a_2...a_N)$

Věta 4.35. *Pro regulární matici $\mathbb{P}$ platí:*

1. *Je-li A limitní matice pro $\mathbb{P}$ a $\vec{a}$ je limitní vektor platí pro libovolný počáteční vektor $\vec{p}$ potom*
$$\lim_{n\to\infty} \vec{p}\cdot\mathbb{P}^n = \vec{a}.$$
2. *Limitní vektor je jediným vektorem pro který platí:*
$$\vec{a}\cdot\mathbb{P} = \vec{a}.$$
3. $$\mathbb{P}\cdot A = A = A\cdot\mathbb{P}.$$
Neboli limitní matice komutuje s příslušnou stochastickou maticí.

4.6 Hledání limitního vektoru $\vec{a}$

Předpokládáme že se u našeho regulárního řetězce mohou všechny stavy stále vyskytovat, tj. platí:

$$0 < p_{ij} < 1, \forall i, j = 1, 2, \ldots, N$$

Potom, jestliže existuje limitní rozdělení, tak platí, že

$$\lim_{n\to\infty} \vec{p}(n) = \lim_{n\to\infty} \vec{p}(n-1) = \vec{a}.$$

Přitom složky vektoru $\vec{a}$ můžeme chápat jako podíly z celkové doby, kdy systém setrvává v jednotlivých stavech $1, 2 ... N$ během dostatečně dlouhé doby.

Jestliže vyjdeme z podmínky $\vec{a}\cdot\mathbb{P} = \vec{a}$, dostaneme soustavu lineárních algebraických rovnic, které budou lineárně závislé. Řešení bude záviset na parametru a nebude jednoznačně určené. Doplníme-li systém o podmínku $\sum\limits_{i=1}^{N} a_i = 1$ potom dostaneme právě jedno řešení.

Příklad 4.36. Máme výrobní linku, která se může nacházet pouze ve dvou stavech.

1. linka je v provozu
2. linka je v opravě

Sledováním provozu bylo zjištěno, že pokud je linka v jednom okamžiku v provozu (stav 1), potom v dalším okamžiku, může být se stejnou pravděpodobností buď v provozu a nebo v opravě. Pokud se linka nacházela v opravě (stav 2), potom v dalším období byla s pravděpodobností 75% opět v opravě a s pravděpodobností 25% byla v provozu.

Řešení. Máme příklad se dvěma stavy, přičemž uvedené relativní četnosti můžeme pokládat za pravděpodobnosti přechodu mezi jednotlivými stavy. Matice podmíněných pravděpodobností má tedy tvar

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}.$$

Určíme nyní vektor absolutních pravděpodobností. Předpokládáme, že na začátku je linka v provozu, potom máme $\vec{p}(0) = (1; 0)$

Pravděpodobnost v bodě 1 získáme:

$$\vec{p}(1) = \vec{p}(0) \cdot \mathbb{P} = (1; 0) \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} = (0,5; 0,5).$$

To znamená, že po uplynutí prvního intervalu bude linka se stejnou pravděpodobností v provozu jako v opravě. Pokračujeme dále a dostaneme:

$$\vec{p}(2) = \vec{p}(1) \cdot \mathbb{P} = (0,5; 0,5) \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} = (0,375; 0,625).$$

Dostali jsme, že po uplynutí druhého časového intervalu bude linka s pravděpodobností 0.375 pracovat a s pravděpodobností $0,625$ bude v opravě. Odtud už se dají dělat závěry například o kvalitě linky, ale to už není náplní matematiky.

Výsledky si zapíšeme do tabulky:

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Pracuje $p_1(n)$	1	0,5	0,375	0,3438	0,3359	0,334
V opravě $p_2(n)$	0	0,5	0,625	0,6562	0,6641	0,666

Tab. 4.1: Výsledky příkladu 4.36 pro $\vec{p}(0) = (1; 0)$

Nyní naopak předpokládejme, že v počátku je linka v opravě potom $\vec{p}(0) = (0; 1)$.

$$\vec{p}(1) = \vec{p}(0) \cdot \mathbb{P} = (0; 1) \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} = (0,25; 0,75),$$

Takže po uplynutí prvního časového intervalu linka, která byla v opravě, bude dále v opravě s pravděpodobností 0.75 a pouze s pravděpodobností $0,25$ bude pracovat.

$$\vec{p}(2) = \vec{p}(1) \cdot \mathbb{P} = (0,31250; 0,6875).$$

Výsledky si opět zapíšeme do tabulky:

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Pracuje $p_1(n)$	0	0,25	0,3125	0,3281	0,332	0,333
V opravě $p_2(n)$	1	0,75	0,6875	0,6719	0,668	0,667

Tab. 4.2: Výsledky příkladu 4.36 pro $\vec{p}(0) = (0; 1)$

Všimněte si, že přes rozdílnost počátečních vektorů už po pátem kroku máme v obou tabulkách skoro stejné hodnoty.

Jestliže existují pouze uvedené dva stavy potom si můžeme určit limitní vektor $\vec{a}$.

$$\vec{a} \cdot \mathbb{P} = \vec{a},$$

kde $\vec{a} = (\alpha; \beta)$ a $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$. Potom

$$(\alpha; \beta) \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} = (\alpha; \beta)$$

a současně
$$\alpha + \beta = 1.$$
Dostaneme tak soustavu
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\beta &= \alpha, \\ \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{4}\beta &= \beta, \\ \alpha + \beta &= 1. \end{aligned}$$
Po jejím vyřešení dostaneme:
$$\alpha = \frac{1}{3}, \qquad \beta = \frac{2}{3}.$$
V dostatečně dlouhém období bude linka $\frac{1}{3}$ doby pracovat a $\frac{2}{3}$ doby bude v opravě.

Opět připomínám, že už pátá aproximace byla velmi blízko limitnímu řešení. □

Příklad 4.37. Na sídlišti máme dva obchody s potravinami. Pro jednoduchost budeme předpokládat že během jednoho týdne zákazník nakupuje buď pouze v obchodě A nebo pouze v obchodě B. Průzkumem trhu, který se týkal tisíce zákazníků, bylo zjištěno že 90% nakupujících v A tam bude nakupovat i v příštím týdnu a jen 10% přejde následující týden ke konkurenci (tj. bude nakupovat v obchodě B). Dále 80% zákazníků z obchodu B tam bude nakupovat dále a 20% přejde k obchodu A.

Je třeba popsat danou situaci a odhadnou možný vývoj.

Řešení. K analýze použijeme MŘ. Opět máme situaci, ve kterí existují pouze dva stavy:

1. nakupuje v A,
2. nakupuje v B.

Shromážděné údaje z průzkumu trhu obsahují relativní četnosti, které můžeme pokládat za aproximece pravděpodobností jednotlivých přechodů. Sestavíme si z nich matici pravděpodobností:
$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$
Prvky na hlavní diagonále – pravděpodobnost věrnosti obchodu.
Předpokládejme, že zákazník nakupuje v obchodě A, potom
$$\vec{p}(0) = (1; 0).$$
Pro následující týden dostaneme:
$$\vec{p}(1) = \vec{p}(0) \cdot \mathbb{P} = (1; 0) \cdot \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = (0,9; 0,1).$$

Pro další týden budeme mít:

$$\vec{p}(2) = \vec{p}(1) \cdot \mathbb{P} = (0,9; 0,1) \cdot \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = (0,83; 0,17).$$

Získali jsme, že po dvou týdnech s pravděpodobností 0.83 zákazník, který nakupoval v A, bude dále nakupovat v A, a s pravděpodobností 0.17 přejde ke konkurenci a bude nakupovat v B. Stejným způsobem můžeme pokračovat dále. Výsledky si zapíšeme do tabulky:

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$p_1(n)$	1	0,9	0,83	0,781	0,747	0,723	0,706
$p_2(n)$	0	0,1	0,17	0,219	0,253	0,277	0,294

Tab. 4.3: Výsledky příklady 4.37, zákazník nakupoval v A

Neboli ze 1000 zákazníků, kteří v počátku nakupovali v A jich po šesti týdnech zůstane 706 a zbytek přejde ke konkurenci. Současně ale i někteří zákaznící v B zase přejdou k v A.

Předpokládejme nyní, že zákazník v počátku nakupuje v obchodě B, potom

$$\vec{p}(0) = (0; 1).$$

Určíme si pravděpodobnosti pro jednotlivé týdny a zapíšeme je do tabulky:

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$p_1(n)$	0	0,2	0,34	0,438	0,507	0,555	0,589
$p_2(n)$	1	0,8	0,66	0,562	0,493	0,445	0,441

Tab. 4.4: Výsledky příklady 4.37, zákazník nakupoval v B

Neboli z 1000 zákazníků nakupujících v počátku v B jich po šesti týdnech zůstane 411 a 589 jich přešlo ke konkurenci.

Pokud předpokládáme že „n“ je dostatečně velké, tj. máme k dispozici celkem n týdnů, potom můžeme určit limitní vektor $\vec{a}$.

$$\vec{a} \cdot \mathbb{P} = \vec{a},$$

kde $\vec{a} = (\alpha; \beta)$, a současně platí, že $\alpha + \beta = 1$ a $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$. Po úpravě máme soustavu rovnic

$$0.9\alpha + 0.2\beta = \alpha,$$

$$0.1\alpha + 0.8\beta = \beta,$$
$$\alpha + \beta = 1,$$

Která má jediné řešení $\alpha = \frac{2}{3}, \quad \beta = \frac{1}{3}$.

Limitní pravděpodobnosti nám ukazují podíl obchodů na trhu. Obchod A má zhruba $\frac{2}{3}$ zákazníků a obchod B má zhruba $\frac{1}{3}$. □

Příklad 4.38. Vyjdeme ze zadání předchozího příkladu. Nechť na základě průzkumu trhu zahájil obchod B reklamní kampaň. V jeho důsledku došlo k přesunu zájmu o jednotlivé obchody, (neboli došlo ke změně matice $\mathbb{P}$), která má nyní tvar

$$\mathbb{P}' = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Všimněte si, že se změnil pouze první řádek matice $\mathbb{P}$. Rozhodněte, zda byla kampaň úspěšná.

Řešení. Určíme si opět vektor limitních pravděpodobností a dostaneme: $\vec{a}' \cdot \mathbb{P}' = \vec{a}'$, kde $\vec{a}' = (\alpha'; \beta')$ a dostaneme řešení

$$\vec{a}' = (0,57; 0,43).$$

Slovně vyjádřeno: došlo k nárůstu zákazníků o 10% u obchodu B, takže reklamní kampaň se vyplatila. □

Příklad 4.39. Ověřte, že $\mathbb{P} \cdot A = A \cdot \mathbb{P}$, pro $A, \mathbb{P}$ z příkladu (4.37).

Řešení.

$$\mathbb{P} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{10} & \frac{8}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{18+2}{30} & \frac{9+1}{30} \\ \frac{4+16}{30} & \frac{2+8}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{30} & \frac{10}{30} \\ \frac{20}{30} & \frac{10}{30} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$
$$A \cdot \mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{8}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{18+2}{30} & \frac{2+8}{30} \\ \frac{18+2}{30} & \frac{2+8}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{30} & \frac{10}{30} \\ \frac{20}{30} & \frac{10}{30} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

V obou případech jsme dostali stejný výsledek.

POZOR! Zde se jedná jen o ověření pro konkrétní matice A, $\mathbb{P}$. Nejde o důkaz. □

4.7 Fundamentální matice regulárního MŘ

U regulárního MŘ nás bude zajímat střední doba prvého přechodu do určitého stavu a rozptyl dob této první doby přechodu.

U regulárního MŘ je střední doba setrvání v systému neomezená, neboť každý stav se může opakovat libovolně často a proto nás tato charakteristika nezajímá.

Definice 4.40. Fundamentální matice $\mathbb{Z}$ regulárního MŘ s maticí pravděpodobnosti přechodu $\mathbb{P}$ a limitní maticí A má tvar:

$$\mathbb{Z} = (I - (\mathbb{P} - A))^{-1} = I + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbb{P}^n - A),$$

kde I je jednotková matice, $\mathbb{P}$ je matice pravděpodobností a A je limitní matice daného řetězce.

Protože

$$\mathbb{P}^n \to A,$$

proto

$$\mathbb{P}^n - A \to \mathcal{O},$$

kde $\mathcal{O}$ je nulová matice, a proto rozvinutím do řady dostáváme

$$(I - (\mathbb{P} - A))^{-1} = I(I - (\mathbb{P} - A))^{-1} = I + (\mathbb{P} - A) + (\mathbb{P} - A)^2 + \dots$$

Dále platí

$$(\mathbb{P} - A)^n = \mathbb{P}^n - A$$

$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n = A \Rightarrow \mathbb{P}^n - A \to O$, kde O je nulová matice

$$(\mathbb{P} - A)^n = \mathbb{P}^n - \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbb{P}^{n-1} \cdot A + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbb{P}^{n-2} \cdot A^2 + ... + (-1)^n \cdot A^n$$

Volme $n = 2$ a dostaneme

$$(\mathbb{P} - A)^2 = (\mathbb{P} - A) \cdot (\mathbb{P} - A) = \mathbb{P}^2 - \mathbb{P}A - A\mathbb{P} + A^2 = P^2 - A \quad ,$$

přičemž jsme využili, že $\mathbb{P} \cdot A = A \cdot \mathbb{P}$. Matematickou indukcí potom dostaneme, že platí

$$(\mathbb{P} - A)^n = \mathbb{P}^n - A$$

Věta 4.41. *Pro fundamentální matici $\mathbb{Z}$ platí:*

1. $\mathbb{P} \cdot \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cdot \mathbb{P}$

2. $\mathbb{Z} \cdot \xi = \xi$, *kde* $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$

3. $a \cdot \mathbb{Z} = a$

4. $I - \mathbb{Z} = A - \mathbb{P} \cdot \mathbb{Z}$

Důkaz: Dokážeme poslední tvrzení.

$$I - \mathbb{Z} = A - \mathbb{P} \cdot \mathbb{Z}.$$

Vezmeme si vyjádření $\mathbb{Z}$ a vynásobíme jej zleva výrazem $(I - \mathbb{P})$,

$$\mathbb{Z} = I + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbb{P}^n - A),$$

dostaneme

$$\begin{gathered} (I - \mathbb{P}) \cdot \mathbb{Z} \\ = (I - \mathbb{P}) \cdot (I + (\mathbb{P} - A) + (\mathbb{P}^2 - A) + .. + (\mathbb{P}^n - A) + \dots), \\ = I + (\mathbb{P} - A) + (\mathbb{P}^2 - A) + \dots + (\mathbb{P}^n - A) + \dots \quad | \cdot (-\mathbb{P}) - \mathbb{P}(\mathbb{P} - A) - \mathbb{P}(\mathbb{P}^2 - A) - \dots \\ = I - \mathbb{P} + (\mathbb{P} - A) + (\mathbb{P}^2 - A) + \dots - (\mathbb{P}^2 - \mathbb{P} \cdot A) - (\mathbb{P}^3 - \mathbb{P} \cdot A) - \dots \dots \\ = I - \mathbb{P} + (\mathbb{P} - A) + (\mathbb{P}^2 - P \cdot A) + \dots - (\mathbb{P}^2 - A) - (P^3 - A) - \dots \\ = I - \mathbb{P} + (\mathbb{P} - A) = I - A. \end{gathered}$$

Neboli jsme dostali

$$(I - \mathbb{P}) \cdot \mathbb{Z} = \mathbb{Z} - \mathbb{P}\mathbb{Z} = I - A$$

a po úpravě máme

$$I - \mathbb{Z} = A - \mathbb{P} \cdot \mathbb{Z}.$$

□

4.8 Střední doba prvého přechodu

Pokud máme regulární MŘ potom se v něm mohou vyskytovat všechny stavy v průběhu sledované doby. Proto nabývají na významu charakteristiky, které nám udávají střední dobu **prvého přechodu** do určitého stavu.

Označme střední dobu prvého přechodu ze stavu „S_i" do stavu „S_k" jako „m_{ik}". V případě, že $i = k$ (jde vlastně o střední době prvého návratu) máme

$$m_{ii} = 1 \cdot p_{ii} + \sum_{k \neq i} p_{ik} \cdot m_{ki}.$$

Setrvá-li systém ve stavu „S_i“ s pravděpodobností „p_{ii}“ (tj. jeden interval systém setrvá v příslušném stavu „S_i“, což může nastat s pravděpodobností „p_{ii}“), proto první člen násobíme jedničkou.

Přejde-li systém s pravděpodobností „p_{ik}“ do stavu „S_k“, trvá v průměru návrat, tzv. první přechod ze stavu „S_k“ do „S_i“ m_{ki}.

V ostatních případech, tj. pro $j \neq i$, můžeme střední dobu prvého přechodu z „S_i“ do „S_j“ vyjádřit rovnicí

$$m_{ij} = 1 \cdot p_{ij} + \sum_{k \neq j} (p_{ik} \cdot m_{kj} + 1 \cdot p_{ik}) \tag{4.12}$$

Přechod od „S_i“ do „S_j“ může s pravděpodobností „p_{ij}“ proběhnout hned v prvém kroku (tj. během prvního časového intervalu) a nebo všemi možnými kombinacemi přechodu ze stavu „S_i“ do „S_j“ a to opět během různých časových intervalů (během rúzných kroků, přičemž opět může se jednat jen o jediný krok, ale nemusí).

Úpravou rovnice (4.12) dostaneme

$$m_{ij} = 1 \cdot p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} \cdot m_{kj} + 1 \cdot \sum_{k \neq j} p_{ik} = \sum_{k \neq j} p_{ik} \cdot m_{kj} + 1 =$$

$$= \sum_{k} p_{ik} \cdot m_{kj} - p_{ij} \cdot m_{jj} + 1.$$

Přejdeme k maticovému vyjádření a máme vztah

$$M = \mathbb{P}(M - \hat{M}) + E,$$

kde $M = (m_{ij})$,

$\mathbb{P}$ - naše matice pravděpodobnostního přechodu,

$\hat{M}$ - diagonální matice, která má na diagonále prvky matice M,

E - matice ze samých jednotek.

Pokračujeme dále v úpravách a dostaneme

$$M = (I - \mathbb{Z} + E \cdot \hat{\mathbb{Z}}) \cdot \hat{M}, \tag{4.13}$$

kde $\mathbb{Z}$ - příslušná fundamentální matice,

$\hat{\mathbb{Z}}$ - je matice obsahující pouze diagonální prvky fundamentální matice $\mathbb{Z}$.

Dále platí $m_{ii} = \dfrac{1}{a_i}$, kde a_i je i-ta složka limitního vektoru $\vec{a}$.

Takže ve vztahu (4.13) známe všechny prvky na pravé straně a to nám umožňuje určit matici M.

Příklad 4.42. Analýzou situace na trhu práce bylo zjištěno že pracovník může buď pracovat ve svém oboru, nebo pracovat v jiné profesi (mimo svůj obor) a nebo být nezaměstnaný.

Ve své profesi pracovalo i následující měsíc 80% pracovníků, kteří v ní pracovali na začátku. 10% pracovníků přešlo k jiné profesi a 10% se stalo nezaměstnanými.

Z pracovníků zaměstnaných mimo svůj obor se během příštího měsíce 10% vrátí ke své původní profesi, 70% zůstane pracovat mimo svůj obor a 20% pracovníků přijde o práci.

Z nezaměstnaných našlo svůj obor a práci v něm 5% pracovníků, 30% našlo práci mimo svůj obor a 65% bylo dále nezaměstnanými. Určete matici M středních dob prvého přechodu.

Řešení. Máme celkem tři stavy

1. dělá ve svém oboru
2. děla v jiném oboru
3. je nezaměstnaný

Matice pravděpodobnosti přechodu

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,05 & 0,3 & 0,65 \end{pmatrix}.$$

Určíme si limitní vektor $\vec{a}$:

$\vec{a} \cdot \mathbb{P} = \vec{a}$, kde $\vec{a} = (\alpha; \beta; \gamma)$ a současně musí platit podmínka $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Dostaneme tak soustavu

$$\begin{aligned} 0,8\alpha + 0,1\beta + 0,05\gamma &= \alpha, \\ 0,1\alpha + 0,7\beta + 0,3\gamma &= \beta, \\ 0,1\alpha + 0,2\beta + 0,65\gamma &= \gamma, \\ \alpha + \beta + \gamma &= 1 \end{aligned}$$

která má řešení

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,28125, \\ \beta &= 0,40625, \\ \gamma &= 0,31250. \end{aligned}$$

Jestliže máme limitní vektor $\vec{a}$, potom známe i matici A

$$A = \begin{pmatrix} 0,28125 & 0,40625 & 0,31250 \\ 0,28125 & 0,40625 & 0,31250 \\ 0,28125 & 0,40625 & 0,31250 \end{pmatrix}$$

Můžeme si nyní určit fundamentální matice $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = (I - (\mathbb{P} - A))^{-1} = \begin{pmatrix} 2,8496 & -1,1270 & -0,7227 \\ -0,5879 & 1,6855 & -0,09766 \\ -0,9004 & 0,1230 & 1,7773 \end{pmatrix}$$

Všimněte si, že ne všechny prvky matice $\mathbb{Z}$ musí být kladné. Matice $\mathbb{Z}$ nám totiž svým způsobem určuje odchylku od limitní matice.

Matice M středních dob prvého přechodu

$$M = (I - \mathbb{Z} + E \cdot \hat{\mathbb{Z}}) \cdot \hat{M}$$

kde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{\mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} 2,8496 & 0 & 0 \\ 0 & 1,6855 & 0 \\ 0 & 0 & 1,7773 \end{pmatrix}$,

$\hat{M} = \begin{pmatrix} 3,5556 & 0 & 0 \\ 0 & 2,4615 & 0 \\ 0 & 0 & 3,2 \end{pmatrix}$

Dosazení do vztahu vypočteme matice M

$$M = \begin{pmatrix} 3,556 & 6,9229 & 7,999 \\ 12,222 & 2,4614 & 5,999 \\ 13,333 & 3,2461 & 3,19999 \end{pmatrix}$$

Jednotkou času pro nás byl měsíc. Proto z matice M plyne, že pracovník, který na počátku pracoval ve svém oboru se v průměru za necelých 8 měsíců (přesněji za 7,999 měsíce) stane nezaměstnaným.

Jestliže je někdo nezaměstnaný tak za 13,33 měsíce sežene práci ve svém oboru. □

Příklad 4.43. Předpokládáme že týdenní poptávka po výrobku v je dána rozložením

velikost poptávky	0	1	2	3	4
pravděpodobnost výskytu poptávky	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1

Interval pořízení zásob je jeden týden. Náklady na objednávku činí 100 tolarů, skladování jednoho výrobku po dobu jednoho týdne nás přijde na 40 tolarů, prodejem jednoho výrobku dosáhneme zisku 200 tolarů. Jaký bude mít zisk při strategii řízení zásob následujícího stavu:

stav na počátku týdne	0	1	2	3	4
velikost objednávky	3	3	0	0	0

Řešení. Musíme si určit náklady spojené se zásobovacím procesem, skladováním a prodejem. Sestavíme si matici pravděpodobností přechodu. Stavem bude vždy stav na počátku týdne, tj. velikost zásob na počátku týdne. Počáteční stav může být: 0,1,2,3,4.

Nejdříve si sestavíme matici P.

- Pokud byl v počátku 0, můžeme přejít pouze do stavu 3, protože si objednáme 3 výrobky, neboli

  $p_{03} = 1$; $p_{01} = p_{02} = p_{04} = p_{00} = 0$

- Pokud byl stav na počátku 1, kže objednáváme 3 výrobky a potom můžeme přejít do stavu 4, jestliže během týdne není žádny zájem o náš výrobek, což může nastat s pravděpodobností 0,2, proto bude $p_{14} = 0,2$, nebo můžeme ze stavu 1 přejít do stavu 3 s pravděpodobností 0,8 $p_{13} = 0,8$. Jestliže byla poptávka 1, 2, 3, 4 (přitom vyšší poptávky (tzv. 2, 3, 4) budou uspokojeny částečně). Proto je $p_{14} = 0.2, p_{13} = = 0.8, p_{10} = p_{11} + p_{12} = 0$.

- Jestliže na počátku byl stav 2, proto podle naší strategie (nic neobjednáváme) nemůžeme přejít do stavu 3,4, proto $p_{23} = p_{24} = 0$. Byla-li poptávka nulová, potom systém setrvá ve stavu 2, neboli $p_{22} = 0,2$. Dále $p_{21} = 0,2$ protože s pravděpodobností 0,2 prodáme jeden výrobek a systém přejde do stvu 1 a pravděpodobnost $p_{20} = 0,6$, což může nastat pokud by byla poptávka po 2,3,4 výrobcích.

- Obdobně postupujeme dále a dostaneme hledanou matici P:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Tato matice P splňuje podmínky regulárního MŘ, protože všechny stavy tvoří uzavřenou třídu a jsou ergodické (řetězec je nerozložitelný). Určíme limitní vektor $\vec{a}$ ze soustavy

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot P = \vec{a} \\ \sum a_i = 1 \end{cases}$$

Řešením dostaneme: $\vec{a} = (0,1729; 0,2061; 0,1345; 0,4350; 0,0515)$

Odtud plyne, že během dostatečně dlouhé doby budeme mít na počátku týdne nulové zásoby v 17,29% případů, jeden výrobek ve 20,61% atd.

Nyní si spočítáme zisk (pro danou strategii, tj zásoby se doplňují, pokud máme na počátku 0 výrobků a nebo 1 výrobek).

Takováto situace nastává v 37,9% případů (17,29% + 20,61%). Proto střední hodnota nákladů na objednávku bude $0,379 \cdot 100 = 37,9$ tolarů.

Je-li systém ve stavu 0, potom není žádný zisk (ani náklady na skladování).

Je-li systém ve stavu 1, potom s pravděpodobnosti $P_{13} = 0,8$ prodáme jeden kus a s pravděpodobností $P_{14} = 0,2$ neprodáme nic = výrobek zůstane na skladě.

Zisk $Z_1 = 0,8 \cdot 200 - 0,2 \cdot 40 = 160 - 8 = 152$ tolarů.

Obdobně i dále. Výsledky si zapíšeme do tabulky:

stav na počátku	0	1	2	3	4
zisk Z_i	0	152	256	264	246

Z limitního vektoru $\vec{a}$ víme jak často (v delším časovém období) může která situace nastat ,nebo jak často se s ní můžeme setkat.

$$Zisk = \sum_i a_i \cdot Z_i =$$

$$0,1729 + 0,2061 \cdot 152 + 0,1345 \cdot 256 + 0,4350 \cdot 264 + 0,0515 \cdot 246 = 193,2682.$$

Zisk je funkcí strategie řízení zásob. Pokud dojde ke změně strategie změní se většinou i hodnota zisku. □

4.9 Absorpční řetězce

Definice 4.44. *Absorpčním řetězcem* nazveme takový MŘ, který vedle tranzientních stavů obsahuje i stavy absorpční, tj. takové že pravděpodobnost setrvání v tomto stavu je 1.

Abychom vytvořili v matici pravděpodobnosti přechodu absorpčního řetězce kompaktní bloky, je většinou nutné vhodně přečíslovat jednotlivé stavy (= zaměníme pořadí řádků a sloupců). Potom dostaneme matici $\mathbb{P}$ ve tvaru:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} I & O \\ \mathbb{R} & \mathbb{Q} \end{pmatrix}.$$

Jestliže je N celkový počet stavů a počet tranzientních stavů je „S“ potom je I jednotková matice řádu $(N - S)$, $\mathbb{Q}$ je matice pravděpodobnosti přechodu mezi tranzientními stavy řádu „S“, O je nulová matice typu $(N - S; S)$,a $\mathbb{R}$ je matice pravděpodobnosti přechodu mezi tranzientními stavy a absorpčními stavy a je typu $(S; N - S)$.

4.10 Střední doba průchodů tranzientními stavy.

U absorpčních řetězců sledujeme charakteristiky, které lze určit pomocí fundamentální matice daného absorpčního řetězce.

$$\mathbb{N} = (I - \mathbb{Q})^{-1}.$$

Matice $\mathbb{N}$ existuje, jestliže $\mathbb{Q}^n$ konverguje k nulové matici a můžeme tedy psát:

$$(I - \mathbb{Q})^{-1} = I + \mathbb{Q} + \mathbb{Q}^2 + \cdots + \mathbb{Q}^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{Q}^k.$$

Prvky matice $\mathbb{N}$ udávají kolikrát se proces v průměru ocitne v tranzientním stavu.

Označíme prvky matice $\mathbb{N}$ jako „n_{ij}" potom n_{ij} bude vyjadřovat střední hodnotu počtu průchodů stavem „S_j", jestliže proces začal v „S_i", přičemž oba stavy „S_i", „S_j" jsou tranzientní.

Pokud budeme předpokládat že se průchody tranzientními stavy uskutečňují v jednotlivých časových intervalech, potom nás zajímá průměrná doba, kterou proces stráví v jednotlivých tranzientních stavech. Tato doba závisí na tom z jakého stavu proces vyšel.

Pokud vyšel proces ze stavu absorpčního, je tato doba nulová.

Vyjde-li proces z i-tého tranzientního stavu, můžeme střední dobu (hodnotu)(střední počet průchodů) vyjádřit jako prvek $m_i(t_i)$, kde $t_i = \sum_j n_{ij}$ představuje součet průchodů všemi tranzientními stavy dosažitelnými ze stavu „S_i".

Soustavu veličin $m_i(t_i)$ pro různá „i" lze vyjádřit jako sloupcový vektor $\vec{m}(t)$.

Tento vektor $\vec{m}(t)$je tvořen řádkovými součty prvků fundamentální matice $\mathbb{N}$. Vektor $\vec{m}(t)$ můžeme také získat vynásobením fundamentální matice $\mathbb{N}$ vektorem ξ složeným ze samých jedniček.

$$\mathbb{N} \cdot \xi = \mathbb{N} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = m(t)$$

4.11 Pravděpodobnost přechodu do absorpčních stavů.

Další charakteristikou, která se studuje u absorpčních řetězců, je pravděpodobnost přechodu do absorpčních stavů.

Přechod ze stavu tranzientního do stavu absorpčního může proběhnout buď přímo (v jednom kroku) a nebo přes řadu jiných tranzientních stavů. Označme b_{ij} pravděpodobnost přechodu z tranzientního stavu „S_i“ do absorpčního stavu „S_j“. Potom můžeme psát:

$$b_{ij} = p_{ij} + \sum_k p_{ik} \cdot b_{kj}$$

Přitom p_{ij} značí pravděpodobnost přímého přechodu z „S_i“ do „S_j“. Druhá suma popisuje všechny přechody nepřímé. V maticovém tvaru pro $\mathbb{B} = (b_{ij})$

$$\mathbb{B} = \mathbb{R} + \mathbb{Q} \cdot \mathbb{B}.$$

Po úpravě:

$$\mathbb{B} = (I - \mathbb{Q})^{-1} \cdot \mathbb{R} = \mathbb{N} \cdot \mathbb{R}.$$

Tady vidíte odkud se vzala fundamentální matice N. Řádkové součty matice $\mathbb{B}$, která vyjadřuje pravděpodobnost přechodu ze stavu tranzientního do absorpčního jsou rovny jedné (=1), protože proces musí po určité době končit v některém z absorpčních stavů.

4.12 Pravděpodobnost setrvání v tranzientním stavu

Pravděpodobnost přechodu mezi tranzientními stavy lze popsat maticově:

$$Q = (\mathbb{N} - I) \cdot \hat{\mathbb{N}}^{-1}$$

kde Q je matice pravděpodobnosti přechodu mezi tranzientními stavy a $\hat{\mathbb{N}}^{-1}$ je inverzní matice k fundamentální matici, obsahující pouze diagonální prvky.

Příklad 4.45. Firma třídí své pohledávky (tj. nezaplacené faktury) do 30-denních intervalů: pohledávky nad 90-dní po době splatnosti se pokládají za nedobytné. Systém pohledávek tvoří absorpční MŘ období přechodu je 30 dní. Matice pravděpodobnosti přechodu potom obsahuje stavy S_1, S_2, S_3, který jsou tranzientní a 2 absorpční stavy S_4,S_5.

S_1 – 0 až 30 dní po době splatnosti,
S_2 – 31 až 60 dní po době splatnosti,
S_3 – 61 až 90 dní po době splatnosti,
S_4 – pohledávka byla zaplacena,
S_3 – pohledávka je nedobytná.

Sestavte matici pravděpodobnosti přechodů a fundamentální matici.

Řešení. Při konstrukci matice pravděpodobnosti přechodu během **zvoleného** časového intervalu (30 dní) mohou nastat pouze tyto situace:

1. pohledávka byla zaplacena $S_i \to S_4$, $i = 1, 2, 3$. (Optimální možnost)
2. nezaplacena pohledávka „postoupila“ do vyššího stavu $S_1 \to S_2$, $S_2 \to S_3$.

3. pohledávka se stala nedobytnou (překročila 90-denní hranici) $S_3 \to S_5$

Neboli

$$\begin{array}{c} S_1 \to S_4 \\ \downarrow \\ S_2 \to S_4 \\ \downarrow \\ S_3 \to S_4 \\ \downarrow \\ S_5 \end{array}$$

Matice $\mathbb{P}$ - její prvky byli získány pozorováním za dostatečně dlouhou dobu (vycházíme s konkrétní situace konkrétní firmy).

$$P = \begin{pmatrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ S_1 & 0 & 0,77 & 0 & 0,23 & 0 \\ S_2 & 0 & 0 & 0,34 & 0,66 & 0 \\ S_3 & 0 & 0 & 0 & 0,73 & 0,27 \\ S_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ S_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Přečíslujeme-li jednotlivé stavy, potom můžeme získat zvlášť absorpční a zvlášť tranzientní stavy a poté získáme matici $\mathbb{P}$ ve tvaru

$$P = \begin{pmatrix} & S_4 & S_5 & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ S_1 & 0,23 & 0 & 0 & 0,77 & 0 \\ S_2 & 0,66 & 0 & 0 & 0 & 0,34 \\ S_3 & 0,73 & 0,27 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ \mathbb{R} & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$

Podmatice $\mathbb{Q}$ - jejíž prvky vyjadřují pravděpodobnost přechodu mezi tranzientními stavy S_1, S_2, S_3 má tvar:

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0,77 & 0 \\ 0 & 0 & 0,34 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podmatice $\mathbb{R}$- jejíž prvky vyjadřují pravděpodobnost přechodu mezi tranzientními stavy

S_1, S_2, S_3a absorpčními stavy S_4,S_5 má tvar:

$$R = \begin{pmatrix} 0,23 & 0 \\ 0,66 & 0 \\ 0,73 & 0,27 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice $\mathbb{N}$ je určena vztahem:

$$\mathbb{N} = (I - \mathbb{Q})^{-1}$$

$$\mathbb{N} = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0,77 & 0,2818 \\ 0 & 1 & 0,34 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Pokud vyjdeme z toho, co říkají prvky fundamentální matice, z toho vyplývá, že je možné v průměru očekávat, že pohledávka zařazena do stavu S_1, v něm setrvá v průměru 30 dní (1. . . 30 dní). Pohledávka setrvá ve stavu S_2 v průměru 23,1 dní $(0,77 \cdot 30)$ a setrvá ve stavu S_3 - 7,8 dní (před zaplacením a nebo postupem do vyššího stavu).

Dále matice $\mathbb{B}$, která vyjadřuje pravděpodobnost přechodu z tranzientního stavu (S_1, S_2, S_3) do absorpčního stavu (S_4,S_5) má tvar:

$$\mathbb{B} = \mathbb{N} \cdot \mathbb{R}$$

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0,77 & 0,2618 \\ 0 & 1 & 0,34 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,23 & 0 \\ 0,66 & 0 \\ 0,73 & 0,27 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} S_4 & S_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,9293 & 0,0707 \\ 0,9082 & 0,0918 \\ 0,73 & 0,027 \end{pmatrix} \end{array}$$

Z prvního řádku matice $\mathbb{B}$ plyne, že pohledávka zařazena do stavu S_1 je s pravděpodobností 92,93% zaplacena (přejde do absorpčního stavuS_4) a s pravděpodobností 7,07% se stane nedobytnou (přejde do absorpčního stavu S_5).

Analogicky můžeme v úvahách postupovat dále.

Uvedené hodnoty matic $\mathbb{P}, \mathbb{N}, \mathbb{B}$ je možné použít pro stanovení dalších ukazatelů, respektive je možné uvažovat o změně některého z prvků matice $\mathbb{P}$ a sledovat výsledný efekt této změny. □

Příklad 4.46. Jestliže známe průměrný objem pohledávek po termínu splatnosti jednotlivých 30-denních intervalech, stanovte očekávanou hodnotu splněných pohledávek, jestliže vektor $\vec{k}$, který udává hodnoty pohledávek ve stavech (S_1, S_2, S_3) má tvar:

$$\vec{k}^T = (4030000; 9097000; 3377000).$$

Řešení. Průměrně hodnoty zaplacených a nedobytých pohledávek $\vec{y} = (y_1, y_2)^T$
Získáme ze stavu $\vec{y}^T = \vec{k}^T \cdot \mathbb{B}$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} S_4 & 14472184 \\ S_5 & 2031816 \end{pmatrix}$$

Dostali jsme, že průměrná hodnota zaplacených pohledávek bude $y_1 = 14472184$ a průměrná hodnota nesplacenýc pohledávek bude $y_2 = 2031816$. □

4.13 Analýza Markovských řetězců

4.13.1 $\mathbb{Z}$-transformace

$\mathbb{Z}$-transformace je diskrétní analogií Laplaceovy transformace. Připomeneme si některé její vlastnosti.

Mějme posloupnost prvků

$$\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$

nebo funkcí

$$f(n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots.$$

Potom si definujeme její obraz pomocí $\mathbb{Z}$-transformace následovně:

$$\{a_n\} \to F(z) = a_0 + a_1 z + a_2^2 z^2 + \cdots + a_n^n z^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

nebo

$$f(n) \to F(z) = f(0) + f(1)z^1 + f(2)z^2 + \cdots + f(n)z^n + \ldots,$$

$$f(n) \to F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n.$$

Tato řada konverguje pro $|z| < 1$. Funkce $f(n)$ je vzor a funkce $F(z)$ je obraz.

Jestliže máme

$$f(n) \equiv 1 \quad \forall n,$$

potom

$$F(z) = 1 + 1 \cdot z + 1 \cdot z^2 + \cdots + 1 \cdot z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Pro

$$f(n) = n$$

dostaneme

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot z^n=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot z^n=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot z^{n-1}\cdot z=z\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot z^{n-1}=z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dz}z^n=z\frac{d}{dz}\sum_{n=1}^{\infty} z^n.$$

A po derivování máme konečný výsledek ve tvaru

$$F(z)=\frac{z}{(1-z)^2}.$$

Jestliže $f(n)=a^n$, kde $|a|<1$ (aby jsme měli zaručenou konvergenci), potom máme

$$F(z)=1+a\cdot z+a^2\cdot z^2+...+a^n\cdot z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a\cdot z)^n=\frac{1}{1-a\cdot z}.$$

Jestliže máme vektor: $\vec{v}=\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ ...\\ v_k\end{pmatrix}$, potom transformací dostaneme

$$\vec{F}(z)=\vec{v}(0)+\vec{v}(1)z+\vec{v}(2)z^2+\cdots+\vec{v}(n)z^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\vec{v}(n)z^n,$$

neboli

$$\begin{pmatrix} F_1(z)\\ F_2(z)\\ ...\\ F_k(z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \vec{v}_1(0)\\ \vec{v}_2(0)\\ ...\\ \vec{v}_k(0)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \vec{v}_1(1)\\ \vec{v}_2(1)\\ ...\\ \vec{v}_k(1)\end{pmatrix}z+\begin{pmatrix} \vec{v}_1(2)\\ \vec{v}_2(2)\\ ...\\ \vec{v}_k(2)\end{pmatrix}z^2+\cdots+\begin{pmatrix} \vec{v}_1(n)\\ \vec{v}_2(n)\\ ...\\ \vec{v}_k(n)\end{pmatrix}z^n+\ldots$$

Analogické pro matice $M(n)$, kde $n=0,1,2...k$, transformací získáme $F(z)$, které se bude rovnat:

$$F(z)=M(0)+M(1)z+M(2)z^2+\cdots+M(n)z^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}M(n)z^n.$$

Speciálně pro $M(n)=A^n$, kde A je čtvercová matice. Dostaneme že obrazem je

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A^n z^n=I+A\cdot z+A^2\cdot z^2+...+A^n\cdot z^n+\cdots=(I-A\cdot z)^{-1}.$$

Inverzní matice $(I-A\cdot z)^{-1}$ je vyjádřena jako součet nekonečné geometrické řady. Jestliže je matice $(I-A\cdot z)$ regulární, potom k ní existuje matice inverzní.

Jestliže $f(n)=n\cdot A^n$, potom

$$F(z)=z(I-A\cdot z)^{-1}\cdot A(I-A\cdot z)^{-1}.$$

C aplikacích se často objevují zlomky typu

1. $\dfrac{1-cz}{(1-az)\cdot(1-bz)}$;

2. $\dfrac{cz}{(1-az)\cdot(z-bz)}$,

kde $a \neq b$.

Jejích rozklad na parciální zlomky, má tvar

1)

$$\frac{1-cz}{(1-az)\cdot(1-bz)} = \frac{A}{(1-az)} + \frac{B}{(1-bz)} = \frac{A-Abz+B-Baz}{(1-az)\cdot(1-bz)} =$$
$$= \frac{(A+B)-z(Ab+Ba)}{(1-az)\cdot(1-bz)}.$$

Srovnáním koeficientů dostaneme dostaneme soustavu, kterou vyřešíme:

$$\left\{\begin{array}{c} 1 = A+B \\ -c = -Ab-Ba \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{c} B = 1-A \\ c = Ab+a-aA \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{c} 1 = A+B \\ -c = -Ab-Ba \end{array}\right. ;$$

$$\left\{\begin{array}{l} B = \dfrac{c-b}{a-b} \\ A = \dfrac{c-a}{b-z} \end{array}\right.$$

V druhém případě máme

2)

$$\frac{cz}{(1-az)\cdot(1-bz)} = \frac{K}{(1-az)} + \frac{L}{(1-bz)} = \frac{K-Kbz+L-Laz}{(1-az)\cdot(1-bz)} =$$
$$= \frac{(K+L)-z(Kb+La)}{(1-az)\cdot(1-bz)},$$

$$\left\{\begin{array}{c} 0 = A+B \\ c = Kb+La \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{c} K = -L \\ c = -Lb+La \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{l} K = \dfrac{-c}{a-b} \\ L = \dfrac{c}{a-b} \end{array}\right.$$

4.13.2 Analýza MŘ použitím $\mathbb{Z}$-transformace

Ukážeme si použití $\mathbb{Z}$-transformace při rozboru chování vektoru absolutních pravděpodobností.

Máme vektor absolutních pravděpodobností $\vec{p}(n)$, určíme jeho obraz, a obrazem je

$$\vec{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{p}(n) z^n$$

Pro vektor $\vec{p}(n)$ platí:

$$\vec{p}(n+1) = \vec{p}(n) \cdot \mathbb{P},$$

kde $\mathbb{P}$- matice pravděpodobnosti přechodu. Odtud dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \vec{p}(n+1) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \vec{p}(n) \cdot \mathbb{P}.$$

Levou stranu si můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \vec{p}(n+1) = \frac{1}{z} \sum_{n+1=0}^{\infty} z^{n+1} \vec{p}(n+1) - \vec{p}(0).$$

Přitom je nutné si uvědomit, výraz $\sum\limits_{n+1=0}^{\infty} z^{n+1} \vec{p}(n+1)$ je také obraz vektoru $\vec{p}(n)$. Proto platí

$$\frac{1}{z}\left(\vec{F}(z) - \vec{p}(0)\right) = \vec{F}(z) \cdot \mathbb{P}.$$

Odtud

$$\vec{F}(z) - \vec{p}(0) = z\vec{F}(z) \cdot \mathbb{P}$$
$$F(z) = \vec{p}(0) \cdot (I - z\mathbb{P})^{-1}.$$

Užitím tohoto vztahu se vyhneme umocňování matice $\mathbb{P}$. Problémem tady zůstává výpočet matice inverzní. Můžeme použít vztah

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

kde A_{ij} je algebraický doplněk prvku a_{ij}.

Pokud budeme pracovat pouze s maticí řídu 2, potom máme ulehčenou situaci v tom, že zde s využitím předchozího vztahu existuje vzorec pro výpočet inverzní matice.

Mějme matici $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a najdeme její inverzní matici. Protože

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj} A,$$

a kde $\text{adj} A = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$. Potom

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Příklad 4.47. Vezmeme si stejné zadání jako u příkladu 4.36. Máme linku, která je buď v provozu a nebo v opravě, což popisuje matice pravděpodobností:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Pro výpočet obrazu $F(z)$ si nejdříve určíme matici $(I - z\mathbb{P})$:

$$(I - z\mathbb{P}) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - z\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1-0,5z & -0,5z \\ -0,25z & 1-0,75z \end{pmatrix}.$$

Její determinat má hodnotu

$$|I - z\mathbb{P}| = (1-0,5z)\,(1-0,75z) - 0,5z \cdot 0,25z = 1 - 1,25z + 0,25z^2 =$$
$$= (1-z)\,(1-0,25z)\,.$$

Inverzní matice je proto tvaru

$$(I - z\mathbb{P})^{-1} = \frac{1}{(1-z)\,(1-0,25z)} \begin{pmatrix} 1-0,75z & 0,5z \\ 0,25z & 1-0,5z \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \dfrac{1-0,75z}{(1-z)(1-0,25z)} & \dfrac{0,5z}{(1-z)(1-0,25z)} \\ \dfrac{0,25z}{(1-z)(1-0,25z)} & \dfrac{1-0,5z}{(1-z)(1-0,25z)} \end{pmatrix}.$$

Provedeme si rozklad na parciální zlomky

$$(I - z\mathbb{P})^{-1} = \frac{1}{1-z}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{1-0,25z}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Provedeme zpětnou transformaci:

$$F^{-1}\left(\frac{1}{1-z}\right) = 1,$$

$$F^{-1}\left(\frac{1}{1-0,25z}\right) = (0,25)^n$$

a dostáváme

$$\mathbb{P}^n = 1^n \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + (0,25)^n \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Matici $\mathbb{P}^n$ máme vyjádřenou jako součet dvou matic.

První matice $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ je konstantní a nezávisí na hodnotě n. Je to stacionární matice.

Druhá matice $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, kterou vždy násobíme koeficientem $\frac{1}{4^n}$ představuje přechodnou (tranzientní) složku procesu.

Protože obrazem vektoru $\vec{p}(n)$ byla funkce

$$F(z) = \vec{p}(0)\,(I - z\mathbb{P})^{-1},$$

můžeme psát

$$\vec{p}(n) = \vec{p}(0) \cdot \left[1^n \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + (0,25)^n \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right].$$

Protože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} = 0$, máme

$$\lim_{n\to\infty} \vec{p}(n) = \vec{p}(0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Výsledek je přitom nezávislý na tom, zda je $\vec{p}(0) = (0,1)$ a nebo $\vec{p}(0) = (1,0)$.

Pomocí $\mathbb{Z}$-transformace jsme tak dostali stejný limitní vektor jako při řešení příkladu 4.36. □

Příklad 4.48. Upravíme si zadání z předchozího příkladu tak, že stroj, který se pokazil už nejde opravit a je vyřazen z provozu. Stroj zůstává v chodu s pravděpodobností 0,6 a s pravděpodobností 0,4 se v následujícím období pokazí.

Řešení. Matice pravděpodobnosti bude mít tvar

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$(I - z\mathbb{P}) = \begin{pmatrix} 1 - 0,6z & -0,4z \\ 0 & 1 - z \end{pmatrix},$$

$$(I - z\mathbb{P})^{-1} = \frac{1}{(1 - 0,6z)(1 - z)} \begin{pmatrix} 1 - z & 0,4z \\ 0 & 1 - 0,6z \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1 - z} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1 - 0,6z} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Provedeme rozklad na parciální zlomky

$$(I - z\mathbb{P})^{-1} = \frac{1}{1 - z} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1 - 0.6z} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zpětnou transformaci dostaneme

$$\vec{p}(n) = \vec{p}(0)\left[1^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (0,6)^n \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right].$$

Jestliže nyní je výchozí vektor $\vec{p}(0) = (1;0)$ (stroj je v počáteční moment v provozu), potom máme

$$\vec{p}_1(n) = (1;0)\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0,6^n \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= (1;0)\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,6^n & -0,6^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= (1;0)\begin{pmatrix} 0,6^n & 1-0,6^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,6^n; 1-0,6^n).$$

Jestliže je výchozí vektor tvaru $\vec{p}(0) = (0;1)$, tj. začínáme ve stavu poruchy, potom

$$\vec{p}'(1) = (0;1)\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0;1)\,.$$

V obou případech je stav 1 opuštěn. □

Ukážeme si ještě chování periodického řetězce.

Příklad 4.49. Matice pravděpodobností periodického MŘ bude mít tvar

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Určit limitní vektor.

Řešení. Postupujeme stejně jako v předchozím případě.

$$(I - z\mathbb{P}) = \begin{pmatrix} 1 & -z \\ -z & 1 \end{pmatrix}.$$

Určíme si inverzní matici.

$$(I - z\mathbb{P})^{-1} = \frac{1}{(1-z)\,(1+z)}\begin{pmatrix} 1 & z \\ z & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-z}\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+z}\begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Zpětnou transformaci dostaneme

$$\vec{p}(n) = \vec{p}(0)\left[1^n\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} + (-1)^n\begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}\right].$$

Zde $1^n\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ je stacionární matice.

Druhý člen $(-1)^n\begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ je tranzientní matice, která ukazuje na oscilaci - periodické kolísání mezi stavy.

Určíme si nyní

$$\lim_{n\to\infty} \vec{p}(n),$$

protože pro n sudé máme

$$\vec{p}(n) = \vec{p}(0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a pro n liché máme

$$\vec{p}(n) = \vec{p}(0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

takže v tomto případě limitní vektor neexistuje. □

4.14 Výpočet mocniny matice přechodů

V předchozí části jsme si ukázali použití $\mathbb{Z}$-transformace pro určování mocniny matice pravděpodobností přechodu. Největším problémem je zde výpočet inverzní matice, zvláště u matic vyšších řádů. Ukážeme si proto jiný způsob:

Definice 4.50. Mějme MŘ se stavy $S_1, S_2, \ldots, S_r$ a maticí pravděpodobností přechodu $\mathbb{P}$. Potom matici

$$\lambda I - \mathbb{P} = \begin{pmatrix} \lambda - p_{11} & -p_{12} & \ldots & -p_{1r} \\ -p_{21} & \lambda - p_{22} & \ldots & -p_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -p_{r1} & -p_{r2} & \ldots & \lambda - p_{rr} \end{pmatrix},$$

kde λ je parametr, nazveme charakteristickou maticí matice $\mathbb{P}$.

Definice 4.51. Charakteristický polynom matice $\mathbb{P}$ je $P(\lambda) = \det(\lambda I - \mathbb{P})$. Charakteristická rovnice matice $\mathbb{P}$ je $P(\lambda) = 0$, její kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ nazýváme charakteristickámi čísly matice $\mathbb{P}$.

Věta 4.52. *Jeden kořen charakteristické rovnice $P(\lambda) = 0$ matice $\mathbb{P}$ je vždy roven jedné. Ostatní kořeny jsou v absolutní hodnotě menší jak jedna.*

Důkaz.

$$P(\lambda) = 0,$$

$$\det(\lambda I - \mathbb{P}) = \det \begin{vmatrix} \lambda - p_{11} & -p_{12} & \dots & -p_{1r} \\ -p_{21} & \lambda - p_{22} & \dots & -p_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p_{r1} & -p_{r2} & \dots & \lambda - p_{rr} \end{vmatrix} = 0.$$

K prvnímu sloupci přičteme zbývající a dostamene v každém řádky výraz $(\lambda - 1)$. Takže jeden z kořenů naší charakteristické rovnice bude roven jedné.

Protože platí

$$\det(\lambda - \mathbb{P}) = det(\lambda - \mathbb{P})^T,$$

potom determinat soustavy lineárních akgebraických rovnic

$$\lambda x_j = \sum_{i=1}^{r} x_i p_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, r, \tag{4.14}$$

kde $x_i,\ i = 1, 2, \dots, r$ jsou neznámé, je roven $P(\lambda) = \det(\lambda I - \mathbb{P})$. Nechť dále je λ^* je libovolný kořen charakteristické rovnice $P(\lambda) = 0$ a $x_i^*,\ i = 1, 2, \dots, r$, jsou nenulovým řešením rovnice (4.14), potom

$$|\lambda^*| \cdot |x_j^*| \leq \sum_{i=1}^{r} |x_i^*| \cdot p_{ij}.$$

Sečteme všechny tyto rovnice a dostaneme

$$|\lambda^*| \sum_{j=1}^{r} |x_j^*| \leq \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{r} |x_i^*| \cdot p_{ij},$$

$$|\lambda^*| \sum_{j=1}^{r} |x_j^*| \leq \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} |x_i^*| \cdot p_{ij},$$

$$|\lambda^*| \sum_{j=1}^{r} |x_j^*| \leq \sum_{i=1}^{r} |x_i^*| \sum_{j=1}^{r} p_{ij},$$

a protože poslední suma je rovna jedné, dostáváme

$$|\lambda^*| \sum_{j=1}^{r} |x_j^*| \leq \sum_{i=1}^{r} |x_i^*|,$$

odkud plyne

$$|\lambda^*| \leq 1.$$

□

Věta 4.53. *Nechť charakteristický polynom matice* $\mathbb{P}$ *má tvar*

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s},$$

kde m_i *jsou násobnosti příslušných kořenů a* $m_1 + m_2 + \dots + m_s = r$. *Potom pro libovolné přirozené* $n > 1$, *platí*

$$\mathbb{P}^n = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{(m_i - 1)!} \cdot \frac{d^{m_i - 1}}{d\lambda^{m_i - 1}} \left(\frac{\lambda^n B(\lambda)}{\Psi_i(\lambda)} \right)_{\lambda = \lambda_i}, \tag{4.15}$$

kde $B(\lambda)$ *je adjungovaná matice k matici* $\lambda I - \mathbb{P}$ *a* $\Psi_i(\lambda) = \dfrac{P(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{m_i}}$, $i = 1, 2, \dots, s$.

Důsledek 4.54. *Má-li matice* $\mathbb{P}$ *pouze prosté kořeny, tj.* $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_r)$, *potom*

$$\mathbb{P}^n = \sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda_i^n B(\lambda_i)}{\Psi_i(\lambda_i)}, \tag{4.16}$$

kde $\Psi_i(\lambda) = \dfrac{P(\lambda)}{\lambda - \lambda_i}$.

Příklad 4.55. Určit n-tou mocninu matice

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Řešení. Máme

$$\lambda I - \mathbb{P} = \begin{pmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5} & \lambda - \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \frac{11}{10}\lambda - \frac{1}{10},$$

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{10}.$$

Potom

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - \frac{3}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \lambda - \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

odkud po dosazení dostaneme

$$B(\lambda_1) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B(\lambda_2) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_1(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{\lambda - \lambda_1} = \lambda - \frac{1}{10}, \qquad \Psi_1(\lambda_1) = \frac{9}{10},$$
$$\Psi_2(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{\lambda - \lambda_2} = \lambda - 1, \qquad \Psi_1(\lambda_1) = -\frac{9}{10}.$$

Nakonec dostáváme

$$\mathbb{P}^n = \frac{1^n \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}}{\frac{9}{10}} + \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^n \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}}{-\frac{9}{10}} =$$
$$= \frac{1}{9}\left(\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{10}\right)^n \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\right).$$

□

Příklad 4.56. Určit n-tou mocninu matice

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Charakteristická matice má tvar

$$\lambda I - \mathbb{P} = \begin{pmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom je

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2,$$

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}.$$

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 - \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4} & \lambda^2 - \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4} & \lambda^2 - \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

$$B(\lambda_1) = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B(\lambda = B(\lambda_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Derivace

$$B'(\lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2\lambda \end{pmatrix},$$

$$B'(\lambda_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B'(\lambda_2) = B'(\lambda_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Potom máme

$$\mathbb{P}^n = \frac{\lambda_1^n B(\lambda_1)}{\Psi_1(\lambda_1)} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\lambda^n B(\lambda)}{\Psi_2(\lambda)}\right)_{\lambda=\lambda_2}.$$

Derivace má tvar

$$\frac{\Phi_2(\lambda_2)\left(n\lambda_2^{n-1}B_2(\lambda_2) + \lambda_2^n B'(\lambda_2) - \lambda_2^n B(\lambda_2)\Psi_2'(\lambda_2)\right)}{\Phi_2^2(\lambda_2)},$$

kde

$$\Psi_1(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{\lambda - \lambda_1} = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2, \qquad \Phi_1(\lambda_1) = \frac{9}{4},$$

$$\Psi_2(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{\lambda - \lambda_2} = \lambda - 1, \qquad \Phi_2(\lambda_2) = -\frac{3}{4},$$

Potom

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\lambda^n B(\lambda)}{\Psi_2(\lambda)}\right)_{\lambda=\lambda_2} = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Takže nakonec máme

$$\mathbb{P}^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

□

4.15 Klasifikace stavů MŘ

Mějme MŘ s maticí pravděpodobností přechodu:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \dots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \dots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

a stavy $a_i, i = 1, 2, \dots$.

Jestliže pro stav a_i platí, že se i po dostatečně velkém počtu kroků vyskytuje, tj. pokud existuje konečná limita

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} \neq 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \tag{4.17}$$

potom stav a_i nazýváme rekurentní (podstatný). V opačném případě, tj. pokud

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \tag{4.18}$$

potom stav a_i nazýváme přechodný (nepodstatný).

Definice 4.57. Stav a_i nazýváme dosažitelným ze stavu a_j jestliže existuje takové přirozené n, že platí

$$p_{ji} > 0, \quad i \neq j, \quad n = 1, 2, \dots \tag{4.19}$$

Tj. existuje nenulová pravděpodobnost přechodu se stavu a_j do stavu a_i za n kroků. V opačném případě, tj. pokud

$$p_{ji} = 0, \quad i \neq j, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{4.20}$$

je stav a_i nedosažitelný ze stavu a_j.

Věta 4.58. *Jestliže existují takové stavy a_i, a_j, a_k, že stav a_j je dosažitelný ze stavu a_i a stav a_k je dosažitelný ze stavu a_j, potom je stav a_k dosažitelný ze stavu a_i.*

Důkaz. Podle (4.19) existují taková přirozená čísla m, n, že platí

$$p_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$p_{jk} = 0, \quad j \neq k, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Protože podle (4.6)platí

$$p_{ik}^{(m+n)} \geq p_{ij}^{(n)} \cdot p_{jk}^{(m)} > 0,$$

dostáváme, že stav a_k je dosažitelný ze stavu $a_i.k$ □

4.16 Markovské řetězce se spojitým časem

4.16.1 Obecné vlastnosti procesů se spojitým časem.

Budeme předpokládat že se přechody mezi jednotlivými stavy mohou uskutečnit v libovolných krátkých časových intervalech. Potom můžeme hovořit o změnách ve spojitém čase.

V tomto případě náhodné proměnné $\mathbb{X}(t)$ nabývají hodnoty, který jsou přiřazeny určitým stavům (jako u MŘ). V okamžiku t_i se může vyskytnout jeden ze stavu $i_1, i_2 ... i_N$. Přitom se okamžiky t_i a t_{i+1} liší o Δt, neboli $t_{i+1} = t_i + \Delta t$, kde $\lim \Delta t \to 0$.

Dochází-li ke změnám v okamžicích, které se blíži k nule (liší se jen o Δt, které je velmi malé), potom musíme na stejném intervalu sledovat i pravděpodobnosti přechodu.

Budeme předpokládat, že existují limity měnících se pravděpodobností, které znamenají pravděpodobnosti přechodu v době od t do $t + \Delta t$ a které jsou podmíněny situací v době t. Takže budeme předpokládat, že platí

$$\lim_{\Delta t \to 0} p_{ij}(t, t + \Delta t) = 0, \quad i \neq j. \tag{4.21}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} p_{ij}(t, t + \Delta t) = 1, \quad i = j. \tag{4.22}$$

Odtud plyne, že symbol

$$p_{ii}(t, t + \Delta t) = 1, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{4.23}$$

označuje pravděpodobnost toho, že jestliže je systém ve stavu a_i v čase t, potom v tomto stavu setrvá i v čase $t + \Delta t$. Symbol

$$1 - p_{ii}(t, t + \Delta t) = 1, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{4.24}$$

označuje pravděpodobnost výstupu ze stavu a_i za dobu Δt.

Protože pravděpodobnost přechodu $p_{ij}(t, t + \Delta t)$ ze stavu a_i do stavu a_j se v daném časovém okamžiku rovná nule, budeme místo této pravděpodobnosti používat intenzitu (hustotu) pravděpodobnosti přechodu.

Budeme předpokládat exitenci následujících limit

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = a_{ij}(t) \geqslant 0, \tag{4.25}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - p_{ii}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = a_{ii}(t) \geqslant 0. \tag{4.26}$$

Definice 4.59. Funkci $a_{ij}(t)$, $i \neq j$, nazveme intenzitou pravděpodobnosti přechodu ze stavu a_i do stavu a_j za čas t. Funkci $a_{ii}(t)$ nazveme intenzitou výstupu ze stavu a_i za čas t.

Při dostatečně malém Δt platí vztah

$$p_{ij}(t, t+\Delta t) = a_{ij}(t) \cdot \Delta t, \quad i \neq j. \tag{4.27}$$

Ve většině případů vystačíme s požadavkem, že hodnoty $a_{ij}(t) = a_{ij}$, tedy, že jsou konstantní a nezávisí na čase.

Matice pravděpodobnosti přechodu, která popisuje podmínky pravděpodobnosti výskytu stavu a_i, $i = 1, 2 ... N$ v době $t + \Delta t$ a které jsou podmíněný stavem v době t, má potom tvar:

$$\mathbb{P}(t, t+\Delta t) = \begin{pmatrix} 1 - a_{11}(t)\Delta t & a_{12}(t)\Delta t & ... & a_{1N}(t)\Delta t \\ a_{21}(t)\Delta t & 1 - a_{22}(t)\Delta t & ... & a_{2N}(t)\Delta t \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{N1}(t)\Delta t & a_{N2}(t)\Delta t & ... & 1 - a_{NN}(t)\Delta t \end{pmatrix},$$

kde $a_{ii}(t)\Delta t$ je přibližně pravděpodobnost výstupu ze stavu a_i za čas t a $1 + a_{ii}(t)\Delta t$ je přibližně pravděpodobnost setrvání ve stavu a_i za čas t.

Protože součty řádku matice $\mathbb{P}$, musí byt vždy rovny 1, máme

$$1 - a_{ii}(t)\Delta t + \sum_{j \neq i} a_{ij}(t)\Delta t = 1,$$

$$-a_{ii}(t)\Delta t + \sum_{j \neq i} a_{ij}(t)\Delta t = 0,$$

$$\sum_{j \neq 1} a_{ij}(t)\Delta t = a_{ii}(t). \tag{4.28}$$

Označme

$$A(t) = \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & -a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & -a_{NN} \end{pmatrix},$$

kde pro jednoduchost nejsou uvedeny argumenty, ale kde platí $a_{ij} = a_{ij}(t)$.

Z výše uvedených vztahů plyne, že součty prvků v řádcích matice $A(t)$ jsou rovny vždy nule. Proto je možné prvky v řádku vynásobit libovolným nenulovým číslem.

Potom můžeme psáte

$$\mathbb{P} = I + A(t)\Delta t.$$

Definice 4.60. Matici $A(t)$ nazýváme maticí intenzit pravděpodobností přechodu.

Pravděpodobnost toho, že se Markovský proces v čase $t = 0$ nachází ve stavu a_j označíme

$$p_j(0) = p(\mathbb{X}_0 = j), \quad j = 1, 2, \ldots \tag{4.29}$$

Pravděpodobnost toho, že se Markovský proces v čase $t > 0$ nachází ve stavu a_j označíme

$$p_j(t) = p(\mathbb{X}_t = j), \quad j = 1, 2, \dots \tag{4.30}$$

Protože jevy $a_j = (\mathbb{X}_t = j)$, $j = 1, 2, \dots$ tvoří úplný systém jevů, potom musí platit

$$\sum_{j=1}^{N} p_j(0) = 1, \quad \sum_{j=1}^{N} p_j(t) = 1 \tag{4.31}$$

Definice 4.61. Pravděpodobnosti (4.29) nazveme počátečními a pravděpodobnosti (4.30) nazveme absolutními.

Počáteční i absolutní pravděpodobnosti se zapisují pomocí vektorů.

Věta 4.62. Chapman-Kolmogorovova *Pro absolutní pravděpodobnosti (4.30) platí rovnost*

$$p_j(t + \Delta t) = \sum_{\nu=1}^{N} p_\nu(t) \cdot_{\nu j} (t, t + \Delta t), \quad j = 1, 2, \dots \tag{4.32}$$

Důkaz. Samostaně jako cvičení. □

Definice 4.63. Markovský proces se nazývá homogenním, jestliže platí

$$p_{ij}(t, t + \Delta t) = p_{ij}(\Delta t), \quad i, j = 1, 2, \dots \tag{4.33}$$

tj. pravděpodobnost přechodu nezávisí na hodnotě t, ale pouze na délce časového intervalu.

Věta 4.64. Kolmogorovova *Pro absolutní pravděpodobnosti homogenního Markovského procesu platí*

$$p_i'(t) = \frac{\mathrm{d}p_i(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{N} p_j(t) a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots \tag{4.34}$$

Důkaz. Vyjádříme-li si vektor absolutní pravděpodobnosti pomoci matice intenzit, potom

$$\vec{p}(t + \Delta t) = \vec{p}(t) \cdot \mathbb{P}(t, t + \Delta t) = \vec{p}(t) \cdot (I + A(t)\Delta t).$$

Upravíme a dostaneme

$$\frac{\vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t)}{\Delta t} = \vec{p}(t) \cdot A(t).$$

v limitě pro $\Delta t \to 0$ máme

$$(\vec{p}(t))' = \vec{p}(t) \cdot A(t). \tag{4.35}$$

Jestliže nyní přejdeme ke složkám, dostaneme tvrzení věty. □

Věta 4.65. *Jestliže je Markovský proces v čase t ve stavu a_i, potom pavděpodobnost setrvání v tomto stavu je po dobu Δt je*

$$1 - p_{ii}(t) = a_{ii}\Delta t + o(\Delta t) \tag{4.36}$$

kde $o(\Delta t)$ je Landauův symbol, ketrý znamená, že Δt konverguje k nule mnohem rychleji než lineárně, tj.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

Věta 4.66. *Pravděpodobnost přechodu ze stavu a_i v čase t do stavu a_j v čase $t + \Delta t$ je rovna*

$$p_{ij}(\Delta t) = a_{ij} \cdot \Delta t + o(\Delta t).$$

Definice 4.67. Jestliže existuje limita

$$\lim_{t \to \infty} p_j(t) = p_j > 0, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{4.37}$$

a jestliže toto limitní rozdělení nezávisí na počátečním rozdělení, potom je Markovský proces regulární a prvděpodobnosti (4.37) nazýváme stacinárními.

Vektor stacionárních pravděpodobností si označíme jako

$$\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$$

Věta 4.68. *Vektor stacionárních pravděpodobností $\vec{p}$ homogenního Markovského procesu je určen vztahem*

$$\vec{p} \cdot A = \mathcal{O}$$

a podmínkami

$$p_j > 0, \quad \sum_{j=1}^{N} p_j = 1,$$

kde A je matice intenzit pravděpodobností přechodu a $\mathcal{O}$ je nulová matice.

Důkaz. Protože stacionární pravděpodobnosti nezávisí na čase, potom ze (4.35) dostáváme

$$(\vec{p}(t))' = \mathcal{O} = \vec{p}(t) \cdot A(t).$$

□

Pro klasifikaci Markovských procesů platí stejná pravidla jako pro Markovské řetezce.

Stav a_j je dosažitelný ze stavu a_i, jestliže existuje takové $t \geq 0$, že platí

$$p_{ij}(t) > 0, \quad i \neq j.$$

Stavy navzájem dosažitelné nazýváme souslednými.

Stav a_i nazýváme přechodným, jestliže

$$\int_0^{\infty} p_{ii}(t)\mathrm{d}t < \infty,$$

a trvalým, jestliže

$$\int_0^{\infty} p_{ii}(t)\mathrm{d}t = \infty,$$

Věta 4.69. *V homogenním Markovském procesu neexistují periodické stavy.*

Důkaz. Stačí si uvědomit, že podle (4.36) jsou všechny diagonální prvky matice pravděpodobnosti přechodu kladné. □

Definice 4.70. Jestliže průběh procesu nezávisí na době která uplynula od začátku, potom jde o homogenní proces. V opačném případě jde o nehomogenní proces.

Mějme homogenní proces s konečným počtem stavů. Potom matice intenzit $A(t)$ má prvky a_{ij}, které nezávisí na čase t. Potom ze vztahu (4.35) plyne

$$\vec{p'}(t) = \vec{p}(t) \cdot A. \tag{4.38}$$

Pokud si tento vztah rozepíšeme, tak dostaneme soustavu lineárních diferenciálních rovnic s konstantní maticí A

$$\begin{aligned} \frac{(\vec{p}(t))'}{p(t)} &= A, \\ \frac{d}{dt} \ln\left(\vec{p}(t)\right) &= A, \\ \ln\left(\vec{p}(t)\right) &= At + \ln k, \\ \vec{p}(t) &= k \cdot \mathrm{e}^{At}, \\ \vec{p}(t) &= \vec{p}(0) \cdot \mathrm{e}^{At}, \end{aligned}$$

kde $k-$ je vektor konstant a $e^{At}-$ je exponenciála matice , což je matice téhož řádu jako A, která je definovaná předpisem:

$$\mathrm{e}^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^nt^n}{n!} + \ldots$$

Jestliže existuje limitní (stacionární) rozdělení pravděpodobnosti, potom platí, že

$$\lim_{\Delta t \to 0^+} \left(p\left(t + \Delta t\right)\right) = p\left(t\right)$$

a proto platí, že

$$p'\left(t\right) = 0,$$

ze vztahu (4.35) potom vyplývá, že

$$\vec{p} \cdot A = \vec{0}.$$

Protože je až na konstantu $A = \mathbb{P} - I$, je limitní rozdělení stejné jako v případě diskrétního času.

4.16.2 Laplaceova transformace

Markovský proces můžeme popsat analogicky jako MŘ, jen místo $\mathbb{Z}$-transformace použijeme Laplaceovu transformaci.

Připomeneme si základní vlastnosti Laplaceovy transformace:

Funkci $f(t)$ nazveme vzorem a jeím obrazem je funkce $F(s)$, která je definovaná vztahem

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot \mathrm{e}^{-st} dt.$$

Pro funkci $f(t)$ musí platit:

- po částech spojitá,
- pro záporná t je nulová,
- je nejvýše exponenciálního růstu.

V tabulce jsou uvedeny vzory a obrazy funkcí, které budeme potřebovat dále:

$f(t)$	1	t	e^{-at}
$F(s)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{s+a}$

Jestliže použijeme Laplaceovu transformaci na každý prvek vektoru a nebo matice, získáme tím transformaci celého vektoru a nebo celé matice.

Ze vztahu $\vec{p}(t) = \vec{p}(0) \cdot e^{At}$ potom dostaneme

$$\vec{F}(s) = \vec{p}(0) \cdot \int_0^\infty \mathrm{e}^{At} \cdot \mathrm{e}^{-st} dt = \vec{p}(0) \cdot \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(sI-A)} dt.$$

Jde o souhrné vyjádření pomocí matic a vektorů, ve kterém integrujeme člen po členu.

Protože platí

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t\mathbb{K}} dt = \mathbb{K}^{-1},$$

tak potom můžeme psát

$$\vec{F}(s) = \vec{p}(0) \, (sI - A)^{-1}.$$

Příklad 4.71. Sestavte vektor absolutních pravděpodobností $\vec{p}(t)$ pro homogenní proces s maticí intenzit A, kde

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Sestavíme si matici

$$(sI-A)=\begin{pmatrix} s+5 & -5 \\ -4 & s+4 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matice má potom tvar

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{(s+4)\,(s+5)-20}\begin{pmatrix} s+4 & 5 \\ 4 & s+5 \end{pmatrix}=\frac{1}{s(s+9)}\begin{pmatrix} s+4 & 5 \\ 4 & s+5 \end{pmatrix}.$$

Provedeme rozklad na parciální zlomky

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s}\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}+\frac{1}{s+9}\begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Zpětnou transformací dostaneme:

$$\vec{p}\,(t)=\vec{p}\,(0)\left[1\cdot\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}+\mathrm{e}^{-9t}\cdot\begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}\right].$$

A nebo rozepsáno po složkách:

$$p_1(t)=p_1(0)\frac{4}{9}+p_2(0)\frac{4}{9}+\mathrm{e}^{-9t}\left(p_1(0)\frac{5}{9}-p_2(0)\frac{4}{9}\right),$$

$$p_2(t)=p_1(0)\frac{5}{9}+p_2(0)\frac{5}{9}+\mathrm{e}^{-9t}\left(-p_1(0)\frac{5}{9}+p_2(0)\frac{4}{9}\right).$$

Systém se nachází ve stacionární situaci dané limitním vektorem $\vec{a}=\left(\frac{4}{9};\frac{5}{9}\right)$. Rychlost stabilizace je dána členem e^{-9t} a rychlostí její konvergence k nule. □

4.17 Modely procesů

4.17.1 Poissonův proces

Označme $\mathbb{X}(t)$ počet výskytů nějakého jevu v čase $\langle 0;t\rangle$.

Jestliže přitom jde jen o samotný výskyt jevů, které se navzájem liší pouze různým umístěním v čase, potom se jedná o bodový proces.

Jde o posloupnost jevů, které se vyskytují v určitých časových okamžicích, které jsou náhodné. Předpokládejme, že počet výskytu jevů, tj. hodnoty $\mathbb{X}(t)$, mohou být pouze celočíselné a nezáporné 0,1,2, $\ldots$. Přírůstek $\mathbb{X}(t_2)-\mathbb{X}(t_1)$ pro všechna $t_1,t_2 : t_1<t_2$ taktéž může nabývat jen nezáporných celočíselných hodnot.

Příklad 4.72. Poissonův proces popisuje například:

- Tok nakupujících v nějakém obchodě.
- Počet hovorů na určité telefonní lince, na nějaké spojovatelně.
- Počet poruch nějakého zařízení.

Poissonův proces má následující vlastnosti:

1. Proces $\mathbb{X}(t)$ má nezávislé přírůstky.
   Jevy, které se vyskytnou v navzájem disjunktních časových intervalech, jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny. Počet jevů, které připadnou na interval I_1 nezávisí na počtu jevů, které případnou na interval I_2 , jestliže $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.
2. Proces $\mathbb{X}(t)$ má homogenní přírůstky.
   Intenzita vyskytujících se jevů, tzn. střední hodnota počtu jevů za časovou jednotku je konstantní a značíme jí λ, potom mluvíme o homogenním Poissonově procesu. V případě, že $\lambda = \lambda(t)$ jde o nehomogenní Poissonův proces.
3. Pro dostatečně malý přírůstek Δt a při konstantní hodnotě parametru λ platí, že pravděpodobnost přechodu ze stavu „n“ do stavu „$n+1$“ během intervalu $(t; t + \Delta t)$ je roven
   (a) $p_{n,n+1}(t; t + \Delta t) = \lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t)$,
   kde funkce $o(\Delta t)$ obsahuje veličiny řádu $(\Delta t)^2$ a vyšších a proto pro ni platí:
   $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o\,(\Delta t)}{\Delta t} = 0.$$
   (b) Pravděpodobnost setrvání v témže stavu „n“ v daném časovém intervalu $(t; t+ + \Delta t)$ je rovna
   $$p_{n,n}\,(t; t + \Delta t) = 1 - \lambda \cdot \Delta t + o\,(\Delta t)\,.$$
   (c) Pravděpodobnosti ostatních přechodu jsou zanedbatelné
   $$\sum_{j=i+2}^{\infty} p_{ij}\,(t; \Delta t) = o\,(\Delta t).$$
   Poissonův proces je tedy takový, že umožňuje pouze setrvání v daném stavu nebo přechod do nejbližšího vyššího stavu.

Matice intenzit pravděpodobnosti přechodu má potom pro konečný počet stavů tvar:

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Při nekonečném počtu stavů budeme mít matici nekonečného řádu, která bude mít na hlavní diagonále prvek $-\lambda$ a rovnoběžně nad hlavní diagonálou prvek λ, ostatní prvky budou nulové.

Pro pravděpodobnost p_n, tj. pravděpodobnost, že systém bude v době $(t; t + \Delta t)$ ve stavu „n“, proto bude platit:

Pro $n = 0$:

$$p_0\,(t + \Delta t) = [1 - \lambda \cdot \Delta t + o\,(\Delta t)] \cdot p_0\,(t)\,,$$

Pro $n > 0$:

$$p_n\,(t + \Delta t) = [1 - \lambda \cdot \Delta t + o\,(\Delta t)] \cdot p_n\,(t) + [\lambda \cdot \Delta t + o\,(\Delta t)] \cdot p_{n-1}\,(t) + o\,(\Delta t)\,.$$

Upravíme a dostaneme:

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda \cdot p_0(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}, \tag{4.39}$$

$$\frac{p_n\,(t + \Delta t) - p_n\,(t)}{\Delta t} = -\lambda \cdot p_n\,(t) + \lambda \cdot p_{n-1}\,(t) + \frac{o\,(\Delta t)}{\Delta t}. \tag{4.40}$$

V limitě potom odtud dostaneme

$$\frac{d}{dt} p_0(t) = -\lambda p_0(t), \tag{4.41}$$

$$\frac{d}{dt} p_n(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda_{n-1}(t). \tag{4.42}$$

Přitom musí platit počáteční podmínky

$p_n(0) = 1$ pro $n = 0$,

$p_n(0) = 0$ pro $n > 0$.

Potom (4.39) až (4.42) představují rekurentní soustavy diferenčních a diferenciálních rovnic a jejich řešením potom dostaneme

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Poissonovo rozdělení je rozdělení počtu změn za dobu t. Člen

$$\mathrm{e}^{-\lambda t} = p_0(t)$$

udává pravděpodobnost, že během doby t nedojde ke změně.

U Poissonova procesu pro pravděpodobnosti přechodu ze stavu i do stavu j za dobu t platí

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, & j \geq i, \\ \\ 0, & j < i. \end{cases}$$

$i = 1, 2, \ldots$

$$\int_0^\infty p_{ii}(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda} < \infty,$$

takže dostáváme, že u Poissonova procesu jsou všechny stavy přechodné.

4.17.2 Lineární proces růstu

V praxi se často vyskytují procesy při nichž je intenzita pravděpodobnosti přechodu funkcí stavu, ve kterém se systém nacházel v předešlý moment. Nejjednodušším příkladem je proces lineárního růstu.

Mějme konečný počet částic, jejichž počet postupně narůstá. Budeme předpokládat, že platí:

1. Pravděpodobnost přechodu ze stavu a_i do stavu a_{i+1} v průběhu časového intervalu $(t, t+\Delta t)$ je
$$p_{i,i+1}(\Delta t) = \lambda i \Delta t + o(\Delta t),$$
tj. pravděpodobnost přechodu je přímo úměrná okamžitému počtu částic i, kde $\lambda > 0$ je koeficient úměrnosti.

2. Pravděpodobnost setrvání ve stavu a_i v průběhu časového intervalu $(t, t+\Delta t)$ je
$$p_{ii}(\Delta t) = 1 - \lambda i \Delta t + o(\Delta t),$$

3. Pravděpodobnost přechodu během časového intervalu $(t, t+\Delta t)$ze stavu a_i do stavu $a_j, j \neq i, j \neq i+1$ je
$$p_{ij}(\Delta t) = o(\Delta t),$$
tj. jde o pravděpodobnost toho, že se během časového intervalu $(t, t+\Delta t)$ zvýší počet částic o více než jednu.

Jestliže X_t je počet částic v čase t, potom posloupnost náhodných proměnných $\{X_t, t \geq \geq 0\}$ tvoří Markovský homogenní proces s množinou stavů $S = \{1, 2, \dots\}$ a počátečnám rozdělením

$$p_1(0) = 1,\ p_i(0) = 0,\ i \neq 1$$

a intenzitami pravděpodobností přechodu

$$a_{ij} + \begin{cases} i\lambda, & j = i,\ j = i+1, \\ 0, & \text{v ostatních případech,} \end{cases}$$

kde $i = 1, 2, \dots$ Matice intenzit pravděpodobností přechodu je

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -2\lambda & 2\lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -3\lambda & 3\lambda & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Pro vektor absolutních pravděpodobností $\vec{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots)$ platí (4.35). Rozepsáním do složek dostaneme soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} p_1'(t) &= -\lambda p_1(t) \\ p_2'(t) &= \lambda p_1(t) - 2\lambda p_2(t) \\ p_3'(t) &= 2\lambda p_2(t) - 3\lambda p_3(t) \\ \dots & \quad \dots\dots \\ p_n'(t) &= (n-1)\lambda p_{n-1}(t) - n\lambda p_n(t) \\ \dots & \quad \dots\dots \end{aligned} \tag{4.43}$$

Vyřešíme první rovnici soustavy

$$p_1'(t) = -\lambda p_1(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}p_1(t)}{p_1(t)} = -\lambda \mathrm{d}t,$$

$$\ln(p_1(t)) = -\lambda t + \ln c,$$

$$p_1(t) = c\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Z počáteční podmínky $p_1(0) = 1$ dostaneme $c = 1$, takže nakonec máme

$$p_1(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t},\ \ \lambda > 0,\ \ t > 0.$$

Získaný výsledek dosadíme do druhé rovnice a opět řešíme diferenciální rovnici.

$$p_2'(t) = -2\lambda p_2(t) + \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Máme lineární nehomogenní diferenciální rovnici, kterou můžeme řešit například metodou variace konstanty. A obdobně dále. Na konec dojdeme k souhrnému výsledku

$$p_n(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^{n-1}, \quad t>0, \quad n=1,2,\ldots \tag{4.44}$$

Toto rozdělení, pro které platí podmínka (4.31), vyjadřuje pravděpodobnost, že v čase t bude systém obsahovat n částic.

Střední hodnota náhodné veličiny X_t s rozdělením (4.44) je

$$E(X_t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^{n-1}.$$

Označmě $v = 1-\mathrm{e}^{-\lambda}t$, potom dostaneme

$$E(X_t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty} nv^{n-1} = \mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}v^n = \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\sum_{n=1}^{\infty}v^n = \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\frac{v}{1-v} = \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{1}{(1-v)^2}.$$

Po zpětném dosazení dostaneme

$$E(X_t) = \mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Obdobně dostaneme pro rozptyl

$$D(X_t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\left(\mathrm{e}^{\lambda t}-1\right).$$

Pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j během doby t je

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1}\mathrm{e}^{-i\lambda t}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^{j-1}, & j \geq 1, \\ \\ 0, & j < i. \end{cases}$$

Je to pravděpodobnost toho, že se náš systém v čase t nachází ve stavu a_j, jestliže na počátku v čase $t=0$ byl ve stavu a_i. V tomto případě máme pro střední hodnotu a rozptyl vztahy:

$$E(X_t) = i\mathrm{e}^{\lambda t}, \quad D(X_t) = i\mathrm{e}^{\lambda t}\left(\mathrm{e}^{\lambda t}-1\right)$$

Protože pro $i = 1,2,\ldots$ platí, že

$$\int_0^{\infty} p_{ii}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-i\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{1}{i\lambda} < \infty,$$

proto všechny stavy vyšetřovaného systému jsou přechodné.

Příklad 4.73. Sprška kosmických částic je vyvolaná tím, že se v počáteční moment dostane do atmosféry i částic. Určete pravděpodobnost, že po čase t bude existovat celkem n částic, jestliže každá částice může v časovém intervalu $(t, t+\delta t)$ s pravděpodobností $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ vyvolat vznik nové částice, která má prakticky okamžitě stejné schopnosti.

Řešení. Protože v čase $t = 0$ bude v atmosféře i částic, proto podle (4.48) budou absolutní pravděpodobnmosti určeny soustavou diferenciálních rovnic

$$p_n'(t) = (n-1)\lambda p_{n-1}(t) - n\lambda p_n(t), \quad n \geq i$$

a počátečními podmínkami

$$p_i(0) = i, \;\; p_n(0) = 0, \;\; n \neq i.$$

Vyřešením této rovnice dostaneme

$$p_n(t) = \binom{n-1}{n-i} \mathrm{e}^{-\lambda t} \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^{n-i}, \quad n \geq i.$$

□

4.17.3 Lineární proces zániku

Jde o proces, jehož intenzity pravděpodobností přechodu jsou lineární funkcí stavu, ve kterém se systém nacházel v předešlém okamžiku. Je podobný předchozímu procesu, ale je opačně orientovaný.

Mějme určitý počet částic, jejichž počet se bude úměrně času postupně snižovat. Budeme přitom vycházet z toho, že platí:

1. Pravděpodobnost přechodu ze stavu a_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, r$, do stavu a_j, $j = i - 1$, v průběhu časového intervalu $(t, t + \Delta t)$ je

   $$p_{ij}(\Delta t) = \mu i \Delta t + o(\Delta t),$$

   tj. pravděpodobnost přechodu je úměrná okamžitému počtu částic i, kde $\mu > 0$ je koeficient úměrnosti.

2. Pravděpodobnost setrvání ve stavu a_i v průběhu časového intervalu $(t, t + \Delta t)$ je

   $$p_{ii}(\Delta t) = 1 - \mu i \Delta t + o(\Delta t).$$

3. Pravděpodobnost přechodu ze stavu a_i do stavu a_j, kde $j \neq i, \; j \neq i - 1$ v průběhu časového intervalu $(t, t + \Delta t)$ je

   $$p_{ij}(\Delta t) = o(\Delta t),$$

   tj. pravděpodobnost, že se počet částic sníží v průběhu časového intervalu $(t, t+\Delta t)$ o více než jednotku nebo vzroste o libovolný počet častic je prakticky nulová.

Jestliže označíme X_t počet částic v čase t, potom posloupnost diskrétních náhodných proměnných $\{X_t\}$, $t \geq 0$ tvoří Markovský homogenní proces s množinou stavů $S + + \{0, 1, 2, \dots, r\}$ a počátečním rozdělením

$$p_r(0) = 1, \quad p_n(0) = 0, \forall n \neq r,$$

a intenzitami pravděpodobností přechodu

$$a_{ii} = i\mu, \quad i = 0, 1, 2, \dots, r,$$

$$a_{ij} = \begin{cases} i\mu, & j = i - 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots, r \\ 0, & j \neq i - 1. \end{cases}$$

Matice intenzit pravděpodobností přechodu bude potom maticí řádu $r + 1$ ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mu & -\mu & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\mu & -2\mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3\mu & -3\mu & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -r\mu \end{pmatrix}.$$

Pro vektor absolutních pravděpodobností $\vec{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots, p_r(t))$ platí vztah (4.35). Rozepsáním na jednotlivé složky dostaneme soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= \mu p_1(t) \\ p_1'(t) &= -\mu p_1(t) + 2\mu p_2(t) \\ p_2'(t) &= -2\mu p_2(t) + 3\mu p_3(t) \\ \dots & \quad \dots\dots \\ p_{r-1}'(t) &= -(r-1)\mu p_{r-1}(t) + r\mu p_r(t) \\ p_r'(t) &= -r\mu p_r(t). \end{aligned} \tag{4.45}$$

(4.46)

Vyřešíme poslední rovnici soustavy

$$p_r'(t) = \mu p_r(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}p_r(t)}{p_r(t)} = -\mu \mathrm{d}t,$$

$$\ln(p_r(t)) = -\mu t + \ln c,$$

$$p_r(t) = c\mathrm{e}^{-\mu t}.$$

Z počáteční podmínky pro $t = 0$ dostaneme $c = 1$, takže nakonec máme

$$p_r(t) = \mathrm{e}^{-\mu t}, \quad \mu > 0, \quad t > 0.$$

Získaný výsledek dosadíme do druhé rovnice od konce a opět řešíme diferenciální rovnici.

$$p'_{r-1}(t) = -(r-1)\mu p_{r-1}(t) + r\mu p_r(t).$$

Máme lineární nehomogenní diferenciální rovnici, kterou můžeme řešit například metodou variace konstanty. A obdobně dále. Na konec dojdeme k souhrnému výsledku

$$p_n(t) = \binom{r}{n} \mathrm{e}^{-r\mu t} \left(\mathrm{e}^{\mu t} - 1\right)^{r-n}, \quad t > 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, r. \tag{4.47}$$

Toto rozdělení, pro které platí podmínka (4.31), vyjadřuje pravděpodobnost, že v čase t bude systém obsahovat n částic.

4.17.4 Lineární proces růstu a zániku

Je zřejmé, že složením předchozích dvou procesů je možné konstruovat model růstu i zániku současně. Předpokládejme, že se jedná o proces, při kterém intenzity růstu i zániku jsou úměrné počtu částic v systému.

Budeme přitom vycházet z následujících předpokladů:

1. Pravděpodobnost přechodu ze stavu a_i do stavu a_{i+1} v průběhu časového intervalu $(t, t + \Delta t)$ je
$$p_{i,i+1}(\Delta t) = \lambda i \Delta t + o(\Delta t),$$
tj. pravděpodobnost přechodu je přímo úměrná okamžitému počtu částic i, kde $\lambda > 0$ je koeficient úměrnosti.

2. Pravděpodobnost přechodu ze stavu a_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, do stavu a_j, $j = i - 1$, v průběhu časového intervalu $(t, t + \Delta t)$ je
$$p_{ij}(\Delta t) = \mu i \Delta t + o(\Delta t),$$
tj. pravděpodobnost přechodu je úměrná okamžitému počtu částic i, kde $\mu > 0$ je koeficient úměrnosti.

3. Pravděpodobnost setrvání ve stavu a_i v průběhu časového intervalu $(t, t + \Delta t)$ je
$$p_{ii}(\Delta t) = 1 - (\lambda + \mu) i \Delta t + o(\Delta t),$$

4. Pravděpodobnost přechodu během časového intervalu $(t, t + \Delta t)$ ze stavu a_i do stavu $a_j, j \neq i, j \neq i + 1, j \neq i - 1$ je
$$p_{ij}(\Delta t) = o(\Delta t),$$
tj. jde o pravděpodobnost toho, že se během časového intervalu $(t, t + \Delta t)$ zvýší, popřípadě sníží, počet částic o více než jednu.

5. Stav $a = 0$ je absorpční.

Jestliže X_t je počet částic v čase t, potom posloupnost náhodných proměnných $\{X_t, t \geq \geq 0\}$ tvoří Markovský homogenní proces s množinou stavů $S = \{1, 2, \dots\}$ a počátečnám rozdělením

$$p_n(0) = 1,\ n = r,$$

$$p_n(0) = 0,\ n \neq r.$$

a intenzitami pravděpodobností přechodu

$$a_{ii} = i(\lambda + \mu), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$a_{ij} = \begin{cases} i\lambda, & j = i + 1,\ i = 0, 1, 2, \dots \\ i\mu, & j = i - 1,\ j = i - 1,\ i = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{v ostatních případech,} \end{cases}$$

Matice intenzit pravděpodobností přechodu je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda +) & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2\mu & -2(\lambda + \mu) & 2\lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3\mu & -3(\lambda + \mu) & 3\lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Pro vektor absolutních pravděpodobností $\vec{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots)$ platí (4.35). Rozepsáním do složek dostaneme soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= \mu p_1(t) \\ p_1'(t) &= -(\lambda + \mu)p_1(t) + +\mu p_2(t) \\ p_2'(t) &= \lambda p_1(t) - 2(\lambda + \mu)p_2(t) + 3p_3(t) \\ \dots & \quad \dots\dots \\ p_n'(t) &= (n-1)\lambda p_{n-1}(t) - n(\lambda + \mu)p_n(t) + (n+1)p_{n+1}(t) \\ \dots & \quad \dots\dots \end{aligned}$$

Vyřešením soustavy dostaneme
a) Pro $\lambda \neq \mu$

$$p_0(t) = \mu B,$$

$$p_n(t) = (1 - \lambda B)(1 - \mu B)(\lambda b)^{n-1},$$

kde

$$B = \frac{1 - \mathrm{e}^{(\lambda - \mu)t}}{\mu - \lambda \mathrm{e}^{(\lambda - \mu)t}}.$$

b) Pro $\lambda = \mu$

$$p_0(t) = \frac{\lambda t}{1+\lambda t},$$

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(1+\lambda t)^{n+1}}, \quad t > 0, \ n = 1, 2, \ldots$$

Přitomm musí platit

$$p_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) = 1, \quad t > 0.$$

V lineárním procesu růstu i zániku je určitý počet částic. Jestliže tento počet klesne na nulu, potom se už žádná částice nemůže obnovit, tj. stav $a = 0$ je stavem absorpčním.

Pravděpodobnost, že počet částic v systému se někdy sníží na nulu, tj. pravděpodobnost že částice zcela zaniknou je:

$$p = \lim_{t\to\infty} p_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \lambda \le \mu, \\ \\ \frac{\mu}{\lambda} & \text{pro } \lambda > \mu. \end{cases}$$

4.18 Markovovy rozhodovací procesy

4.18.1 Ocenění přechodů mezi stavy

Jestliže dovedeme popsat průběh určitého procesu tak, že jej umíme rozložit na řadu jednotlivých stavů, jimiž systém prochází v řadě okamžiků, potom se můžeme pokusit i o ocenění každého stavu nebo přechodu. Potom bude mít smysl hledat optimální řešení, tj. takové, které přináší maximální zisk nebo minimální náklady (záleží na úhlu pohledu, neboli na ocenění jednotlivých přechodů).

Předpokládejme, že s přechodem ze stavu „i“ do stavu „j“ je spojena hodnota výnosu „r_{ij}“ (zisk, náklady na skladování, ztráta apod.)

Tyto výnosy „r_{ij}“, kde $i, j = 1, 2...N$ tvoří dohromady matici ohodnocení (ocenění) přechodů

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1N} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{N1} & r_{N2} & \dots & r_{NN} \end{pmatrix}$$

Ocenění „r_{ij}“ může být konstantní pro všechny přechody nebo může být rostoucí nebo klesající funkcí v závislosti na růstu nebo klesání některého z indexů.

Specifický případ tvoři **diskontované** ocenění jednotlivých přechodů. Toto ocenění jednotlivých přechodů, jímž jsme přiřadili určité pravděpodobnosti přechodů nám potom mohou dát určité informace. Navíc dovolují i provádět odhady dalšího vývoje a hledání alternativ.

Označme „$v_i(n)$“ střední hodnotu celkového očekávaného výnosu procesu, který je na počátku ve stavu „i“ a uskuteční „n“ přechodů. Potom pro tuto hodnotu „$v_i(n)$“ bude platit rekurentní vztah

$$v_i(n) = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}_{ij}(r_{ij} + v_j(n-1)),$$

a po úpravě dostaneme

$$v_i(n) = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}_{ij} r_{ij} + \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}_{ij} v_j(n-1)), \tag{4.48}$$

zde je první člen - střední hodnota výnosu spojená s jedním přechodem ze stavu „i“ a druhý člen je střední hodnota výnosu procesu ve kterém do konce zbývá $(n-1)$ přechodu a který je s pravděpodobnosti „p_{ik}“ ve stavu „k“, kde $k = 1, 2, \ldots, N$.

Označme střední hodnotu výnosů $\sum\limits_{j=1}^{N} P_{ij} r_{ij} = q_i$ (označení je korektní, protože zde není závislost na počtu přechodů)

Potom si lze rovnici (4.48) zapsat ve tvaru

$$v_i(n) = q_i + \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}_{ij} v_j(n-1) \tag{4.49}$$

a nebo maticově

$$\vec{v}(n) = \vec{q} + \mathbb{P} \cdot \vec{v}(n-1),$$

kde $\vec{v}$ je řádkový vektor.

Pro použití vztahu (4.49) pro výpočet je třeba znát hodnoty „$v_i(n)$“ pro $n = 0$ a $i = 1, 2, \ldots, N$. Z definice „$v_i(n)$“ plyne, že „$v_i(0)$“ je střední hodnota celkového výnosu procesu, který je ve stavu „i“ a už nedělá žádný další přechod, tj. skončil ve stavu „i“.

Odtud vyjdeme při určování hodnoty „$v_i(0)$“, protože ji můžeme chápat jako jednorázový výnos, který plyne z toho, že proces skončí ve stvu „i“. Jestliže nezáleží na tom, v jakém stavu proces končí, je možné položit, že $v_i = 0$ pro $\forall i$.

Rovnice (4.48)je typickou rovnicí dynamického programování. Při výpočtu střední hodnoty očekávaného výnosu „$\vec{v}(n)$“ postupujeme zpětně od posledního kroku k počátku „$v_i(0)$“.

Příklad 4.74. Máme linku, která se může nacházet v provozu (stav 1) a nebo v opravě (stav 2). Sledováním po dostatečně dlouhou dobu byly získány pravděpodobnosti přechodu mezi jednotlivými stavy, tj. matice $\mathbb{P}$, a ocenění jednotlivých přechodů, tj. matice $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{R} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Dále budeme předpokládat, že nezáleží na tom, v jakém stavu proces skončí, neboli $v_i = 0, i = 1, 2$.

Řešení. Potom máme podle vztahu (4.49)

$$v_i(n) = q_i + \sum_{1}^{2} p_{ij} v_j(n-1),$$

kde $i = 1, 2$, $q_i = \sum_{j=1}^{2} p_{ij} r_{ij}$, neboli v našem případě máme

$$q_1 = 0,5 \cdot 10 + 0,5 \cdot 4 = 7,$$

$$q_2 = 0,4 \cdot 10 + 0,6 \cdot (-5) = -1.$$

Střední hodnota očekávaného výnosů procesu, který uskutečnil právě jeden přechod, bude záviset na výchozím stavu.

$$v_1(1) = 7 + \sum_{j-1}^{2} p_{ij} \cdot v_j(0) = 7 + 0,5 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0 = 7,$$

$$v_2(1) = -1 + \sum_{j=1}^{2} p_{ij} \cdot v_j(0) = -1$$

Při uskutečnění dvou přechodů budeme mít

$$v_1(2) = 7 + \sum_{j=1}^{2} p_{ij} \cdot v_j(1) = 7 + 0,5 \cdot 7 + 0,5 \cdot (-1) = 10,$$

$$v_2(2) = -1 + \sum_{j=1}^{2} p_{ij} \cdot v_j(1) = -1 + 0,4 \cdot 7 + 0,6 \cdot (-1) = 1,2.$$

Výsledky si zapíšeme do tabulky

n	0	1	2	3	4	5	...
$v_1(n)$	0	7	10	12,6	15,2	17,7	...
$v_2(n)$	0	-1	1,2	3,7	6,3	8,8	...

□

Někdy není přesně vidět závislost mezi těmito čísly.

4.18.2 Asymptotické vlastnosti Markovských řetězců

Mějme konstantní ocenění přechodů, tj. matice $\mathbb{R}$ je konstantní. Opět použijeme $\mathbb{Z}$-transformaci. Celkový očekávaný výnos pak bude.

$$\vec{F}(z, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{v}(n) \cdot z^n$$

Protože podle (4.49) pro vektor $\vec{v}$ platí

$$\vec{v}(n+1) = \vec{q} + \mathbb{P} \cdot \vec{v}(n),$$

můžeme psát

$$\sum_{n=0}^{\infty} \vec{v}(n+1) \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{q} \cdot z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P} \cdot \vec{v}(n) \cdot z^n, \tag{4.50}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \vec{v}(n+1) \cdot z^n = \frac{1}{z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \vec{v}(n+1) \cdot z^{n+1} - \vec{v}(0) \right)$$

Po dosazení do (4.50) máme

$$\frac{1}{z} \left(F(z, v) - \vec{v}(0) \right) = \frac{1}{1-z} \vec{q} + \mathbb{P} \cdot F(z, v).$$

Po úpravě dostaneme

$$\left(I - z\mathbb{P} \right) F(z, v) = \frac{z}{1-z} \vec{q} + \vec{v}(0)$$

a odtud

$$F(z, v) = \frac{z}{1-z} \left(I - z\mathbb{P} \right)^{-1} \vec{q} + \left(I - z\mathbb{P} \right)^{-1} \vec{v}(0). \tag{4.51}$$

Jestliže jsme si analýzou původního Markovského řetězce určili funkci $(I - z\mathbb{P})^{-1}$, dostaneme F vynásobením veličinami $\vec{q}$ a $\vec{v}(0)$. . Protože navíc většinou platí, že $\vec{v}(0) = 0$, potom máme jednodušší tvar rovnice (4.51) a sice

$$F(z, v) = \frac{z}{1-z} \left(I - z\mathbb{P} \right)^{-1} \vec{q}. \tag{4.52}$$

Zpětnou transformací se dostaneme zpět na vektor celkového očekávaného výnosu.

Příklad 4.75. Použijeme zadání z předchozího příkladu

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{R} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Potom budeme mít

$$\left(I - z\mathbb{P} \right)^{-1} = \frac{z}{1-z} \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} + \frac{1}{1-0,1z} \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Předpokládali jsme dříve $\vec{v}(0) = 0$, proto z (4.52), bez násobení $\vec{q}$,

$$F_0(z,i) = \frac{z}{1-z}\left(I - z\mathbb{P}\right)^{-1} =$$

$$\frac{z}{(1-z)^2}\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} + \frac{z}{(1-z)(1-0,1z)}\begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Zpětnou transformací dostaneme

$$\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right)^{-1} = n,$$

$$\left(\frac{z}{(1-z)(1-0,1z)}\right)^{-1} = \frac{10}{9}\left(1 - 0,1^n\right),$$

zde jsme opět použili rozklad na parciální zlomky. Takže dostáváme

$$f_0(n) = n \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} + \frac{10}{9}\left(1 - 0,1^n\right)\begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Dále jsme si odvodili, že přímý výnos je

$$q = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a proto máme

$$\vec{v}(n) = \vec{f_0}(n) \cdot \vec{q} = n \cdot \begin{pmatrix} \frac{23}{9} \\ \frac{23}{9} \end{pmatrix} + \frac{10}{9}\left(1 - 0,1^n\right)\begin{pmatrix} \frac{40}{9} \\ -\frac{32}{9} \end{pmatrix}.$$

Nyní si můžeme vyjádřit jednotlivé složky, takže dostaneme

$$v_1(n) = \frac{23}{9}n + \frac{400}{81}\left(1 - 0,1^n\right),$$

$$v_2(n) = \frac{23}{9}n - \frac{320}{81}\left(1 - 0,1^n\right).$$

Stejným způsobem můžeme pokračovat dále. Protože $0,1^n \to 0$, tak pro dostatečně velké n máme asymptotické vyjádření složek vektoru $\vec{v}(n)$

$$v_1(n) = \frac{23}{9}n + \frac{400}{81}$$

$$v_2(n) = \frac{23}{9}n - \frac{320}{81}$$

Asymptotické vlastnosti (chování) vektoru $\vec{v}(n)$ můžeme studovat i rozkladem matice $(I - z\mathbb{P})^{-1}$ na stacionární a tranzientní část.

$$(I - z\mathbb{P})^{-1} = \frac{1}{1-z} S + F_z(T)$$

kde S je stacionární matice (vzorem pro $\frac{1}{1-z}$ je prvek 1) a $F_z(T)$ je výsledek $\mathbb{Z}$-transformace tranzientní složky.

V našem případě dostaneme

$$S = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}, \quad F_z(T) = \frac{1}{1 - 0,1z} \begin{pmatrix} 59 & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Dosazením do rovnice (4.51)

$$F(z, v) = \frac{z}{(1-z)^2} S \cdot \vec{q} + \frac{z}{(1-z)} F_z(T) \cdot \vec{q} + \frac{1}{(1-z)} S \cdot \vec{v}(0) + F_z(T) \cdot \vec{v}(0).$$

My jsme předpokládali, že máme $\vec{v}(0) = 0$, současně platí, že $S \cdot \vec{q}$ a $S \cdot \vec{v}(0)$ jsou konstanty. Člen $\frac{z}{1-z} F_z(T)$ bude obsahovat konstantní část

$$F_1(T) = \frac{1}{1 - 0,1} \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Výrazy, které obsahují vyšší mocniny $0,1$ můžeme zanedbat a potom dostáváme

$$\vec{v}(n) = n \cdot S \cdot \vec{q} + F_1(T) \vec{q}.$$

Přitom vektor $S \cdot \vec{q}$ si označíme jako $\vec{g}$, přitom jeho souřadnice dostaneme ve tvaru

$$g_i = \sum_{i=1}^{N} s_{ij} q_j.$$

Jsou to přímá ocenění přechodů, vážená limitními pravděpodobnostmi s_{ij}, které udávají pravděpodobnost výskytu jednotlivých stavů při provozu trvajícím dostatečně dlouhou dobu.

Je-li matice pravděpodobnosti přechodů $\mathbb{P}$ regulární, potom jsou všechny řádky matice S stejné.

Označíme-li si řádky matice S jako vektor $\vec{\pi}$, potom

$$\vec{g} = \sum_{j=1}^{N} \pi_j q_j.$$

Sloupcový vektor $F_1(T) \cdot \vec{q}$ nezávisí na n a obsahuje prvky, které zavisí pouze na i.

Jestliže předpokládáme, že systém funguje dostatečně dlouho, potom máme

$$\vec{v}(n) = n\vec{g} + \vec{v},$$

neboli ve složkách

$$v_i(n) = n \cdot g_i + v_i,$$

kde veličina v_i obsahuje konstantní členy. Při regulární matici pravděpodobnosti přechodů $\mathbb{P}$ je $g_i = g$.

V našem případě

$$\vec{g} = S \cdot \vec{q} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{9} \\ \\ \frac{23}{9} \end{pmatrix},$$

$$\vec{v} = F_1(T) \cdot \vec{q} = \frac{1}{1-0.1} \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{400}{81} \\ \\ -\frac{320}{81} \end{pmatrix}.$$

Po dosazení dostaneme stejný výsledek jako v předchozím případě.

$$v_1(n) = \frac{23}{9}n + \frac{400}{81}$$

$$v_2(n) = \frac{23}{9}n - \frac{320}{81}$$

4.19 Rozhodovací procesy s alternativami

4.19.1 Měnící se ocenění

V minulé kapitole jsme předpokládali, že matice ocenění $\mathbb{R}$ ase nemění a je tedy konstantní.

Předpokládejme nyní, že ocenění nebude konstantní. Matici ocenění $\mathbb{R}$, která zůstává konstantní, vynásobíme koeficientem $\beta = \dfrac{1}{i+1}$, který máme nejčastěji vyjádřený pomocí úrokové míry. Z toho důvodu se β označuje jako diskontní faktor, a vyjadřuje počáteční hodnotu výnosu, který je splatný ke konci určitého období. Nemusí ovšem sloužit jen k výpočtům diskontních hodnot, lze mu přiřadit i pravděpodobnostní význam. Může například označovat prodlení, s nímž dojde k dalšímu opakování procesu.

Užiti koeficientu β bude účelné tam, kde můžeme očekávat, že proces skončí, ale nevíme přesně kdy.

Výpočet:
Užijeme-li úrokové míry, poskytuje diskontní faktor β některé informace, s tím, že β patří do intervalu $\beta \in \langle 0; 1\rangle$, neboli $0 \leq \beta \leq 1$.

Předpokládejme dále, že okamžitý výnos se bude vyplácet vždy na začátku přechodu ze stavu „i“ do stavu „j“.

Veličina $v_i(n)$ - hodnota celkového očekávaného výnosu daného procesu, který vychází ze stavu „i“ a který uskuteční „n“ přechodů, je potom rovna

$$v_i(n) = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}\left(r_{ij} + \beta \cdot v_j(n-1)\right),$$

odkud po úpravě dostaneme

$$v_i(n) = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} r_{ij} + \beta \sum_{j=1}^{N} p_{ij} v_j(n-1).$$

Protože první sume nezávisí na n, označíme si

$$q_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} r_{ij}$$

a dostaneme

$$v_i(n) = q_i + \beta \sum_{j=1}^{N} p_{ij} v_j(n-1) \tag{4.53}$$

Vektorové

$$\vec{v}(n) = \vec{q} + \beta \cdot \mathbb{P} \cdot \vec{v}(n-1)$$

Pro asymptotické vyjádření můžeme použít $\mathbb{Z}$-transformaci, jako u konstantního ocenění, a potom dostaneme

$$\frac{1}{z}\left(F(z,v) - \vec{v}(0)\right) = \frac{1}{1-z} q + \beta \cdot \mathbb{P} \cdot F(z,v),$$

odkud po úpravě dostáváme

$$F(z,v) = \frac{1}{1-z}\left(I - \beta \cdot z \cdot \mathbb{P}\right)^{-1} \vec{q} + \left(I - \beta \cdot z \cdot \mathbb{P}\right)^{-1} \vec{v}(0). \tag{4.54}$$

Většinou opět volíme $\vec{v}(0) = 0$ pro zjednodušení výpočtu. Dostáváme potom

$$F(z,v) = \frac{1}{1-z}\left(I - \beta \cdot z \cdot \mathbb{P}\right)^{-1} \vec{q}.$$

Příklad 4.76. Ponecháme zadání stejné jako v předchozím případě. Navíc budeme předpokládat, že diskontní faktor $\beta = 0,5$ označuje pravděpodobnost, že proces bude dále pokračovat.

Řešení. Potom z (4.54) dostaneme pro $F_0(z,v)$, jako složku funkce $F(z,v)$, která ještě není vynásobená $\vec{q}$, vyjádření

$$F(z,v)=\frac{z}{1-z}\left(I-0,5\cdot z\cdot\mathbb{P}\right)^{-1}=\frac{z}{1-z}\begin{pmatrix}1-\dfrac{1}{4z} & -\dfrac{1}{4z}\\ -\dfrac{1}{5z} & 1-\dfrac{3}{10z}\end{pmatrix}^{-1}$$

Provedeme rozklad na parciální zlomky a dostaneme

$$F_0(z,v)=$$

$$=\frac{1}{1-z}\begin{pmatrix}\dfrac{28}{19} & \dfrac{10}{19}\\ \dfrac{8}{19} & \dfrac{30}{19}\end{pmatrix}+\frac{1}{1-0,5z}\begin{pmatrix}-\dfrac{8}{9} & -\dfrac{10}{9}\\ -\dfrac{8}{9} & -\dfrac{10}{9}\end{pmatrix}+\frac{1}{1-0,05z}\begin{pmatrix}-\dfrac{100}{171} & \dfrac{100}{171}\\ \dfrac{80}{171} & -\dfrac{80}{171}\end{pmatrix}.$$

Provedeme zpětnou transformaci

$$f_0=(F_0)^{-1}$$

$$f_0(n)=\begin{pmatrix}\dfrac{28}{19} & \dfrac{10}{19}\\ \dfrac{8}{19} & \dfrac{30}{19}\end{pmatrix}+(0,5)^n\begin{pmatrix}-\dfrac{8}{9} & -\dfrac{10}{9}\\ -\dfrac{8}{9} & -\dfrac{10}{9}\end{pmatrix}+(0,05)^n\begin{pmatrix}-\dfrac{100}{171} & \dfrac{100}{171}\\ \dfrac{80}{171} & -\dfrac{80}{171}\end{pmatrix}$$

Vynásobíme vektorem $q=\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}$ a dostaneme

$$\vec{v}(n)=f_0(n)\vec{q}=\begin{pmatrix}\dfrac{180}{19}\\ \dfrac{26}{19}\end{pmatrix}+(0,5)^n\begin{pmatrix}-\dfrac{46}{9}\\ -\dfrac{46}{9}\end{pmatrix}+(0,05)^n\begin{pmatrix}-\dfrac{800}{171}\\ \dfrac{640}{171}\end{pmatrix}$$

Odtud plyne, že pro dostatečně velké „n“ budou složky $v_i(n)$, $i=1,2...N$ stabilní a bude platit $v_1(n)=\dfrac{186}{19}$, $v_2(n)=\dfrac{26}{19}$ a tedy nezávisí na počtu kroků n. □

Také v tomto případě můžeme asymptotické chování tohoto vektoru $\vec{v}(n)$ studovat na základě rozkladu na stacionární a tranzientní část (opět pomocí $\mathbb{Z}$-transformace)

$$(I-\beta\cdot z\cdot\mathbb{P})^{-1}=\frac{1}{1-\beta\cdot z}S+F_{\beta\cdot z}(T)$$

$$\vec{v}=\vec{q}+\beta\cdot\mathbb{P}\cdot\vec{v} \tag{4.55}$$

Což je soustava N rovnic o N neznámých, kterou umíme řešit.

Pro náš příklad to vede na soustavu

$$v_1=7+0,25v_1+0,25v_2,$$

$$v_2=-1+0,2v_1+0,3v_2,$$

která má řešení $v_1=\dfrac{186}{19}$,$v_2=\dfrac{26}{19}$.

4.19.2 Rozhodovací proces s alternativami

Předpokládejme, že existuje nějaké rozhodovací centrum, které v souladu s určitým cílem vždy v každém kroku, volí jeden z konečného počtu možností. Tím řídí průběh celého procesu. Je zřejmý požadavek, aby tato volba byla optimální, a to pro dosti dlouho probíhající proces. Potom mluvíme o řízení M procesů nebo o procesech sekvenčního rozhodování (dynamického programování na M procesech). Ocenění jednotlivých přechodů (tj. stanovení pravděpodobností přechodů a určení jejich výnosů) jsou důležité pro srovnávání jednotlivých alternativ, pro možnost volby mezi nimi a tím i pro možnost výběru optimálního řešení.

Příklad 4.77. Studium

- Průběžné - vyžaduje hodně času, ale poznatky jsou trvalejší.
- Nárazové - Vyžadují málo času, ale důsledkem je rychlé zapomínání a tedy velké riziko.

Příklad 4.78. Bludiště - na každé křižovatce se mohu rozhodnout kam půjdu dále.

Příklad 4.79. Pacient má žaludeční vředy. Lékař se musí rozhodnout, zda jej bude léčit medikamenty a dietou a nebo zda je už nutná operace, která ale bývá mnohem dražší.

4.19.3 Rekurentní metoda řešení rozhodovacího procesu s alternativami

Označme alternativu (možnost) pro každý stav „k“. Počet alternativ v i-tém stavu označme „k_i“. V jednotlivých stavech vyvolá každá možnost obecně jiné rozložení pravděpodobnosti přechodu p_{ij}^k a jiné ocenění příslušných přechodů r_{ij}^k. Zde k není mocnina, ale horní index. Zápis je tak přehlednějšíve srovnání se zápisem $r_{i,j,k}$.

Naším úkolem je najít takový vektor alternativ $\vec{d}(n)$ se složkami $d_i(n)$, který bude optimalizovat celkové očekávané výnosy $\vec{v}\,(n)$. Posloupnost vektorů $\vec{d}(n), \quad n = 1, 2...$ udává počet období, které zbývají do konce toho daného procesu. Tím si definujeme strategii, tj. postup takého MP, který vede k optimu.

Pokud tento postup existuje a je nezávislý na čase, pak mluvíme o stacionárním procesu. Budeme předpokládat, že existuje taková stacionární strategie. Při postupném zkoumání jednotlivých alternativ se ukazuje, že optimální strategie „n“ kroků před koncem je možná pokud budeme vycházet a optima v $(n-1)$ kroku před koncem procesu. Můžeme to vyjádřit jako

$$v_i(n) = \max_k \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k \left(r_{ij}^k + v_j(n-1)\right) \tag{4.56}$$

zde $v_i(n)$, $v_i(n-1)$ jsou očekávané výnosy při zvoleném optimálním postupu. Index „k“ není mocninou, ale označuje k-tou alternativu příslušného stavu.

Výběr možnosti „k“ má za následek přechod do jiného stavu, který se řídí pravděpodobnostními pravidly, které charakterizují hodnoty „p_{ij}^k, $i,j = 1,2,\dots,N$“.

Přičemž p_{ij}^k udává pravděpodobnost přechodu ze stavu „i“ do stavu „j“, při výběru možnosti „k“.

Přechod ze stavu „i“ do stavu „j“ při výběru možnosti „k“ je spojen s vytvořením nějakého výnosu „r_{ij}^k“.

Zde je třeba zdůraznit, že r_{ij}^k nemusí být pouze kladné číslo, čili zisk, může se jednat o nulovou hodnotu i o ztrátu a potom budeme mít zápornou hodnotu.

Rozepíšeme si rovnici (4.56) a označíme $q_i^k = \sum\limits_{j=1}^{N} p_{ij}^k r_{ij}^k$, potom dostaneme

$$v_i(n) = \max_k \left(q_i^k + \sum_{j-1}^{N} p_{ij}^k \cdot v_j(n-1) \right). \tag{4.57}$$

q_i^k je přímý výnos za pobyt ve stavu „i“ v jednom období (tj. mezi dvěma přechody).

Při výpočtu sledujeme jednak vektor vybraných alternativ $\vec{d}(n)$ a jednak celkový výnos při optimálním postupu. Právě popsaný postup je vhodný pro procesy, které budou končit po malém počtu kroků.

Příklad 4.80. Máme výrobní linku, která může být v provozu (tj. ve stavu 1) a nebo v opravě (tj. ve stavu 2). Ve stavu 1 (v provozu) je možný plně automatizovaný provoz (bez jakékoliv kontroly) = možnost 1, nebo provoz s namátkovou kontrolou = možnost 2, nebo provoz s pravidelnou kontrolou = možnost 3. Ve stavu 2 je možná oprava linky bez výměny komponent = možnost 1, nebo linky s výměnou komponent = možnost 2,

Za dostatečně dlouhý interval byly získány pravděpodobnosti přechodu a jednotlivé hodnoty ocenění.

Stav	Možnost	Pravděpodobnosti přechodu		Ocenění	
„i“	„k“	„p_{i_1}“	„p_{i_2}“	„r_{i_1}“	„r_{i_2}“
1	1	0,4	0,6	16	4
	2	0,7	0,3	11	2
	3	0,9	0,1	8	1
2	1	0,5	0,5	4	-6
	2	0,6	0,4	2	-10

Řešení. Vyjdeme ze stavu (4.57). Určíme se hodnoty q_i^k

$$q_1^1 = 0,4 \cdot 16 + 0,6 \cdot 4 = 8,8.$$

$$q_1^2 = 0,7 \cdot 11 + 0,3 \cdot 2 = 8,3.$$

$$q_1^3 = 0,9 \cdot 8 + 0,1 \cdot 1 = 7,3.$$
$$q_2^1 = 0,5 \cdot 4 + 0,5 \cdot (-6) = -1.$$
$$q_2^2 = 0,6 \cdot 2 + 0,4 \cdot (-10) = -2,8.$$

Budeme předpokládat, že nám nezáleží na tom, v jakém stavu proces skončí a proto budeme brát, že složky $v_i(0)$ jsou všechny nulové, tj. $v_i(0) = 0, \; i = 1, 2$.

Potom vektor $\vec{v}_1$ bude mít tvar

$$v_1(1) = \max_k \left[q_1^1 + \sum_{j=1}^{N} p_{1j}^1 \cdot 0; q_1^2 + \sum_{j=1}^{N} p_{1j}^2 \cdot 0; q_1^3 + \sum_{j=1}^{N} p_{1j}^3 \cdot 0 \right] = \max_k [8,8; 8,3; 7,3] = 8,8.$$

$$v_2(1) = \max_k \left[q_2^1 + \sum_{j=1}^{N} p_{2j}^1 \cdot 0; q_1^2 + \sum_{j=1}^{N} p_{2j}^2 \cdot 0 \right] = \max_k [-1; -2,8] = -1.$$

v obou případech (při výběru maxima) je výhodnější první možnost, neboli jsme dostali $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Analogicky pro vektor $\vec{v}(2)$ budeme mít

$$\vec{v}_1(2) = \max_k \left[q_1^1 + \sum_{j=1}^{N} p_{1j}^1 \cdot v_j(1); q_1^2 + \sum_{j=1}^{N} p_{1j}^2 \cdot v_j(1); q_1^3 + \sum_{j=1}^{N} p_{1j}^3 \cdot v_j(1) \right] =$$
$$= \max_k [8,8 + (0,4 \cdot 8,8 + 0,6 \cdot (-1)); 8,3 + (0,7 \cdot 8,8 + 0,3 \cdot (-1));$$
$$7,3 + (0,9 \cdot 8,8 + 0,1 \cdot (-1))] =$$
$$= \max_k [11,72; 14,16; 15,12] = 15,12.$$

$$\vec{v}_2(2) = \max_k \left[q_2^1 + \sum_{j=1}^{N} p_{2j}^1 \cdot v_j(1); q_2^2 + \sum_{j=1}^{N} p_{2j}^2 \cdot v_j(1) \right] =$$
$$\max_k [-1 + (0,5 \cdot 8,8 + 0,5 \cdot (-1); -2,8 + (0,6 \cdot 8,8 + 0,4 \cdot (-1)]$$
$$= \max_k [2,9; 2,08] = 2,9.$$

Takže vektor optimálních alternativ je dva kroky před koncem tvaru

$$\vec{d}(2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podobně můžeme pokračovat dále. Výnosy 3 kroky před koncem, který je na počátku sledování v prvním nebo druhém stavu potom budou složky vektoru $\vec{v}(3)$:

$$\vec{v}_1(3) = \max_k \left[q_3^1 + \sum_{j=1}^{N} p_{3j}^1 \cdot v_j(2); q_3^2 + \sum_{j=1}^{N} p_{3j}^2 \cdot v_j(2); q_3^3 + \sum_{j=1}^{N} p_{3j}^3 \cdot v_j(2) \right] =$$

$$= \max_k [8,8 + (0,4 \cdot 15,12 + 0,6 \cdot 2,9); 8,3 + (0,7 \cdot 15,12 + 0,3 \cdot 2,9);$$
$$7,3 + (0,9 \cdot 15,12 + 0,1 \cdot 2,9)] =$$
$$= \max_k [16,59; 19,75; 21,2] = 21,2.$$

$$\vec{v}_2(3) = \max_k \left[q_3^1 + \sum_{j=1}^{N} p_{3j}^1 \cdot v_j(2); q_3^2 + \sum_{j=1}^{N} p_{3j}^2 \cdot v_j(2) \right] =$$
$$\max_k [-1 + (0,5 \cdot 15,12 + 0,5 \cdot 2,9; -2,8 + (0,6 \cdot 15,12 + 0,4 \cdot 2,9] =$$
$$= \max_k [8,01; 7,43] = 8,01.$$

Dostali jsme, že nejvýdodnější pro nás bude použít třetí možnost u prvního stavu a první možnost u druhého stavu, neboli máme vektor alternativ ve tvaru $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Opět jsme dostali stejný vektor $\vec{d}$ pro dva po sobě jdoucí stavy, tzn. dosáhli jsme optima. □

Nevýhodou této metody je, že neznáme pro určitý počet období přesné kriterium pro to, zda jsme dosáhli optima či nikoliv.

4.19.4 Iterační metoda řešení rozhodovacího procesu s alternativami

Pro procesy, které jsou dlouhodobější, nebo jejíchž doba trvání není přesně ohraničena, je vhodnější použit metod, které využívají asymptotických vlastností MP s rozhodováním.

Místo hledání veličin $v_i(n)$ postupným hodnocením alternativ v každém kroku, se snažíme o určení $v_i(n)$ na základě jejich asymptotických vlastností. Až poté budeme posuzovat alternativy jednotlivých stavů. Nejdříve určíme vztah mezi $v_i(n)$ a $v_j(n-1)$ pomocí asymptotického vyjádření. Protože platí

$$v_i(n) = q_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} \cdot v_j(n-1)$$

a dále

$$v_i(n) = n \cdot g + v_i,$$

můžeme psát

$$n \cdot g + v_i = q_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}[(n-1)g + v_j].$$

Po úpravě, s využitím toho, že

$$\sum p_{ij} = 1,$$

dostáváme

$$g + v_i = q_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} \cdot v_j.$$

Máme tak soustavu N rovnic o $N+1$ neznámých

$$g, v_1, \ldots, v_N,$$

tzn. tato soustava může být řešitelná, ale pouze s parametrem. Nemůžeme přesně určit hodnoty v_j.

Pro posouzení alternativ nám však bude stačit znát relace mezi v_i. Takové relace můžeme dostat, když budeme požadovat stálost rozdílů mezi těmito prvky, tj. $v_i - v_r$. Systém rovnic doplníme o rovnici $v_N = 0$. Vypočtené hodnoty v_i se budou lišit od původních o stejnou konstantu.

Stanovením veličin $g, v_1, v_2 ... v_N$ jsme získali i hodnoty $v_i(n)$ a pomocí těchto hodnot můžeme rozhodovat i o optimální alternativě. Kriteriem pro volbu alternativy je výraz

$$q_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k \cdot v_j(n)$$

Pro dostatečně velké n jej můžeme psát ve tvaru

$$q_i^k + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k \cdot (ng + v_j) = q_i^k + ng \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k \cdot v_j$$

a opět hledáme maximum pro některou z k možných alternativ a tedy $ng \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k$ je konstatna a můžeme ji vynechat. Z toho plyne, že alternativy posuzujeme podle vztahu

$$q_i^k + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k \cdot v_j$$

POSTUP:

1. Pomocí veličin p_{ij}, q_iřešíme soustavu

$$g + v_j = q_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} \cdot v_j, \quad i = 1, 2 ... N \tag{4.58}$$

$$v_N = 0$$

2. Pro každý stav najdeme alternativu k, která maximalizuje výnos

$$q_i^k + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k \cdot v_j, \tag{4.59}$$

kde používáme hodnoty v_j určené v bodě 1.

1. Nalezená alternativa „k“ nám současně poskytuje i hodnoty q_i^k,p_{ij}^k a opakujeme body 1,2.
2. Výpočet končí nalezením vektoru $\vec{d}(n)$ alternativ, který je ve dvou po sobě jdoucích krocích stejný.

V případě užití diskontního faktoru vyjdeme z rovnice (4.53). Nás zajímají limitní výnosy „v_i“, které jsou nezávislé na počtu kroků, a proto můžeme rovnici (4.53) přepsat na tvar

$$v_i = q_i + \beta \sum_{j=1}^{N} p_{ij} \cdot v_j, \tag{4.60}$$

kde $i = 1, 2...N$

Máme soustavu N rovnic o N neznámých, kterou lze řešit.

Určíme si tedy hodnoty v_j a pak hledáme vektor alternativ, který budeme maximalizovat

$$q_i^k + \beta \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k \cdot v_j, \tag{4.61}$$

kde $i = 1, 2...N$.

Získáme vektor alternativ $\vec{d}(n)$

Příklad 4.81. Výrobní linka (předchozí příklad)

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 8,8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ze vztahu (4.58)

$$\begin{aligned} g + v_1 &= 8,8 + 0,4 \cdot v_1 + 0,6 \cdot v_2 \quad & g = 3,43 \\ g + v_2 &= -1 + 0,5 \cdot v_1 + 0,5 \cdot v_2 \quad => \quad & v_1 = 8,9 \\ v_2 &= 0 \quad & v_2 = 0 \end{aligned}$$

i	k	$q_i^k + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k \cdot v_j$
1	1	$8,8 + 0,4 \cdot 8,9 + 0,6 \cdot 0 = 12,36$
	2	$8,3 + 0,7 \cdot 8,9 + 0,3 \cdot 0 = 14,53$
	3	$7,3 + 0,9 \cdot 8,9 + 0,1 \cdot 0 = 15,31$
2	1	$-1 + 0,5 \cdot 8,9 + 0,5 \cdot 0 = 3,45$
	2	$-2,8 + 0,6 \cdot 8,9 + 0,4 \cdot 0 = 2,54$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 7,3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$=> \quad q + v_1 = 7,3 + 0,9 \cdot v_1 + 0,1 \cdot v_2 \quad q = 5,915$

$$q + v_2 = -1 + 0,5 \cdot v_1 + 0,5 \cdot v_2 \quad => \quad v_1 = 13,83$$

$$v_2 = 0 \quad v_2 = 0$$

i	k	$q_i^k + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k \cdot v_j$
1	1	$8,8+0,4\cdot 13,83+0,6\cdot 0 = 14,33$
	2	$8,3+0,7\cdot 13,83+0,3\cdot 0 = 17,98$
	3	$7,3+0,9\cdot 13,83+0,1\cdot 0 = 19,75$
2	1	$-1+0,5\cdot 13,83+0,5\cdot 0 = 5,92$
	2	$-2,8+0,6\cdot 13,83+0,4\cdot 0 = 5,5$

$=> \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Příklad 4.82. Stejné zadání, jen přidáme $\beta = 0,9$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad v_2 = 30,46$$

dosadíme do (15)

$$v_1 = 8,8 + 0,9(0,4 \cdot v_1 + 0,5 \cdot v_2) \quad v_1 = 39,45$$

$$v_2 = -1 + 0,9\,(0,5 \cdot v_1 + 0,5 \cdot v_2) \quad => \quad v_2 = 30,46$$

i	k	$q_i^k + \beta \sum\limits_{j=1}^{N} p_{ij}^k \cdot v_j$
1	1	$8,8 + 0,9\,(0,4 \cdot 39,45 + 0,6 \cdot 30,46) = = 39,45$
	2	$8,3 + 0,9\,(0,7 \cdot 39,45 + 0,3 \cdot 30,46) = = 41,38$
	3	$7,3 + 0,9\,(0,9 \cdot 39,45 + 0,1 \cdot 30,46) = 42$
2	1	$-1 + 0,9\,(0,5 \cdot 39,40 + 0,5 \cdot 30,46) = = 30,46$
	2	$-2,8 + 0,9\,(0,6 \cdot 39,40 + 0,4 \cdot 30,46) = = 29,47$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 7,3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = 7,3 + 0,9(0,9 \cdot v_1 + 0,1 \cdot v_2) \quad v_1 = 61,33$$

$$v_2 = -1 + 0,9\,(0,5 \cdot v_1 + 0,5 \cdot v_2) \quad => \quad v_2 = 48,36$$

i	k	$q_i^k + \beta \sum\limits_{j=1}^{N} p_{ij}^k \cdot v_j$
1	1	57
	2	60
	3	$61,33$
2	1	$48,36$
	2	$47,73$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.20 Skryté Markovské modely

4.20.1 Úvod

Skryté Markovské procesy (Skryté Markovské modely) se v literatuře běžně označují zkratkou HMM, tj. Hinden Markov Models.

Je to "zlatý standard" pro analýzu časových řad, protože jde o statistický model, který je ještě zvládnutelný algoritmy s polynomiální složitostí.

Aplikace:

- Rozpoznávání řečových signálů (x signál z mikrofonu, k fonémy).
- Vyhledávání slov v promluvě (x slova, k označené kusy promluvy).
- Rozpoznávání rukopisných znaků (x tahy pera, k podpisy).
- Rozpoznávání v obrazech, např. dopravní značky (x sloupce registrační značky, k znaky značky).
- Biomedicínské inženýrství - analýza signálů EKG a EEG (x signál, k charakteristiky signálu).
- Bioinformatika, analýza DNA sekvencí (x odezva fluorescenčně označených molekul, $k \in \{A, C, G, T\}$) nebo ($x \in \{A, C, G, T\}$, k interpretačně významné posloupnosti).
- Mobilní robotika (x body pohybu robota, k interpretace pohybu).

Definice 4.83. Konečný automat je uspořádaná šestice $(K, V, X, \delta, K_0, F)$, kde
K je konečná množina stavů automatu,
V je konečná abeceda vstupních symbolů,
X je konečná abeceda výstupních symbolů,
K_0 je počáteční stav, přičemž $K_0 \subset K$,
F je množina cílových stavů, přičemž $F \subset K$,
$\delta : K \times V \to K \times X$ je přechodová funkce.

Fungování automatu.
Automat funguje ve shodě s rozdělením pravděpodobnosti

$$p(x, k) = p(x_1, x_2, \ldots, x_n, k_0, k_1, \ldots, k_n) = p(k_0) \cdot \prod_{i=1}^{n} p\left(x_i, k_i / k_{i-1}\right).$$

To znamená, že automat na počátku generuje náhodný stav k_0 s pravděpodobností $p(k_0)$ a přejde do něj. V i-tém okamžiku generuje dvojici (x_i, k_i) s pravděpodobností $p(x_i, k_i/k_{i-1})$. Na výstupu dává automat symbol x_i a přechází do stavu k_i.

Příklad 4.84. Statistický zjednodušený model počasí.
Mějme stavy:
k_1 - dešťové nebo sněhové srážky,
k_2 - zataženo,
k_3 - slunečno.
Nechť přechodová matice má tvar

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

Jedná se o příklad automatu a současně i o Markovský proces.

Náhodné posloupnosti

Pozorování $x = (\quad x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$.

Skryté stavy $k = (k_0, k_1, k_2, \ldots, k_n) \in K^{n+1}$.

Zavedeme si označení $(x_a, x_{a+1}, \ldots, x_b) = x_a^b$.

Potom pozorování $x = x_1^n$, skryté stavy $k = k_0^n$.

Markovské posloupnosti se skrytými stavy.

Statistický model

$$p(x, k) = X^n \times K^{n+1} \to \mathbb{R}.$$

Markovský řetězec: Předpokládáme, že pro všechny posloupnosti $x = (x_1^i, x_{i+1}^n)$ a $k = (k_0^{i-1}, k_i, k_{i+1}^n)$ platí

$$p(x, k) = p(k_i) \cdot p\left(x_1^i, k_0^{i-1}/k_0\right) \cdot p\left(x_{i+1}^n, k_{i+1}^n/k_i\right). \tag{4.62}$$

Budeme se nyní věnovat pouze skrytým stavům. Vyjdeme přitom z (4.62). Pro skryté stavy po sčítání přes všechna možná pozorování x vyplývá Markovská vlastnost pro posloupnosti

$$p(k) = k(k_i) \cdot p\left(k_0^{i-1}/k_i\right) \cdot p\left(p_{i+1}^n/k_i\right). \tag{4.63}$$

V rovnici (4.62) budeme sčítat přes posloupnosti skrytých stavů k_{i+2}^n a potom přes posloupnosti pozorování x_{i+2}^n. Dostaneme

$$p\left(x_1^{i+1}, k_0^{i+1}\right) = \sum_{x_{i+2}^n} \sum_{k_{i+2}^n} p(x, k) = p\left(x_1^i, k_0^i\right) \sum_{x_{i+2}^n} \sum_{k_{i+2}^n} p\left(x_{i+1}^n, k_{i+1}^n/k_i\right)$$

$$= p\left(x_1^i, k_0^i\right) p\left(x_{i+1}, k_{i+1}/k_i\right).$$

Využijeme předchozí vztah rekurzivně a dostaneme

$$p(x, k) = p(x_1, \ldots, x_n, k_0, \ldots, k_n) = p(k_0) \prod_{i=1}^{n} p(x_i, k_i/k_{i-1}).$$

Tím se nám výpočet složité funkce o $(2n+1)$ proměnných zjednodušil na výpočet n funkcí $p(x_i, k_i/k_{i-1})$ o 3 proměnných a jedné funkce $p(k_0)$ o jedné proměnné.

Definice 4.85. Skrytý Markovský model je stochastický automat $HMM = (N, M, A, B, \pi)$, který je charakterizován následujícími vlastnostmi:

1. N označuje počet stavů HMM v množině $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_N\}$ s hodnotami q_t v čase t.

2. M označuje počet navzájem různých pozorovaných symbolů $v_1, v_2, \dots, v_M$ s hodnotou Q_t v čase t. Pozorované symboly odpovídají fyzickému výstupu automatu. Vždy je budeme označovat jako jednotlivá písměna abecedy.

3. A je čtvercová matice řádu N, kde $A = \{a_{ij}\}$ označuje pravděpodobnost rozdělení přechodů mezi jednotlivými stavy, tj.

$$a_{ij} = P(q_{t+1} = S_j / q_i = S_i), \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

znamená, že automat, který se v čase q_t nachází ve stavu S_i přejde s pravděpodobností a_{ij} do stavu S_j.

4. B je matice typu $N \times M$, kde $B = \{b_j(k)\}$ označuje pravděpodobnostní rozdělení pozorovaných symbolů v jednotlivých stavech. Pravděpodobnost

$$b_j(k) = P(v_k \text{ v čase } t / q_t = S_i), \quad 1 \leq j \leq N, \ 1 \leq k \leq M,$$

znamená, že automat generuje v čase q_t pozorovaný symbol v_k a nachází se ve stavu S_i

5. π je N-dimenzionální vektor takový, že $\pi = \{\pi_i\}$ označuje počáteční rozdělení pravděpodobností jednotlivých stavů, kde

$$\pi_i = P(q_1 = S_i), \quad 1 \leq i \leq N,$$

tj. prvděpodobnost, že automat se v čase q_1 nachází ve stavu S_i

Daný HMM s příslušnými hodnotami $N, M, A.M, \pi$ lze použít jako generátor pozorovací posloupnosti

$$O = O_1 O_2 \dots O_T \tag{4.64}$$

kde každé pozorování O_i je jedním z možnách pozorovaných symbolů $v_1, v_2, dots, v_M$ a T je celkový počet pozorování v posloupnosti, tj. délka pozorované posloupnosti.

Algoritmus pro generování pozorovací posloupnosti

1. Vybereme počáteční stav $q_1 = S_i$ podle počátečního rozdělení pravděpodobností jednotlivých stvů π.

2. Nastavíme $t = 1$.

3. Vybereme $O_t = v_k$ podle pravděpodobnostního rozdělení pozorovaných symbolů ve stavu S_i, tj. $b_i(k)$.

4. Přesuneme se do nového stavu $q_{t+1} = S_j$ podle pravděpodobnostního rozdělení přechodů mezi stavy S_i a S_j, tj. a_{ij}.

5. Pokud je $t < T$, potom nastavíme $t = t + 1$ a jdeme zpět na krok 3. a opakujeme postup. V případě $t = T$ ukončujeme proces.

Zatímco u běžného Markovského procesu odpovídá každému stavu konkrétní pozorovatelná událost (konkrétní technický jev), tak u skrytých Markovských modelů jsou jednotlivá pozorování pravděpodobnostní funkcí každého stavu. Neboli skrytý Markovský model je vlastně vnořený náhodný proces, kdy jeden náhodný proces je vnořený, tj. není možné jej přímo pozorovat, tj. je **skrytý**, ale můžeme jej pozorovat pomocí další množiny náhodných stvů, které tvoří pozorovací posloupnost (4.64).

Příklad 4.86. Mějme skrytý Markovský model se třemi stavy a dvěma pozorovanými stavy.

$$N = 2,\ s = \{S_1, S_2, S_2\},\ M = 2,\ V = \{v_1, v_2\},$$

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix},$$

$$B = \{b_j(k)\} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\pi = \{\pi_i\} = \{0.5, 0.5, 0\}.$$

Pozorovaná posloupnost potom bude ve tvaru

$$O = v_1 v_1 v_2 v_2 v_1 v_2 v_1 v_2 v_1 v_1 v_2 v_2 v_1 v_2 \dots$$

Pokud použijeme jiné označení pro pozorované stavy dostaneme například pro volbu $v_1 = 1, v_2 = 0$ posloupnost

$$O = 110010110010\dots$$

Pro volbu $v_1 = \spadesuit, v_2 = \clubsuit$ dostaneme

$$O = \spadesuit\spadesuit\clubsuit\clubsuit\spadesuit\clubsuit\spadesuit\clubsuit\spadesuit\spadesuit\clubsuit\clubsuit\spadesuit\clubsuit\dots$$

Stále se jedná o stejný výsledek, který nezávisí na použitém označení.

4.20.2 Základní úkoly řešené u HMM

Úloha č. 1: **Vyhodnocení.**
Jak efektivně spočítat pro konkrétní pozorovanou posloupnost (4.64) a daný HMM model $\lambda = (N, M, A, B, \pi)$ pravděpodobnost $P(O/\lambda)$?
Neboli určit pravděpodobnost, že je pozorovaná posloupnost (4.64) generována zvoleným modelem λ.

Úloha č. 2: **Dekódování**
K zadanému modelu λ a zadané pozorovací posloupnosti (4.64) jak co nejlépe vybrat posloupnost stavů $Q = q_1 q_2 \dots q_T$, která by co nejlépe odpovídala pozorované posloupnosti.
Neboli pokusit se odkrýt skrytou část modelu a najít správnou posloupnost stavů.

Úloha č. 3: **Učení.** Někdy se používá i označení "trénování".
Jakým způsobem můžeme odhadnout parametry modelu $\lambda = (N, M, A, B, \pi)$ při zadané pozorovací posloupnosti (4.64) tak, aby pravděpobodnost $P(O/\lambda)$ byla maximální.
Neboli k daným pozorováním sestavit co nejpřesnější model.

4.20.3 Řešení třetí úlohy

Zatím není znám žádný analytický postup, který by vedl k řešení úlohy č. 3, tj. neumíme sestavit postup, který by maximalizoval pravděpodobnost pozorované posloupnosti. Jinými slovy k libovolné konečné pozorované posloupnosti neexistuje optimální způsob, který by umožňoval odhadovat parametry modelu.

Z druhé strany jsme schopni vybrat model $\lambda = (N, M, A, B, \pi)$ tak, že pravděpodobnost $P(O/\lambda)$ bude lokálně maximalizovaná numerickými iterativními metodami. Jedním z nejčastěji používaných postupů je algoritmus Baum-Welch, který je mimo jiné i součástí Toolboxu pro MATLAB. Budeme se nyní věnovat tomuto algoritmu podrobněji.

Označmě
$$\xi_t(i, j) = P(q_t = S_i, q_{t+1} = S_j/O, \lambda), \tag{4.65}$$
neboli pro daný model λ a pro pozorovanou posloupnost O je $\xi_t(i, j)$ pravděpodobnost toho, že se v čase t nalézáme ve stavu S_i a v čase $t + 1$ ve stavu S_j.

Jako dopřednou proměnnou $\alpha_t(i)$ nazveme pro $t \leq T$ pravděpodobnost částečné pozorované posloupnosti $O = O_1 O_2 \dots O_t$ a stavu S_i v čase t pro daný model λ, která je definována vztahem
$$\alpha_t(i) = P(O_1 O_2 \dots O_t, q_t = S_i/\lambda). \tag{4.66}$$

Obdobně jako zpětnou proměnnou $\beta_t(i)$ nazveme pro čas $t + 1, \dots, T$ pravděpodobnost částečné pozorované posloupnosti $O = O_{t+1} O_{t+2} \dots O_T$ a stavu S_i v čase t pro daný model λ, která je definována vztahem
$$\beta_t(i) = P(O_{t+1} O_{t+2} \dots O_T, q_t = S_i/\lambda). \tag{4.67}$$

S využitím právě zavedených označení můžeme psát:
$$\xi_t(i, j) = \frac{P(q_t = S_i, q_{t+1} = S_j/O, \lambda)}{P(O, \lambda)} = \frac{\alpha_t(i) a_{ij} b_j(O_{t+1}) \beta_{t+1}(j)}{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_t(i) a_{ij} b_j(O_{t+1}) \beta_{t+1}(j)} \tag{4.68}$$

Pojmy k zapamatování

- Seznámili jsme se podstatou sktrytých Markovských procesů.
- Vysvětlili jsme si rozdíl mezi výsledkem přechodu do daného stavu a pozorováním, které mezi sebou nemusí mít jednoznačnou vazbu.

– Byly zformulovánu tři základní úkoly, které řeší teorie skrytých Markovských procesů.
– Ukázali jsme si postup při řešení třetí úlohy.

Kontrolní otázky

1. Co rozumíme pojmem pozorování?
2. Co je konečný automat?
3. Které úlohy se řeší v teorii skrytých Markovských procesů?
4. Jaké parametry musíme znát pro určení skrytého Markovského modelu?

Cvičení

1. Mějme přístroj, který je zapojen do sítě. Při zvýšení napětí v elektrické rozvodné síti sítí s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ dojde k vyřazení zabezpečovacího zařízení a s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ přestane přístroj pracovat. Jestliže je vyřazeno zabezpečovací zařízení, potom při následném zvýšení napětí přestane přístroj pracovat s pravděpodobností $\frac{2}{3}$. Určete pravděpodobnost bezchybného chodu přístroje a pravděpodobnost vyřazení jeho zabezpečovacího zařízení, jestliže došlo ke zvýšení napětí n krát po sobě.

Výsledky

1. $p_{11}^{(n)} = \left(\frac{1}{6}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots,$

   $p_{22}^{(n)} = \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots.$

Maplety

V následujících mapletech si můžete některé studované pojmy přiblížit, případně si sestavit vlastní zadání příkladů.

1. Násobení matic
2. Výpočet determinantu matice
3. Řešení soustav lineárních rovnic přímými metodami
4. Výpočet inverzní matice
5. $\mathcal{Z}$–transformace
6. Výpočet určitého integrálu
7. Výpočet exponenciály matice
8. Laplaceova transformace

9. Rozklad na parciální zlomky

webMathematica

V následujících mapletech si můžete některé studované pojmy přiblížit, případně si sestavit vlastní zadání příkladů.

1. Adjungovaná matice

Literatura

[1] J. Anděl: *Matematická statistika*, Praha, SNTL, 1978

[2] J. Anděl: *Statistiské metody*, Praha, Matfyzpress, 1993

[3] L. Bican: *Lineární algebra,* SNTL 1979, rozšířené vydání 2001

[4] G. Birkhoff, T.C. Bartee: *Aplikovaná algebra,* Alfa, Bratislava 1981

[5] G. Birkhoff, S. MacLane: *Algebra,* Alfa,Bratislava 1973

[6] M. Budíková, Š. Mikoláš, P. Osecký: *Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika*, Brno, MU – Př.fak, 1998

[7] M. Demlová, J. Nagy: *Algebra,* MVšT —III, SNTL 1982

[8] J. Diblík, A. Haluzíková, J. Baštinec: *Numerické metody a matematická statistika.* VUT Brno, 1987 (skriptum)

[9] J. Diblík, J. Baštinec *Matematika IV.* Nakladatelství VUT v Brně, 1991 (skriptum)

[10] N. Dudorkin: *Operační analýza,* FEL ČVUT, Praha, 1997.

[11] F. Fabian, Z. Kluiber: *Metoda Monte Carlo a možnosti jejího uplatnění*, Prospektrum, Praha, 1998

[12] L.E. Garner: *Calculus and analytic geometry*, London, 1988

[13] A. Haluzíková *Numerické metody.* Redakce VN MON VUT Brno, 1989 (skriptum)

[14] A. Haluzíková, V. Kudláček, B. Zástěra: *Numerické metody a matematická statistika.* SNTL Brno, 1983 (skriptum)

[15] V. Havel,J. Holenda: *Linaární algebra,* SNTL 1984

[16] Z. Horský: *Množiny a matematické struktury,* MVšT — I, SNTL 1980

[17] Z. Horský: *Vektorové prostory,* MVšT — II, SNTL 1980

[18] Z. Horský: *Diferenciální počet*, MVŠT - V., Praha 1982

[19] C.W. CHurchman, R.L. Ackoff, E.L. Arnoff: *Úvod do operačného výskumu.* ALFA, Bratislava 1968.

[20] K. Itô: *Stochastic Processes*, Springer, Berlin, New York 2004

[21] V. Jarník: *Diferenciální počet I, II.*, Nakladatelství ČSAV, Praha 1963

[22] V. Jarník: *Integrální počet I, II.*, Nakladatelství ČSAV, Praha 1963

[23] J. Kuben: *Diferenciální rovnice.* VA Brno 2000.

[24] A. Laščiak a kol.: *Dynamické modely.* ALFA, Bratislava 1985.

[25] J. Likeš, J. Machek: *Počet pravděpodobnosti*, SNTL, Praha 1981

[26] J. Likeš, J. Machek: *Matematická statistika*, SNTL, Praha 1983

[27] G.I. Marčuk: *Metody numerické matematiky.* Academia Praha 1987

[28] S. Míka: *Numerické metody algebry,* MVŠT — IV, SNTL 1982

[29] J. Nagy, E. Nováková, M. Vacek: *Integrální počet*, MVŠT — VI, SNTL Praha 1984

[30] J. Nagy, E. Nováková, M. Vacek: *Vektorová analýza*, MVŠT - VIII., Praha 1984

[31] M. Nekvinda, J. Šrubař, J. Vild: *Úvod do numerické matematiky.* SNTL 1976

[32] P. Pták: *Diferenciální rovnice, Laplaceova transformace.* ČVUT Praha 1999

[33] P. Přikryl: *Numerické metody matematické analýzy.* MVŠT — XXIV, SNTL 1985

[34] K. Rektorys a kol.: *Přehled užité matematiky.* SNTL Praha

[35] Z. Riečanová a kol.: *Numerické metódy a matematická štátistika.* Alfa Bratislava 1987

[36] J. Seger, R. Hindls: *Statistické metody v tržním hospodářství*, Victoria Publishing, Praha 1995, ISBN 80-7187-058-7

[37] T. Šalát: *Metrické priestory,* Alfa, Bratislava 1981

[38] M. Šikulová, Z. Karpíšek: *Matematika IV – Pravděpodobnost a matematická statistika.*VUT Brno, 1987 (skriptum)

[39] O. Tyc: *Operační analýza.* MZLU Brno 2002.

[40] T.H. Wonnacot, R.J. Wonnacot: *Statistika pro obchod a hospodářství.* Victoria Publishing, Praha, ISBN 80-85605-09-0

[41] J. Zapletal: *Operační analýza.* Kunovice 1995.