

1 Stavové (vnitřní) popisy, rovnovážné stavy

Příklad 1 (Zavěšené a inverzní kyvadlo).

Systém je popsán diferenciální rovnicí:

$$\ddot{\varphi} + \frac{kl}{m}\dot{\varphi} + gl \sin \varphi = \frac{f(t)}{m} \quad (1)$$

kde m – hmotnost koncové zátěže kyvadla, l – délka nehmotného bodu, k – koeficient tření, g – gravitační zrychlení, φ – úhel, $f(t)$ – možné vnější síly (vstup systému).

Najděte stavový popis tohoto systému.

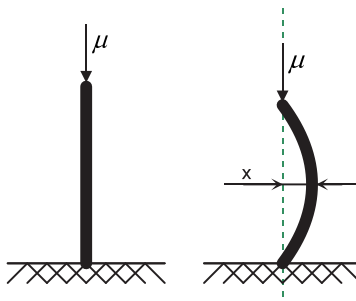
Příklad 2 (Prohnutý nosník).

Systém je popsán diferenciální rovnicí:

$$m\ddot{x} = -d\dot{x} + \mu x - \lambda x - x^3, \quad (2)$$

kde x – odchylka středu nosníku od kolmice k podložce, m – hmotnost nosníku, $-d\dot{x}$ – tlumení třením, μx – tlak na nosník, $\lambda x + x^3$ – pružná síla nosníku. Všechny parametry jsou z fyzikálního významu kladné.

Najděte stavový popis tohoto systému.



Obrázek 1: Prohnutý nosník

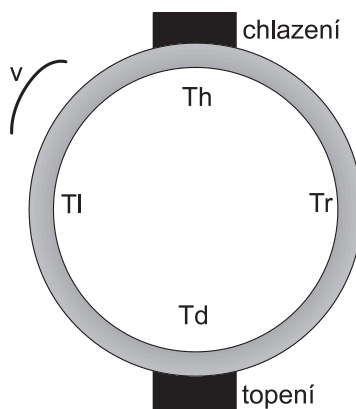
Příklad 3 (Lorenzův chaotický systém).

System je popsán diferenciální rovnicí:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= -bx_3 + x_1x_2\end{aligned}\tag{3}$$

kde $x_1 \equiv v$ – rychlost proudění kapaliny, $x_2 = T_l - T_r$, T_l, T_r – teploty v levém a v pravém bodě prstence, $x_3 = T_h - T_d + r$, r – souhrnná míra zahřívání a chlazení (čím větší r , tím více se dole ohřívá a nahoře chladí), T_d, T_h – teploty v dolním a v horním bodě prstence. Všechny parametry uvažujte kladné ($r, \sigma, b > 0$).

Najděte stavový popis tohoto systému.



Obrázek 2: Lorenzův chaotický systém – zjednodušený model

2 Rovnovážné stavy, fázová rovina

Příklad 4.

Pro systém daný v příkladu 1 určete všechny rovnovážné stavy. Nakreslete fázovou rovinu.

Příklad 5.

Pro systém daný v příkladu 2 určete všechny rovnovážné stavy. Diskutujte existenci a počet rovnovážných stavů pro situace:

(i) $\mu < \lambda$

(ii) $\mu = \lambda$

(iii) $\mu > \lambda$

Pro případ 5-(iii) nakreslete fázovou rovinu.

Příklad 6.

Pro systém daný v příkladu 3 určete všechny rovnovážné stavy. Diskutujte existenci a počet rovnovážných stavů pokud budeme zvyšovat r (σ , b budou neměnné).

Příklad 7.

Pro dané systémy určete rovnovážné stavy a nakreslete fázové roviny.

a) $\dot{x} = x^2 - 2$

b) $\dot{x} = x^3 - 2x^2 + 2$

c) $\dot{x} = \tan x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Příklad 8.

Systém je popsán

$$\dot{x} = Ax,$$

určete rovnovážné stavy, jejich typ, nakreslete fázové roviny.

Matice A je dána:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ Srovnejte s 8-a.}$$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ Srovnejte s 8-c.}$$

$$\text{e) } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{f) } A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ Srovnejte s 8-e.}$$

$$\text{g) } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{h) } A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{i) } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \text{ Srovnejte s 8-h.}$$

$$\text{j) } A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{k) } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \text{ Srovnejte s 8-j.}$$

$$\text{l) } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{m) } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \text{ Srovnejte s 8-l.}$$

Příklad 9.

Systém je popsán

$$\dot{x} = Ax,$$

určete rovnovážné stavy, jejich typ, nakreslete fázové roviny. Matice A je dána:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} -2 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Příklad 10.

Systém je popsán

$$\dot{x} = f(x),$$

určete rovnovážné stavy, nakreslete fázové roviny a z fázové roviny určete (lokální) stabilitu těchto stavů.

$$\text{a) } \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - x_1^3 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + 2x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

$$\text{c) } \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \cos x_2 \\ \dot{x}_2 &= \sin x_1 \end{aligned}$$

3 Aproximativní linearizace

Příklad 11.

System daný v příkladu 4 aproximativně linearizujte ve všech rovnovážných stavech. Pro linearizované modely určete typy rovnovážných stavů, nakreslete fázovou rovinu. Porovnejte s fázovou rovinou v příkladu 4.

Příklad 12.

System daný v příkladu 5 pro případ (iii) aproximativně linearizujte ve všech rovnovážných stavech. Pro linearizované modely určete typy rovnovážných stavů, nakreslete fázovou rovinu. Porovnejte s fázovou rovinou v příkladu 5-(iii).

Příklad 13.

System daný v příkladu 6 aproximativně linearizujte ve všech rovnovážných stavech. Pro linearizované modely určete typy rovnovážných stavů, nakreslete fázovou rovinu. Porovnejte s fázovou rovinou v příkladu 6.

Příklad 14.

Systemy dané v příkladu 10 aproximativně linearizujte ve všech rovnovážných stavech. Pro linearizované modely určete typy rovnovážných stavů, nakreslete fázovou rovinu. Porovnejte s fázovými rovinami v příkladu 10.

4 Bendixsonovo kritérium

Příklad 15.

Uvažujte systém daný v příkladu 1. Pomocí Bendixsonova kritéria neexistence mezních cyklů určete, zda pro zadaný systém může existovat mezní cyklus.

Příklad 16.

Uvažujte systém daný v příkladu 2. Pomocí Bendixsonova kritéria neexistence mezních cyklů určete, zda pro zadaný systém může existovat mezní cyklus.

Příklad 17.

Uvažujte systémy dané v příkladu 10. Pomocí Bendixsonova kritéria neexistence mezních cyklů určete, zda pro zadaný systémy může existovat mezní cyklus.

5 Analýza stability

První (nepřímá) Ljapunovova metoda

Příklad 18.

Pro systém daný v příkladu 4 vyšetřete stabilitu rovnovážných stavů systému pomocí nepřímé Ljapunovovy metody.

Příklad 19.

Pro systém daný v příkladu 5 vyšetřete stabilitu rovnovážných stavů systému pomocí nepřímé Ljapunovovy metody.

Příklad 20.

Pro systém daný v příkladu 6 vyšetřete stabilitu rovnovážných stavů systému pomocí nepřímé Ljapunovovy metody.

Příklad 21.

Vyšetřete stabilitu systému daného:

a) $\dot{x} = -x + x^3$

b) $\dot{x} = x + x^3$

c) $\dot{x} = x^3$

d) $\dot{x} = -x^3$

Výsledek kontrolujte řešením diferenciální rovnice a vykreslením trajektorií systému pro různé počáteční podmínky.

Příklad 22.

Systém je popsán:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 - 2x_1x_2\end{aligned}$$

vyšetřete stabilitu rovnovážných stavů.

Příklad 23.

Určete rovnovážné stavy a stabilitu rovnovážných stavů

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1x_2 + ax_1^3 + bx_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + cx_1^2 + dx_1^2x_2\end{aligned}$$

pro různá znaménka a hodnoty konstant a, b, c, d .

Příklad 24.

Určete rovnovážné stavy a stabilitu rovnovážných stavů

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1x_2 - ax_1 \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + x_1^2\end{aligned}$$

pro různá znaménka a hodnoty konstant a, b .

Příklad 25.

Určete rovnovážné stavy a stabilitu rovnovážných stavů

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1^3 + x_1^2x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_2^2 + x_1^2x_2 - x_1^3\end{aligned}$$

pro různá znaménka a hodnoty konstanty a .

Příklad 26.

Určete stabilitu nulového rovnovážného stavu

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \beta \left(\frac{x_1^3}{3} - x_1 \right) \\ \dot{x}_2 &= -x_1\end{aligned}$$

pro situace:

(i) $\beta > 0$

(ii) $\beta = 0$

(iii) $\beta < 0$

Příklad 27.

Vyšetřete podmínky stability rovnovážných stavů systému:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - \alpha x_1 - (x_1 + x_2)^2 x_2\end{aligned}$$

Příklad 28.

Pro systémy z příkladu 10 určete stabilitu rovnovážných stavů nepřímou Ljapunovovou metodou. Srovnajte se závěry z příkladu 10.

Druhá (přímá) Ljapunovova metoda

Při vyšetřování stability rovnovážných stavů mohou nastat tři základní situace (vynecháme-li možnou existenci mezních cyklů):

- A) existuje právě jeden rovnovážný stav,
- B) existuje víc rovnovážných stavů,
- C) neexistuje žádný rovnovážný stav.

Přesněji řečeno může nastat ještě další možnost a to, že existuje nekonečně mnoho rovnovážných stavů, ale jsou např. násobkem $k\pi$. Potom záleží na situaci jakou řešíme. Např. v případě inverzního kyvadla nebudeme uvažovat nekonečně mnoho stavů, ale dva různé rovnovážné stavy.

V případě A) nemusí rovnovážný stav být nutně nulový a přesto vztahy pro Ljapunovovu funkci:

1. $V(x) > 0$ pro $x \neq x^r$,
2. $V(x^r) = 0$,
3. $\dot{V}(x) < 0$ pro $x \neq x^r$,
4. $\dot{V}(x^r) = 0$

budou platit.

Pokud je více různých rovnovážných stavů (případ B), je teoreticky možné uvažovat jednu Ljapunovovu funkci, pro kterou by ale nutně muselo platit, že $\min_x V(x) = V(x^r)$ pro $x = x^r$ na oblasti přitažlivosti daného rovnovážného stavu. Což znamená, že z triviální podmínky na nulovost Ljapunovovy funkce v rovnovážném stavu bychom udělali složitou záležitost.

Proto je výhodnější mít pro každý rovnovážný stav Ljapunovovu funkci. Většinou se určí pro jeden rovnovážný stav (nejlépe pro nulový rovnovážný

stav), poté se provede transformace $z = x - x^r$ a v souřadnicích z se pro nulový rovnovážný stav $z^r = 0$ použije stejná Ljapunova funkce. Důležité je, že vyšetřování stability rovnovážných stavů se v tomto případě provádí na oblastech přitažlivosti.

Věta 1 (Četajevova věta o nestabilitě). *Je-li rovnovážný stav $x^r = 0$ systému:*

$$\dot{x} = f(x)$$

Funkce $V : D \rightarrow R$ ($D \subset R^n$) je spojitě diferencovatelná taková, že $V(0) = 0$ a že $V(x) > 0$ pro libovolné x na malém okolí $\|x^r\|$. Existuje-li oblast U

$$U = \{x \in B_r \mid V(x) > 0\}, \quad B_r = \{x \in R^n \mid \|x\| \leq r\},$$

kde $r > 0$ je poloměr B_r okolí počátku, na které je $\dot{V}(x) > 0$. Potom nulový rovnovážný stav $x^r = 0$ je nestabilní.

Příklad 29.

Systém

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1x_2\end{aligned}$$

Rovnovážený stav je $x^r = [0; 0]$. Ljapunovova funkce je ve tvaru:

$$V(x) = \frac{1}{2} (x_1^2 - x_2^2)$$

Na množině Ω podle obrázku 29 je funkce pozitivně definitní.

Derivace je

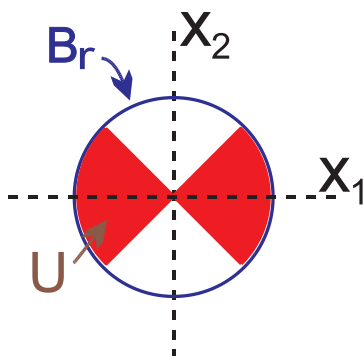
$$\dot{V}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2^2 - x_2x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2 > 0$$

Podle Četajevovy věty o nestabilitě je rovnovážný stav $x^r = 0$ nestabilní.

Příklad 30.

Pro systém daný v příkladu 1 vyšetřete stabilitu rovnovážných stavů systému pomocí přímé Ljapunovy metody.

Poznámka: Ljapunovovu funkci uvažujte ve tvaru $V(x) = \frac{1}{2}mx_2^2 + mgl(1 - \cos x_1)$



Obrázek 3: Množina U pro $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$

Příklad 31.

Pro systém daný v příkladu 1 uvažujte funkci $f(t) = 2glm \sin x_1$. Systém (1) uzavřete touto zpětnou vazbou, najděte rovnovážné stavy a srovnajte je s rovnovážnými stavy otevřeného systému (1). Vyšetřete stabilitu rovnovážných stavů uzavřeného systému.

Příklad 32.

Systém je popsán:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 - x_2^3 \end{aligned}$$

vyšetřete stabilitu nulového rovnovážné stavu.

Příklad 33.

Systém je popsán:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{aligned}$$

určete oblast stability nulového rovnovážné stavu.

Poznámka: $V(x) = x_1^2 + x_2^2$

Příklad 34.

Pro lineární systém

$$\dot{x} = Ax,$$

kde matice $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{bmatrix}$ určete derivaci Ljapunovovy funkce, je-li tato funkce dána $V(x) = x^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$. Usuzujte o stabilitě rovnovážného stavu.

Příklad 35.

Pro lineární systém z 34 určete řešení Ljapunovovy rovnice pro $Q = 16 I$. Z výsledku posuďte stabilitu rovnovážného stavu.

Příklad 36.

Systém je popsán:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^4) \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^4) \end{aligned}$$

Rozhodněte o stabilitě či nestabilitě tohoto systému.

Poznámka: $V(x) = \frac{(x_1^2 - x_2^2)}{2}$

Poznámka: Použijte první Četajevovu větu o nestabilitě.

Příklad 37.

Vyšetřete podmínky stability rovnovážného stavu systému

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -cx_3 - bx_2 - ax_1 \end{aligned}$$

Příklad 38.

Vyšetřete podmínky stability rovnovážných stavů systému z příkladu 21. Výsledky porovnejte.

Příklad 39.

Vyšetřete podmínky stability rovnovážných stavů systému z příkladu 26. Výsledky porovnejte.

Příklad 40.

Vyšetřete podmínky stability rovnovážných stavů systému z příkladu 27. Výsledky porovnejte.

Příklad 41.

Vyšetřete podmínky stability rovnovážných stavů systému z příkladu 10-a,b. Výsledky porovnejte i s výsledky příkladu 28.

Metoda metrické ekvivalence

Příklad 42.

Vyšetřete podmínky stability rovnovážných stavů systému z příkladu 26 za předpokladu, že výstup $y = x_1$. Výsledky porovnejte s výsledky příkladů 26 a 39.

Příklad 43.

Vyšetřete podmínky stability rovnovážných stavů systému z příkladu 37 za předpokladu, že výstup $y = x_1$. Výsledky porovnejte.

Metoda variabilního gradientu

Tato metoda funguje tak, že na základě volby gradientu ω a z podmínky $\dot{V}(x) < 0$ dostaneme funkci $V(x)$.

$$\dot{V}(x) < 0 \Rightarrow V(x), V(x^r) = 0$$

Pokud je $V(x) > 0$ je rovnovážný stav stabilní.

V případě, že $V(x) < 0$ nelze o stabilitě rovnovážného stavu rozhodnout. Ale můžeme provést volbu Ljapunovy funkce $V_1(x)$:

$$V_1(x) = -V(x) > 0$$

a

$$V_1(x^r) = -V(x^r) > 0$$

Potom derivace podél trajektorie rovna:

$$\dot{V}_1(x) = -\dot{V}(x) > 0$$

Použijeme větu o nestabilitě a můžeme vyslovit nějaké závěry.

Příklad 44.

Systém je dán

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 - 2x_1x_2^2\end{aligned}$$

K vyšetření stability použijte metodu variabilního gradientu, kde gradient volte ve tvaru

$$\omega = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(x_1) & \alpha_{12}(x_1, x_2) \\ \alpha_{21}(x_1, x_2) & \alpha_{22}(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Příklad 45.

Vyšetřete podmínky stability rovnovážného stavu systému

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - x_1^3\end{aligned}$$

Použijte metodu variabilního gradientu.

Příklad 46.

Vyšetřete podmínky stability rovnovážného stavu systému

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1^2 + bx_2^3 \\ \dot{x}_2 &= -cx_2 + dx_1^3\end{aligned}$$

Použijte metodu variabilního gradientu.

Příklad 47.

Vyšetřete podmínky stability rovnovážného stavu systému

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_1^3x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2\end{aligned}$$

Použijte metodu variabilního gradientu.

6 Lieova derivace, závorka

Příklad 48.

Systém

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

je popsán funkcemi

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_2 \\ -x_1 - \mu(1 - x_1^2)x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -x_1 - x_1x_2^2 \\ -x_2 + x_1^2x_2 \end{bmatrix}, \quad h(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

Určete Lieovy derivace a Lieovo závorky až do řádu n .

Příklad 49.

Pro systém z příkladu 48 ukažte, že Lieovo derivace řádu n je kombinací předchozích Lieových derivací.

Příklad 50.

Pro systém z příkladu 37 spočítejte Lieovo derivace a Lieovo závorky až do řádu n . Dále ukažte, že Lieovo derivace řádu n je kombinací předchozích Lieových derivací.

Příklad 51.

Systém je popsán

$$\text{a) } \begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - \mu(1 - x_1^2)x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} u \\ y &= x_1\end{aligned}$$

$$\text{b) } \begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 - 2x_1x_2 + x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2x_1 \\ 4x_1x_2 \end{bmatrix} u \\ y &= x_1\end{aligned}$$

$$\text{c) } \begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ -ax_1 + bx_2 + \cos x_1(u - x_2^2) \end{bmatrix} \\ y &= x_1\end{aligned}$$

$$\text{d) } \begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} e^{x_2} - 1 \\ -ax_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

$$\text{e) } \begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ g - \frac{k}{m}x_2 - \frac{\lambda\mu x_3^2}{2m(1+\mu x_1)^2} \\ \frac{1+\mu x_1}{\lambda} \left(-Rx_3 + \frac{\lambda\mu}{(1+\mu x_1)^2} x_2 x_3 \right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1+\mu x_1}{\lambda} \end{bmatrix} u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

$$\text{f) } \begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - ax_1^2 x_2 + (x_2 + 1)u \end{bmatrix} \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

$$\text{g) } \begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -kx_1 - 2x_2 u \\ -x_2 + x_1 u \end{bmatrix} \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

$$\text{h) } \begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_1^2 x_2^3 \\ u \end{bmatrix} \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

$$\text{i) } \begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_3^2 + u \\ x_1 + x_2^3 + \alpha x_3 \end{bmatrix} \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

$$\text{j) } \begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_1^2 + x_3 \\ x_1^2 x_2 \\ x_1 \sin x_2 + u \end{bmatrix} \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

$$\text{k) } \begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_3 + x_2 x_3 \\ x_1 + (1 + x_2)u \\ x_2(1 + x_1) - x_3 + u \end{bmatrix} \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

$$\text{l) } \begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_3^2 + u \\ x_2 - \alpha x_3 \end{bmatrix} \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

$$\text{m) } \begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= x_3 \end{aligned}$$

$$\text{n) } \begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_1x_2 - x_1^3 \\ x_1 \\ -x_3 \\ x_1^2 + x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 + 2x_3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= x_4 \end{aligned}$$

$$\text{o) } \begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= x_3 \end{aligned}$$

$$\text{p) } \begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} \sin x_2 + (x_2 + 1)x_3 \\ x_1^5 + x_3 \\ x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

Určete Lieovy derivace a Lieovo závorky až do řádu n . Dále určete relativní řád.

7 Stavová a zpětnovazební transformace, exaktní linearizace

Příklad 52.

Pro systém z příkladu 48 nalezněte stavově ekvivalentní systém

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \bar{f}(\bar{x}) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \bar{h}(\bar{x})\end{aligned}$$

pomocí stavové transformace

$$\bar{x} = T(x)$$

Ekvivalentní systém volte v normální formě dosažitelnosti. Existenci difeomorfního zobrazení $T(x)$ a $T^{-1}(\bar{x})$ srovnajte s říditelností nulového rovnovážného stavu.

Příklad 53.

Pro systém z příkladu 48 nalezněte stavově ekvivalentní systém

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \bar{f}(\bar{x}) + \bar{g}(\bar{x})u \\ y &= \bar{x}_1\end{aligned}$$

pomocí stavové transformace

$$\bar{x} = T(x)$$

Ekvivalentní systém volte v normální formě pozorovatelnosti. Existenci difeomorfního zobrazení $T(x)$ a $T^{-1}(\bar{x})$ srovnajte s pozorovatelností nulového rovnovážného stavu.

Příklad 54.

Pro systémy z příkladu 51 nalezněte stavově ekvivalentní systém

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \bar{f}(\bar{x}) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \bar{h}(\bar{x})\end{aligned}$$

pomocí stavové transformace

$$\bar{x} = T(x)$$

Ekvivalentní systém volte v normální formě dosažitelnosti. Existenci difeomorfního zobrazení $T(x)$ a $T^{-1}(\bar{x})$ srovnajte s říditelností nulového rovnovážného stavu.

Příklad 55.

Pro systémy z příkladu 51 nalezněte stavově ekvivalentní systém

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \bar{f}(\bar{x}) + \bar{g}(\bar{x})u \\ y &= \bar{x}_1\end{aligned}$$

pomocí stavové transformace

$$\bar{x} = T(x)$$

Ekvivalentní systém volte v normální formě pozorovatelnosti. Existenci difeomorfního zobrazení $T(x)$ a $T^{-1}(\bar{x})$ srovnajte s pozorovatelností nulového rovnovážného stavu.

Příklad 56.

Pro systémy z příkladu 48 a z příkladu 51 nalezněte zpětnovazebně ekvivalentní systém v Brunovského formě říditelnosti

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_i &= \bar{x}_{i+1} & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{\bar{x}}_n &= v \\ y &= \bar{x}_1\end{aligned}$$

pomocí zpětnovazební transformace

$$\begin{aligned}\bar{x} &= T(x) \\ v &= K(x) + L(x)u\end{aligned}$$

Použijte zpětnovazební ekvivalenci (u-x) a pro situace $r = n$ i (u-y).

Příklad 57.

Pro systémy z příkladu 51-(m,n), pro které $r < n$, nalezněte zpětnovazebně ekvivalentní systém pomocí zpětnovazební transformace

$$\begin{aligned}\bar{x} &= T(x) \\ v &= K(x) + L(x)u\end{aligned}$$

Zpětnovazební transformaci určete exaktní linarizací

(i) (u-x)

(ii) (u-y), transformaci T_3 určete

- pro systém 51-(m) ze vztahu $L_g T_3 = 0$
- pro systém 51-(n) ze vztahu $L_g T_3 = L_g T_4 = 0$

(iii) (u-y), transformaci T_3 volte

- pro systém 51-(m): $T_3 = x_1$
- pro systém 51-(n): $T_3 = x_3, T_4 = x_1$

Příklad 58.

Pro systémy z příkladu 51-(d,e), pro které $r < n$, nalezněte zpětnovazebně ekvivalentní systém pomocí zpětnovazební transformace

$$\begin{aligned}\bar{x} &= T(x) \\ v &= K(x) + L(x)u\end{aligned}$$

Zpětnovazební transformaci určete exaktní linarizací

(i) (u-x), transformaci T_1 volte: $T_1 = x_1$

(ii) (u-x), transformaci T_1 určete ze vztahu $\frac{\partial T_1}{\partial x} = [0, \dots, 0, 1]H_c^{-1}(x)$

(iii) (u-y)

Příklad 59.

Systém je dán

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

najděte stavově ekvivalentní systém ve tvaru normální formy dosažitelnosti.

Poznámka: Integrační faktor volte $\mu(x) = \cos x_2$. Nezapomeňte příslušně upravit vektorové pole $\bar{g}(\bar{x})$.

8 Syntéza regulátoru

Syntéza metodou metrické ekvivalence

Příklad 60.

Pro systémy 48 a 51-(a,c,d,f,g,h) nalezněte metodou metrické ekvivalence zpětnovazební řízení tak, aby uzavřený systém měl stabilní mezní cyklus, tj. aby diferenciální rovnice uzavřeného systému odpovídala:

$$y'' + (1 - y^2) y' + y = 0$$

Příklad 61.

Pro systémy 48 a 51-(a,c,d,f,g,h) nalezněte metodou metrické ekvivalence zpětnovazební řízení tak, aby uzavřený systém měl póly $-1, -2$.

Příklad 62.

Pro systémy 51 řádu $n = 3$ nalezněte metodou metrické ekvivalence zpětnovazební řízení tak, aby volený systém $\dot{x}^* = A^*(x^*)x^*$, $y = x_1^*$ byl ve tvaru:

$$A^*(x^*) = \begin{bmatrix} \kappa_1 & a_2 & 0 \\ -a_2 & 0 & a_3 \\ 0 & -a_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vartheta_1(x_1^*) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kde koeficienty κ_1, a_2, a_3 určete tak, aby z nich vytvořená matice měla vlastní čísla $-1, -2, -3$. Funkci $\vartheta_1(x_1^*)$ volte tak, aby systém byl asymptoticky stabilní.

Syntéza pomocí exaktní linearizace

Příklad 63.

Pro systémy 48 a 51-(a,c,d,f,g,h) nalezněte pomocí exaktní linearizace zpětnovazební řízení tak, aby uzavřený systém měl póly $-1, -2$. Využijte výsledky z příkladu 56, resp. 57, resp. 58.

Příklad 64.

Pro systémy 51 řádu $n = 3$ nalezněte pomocí exaktní linearizace zpětnovazební řízení tak, aby uzavřený systém měl póly $-1, -2, -3$. Využijte výsledky z příkladu 56, resp. 57, resp. 58.

Příklad 65.

Pro systémy 51 řádu $n = 4$ nalezněte pomocí exaktní linearizace zpětnovazební řízení tak, aby uzavřený systém měl póly $-1, -2, -3 \pm j$. Využijte výsledky z příkladu 56, resp. 57, resp. 58.

9 Absolutní stabilita

Příklad 66.

Uvažujte Lurjeho systém

$$F(p) = \frac{10}{p(2p+1)}$$

s nelinearitou ležící v sektoru $(0, 1]$. Popovovým kritériem určete stabilitu.

Příklad 67.

Uvažujte Lurjeho systém

$$F(p) = \frac{10}{p(p^3 + p^2 + 2p + 1)}$$

s nelinearitou ležící v sektoru $(0, 0.75]$. Popovovým kritériem určete stabilitu.

Příklad 68.

Uvažujte Lurjeho systém s lineární částí

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)(p+2)(p+3)}$$

určete sektor, v němž může ležet stacionární nelinearita.

Poznámka: Použijte transformaci posouvající póly přenosu. Původní přenos $F(p)$ a sektor nelinearity $[a, b]$, transformovaný přenos $F_a(p) = \frac{F(p)}{1+aF(p)}$ a sektor $[0, b-a]$

10 Syntéza rekonstruktoru

TODO!!!