DVA DNY S DIDAKTIKOU MATEMATIKY 2009

Sborník příspěvků

Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Praha, 19.–20. 2. 2009

Organizátor:

Katedra matematiky a didaktiky matematiky,
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Společnost učitelů matematiky JČMF

Programový a organizační výbor:

Naďa Stehlíková
Antonín Jančařík
Darina Jirotková
Michaela Kaslová

Editor:

Naďa Stehlíková (e-mail: nada.stehlikova@pedf.cuni.cz)
Lenka Tejkalová (e-mail: lenka.tejkalova@gmail.com)

Programový a organizační výbor děkuje doktorandům za pomoc při organizaci konference.

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou. Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.

Vyšlo v roce 2009 Systémem LaTeX zpracovala Naďa Stehlíková a Lenka Tejkalová

ISBN tištěné verze: 978-80-7290-420-4
ISBN CD ROM verze: 978-80-7290-421-1

Obsah

Vážení a milí čtenáři,

otevíráte sborník příspěvků z třináctého ročníku konference *Dva dny s didaktikou matematiky*, která se již k naší nesmírné radosti zabydlela v diářích mnoha učitelů různých typů a stupňů škol. Konferenci pořádá katedra matematiky a didaktiky matematiky Univerzity Karlovy v Praze, Pedagogické fakulty, ve spolupráci se Společností učitelů matematiky JČMF a kromě učitelů z celé České republiky se jí účastní i učitelé a jejich vzdělavatelé ze Slovenska a často i několik hostů z Německa, Polska či Anglie. Konference si za uplynulá léta vybudovala určitou základnu účastníků, kteří se vracejí opakovaně, a máme i několik rekordmanů, kteří nevynechali jediný ročník! Samozřejmě jsme velmi rádi, že mezi nás přicházejí i noví účastníci, a věříme, že i ti se další rok vrátí.

Domníváme se, že program konference je zvolen tak, aby se každý účastník mohl aktivně zapojit a našel si něco, co ho obohatí a co může ve své vlastní praxi využít. Uvítáme však, pokud nám sdělíte své náměty na další vylepšení konference.

Chtěli bychom vám všem, kteří přispíváte na konferenci dílnami, referáty v sekcích, otevřenými hodinami, postery a cennými diskusemi ve všech aktivitách, poděkovat za výbornou atmosféru, která konferenci provází a která nám pokaždé dodá energii a chuť do další práce. Věříme, že i účastníci konference si odnášejí dobrý pocit smysluplnosti svého úsilí v hodinách matematiky.

Společnost učitelů matematiky (SUMA), která hájí profesní zájmy učitelů matematiky, nabízí učitelům prostor k předávání zkušeností i k diskusím o problémech, které nás zajímají, na portálu SUMA (www.suma.jcmf.cz). Ten byl uveden do provozu s podporou Evropského sociálního fondu. Věříme, že právě účastníci konference *Dva dny s didaktikou matematiky* budou portál aktivně využívat a sdílet tak s ostatními kolegy své cenné zkušenosti i názory.

Všem účastníkům třináctého ročníku konference přejeme, aby jim tento sborník připomněl příjemnou pracovní atmosféru a aby v něm i po roce našli další podněty pro svou práci. Ostatním čtenářům přejeme, aby je náš sborník potěšil a aby je motivoval aktivně se účastnit dalších ročníků konference *Dva dny s didaktikou matematiky*.

Na setkání na čtrnáctém ročníku konference *Dva dny s didaktikou matematiky* v únoru 2010 se těší

Naďa Stehlíková

předsedkyně programového výboru konference

Zvané přednášky

DĚLITELNOST VE SVĚTĚ KOLEM NÁS

ANTONÍN JANČAŘÍK[1]

ÚVOD

Matematika je laickou veřejností často vnímána jako zkostnatělá věda, ve které se neděje nic nového, protože vše je již objeveno. Přitom by se dalo říci, že pravý opak je pravdou. Matematika prožila v minulém století bouřlivý rozvoj. V průběhu dvacátého století vzniklo mnoho nových odvětví matematiky, a to jak aplikovaných, tak čistě teoretických. Obrovským rozmachem prošly i disciplíny klasické – analýza, algebra, logika či teorie množin. Přes to všechno a přesto, že matematika ve dvacátém století vítězně vstoupila do všemožných oblastí lidské činnosti a že nastal raketový nástup výpočetní techniky, školní matematika se příliš nezměnila (Hejný, 1990).

S moderními aplikacemi matematiky se setkáváme takřka na každém kroku. Matematika, která je v praxi využívána, je často tak jednoduchá, že ji lze vyložit i na úrovni chápání žáka druhého, a v některých případech i prvního stupně základní školy. Cílem plenární přednášky i tohoto článku je představit využití učiva tak elementárního, jako je dělitelnost přirozených čísel, v praxi.

DĚLITELNOST – ZÁKLADNÍ DEFINICE

Základní definici dělitelnost zná asi každý, Dělitelnost je vlastnost celých čísel. Celé číslo p je dělitelné nenulovým celým číslem q (číslo q dělí p), jestliže existuje takové celé číslo k, pro které platí, že $p = k \cdot q$.

Žáci na základních školách se učí ověřovat dělitelnost nejrůznějšími malými prvočísly – dvěma, třemi, pěti či jedenácti. Přesto, že se jedná o klasické učivo, zodpovědět, kde tuto dovednost využijí v praktickém životě, může být složité. Následující příklady nejsou odpovědí na otázku, kde dělitelnost využijí, ale demonstrací skutečnosti, že dělitelnost je v praxi opravdu smysluplně využívána.

RODNÁ ČÍSLA

První ukázkou je využití dělitelnosti jedenácti pro kontrolu platnosti rodného čísla. Rodná čísla jsou v České republice využívána k jednoznačné identifikaci osob. Systém udělování rodných čísel a jeho vývoj je výbornou ukázkou jak kódování dat, tak i využití

[1]Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta; antonin.jancarik@pedf.cuni.cz

dělitelnosti pro ochranu správnosti údajů. Prvních šest číslic rodného čísla popisuje datum narození ve formátu rrmmdd (např. 501218 označuje datum narození 18. prosince 1950), ženy mají k měsíci připočteno číslo 50 (to znamená, že číslo 506218 označuje ženu narozenou ve stejný den). Zbytek rodného čísla je použit pro odlišení osob narozených ve stejný den. U starších rodných čísel bylo možné z čísla za lomítkem vyčíst i oblast, ve které se osoba narodila (např. počáteční nula označovala do roku 2004 Prahu). Pokud použijete rodné číslo jako ukázku využití dělitelnosti ve výuce, může se každý žák přesvědčit, že jeho rodné číslo je dělitelné jedenácti. To však neplatí u všech rodných čísel. Do roku 1954 se používala pouze tři čísla za lomítkem a dělitelnost rodného čísla jedenácti nastávala u necelých deseti procent populace. Od 1. ledna 1954 je číslo za lomítkem čtyřciferné. Čtvrtá číslice slouží ke kontrole platnosti rodného čísla. Jako čtvrtá číslice se doplňuje zbytek po dělení prvních devíti číslic číslem 11. Žáci si tak mohou současně ověřit, že zbytek prvních devíti čísel po dělení jedenácti je u jejich rodného čísla roven číslici desáté.

Postup používaný od roku 1954 ovšem obsahoval ještě důležitý dovětek: Pokud tento zbytek vyšel 10, doplní se číslice 0. Pokud byl tedy zbytek prvních devíti číslic po dělení jedenácti roven deseti, není výsledné rodné číslo dělitelné jedenácti. Taková rodná čísla byla vydávána až do roku 1985, kdy bylo podle interního předpisu FSÚ Č. Vk. 2898/1985 jejich vydávání ukončeno. Celkem bylo mezi lety 1954 a 1985 vydáno asi tisíc desetimístných rodných čísel, která nejsou dělitelná jedenácti.

Význam kontrolní číslice

Vyvstává otázka, proč byla k rodnému číslu doplněna kontrolní číslice. Důvody pro rozšíření kontrolní číslice byly dva. Zaprvé bylo nutné rozlišit osoby, které se narodily ve stejný den, ale v jiném století. Ze stejného důvodu bude pravděpodobně nutné změnit systém rodných čísel i v roce 2054. Druhý důvod je mnohem praktičtější. Poslední číslice rodného čísla umožňuje odhalit dvě nejčastější chyby, ke kterým při zadávání číselných údajů dochází. Nejčastější chybou (připadá na ni cca 79 % všech chyb) je záměna jedné číslice za druhou. Druhou nejčastější chybou (nastává v cca 10 % případů) je záměna pořadí dvou sousedních číslic. Obě tyto chyby jsou odhaleny ve 100 % případů. Ověření tohoto faktu přenecháváme čtenáři jako cvičení.

Čárový kód (Universal Product Code)

8 97429 00109 7

Druhý, náročnější příklad představuje využití dělitelnosti deseti pro kontrolu platnosti čárového kódu. Čárový kód (UPC) nalezneme dnes takřka na všech výrobcích. Také tento číselný údaj je zabezpečen pomocí kontrolní číslice. Kontrolní číslice je úplně poslední číslice, kterou v čárovém kódu nalezneme. Vypočítá se jako doplněk trojnásobku součtu lichých číslic a součtu sudých číslic do násobku čísla deset (počítáno odzadu, číslice na místě jednotek je vždy násobena třemi). Podoba čárového kódu není jednotná, v současnosti se nejčastěji setkáváme s kódy, u kterých je jedna předsazená číslice a následují dvě skupiny po šesti číslicích. V takovém případě se kontrolní číslice nejsnáze vypočítá pomocí skalárního součinu dle následujícího vzorce:

$$-(1,3,1,3,1,3,1,3,1,3,1,3)\cdot(a_1,a_2,s_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10},a_{11},a_{11})\ \mathsf{mod10}$$

Čárový kód rozpozná každou záměnu číslice v kódu. Není však stoprocentně spolehlivý při rozeznávání chyb vzniklých záměnou pořadí dvou po sobě jdoucích znaků. Pomocí tohoto kontrolního součtu nedokážeme rozeznat prohození pořadí číslic jedna a šest. Úspěšnost UPC u tohoto typu chyb je tak pouze 89 %.

ISBN

Třetím příkladem je ukázka ISBN. ISBN je celosvětově užívaný desetimístný kód[2], kterým je označena každá kniha, která je na světě v současnosti vydána. Pro výpočet kontrolní číslice ISBN se používá metoda, která je podobná metodě použité pro kontrolu rodného čísla v České republice. Také ISBN je doplňováno na násobek čísla jedenáct. Jediný rozdíl je v tom, že u ISBN je každá číslice brána s jinou váhou. Kontrolní číslice je volena tak, aby číslo

$$10a_1+9a_2+8a_3+7a_4+6a_5+5a_6+4a_7+3a_8+2a_9+c$$

bylo dělitelné jedenácti. Pokud taková číslice neexistuje, je doplněno místo číslice písmeno X. ISBN tak vyřešilo problém s čísly, která na násobek jedenácti nelze doplnit. Cenou za toto vylepšení je fakt, že ISBN není vždy číselný kód.

EURO

Poslední ukázkou využití dělitelnosti v tomto příspěvku je zabezpečení sériových čísel bankovek EURO. Pro jejich zabezpečení je použita dělitelnost devíti. Pokud v sériovém čísle bankovky EURO nahradíme úvodní písmeno jeho pořadovým číslem v abecedě (A-1, B-2,...) a provádíme opakovaný součet, obdržíme, pokud je bankovka pravá, nakonec číslo osm. Pokud ovšem nahradíme úvodní číslici její hodnotou v ASCII tabulce (A-65, B-66,...) je sériové číslo platné bankovky EURO vždy dělitelné devíti, o čemž se snadno přesvědčíme opět opakovaným ciferným součtem.

---

[2] Kromě desetimístného kódu ISBN se můžeme u knih setkat také s označením, které je třináctimístné a začíná číslicemi 978 (resp. 979). V takovém případě se nejedná o ISBN, ale UPC kód, který vznikl z ISBN přidáním číslic 978 (tento prefix je vyhrazen pro knihy) a dopočítáním kontrolní číslice podle pravidel pro čárový kód.

Závěr

S použitím dělitelnosti pro ochranu před chybami při přepisu a načítání číselných údajů se potkáváme na mnoha místech běžného života. Kromě uvedených příkladů můžeme ještě zmínit čísla letenek, VIN čísla aut, strojově čitelné údaje na osobních dokladech či čísla zásilek přepravních společností. Všechny tyto ukázky lze využít jako netradiční cvičení a zpestřit jimi hodiny matematiky v období, kdy je probírána dělitelnost. Žáci se tak seznámí s praktickým využitím probírané látky. Ve všech případech se jedná o aplikace, které byly vytvořeny v druhé polovině minulého století, tedy o výsledky velice aktuální.

Literatura

[1] Hejný, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava, SPN 1990

[2] Jančařík, A. *Algebra v informatice* (předáno k tisku), dostupné on-line: `http://class.pedf.cuni.cz/jancarik/download/AvI.pdf`

[3] Euro banknotes, dostupné on-line: `http://en.wikipedia.org/wiki/Euro_banknotes`

[4] Strojově čitelná oblast dokladů, dostupné on-line: `http://cs.wikipedia.org/wiki/Strojov%C4%9B_%C4%8Diteln%C3%A1_oblast_doklad%C5%AF`

CESTY K EFEKTIVNÍMU VZDĚLÁVÁNÍ V MATEMATICE

PAVLA POLECHOVÁ[1]

„Pedagogický sbor tvoří absolventi terciárního vzdělávání. TAM se naučí, že existují nejméně dva typy lidských bytostí, a rozhodnete-li se pro práci s jedním z nich, rozhodujete se zároveň být legálně a koncepčně nekompetentní pro práci s ostatními."

Sarason, S. B. (1990)

POUŽITÉ DEFINICE

V textu této přednášky budeme vycházet z definic, které jsou uvedeny v Metodické příručce vydané Ministerstvem pro místní rozvoj v r. 2005 pod názvem Evaluace socio-ekonomického rozvoje (jde o překlad materiálu Evropské komise „The evaluation of socio-economic development – The Guide"). Definice pouze doplňujeme o konkrétní příklady z oblasti vzdělávání, případně upravujeme pro větší srozumitelnost, zejména když definice používá představu naplnění / splnění veličiny, kterou definuje (tak je tomu u definice účinnosti a efektivity: „efekty získané za přiměřenou cenu", „skutečnost, že bylo dosaženo cílů"). Pokud používáme upravenou definici, uvádíme pro korektnost původní znění z Metodické příručky pod čarou.

Dále budeme používat definici spravedlivosti (equity) ve smyslu, jak ji uvádí Wößmann a Schütz (2006), str. 3.

V dalším textu budeme vzdělávání považovat za intervenci, tj. za proces, jehož výsledkem je *jiný* stav znalostí a dovedností jednotlivců, kteří se tohoto procesu účastní (s důsledky pro jejich socioekonomickou situaci v budoucnosti), než kdyby k tomuto procesu nedocházelo. Můžeme přitom uvažovat o intervenci krátkodobé a dílčí (aktuální vyučovací hodina) nebo dlouhodobé a komplexní (povinné vzdělávání).

Následující text uvádí definice a vztahy mezi pojmy výstup, výsledek, dopad, efekt, efektivita a účinnost, včetně jejich anglických ekvivalentů.

Výstup (Output). Okamžitě měřitelné důsledky intervence (např. počet správně spočítaných příkladů).

Výsledek (Outcome/Result). Pravděpodobný nebo dosažený krátkodobý a středně-dobý efekt intervence (např. dovednost správně spočítat příklady určitého typu).

Dopad (Impact). Pozitivní nebo negativní, primární a sekundární dlouhodobý efekt přímo nebo nepřímo vytvořený intervencí, zamýšlený nebo nezamýšlený.

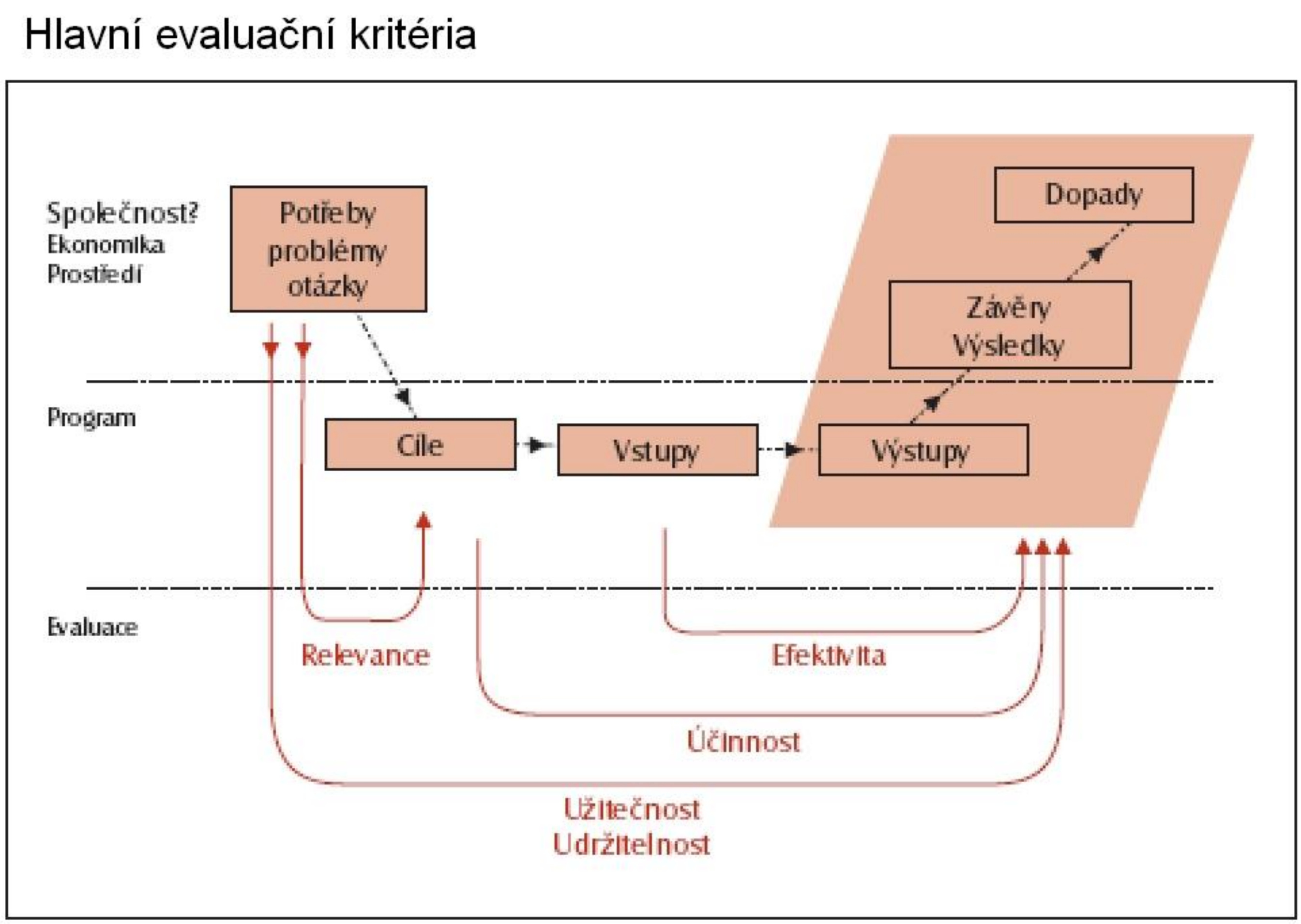
Efekt/účinek (Effect). Socioekonomická změna plynoucí přímo nebo nepřímo z realizované intervence. Efekty zahrnují výsledky a dopady intervence (vzdělávání), ať již

[1]MŠMT, Praha; pavla.polechova@msmt.cz

pozitivní, negativní, očekávané nebo neočekávané. (Pojem efekt nelze použít při popisu výstupů).

Efektivita (Efficiency).[2] Vztah mezi efekty a investicemi vynaloženými k jejich dosažení. Míra hospodárnosti, s níž jsou zdroje a vstupy (finanční prostředky, odborné znalosti pedagogů, jejich čas atd.) přeměněny na výsledky.

Účinnost (Effectiveness).[3] Vztah mezi efekty a cílem. Míra, do jaké bylo dosaženo stanovených cílů a byly získány očekávané efekty. Rozsah, v jakém bylo dosaženo (nebo se očekává, že bude dosaženo) cílů intervence, přičemž se bere v úvahu jejich poměrný význam. Vzájemné propojení uvedených pojmů a jejich začlenění do kontextu vzdělávání ilustruje diagram na obr. 1. Jako podkladu je využito diagramu v Metodické příručce Evaluace socioekonomického rozvoje, str. 20.



Obr. 1: Vstupy, procesy a výstupy: vzájemné propojení

[2] Efektivita (Efficiency) – původní definice: „Efekty získané za přiměřenou cenu. Míra, jak hospodárné jsou zdroje a vstupy (peněžní prostředky, odborné znalosti, čas atd.) přeměněny na výsledky.“ Přesné znění ve Slovníčku pojmů Evaluace socioekonomického rozvoje, str. 95

[3] Účinnost (Effectiveness) – původní definice: „Skutečnost, že bylo dosaženo cílů a byly získány očekávané výsledky a efekty. Rozsah, v jakém bylo dosaženo (nebo se očekává, že bude dosaženo) cílů intervence, přičemž se bere v úvahu jejich poměrný význam.“ Přesné znění ve Slovníčku pojmů Evaluace socioekonomického rozvoje, str. 98

Ve smyslu těchto definic může škola s málo početnými třídami realizovat účinné, ale nikoli efektivní vzdělávání. Dovedeme si představit velmi účinné vzdělávání při poměru žáků a učitelů 1:1. V takovém případě dostává žák i učitel stálou zpětnou vazbu o výstupech vzdělávání a cesta k cíli může být průběžně korigována tak, aby cíle bylo dosaženo. Poměr 1:1 však není možný a byl by skutečně krajně neefektivní. Dostáváme se k těmto zásadním otázkám:

- Je účinnost a efektivita vzdělávání nutně v rozporu?
- Pokud ano, jak stanovíme nejlepší poměr mezi těmito dvěma cíli?
- Pokud ne, jaké podmínky musí vzdělávání splňovat a jaké musí mít vlastnosti, aby bylo účinné a efektivní zároveň?

Tvrdíme, že vzdělávání *může* být efektivní a účinné zároveň, protože existuje nejméně jedna škola, v níž jsou děti vzdělávány v heterogenních a zároveň relativně početných třídách a která má současně velmi dobré výsledky v dostupných srovnávacích testech. K tomuto tvrzení se vrátíme později.

Spravedlivost (equity) a efektivita (efficiency)

V dalším textu budeme používat anglického pojmu equity (dnes se pro equity v českých textech vyskytuje i výraz ekvita). Jak uvádí Wößmann a Schütz (2006), str. 3, pojem equity je hůře uchopitelný než pojem účinnosti nebo efektivity, což souvisí s ne zcela jasně vymezeným pojem férovosti (fairness) a spravedlnosti (justice). V současné době se dá (v oblasti mezinárodního pedagogického výzkumu) hovořit o příklonu k equity jako rovnosti příležitostí. Znamená to, že výsledky vzdělávání co nejméně nezávisí na okolnostech, které jedinec nemůže ovlivnit (na národnosti, pohlaví, rodinném zázemí atd.), a závisejí především na vlastním úsilí jednotlivce. Je zřejmé, že equity je abstrakcí, ideálním stavem, kterého nemůže být plně dosaženo.

Na první (a zejména povrchní) pohled každý pedagog řekne, že v jeho či v jejím pedagogickém působení nemá žádná závislost na okolnostech, které žák či žákyně nemůže ovlivnit, místo. Často slyšíme tvrzení „my nerozlišujeme“, „měříme každému stejným metrem“. Je to výrok podezřelý stejně jak o výrok „nemám žádné předsudky“; tyto výroky mají stejný význam. Míru či stupeň předsudku si člověk vůbec nemusí uvědomovat, ale objekt pedagogova působení ji naopak může pociťovat velmi zřetelně. Žák i celá třída čte (a často opakovaně) *předem* na tváři pedagoga, zda od něj – od ní – od nich očekává silný nebo slabý výkon. *Před*sudek implikuje vyhodnocení situace *předem* díky příslušnosti k nějaké s*kupině: dívky na matematiku takzvaně nejsou, děti se slabým sociálním zázemím nebudou mít moc dobré výsledky*. To je přesně situace nestejných (nerovných) příležitostí, protože jde o předpověď, která je sebesplňující (self-fulfilling prophecy) [3], jak ji popsal zejména sociolog Robert K. Merton ve své publikaci *Social Theory and Social Structure*.

Výsledkem sebesplňující předpovědi jsou slabší výkony dětí zařazených do třídy pro slabší.

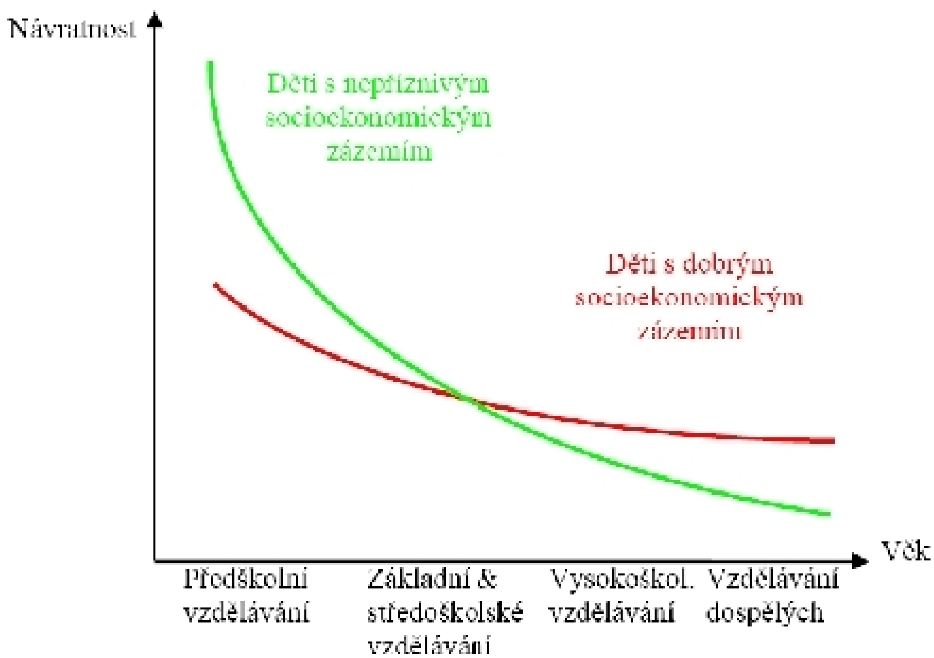
Jak demonstruje poslední věta, je důsledkem požadavku rovnosti příležitostí požadavek heterogenity vyučované skupiny, nebo jinak – odmítnutí segregace. Nelze přitom nevzpomenout na přelomové rozhodnutí Nejvyššího soudu Spojených států ve slavném procesu Brown v. Board of Education of Topeka [4] v roce 1954, kdy Nejvyšší soud při uzavírání sporu týkajícího se segregace dospěl k závěru – od té doby nesčetněkrát citovanému –, že zřizování oddělených škol pro černé a bílé studenty odpírá černošským studentům rovné příležitosti ve vzdělávání a že oddělené vzdělávání černých a bílých je již samo o sobě (inherentně) nerovné [5]. Porazil tím předchozí doktrínu o oprávněnosti „odděleného, ale rovného zacházení“ ve školách i jiných institucích.

V některých zemích západní Evropy (příkladem je Německo a postkomunistické země s výjimkou Polska; Česká republika zejména) nejsou z amerického know-how získaného zkušenostmi z období segregace vyvozeny odpovídající důsledky. V těchto zemích je často otázka oddělování dětí v raném věku označována za otázku velmi citlivou a politickou. Je zde zřejmě malá „politická“ ochota přemýšlet o tom, nakolik je severoamerická zkušenost specifická jednak pro Spojené státy a jednak pro segregaci (výhradně) rasovou. Na druhé straně, v některých zemích je naopak nezávisle vyvinuta a poslední desetiletí upevňována kultura inkluzívního, tj. nesegregačního přístupu (typicky jsou to nordické země [6] a také například Skotsko. Na mezinárodních setkáních různého typu se pak stává, že si reprezentanti těchto dvou skupin států resp. odlišných kultur nerozumějí v otázkách, jak zabezpečovat equity a jak ji ověřovat.

V září 2006 vydala Evropská komise Sdělení komise Radě EU a Evropskému parlamentu s názvem „Efficiency and equity in European Education and Training Systems“, založené na analýze se shodným názvem, kterou Evropská komise zadala Evropské expertní síti zabývající se ekonomikou vzdělávání (EENEE) (Wößmann a Schütz, 2006). V tomto Sdělení Evropská komise zdůrazňuje, že vysokých výsledků s relativně malými náklady není nutno dosahovat nerovnými přístupy a zajišťování rovnosti příležitostí nemusí být neefektivní, že tedy **není nutné volit mezi efektivitou a spravedlivostí**, přičemž pokusy dosáhnout jednoho NEBO druhého mohou být nespravedlivé a neefektivní zároveň.

V této souvislosti analýza Wößmanna a Schützové zmiňuje longitudinální studie provedené ve Spojených státech, založené na výzkumu efektů programů rané intervence, realizovaných v USA od počátku šedesátých let pro sociálně znevýhodněné tří a čtyřleté děti a jejich rodiče. Programy byly zaměřené na aktivní účast dětí v prostředí bohatém na podněty rozvíjející děti především v sociální (komunikační) a afektivní oblasti. Postupně byly publikovány analýzy popisující dlouhodobé efekty této intervence. Výsledky dětí, které se zúčastnily programu, byly sledovány a porovnávány s výsledky kontrolních skupin [7]. Analýzy ukázaly řadu významných pozitivních efektů pro jednotlivce a společnost. Například děti ze skupiny, která byla v péči Perry Preschool programu, byly ve srovnání s kontrolní skupinou děti v pěti letech více než dvakrát častěji dobře připraveny na školu, ve 14 letech měly významně častěji zájem dále studovat (děti z kontrolní skupiny ve 40 % případů, děti z programu ve více než 60 % případů), třikrát častěji než děti z kontrolní skupiny splňovaly v témže věku základní standard znalostí, významně častěji získaly maturitu (děti z kontrolní skupiny ve 45 % případů, děti z programu v 66 % případů). Ve čtyřiceti letech měly děti z programu opět významně častěji plat nad hranicí 20 tisíc dolarů měsíčně a také jejich kriminalita byla významně nižší. Podle výsledků tohoto projektu se každý dolar investovaný do předškolního vzdělávání vrátí zhruba třináctkrát – odrazí se mj. v lepším vzdělání, výhodnějším povolání a v neposlední řadě i v nižších nákladech v oblasti boje s kriminalitou.

V Evropě se podobný akční longitudinální výzkum, zaměřený na zmírnění či odstranění nevýhod nepříznivého zázemí v raném věku, nikdy nerealizoval.



Obr. 2: Průběh návratnosti investic s věkem

Analýza Wößmanna a Schützové zároveň přijímá model práce Interpreting the Evidence on Life Cycle Skill Formation (Cunha et al, 2006), založený na nejlepších dostupných výzkumných zjištěních (best available evidence). Cunha et al. upozorňuje, že (1) protože základním zdrojem nerovností v americké společnosti je rodina, mohou mít programy zacílené na děti ze znevýhodněných rodin podstatnou ekonomickou a sociální návratnost; (2) dovednosti a schopnosti (skills, abilities) nejsou prostě zděděny, ale jsou ovlivněny IQ, nekognitivními intervencemi a prostředím, přičemž IQ může být nejméně do věku 10 let sám také ovlivněn prostředím; (3) pro školní výsledky a školní úspěch mají značný význam často opomíjené nekognitivní schopnosti (sociální, komunikační); (4) dovednosti se vzájemně posilují, takže dochází k tzv. rekurzívní produktivitě (např. sebekontrola a emociální bezpečnost mohou zesilovat intelektuální zvídavost a podporovat tak výraznější nabývání kognitivních dovedností, čímž vzrůstá jistota a emocionální bezpečnost při experimentování; (5) dovednosti se vzájemně doplňují, pročež raná intervence musí být doplňována intervencí v pozdějším věku, aby se raná intervence mohla zúročit a zúročila; (6) v souhrnu to znamená, že návratnost investic do rané intervence je vysoká, ale postupně klesá, takže návratnost investic v pozdějším věku (např. do doučování starších žáků) je nízká; (7) tento vztah platí pro všechny jedince, ale pro znevýhodněné děti, žáky, studenty a mladé lidi je závislost návratnosti investic do vzdělávání na věku strmější než pro jedince s příznivým zázemím.

V raném věku je tedy odbourávání bariér vysoce efektivní – velmi se vyplatí (doslova) poskytnout dětem s málo podnětným zázemím prostředí a podněty, které umožní jejich maximální osobnostní a sociální rozvoj, a není třeba rozhodovat, zda má být vzdělávání spravedlivé (odstraňující překážky, za něž jedince nemůže), nebo efektivní. Postupy odstraňující překážky jsou totiž zároveň efektivní. V pozdějším věku je efektivita „nápravných procesů“ nízká a je čím dále méně možné dohnat to, co se v raném věku zanedbalo.

Evropská komise ve svém Sdělení Radě EU a Evropskému parlamentu s názvem „Efficiency and equity in European Education and Training Systems“ říká:

Přehlížení sociálního významu vzdělávání stojí EU každoročně miliardy EUR. Neadekvátní investice v raném věku je obtížné a drahé napravovat.

Zde jsou doporučení a upozornění uvedeného sdělení:

1. Země EU by měly více investovat do předškolního vzdělávání

2. Země EU by neměly příliš brzy směrovat žáky do oddělených vzdělávacích drah (kde „příliš brzy“ znamená dříve než ve věku 13 let)

3. „Bezplatné“ systémy vysokoškolského vzdělávání negarantují spravedlivý přístup

    - Bezplatné studium na vysokých školách může přinést přerozdělení od chudších směrem k bohatším, protože náklady nesou všichni plátci daní, zisk nikoli.
    - Tento zpětný dopad je ještě závažnější, pokud školní systém znásobuje vliv socioekonomického zázemí na výsledky vzdělávání

4. Země EU potřebují vyvinout evaluační kulturu, jejíž součástí je sledování a vyhodnocování efektivity a spravedlivosti dlouhodobě a ve vzájemné kombinaci; země EU musejí při rozhodování o prioritách pro investice nejprve chápat, co se v jejich systémech vzdělávání a odborné přípravy děje v obou těchto oblastech.

Na pedagogické fakultě vznikl v rámci projektu Implementation of Innovative Approaches to the Teaching of Mathematics (Implementace inovativních přístupů ve vyučování matematice) velmi zajímavý modul 3D geometrie ([4]). Jeho cílem je nabídnout učitelům určité stimuly pro rozvoj prostorové představivosti, experimentování, formulování hypotéz, komunikace, argumentace, konstrukce znalosti žáky samotnými. Modul 3D geometrie, určený dětem a žákům v předškolním a mladším školním věku, je svou přitažlivou hravostí příkladem podnětného rozvíjejícího prostředí, s jakým by se dítě nemělo minout, aby se mu matematické uvažování nestalo přítěží, ale přirozeností a aby matematika podněcovala i uspokojovala jeho zvědavost a chuť k dalšímu bádání [8].

Školy zaměřené na všechny děti: ZŠ Chrudim, Dr. Malíka

Stále jsme si ale nezodpověděli otázku, jak rozřešit dilema rozdělení zdrojů mezi žáky s potřebou dodatečné podpory a žáky, kteří ke svému rozvoji potřebují zvýšení nároků na ně samé. Nebo je snad nejvíce žádoucí podporovat žáky průměrné? Jak rozdělí učitel nebo učitelka svoji pozornost mezi žáky různých schopností, různých možností, různých potřeb? Jak třídu, která je rozmanitá – a to z mnoha úhlů pohledu – učitel či učitelka zvládne organizačně, aby přitom každému žákovi umožnila jeho maximální rozvoj?

Odpověď na poslední otázku nacházíme v reálném prostředí ZŠ Chrudim, Dr. Malíka.

První pohled do školy

Škola má kapacitu 500 žáků, je stabilně naplněna (z cca 98 %). V každém ročníku jsou dvě paralelní třídy. V každé třídě je tedy průměrně 27 žáků. Mezi žáky najdeme kromě 20 % zdravotně znevýhodněných dětí čtyři děti tělesně postižené a děti vážným sluchových postižením. Škola záměrně nezřizuje žádné speciální ani speciálně zaměřené třídy. Pedagogický sbor školy tvoří kvalifikovaní, odborně velmi zdatní a aktivní učitelé. Věkový průměr ve školním roce 2009/2010 je 40 let, z celkového počtu třiceti vyučujících je sedm mužů.

V učebnách je celkem 29 počítačů zapojených do sítě, kam je zapojeno také 15 počítačů v kabinetech a sborovně. V každé třídě prvního stupně je jeden počítač, v každé třídě druhého stupně jsou tři počítače. V počítačové učebně, učebně fyziky a učebně výtvarné výchovy jsou dataprojektory. Škola je vybavena čtyřmi učebnami s interaktivní tabulí. Pro přípravu na výuku využívají učitelé neomezeně pět kopírek, z toho jednu barevnou.

Škola byla otevřena v roce 1991 v reakci na doznívající vlnu populační exploze sedmdesátých let, takže do jejích vyšších tříd byli přemístěni v neúměrném počtu žáci, kteří byli ve stávajících čtyřech školách „nadbyteční“. Postupem doby vybudoval ředitel se svým týmem ve škole klima partnerských vztahů a vysokého nasazení jak mezi žáky, tak mezi učiteli.

To by o sobě mohla jistě deklarovat kterákoli škola. Jak se tedy pozná zabezpečování takového klimatu? Žák či žákyně například velmi rychle pocítí, že škole na něm záleží. Indikuje mu to například každoroční dotazníková akce, na základě jejíchž výsledků se vytváří a upravuje nabídka povinně volitelných předmětů. Od roku r. 1998 (více než 10 let před spuštěním reformy obsahující disponibilní časovou dotaci) je zde zaveden systém povinně volitelných předmětů, každoročně aktualizovaný podle přání a potřeb žáků a možností školy, který ve svém důsledku znamená, že každý žák, každá žákyně se musí sám (sama) sebe zeptat, co mu škola má dát, co od školy specificky pro sebe očekává, co v ní chce najít.

Disponibilní časové dotace využitá k profilaci dítěte (nikoli k profilaci školy, jak tomu mnohde je) tvoří však jen část celého systému.

Spolu to dokážeme (`www.zsmalika.cz/rodic/spolu-to-dokazeme.aspx`)

Škola se výrazně zaměřuje na vztahy mezi žáky, mezi pedagogy, mezi žáky a pedagogy, mezi pedagogy a rodiči. Nedílnou součástí učebního plánu školního vzdělávacího programu jsou činnosti související především s osobnostně sociální výchovou žáků, ale také s průřezovými tématy RVP ZV. Jedná se o systém výukových seminářů, kurzů a projektových dnů pro žáky všech ročníků, prostupující celým školním rokem. Právě tento systém výrazně pozitivně ovlivňuje klima tříd i celé školy, přispívá k motivaci žáků i ke zlepšování vyučovacích metod. Naprostá většina výukových seminářů a kurzů probíhá v přírodním prostředí jako semináře a kurzy pobytové. V neposlední řadě se při těchto příležitostech seznamují žáci odlišných věkových skupin a poznávají učitele, kteří vyučují na jiném stupni školy.

Na prvním stupni je cílem programu Spolu to dokážeme vzájemné poznávání žáků i pedagogů, zvyšování sebedůvěry žáků, uvědomování si vlastní osobnosti, vnímání a přijímání individuálních odlišností, podpora vzájemné úcty mezi žáky, sebeúcty, důvěry i odpovědnosti. Velká pozornost je věnována společnému stanovení pravidel soužití pro žáky i pedagogy. Na druhém stupni je cílem tohoto programu rozvíjení dovedností získaných na prvním stupni a současně vytvoření dobře fungujícího týmu žáků i učitelů, kde jsou vzájemné vztahy založeny na důvěře, vzájemném respektu a spolupráci. Vzniklý kolektiv by měl být pro všechny žáky bezpečným místem, které jim pomůže vyhnout se případnému rizikovému chování – šikanovaní, užívání drog a alkoholu, patologickému hráčství apod.

Absolventské práce

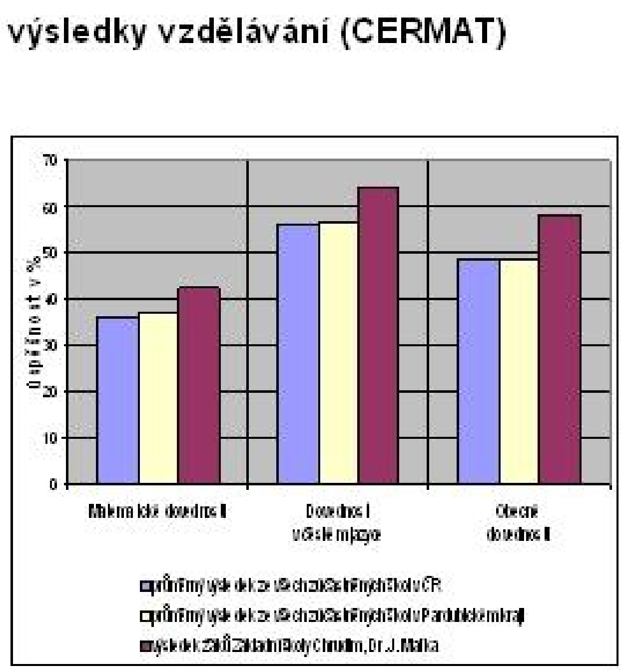
Zcela unikátním projektem ZŠ Chrudim jsou tzv. absolventské práce. Jsou jistou formou odpovědi na otázku, podle čeho poznáme, jakých kompetencí – zejména dovedností a znalostí – žáci dosáhli; možností pro žáky, aby ukázali své silné stránky, prezentovali, čeho jsou schopni (opakem je zjišťování zkoušením, co žák neumí). Jak informují webové stránky školy, absolventské práce jsou pro žáky příležitostí naplánovat a zažít osobní úspěch, uvědomit si, že úspěchu může dosáhnout každý.

Každá absolventská práce má svého vedoucího z řad vyučujících. Témata absolventských prací jsou každoročně vypisována, ale žáci mohou v předstihu přijít s tématem vlastním, které musí některý z vyučujících schválit.

Pravidla, kritéria k hodnocení a seznam témat žáci obdrží na počátku posledního pololetí. Na výběr tématu z nabídky mají týden. Vlastní tvorba absolventské práce probíhá od posledního únorového týdne do posledního květnového týdne. Absolventské práce mají všechny vlastnosti diplomové práce. Liší se pouze rozsahem (3 až 5 normostran kromě titulní strany a příloh) a nároky na znalosti a dovednosti potřebné pro její zpracování. Formální náležitosti jsou však totožné: abstrakt v anglickém jazyce, konzultant a konzultace, seznam literatury podle přesných pravidel, zpracování na počítači, odevzdání v tištěné a elektronické podobě, obhajoba.

Výsledky školy v celostátním srovnání

Škola si také zjišťuje výsledky vzdělávání u společností a institucí, které takové srovnání nabízejí. Následující grafy uvádějí takové výsledky z roku 2008. Průměrný výsledek všech českých zúčastněných škol je uveden modrou barvou, tmavočervenou barvou jsou uvedeny výsledky žáků ZŠ Chrudim. Výsledky nepotřebují další komentář.



Obr. 3: Výsledky žáků ZŠ Chrudim, dr. Malíka

Co uvidíte, navštívíte-li hodinu matematiky

Když navštívíte hodinu matematiky, můžete spatřit:

- Děti sedící v tzv. domovských skupinách a učitelku, která jim vysvětluje cíl, jehož musí každá skupina dosáhnout. Je to zadání komplexní (Complex instruction, CI) [9]. Zadání vyžaduje využití schopností matematických, organizačních, výtvarných, schopnost analýzy textu (přičemž se uplatní metody kritického myšlení, RWCT). Čistě matematické zadání mají vždy dva ze čtyř členů skupiny: jeden snazší, druhý obtížnější.

  CI – Complex Instruction – je forma kooperativního učení, kterou vyvinula Elizabeth Cohen se svými kolegy na Stanfordské univerzitě. Komplexní instrukce umožňuje efektivní práci žáků ve skupinách heterogenních zejména co do jejich schopností a talentů. Základním východiskem CI je předpoklad, že pokud se děti se neúčastní společné práce (což je nutnou podmínkou učení), není to proto, že by se styděly nebo byly líné. Neúčastní se jí proto, že ostatní děti ve skupině je vnímají jako členy, kteří nemají skupině co nabídnout. Jejich pokusy o účast jsou skupinou ignorovány nebo odmítány. Jejich problémem je nízký status ve skupině.

- Komplexní instrukce je komplexní právě z pohledu využití širokého spektra možností a schopností všech žáků. O chvíli později můžeme být svědky zcela samostatných přechodů žáků do expertních skupin (je vidět například skupinku počítající s plochami a obvody barevných ploch na různých dopravních značkách), někteří dávají přednost samostatné práci. Je zřejmé, že žáci znají a používají podle potřeby a vlastního uvážení tzv. mozaikové učení (jigsaw technique) Jedna skupinka odchází do prostorné chodby, lépe se tam bude soustředit. Není to tak neútulné místo, jak by se mohlo z popisu zdát. Část chodby je přehrazena paravány s pracemi dětí, které se zúčastnily Festivalu vědeckých a technických projektů.

- Děti samostatně pracují, učitelka je k dispozici pro konzultace podle potřeby, ale děti si většinou poradí navzájem. Zatím si lze prohlédnout tematické práce dětí v kroužkových vazbách. Na několik zvolených témat – například Pythagorovy věty – každý žák a žákyně vymyslí a spočítá příklad a také okomentuje, jak se mu pracovalo. Práce každého žáka zabírá vždy jeden list a je psaná na počítači. Všechny práce na dané téma jsou spojeny do brožurky v kroužkové vazbě. Je to jeden z dlouhodobých, individuálních a povinných domácích úkolů. (Existují také domácí úkoly nepovinné, nebo domácí úkoly povinné skupinové.) Jedna z prací ve složce „Pythagorova věta“ nese název Pythagorova věta v mém účesu, jiná řeší oplocení trojúhelníkovitého pozemku, ve třetí běží fenka Nelinka napříč zahradou, aby chytila kočku (která ovšem ještě stačí vylézt na strom), ve čtvrté jde o pomoc tatínkovi při plánování spotřeby materiálu na výrobu psí boudy se šikmou střechou. . .

- Děti přecházejí zpět do domovských skupin, vysvětlují si vzájemně práci každého člena, dokončují skupinové výstupy, domlouvají si prezentaci.

- Probíhají prezentace, učitelka klade kontrolní otázky. Poslední otázka směřuje k indikaci osobního nasazení – je to vizuální signál směrem k učitelce i sebereflexe.

INKLUZE

Po náhledu do školy, která se snaží být inkluzívní, tj, umožňovat každému žákovi maximální naplnění jeho / jejího vzdělávacího potenciálu, lze nyní uvést definici inkluze (Ainscow, 2005).

Inkluze je *proces* stále zlepšujícího se zvládání a využívání rozmanitosti. Je to nikdy nekončící hledání stále lepších odpovědí na rozmanitost populace. Inkluze je učení se tomu, jak žít s rozmanitostí a s rozdíly a jak se z nich učit. Rozdíly a rozmanitost jsou tak stimulem pro učení mezi dětmi a mezi dospělými.

Inkluze se týká identifikace a odstraňování bariér. Inkluze vyžaduje sledování a vyhodnocování informací o podmínkách, procesech a výsledcích učení při různém znevýhodnění a potenciálním znevýhodnění. Účelem je zlepšování vzdělávací politiky (na každé úrovni) a zlepšování pedagogické praxe pro minimalizaci znevýhodnění.

V pojmu inkluze lze vysledovat tři úrovně:

přítomnost žáků: je důležité, kde se žáci učí, jak spolehlivá je jejich docházka a zda přicházejí do školy včas,

zapojení (aktivita) žáků: je podstatné, jak kvalitní je zkušenost žáků se vzděláváním; tato zkušenost musí zahrnovat názory a pohledy žáků samotných

výsledky žáků: ukazatelem inkluze nejsou pouhé výsledky testů, ale výsledky v nejširším slova smyslu; výsledkem procesu učení je i sebedůvěra, otevírající motivaci k dalšímu učení.

Inkluze obsahuje pozornost věnovanou těm skupinám žáků, kteří se mohou dostat na okraj, být vyloučeni nebo dosahovat výsledků, které jsou pod jejich možnostmi; cílem je maximalizace šancí všech žáků, vzdělávajících se společně v prostředí, které aktivně hledá a odstraňuje své bariéry.

NE VŠE, CO JE MĚŘITELNÉ, JE DŮLEŽITÉ A NE VŠE, CO JE DŮLEŽITÉ, JE MĚŘITELNÉ

Not everything that can be counted counts, and not everything that counts can be counted.

Albert Einstein

Tento výrok Alberta Einsteina, který je v originále slovní hříčkou, předznamenává důležitý fakt: měření výsledků může podporovat inkluzi – nebo její opak, selekci. Pokud budeme měřit pouze hrubé výsledky školy (raw results), neboli zúžíme (doslova) náš pohled na osu y následujícího schématu, vyhodnotíme výsledky školy vyznačené červenou šipkou okamžitě jako lepší. Pracuje však tato škola lépe než škola, jejíž výsledky jsou na ose y vyznačeny šipkou modrou? Pokud se blíže podíváme na zázemí žáků školy, tedy rozšíříme náš pohled o druhý rozměr, vidíme, že očekávaná hodnota výsledků žáků „modré" školy je nižší než skutečná, zatímco u „červené" školy je tomu naopak (světle modrý oblak naznačuje, že výsledky žáků budou stoupat s kvalitou zázemí).

Bez ohledu na cíle měření výsledků školy je důležité, aby to, co nazýváme výsledky, reflektovalo skutečný přínos školy, nikoli pouze (nebo zčásti) různé socioekonomické podmínky, v nichž školy působí. Pokud tomu tak není (tedy používáme-li hrubé výsledky reflektující zázemí žáků, ne práci školy), zdroje mohou být alokovány chybně a mohou být nastartovány perverzní pobídky – když je například vyššího výkonu dosahováno v důsledku výběru studijně zaměřených žáků nebo žáků z privilegovaného zázemí, místo aby bylo vyšších výsledků dosahováno lepšími pedagogickými metodami, kvalitnějším působením školy (OECD, 2008).

Obr. 4: Do které školy půjdeme pro příklad dobré praxe?

Výsledky je tedy nutno měřit vzhledem ke kontextu – zohlednit pozici školy vzhledem k průměrnému zázemí jejích žáků (světle modrému oblaku).

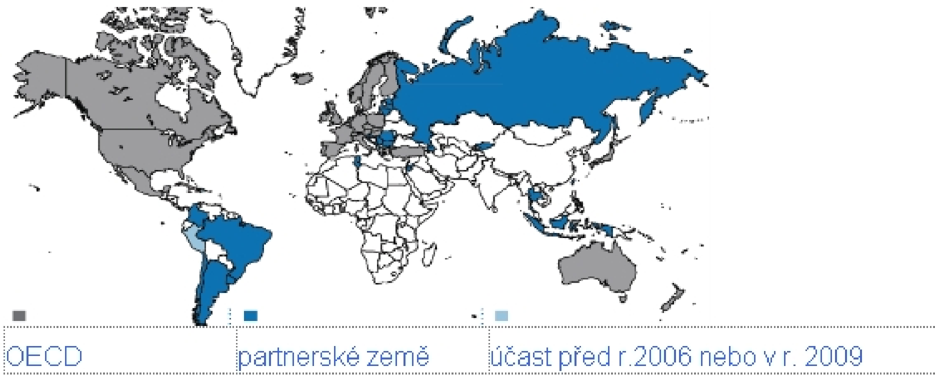
Problém je všeobecný koncept kvality školy. V české realitě je rozšířeno pojetí zúženého pohledu jen na osu y: dobré výsledky znamenají dobrou školu, slabší výsledky špatnou školu.

Co říká výzkum PISA o naplňování rovných příležitostí

PISA je mezinárodně standardizovaný program OECD zjišťující výsledky vzdělávání patnáctiletých žáků. Počet zemí účastnících se programu stoupá a zahrnuje i nečlenské země. Mapka na obrázku 5 ukazuje situaci v roce 2006.

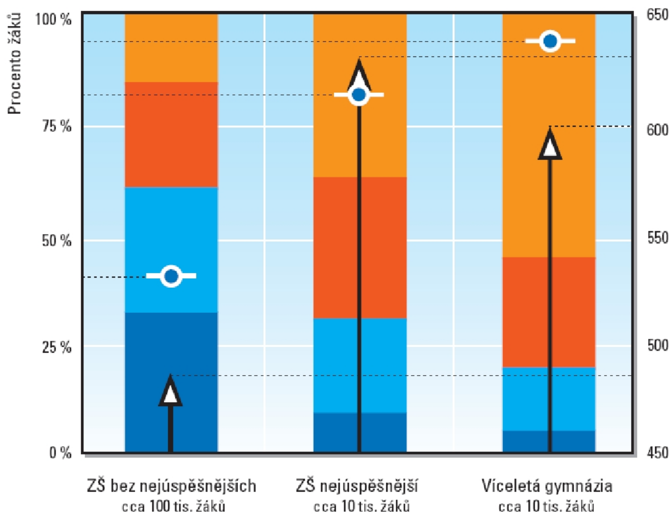
V rámci tohoto programu se v každé zemi typicky testuje 4 500 až 10 000 žáků.

Periodicky je kladem důraz vždy na jednu ze tří oblastí, jimiž jsou čtenářská gramotnost, matematická gramotnost a přírodovědná gramotnost.



Obr. 5: Země, které se zúčastnily programu PISA 2006

ASPIRACE ZÁVISEJÍ NA DRUHU NEBO TYPU NAVŠTĚVOVANÉ ŠKOLY, NE NA VÝSLEDCÍCH

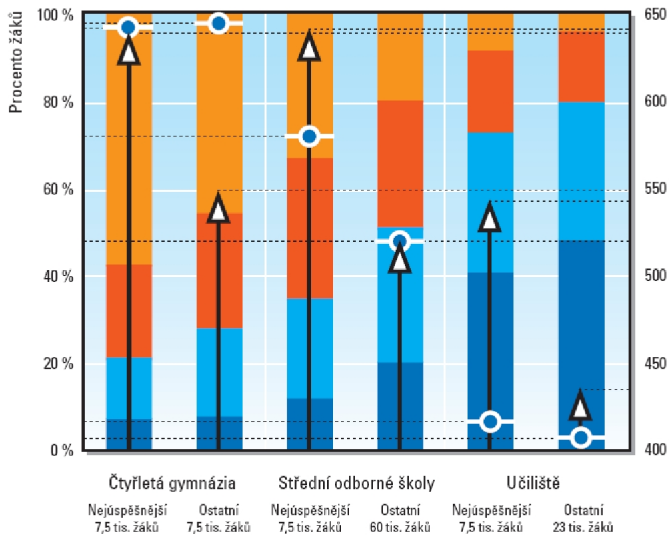


Obr. 6: Výsledky, rodinné zázemí a vzdělávací aspirace žáků v základním vzdělávání (PISA 2003)

Obr. 6 (Koucký, 2004) ukazuje souvislost aspirací a výsledků žáků s druhem školy, kterou žáci navštěvují. Zároveň ukazuje složení žáků v jednotlivých druzích škol: čím větší část sloupce je v modré barvě, tím slabší je rodinné zázemí; čím více je sloupec zbarvený do oranžova, tím lepší zázemí, tj. ekonomický, sociální a kulturní status žáka. Vidíme toto:

- Víceletá gymnázia jsou obsazena žáky, jejichž zázemí je v průměru lepší.
- Nejúspěšnějších 10 tisíc žáků ZŠ má lepší výsledky než žáci víceletých gymnázií.
- Takto vybraná skupina žáků ZŠ má však v rozporu se svými výsledky nižší aspirace než (slabší) skupina žáků, kteří navštěvují víceletá gymnázia

Diagram na obr. 7 je pořízen obdobně pro skupiny žáků čtyřletých gymnázií, středních odborných škol a středních odborných učilišť. Můžeme obdobně pozorovat:



Obr. 7: Výsledky, rodinné zázemí a vzdělávací aspirace žáků na SŠ (PISA 2003)

- Čtyřletá gymnázia jsou obsazena žáky, jejichž zázemí je v průměru lepší než zázemí žáků středních odborných škol a zázemí těchto žáků je lepší než zázemí žáků středních odborných učilišť.
- Nejúspěšnějších 7,5 tisíc žáků učilišť má horší zázemí než stejně úspěšní žáci čtyřletých gymnázií.
- Extrémní je však rozdíl v aspiracích. Zatímco slabší žáci čtyřletých gymnázií mají aspirace vysoké, na horním okraji diagramu, jejich stejně úspěšní vrstevníci v učilištích mají v rozporu se svými výsledky aspirace při okraji dolním, v rámci stupnic diagramu blízké nule.

Vývoj nerovností v čase

Mezi rokem 2003 a 2006 došlo ke zhoršení výsledků matematické gramotnosti na základních školách (obr. 8). Na víceletých gymnáziích a čtyřletých gymnáziích se výsledky prakticky nezměnily. K největší změně (a to ke zhoršení) došlo na středních odborných učilištích bez maturity (Palečková, 2007).

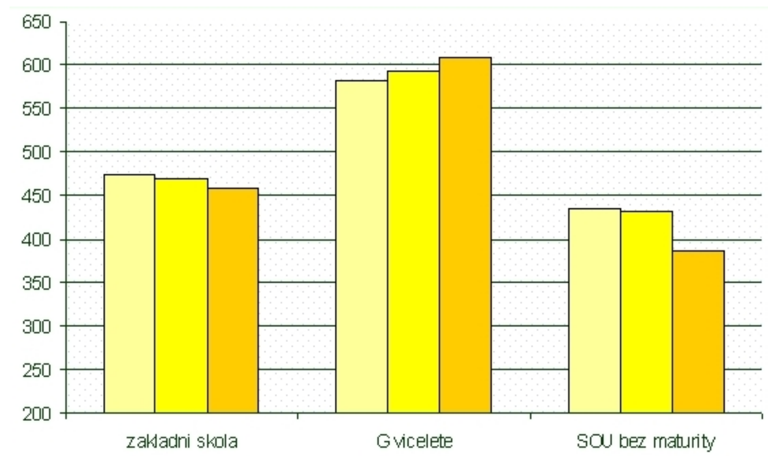
V průběhu času se zvyšují rozdíly mezi školami i ve čtenářské gramotnosti (obr. 9). Výsledky žáků základních škol proti průměru zemí OECD mírně klesají, výsledky žáků víceletých gymnázií mírně stoupají. Nejvýraznější změnou je pokles výsledků žáků středních odborných učilišť.

Genderové rozdíly – matematická gramotnost

V zemích OECD nacházíme v matematické gramotnosti rozdíly mezi chlapci a děvčaty ve prospěch chlapců, většina pozorovaných rozdílů je statisticky významná. Jedinou zemí, kde měla děvčata statisticky významně lepší výsledky než chlapci, byl Island.

Typ školy	2003	2006
	Průměrný výsledek	
Základní škola	495	482
Víceleté gymnázium	631	635
Čtyřleté gymnázium	610	614
SOŠ, SOU s maturitou	541	542
SOŠ, SOU bez maturity	458	440
ČR celkem	*516*	*510*

Obr. 8: Výsledky 2003 a 2006 v ČR – matematická gramotnost



Obr. 9: Výsledky 2000, 2003 a 2006 v ČR – čtenářská gramotnost

V roce 2003 byly výsledky našich dívek v matematice statisticky významně horší než výsledky chlapců, v roce 2006 tyto rozdíly významné nebyly.

O tom, že rozdíly ve prospěch chlapců jsou důsledkem širšího kulturního a vzdělávacího kontextu a nikoli různých schopností chlapců a dívek, svědčí to, že v mnoha zemích se tyto rozdíly daří úspěšně snižovat či eliminovat.

Závěrem

Myslí si to učitelé dodnes?

- Když se žáci (skoro) ničemu nenaučí, mají nějakou poruchu.
- Je nutno co nejpřesněji zjistit, co je to za poruchu, aby bylo možno žáky nasměrovat na „optimální vzdělávací dráhu“, poskytnout jim (modifikované) kurikulum, učitele a třídy, které odpovídají profilu jejich schopností. Jinak je ohroženo jejich učení nebo učení jejich spolužáků.

Literatura

[1] Ainscow, M. Understanding the development of inclusive education system. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, N. 7, Vol. 3 (3), pp 5–20 , 2005

[2] Cunha, Flavio, Heckman, James J., Lochner, Lance, and Dimitriy V. Masterov: *Interpreting the Evidence on Life Cycle Skill Formation.* NBER Working Paper #11331, 2005

[3] *Evaluace socioekonomického rozvoje* (překlad: *The evaluation of socio-economic development – The Guide*), Ministerstvo pro místní rozvoj, 2005

[4] Hejný, M., Jirotková, D. 3D geometrie. In *Náměty na podnětné vyučování v matematice.* Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2007.

[5] Koucký, J. et al.: *Učení pro život. Výsledky výzkumu OECD PISA 2003*. MŠMT, ÚIV a SVP ÚVRŠ PedF UK, Praha 2004

[6] *OECD: Measuring Improvements in Learning Outcomes – BEST PRACTICES TO ASSESS THE VALUE-ADDED OF SCHOOLS*, 2008

[7] Palečková, J. et al.: *Hlavní zjištění výzkumu PISA 2006: Poradí si žáci s přírodními vědami?* ÚIV, Praha, 2007

[8] Sarason, S.B.: *The predictable failure of educational reform: Can We Change Course Before It's Too Late?* San Francisco, Jossey-Bass Inc., (p. 258), 1990

[9] Wößmann, L., and Schütz, G.: *Efficiency and Equity in European Education and Training Systems:* Analytical Report for the European Commission prepared by the European Expert Network on Economics of Education (EENEE) to accompany the Communication and Staff Working Paper by the European Commission under the same title, 2006

Jednání v sekcích

SLADKÝ ŽIVOT UČITELE

VÁCLAV BAUER, MIROSLAV HRICZ[1]

Oborové dny na FZŠ Táborská již zapustily kořeny natolik, že ani letos jsme na ně nemohli zapomenout. Žáci 2. stupně školy se zapisují na oborové dny podle témat vypsaných učiteli. Každé vypsané téma má určitý cíl. Každý oborový den bude vyplněn odhalováním tajů vybraného oboru. Mezi oborovými dny žáci sepisují oborovou práci, kterou tvoří celý školní rok. Jejich konzultanti jsou učitelé – vedoucí oborů. Výsledek své práce budou žáci prezentovat před ostatními kolegy oborové skupiny a žáci devátých ročníků obhajovat před komisí. Kdo z deváťáků obhájí svou doktorandskou práci, bude se moci honosit titulem DOKTOR TÁBORSKÉ (DrT.).

Jeden z oborových dnů ve školním roce 2008/2009 se jmenuje *Sladký život učitele*. Vedou jej učitelé matematiky[2] a žáky se v září snažili nalákat takto: **Chtěli byste zjistit, jak vypadá práce vašeho učitele? Co všechno může a musí dělat? Jaké situace řeší každý den ve své třídě? Jak se připravuje na výuku a jak vlastně učí? Víte, jak správně opravit písemnou práci? Chcete vědět, jak se učitel na své náročné povolání připravuje a kde? Přijďte mezi nás. Budeme dělat strašnou spoustu věcí. Například pomocí dramatizace prozkoumáme některé stránky práce učitele. Zkusíme se vžít do řešení výchovných problémů. Připravíme výuku pro naše mladší spolužáky a skutečně ji odučíme! Na webu zjistíme, co učitele zajímá a co je dnes nejvíce pálí. Podíváme se také na Pedagogickou fakultu, kde se učitelé připravují. Přijme nás snad pan děkan, ale minimálně vedoucí katedry matematiky. Zjistíme, co příprava učitelů obnáší, a vyzkoušíme si práci s notebookovou učebnou a velmi zajímavým programem Cabri, který za nás provede všechny geometrické konstrukce! Pracovník vysoké školy nás zasvětí do některých her, které nejen vyplní náš volný čas, ale také rozvíjejí logické myšlení.**

V rámci prvních dvou setkání v říjnu a prosinci žáci zdramatizovali některé možné situace z vyučovacích hodin. Na internetu účastníci exkurze do učitelovy duše vyhledávali různé informace týkající se vzdělávání a povinností učitele. Nakonec si šesťáci až deváťáci vypracovali přípravu na vyučovací hodinu matematiky ve 3. nebo 4. ročníku. Dostali k dispozici všechny učebnice, sešity dětí, různé pomůcky, využívali internet. K dispozici měli odborného konzultanta, který měl v případě potřeby připraveno mnoho rad.

[1]FZŠ Táborská, Praha, dr.n@centrum.cz, miroslav.hricz@centrum.cz

[2]Kromě obou autorů také J. Kloboučková a N. Stehlíková.

Ukázalo se, že někteří žáci měli již od začátku dobré nápady a brzy měli připravenou nápaditou hodinu, za kterou by se nemusel stydět ani aprobovaný učitel. Podle našeho názoru se zpočátku nejlépe chopili úkolu kupodivu žáci 6. ročníku, tedy nejmladší účastníci našeho oborového dne. Někteří měli s přípravou trochu starosti, jiní se báli předstoupit před třídu. Po vypracování pečlivých příprav a připravení scénáře hodiny jsme se snažili žáky připravit ještě na některé možné situace, které mohou v hodině nastat.

Konečně bylo vše připraveno na hodinu H. Žáci byli rozděleni do skupin a vysláni na svou první hodinu vyučování. Vždy pod dohledem pedagoga, samozřejmě. Zjednodušili jsme jim ovšem situaci tím, že jsme třídy rozdělili na polovinu. Na každou skupinu tří druhostupňových žáků připadalo tedy nejvýše 15 žáků prvního stupně.

S vytištěnými přípravami a geometrickými modely vyrazili tedy žáci do tříd. V jedné skupině byli dva žáci sedmého ročníku a jeden žák osmého ročníku. Dostali za úkol vyučovat jednu hodinu ve třetím ročníku. Úvod hodiny byl trochu rozpačitý, ale po několika minutách se mladí učitelé uklidnili a vydávali ze sebe maximum. Jejich žáci byli zpočátku velmi hodní a nechali učitele bez problému pedagogicky působit. Později ale nechali pedagogům pocítit tu méně příjemnou stránku výchovného procesu. Začali mírně vyrušovat, někteří se snad i nudili (myslíme, že to předstírali jen proto, aby si naši odvážní učitelé mohli vyzkoušet, jaké to je z pohledu učitele zabavit třídu) a celkově působili jako běžná třída základní školy. Po vyřešení všech zadaných úkolů, které měli učitelé připravené, jen na malou chvíli došla inspirace. Žákyně sedmého ročníku na tuto situaci však velmi pěkně reagovala slovy: „Tak a teď si zahrajem hru!“ Ačkoli šlo o aktuální improvizaci, která k učitelskému povolání patří také, zvládali ji všichni tři se zručností zkušeného pedagoga. I po zvonění si byli nuceni naši učitelé poradit. Žáky třetího ročníku museli dovést zpátky do jejich třídy ke zbytku osazenstva. I v tomto ohledu projevili velké nadání a citlivý přístup. Počkali, až se žáci seřadí, a pak je způsobně ve dvojicích vedli do třídy.

Na závěrečném hodnocení jejich krátké pedagogické praxe byla na všech účastnících znát značná úleva, že už „to“ mají za sebou. Někteří říkali, že si nedovedou představit, jak by se takhle připravovali na každou hodinu (příprava jim zabrala asi 5 vyučovacích hodin). Jiným se naopak v roli pedagoga zalíbilo a říkali, že si dokáží představit, že by se možná této profesi mohli v budoucnu věnovat. Někteří byli trochu kritičtí ke svému prvnímu vystoupení v opačné roli vzdělávacího procesu, ale myslím, že se to všem alespoň trochu líbilo.

I když se nepovedlo vše podle představ „mladých učitelek a učitelů“, musíme ocenit přípravu, snahu, ochotu a schopnost reagovat na situaci ve třídě. Toto ocenění přišlo také od malých žáků, kterým se výuka se staršími spolužáky líbila.

Příští oborový den strávíme na pedagogické fakultě, kde se žáci dozví, jak se vzdělávají budoucí pedagogové.

Využití jedné skládanky tangramového typu (nejen) ve výuce matematiky na ZŠ

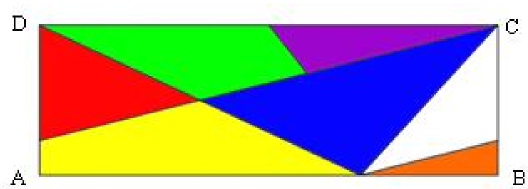
Daniela Blažková[1]

Úvod

Jako vedoucí seminářů pro studenty 1. ročníku Učitelství 1. stupně ZŠ jsem několikrát narazila na problém, který se týkal chyb ve vzorcích pro obsahy rovinných útvarů, především kosodélníku a lichoběžníku. Snažila jsem se proto vymyslet nějakou pomůcku, která by názorně ukázala odvození jednotlivých vzorců a pomohla tak opravit zmíněné chyby.

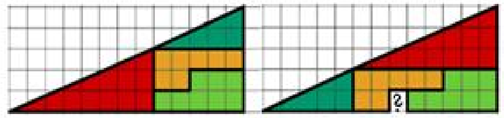
Po několika nepodařených pokusech vznikla skládanka o 7 dílcích, ze kterých je možné vytvářet různé obrazce, stejně jako u klasického čtvercového tangramu. Omezením je nepravidelnost dílků, díky níž nelze vytvořit velké množství figur.

Skládanka a postup jejího vzniku



Obr. 1: Skládanka ve výchozím tvaru

Jsou-li délky stran obdélníka členy Fibonnacciho posloupnosti, pak může nastat paradoxní situace (viz obr. 2). Použitím týchž dílků takového obdélníku lze poskládat útvary o různém obsahu (při umístění do čtvercové sítě přebývá 1 čtvereček).

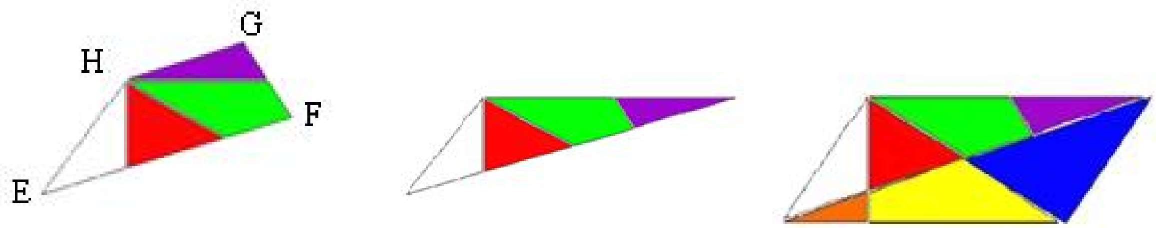


Obr. 2: Chybějící čtvereček

Aby taková situace nemohla nastat i v případě této skládanky, postupovala jsem při jejím vytváření pozpátku (viz obr. 3a–c).

[1] Katedra matematiky PdF UP v Olomouci, daniela.blazkova@upol.cz

SKLÁDANKA A POSTUP JEJÍHO VZNIKU



Obr. 3: (a) Lichoběžník (b) trojúhelník (c) kosodélník

Lichoběžník byl zvolen tak, aby nebyl rovnoramenný. Po několika pokusech vyšlo najevo, že čím menší je úhel při vrcholu E, tím větší je potom dílek označený oranžovou barvou (nejmenší dílek). Fialový dílek vznikl řezem podle spojnice vrcholu H se středem strany FG.

Jeden řez byl přidán dodatečně, a to kratší úhlopříčka v kosodélníku (obr. 3c). Ukázalo se, že díky tomuto řezu je odvozování vzorců pro studenty pochopitelnější, protože se nezmění výška trojúhelníka.

ODVOZENÍ VZORCŮ PRO VÝPOČET OBSAHU KOSODÉLNÍKA A TROJÚHELNÍKA

Pro odvozování vzorců pomocí této skládanky je nutné pochopení vzorce pro výpočet obsahu obdélníku. Kosodélník vznikne z obdélníku přesunutím bílého a oranžového dílu zprava doleva (viz obr. 1 a 3c).

Návodné otázky:

1. Jak se změnil obsah kosodélníku vůči obsahu původního obdélníku?
2. Jak se změnila délka strany (v obdélníku označená AB)?
3. Jestliže mají oba útvary stejně dlouhou jednu stranu, čím musíme vynásobit délku strany v kosodélníku, aby se nezměnil obsah?

Studenti sami přišli na to, že pro výpočet obsahu kosodélníku musí délku strany vynásobit výškou. Třetí otázku je možné formulovat i takto: Co má stejnou délku jako druhá strana v původním obdélníku?

Trojúhelník vznikne rozdělením kosodélníku podle úhlopříčky. Použijeme-li řez podle kratší úhlopříčky, nezmění se výška a odvození vzorce je pak srozumitelnější. Přemístěním zeleného, fialového a modrého dílku na zbývající dílky je možné ukázat, že úhlopříčka dělí kosodélník na dva shodné trojúhelníky.

Odvození vzorce pro výpočet obsahu lichoběžníku

Při odvozování tohoto vzorce je vhodnější nepřevádět trojúhelník na lichoběžník, ale použít zpětný postup. Při převodu lichoběžníku na trojúhelník je názorně zdůvodněn výskyt výrazu $(a + c)$ v čitateli vzorce pro výpočet obsahu lichoběžníku. Při opačném postupu není původ výrazu ve vzorci příliš jasný.

Pro odvození vzorce pro obsah lichoběžníku lze využít všechny dílky znázorněné na obr. 3a, příp. je možné odebrat bílý dílek (vlevo).

Další využití

Aby skládanka nesloužila pouze k jednomu účelu, přemýšleli jsme nad jejím dalším využitím. Nabízím některé z nápadů.

1. matematika – propedeutika pro učivo konstrukční geometrie (nácvik přesnosti rýsování, rozvoj představivosti), určování a hledání útvarů (trojúhelníky, čtyřúhelníky, ostroúhlé trojúhelníky), skládání dalších útvarů, rozvoj jemné motoriky prostřednictvím manipulace s dílky

2. výtvarná výchova – vitráže (malování barvami na sklo)

3. pracovní činnosti – možnost vyrobit si skládanku z pevnějšího materiálu

Trocha teorie na závěr

Použití skládanky je založeno na platnosti Bolyai-Gerwienova teorému, který říká, že každé dva jednoduché mnohoúhelníky o stejném obsahu jsou shodně rozložitelné. Jinými slovy: jsou-li dány dva jednoduché mnohoúhelníky o stejném obsahu, pak jeden může být rozdělen na konečně mnoho dílů (mnohoúhelníků), které mohou být přemístěny tak, že vytvoří druhý mnohoúhelník. Jednoduché mnohoúhelníky jsou takové, jejichž nesousední strany se neprotínají. Přemístěním je myšleno posunutí a rotace.

Analogické tvrzení o mnohostěnech v trojrozměrném prostoru (známé jako 3. Hilbertův problém), neplatí. V roce 1900 to dokázal Max Dehn.

Literatura

[1] *Bolyai-Gerwien theorem* [online]. [Cit. 28. 1. 2009]. Dostupné na WWW: `<http://en.wikipedia.org/wiki/Bolyai%E2%80%93Gerwien_theorem>`

[2] Kabai, S.; Szabó, F. H.; Szilassi, L. *An Example of the Bolyai-Gerwien Theorem* [online]. [Cit. 28. 1. 2009]. Dostupné na WWW: `<http://demonstrations.wolfram.com/AnExampleOfTheBolyaiGerwienTheorem/>`

ROZVÍJÍ ŠKOLNÍ VYUČOVÁNÍ MATEMATICKOU GRAMOTNOST ŽÁKA?

JANA CACHOVÁ[1]

V obchodě s textilem byl lednový výprodej – na veškeré zboží sleva 30 %. U pokladny prodavačka informovala postarší zákaznici, že jí tato sleva bude odečtena z celkové ceny nákupu. Nato se zákaznice obrátila na svou přítelkyni: *„Měly jsme platit dohromady, bylo by to levnější.“*

V návaznosti na úvodní ilustraci si položme následující otázku: *Pěstuje škola matematickou gramotnost svých žáků či nikoli?* Určitě to nebude problém pouze několika posledních let, paní v obchodě patřila už ke starší generaci.

MATEMATICKÁ GRAMOTNOST VE ŠKOLNÍ PRAXI

Pojem matematická kultura můžeme chápat ve smyslu dobrá matematika podle [5] jako dobré řešení problémů, dobrou matematickou techniku, dobré matematické aplikace, pěstování matematického vhledu, tvořivosti, ale i vnímání krásy matematiky. Úrovně matematické kultury jsou různé, záleží na stupni a typu školy. Jiná je matematická kultura technika, jiná učitele, maturanta, odborného matematika, ale i žáka. Podle [1] *je počátkem rozvíjení matematické kultury žáků pěstování jejich matematické gramotnosti, tedy dobrého fungování matematiky, kterou se učí.*

Matematickou gramotností na úrovni n-té třídy k-tého stupně školy rozumíme

- *schopnost porozumět matematickému textu (slovnímu, symbolickému nebo obrázkovému),*
- *schopnost vybavovat si potřebné matematické pojmy, postupy a teorie,*
- *dovednost řešit úlohy, které nemají problémový charakter.*

K řešení úloh problémového charakteru je ovšem třeba určitá míra tvořivosti, která představuje vyšší úroveň matematické gramotnosti. Tato úroveň patrně nemůže být požadována od celé populace. Základní matematickou gramotnost by měl dosáhnout každý absolvent příslušného typu školy. Pěstování matematické gramotnosti je nejdůležitější vzdělávací úkol každého stupně školy. [1]

Aby školní vyučování rozvíjelo matematickou gramotnost žáka, musí vést k jeho hlubšímu porozumění matematice, nejen k pouhému odříkání vyloženého učiva. Vyučování založené na porozumění pak rozvíjí matematiku v mysli dítěte, posouvá hranice jeho dosavadního poznání.

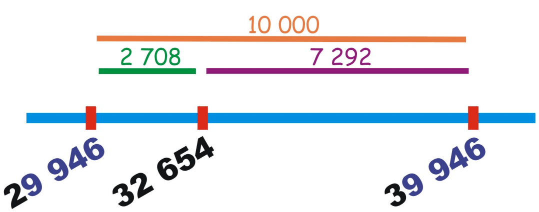
[1] Katedra matematiky PdF UHK, jana.cachova@uhk.cz

Používání základních číselných operací v nestandardních situacích

Budoucí učitelé prvního stupně dostali za úkol vyřešit úlohu (námět podle [6]):

Čtvrťáci řešili úlohu: *Zvolte různá pěticiferná čísla. Postupně ode všech odečtěte číslo 2 708 a rovněž k nim postupně přičtěte číslo 7 292. Co pozorujete? Dokážete dětem vysvětlit matematickou podstatu tohoto „kouzla“?*

Studenti sice většinou odhalili, že se součet a rozdíl u každého ze zvolených čísel bude navzájem lišit o 10 000 (viz příklad na obrázku), našlo se však mezi nimi i dost těch, kteří nedokázali tento jev odůvodnit, např.: *„U čísel, která se sčítají a odčítají, je udělán takový algoritmus, aby čísla výsledná byla téměř shodná.“*



Podobně činí problémy žákům i studentům nestandardní úlohy na operace násobení či dělení: *„Zvolte trojciferné číslo a napište je dvakrát za sebou. Vzniklé šesticiferné číslo vydělte postupně 7, 11 a 13. Co pozorujete? Vysvětlete proč.“*

Př.: 153 153

$$\begin{aligned} 153\,153 \div 7 &= 21\,879 \\ 21\,879 \div 11 &= 1\,989 \\ 1\,989 \div 13 &= 153 \\ 7 \times 11 \times 13 &= 1\,001 \end{aligned}$$

Výše uvedené úlohy nevyžadují žádný složitý aparát, mohou je řešit žáci 4. a 5. ročníků základní školy. Úlohy nejsou zaměřeny na pouhé procvičování, ale na porozumění vlastnostem početních operací. Zařazováním takových úloh do vyučování učitel nejen rozvíjí matematickou gramotnost svých žáků, ale vyhledávání podobných úloh či jejich aktivní tvoření přispívá i k dalšímu rozvoji jeho osobnosti. Dovést žáky k tomu, aby se více zamýšleli nad podstatou problémů, mohou úlohy následujícího charakteru:

Honzík tvrdí: *Když zaokrouhluji čísla 114 a 252 na stovky, zaokrouhlím je nejprve na desítky, a teprve pak mezivýsledek na stovky.* Souhlasíte s Honzíkem? Svůj postoj zdůvodněte.

$$\begin{aligned} 114 \rightarrow 110 \rightarrow\ & 100 \\ 252 \rightarrow 250 \rightarrow\ & 300 \\ \text{ale } 748 \rightarrow 750 \rightarrow\ & 800 \quad \text{(což je chybně).} \end{aligned}$$

Vhodným přístupem, který rozvíjí matematickou gramotnost žáka, může být podnětné vyučování. Abychom dosáhli u žáků potřebné úrovně matematické gramotnosti, nestačí v rámci vyučování nacvičovat řešení základních úloh. Vyučování musí být na vyšší úrovni, než kterou od žáka požadujeme na výstupu. Žáky je nutné vést nejen k nácviku početních a rýsovacích dovedností (řemesla – ačkoli i to je plnoprávnou a nezastupitelnou složkou vyučování matematice), ale rovněž k rozvíjení porozumění, hledání vzájemných vztahů a souvislostí. Právě v podnětném vyučování vede učitel vhodnými podněty žáky k aktivním činnostem, při nichž se rozvíjí jejich poznání.

Kalkulačky na 1. stupni ZŠ

Další možnost, jak zlepšit úroveň matematické gramotnosti, spatřuji v širším využívání kalkulátorů na 1. stupni ZŠ (od 1. ročníku). V kalkulátorech nevidím jen nástroj k usnadnění provádění výpočtů, ale činnosti s nimi chápu jako prostředí, které umožní žákům lépe pochopit pojem číslo. Podle Brunerovy klasifikace (viz [4]) je možné číselné reprezentace nahlížet jako enaktivní (například prsty nebo různá počítadla), ikonické (číselné obrazce jako třeba oka na hrací kostce či dominovém kameni), a také symbolické (což jsou číslovky v psaném textu i mluvené řeči, psané číslice, číslice na kalkulačce). Neubrand a Möller [3] ve svém pohledu na číslo kromě čísla kardinálního, ordinálního, čísla jako míry, operátoru a kódu uvádějí ještě jako důležitý aspekt i číslo ve významu početním (Rechenzahlen), a sice jednak z pohledu algebraických pravidel počítání, jednak pravidel algoritmických. Domnívám se, že tento aspekt je velmi důležitý, a že kalkulačka může být vhodným prostředím k jeho naplnění. Práce s kalkulátorem tak může napomoci poznávat strukturu přirozených čísel, ale i otevírat dětem další obzory, učit je poznávat aritmetické zákonitosti, napomáhat řešit problémové úlohy.

Článek byl vypracován za podpory grantu GAČR 406-08-0710.

Literatura

[1] KUŘINA, F.: Může být školská matematika matematikou dobrou? *Pokroky matematiky, fyziky, astronomie*, 53, 2008

[2] KUŘINA, F.: Problémy matematického vzdělávání. In *O škole a vzdělávání*. Praha, 2002.

[3] NEUBRAND, M., MÖLLER. M.: *Einführung in die elementare Aritmetik.* Franzbecker, 1999.

[4] PRŮCHA, J., WALTEROVÁ, E., MAREŠ, J.: *Pedagogický slovník - doplněné vydání.* Portál, Praha, 1998.

[5] TAO, T.: Co je dobrá matematika? *Pokroky matematiky, fyziky, astronomie*, 53, 2008.

[6] WITTMANN, E. CH., MÜLLER, G. N.: *Handbuch produktiver Rechenübungen.* Bd.2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen. Stuttgart: Klett, 1992

Kognitívne procesy matematického problem solvingu žiakov ZŠ a SŠ na Slovensku

Štefan Gubo, Ladislav Végh[1]

Úvod

Učitelia matematiky na Slovensku mnohokrát majú také skúsenosti, že žiaci, ktorí dokážu úspešne vyriešiť aritmetické úlohy v symbolickom tvare, sú často neúspešní pri riešení takých slovných problémov, v ktorých treba vykonať tie isté výpočtové operácie. V tomto príspevku nás zaujíma, ktoré kognitívne procesy tvoria základy procesu riešenia matematických problémov. Tým sa dostaneme k základným prameňom ťažkostí riešenia slovných problémov, k pochopeniu a interpretácii problému.

Kognitívne procesy matematického problem solvingu

Mayer (1996) rozoznal nasledovné základné kognitívne procesy matematického myslenia: tlmočenie, integrácia, plánovanie a vykonanie.

V procese tlmočenia riešiteľ pracuje na vnútornej reprezentácii každého tvrdenia, ktoré sa vyskytuje v zadaní problému, a vytvorí si bázu textových informácií. Proces integrácie zahŕňa v sebe rozpoznanie problémovej situácie a vytvorenie koherentnej reprezentácie problému. V procese plánovania riešiteľ zhotoví plán riešenia problému, ktorý v procese vykonania bude realizovať.

Podľa výskumov Mayera a Hegartyovej (1996) dôvod neúspešnosti v riešení slovných problémov sa skôr nachádza v reprezentácii problému, než v realizácii plánu riešenia. Autori nazývajú stratégiou priamej translácie metódu, kde si riešiteľ v procese integrácie vyberie čísla a kľúčové výrazy zo zadania problému, a potom s týmito číslami vykonáva určité aritmetické operácie. Pokiaľ kľúčové výrazy ukazujú na nevhodné operácie, bude plán riešenia pravdepodobne nesprávny. Mayer a Hegartyová (1996) došli k záveru, že stratégia priamej translácie je metóda slabších žiakov na riešenie problémov. Žiaci s lepším prospechom z matematiky vedia o danom probléme vytvoriť širšiu alebo úplne inú mentálnu reprezentáciu. Pri riešení slovných matematických problémov používajú tzv. stratégiu modelovania problému – najprv sa pokúsia pochopiť problémovú situáciu, a potom na základe reprezentácie problémovej situácie navrhnú plán riešenia. Autori zdôrazňujú, že uvedené dve stratégie sa odlišujú len v procese integrácie: riešiteľ, ktorý používa stratégiu priamej translácie v tejto fáze hľadá čísla a kľúčové výrazy, kým užívateľ stratégie modelovania problému sa snaží vytvoriť situačný model daného problému.

[1]Pedagogická fakulta, Univerzita J, Selyeho v Komárne, vegh@ide.sk; guboi@selyeuni.sk

CHARAKTERISTIKA VÝSKUMNEJ VZORKY

Cieľom nášho výskumu bolo zistiť v akej miere používajú žiaci ZŠ a SŠ stratégiu priamej translácie pri riešení slovných problémov. Do výskumnej vzorky sme zaradili žiakov 5. roč. ZŠ a prímy osemročných gymnázií, 8. roč. ZŠ a kvarty osemročných gymnázií, 2. roč. gymnázií a sexty osemročných gymnázií. Zber údajov výskumu sme uskutočnili v Banskobystrickom, Nitrianskom a Košickom kraji. Výskumnú vzorku tvorilo celkovo 745 žiakov: 247 žiakov 5. roč. a prímy, 280 žiakov 8. roč. a kvarty a 249 žiakov 2. roč. a sexty.

Ako merací prostriedok výskumu sme používali nami zostavený neštandardizovaný test „Hlavolamy“, ktorý obsahoval 11 problémov. Problémy mali charakter hádaniek a k ich riešeniu nebola potrebná hlbšia matematická vedomosť. S tým sme chceli vylúčiť, aby matematické neznalosti a nejasné matematické pojmy neboli prekážkami riešenia.

VÝSLEDKY VÝSKUMU

V tomto príspevku uvádzame kvantitatívnu analýzu 2 problémov testu: **Vodné ľalie** a **Stretnutie**.

Problém vodné ľalie: Problém sa ukázal náročným predovšetkým pre žiakov 5. roč. (prímy), kde správnu odpoveď uvádzalo iba 9,7 % žiakov. Nízka úspešnosť v riešení tohto problému sa prejavila aj u žiakov 8. roč./kvarty (pomer správnych riešení je 23,6 %). Nesprávne odpovede, vyskytujúce sa najčastejšie sú dôsledkom používania stratégie priamej translácie.

Výraz „polovica jazera“ prinútil väčšinu neúspešných riešiteľov (5. roč./príma: 56,2 %, 8. roč./kvarta: 85,3 %, 2. roč./sexta: 72,4 %) k vykonaniu aritmetickej operácie (delenie) číslom 2. Títo žiaci síce vykonali výpočet správne ($60 : 2 = 30$), ale chyba spočívala v nesprávnej reprezentácii problému. V 5. roč./príme (2,2 %) a 8. roč./kvarte (0,6 %) máloktorí žiaci namiesto delenia vykonali násobenie s číslom 2. V každom ročníku sa našli žiaci (5. roč./príma: 3,6 %, 8. roč./kvarta: 0,6 %, 2. roč./sexta: 1,3 %), ktorí si len jednoducho uviedli ako riešenie východiskový údaj (60. deň). Okrem toho niekoľko žiakov 5. roč./prímy (8,8 %) vykonalo aritmetickú operáciu s číslom 24.

Problém stretnutie: Správnu odpoveď na tento problém uvádzalo 15,4 % žiakov 5. roč./prímy, 41,1 % žiakov 8. roč./kvarty a 53,2 % žiakov 2. roč./sexty. Analýzou žiackych riešení sme zistili v každom testovanom ročníku zhruba podobné výsledky. Žiaci, ktorým sa nepodarilo problém správne riešiť, väčšinou si len jednoducho označili niektoré z áut. V 5. roč./príme viac ako polovica (52,6 %) neúspešných riešiteľov tvrdila, že auto pohybujúce sa rýchlosťou 70 km/h je bližšie k Nitre, kým väčšina žiakov (52,7 %) v 8. roč./kvarte označila pomalšie auto. V 2. roč./sexte žiaci si označili prvé (40,0 %) alebo druhé auto (44,3 %) približne v rovnakom pomere. Žiaci, ktorí zvolili auto s rýchlosťou 70 km/h, svoju odpoveď vysvetľovali tak, že toto auto sa pohybuje rýchlejšie. Žiaci druhej skupiny argumentovali tým, že pomalšie auto malo 15-minútový náskok. Vo všetkých ročníkoch sa našli takí žiaci, ktorí hľadali odpoveď na otázku, kde sa autá stretnú. Dôvod je zrejme v tom, že v niektorých pohybových úlohách treba často vypočítať vzdialenosť bodu stretnutia od niektorého mesta. Žiaci sa po niekoľkých neúspešných výpočtoch vzdali a ako riešenie uvádzali polovicu vzdialenosti dvoch miest (45 km).

ZÁVER

Na základe analýzy žiackych riešení konštatujeme, že použitie stratégie priamej translácie pri riešení slovných problémov možno pozorovať v každom testovanom ročníku.

Tento výsledok však dovoľuje implikovať záver, že na slovenských školách na hodinách matematiky sú v prevahe také slovné problémy, riešenie ktorých nevyžaduje používanie stratégie modelovania problému. Aj výskumy PISA 2003 ukázali, že slovenskí žiaci majú menej rozvinutú schopnosť riešiť problémy a sú pripravení riešiť len jednoduchšie problémy. Slovensko v tejto oblasti skončilo preukázateľne pod priemerom krajín OECD (pozri PISA 2003 – národná správa).

Ak vyučovanie matematiky na Slovensku má vyhovovať deklarovanému cieľu, aby žiaci disponovali užitočnými a použiteľnými vedomosťami, tak v budúcnosti treba vytvoriť v školskom vyučovaní väčší priestor pre problémy, ktoré sa dajú riešiť predovšetkým so stratégiou modelovania problému.

LITERATURA

[1] MAYER, R. E.; HEGARTY, M. 1996. The Process of Understanding Mathematical Problems. In Sternberg, R. J. – Ben-Zeev, T. (eds.): *The Nature of Mathematical Thinking*. New York, NY : Lawrence Erlbaum Ass., 1996. 29–54.

ZAMESTNANIA Z MATEMATIKY PODĽA A. K. ZVONKINA

MATÚŠ HARMINC[1]

Vo svojom vystúpení na Dvoch dňoch s didaktikou matematiky 2009, rovnako ako v tomto príspevku, sme sa pokúsili priblížiť jednu knihu, jej autora, jej vznik a jej

[1] ÚMV PF UPJŠ, Košice, Slovenská republika; matus.harminc@upjs.sk

jedinečnosť. Nemala to byť a nemá to byť reklama, hodnotné veci sa presadia samé a táto kniha si už našla mnoho svojich čitateľov. Nešlo ani o odbornú recenziu. Chceli sme iba upozorniť na ňu potenciálnych záujemcov v svojom okruhu.

Najprv uvedieme o autorovi, ktorým je Alexander Kalmanovič Zvonkin, niečo z toho, čo sa o ňom dá dozvedieť z jeho domovskej stránky na Internete [1]. Uvádza sa tam, že je univerzitným profesorom informatiky v Bordeaux vo Francúzsku. Narodil sa v Bielorusku v roku 1948, absolvoval s výbornými výsledkami štúdium matematiky a fyziky na Lomonosovovej univerzite v Moskve, kde získal z matematiky v roku 1974 aj hodnosť PhD. Najprv učil na Koľmogorovovom lýceu v Moskve, ktoré je zamerané na matematiku a fyziku, potom dva–tri roky na univerzite v Saransku (Rusko). Neskôr, v rokoch 1976–1989, riadil Národný ústav výskumu automatizácie ťažby ropy a plynu sídliaci v Moskve a v rokoch 1989–1992 Radu pre kybernetiku Akadémie vied ZSSR. Od roku 1991 pôsobí v Bordeaux. Je ženatý, otec dvoch už dospelých detí.

Obdivuhodná je paleta odborných záujmov A. K. Zvonkina. Patrí do nej teória stochastických a obyčajných diferenciálnych rovníc, teória pravdepodobnosti, optimálna kontrola ťažby ropy, informatika a reprezentácia informácií, lingvistika, vyučovanie informatiky na strednej škole, enumeratívna a algebraická kombinatorika i teória riemannovských priestorov. Jeho tvorivosť dokumentuje autorstvo alebo spolautorstvo 3 kníh, 3 kapitoly v kolektívnych monografiách, 4 knihy preložené z angličtiny a francúzštiny do ruštiny, 17 článkov v medzinárodných časopisoch a 11 v zborníkoch, 15 prác pedagogického charakteru, asi 30 výstupov a prezentácii na medzinárodnych fórach a množstvo vystúpení na seminároch, kolokviách a workshopoch.

Venujme sa teraz jeho knihám. Prvá z nich ([2]), napísaná spolu s ďalšími štyrmi autormi, je príručkou pre stredné školy. Prvýkrát vyšla v roku 1996, rozšírené štvrté vydanie ([3]) v roku 2006, pripravuje sa preklad do angličtiny. Druhou je hrubá, obsažná a vysoko odborná monografia [1], ktorá svedčí o šírke a hĺbke záberu autorov v rámci matematiky i v rámci danej témy. Vydalo ju prestížne nakladateľstvo a pripravuje sa preklad do ruštiny. Týmto príspevkom však chceme upozorniť na tretiu knihu A. K. Zvonkina [4] s názvom „Malyši i matematika“ a podnadpisom „Domašnij kružok dľa doškoľnikov“.

O tejto knihe sa uvádza, že je o autorovej skúsenosti a jeho matematických aktivitách s deťmi vo veku od 4 do 7 rokov, že zaujme rodičov detí predškolského veku (a tiež ich babičky a dedkov), vychovávateľky v materských škôlkach, učiteľov prvých tried a všetkých tých, ktorých zaujíma proces rozvoja detského intelektu. Žáner knihy je zmiešaný: zápisy z denníka sa striedajú s úvahami o matematike alebo o psychológii, s pozorovaniami detí a ich reakcií. Autor sám o tom hovorí: „Ak sa to hodí, je možné túto knižku brať aj ako svojho druhu zbierku úloh z matematiky pre predškolákov. S tou zvláštnosťou, že okrem samotných úloh sa tu ešte rozpráva i o tom, ako deti na tieto úlohy reagovali, čo chápali, čo nie, aké sme s nimi mali ťažkosti a nedorozumenia.“ I v ďalšom použijeme vyjadrenia autora.

Za počiatok zrodu knihy [4] možno považovať dátum úplne prvého zamestnania s deťmi, 23. marec roku 1980. V tom čase Dima, syn A. K. Zvonkina, dovŕšil 3 roky a 10 mesiacov. S ním a s ďalšími štyrmi deťmi približne v takom istom veku ako on, alebo o čosi staršími, jeho priateľmi z dvora, začal matematický krúžok. Zo začiatku si autor knihy nijaký denník neviedol a už vôbec nepripisoval týmto zamestnaniam nejako zvlášť veľký význam. Asi po polroku od začiatku zamestnaní ho však niekoľko jeho priateľov poprosilo, aby im porozprával, čím a ako sa zaoberajú. Namiesto prúdu úloh a ideí nastala trápna pauza, zdalo sa, že takmer na všetko zabudol. Dobre si pamätal len celkový pocit entuziazmu a naplnenosti detskou energetikou, ktorý ho neustále sprevádzal počas krúžkov.

Tak začal zapisovať. Zistil však, že zapisovať len úlohy samé osebe nie je veľmi zmysluplná práca. To, čo je v skutočnosti zaujímavé, to nie sú úlohy ani ich riešenia, ale proces, ktorý vedie od jedného k druhému. Cesta od zadania k riešeniu môže trvať niekoľko rokov, je na to kopa príkladov. Rozhovory na túto tému – to je to najzaujímavejšie! Takýmto spôsobom pomaly obrastal zoznam úloh čoraz väčším množstvom komentárov, historiek, anekdot, začal časom zahŕňať nielen matematické témy, ale aj všeobecné úvahy a teórie.

Potom nastúpila ďalšia etapa: medzi krúžkom a denníkom vznikol obrátený vzťah. Pri zápise toho, čo videl a o čom rozmýšľal, vznikali nové myšlienky, možnosti zvratov deja, rodili sa nové úlohy a témy zamestnaní. Po čase si spomenul na niečo, čo sa stalo na krúžku, čomu v zhone nevenoval pozornosť a bol by na to potom úplne zabudol, keby si to hneď nebol zapísal.

Zamestnania s chlapcami, hoci aj nie celkom pravidelne, trvali štyri roky. Za ten čas podrástla Žeňa (autorova dcéra) a začal druhý krúžok – s ňou a s jej kamarátkami. Ten trval dva roky. A keď prešiel čas a deti vyrástli, čítali denník. Ukázalo sa, že si veľa vecí dobre pamätajú a ich vnímanie udalostí sa zďaleka nie vždy zhodovalo s otcovým (a niekedy bolo presne protikladné). Na jeho prosbu doplnili text svojimi komentármi. Tento doplňujúci rozmer spôsobil stereo efekt podania skutočnosti.

Pokiaľ ide o publikovanie, najskôr sa objavili tri články o krúžku v časopise „Znanije – Sila“; populárnymi sa stali dva uverejnené v No. 8, 1985 a No. 2, 1986. Významný básnik pre deti a pedagóg V. A. Levin vtedy povedal, že tie články sú klasikou pedagogickej literatúry. Preložené do angličtiny vyšli v uznávanom odbornom časopise ([5], [6]) a objavili sa asi na štyroch rôznych stránkach na Internete. Opätovne boli zverejnené v novinách „Predškolské vzdelávanie“ (v máji a v júli 2000), zaradené do knihy V. A. Levina „Vyučovanie pre rodičov“ (Folio, Moskva 2001) a do brožúry „Domáca škola pre predškolákov“ (Prvý September, Moskva 2005). Napokon, v roku 2006, vyšla kniha [4] a pre veľký záujem už v roku 2007 jej 2. vydanie. V roku 2008 bola v Rusku nominovaná do finálovej štvorice o cenu „Prosvetiteľ“ za najlepšiu osvetovo-vzdelávaciu knihu roka.

Na priblíženie podrobností z jej bohatého obsahu tu niet priestor. Okrem zásad práce krúžku a námetov z matematiky a informatiky v nej nájdeme návrhy a zdôvodnenia spôsobov realizácie krúžkov, reakcie detí, vlastné reflexie autora a prístupne vysvetlenia psychologickej i pedagogickej teórie podstaty pozorovaných javov. Pre tých, ktorí by si chceli utvoriť vlastný názor a čítajú rusky, je na Internete verejne prístupných prvých 71 strán tejto knihy na adrese `http://ilib.mirror1.mccme.ru/pdf/1-71.pdf`. Našou snahou bolo upozorniť týmto príspevkom na dve skutočnosti: na ojedinelé stretnutie nízkeho veku detí, o ktorých matematických skúsenostiach sa v knihe píše, s vysokou matematickou profesionalitou autora a na pomerne dlhé obdobie systematickej dokumentácie zápiskami. Druhým naším cieľom bolo prispieť k šíreniu myšlienok, ktoré môžu pomôcť deťom mať dobrý vzťah k matematike.

LITERATURA

[1] S. K. Lando, A.K. Zvonkin: *Graphs on Surfaces and their Applications.* Springer-Verlag, 2004.

[2] A. K. Zvonkin, A. G. Kulakov, S. K. Lando, A. L. Semenov, A. Kh. Shen.: *Algoritmika*, Moskva. 1996, 1997, 1998.

[3] A. K. Zvonkin, S. K. Lando, A. L. Semenov: *Informatica. Algorithmica.* Moskva, 2006.

[4] A. K. Zvonkin: *Malyši i matematika, Domašnij kružok dľa doškoľnikov.* Moskva, MCCME, 2006, 2. vydanie 2007.

[5] A. K. Zvonkin: Mathematics for little ones. *Journal of Mathematical Behavior*, 1992, vol. 11, no. 2, 207–219.

[6] A. K. Zvonkin: Children and C_5^2. *Journal of Mathematical Behavior*, 1993, vol. 12, no. 2, 141–152.

[7] `http://www.labri.fr/perso/zvonkin` (cit. 30. 3. 2009)

ŽIVÉ A NEŽIVÉ MOZAIKY

LUCIA ILUCOVÁ[1]

Pri porovnávaní hodnôt vlastností prvkov v súbore určujeme najčastejšie aritmetický (alebo iný, podľa potreby vhodnejší) priemer. Príkladom skúmanej vlastnosti môže byť výška detí v triede, počet počítačových hier u jednotlivých žiakov, hmotnosť psov na sídlisku alebo priemer tenisových loptičiek či kameňov v horách. Aritmetický priemer

[1]Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, MÚ AV ČR v Praze; ilucova@gmail.com

hodnôt nám ale podá len informáciu, ako vyzerá alebo aký je „priemerný“ prvok v súbore. K tomu, aby sme vedeli aká je odlišnosť všetkých prvkov súboru od „priemeru“, potrebujeme ďalšiu charakteristiku súboru – *koeficient variácie*. Ako príklady súborov prvkov živej a neživej prírody si zvoľme rovinné mozaiky.

Rovinnou mozaikou, alebo tiež *rovinnou teseláciou*, rozumieme pokrytie roviny útvarmi bez medzier a prekrytí. Napriek tomu, že všetky reálne telesá (a teda aj telesá/útvary vytvárajúce teselácie) majú tri rozmery a hrúbka hraníc medzi útvarmi nie je nulová, tretí rozmer a hrúbku môžeme zanedbať a použiť tento matematický pojem ako vhodný model pre opis súborov rôznych reálnych objektov (Okabe a kol., 1992); príklady reálnych teselácií sú na obrázku 1.[2]. K tomu, aby sme mohli určiť variabilitu jednotlivých útvarov teselácie, si zvolíme za charakteristiku „veľkosti“ útvarov vytvárajúcich rovinnú teseláciu ich obsah a použijeme koeficient variácie obsahu CVa.

Kvôli prehľadnosti si zhrňme postup pre výpočet koeficientu variácie obsahu CVa pre n prvkov súboru (príslušné vzťahy sú uvedené nižšie):

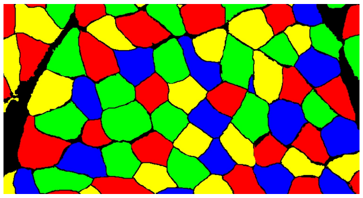
- určíme si obsah i-tého útvaru a_i tvoriaceho teseláciu, $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$,
- vypočítame aritmetický priemer A (odhad strednej hodnoty) hodnôt a_i,
- vypočítame rozptyl s_a^2 a smerodatnú odchýlku s_a, vypočítame koeficient variácie CVa.

$$s_a^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (a_i - A)^2}{n} \qquad s_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (a_i - A)^2}{n}} \qquad \mathrm{CV}a = \frac{s_a}{A}$$

Ak by sme počítali CVa pre teseláciu vytvorenú zo zhodných útvarov (napr. pravidelných šesťuholníkov, rovnostranných trojuholníkov alebo štvorcov), CVa by bolo rovné 0, pretože všetky útvary majú rovnaký obsah. Čím sa však útvary od seba viac líšia obsahom, t. j. teselácia je vytvorená útvarmi veľmi rozdielnych obsahov, tým je CVa väčšie. (A naopak, čím je hodnota CVa väčšia, tým častejšie sa vyskytujú odchýlky od strednej hodnoty a tým častejšie môžu byť odchýlky veľké.) Dôležitou vlastnosťou a výhodou tejto charakteristiky (najmä pre geometrické vlastnosti objektov) je, že je nezávislá na rozmeroch skúmanej vzorky. Znamená to, že je jedno, či určujeme CVa na vzorke skutočných rozmerov, alebo na zmenšenom či zväčšenom obrázku, resp. či porovnávame kožu malých a veľkých žiráf.

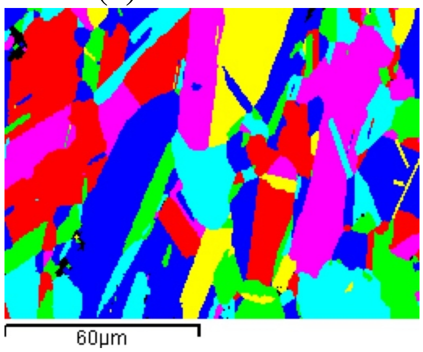
Teselácie tvorené bunkami živých tkanív (obr. 1a, b) sú optimalizované – majú veľmi podobný tvar i rozmery a aj ich usporiadanie je čiastočne pravidelné. Zrná polykryštalických materiálov (a takisto aj ich dvojrozmerné rezy – profily; obr. 1c, d) sa ale vyznačujú tvarovou i rozmerovou variabilitou, ktorá je zapríčinená nepravidelným

[2]Využitie teselácií v školskej matematike je rôznorodé; príkladom môže byť rozvíjanie detskej tvorivosti a aplikácia zhodných zobrazení, viď napr. (Ilucová, 2008), (Ranucci, Teeters, 1977).

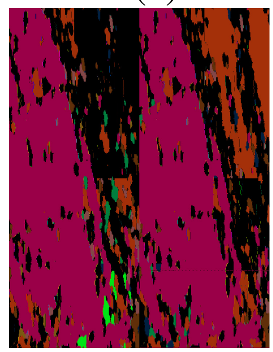


(a)

(b)



(c)



(d)

Obr. 1: (a) Rez kostrového svalstva potkana (CVa = 0,326), (b) koža žirafy (CVa = = 0,377), (c) rez polykryštalickej látky (meď, CVa = 3,17), (d) rez polykryštalickej látky (hliník, CVa = 11,78).

priestorovým rozmiestnením zárodkov, lokálnou variáciou rastových podmienok alebo technologickým postupom pri výrobe. Väčšiu rôznorodosť (odlišnosť) útvarov vytvárajúcich teselácie v neživej prírode potvrdzujú aj vypočítané koeficienty variácie (viď popis pod obrázkom).

Z uvedených príkladov[3] je zrejmá skutočnosť všeobecnej povahy, že živé objekty vznikajú za málo odchýlených podmienok a v podobnom prostredí, pričom ich vnútorné usporiadanie je riadené genetickými zákonmi optimalizovanými postupným vývojom. Na druhej strane objekty neživej prírody, najmä tie, ktoré sú produkované človekom, sú neporovnateľne variabilnejšie.

Príspevok je podporený grantom GAAV ČR IAA 100110502.

Literatura

[1] Ilucová, L. (2008): Geometria a výtvarná tvorivosť detí. In Stehlíková, N., Jirotková, D. (eds.): *Dva dny s didaktikou matematiky 2008*. Sborník příspěvků. PedF UK, Praha, 53–55.

[2] Okabe, A., Boots, B., Sugihara, K. (1992): *Spatial Tessellations*. J. Wiley & Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore.

[3] Ranucci, E. R., Teeters, J. L. (1977): *Creating Echer-type drawings*. Creative publications, Palo Alto.

[3]Neobvyklá farebnosť uvedených teselácií je v prípadoch a), b) len pomôckou pre rozlíšenie jednotlivých útvarov, v prípadoch c), d) farebnosť obrázkov „spôsobil“ elektrónový mikroskop.

PROBLÉMY ŽIAKOV S MATEMATICKOU REFLEXIOU PRI RIEŠENÍ STOCHASTICKÉHO PROBLÉMU

MÁRIA KOLKOVÁ[1]

Medzinárodná štúdia PISA rozlišuje tri úrovne matematických kompetencií podľa kognitívnych nárokov, ktoré na žiaka kladie riešenie problému ([1], s. 41). Najnižšou úrovňou je úroveň reprodukcie. Charakterizuje ju schopnosť rozpoznať matematické objekty v úlohách, ktoré sú veľmi blízke tým, s ktorými sa žiak už stretol, a zopakovať už precvičené postupy riešenia. Druhá úroveň – úroveň prepojenia – od žiaka vyžaduje už istú samostatnosť v uvažovaní a prepojenie rôznych častí matematiky, viacerých reprezentácií, či zahrnutie viacerých informácií. Najvyššiu úroveň reflexie charakterizuje samostatnosť a tvorivosť žiaka (vo formulovaní úloh, hľadaní vlastných stratégií), abstraktné myslenie a schopnosť zovšeobecňovať, porozumenie a preniknutie do problémov, ktoré sú komplexnejšie a originálnejšie oproti problémom, ktoré vyžadujú kompetencie na nižších úrovniach (porov. [1], s. 42–49).

Zaoberať sa úrovňou reflexie si vyžaduje presnejšie popísať, čo táto úroveň znamená. Okrem analýzy uvoľnených úloh zo štúdie PISA sme sa o to pokúsili i prostredníctvom experimentu.

V príspevku uvádzame analýzu jedného problému zo série piatich problémov, ktoré v septembri 2008 riešili žiaci 1. (34 žiakov) a 2. (60 žiakov) ročníka gymnázia.

V poradí druhý problém mal tri časti:

1. V plátennom vrecku sú tri guľky: biela, oranžová a modrá. Všetky sú rovnako veľké a z rovnakého materiálu. Vytiahnime naraz dve z nich a vráťme ich späť do vrecka. Koľko rôznych dvojíc guliek môžeme vytiahnuť?

2. Janka s Katkou modrú guľku vymenili za ďalšiu oranžovú a dohodli sa, že budú niekoľkokrát so zaviazanými očami losovať z vrecka dve guľky. Ak budú obe oranžové, získava bod Janka. Ak bude jedna oranžová a druhá biela, získava bod Katka. Je to spravodlivá hra alebo je niektoré dievča vo výhode? Prečo si to myslíš?

3. K dvom oranžovým a jednej bielej guľke pridajme ešte jednu bielu guľku. Budeme losovať dve guľky. Sú teda dve možnosti: obe budú rovnakej farby alebo bude jedna biela a druhá oranžová. Na ktorú možnosť by si vsadil? Prečo si sa takto rozhodol?

Riešenie prvej časti žiakom nerobilo problémy. Správna odpoveď v druhej časti však už bola zriedkavá (v 14 z 94 riešení). Problém robilo rozlišovanie prvej a druhej

[1]Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach; maria.kolkova@upjs.sk

oranžovej guľky. Tomu sme chceli predísť zaradením prvej časti a formulovaním druhej časti pomocou prvej – modrú guľku sme vymenili za oranžovú. Túto súvislosť postrehli pravdepodobne dvaja riešitelia, čo považujeme za prejav matematickej reflexie. Problém postrehnúť toto prepojenie však mohlo byť do veľkej miery spôsobené komplikovanejším zadaním v druhej časti.

Za prejav reflexie považujeme logické uvažovanie žiačky. Podľa nej je vo výhode Katka, „pretože ak vytiahne bielu, potom tam ostanú dve oranžové a môže vytiahnuť, ktorú chce. Ale keď vytiahne oranžovú, má tam už iba jednu oranžovú a jednu bielu. Čiže musí trafiť tú správnu.“

Zaujímavé je tiež riešenie, v ktorom žiačka uvažuje nie o vylosovaných guľkách, ale o guľke, ktorá vo vrecúšku zostala. Takto je úloha podstatne zjednodušená. Napriek tomuto zjednodušeniu žiačka šance oboch dievčat považuje za rovnaké. Obe žiačky v posledných dvoch prípadoch azda potrebovali pomoc, podnet k matematickej reflexii zvonka.

V tretej časti sme predpokladali intuitívne riešenie, podľa ktorého na základe rovnakého počtu bielych a oranžových guliek vo vrecúšku očakávame, že pravdepodobnosti vylosovania guliek rovnakej farby a vylosovania guliek rôznej farby budú rovnaké. Zaujímalo nás, či teoretické riešenie (napr. prostredníctvom výpisu všetkých možností) presvedčí žiakov o nesprávnosti intuície. Avšak žiaci sa veľmi často o zdôvodnenie nepokúsili. Uspokojili sa s tvrdením, že šance oboch dievčat sú rovnaké. Nehľadanie argumentu možno považovať za nedostatok matematickej reflexie.

Ako nedostatok reflexie sme zhodnotili nie vytrvalosť v hľadaní matematického modelu u žiakov, ktorí mali správnu intuíciu (že vylosovanie guliek rôznej farby je viac pravdepodobné ako vylosovanie guliek rovnakej farby), no na základe chybného riešenia rozhodnutie (azda veľmi rýchlo) zmenili. Môže to vyplývať z nedostatku skúsenosti, nedôvery vo vlastnú intuíciu.

Nie konzistensnosť medzi riešením druhej a tretej časti je azda ďalším prejavom nedostatku matematickej reflexie. Prejavila sa v riešení, v ktorom žiačka v tretej časti správne vypísala všetky možné prípady, tento prístup však nepoužila pri riešení druhej časti.

Vyskytli sa tiež riešenia, v ktorých autori v druhej alebo tretej časti napriek správnemu výpisu všetkých možných prípadov formulujú nesprávny záver. Nie porozumenie pri používaní modelu možno tak označiť za ďalší prejav nedostatku matematickej reflexie.

Aj v tretej časti sa objavilo riešenie logickou úvahou. Jej autorka správne určila za pravdepodobnejšie vylosovanie guliek rôznej farby, „lebo ak vytiahnem jednu farbu, tak vo vrecúšku ostanú tri guľky, jedna z farby, ktorú som už vytiahla, a dve iné, čiže je pravdepodobnejšie, že vytiahnem tú inú, keďže prevažuje“.

Možno teda zhrnúť objavené charakteristiky matematickej reflexie prostredníctvom analyzovaného problému. Matematická reflexia sa podľa nás prejavuje v uvedomovaní si súvislostí; všimnutí si rozporov a snahe o konzistentnosť; logickom uvažovaní; používaní modelu s porozumením; vnímaní potreby matematicky vysvetliť svoje tvrdenie; vytrvalosti pri hľadaní správneho modelu.

Prepojenie častí problému umožnilo určiť niektoré charakteristiky matematickej reflexie. Ony sú azda zároveň výzvou k možným stratégiám. Predkladanie problémov, ktoré spolu súvisia, sa zdá byť dobrou stratégiou podnecovania k matematickej reflexii. Stratégia predkladania problémov, ktorých intuitívne riešenie odporuje teoretickému, bude pravdepodobne vhodná v iných podmienkach. Na základe písomných riešení je možné pripraviť kontrapríklady k nesprávnym argumentáciám žiakov či podnety k nepresným argumentáciám. Predpokladáme, že to môžu byť ďalšie stratégie, ako rozvíjať kompetencie na úrovni reflexie. Skúmanie týchto stratégií plánujeme ako ďalší krok v našom výskume.

Literatura

[1] *The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills* [online]. [cit. 2009–03–31]. Dostupné na internete: <http://www.oecd.org/dataoecd/46/14/33694881.pdf>

Didaktické hry z matematiky pro žáky 1. stupně ZŠ – pozice a inspirace

Eva Krejčová[1]

Didaktické hry mají své nezastupitelné místo v hodinách matematiky, a to zejména na 1. stupni základní školy. Podle G. Pettyho „mohou zapojovat žáky velmi intenzivně do výuky a přimět je k takovému soustředění, jakého nelze dosáhnout pomocí žádné jiné metody“. Tato skutečnost pramení především z toho, že didaktické hry vycházejí z přirozených potřeb žáků tohoto věku, navazují na nejvýraznější rysy dětské osobnosti: hravost, spontánnost, aktivitu.

Vhodně volené didaktické hry nenásilným (přitažlivým) způsobem přispívají k naplňování požadovaných kompetencí v oblasti vzdělávací, sociální, občanské a právní tím, že

1. plní důležitou funkci motivační,

[1]Univerzita Hradec Králové, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky; eva.krejcova@uhk.cz

2. zvyšují aktivitu a efektivitu učení, podněcují rozumové úsilí, cvičí paměť,
3. rozvíjejí tvořivý způsob myšlení,
4. přispívají k vytváření pozitivního sociálního a pracovního klimatu,
5. umožňují skloubit a využít poznatky z různých vyučovacích předmětů, přispívají k jejich funkčnímu propojení,
6. podporují spolupráci při získávání sociálních dovedností v poznávacích procesech,
7. mohou přispívat k dosažení alespoň dílčího úspěchu (hry s prvky náhody, hry skupinové).

Didaktické hry mají i další, ve školní praxi často nedoceněné přednosti. Tím, že vyvolávají touhu komunikovat, jsou vynikající vyučovací metodou. Jako každá jiná metoda se však neobejdou bez některých úskalí. Jejich příčinou je zpravidla volba didaktických her, jejich zúžený výběr. V praxi převažují hry frontální nebo individuální, jež mají často charakter soutěže a neberou ohled na individuální zvláštnosti žáků. Stačí připomenout „Početního krále“ nebo „Zamrzlíka“. Hry tohoto typu mohou na většinu soutěžících působit spíše kontraproduktivně. Místo, aby žáky motivovaly, aktivizovaly jejich znalosti, přispívaly k efektivnějšímu osvojení učiva, navozují nežádoucí sociální klima. Paradoxně ti žáci, kteří si potřebují učivo nejvíce procvičit, jsou z učebního procesu záhy vyřazováni. Tato skutečnost může někdy vést ke zkreslování přínosu didaktických her ve vyučování.

Jednou z možných příčin omezeného výčtu uplatňovaných didaktických her v matematice, jejich zúženého využití jak z pohledu vzdělávacích možností – obsahová stránka, tak pokud jde o formy a metody práce, je nedostatečná nabídka. Tato skutečnost nás mj. vedla k sepsání příručky, v níž se snažíme alespoň částečně vyplnit zmiňovanou mezeru v této oblasti.

Jedná se o sbírku 136 didaktických her a jejich dalších variant, které se dají zařadit v různých částech hodiny matematiky. Lze je využít jako motivaci při prezentaci nového učiva, při procvičování, opakování, ale i k získávání dalších, pro život potřebných kompetencí.

Příručku chystá v letošním roce (duben) k vydání Státní pedagogické nakladatelství v Praze. Je určena především studentům oboru učitelství 1. stupně základní školy a začínajícím učitelům. Může však posloužit i zkušenějším pedagogům k rozšíření nabídky didaktických her, k efektivnějšímu a smysluplnějšímu využití jejich potenciálu.

Didaktické hry ve sbírce členíme podle stěžejních vzdělávacích cílů do tří kapitol. Nejvíce jsou, s ohledem na charakteristiku učiva matematiky v 1. – 5. ročníku základní školy, zastoupeny hry k nácviku numerace a k zavádění a procvičování početních operací. Následují hry k rozvíjení představivosti, tvořivosti a propedeutice i prohlubování učební látky z geometrie. Třetí část tvoří hry k podněcování logického a kombinatorického uvažování. Zvláštní celek představují hry, při jejichž prezentaci a realizaci hraje roli barevnost. Pro lepší přiblížení jsme je z technických důvodů bez ohledu na jejich vzdělávací záměr soustředili do společného bloku. U každé hry uvádíme její název, didaktický cíl, sledované kompetence, potřebné pomůcky a popis.

Při zvažování o začlenění her do sbírky rozhodovaly především praktické zkušenosti, jejich přínos v oblasti vzdělávací a výchovné. Upřednostňujeme hry nespecifické (univerzální), tj. takové, které umožňují operativně využít daný postup k probírání co nejširšího okruhu učiva. Mnohé hry lze pro menší děti zjednodušit a nebo je naopak poněkud zkomplikovat, aby zaujaly i starší žáky. Dále preferujeme příležitost k aktivnímu zapojení do činnosti co možná největšího počtu žáků, materiálovou nenáročnost, jednoduchá pravidla, okolnost zažít pocit úspěchu. Proto ve sbírce nechybí hry, kde výhra částečně „staví“ na prvku náhody nebo hry skupinové. V obou případech zvyšují naději žáka, že uspěje, a tím jej vnitřně motivují. Párové a skupinové vyučování vsazené do hry navíc považujeme za velice vhodné propojení. Podobně je tomu u řešení problémových úloh. Platí, že téměř každou činnost lze změnit ve hru, jestliže ji předložíme jako problémovou úlohu. Navíc tento principiální přístup, na rozdíl od předpřipraveného postupu „na klíč“, vede žáky k zvídavosti, aktivizuje jejich myšlenkové úsilí.

Z pohledu definice hry ne všechny v příručce popsané činnosti jsou didaktickými hrami podle jejich přesného významu. Některá zaměstnání určená pro děti mladšího školního věku lze považovat za jistý mezistupeň mezi „hravou“ činností s učebními pomůckami a hrami. Tato okolnost však nesnižuje jejich přínos v utváření pro život potřebných kompetencí.

Závěr

Didaktické hry náleží, vzhledem k svému charakteru a širokým možnostem ve vzdělávání žáků 1. stupně základní školy, k velice podnětným metodám práce v hodinách matematiky.

V příspěvku představujeme právě vydávanou příručku didaktických her z matematiky pro studenty a učitele 1. stupni základní školy. Je zaměřena prakticky, předkládáme v ní 136 her a jejich dalších variant, které se dají zařadit v různých částech hodiny matematiky.

Účelem publikace je poukázat na jejich zatím nedoceněné místo v oblasti vzdělávání a přispět k jejich efektivnějšímu využívání tím, že se snažíme nabídnout čtenářům širší spektrum inspirací. Uvítáme, jestliže uvedené náměty učitelům pomohou v jejich náročné práci a jejich dětem učiní učení radostnějším.

Literatura

[1] Belz, H., Siegrist, M.: *Klíčové kompetence a jejich rozvíjení. Východiska, metody, cvičení a hry.* 1. vyd. Praha: Portál, 2001. 375 s.

[2] Coufalová, J.: Využívání didaktických her v hodinách matematiky na 1. stupni ZŠ. In *Matematika 3. Sborník příspěvků z konference s mezinárodní účastí Matematické vzdělávání z pohledu žáka a učitele primární školy.* UP Olomouc, 2008, 327 s.

[3] Kárová, V.: *Didaktické hry ve vyučování matematice v 1. – 4. ročníku základní školy.* Část aritmetická. 2. vyd. Plzeň: Vydavatestlví Západočeské univerzity, 1998. 53 s.

[4] Kasíková, H.: *Kooperativní učení a vyučování. Teoretické a praktické problémy.* 1. vyd. Praha: Univerzita Karlova, 2004. 179 s.

[5] Krejčová, E., Volfová, M.: *Didaktické hry v matematice.* 3. vyd. Hradec Králové: Gaudeamus, 2001. 120 s.

[6] Petty, G.: *Moderní vyučování.* 1. vyd. Praha: Portál, 1996. 380 s.

[7] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* (dostupné z `www.vuppraha.cz`).

ETAPY POZNÁNÍ A KOMUNIKACE V MATEMATICE

MILENA KVASZOVÁ[1]

ÚVOD

Při výkladu teorie pravděpodobnosti začínáme výkladem přesně definovaných pojmů a ucelené teorie, tak jak byla postupně přepracovávána a upřesňována. Vynecháváme odbočky, které se jeví z dnešního pohledu jako slepé cesty, ale ve své době vedly k hlubšímu pochopení zkoumaných jevů. Ve výuce nebereme na vědomí, že matematická (pravděpodobnostní) zkušenost učitele a žáka jsou zcela odlišné. Žáci dovedou sice jevy pozorovat, ale je pro ně obtížné přesně je popsat. Často se musí učit látku, na kterou ještě nejsou zralí [1]. Proto jim nezbývá nic jiného, než se ji bez opravdového porozumění naučit nazpaměť, což vede ke vzniku formálního poznání. Tím se pro ně teorie pravděpodobnosti a statistika stávají souhrnem nezapamatovatelných vzorců, které slouží k řešení podivných úloh. V běžném životě je nikdy nepoužijí, protože podle nich s reálnou situací nemají nic společného.

PIAGETŮV MODEL VÝVINU POZNÁNÍ

Ve své analýze vycházím z modelu poznávacího procesu, který vytvořil Jean Piaget. Podle tohoto modelu je možné ve vývoji určité matematické teorie rozlišit tři stádia, která v knize [2] autoři pojmenovali intra, inter a trans.

[1]Matematický ústav AV ČR, Praha; milena.sp@centrum.cz

Intrafigurální stádium: V tomto stádiu je žák schopen sledovat jednotlivé jevy, ale není ještě schopen správně chápat souvislosti. Piaget toto stádium uvádí na příkladu dětských kreseb, kdy dítě umí nakreslit dům i komín, ale neumí komín správně umístit na střechu. V úlohách z pravděpodobnosti žáci dovedou odhadnout, který jev má větší pravděpodobnost, ale neumějí ji ještě spočítat. Např. rozhodnout, zda je pravděpodobnější, že padne 1 šestka při hodu šesti kostkami nebo 2 šestky při hodu dvanácti kostkami. Ve výuce se toto velice důležité stádium zpravidla vynechává a teorie pravděpodobnosti se začíná vzorci a výpočtem příkladů.

Interfigurální stádium: Žák již plně rozumí souvislostem mezi jevy. Piaget na příkladu dětských kreseb toto stádium charakterizuje tím, že dítě už umí správně posadit komín na střechu domu, ale ještě neumí zachytit pohled někoho jiného, např. jak by namaloval jeho dům soused sedící naproti. V pravděpodobnostní úloze žáci umějí vypočítat pravděpodobnosti všech možných výsledků úlohy, ale ještě nejsou schopni výsledek zobecnit. Při vyučování je tomuto stádiu věnována největší pozornost, ale žáci bez předchozího pochopení jednotlivých pojmů v předešlém intrafigurálním stádiu nedovedou výsledky správně interpretovat.

Transfigurální stádium: Ve třetím stádiu žák již plně rozumí analogiím, transformacím atd. Dítě už dokáže správně nakreslit dům z různých pohledů. Žáci v pravděpodobnostní úloze najdou obecné pravidlo, které platí pro zvyšující se počet pokusů.

I v případě, že učitel při výkladu postupuje podle uvedených etap, může dojít k nedorozumění mezi ním a jeho žáky. Jedním ze zdrojů nedorozumění je, že učitel již završil transfigurální stádium; zná přesné vymezení pojmů a odvození vztahů. Myslí si, že něco skutečně znát znamená znát to přesně. Když poslouchá argumenty žáků, vidí nepřesnost toho, co říkají. Uvědomuje si, že to co slyší, jsou polopravdy beznadějně zamotané ve spleti naivních představ. Proto při odpovědích a diskusích nutí žáky k přesnému vyjadřování. V průběhu intrafigurálního stádia však žák něčeho takového není schopen. Učitel tím žákům vnucuje přechod od intrafigurálního stádia k transfigurálnímu. Nedovolí jim, aby si na konkrétních příkladech kvalitativně ohmatali pojmy a vztahy teorie. Nemůžeme se pak divit, že žákům chybí sémantický vhled a na jeho místo nastupuje formální technika. Z pravděpodobnosti a statistiky se stává věda o dosazování do vzorců. Statistické myšlení žáků stagnuje a základní statistické pojmy nejsou schopni srozumitelně vysvětlit dokonce ani studenti vysokých škol.

Výsledky výzkumu

Ve své studii jsem se zaměřila na porozumění základním statistickým pojmům průměrný, vzorek, náhoda a proměnlivost. Testům se podrobilo 78 studentů vysoké školy zaměřené na ekonomiku ve věku od 19 do 50 let. Studenti odpovídali na 13 otázek typu:

Když někdo řekne, že jste průměrný, co tím myslí? Uveďte příklad něčeho, co se děje náhodou. Uveďte příklad něčeho, co se proměňuje. Co znamená, že průměrná velikost rodiny je 2,5?

Ukázalo se, že studenti průměrnou osobu vnímají jako člověka nevyčnívajícího z davu, vůbec nehodnotili jeho fyzické znaky ani nepřipouštěli, že by mohl v něčem vynikat a v jiném zaostávat. Největším oříškem pro studenty byla otázka „Co znamená, že průměrná velikost rodiny je 2,5?“. Nejčastější vysvětlení bylo dva dospělí a malé dítě. Náhodná jsou zásadně setkání a náhodou se dějí katastrofy, nehody a zázraky. Za náhodný jev studenti považují pouze jev, jehož výsledek je překvapí, sice jej nezapříčinili, ale příčinu má. Projevuje se tak kauzální výchova. Nejproměnlivější je počasí a hned potom nálada. Zcela výjimečně se proměňujeme i my, fyzicky i psychicky.

ZÁVĚR

Problémy, které brání porozumění pravděpodobnosti a statistiky u žáků, často pramení z toho, že pojmy a poznatky z úrovní inter a trans se žákům prezentují bez toho, aby se jim umožnilo projít prvním stádiem, tj. stádiem intra. Žáci se naučí s pojmy jakž takž pracovat, ale nepřijmou je za svoje. Zdají se jim nepřirozené a cizí. Je samotné by nikdy nenapadlo takové pojmy zavádět. Škola takto může nevědomky vytvářet v žákovi pocit méněcennosti a odcizení vůči intelektuální práci. Přitom pravděpodobnostní a statistické myšlení bude od žáků požadováno celý život. Je třeba je s ním seznamovat už v raném věku. Nejedná se pouze o jejich profesní život, ale především o jejich soukromé životy.

LITERATURA

[1] Kvasz, L. (1997). Why don't they understand us? *Science and Education*, Vol. 6, 263–272.

[2] Piaget J., Garcia R. (1989). *Psychogenesis and the History of Science.* Columbia University Press, New York.

„Výstavba číselných oborů“, matematický projekt pro žáky 2. stupně základní školy

Věra Olšáková[1]

Na tomto projektu bych chtěla podrobně ukázat postup realizace projektové výuky v našem pojetí, tedy to, jak se připravujeme my, jak zasvěcujeme do projektu žáky a jak provádíme vyhodnocení.

Po dobu své praxe se snažím o to, aby se žáci dokázali průběžně orientovat v číselných oborech. Jde o velmi obtížnou záležitost. Zkušenosti ukazují, že většina dětí má s číselnými obory problémy. Žáci nemají problém s pochopením, ale se zpětným zařazením čísel do správného oboru. Za problematické považuji např. řešení úloh v určitém číselném oboru. Žáci si jen velmi obtížně uvědomují, jak vlastně může toto zadání ovlivnit řešení úlohy (např. rovnic). Proto jsem se pokusila naplánovat projekt, ve kterém si žáci budou procvičovat číselné obory po celé čtyři roky. Domnívám se, že právě díky této metodě, sepjetím s reálným životem a neustálým průběžným opakováním si toto učivo žáci lépe osvojí.

Nejdříve bylo potřeba shromáždit materiály k výuce, zejména z oblasti dějepisu a historie číselných oborů. Zejména obrázky jsem použila jako motivační prvek před zahájením samotné práce žáků na projektu. Přestože si žáci dokázali spoustu informací vyhledat sami, zejména v dějepise a zeměpise, bylo zapotřebí, abych jim základní poznatky předložila.

Projekt prostupuje každým ročníkem druhého stupně základní školy s vazbou na vzdělávací oblasti: Informatika a komunikační technologie, Člověk a společnost, Člověk a příroda, Umění a kultura. Jednotlivá témata jsou řazena chronologicky tak, aby na sebe logicky navazovala a mohla být využita v dalších oblastech Člověk a společnost (Dě), Člověk a společnost (Ze), Umění a kultura (Vv), Jazyk a jazyková komunikace (Ja), Informační a komunikační technologie. Výstavba projektu je zároveň tvořena tak, jak na sebe jednotlivé číselné obory na 2. stupni navazují, což téměř odpovídá historickému vývoji. Žáci tak mají možnost zkoumat vzájemné vazby na matematiku v jednotlivých oblastech.

Žáci šestého ročníku se zabývali *Přirozenými čísly*, v sedmém ročníku *Celými čísly*, v osmém ročníku *Racionálními čísly* a v devátém ročníku *Reálnými čísly*.

Předpokládaným výstupem a zároveň cílem mého zkoumání je zlepšení přehledu žáků ve výstavbě číselných oborů, zapamatování a upevnění znalostí v jednotlivých oborech

[1]ZŠ a MŠ Čtyřlístek, s.r.o., Uh.Hradiště; vera.olsakova@seznam.cz

a zejména aplikace matematických poznatků v reálném světě. Žáci také získají přehled o historickém vývoji matematiky.

LITERATURA

[1] Bečvář, J.: Matematika v Egyptě (sylabus přednášky), *Seminář z dějin matematiky,* Jevíčko, 1993.

[2] King, A.: *Co dokážu s matematikou I.*, Fragment, Český Těšín, 1999.

[3] Kratochvílová, J.: *Teorie a praxe projektové výuky*, 1. vyd., Masarykova univerzita, Brno, 2006.

[4] Kubínová, M.: *Projekty (ve vyučování matematice) – cesta k tvořivosti a samostatnosti*, Univerzita Karlova – Pedagogická fakulta, Praha, 2002.

TVORBA ÚLOH NEJEN V KONTEXTU MATEMATICKÉHO KORESPONDENČNÍHO SEMINÁŘE

EVA PATÁKOVÁ[1]

MATEMATICKÝ KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Většina z nás jistě ví, že v ČR existuje velké množství korespondenčních seminářů pro základní i střední školu. Organizátoři těchto seminářů obvykle rozesílají nabídky účasti do škol ve svém regionu. V dnešní době internetu však není problém, aby si student našel kterýkoli jiný matematický korespondenční seminář a zapojil se do něj. Stačí zadat do internetového vyhledavače hesla *„korespondenční seminář“ AND „matematika“* a ten najde téměř všechny. (Semináře sice mívají podobnou formu, ale do konkrétní realizace se promítá tradice i osobnosti organizátorů.)

Účast v semináři je pro studenta jednoznačně přínosná. Semináře (hlavně ty základoškolské) jsou koncipovány tak, aby maximálně rozvíjely a pro matematiku motivovaly jak špičkové studenty, tak studenty v matematice slabší. Není však možné očekávat, že student takovouto aktivitu vyvine sám od sebe – je potřeba jej na možnost upozornit a vhodně jej motivovat. Praktické zkušenosti, ze kterých budu vycházet v dalším textu, jsem získala jako organizátor semináře Pikomat při SPŠST Panská a Pedagogické fakultě UK (`www.pikomat.unas.cz`).

[1]Studentka PedF UK, evicka.patakova@seznam.cz

Tvorba úloh obecně

Každý z nás si už mnohokrát zkusil, co obnáší vytvořit úlohu. Tvorba úloh patří neodmyslitelně k práci učitelů i organizátorů soutěží. Podívejme se na ni chvíli z teoretického hlediska a rozeberme si tři základní druhy tvorby úloh, které rozlišuje Stoyanová [2], a to tvorbu volnou, polostrukturovanou a strukturovanou.

Pod pojmem tvorba úloh si nejspíše nejdříve představíme *tvorbu volnou*. Ta znamená, že autor může vymyslet úlohu, aniž by se něčím nechal omezovat. Tato tvorba je typická hlavně pro autory úloh do soutěží. I učitelé tvoří úlohy zcela volně, to však většinou bývají úlohy pro motivaci žáků a rozvoj talentovaných žáků.

Polostrukturovanou tvorbou se učitelé zabývají více. Jedná se o tvorbu úloh, kde je autor již spoután – tématem, obtížností, konkrétním učivem, které chce procvičit. Chceme-li tedy pro žáky vymyslet úlohu takovou, aby museli např. zjistit obsah pravoúhelníku tak, že si některou stranu musí sami dopočítat, jsme již vázáni tím, že víme, jak chceme, aby vypadal postup řešení, a k němu vytváříme úlohu – tedy tvoříme polostrukturovaně.

Strukturovaná tvorba je již tvorba plně spoutaná. Patří sem např. přeformulování úlohy, pozměnění výchozích podmínek v úloze apod. S tím se učitel setkává např. tehdy, když se snaží vytvořit písemnou práci takovou, aby úlohy byly podobné úlohám řešeným v hodině.

Tvorba úloh žákem jako diagnostika jeho porozumění

Jako cenný nástroj diagnostiky, zda žák probrané látce opravdu rozumí, či zda používá pouze nacvičené algoritmy, se ukazuje tvorba problémů žáky.

Žákům zadáme úlohu „vytvoř úlohu“ tím, že jim např. zadáme odpověď a necháme žáky k ní vytvořit úlohu, nebo je necháme vytvořit úlohu obsahující zadanou informaci nebo vztahující se k danému obrázku, vytvořit úlohu vycházející z konkrétní situace nebo vytvořit úlohu, jejímž řešením je zadaný výpočet. Všechny uvedené způsoby rozvíjejí žákovo matematické myšlení jiným způsobem než opačný proces (řešení úloh). U úloh tohoto typu se osvědčuje polostrukturovaná tvorba.

Jako diagnostika porozumění žáka je vysoce cenná situace, kdy učitel zadá postup výpočtu a žák vymýšlí slovní úlohu tímto postupem řešenou. Např. v článku M. Tiché [3] můžeme najít úlohy vytvořené studenty různých věkových skupin tak, aby jejich řešením byl výpočet $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$. Je velmi zarážející, jakých chyb se dopustili i studenti středních a nematematických vysokých škol.

Několik zkušeností z tvorby úloh v Pikomatu

Tvorba úloh do korespondenčního semináře má svoje specifika. Na první pohled se zdá, že do semináře je možné zadat jakékoli úlohy – pouze s omezením přiměřené obtížnosti. Svým způsobem je to pravda, ale platí to pouze pro úlohy, které jsme vymysleli jako první. Dále už je autor omezen, a to hned třemi podmínkami:

1. Aby byly úlohy v semináři poutavější, bývají obvykle spoutány příběhem. Úlohy musí tedy být takové, aby se daly zasadit do kontextu příběhu. (Je samozřejmě možné vymyslet nejdříve úlohy a pak dotvářet příběh přímo k nim, mně se ale osvědčilo nejdřív si volně vymyslet osnovu příběhu a do ní již vymýšlet alespoň trochu vhodné úlohy.) Toto omezení je ale možné občas obejít, když vymyslíme hezkou úlohu, která se do kontextu nehodí. (Např. v příběhu o Honzovi a drakovi, který jsem zadávala já, jsem vytvořila umělou odbočku, že se drak nudil a krátil si čas řešením úloh… Dál už jsem mohla zadat, co jsem chtěla.)

2. V celkové podobě by měl být vyvážený poměr geometrických, algebraických a ostatních úloh.

3. Každá série by měla obsahovat velmi obtížné úlohy pro rozvoj zdatných řešitelů i záchytné úlohy, aby i slabší žáci zažili pocit úspěchu.

Důležitý problém, se kterým jsem se v průběhu soutěže potýkala, je jednoznačnost zadání. (Samozřejmě i nejednoznačně zadané úlohy je možné vyhodnotit, je pak ale velmi obtížné najít spravedlivé bodování.)

Nejednoznačně zadaná úloha: „Kolika způsoby můžeme postavit na šachovnici dvě figurky – bílou a černou – tak, aby při hře dáma bílá mohla brát černou? (Pozn. Dáma se hraje pouze na černých políčkách.)“ *Nezadali jsme, zda je určené, na které straně hraje černá, nevíme, zda máme uvažovat i dámy.*

Jednoznačná obměna této úlohy: „Kolika způsoby můžeme na šachovnici rozmístit dvě figurky – bílou a černou – tak, aby se mohly brát navzájem? Víme přitom, na které straně šachovnice hraje bílá a na které černá. Úlohu řešte za předpokladu, že obě figurky jsou běžné figurky.“

Závěr

S tvorbou úloh se učitel matematiky setkává takřka denně. V příspěvku jsem se snažila shrnout nejzákladnější teorii a několik vlastních zkušeností, které jsem získala jako organizátorka soutěže Pikomat.

Literatura

[1] PATÁKOVÁ, E. *Problem posing a problem solving v matematické soutěži*. Diplomová práce, PedF UK v Praze 2009, nepublikováno.

[2] STOYANOVÁ, E. Empowering students’ problem solving via problem posing: The art of framing „Good“ questions. *Australian-Mathematics-Teacher*, 2000.

[3] TICHÁ, M., MACHÁČKOVÁ, J. Rozvoj pojmu zlomek ve vyučování matematice. In *Studijní materiály k projektu Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP*, JČMF Praha 2006.

ŽIACKÉ CHYBY V ÚLOHÁCH O ARITMETICKOM PRIEMERE

JANA PÓCSOVÁ[1]

V tomto článku sú analyzované žiacke riešenia úloh, ktoré sa týkajú ich schopnosti pracovať s aritmetickým priemerom. Tieto riešenia sú vyhodnotené z kvantitatívneho (ide o vytvorenie kategórií riešení a zistenie početnosti v jednotlivých kategórií) a tiež kvalitatívneho hľadiska [2].

Kvalitatívna analýza textov si vyžaduje hlboký prienik do myslenia žiakov. To v našom prípade nie je možné bez následného rozhovoru s autorom riešenia. Zároveň pri analyzovaní riešení sa pokúšame zamyslieť a pochopiť myšlienkové postupy žiakov a tiež postrehnúť ich spôsoby riešenia a chyby, ktorých sa pri tom dopúšťajú.

Tento prieskum bol realizovaný v septembri 2008 v troch triedach prvého ročníka troch gymnázií v košickom kraji. Celkovo 82 žiakov vo veku 15–16 rokov riešilo deväť úloh zameraných predovšetkým na interpretáciu údajov a prácu s pojmami školskej štatistiky. V tomto článku rozoberieme len dve z týchto úloh.

Úloha: *Martin mal z piatich testov priemerný počet bodov 64. Pričom maximálny počet bodov z každého testu bol 100. Zapamätal si len, že z posledného testu mal* 80 *bodov. Získal Martin viac ako polovicu bodov z každého testu? Svoju odpoveď zdôvodnite.* (Inšpiráciu sme čerpali z [1].)

Komentár: Sledovali sme vedomosti a schopnosti žiakov interpretovať vzťah na výpočet aritmetického priemeru a argumentovať uvedením vhodného kontrapríkladu.

Očakávané riešenia a výsledky prieskumu: Zo všetkých 5–tich testov Martin získal 320 bodov a keďže z posledného mal 80 bodov zo zvyšných štyroch dosiahol dohromady 240 bodov. Ale tento súčet mohol dosiahnuť rôznym spôsobom napr: $60, 90, 60, 30$ alebo $60, 60, 60, 60$. Z uvedeného je zrejmé, že Martin mohol, ale nemusel získať z každého testu viac ako polovicu bodov. Takéto uvažovanie sme našli iba u 3 $(3,66\ \%)$ riešiteľov.

Za neúplné riešenie považujeme: Keďže zo štyroch testov získal 240 bodov, tak v priemere z každého získal 60 bodov. Takéto riešenie sa našlo u 10 $(12,20\ \%)$ riešiteľov. V týchto riešeniach často chýba komentár, že 60 je len priemerný počet bodov zo 4 testov. Domnievame sa, že žiaci túto skutočnosť nemajú dostatočne vžitú.

V 2 $(2,44\ \%)$ riešeniach sa našiel aj prístup typovania vhodného štatistického súboru spĺňajúceho podmienky zadané v úlohe. Ale iba v jednom z nich žiak systematický prostupoval. Napísal nasledujúce čísla do riadku $64, 64, 64, 64, 64$. Keďže v zadaní je informácia o bodoch z posledného testu upravil hodnoty nasledovne $60, 60, 60, 60, 80$. Ďalej v myšlienke nepokračoval a neformuloval zo svojho zistení odpoveď na otázku.

[1] Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta Univerzity P. J. Šafárika v Košiciach, jana.pocsova@upjs.sk

Nepredpokladáme, že by ho nevedel sformulovať, skôr sa domnievame, že samotné tieto čísla považuje za záver. V ďalších 3 $(3,66\ \%)$ riešeniach ich autori nedokončili myšlienku vedúcu k vyššie popísaným záverom. Z komentárov v riešeniach predpokladáme, že rozumejú problematike, ale z nejakých dôvodov nedokončili myšlienku. V riešeniach ďalších 3 $(3,66\ \%)$ žiakov ide skôr o numerickú chybu, než chybu v úsudku.

Z ďalších 61 $(74,39\ \%)$ riešiteľov: úlohu vôbec neriešilo 25 žiakov; 16 žiakov odpovedálo iba „Áno“/„Nie“ bez argumentácie; 20 žiakov riešilo úlohu chybne. Podľa nášho úsudku tieto chyby vyplývajú z toho, že žiaci nevedia správne interpretovať vzťah na výpočet aritmetického priemeru, majú problémy so samotným „dosadením do vzorca“ a tiež s úpravami rovníc.

Úloha: *Aké známky mohol mať Aladár z matematiky, ak viete, že jeho priemerná známka bola* $2,0$ *a známok za sledovaný polrok nemal viac ako* 10*? Uveďte aspoň dve možnosti.*

Komentár: Pozorovali sme ako žiaci dokážu vytvoriť štatistický súbor s obmedzeným rozsahom a presne stanoveným aritmetickým priemerom. Ako vedia vytvoriť súbory, ktoré budú obsahovať všetky prípustné hodnoty a či sa budú vyskytovať aj súbory bez použitia hodnoty 2.

Očakávané riešenia a výsledky prieskumu: Za najtriviálnejšie považujeme súbory, ktoré vznikli zo samých dvojok, kombináciou rovnakého počtu jednotiek a trojok alebo kombináciou spomínaných možností. Tento prístup zvolilo $40,0\ \%$ žiakov. Za zložitejšie považujeme riešenia, v ktorých žiaci použijú aj hodnoty 4 alebo 5 (napr. 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5). Riešení, kde aspoň jedna zo správnych možností vyhovovala tomuto kritériu je $(12,2\ \%)$.

$6,1\ \%$ riešení sa vo vytvorenom štatistickom súbore nevyskytuje žiadna dvojka a vyskytuje sa aspoň jedna štvorka alebo päťka (napr. $1,1,1,1,1,1,3,4,5$). Aj napriek tomu, že úplne riešenie si vyžaduje aspoň dve možnosti, 5–ti žiaci za vyriešenú úlohu považovali aj uvedenie jednej takejto možnosti. Ďalší 4-ia žiaci úlohu vôbec neriešia. V žiackych riešeniach je možné pozorovať dva prístupy: Prvý prístup je, že žiaci vytvárajú štatistický súbor tak, že vytvárajú podsúbory, ktorých priemer je $2,0$ (napr. $5,1,1,1$, $4,1,1$, $3,1$, 2). Druhý žiacky prístup presne kopíruje vzťah na výpočet aritmetického priemeru. Žiaci popri súčte hodnôt sledujú aj ich počet vo vytváranom štatistickom súbore. Z riešení usudzujeme, že 43 $(52,44\ \%)$ žiakov postupuje páve týmto druhým spôsobom, z toho 24 sa nedopúšťajú pri tom žiadnej numerickej chyby a ďalších 19 spravili chybu pri jednom alebo oboch súboroch. V jednom riešení sa našiel súbor: „$3,2,6,1,1,1,2,1,1,1,1$“ je vidieť, že žiak mal snahu dodržať súčet známok 20 a pri počte známok 10, dokonca aj za cenu použitia hodnoty, ktorá nie je typická pre náš klasifikačný systém.

Najväčším prekvapením bolo, že žiaci aj napriek tomu, že v školskom prostredí často pracujú s aritmetickým priemerom, nevedia „dosadit“ do vzťahu na jeho výpočet. Na základe výsledkov tohto prieskumu sa domnievame, že žiaci nepoznajú jeho interpretáciu, čo sa prejavilo vysokým percentom žiakov, ktorí neriešili alebo riešili chybne spomínané úlohy.

LITERATURA

[1] PISA SK 2003, *Matematická gramotnosť, správa*, Štátny pedagogický ústav: Bratislava, 2004.

[2] Švaříček, R., Šeďová, K. a kol.: *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách, pravidla hry*. Praha, Portál : 2007.

NAHLÉDNUTÍ DO PROCESU VZDĚLÁVÁNÍ ŽÁKŮ NA ZÁKLADNÍCH ŠKOLÁCH V RUSKU

IVANA PROCHÁZKOVÁ[1]

V rámci svého studia na Pedagogické fakultě UK mi bylo umožněno vyjet na studijní pobyt do Moskvy. Vím, že v předešlých letech nebyly vztahy s touto zemí úplně ideální a v dnešní době jen málokdo cestuje do této země, ať již na studijní pobyt či na dovolenou. Proto jsme se rozhodla, že se při svém pobytu pokusím podívat do základních škol. Jaký tam mají systém výuky, jak vypadají ruské školy, jak je pojato vyučování. Nevěděla jsme o ruském systému téměř nic, proto to pro mě byla svým způsobem výzva.

Systém vzdělávání je podobný jako u nás. Nejdříve rodič může dát dítě do předškolní dětské instituce. Od 1–3 let dítě chodí do jeslí, poté může chodit do školky (3–6/7 let). Stejně jako u nás má dítě nárok na základní vzdělávání. První stupeň je v Rusku od 1. do 4. třídy, poté děti přecházejí na „nižší stupeň“ střední školy, který je 5 let. Po těchto devíti letech dítě dostane diplom o neúplném středním vzdělání. Úplné střední vzdělání se může dokončit na střední škole či na odborném učilišti, délka studia v této formě je od dvou do čtyř let. Žák poté získá diplom o úplném středním vzdělání. Od roku 2009/2010 přechází ruský systém na povinnou jedenáctiletou školní docházku. Následný stupeň vzdělání je na vysoké škole. Některé ruské vysoké školy se řadí k velmi prestižním. Americká asociace pro akreditaci institutů vysokého vzdělání mimo USA

[1]magicek@email.cz

dělala výzkum o kvalitách VŠ. Dostalo se sem i 13 ruských škol. Uvádím prvních šest: *1. Sorbonna (Francie), 2. Moskevská státní univerzita, 3. Oxford, 4. Cambridg (VB), 5. Heidelberská univerzita (SRN), 6. Petrohradská státní univerzita.* Vzdělání je soukromé i státní, stejně jako u nás.

Systém hodnocení známkami je opačný než v ČR. Výborně je známka 5 a nedostatečně známka 1. V první třídě se první půlrok využívá systému znaků: 5 (výborně) – hvězdička, 4 – čtverec, 3 – trojúhelník. Také jsem zde objevila náznaky sebehodnocení žáků, které jsme viděla na jedné z vyučovacích hodin. Žák sebehodnotí především svoji práci v jednotlivých zadaných úkolech a také to, jak mu práce šla.

Učitelé ve školách v Rusku, do kterých jsem se dostala, byli velmi mile potěšeni, že je někdo z České republiky navštívil. Shlédla jsem především hodiny matematiky, které mě nejvíce zajímaly. Několik bodů, které byly pro školy společné:

- Ve školách se většinou nosí uniformy. Není to podmínkou, ale dá se říci, že většina dětí je má.

- Školy mají velmi dobré materiální vybavení (učitel má k dispozici ve třídě PC, kopírku, tiskárnu, televizi s promítacím plátnem). Nevím, zda to bylo dáno tím, že jsem byla pouze ve vybraných školách, či to takto je ve všech školách v Moskvě. (Mimo Moskvu není jistě takové materiální vybavení.)

- Učitel je jedna z prestižních profesí. Zde v Čechách se mi zdá, že na profesi učitele není veřejností pohlíženo s takovou vážností a takovým respektem.

- Je zde důraz na efektivní spolupráci s rodiči, která pramení z toho, že učitel chce pro žáka vždy to nejlepší a snaží se ho dovést k co nejlepším znalostem, proto i rodiče jsou vždy v souladu s pedagogem.

- Velký zájem o aktivity dětí po vyučování. Školy nabízí mnoho kroužků různých typů, které dítě může navštěvovat, většinou až do šesti hodin do večera. Kroužky jsou placené, ale suma není nějaká horentní.

Protože můj obor je Učitelství pro první stupně, navštívila jsme třídy prvního stupně. V hodinách matematiky se na všech školách pracovalo s učebnicí L. G. Petersona z nakladatelství Juventa. Tato učebnice je poměrně nová, vyšla v roce 2007. Učí se podle ní na všech dobrých školách, protože je prý metodicky nejlépe propracovaná. Po prostudování těchto učebnic se mi zdálo, že jsou psané podobně jako učebnice Matematického ústavu zkombinované s učebnicemi řady FRAUS z roku 2007/8.

Ve školách většinou probíhala frontální výuka. Neviděla jsme snad ani jednou práci ve skupinách, ve dvojicích zřídka. Pokud se podíváme do českého RVP, najdeme zde kompetenci sociální a personální, kdy dítě se má učit účinně spolupracovat ve skupině a přispívat k diskusi. Naopak v Rusku je kladen důraz na tradiční systém výuky založený na teoriích L. S. Vygotského, L. V. Zankového. Dále je zde kladen důraz na intelektuální rozvoj jedince.

Jedna hodina matematiky se od všech ostatních lišila, byla to výuka Jeleny Valentiny na škole, která připravuje děti na vstup do gymnázia. Hodinu jsem shlédla ve čtvrté třídě, kde se probíraly zlomky. Paní učitelka dokázala vytvořit takové prostředí, že děti debatovaly vzájemně nad zadaným úkolem, ve třídě se dokonce rozpoutala bouřlivá diskuse. Vyučující argumentovala takto: „Pokud bychom se pouze učili, můžeme se učit doma s učebnicí. Můžeme se to naučit z učebnice. Ale my se potřebujeme naučit myslet a vést debatu. Tomu se doma nenaučíme.“ To mě velmi nadchlo a uvědomila jsem si, že to vystihlo podstatu věci, proč děti do školy chodí. Tímto vstupem jsem si také uvědomila, že je to stejné jako u nás, vždy jde o přístup učitele samotného, vždy jde o to, jak učitel bude hodinu vést. Jde o učitele a jeho systém výuky.

Co mě ještě velmi překvapilo, byla kázeň, která ve všech třídách vládla. Děti byly na hodinách velmi ukázněné, možná až trochu nezdravě. Opět jsme se obrátila do našeho RVP. Máme zde kompetence komunikativní, kdy se dítě má učit naslouchat promluvám druhých lidí, porozumět jim, vhodně na ně reagovat, účinně se zapojovat do diskuse, obhajovat svůj názor a vhodně argumentovat. Pokud dítě není vedeno k tomu, že může mluvit, vyjádřit svůj názor, ale může „mluvit“ či mluví jen tehdy, když je tázané, tak asi není ani tolik „hlučné“. Toto je jedna z úvah, která mě napadla, ale jistě to má i jiné příčiny.

Pokud se zamyslím nad obsahy hodin, které jsem shlédla, mohu říci, že ve všech třídách jsem viděla aritmetiku. Geometrii jsem neviděla na žádné hodině. Nevím, zda to bylo tím, že na geometrii není kladen takový důraz jako na aritmetiku, nebo zda opravdu ve všech třídách bylo jen učivo z aritmetiky.

Po mé prezentaci na Dvou dnech se strhla bouřlivá diskuse na téma numerace. Učitelé z praxe, kteří mají ve třídě dítě, které přišlo z Ruska či Ukrajiny, se shodli na tom, že tyto děti velmi přesně a správně ovládají numeraci, numerativní počty. Zřejmě je to dáno právě tím, že je na tuto oblast kladen velký důraz. I já sama jsem v hodinách viděla jen tuto oblast matematiky.

Literatura

[1] `http://www.chgi.ru/ru/about/Sistema_obrazovanija_v_Rossii`

[2] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* (www.rvp.cz)

INTEGROVANÉ SLOVNÍ ÚLOHY JAKO JEDNA Z MOŽNOSTÍ ROZVÍJENÍ KLÍČOVÝCH KOMPETENCÍ ŽÁKŮ PRIMÁRNÍ ŠKOLY

ALENA RAKOUŠOVÁ[1]

Současné výzkumy prokazují, že žáci základních škol nedovedou svoji velmi dobrou poznatkovou bázi využít a aplikovat ji při řešení běžných životních problémů (např. výzkumy PISA, 2007). Domníváme se, že příčinu tohoto problému lze hledat v poznatkové roztříštěnosti školního kurikula na jednotlivé vyučovací předměty, tedy ve škoních podmínkách, kdy žáci nejsou systematicky vedeni k tomu, aby aplikovali své znalosti, vědomosti a dovednosti alespoň horizontálně – mezi předměty. Oblast Matematika a její aplikace je v RVP ZV příležitostí k rozvíjení žákovských matakognitivních strategií. Tyto strategie by však měli žáci dokázat uplatnit také v ostatních vyučovacích předmětech mimo matematiku a zároveň v matematice by měli využívat poznatky z ostatních oblastí a oborů RVP ZV. Klíčové kompetence pro základní vzdělání jsou v podstatě nadpředmětovým cílem vzdělávání připravujícího žáky životem pro život. Rozvinutí klíčových kompetencí není možné bez žákovské schopnosti aplikace. Pokud bude matematika na základních školách v praxi odtrhávána od ostatních vyučovacích předmětů, nejenže bude pro žáky subjektivně obtížná, ale vyučovací předměty ŠVP budou svojí separací podporovat dezintegrovanost kognitivní, emotivní a konativní oblasti osobnosti žáka, takže klíčové kompetence pak budou pouhou frází formálně zaplňující různé tabulky a přehledy jako povinné součásti učitelské agendy. Konstrukt klíčových kompetencí předpokládá nejen horizontální integraci vyučování (napříč předměty), ale i vertikální integraci (přenášení a využívání žákovských zkušeností ze školního prostředí do životní praxe a odtud zpět do prostředí školy).

Jednou z možností, jak klíčové kompetence u žáků rozvíjet, jsou integrované slovní úlohy. Tyto úlohy jsou v primární škole, kde třídní učitel žáky dobře zná a vyučuje je většině vyučovacím předmětům, možností, jak integrovat vyučování a vytvořit tak podmínky pro všestranný rozvoj integrované, vnitřně řízené, autentické, kompetentní osobnosti dítěte. Integrované slovní úlohy vyžadují na psychologické úrovni didaktické z hlediska učitele integraci metod vyučování pomocí vyučování tematického a na úrovni logiky z hlediska vzdělávacího obsahu integraci obsahu učiva.

Integrovanými slovními úlohami rozumíme takové slovní úlohy, které jsou nástrojem součinnosti a spolupráce jednotlivých oblastí a oborů RVP, a které zajišťují vzájemné

[1]Základní škola Letohradská, Praha 7; alenarakousova@tiscali.cz

využívání a aplikaci obsahu vyučovacích předmětů školních vzdělávacích programů v podmínkách tematického vyučování [1].

Z definice vyplývá, že integrované slovní úlohy vznikají ntegrací několika vzdělávacích oblastí nebo vzdělávacích oborů RVP. Podstatou integrace je vzájemné pronikání vzdělávacích obsahů těchto oblastí a oborů. Nejde tedy pouze o uplatňování mezipředmětových vztahů, neboť v rámci mezipředmětových vazeb do sebe cíle vyučovacích předmětů nepronikají. Znamená to, že integrací dochází k propojování všech vyučovacích cílů všech integrovaných předmětů, přičemž vzniká *jeden integrovaný cíl*. Mezipředmětové vztahy využívají obsahy, které žáci znají z ostatních předmětů, a tak nedochází k průniku naplňování cílů různých předmětů. Mezipředmětové vztahy počítají pouze s jedním cílem jednoho vyučovacího předmětu. Při řešení integrovaných slovních úloh žáci objevují to, co dosud netušili, ačkoli obsah žákovského poznávání pochází vedle matematiky z různých reálných věd, z nichž byly vzdělávací oblasti rámcových vzdělávacích programů konstituovány.

Integrace obsahu učiva existuje v několika formách. Integrované slovní úlohy dovolují nejvyšší formu integrace – *koordinaci učiva*, kdy se cíle vyučovacích předmětů vzájemně podporují jak obsahem, tak formou. Koordinace znamená součinnost jednotlivých zaintegrovaných vyučovacích předmětů. Jedná se o souřadnou spojitost dvou nebo více na sobě nezávislých fenomenů při využívání a aplikování obsahu nebo formy jednoho předmětu druhým.

Ideální podmínky zajišťuje integrovaným slovním úlohám tzv. *tematické vyučování*. Tematické vyučování na rozdíl od vyučování projektového nepředpokládá materiální výsledek ve formě deníků, kronik, školních časopisů a dalších výsledků školního vyučování. Integraci zastřešuje téma.

Následně uvádíme konkrétní ukázku integrované slovní úlohy realizované v rámci temetického vyučování na 1. stupni základní školy.

Zadání integrované slovní úlohy

Afričt_ pštrosi žijí na otevřeném prostranství. Mají dlouhé, silné nohy s dvěma prsty. Jsou výtečn_ běžci. Mezi ptáky klade největší vejce pštros dvouprst_. Pštros dvouprst_ snáší nejvýše 60 vajec s velmi tvrdou skořápkou. Tvar vejce má význam pro odolnost proti tlaku a rozbití. Pštros_ vejce dokonce odolají hmotnosti 115 kilogramů. Na zemi v důlku zahřívají vejce střídavě oba rodiče. V některých oblastech se pštrosi chovají nejen pro vejce, ale také pro maso. Také u nás se pštrosi chovají na farmách. Veronika zjistila, že jedno pštros_ vejce se vaří natvrdo po dobu čtyřiceti minut. Jak dlouho bude Veronika vařit natvrdo tři taková pštros_ vejce?

Cíle zadané integrované slovní úlohy

Předmětové cíle

- *Jazyk a jazyková komunikace: žák čte s porozuměním text slovní úlohy.*
- *Jazyk a jazyková komunikace: žák aplikuje pravidlo pravopisu přídavných jmen při doplňování y, ý/i, í do textu.*
- *Člověk a jeho svět: žák rozumí přizpůsobení organismu prostředí na příkladu pštrosa v savanách a polopouštích.*
- *Matematika a její aplikace: žák prokáže porozumění zadání slovní úlohy přeformulováním otázky slovní úlohy, kterou vyřeší podle zadaných podmínek a předloží tuto úlohu k řešení spolužákovi.*
- *Environmentální výchova: žák prokáže pochopení modelovému příkladu jednání při plýtvání a úspoře energie.*

Integrovaný cíl

Žáci ***diskutují*** *různá zadání a různá řešení slovní úlohy z hlediska smysluplnosti a reality.*

Integrované slovní úlohy jsou z hlediska nácviku metakognitivních strategií žáků efektivnější tehdy, když žáci sami tyto úlohy tvoří a dávají k dispozici k řešení ostatním spolužákům. Na základě detekce komunikačních šumů u řešitelů precizují zpětně zadání úlohy tak, aby bylo toto zadání pro řešení srozumitelné a smysluplné.

Literatura

[1] RAKOUŠOVÁ, A. *Integrace obsahu vyučování. Integrované slovní úlohy napříč předměty.* Praha: Grada, 2009.

KOMPETENCE K ŘEŠENÍ PROBLÉMŮ ŽÁKŮ 7. ROČNÍKU ZŠ A MATURANTŮ, SROVNÁNÍ NA ZÁKLADĚ ŽÁKOVSKÝCH ŘEŠENÍ

LUCIE RŮŽIČKOVÁ[1]

V rámci srovnávacího průzkumu byl studentům 2. a 8. ročníku osmiletého gymnázia předložen k vyřešení následující soubor deseti úloh z různých oblastí matematiky. Některé uváděné úlohy jsou autorské, jiné byly převzaty z publikací (Gardiner, 1999) a (Cihlář a kol., 2007).

ZADÁNÍ

1. Každé z písmen A, B, C představuje jinou cifru. Určete hodnoty A, B, C tak, aby platila zapsaná rovnost při násobení:
$$\begin{array}{rrr} & A & B \\ & \cdot & 3 \\ \hline C & B & B \end{array}$$

2. Do každého z prázdných polí tabulky vepište vždy jedno z čísel $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$ a 1 tak, aby součin všech čísel v každém řádku i v každém sloupci byl stejný.

3		$\frac{1}{6}$
		2
$\frac{1}{3}$		$\frac{9}{4}$

3. Určete hodnotu čísla x tak, aby platilo $\frac{x}{x} - \frac{x}{6} = \frac{x}{12}$

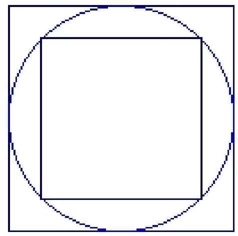
4. Uvnitř čtverce $ABCD$ je umístěn bod K tak, že body A, B, K tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníka. Určete velikost úhlu BKC.

5. Popište postup konstrukce trojúhelníku PQR, v němž bod T je těžiště, bod R_1 je střed strany PQ a platí: $|PR_1| = 3,5\text{cm}$, $|R_1T| = 3\text{cm}$ a $|PT| = 4\text{cm}$.

6. Je dán papír tvaru obdélníka s rozměry 8 cm a 18 cm. Rozdělte jej na dvě části, z nichž bude možno sestavit čtverec.

[1]Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta; lucie_ruzickova@seznam.cz

7. Do velkého čtverce je vepsána kružnice, do této kružnice je vepsán další čtverec. Obsah malého čtverce je 3 cm^2. Určete obsah velkého čtverce.



8. Fotbalového turnaje se zúčastnilo 6 týmů. Každé dva týmy spolu sehrály jedno utkání. Kolik utkání se hrálo na turnaji? Kolik utkání sehrál každý tým?

9. Pan Novák je dnes dvakrát starší než jeho dcera Helena. Když bylo Heleně 21 let, narodil se jí syn Jakub, a o dva roky později dcera Maruška. Dnes je Marušce 8 let. Kolik je všem čtyřem dohromady?

10. První číslo číselné posloupnosti je 23. Každé následující je pětinásobkem ciferného součtu čísla předcházejícího. Na kolikátém místě v této číselné posloupnosti se poprvé objeví číslo, které je menší než 23? Které číslo to bude?

Srovnání výsledků dosažených ve sledovaných třídách ukázalo, že v úspěšnosti řešení jednotlivých úloh není statisticky významný rozdíl mezi studenty 2. ročníku a studenty 8. ročníku. Zároveň nebyla prokázána kladná korelace mezi studovaným ročníkem a úspěšností řešení jednotlivých úloh, ani testu jako celku.

Dále se zaměříme na geometrickou úlohu č. 4. Tuto úlohy úspěšně vyřešilo 10 z 26 studentů 2. ročníku a 13 z 24 studentů 8. ročníku. Studenti, kteří uvedli správné řešení a dospěli ke správné hodnotě 75°, nejčastěji využili vlastností rovnoramenného trojúhelníku CKB. Naopak v poměrně rozsáhlém spektru nesprávných a neúplných řešení se opakovaně vyskytlo několik přístupů, z nichž některé byly typické pro jednu z daných věkových skupin, jiné se však objevovaly u mladších i starších studentů. Obecně měli studenti 2. ročníku častěji tendenci zkonstruovat zadaný čtverec a trojúhelník, v některých případech hledanou velikost úhlu dokonce určovali měřením. Na druhé straně studenti 8. ročníku často využívali Pythagorovu větu, goniometrické funkce, sinovou a kosinovou větu, ne vždy však byli schopni dovést řešení vzniklých soustav rovnic do úspěšného konce. U studentů 2. i 8. ročníku se jako nejčastější nesprávné odpovědi vyskytovaly hodnoty 90° a 45°, které byly většinou odvozeny na základě zkresleného náčrtku.

Na semináři byla některá zajímavá žákovská řešení prezentována a podrobně analyzována. Analýza shromážděných žákovských řešení úlohy č. 4, stejně jako analýza řešení celého testu, naznačuje, že studenti maturitního ročníku nemají k řešení problémů o mnoho lépe rozvinuté kompetence než studenti 2. ročníku osmiletého gymnázia. Výpovědní hodnota daného srovnávacího průzkumu je samozřejmě úzce svázána s konkrétními sledovanými třídami, výsledky proto není možné zobecňovat. Výsledky průzkumu však jistě kladou některé zajímavé otázky vyučujícím matematiky ve sledovaných třídách.

Příspěvek vznikl za podpory grantu GAUK 4309/2009/A-PP/PedF.

Literatura

[1] Cihlář, J. a kol. *Očekávané výstupy v RVP ZV z matematiky ve světle testových úloh.* Praha: Tauris, 2007.

[2] Gardiner, A. *Mathematical Puzzling*. Dover: Courier Dover Publications, 1999.

Procvičování matematického učiva ZŠ na internetu

Naďa Stehlíková[1]

Internet získává stále větší roli ve výuce, a to i ve výuce matematiky. Konkrétně můžeme rozdělit internetové zdroje pro výuku matematiky na:

- *informační a textové zdroje* (často obsahují multimediální prvky či hypertextové odkazy; využitelné jsou při vyhledávání konkrétních informací),
- *Java moduly* (přinášejí aktivity umožňující uživatelům interaktivně se zabývat určitými matematickými tématy a pochopit je),
- *internetová cvičení* (umožňují procvičení určitých poznatků; jejich využití při procvičování je pro žáky motivující; další výhodou je okamžitá zpětná vazba, která je žákům většinou poskytována a umožňuje jim tak řešit více úloh),
- *zdroje pro obohacení a zpestření výuky* (zdroje, které obsahují např. matematické hádanky, hry či pohádky).

[1] Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta; nada.stehlikova@pedf.cuni.cz

.

Cílem mého příspěvku není ukázat, co kde na internetu najdeme. Stačí dát do prohledávače to, co chceme dělat, a určitě se dostaneme na řadu zdrojů. Ovšem vyzkoušet takové zdroje je časově velmi náročné.

V tomto příspěvku chci poukázat na ty internetové zdroje, které jsem již ve výuce úspěšně použila a u nichž vidím jakousi přidanou hodnotu oproti tomu, kdyby se stejná aktivita dělala bez internetu. (Je zřejmé, že sama práce na internetu je pro žáky zpravidla motivující.)

Úhel, jeho měření a konstrukce

Asi nejvíce se mi v 6. ročníku osvědčila aktivita, která slouží jako pomůcka pro měření a konstrukce úhlů a procvičování jejich odhadů. Nachází se na adrese

`www.amblesideprimary.com/ambleweb/mentalmaths/protractor.html`.

Žáci pracují s modelem úhloměru, který pomocí myši posunují po obrazovce. Měří tak podobně jako klasickým úhloměrem. Okamžitá *zpětná vazba* patří k největším přínosům této aktivity. Když žáci pracují na úlohách zaměřených na měření úhlů ve třídě, učitel nemá možnost, aby každému z nich podal zpětnou vazbu, a to v době, kdy ji žák potřebuje. Tato aktivita poskytuje každému žákovi zpětnou vazbu okamžitě po provedení jednotlivých měření či odhadů. Informuje ho o tom, zda velikost úhlu, kterou naměřil, či úhel, který vytvořil, jsou příliš velké, nebo naopak malé, zda je jeho odhad vyšší, nebo nižší. Počítač tak v tomto případě kontroluje žáky lépe než učitel, který při běžné hodině nestihne pokaždé obejít všechny žáky a říci jim, kde dělají chybu. Největší přínos této aktivity tedy spočívá v tom, že rychlá zpětná vazba umožňuje žákům vyřešit mnohem více úloh než při klasické vyučovací hodině, což má pozitivní vliv na jejich dovednosti, zvláště se pak rychleji zlepšuje jejich dovednost odhadnout velikost úhlu. Řadu úkolů této aktivity lze zařadit mezi *podnětné*, tedy je lze využít i pro úvod do práce s úhlem a jeho měřením.

Pro žáky jsem připravila pracovní list, který jim umožnil samostatnou práci. Aktivita je v angličtině, a proto pracovní list obsahuje i překlady jednotlivých hlášek (zejména zpětné vazby), které aplet poskytuje. Pracovní list je ke stažení ve formátu Word na portálu www.suma.jcmf.cz (sekce Metody práce a podsekce Počítače ve vyučování matematice). Učitel si ho může upravit podle potřeby.

Před vlastním použitím apletu je vhodné si přečíst popis dvou vyučovacích hodin, v nichž aplet používali žáci 6. ročníku. Jedná se část diplomové práce Marie Brázdové *Využití internetu při výuce matematiky*, kterou obhájila v roce 2009 na PedF UK v Praze. Kapitolu si můžete stáhnout na stejném místě jako pracovní list.

Jako doplněk pro téma úhel jsem ještě se žáky používala hru *Úhel sestřelu*, která je z matematického hlediska také výborná:

`http://www.xpmath.com/forums/arcade.php?do=play&gameid=74`

Ocenila jsem zejména její motivační funkci pro rozvoj odhadu velikosti úhlů. Při práci s učebnicí se mi nepodařilo žáky vést k tomu, aby skutečně odhadovali velikost úhlu, často řekli první, co je napadlo. Hra je však k tomu díky jejich přirozené soutěživosti a snaze získat co největší skóre přirozeně vedla.

DESETINNÁ ČÍSLA

Internet je doslova přehlcen aktivitami na procvičování operací s desetinnými čísly. Nicméně vybrat mezi nimi ty, které jsou pro nás výhodné, není úplně jednoduché. Doporučuji vše před použitím vyzkoušet, protože existují i internetové aktivity, které obsahují matematické chyby.

Uvedu pouze několik adres aktivit, které se mi v 6. ročníku osvědčily.

Číselná osa: `http://www.mathslice.com/ol_m.php?pg=1&cat=529`
(poměrně obtížná aktivita, která si však zaslouží pozornost z hlediska matematického; žáci si často neuvědomili, že číselná osa, která se jim ukáže, má pokaždé jiné měřítko)

Zaokrouhlování čísel: `http://www.quia.com/mc/66061.html`

Porovnávání dvou čísel: `http://www.mathslice.com/ol_m.php?pg=1&cat=527`

Porovnávání více čísel: `http://www.quia.com/pp/114929.html`

Sčítání tří čísel: `http://www.quia.com/rr/31090.html`

Magické čtverce: `http://www.harcourtschool.com/activity/elab2004/gr4/14.html`

ZÁVĚR

Musím přiznat, že jsem vždy trpěla určitým předsudkem vůči internetu a tomu, co může nabídnout právě matematice. Viděla jsem v něm jen aktivity, které vedou k trochu zábavnějšímu procvičování početních operací a nemohou příliš rozvíjet porozumění matematice. Tento svůj názor jsem postupem času změnila. Je však třeba věnovat čas výběru té pravé internetové aktivity, která bude nejen zábavná, ale bude také rozvíjet matematické dovednosti žáků. Pokud se nám podaří najít takovou aktivitu, kde přidaná hodnota oproti klasické výuce je skutečně významná (a za takovou považuji např. aktivitu Úhel), pak si můžeme gratulovat.

Závěrem jedna rada. Při práci s internetem jsem měla vždy pro žáky připravené stručné písemné pokyny, jak s aktivitou pracovat a jaké úkoly plnit. Zjistila jsem totiž, že jinak to ani se žáky této věkové skupiny nejde. Jakmile jsme totiž přišli do počítačové učebny, nebyli schopni se od počítače odpoutat a věnovat pozornost mému frontálnímu vysvětlování. Stejně jsem pak musela každému vysvětlovat vše zvlášť. Určitým problémem je však neochota některých žáků věnovat pozornost psanému textu – měli tendence vyžadovat ústní vysvětlení ode mě. Na druhé straně se nepotvrdila má obava, že pokud budou pracovat na internetu, budou chatovat či prohlížet jiné stránky.

Příspěvek byl vytvořen v rámci řešení grantu GAUK 4309/2009/A-PP/PedF.

Zajímavé postřehy z výuky matematiky na školách v Anglii

Anna Šlégrová[1]

V tomto příspěvku bych chtěla představit některé zajímavé aspekty ve výuce matematiky na školách, které byly určeny pro žáky ve věku od 11 do 16 let. Jedná se tedy o období *Key stage 3* – v českém prostředí bychom mohli hovořit o druhém stupni základní školy. Specifikem anglického školství je fakt, že žáci jsou do hodin matematiky rozdělováni podle své úrovně. Požadavky na vědomosti v jednotlivých úrovních jsou přesně definovány v kurikulárních dokumentech, což zajišťuje přehlednost jak pro žáky, tak i pro učitele.

Další odlišností od českého školství je skutečnost, že učebnice matematiky mají a používají žáci pouze ve škole. Tento fakt je způsoben především tím, že knihy jsou dosti těžké a velké. Na straně druhé mají učitelé ve škole k dispozici různé druhy a typy učebnic a mohou je tak ve své výuce efektivně kombinovat.

Výuka matematiky je založena na aktivní spolupráci učitele a všech žáků ve třídě. V současné době učebnice jako zdroj a základ výuky matematiky ustupují do pozadí. Při výkladu určitého tématu přejímá hlavní a aktivní roli učitel, který se snaží srozumitelně žákům danou problematiku vysvětlit. Na výklad poté navazuje část, ve které žáci procvičují probírané učivo. Jako pramen dostatečného množství příkladů slouží učebnice, ale také pracovní listy, programy na počítačích a projekty zadané učitelem.

Při pozorování na anglických školách mě zaujala myšlenka jedné projektové hodiny, kterou uskutečnila učitelka matematiky v Crown Hills Community College v Leicestru. Téma hodiny znělo: „Problémy, které bychom měli, kdyby zlomky byly zakázané.“ Žáci byli v hodině rozděleni do dvou skupin. První skupina měla za úkol zamyslet se nad způsobem, jak by bylo možné zlomky nahradit. Druhá skupina se pokoušela vymyslet příklady, na kterých by bylo jasné, proč je využití zlomků jednodušší. Po práci ve skupinách následovala diskuse mezi oběma skupinami. Na závěr hodiny se všichni žáci shodli, že projektová hodina byla pro všechny vzájemným obohacením. Žáci měli možnost vyzkoušet si umění argumentace, naslouchat ostatním a uznat názor druhého. Při realizaci zaznělo několik zajímavých příkladů, na kterých žáci ukazovali výhody využití zlomků. Např. ukrojit $\frac{1}{8}$ pizzy je jednodušší, než kdyby bylo zadáno číslo 0,125 nebo 12,5 %.

V další hodině paní učitelka navázala na projektovou hodinu zadáním úkolu: „Ve dvojicích vytvořte plakát, na kterém zpracujete zajímavou formou tématiku zlomků“. Žáci do svého zpracování mohli zahrnout cokoli, co se dotýkalo problematiky zlomků. Např. jak by mělo být počítáno se zlomky, kde využíváme zlomky atd. Mohli využít

[1]KMT, PdF Univerzity Palackého v Olomouci, a.slegrova@centrum.cz

nejrůznějších zdrojů včetně internetu a encyklopedií. Na tvorbu plakátu měli čas jednu hodinu ve škole a poté měli možnost jej dotvořit doma. Žáci práci pojali velmi kreativně a celkové zpracování bylo na vysoké úrovni.

Jak je z výše uvedeného patrné, výuka matematiky na anglických školách na stupni Key Stage 3 je zaměřena především praktickým směrem. Jedním z cílů výuky matematiky je ukázat žákům její užitečnost pro reálný svět. Kéž i v českém prostředí máme dostatek nápadů na to, jak přiblížit žákům krásu matematiky.

Průřezová témata v hodinách matematiky

Lenka Tejkalová[1]

Ze širokého spektra průřezových témat byly v rámci Dvou dnů prezentovány zejména projekty, kde výuka matematiky přispívá k realizaci průřezového tématu Osobnostní a sociální výchova. Všechny popisované aktivity byly realizovány ve školních letech 2007/2008 a 2008/2009 na Lauderových školách v Praze. Zdaleka nejde o úplný výčet forem, kterými se OSV na Lauderových školách projevuje – cílem této prezentace je upozornit na některé zajímavé projekty související s matematikou. Žádný z prezentovaných projektů není hodnocen známkou, každý z nich však umožňuje žákům prezentovat vlastní práci a vidět její smysluplné další využití.

K samostatnosti, podpoře dovednosti se učit a autoevaluaci žáků přispívá projekt *Krabička*. Žák, který v hodině vyřeší zadané úlohy dříve než ostatní, získává možnost vytvořit novou úlohu. Na jednu stranu kartičky A6 napíše zadání, na druhou stranu vzorové řešení. Je-li obojí správně, zařadí učitel kartu do *Krabičky* a získá tak zároveň cennou zpětnou vazbu, že žák probíranou látku skutečně ovládá. Z *Krabičky* jsou pak vytahovány úlohy například pro opakování před testem, domácí úkoly apod. Naopak žák, který sice zadanou práci vypracuje, ale není si dosud v probírané látce jistý, si z *Krabičky* může vytáhnout některou z dřívějších úloh a zopakovat si tak probíranou látku. Každý, kdo úlohu správně vyřeší (což si snadno ověří na vzorovém řešení na rubu), se na kartičku podepíše a vrátí ji zpátky. Karty, které úspěšně vyřešili všichni, se vyndavají. Stejně tak učitel by měl jít žákům příkladem a přidávat do *Krabičky* veřejně další úlohy; tak zároveň zajistí dostatečnou šíři a přiměřenou náročnost úloh. *Krabička* je v každé třídě druhého

[1]Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta; lenka.tejkalova@gmail.com

stupně ZŠ – a jak formuloval jeden z žáků, „v devítce je z ní už slušná krabice“. Důležité je, aby učitel žáky vedl k tomu, že *Krabička* je nástrojem, který jim může pomoci se zlepšit, nikoliv souborem úloh řešených na známku nebo kvůli vítězství!

Matematika všude kolem nás byl projekt realizovaný ve spolupráci s Výtvarnou výchovou, zaměřený zejména na rozvoj spolupráce a kreativity. Z pohledu matematiky pak měl upevňovat znalosti žáků, nenásilně seznámit žáky nižších ročníků s některými poznatky z vyšších ročníků, a vést žáky k hlubšímu vhledu prostřednictvím problem-posing. Žáci druhého stupně ve skupinkách složených z žáků různých tříd během celodenního projektu hledali a fotili ve školní budově a jejím okolí geometrické obrazce a ukázky zobrazení – do vytištěných fotografií pak doplňovali odpovídající výkresy a vytvářeli zadání úloh, které by příslušný obrázek mohl ilustrovat v učebnici. Z těchto prací také vznikly podklady pro pokračování projektu ve výtvarně – kromě nesčetných výkresů využívajících souměrností tak vznikl např. trojrozměrný model školy v přesném měřítku nebo chanukový svícen. V navazujících hodinách matematiky třídy s učitelem probíraly zadání a řešení úloh (vždy odpovídajících úrovni žáků). Společně odsouhlasená zadání úloh se také objevila v *Krabičkách* každé třídy.

V projektu *doopravdy.cz* se prolíná matematika s mediální výchovou a také s výchovou osobnostní a občanskou. Do dlouhodobého projektu se zapojují jednotlivci a dvojice žáků z osmého a devátého ročníku. Z různých informačních zdrojů shromažďují statistiky (učí se mimochodem i korektně citovat zdroje) a realizují tentýž průzkum přímo na škole, mezi žáky všech stupňů a mezi učiteli. Výsledky – a zejména srovnání školní reality s mediálně prezentovanými údaji – jsou pak graficky zpracovány, doplněny průvodním textem a zveřejňovány jednak na osobních stránkách žáků, jednak v prostorách školy. Žáci se tak učí kriticky pracovat s daty, interpretovat i vytvářet grafy, zároveň se aktivně zapojují do společenského dění, prostřednictvím průzkumů poznávají své spolužáky i učitele.

A role učitele? V projektovém dni *Matematika všude kolem nás* bylo hlavním úkolem učitele dohlížet na bezpečnost. Stejně tak oba zbylé projekty od učitele – kromě úvodního seznámení – očekávají „jen“ motivující a vstřícný přístup.

Příspěvek byl vytvořen v rámci řešení grantu GAUK 1353/2009/A-PP/PedF.

Zájem o matematiku, se kterým vstupují budoucí učitelé primární školy do zaměstnání

Veronika Trnková[1]

Úvod

Matematika bývá označována za královnu věd. Setkáváme se s ní denně. Často je považována za velmi náročný a ne právě oblíbený předmět, který žáky základních škol doprovází od počátku povinné školní docházky až po její ukončení.

V poslední době se velmi často setkáváme s hlasitými útoky na školskou matematiku a pokusy vytěsnit tento předmět na okraj vzdělání. V médiích se často prezentuje negativní postoj známých a vlivných osobností k matematice. To do jisté míry ovlivňuje názory na matematiku. Bylo by žádoucí, aby se tento negativní vliv co nejvíce eliminoval.

Vztah k matematice se formuje ve škole a ovlivňuje ho především učitel matematiky svým přesvědčením o matematice. V matematice záleží na vhodném výběru úloh, vyučovacích formách a metodách, ale také na tom, jak učitel interpretuje zkoumaný matematický problém. Učitel by se měl pokusit představit žákům matematiku jinak než jako nudný, nezáživný a neoblíbený předmět, který jim v lepším případě „nevadí“. Nejvýznamnější příčinu negativního vztahu k matematice shledávám právě v osobních negativních zkušenostech z hodin matematiky.

Odstranění averze vůči matematice spatřuji v zajímavém a přitažlivém pedagogickém přístupu učitelů. Domnívám se, že by tento předmět měl být oblíbený zejména u budoucích učitelů matematiky. Těžko může učitel vzbudit zájem žáků o matematiku, pokud on sám k ní nemá kladný vztah. Ve svém příspěvku nastiňuji postoje k matematice u budoucích učitelů primární školy. K získání potřebných informací jsem využila metodu dotazníku. Dotazník s 21 otázkami byl určen studentům 4. ročníku Pedagogické fakulty Univerzity Palackého v Olomouci.

Výsledky průzkumu

V následujících tabulkách jsou v procentech uvedeny odpovědi respondentů na dotazníkové položky.

Odpovědi respondentů na otázky nepotvrdily domněnku, že budoucí učitelé mají k matematice spíše negativní vztah. Studenti Pedagogické fakulty Univerzity Palackého v Olomouci hodnotí svůj vztah k matematice spíše první polovinou klasifikačních známek

[1] ZŠ Dr. Peška Chrudim,veronika.petrzilkova@seznam.cz

(známky 1, 2, 3) než známkami 4 a 5. Je potěšující, že všichni respondenti jsou si vědomi důležitosti matematiky, ačkoliv k ní nemají ryze kladný vztah.

Otázka	Odpovědi v %					
	1	2	3	4	5	N
Hodnocení vztahu respondentů k matematice	7	38	40	13	2	0
Důležitost matematiky v životě člověka	45	35	20	0	0	0
Sebehodnocení matematických znalostí	4	31	60	5	0	0

Tabulka 1: Postoje k matematice

Méně příznivé jsou odpovědi respondentů u sebehodnocení matematických znalostí. Většina budoucích učitelů hodnotí své znalosti jako průměrné. Vyskytli se ale respondenti, kteří je hodnotí jako podprůměrné. Domnívám se, že pokud si učitel není svými znalostmi jistý, nemůže žákům srozumitelně a přehledně předávat poznatky, a tudíž by se procesu vzdělání neměl vůbec účastnit. Očekávala jsem lepší hodnocení matematických znalostí.

Otázka	Odpovědi v %			
	Ano, často	Ano, zřídka	Ne	Neodpověděli
Návštěvnost internetových stránek	4	33	63	0
Návštěvnost didaktických seminářů	2	24	74	0

Tabulka 2: Zájem o matematiku u respondentů ve volném čas

V posledních letech jsme svědky prudkého rozvoje informační a komunikační technologií. Budoucích učitelů, kteří obohacující vyučování o poznatky z internetu, ovšem není příliš. Doufejme, že se jedná spíše o dočasný problém a že se pedagogický software stane v blízké budoucnosti důležitou pomůckou ve vyučování matematiky.

Nejenom PdF UP v Olomouci pořádá každoročně pro své studenty zajímavé matematické semináře, jejímiž přednášejícími jsou převážně učitelé z praxe, kteří svými poznatky, nápady a radami obohacují budoucí učitelé. Z odpovědí respondentů bohužel vyplynulo, že ani matematické semináře studenti nenavštěvují. Můžeme tedy konstatovat, že oslovený výzkumný vzorek ve svém volném čase matematiku příliš nevyhledává.

ZÁVĚR

Výsledky průzkumu dokazují, že vztah k matematice je velmi rozmanitý. Všichni respondenti jsou ovšem přesvědčeni o potřebnosti matematiky a uvědomují si její nezbytnost pro život. Domnívám se, že by bylo žádoucí, aby se začínající učitelé více zajímali o matematiku ve svém volném čase. Získají tak nejenom potřebné poznatky pro své sebevzdělání, ale i informace o tom, jak ukazovat krásu matematiky a jak budovat pozitivní vztah k matematice u svých žáků.

LITERATURA

[1] HEJNÝ, M.; KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika*. 1. vyd. Praha : Portál, 2001.

[2] OPAVA, Z. *Matematika kolem nás*. 1. vyd. Praha : Albatros, 1989.

[3] TRNKOVÁ, V. *Zájem studentů 1. stupně ZŠ o matematiku.* Diplomová práce, 2008.

PROBLÉMY KOLEM APLIKAČNÍCH ÚLOH

MARTA VOLFOVÁ[1]

Při různých mezinárodních šetřeních a zkoumáních bylo zjištěno, že naši žáci mají problémy zejména při řešení úloh z praxe.

K slovním úlohám často totiž přistupují velmi formálně, slovní znění úlohy berou jen jako prázdný obal, kterým se nijak nezabývají – pro ně je úkolem dosadit čísla z textu úlohy do (obvykle právě probíraného) algoritmu a dojít k výsledku, který se v optimálním případě shoduje s výsledkem uvedeným v učebnici.

Mnohé úlohy bývají takto i vytvářeny – k danému matematickému postupu, který má být procvičen a upevněn, se hledají různé „obaly ze života“. Je třeba rozlišovat, kdy jde jen o „cvičnou“ úlohu a kdy skutečně o úlohy aplikační, pomocí kterých má být školní matematika „spojena se životem“ a žákům ukázána vhodnost a užitečnost matematických postupů.

Nedostatek času k úvahám kolem věcné náplně úloh vede k tomu, že i dobře vytvořené praktické úloze se dostane jen výše uvedeného formálního zacházení, že si žák „věcné náplně“ úlohy ani nevšímá.

Vezměme učebnicový příklad:
(1) Do vápenky bylo nasypáno 13,6 tun vápence. Vypálením se získalo 7 t vápna. Kolik tun vápna se získá z 50 t vápence?

Bylo by třeba zamyslet se nad textem úlohy. Chápou žáci, co je vápenec? Je to kámen, nebo nějaká hlína? Kde a jak se asi získává? Ví někdo o (blízkém) místě, kde se získává? Jak se z něj vápno „udělá“? Na co je vápno potřebné? Co je to vápenka?

[1]Univerzita Hradec Králové, Pedagogická fakulta; Marta.volfova@uhk.cz

Na to vše v běžné hodině matematiky není dost času – mnohé probírají ve svých hodinách učitelé chemie, včetně způsobu, jak získat (výpočtem) odpověď na otázku v příkladu 1. Tento způsob se však může zdánlivě značně lišit od způsobu, užívaného ve vyučování matematiky.

Ukažme rozdíly na příkladu s roztoky:
(2) Kolikaprocentní roztok získáme smícháním 20 g 96% vodního roztoku kyseliny sírové s 80 g 5% vodního roztoku?

Způsob řešení v chemii:

$$W = \frac{m_1 w_1 + m_2 w_2}{m_1 + m_2},$$

kde W je hmotnostní zlomek připravovaného roztoku, w_1 je hmotnostní zlomek složky roztoků v roztoku 1, w_2 je hmotnostní zlomek složky roztoků v roztoku 2 a $m_1 + m_2$ je hmotnost připravovaného roztoku.

$$\begin{aligned} m_1 &= m\,(96\%\, H_2SO_4/aq) = 20g \\ m_2 &= m\,(5\%\, H_2SO_4/aq) = 80g \\ W_1 &= W\ (H_2SO_4 \text{ v } 96\%\, H_2SO_4/aq) = 0{,}96 \\ W_2 &= W\ (H_2SO_4 \text{ v } 5\%\, H_2SO_4/aq) = 0{,}05 \end{aligned}$$

$$W = \frac{20g \cdot 0{,}96 + 80g \cdot 0{,}05}{20g + 80g} = 0{,}23 = 23\%$$

Způsob řešení v matematice:

$$\begin{aligned} 0{,}96 \cdot 20 + 0{,}05 \cdot 80 &= \frac{p}{100} \cdot 100 \\ 19{,}2 + 4 &= p \\ 23{,}2 &= p \end{aligned}$$

Získá se 23 % roztok.

Protože výpočty v chemii a matematice jsou na první pohled dosti odlišné, je celkem zákonité, že si žáci vytvářejí různá pravidla (takto se řeší v matematice, takto v chemii) a nedospějí k syntéze.

Jako řešení se nabízí užší spolupráce učitelů matematiky a chemie, nejlépe formou nějakého projektu, v němž může dojít k integraci poznatků z obou vyučovacích předmětů. V něm lze probrat podrobně i výše uvedené dotazy a odpovědi na ně.

Hledání „společné řeči“ není jednoduché, objevují se mnohé problémy.

Naše studentka prováděla výzkum – s uplatněním uvedeného příkladu 2 – a došla k překvapivým (nesprávným) závěrům. Tvrdí:

„Matematická úvaha. . . není úplně přesná, neboť zanedbává látková množství jednotlivých reaktantů a produktů, ve výsledku však princip výpočtu zůstává stejný.“ Dále uvádí, že by chemik dokázal pomocí molárních výpočtů zjistit i bez dalších údajů, kolik se získá z 50 t vápence vápna a ukazuje tento způsob, dochází k výsledku 28,2 t vápna – a ukazuje i řešení úlohy „jen matematicky“ – úměrou, která přináší výsledek 25,7 t. Velmi nesprávně však uzavírá takto:

„. . . matematické řešení je mnohem jednodušší, žákovi stačí vykonat jen několik myšlenkových operací, někdy možná jen formálně naučených. . . Chemické řešení oproti tomu klade relativně vysoké požadavky na žákovo myšlení, je náročnější, zdlouhavější, ale přesnější, pracující s reálnou situací. Je otázkou, zda se spokojit s přibližným řešením nebo vynaložit vyšší myšlenkové úsilí, ale dostat výsledek bližší realitě. V případě malých rozdílů ve výsledku bychom se asi přiklonili k jednoduššímu řešení, pokud je ale rozdíl 2,5 tuny, je jistě potřeba řešit úlohu přesnější metodou, tedy výpočtem chemickým.“

Samozřejmě rozdíl ve výsledcích 2,5 tuny neplyne z toho, že by matematický výpočet nebyl přesný – ale z výchozích dat, která ukazují, že vápenec nebyl čistý (jinak by se z něj mělo získat 7,66 t vápna a ne pouze 7 t).

Postupy řešení obou disciplin je třeba vyhodnotit a vyvodit z nich vždy jen správné závěry!

Aplikační úlohy přispívají značným dílem k vytváření klíčových kompetencí.

Pro učitele je tvorba, řešení a využití aplikačních úloh stálou výzvou.

LITERATURA

[1] Lhotová, K.: *Přesahy matematiky a chemie na ZŠ.* Náčrt rukopisu DP, 2009

Pracovní dílny

TVORBA SLOVNÍCH ÚLOH NA ZÁKLADĚ ZPŮSOBU ŘEŠENÍ DANÉ ÚLOHY

JIŘÍ BUREŠ, PETRA ŠVRČKOVÁ[1]

ÚVOD

Většina hodin matematiky ve škole bývá zaměřena na rozvoj schopnosti žáků odpovídat na otázky a řešit úlohy. Ke zlepšení schopnosti žáků řešit úlohy může pomoci nejen řešení většího množství úloh, ale také analýza úloh a situací, ze kterých tyto úlohy vycházejí. Jednou z cest, jak proniknout hlouběji k podstatě slovních úloh a situací, je i vlastní žákovská tvorba slovních úloh, která umožňuje žákům nahlédnout do způsobu vytváření úloh a odhalovat podstatné informace a vztahy mezi nimi.

Existuje mnoho různých způsobů, jak je možné zadat žákům, aby sami vytvářeli úlohy. Žáci mohou např. tvořit úlohy s daným tématem, k danému příběhu, k reálné situaci nebo k daným číselným údajům. V naší dílně jsme se zaměřili na tvorbu slovních úloh na základě daného matematického modelu slovní úlohy. Po vymezení pojmu matematický model slovní úlohy popíšeme průběh této aktivity, uvedeme ukázky vytvořených slovních úloh a zamyslíme se nad přínosem a využitím této aktivity v hodinách matematiky.

MATEMATICKÝ MODEL SLOVNÍ ÚLOHY

Vymezení pojmu matematický model se u různých autorů liší podle toho, jaké využití matematického modelu autoři sledují a jaká je cílová skupina, která má dané pojetí matematického modelu využívat. Pro naše účely je důležité vymezit matematický model dvěma způsoby: pro učitele jako nástroj analýzy dané slovní úlohy a pro žáky jako prostředek pro hledání souvislostí a rozdílů mezi slovními úlohami. Nejprve zmíníme obecné pojetí matematického modelu podle H. Freudenthala a potom konkretizujeme toto pojetí s ohledem na zaměření dílny.

H. Freudenthal (1983) ukazuje na příkladu hry „Člověče, nezlob se“ dva pohledy na matematický model: *model as pre-image, model as after-image*. *Model as pre-imag*e je abstraktní hrací deska, podle které byly vyrobeny konkrétní hrací desky. Jiným příkladem může být báseň nebo píseň taková, jak ji autor složil ve svých myšlenkách. *Model as after-image* může být reprezentován několika hracími deskami (identickými, od různých

[1]Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta; buresjirik@seznam.cz, psvrckova@seznam.cz

výrobců, jinak barevnými), které ale reprezentují jeden abstraktní objekt – hrací desku na „Člověče, nezlob se“. Několik různých provedení téže písně, několik podání recitace téže básně jsou dalšími příklady tohoto typu modelu.

Pro naši práci jsme využili matematický model vybrané slovní úlohy jako *model as pre-image* a vytvářeli další slovní úlohy, které souvisely s tímto modelem. Abychom mohli lépe popsat matematický model dané slovní úlohy, rozdělili jsme jej na několik složek:

1. druh kvantitativního vztahu (přímá úměrnost, nepřímá úměrnost, dělení celku na části. . .)

2. zápis kvantitativního vztahu (rovnice, tabulka, schéma. . .)

3. prostředky řešení (jednoduché početní operace, úpravy rovnic. . .)

U jednoduchých slovních úloh může být stejný základní kvantitativní vztah jako prostředek řešení. Naším cílem bylo hlavně zdůraznit roli základního kvantitativního vztahu jako společného znaku různorodých slovních úloh, což může pomoci žákům odhalit jeho přítomnost ve zdánlivě nesouvisejících situacích.

Tvorba slovních úloh na základě daného matematického modelu

Tvorba slovních úloh během dílny proběhla v několika etapách – nejdříve proběhlo seznámení s daným matematickým modelem na konkrétních příkladech, poté následovala vlastní tvorba slovních úloh účastníky, kteří tyto úlohy na závěr prezentovali všem účastníkům dílny.

Pro seznámení s daným matematickým modelem jsme využili následující dvě slovní úlohy:

Úloha 1: Na 3 ha pole se urodilo 780 q obilí. Kolik metrických centů by se urodilo za stejných podmínek na 8 ha?

Úloha 2: V pekárně pečou na objednávku 120 frgálů na svatbu. 60 jich má být makových, 50 tvarohových a 10 marmeládových. Kolik surovin bude třeba, jestliže se na 100 cm^2 vejde 30 g máku, 35 g tvarohu a 25 g marmelády? Koláče mají v průměru 30 cm a okraj má 1 cm.

Úloha 1 představuje příklad jednoduché úlohy s jedním matematickým modelem, kterým je přímá úměrnost. Kvantitativní vztah lze zapsat pomocí tradičního schématu pro zápis přímé úměrnosti nebo rovnicí, jako prostředky řešení lze využít ekvivalentní úpravy rovnic a jednoduché početní operace.

Úloha 2 představuje příklad složitější úlohy, ve které je několik matematických modelů – odčítání, výpočet obsahu kruhu a přímá úměrnost. Kvantitativní vztah lze zapsat opět pomocí schématu pro přímou úměrnost nebo rovnicí, vzorcem pro obsah kruhu a zápisem jednoduchých početních operací, jako prostředky řešení slouží jednoduché počet operace a ekvivalentní úpravy rovnic.

Po seznámení s úlohami a jejich matematickým modelem se účastníci rozdělili do skupin a měli vytvářet slovní úlohy na základě Úlohy 1. Jejich úkolem bylo vytvořit tři slovní úlohy: 1) úlohu se zcela stejným matematickým modelem, 2) úlohu s částečně stejným matematickým modelem a 3) úlohu se zcela jiným matematickým modelem.

Příklady vytvořených úloh uvádíme v následující části.

Úlohy se stejným matematickým modelem splňovaly všechny podmínky dané použitým pojetím matematického modelu slovní úlohy, protože všechny představovaly situaci obsahující přímou úměrnost jako základní vztah mezi danými údaji a daly se řešit zcela stejným způsobem jako Úloha 1 při pouhém nahrazení původních číselných údajů novými:

Na zahrádce se urodilo na 3 keřích 78 rajčat. Kolik bychom jich sklidili z 8 keříků?

Pozorováním bylo zjištěno, že 2 slepice vyhrabou za stejný čas 10 žížal. Kolik žížal vyhrabe v tomto čase 6 slepic?

Úlohy s částečně stejným matematickým modelem představovaly většinou situace využívající vztah nepřímé úměrnosti mezi danými číselnými údaji, čímž se lišily od matematického modelu Úlohy 1. Způsob zápisu kvantitativního vztahu a prostředky řešení odpovídaly Úloze 1.

4 švadleny ušily 50 kostýmů za 2 týdny. Za jak dlouho tyto kostýmy zhotoví 9 stejně zručných švadlen?

3 traktory zorají pole za 2,5 h. Za jak dlouho zorá totéž pole 5 traktorů?

Úlohy se zcela jiným matematickým modelem byly většinou tvořeny takovým způsobem, aby nebyly řešitelné pouze pomocí přímé úměrnosti. Matematický model těchto úloh však vykazoval společné znaky s matematickým modelem Úlohy 1, protože při řešení těchto úloh bylo také možné využít jak vztahu přímé úměrnosti, tak i stejných způsobů zápisu a prostředků řešení.

První švadlena zhotoví 50 kostýmů za 15 pracovních dní. Druhá švadlena zhotoví 50 kostýmů za 12 pracovních dní. Třetí švadlena zhotoví 50 kostýmů za 10 pracovních dní. Čtvrtá švadlena zhotoví 50 kostýmů za 20 pracovních dní. Za jak dlouho bude zakázka hotová při jejich společné práci?

Při tvorbě slovních úloh se stejným a částečně stejným matematickým modelem se většinou podařilo splnit daná kritéria. Zřejmě nejsnazší bylo pro účastníky vytvořit úlohu se zcela stejným matematickým modelem, protože daná úloha byla velmi jednoduchá. Bylo by zajímavé sledovat, jaké obtíže by přinesla tvorba slovních úloh na základě matematického modelu Úlohy 2. Při tvorbě úloh s částečně stejným matematickým modelem se účastníci zaměřili na zachování stejných zápisů a způsobů řešení a měnili většinou základní vztah mezi číselnými údaji (přímou úměrnost na nepřímou úměrnost). Otázkou je, nakolik je toto pojetí tvorby úloh s částečně stejným matematickým modelem žádoucí při zařazení této aktivity do vyučování. Pokud by bylo cílem učitele ukázat využití stejných zápisů a prostředků řešení při různých typech slovních úloh, bylo by dobré pojmout tuto aktivitu tímto způsobem. Pokud by učitel chtěl ukázat různé možnosti zápisu a využití postupů řešení, bylo by vhodné nechat žáky zachovat základní vztah mezi údaji a nechat je měnit pouze zápis a prostředky řešení.

Při tvorbě slovních úloh se zcela jiným matematickým modelem se v některých případech nepodařilo splnit daná kritéria. Podle uvedené charakteristiky matematického modelu neměly tyto úlohy zcela jiný matematický model než Úloha 1, protože při jejich řešení bylo možné využít přímou úměrnost, stejný způsob zápisu i prostředky řešení. Během tvorby slovních úloh se zcela jiným matematickým modelem je třeba dávat pozor, aby se vytvořená úloha nedala (zcela ani částečně) řešit také matematickým modelem, vůči kterému se vymezujeme. Tuto aktivitu je také možné zjednodušit vymezením toho, v jakých vlastnostech se dané modely musí lišit a v čem se případně mohou shodovat.

ZÁVĚR

Tvorba slovních úloh na základě způsobu řešení dané úlohy může pomoci žákům rozšířit pohled na slovní úlohy, analyzovat netradičním způsobem dané slovní úlohy, umožnit hledat společné a rozdílné znaky jednotlivých slovních úloh a objevovat souvislosti mezi slovními úlohami, které spolu na první pohled vůbec nesouvisejí. Aktivitu je možné zařadit do vyučování jako shrnující a opakovací aktivitu zejména tehdy, kdy mají žáci za sebou slovní úlohy, které se řeší různým způsobem. Tato aktivita jim může pomoci k vytvoření individuálního systému slovních úloh majících různý způsob řešení, ke kterým mohou postupně zařazovat další slovní úlohy.

Tato aktivita je součástí česko-francouzského výzkumu vedeného ve spolupráci Katedry matematiky a didaktiky matematiky PedF UK v Praze (doc. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.) a Université Victor Segalen Bordeaux 2 (prof. Guy Brousseau, prof. Bernard Sarrazy), který je zaměřen na kulturu žáků při řešení slovních úloh.

Tento výzkum je částečně podpořen programem Barrande, číslo projektu 2-09-04.

Literatura

[1] BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble: La pensée sauvage. 395 s. coll. Recherches en didactique des mathématiques, 1998.

[2] BUREŠ, J., HRABÁKOVÁ, H. (2008). Création d'énoncés de problemes par les éleves. In *Actes du XXXVe Colloque national des formateurs de professeurs des écoles en mathématiques.* Bordeaux: COPIRELEM, 2008 [v tisku].

[3] BUREŠ, J., HRABÁKOVÁ, H. (2008). Žákovská tvorba úloh. In STEHLÍKOVÁ, N., JIROTKOVÁ, D. (eds.) *Dva dny s didaktikou matematiky 2008 (sborník příspěvků).* Praha. KMDM PedF UK. s. 87–91.

[4] FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* D. Reidel Publishing Company. 595 s.

[5] KUŘINA, F. (1978). Vyučování matematice a modely. *Matematika a fyzika ve škole*. Vol. 8, no. 9., s. 641–650.

[6] SILVER, E. A. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics.* Vol. 14, no. 1, s. 19–27.

Zkušenosti s výukou čerstvých absolventů středních škol – nejčastější zdroje chyb a příčiny neúspěchu v prvním ročníku VŠ

Petr Eisenmann, Jiří Přibyl, Lenka Součková[1]

Poučuje šéfkuchař kuchtíka:
„. . . no a pak vezmeš dvě třetiny vody a dvě třetiny mléka a dáš to do hrnce.“
„No, ale, pane mistr,“ přeruší ho kuchtík, „to budu mít čtyři třetiny“.
„Hrome, no to máš pravdu. . . Víš co, tak si vezmeš větší hrnec.“

[1] PřF UJEP, Ústí nad Labem

Úvod

Obsahem popisované pracovní dílny byla diskuse nad tím, co tvoří z našeho pohledu největší nedostatky studentů prvních ročníků vysokých škol při výuce matematiky. V dílně, které se zúčastnilo dvacet šest středoškolských učitelů, jsme diskutovali postupně o následujících tématech.

Problémy s prostorem

Setkáváme se se studenty, kteří o sobě prohlašují, že nemají prostorové vidění. S takovým studentem jsme se setkali pouze jednou. Předpokládejme, že máme krychli $ABCDEFGH$ (značeno podle klasických úmluv) zakreslenou ve volném rovnoběžném promítání. Dále jsou dány body P, Q, které jsou po řadě středy stran AE a DH. Úkolem je určit odchylku rovin $ABCD$ a PQF. Leckdy nastane situace, že student si vhodně umístí krychli do počátku soustavy souřadnic, jednotlivým bodům přiřadí souřadnice a dále úlohu řeší analyticky. Jedná se však opravdu o nedostatek prostorové představivosti?

Problémy s přímkou

V rámci různých předmětů, jako jsou úvodní kurzy do jednotlivých partií matematiky, jsme se setkali se zajímavou skutečností. Studenti na přímku nahlížejí z několika různých úhlů pohledu, přičemž se jim nepropojuje tento pojem v jeden celek.

Analytická geometrie. V analytické geometrii dokáží vyjádřit přímku jak v parametrickém zápisu

$$\begin{aligned} p: x &= a_1 + tu_1 \\ y &= a_2 + tu_2, \text{kde } t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

tak i v obecném

$$p: \ ax + by + c = 0.$$

Tradičním problémem ovšem je, že se snaží prokázat existenci obecného zápisu přímky ve trojrozměrném prostoru. Dokonce mají snahu tvrdit, že body, které získají z obecného tvaru dosazením konkrétních hodnot, jsou body přímky, a snaží se to nakreslit.

Planimetrie. V planimetrii vnímají přímku jako „úsečku“ či „čáru“ (prostě nějakým modelem).

Stereometrie. Ve stereometrii vnímají přímku jako hranu nějakého objektu, ale problémem je grafické znázornění v rovině, kdy poznatky si propojují nezávisle na dimensi.

Velice často se setkáváme se situací, že se nás student snaží přesvědčit o existenci mimoběžných přímek v rovině.

Funkce. Při probírání partie funkcí se žáci seznamují s přímkou jakožto grafem vyjadřujícím lineární funkci. V prvním ročníku se však setkáváme se studenty, kteří nedokáží nakreslit graf této funkce:

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{5}.$$

O těchto čtyřech pohledech se zmiňujeme proto, že studenti nedokáží jednotlivé pohledy na přímku integrovat do organického celku. Setkáváme se s tím, že pokud v analytické geometrii požádáme studenty o určení vzájemné polohy přímek p a q, kde

$$p : 2x + 5y - 4 = 0 \qquad \wedge \qquad q : y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{5},$$

nezřídka se stane, že obdržíme odpověď typu „to nejde“, nebo od bystřejších emocionálně zabarvenou odpověď „to od vás není hezké, to míchat dohromady.“

Z osobní zkušenosti víme, že jsou učitelé, kteří propojují všechny partie matematiky do organického celku, ale také známe učitele, kteří učí *funkce* a nevidí, proč by měli žákům připomenout analytickou geometrii.

Funkční myšlení studentů

Co se termínem *funkční myšlení* vlastně rozumí? Termín začal používat na přelomu 19. a 20. století německý matematik Felix Klein (1849–1925), který byl v Evropě vůdčí osobností hnutí za reformu matematického vzdělávání. Klein za osu veškerého vyučování matematiky prohlásil právě funkční myšlení.

Funkční myšlení jedince se začíná vyvíjet daleko dříve, než je pojem funkce na druhém stupni základní školy definován. Již od předškolního věku se děti v běžném životě setkávají s příčinností jevů, různými závislostmi a pěstují si tak smysl pro kauzalitu. Na prvním stupni základní školy pracují s různými tabulkami závislostí, připravují se na souřadný systém a kreslí různé grafy a diagramy. I když se v této tzv. motivační (či propedeutické) fázi o funkci ještě vůbec nehovoří, má na vznik a posilování funkčního myšlení rozhodný vliv.

Výuka na základní a střední škole má žáky a studenty vést k tomu, aby rozpoznali určité typy změn a závislostí, které jsou projevem běžných jevů reálného světa, a seznámili se s jejich reprezentacemi. Tyto závislosti mají žáci analyzovat z tabulek, diagramů a grafů, v jednoduchých případech je konstruovat a vyjadřovat matematickým předpisem. Zkoumání těchto závislostí směřuje k pochopení pojmu funkce.

Typickým příkladem ilustrujícím nedostatečně rozvinuté funkční myšlení je například fakt, že naprostá většina čerstvých studentů prvního ročníku vysoké školy nezvládne uspokojivě vyřešit následující sadu rovnic a nerovnic s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
x &= 2^x && (1)\\
x &= \cos x && (2)\\
\ln x &\geq 0 && (3)\\
\log_{10} x &\leq 1 && (4)\\
\sin^2 x &\leq 1 && (5)\\
3^{-x}c &\geq 0 && (6)
\end{aligned}$$

Problémem zde většinou není neschopnost studentů nakreslit grafy příslušných elementárních funkcí. Tím je spíše fakt, že možnost řešit uvedené úlohy graficky jim nepřijde vůbec na mysl. Přítomní učitelé přiznali, že schopnost použít takový postup se ve výuce matematiky na střední škole většinou skutečně nerozvíjí, že podobné úlohy se svými studenty neřeší.

ZLOMKY

Dostáváme se k problematice, která by měla stát spíše na začátku celého příspěvku. Stejně jako každý rok řešíme stále stejné problémy. Otevřeně přiznáváme, že k dané problematice přistupujeme s emocionálně zabarveným vztahem.

Velkým a pro nás překvapivým problémem na vysoké škole jsou zlomky. Mohlo by se zdát, že zde píšeme o žácích druhého stupně základní školy, ale bohužel tomu tak není. Studenti se zlomků „bojí“. Některé úlohy v pohodě vyřeší, ale pouze v případě, že jsou koeficienty rovnic objektů (přímka) celá čísla. Pokud je v zadání úlohy z analytické geometrie souřadnice bodu zadaná ve zlomku, studentům se to nelíbí a ptají se, proč zadáváme tak ošklivá čísla. Uvedeme zde několik příkladů.

Studenti zaměňují operace sčítání a násobení zlomků. Nepřemýšlí nad zlomky jako nad nějakou částí z celku, ale jen aplikují nazpaměť naučený vzorec. Někdy se bohužel netrefí a místo násobení sčítají a naopak. V tomto případě je sčítání zlomků epistemologickou překážkou, kterou se nepodařilo až do vstupu na vysokou školu odstranit.

Nedávno jsme se například dozvěděli, že $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$, nebo $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Ve druhém případě si studenti ani neuvědomí, že by mohli krátit. Tedy že se $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Dalším příkladem je již zmíněná analytická geometrie. V zadání je bod $A\left[\frac{11}{17}, \frac{13}{8}\right]$. Studenti se nejprve zhrozí, co je to za čísla (že by měli vědět, že jsou to čísla racionální, pomineme), poté se pustí do práce a ve skupině o dvaceti studentech vyjde nejméně pět různých výsledků. Není to proto, že by nevěděli, jak úlohu vyřešit, ale dělají početní chyby. V tuto chvíli je třeba vzít v potaz tlak společnosti, která pokud jedinec porozumí dané problematice, nevidí potřebu v opakování daného postupu a přenechá ho výpočetním strojům.

Opět zůstaneme u geometrie, tentokrát v úloze vyjde obecná rovnice přímky, která je osou souměrnosti. Nejprve bychom chtěli upozornit na to, že většina studentů umí odvodit zobrazovací rovnice pro osovou souměrnost, a ti, kteří to neumí, se většinou vzoreček naučí. Studenti počítají se zlomky a dostanou se až ke zmíněné ose souměrnosti, kterou „stačí" dosadit do zobrazovacích rovnic. Osa jim vyjde v tomto tvaru: $\frac{21}{13}x - \frac{14}{13}y + \frac{28}{13} = 0$.

Ano, je to správný výsledek, ale nebylo by lepší pro doplnění do zobrazovacích rovnic obecnou rovnici osy upravit? Studenti si však neuvědomí, že koeficienty mají stejný jmenovatel 13 a čitatel je vždy dělitelný 7. Nejprve tvrdí, jak se jim počítání se zlomky nelíbí, a poté s nimi počítají dál, i když nemusí.

Kde je tedy problém? Je zde několik možností a dle našeho názoru je na každé alespoň trochu pravdy. Na vysoké škole si můžeme říci, co s těmi studenty na střední škole dělali, že neumí vynásobit nebo sečíst dva zlomky, to snad počítali jen s celými čísly? Středoškolští učitelé se budou rozčilovat, že jim studenti na střední školu přišli s téměř nulovými znalostmi a mají hodně látky, kterou s nimi musí probrat, a tím pádem nemají čas opakovat zlomky. Určitě bude problém již na základní škole. Jedná se o to, že my pátráme po viníkovi, který může za to, že žák/student neumí práci se zlomky. Každý z nás si možná říká: „Mám snad já odstraňovat to, co už měl umět a neumí?" Pokud ale někdo v tomto procesu neodstraní dané nedostatky, nelze se potom divit, co vše žák zná i nezná. Teoreticky je žák schopen pracovat s různými tématy, avšak když se přejde k praktickým příkladům, končí žáci na numeračních dovednostech. Leckdy je výuka realizována tím způsobem, že když se probírají zlomky, tak se probírají zlomky, ale když se probírá něco jiného, třeba naše známá analytická geometrie, tak tam radši zlomky dávat nebudeme, studenti by zbytečně dělali početní chyby a měli by zbytečně horší známky.

Studenti se na zlomky dívají jako na „ošklivá" čísla a vůbec si je nespojí s realitou. Radši na příklady použijí kalkulačku a zaokrouhlují na několik desetinných míst, poté jim narůstá chyba, ale jim je to úplně jedno, hlavní je, že už tam nemají ty zlomky. Studenti sami sobě nevěří, ve smyslu, že neudělají chybu, ale kalkulačka ji přece udělat nemůže.

Nelze přesně říci, kde je chyba. Na představách se přeci jen podílí několik různých faktorů. Poprvé se s problematikou zlomků jakožto nehezkých čísel setkali naši předchůdci – ti, kteří zažili vstup výpočetní techniky do školy. Kalkulátor uměl dělit a zlomek je „naznačené dělení", tak proč toho nevyužít. To, co se učitelům zdálo jako zcela zřejmé $\frac{13}{7} \cdot 7 = 13$, se v kalkulátorech proměnilo na $1,85714285 \cdot 7 = 12,99999995$, což se dá zaokrouhlit na 13 a žáci nedokázali pochopit, proč se učitel hněvá, když jim to nakonec vyšlo správně. V dnešní době se s těmito problémy nepotýkáme, protože kalkulátory, ale i kapesní počítače (a setkali jsme se již i s mobilními telefony), dokáží pracovat se zlomky. A elektronika se nemýlí.

V tuto chvíli nevíme, co za tím je, možná děti jen málo krájejí koláče…

VIDEOZÁZNAM PROCESU ŘEŠENÍ ÚLOH Z „PAVUČIN“

HANA FIALOVÁ, PAVLÍNA HARCUBOVÁ[1]

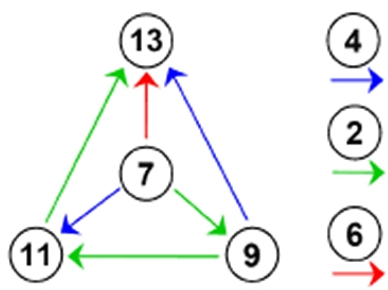
ÚVOD

Cílem pracovní dílny bylo seznámení posluchačů s prostředím *Pavučiny* a s výsledky bezmála dvouletého převážně kvalitativního výzkumu autorek zaměřeného na výukové a diagnostické možnosti tohoto prostředí u žáků 1. stupně ZŠ.

Pavučiny jsou poměrně nové matematické prostředí určené zejména žákům 1. stupně ZŠ. V tištěné podobě se poprvé objevily v roce 2007 ([3], [4]).

VYMEZENÍ PROSTŘEDÍ PAVUČINY

Z matematického hlediska jsou pavučiny orientované ohodnocené grafy; vrcholy pavučin jsou ohodnoceny čísly a jejich hrany představují šipky dané orientace a vyjadřují hodnotu, která je zastoupena barvou šipky.[2]



Pavučina na obrázku má čtyři vrcholy ohodnocené čísly 7, 9, 11 a 13. Každé dva vrcholy jsou spojeny šipkou a její hodnota je rovná rozdílu koncového a počátečního vrcholu. Šipky s hodnotou 2 jsou zelené, šipky s hodnotou 4 jsou modré a jediná šipka s hodnotou 6 je červená.

Pro pavučinu se 4 vrcholy a 6 šipkami (jako je ta na obr. 1) platí: 1) všechna její čtyři čísla jsou navzájem různá, 2) největší je to, které je koncové pro 3 šipky, 3) nejmenší to, které je počáteční pro 3 šipky.

Když některé *parametry* pavučiny (čísla, šipky nebo hodnoty, případně barvy šipek) z pavučiny vymažeme a utajíme hodnoty šipek, vznikne pavučinová úloha. Úkolem žáka je scházející čísla a šipky do pavučiny dopsat a dokreslit. Základním stavebním kamenem

[1]studentky PedF UK; hfialova@seznam.cz, pavlina.harcubova@seznam.cz

[2](Hejný, 2008)

pavučiny je číslo, které představuje stav (S) a šipka se svou hodnotou, barvou a orientací, která reprezentuje proces, změnu (OZ – operátor změny).

Zákonitosti pavučin

Následující čtyři zákonitosti (pravidla) odhalí každý žák, který vyřeší dostatečný počet pavučin. Zákonitosti mu usnadňují řešení dalších pavučin.

Konvergence šipek (sbíhavost). Směřují-li do čísla dvě šipky stejné barvy, jsou na jejich počátku stejná čísla.

Divergence šipek (rozbíhavost). Pokud z čísla vycházejí dvě šipky stejné barvy, jsou na jejich koncích stejná čísla.

Maximální a minimální číslo. Číslo, které je počáteční pro alespoň jednu šipku, není maximální. Číslo, které je koncové pro alespoň jednu šipku, není minimální.

Princip sčítání šipek. Vedou-li z čísla A do čísla B dvě různé cesty, součty hodnot šipek jednotlivých cest, které je určují, jsou shodné.

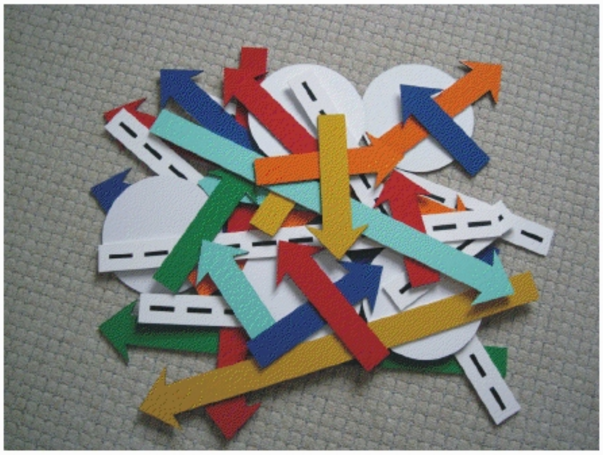
Didaktické aplikace

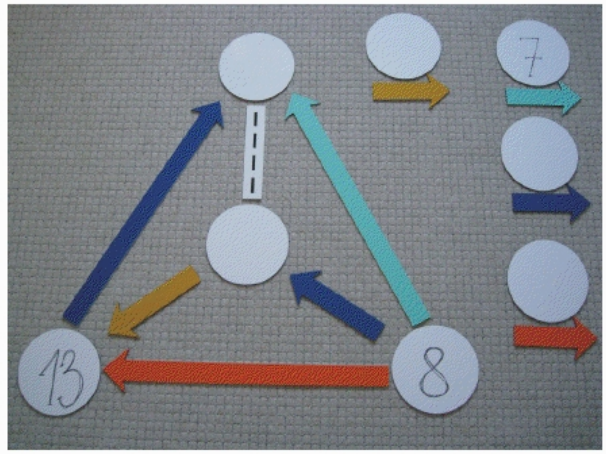
Na základě experimentů a analýzy jednotlivých úloh jsme dospěly k závěru, že obtížnost doplnění chybějícího parametru je, seřazeno od nejjednoduššího po nejobtížnější, následující: číslo, hodnota šipky, šipka (se svou barvou, hodnotou a orientací). Mezi další jevy, které ovlivňují náročnost řešení úloh, patří rozmístění čísel v pavučině, jejich velikost, zvolený číselný obor, volba číselných operací (např. násobení a dělení jako funkce šipky), více možných řešení úlohy a počet etap řešení.

Tvorba pavučinových úloh závisí jen na fantazii a kreativitě tvůrce. Možnými variacemi jsou například chybně vyřešená úloha, záměrná chyba v zadání úlohy, zadání součtu čísel chybějících v pavučině, zadání čísel mimo pavučinovou úlohu, zadání nejnižšího a nejvyššího čísla, které se v pavučině bude vyskytovat, znaky/obrázky místo čísel, vymýšlení vlastních pavučin žáky dle zadaných instrukcí.

Nejjednodušší úlohy navádí žáka k porovnávání, sčítání a odčítání čísel. V náročnějších úlohách se objevuje princip sčítání šipek a hledání jednobarevné cesty. Takové úlohy v sobě již skrývají nutnost násobení a dělení, zároveň podněcují vnímavost vztahů mezi šipkami, které lze vyjádřit rovnicemi. Například u úloh pyramidového typu s právě třemi různými barvami šipek lze poukázat na aritmetickou posloupnost čísel. Mezi nejnáročnější pavučinové úlohy se řadí úlohy se slovním zadáním. Ty vyžadují od žáka propojení všech principů, které se v pavučinách objevují. Žáci se řešením takových úloh seznamují se základy pravděpodobnosti a kombinatoriky.

Při práci s pavučinami se nemusí učitel omezovat pouze na použití „papíru a tabule“, lze využít i model pavučiny vytvořený z papíru nebo provázků. Příkladem realizace je autorkami vytvořený velký model pavučiny skládající se ze souboru koleček, na které je možné zapisovat libovolná čísla a opět je mazat, a dále ze šipek různých barev a délek.





Co zajímavého se objevilo v experimentech

Tato část shrnuje zajímavosti, se kterými jsme se setkaly při řešení pavučinových úloh žáky 1. stupně ZŠ.

Klima

Klima experimentů hraje velmi významnou roli. Ukázalo se, jaké množství faktorů může ovlivnit žákovská řešení. Patří mezi ně skok experimentátora do řeči/myšlenkových procesů žáka; odpovědi řešitele takové, jaké vyžaduje experimentátor; mluvení, konání dítěte až po výzvě experimentátora; experimentátor chce slyšet odpověď, kterou má on ve své hlavě. Dále také hluk způsobený vstupem osoby do místnosti; experimentátorem neodhadnutá délka experimentu a únava délkou způsobená; direktivní vedení experimentu; dlouhé mlčení experimentátora i řešitele, které může působit frustračně; natáčení na videokameru; reakce experimentátora na neverbální „volání o pomoc“ řešitelem (oční kontakt, gesta, mimika) atd.

Strategie řešení

Strategie je „plán, podle kterého člověk uskutečňuje anebo zamýšlí uskutečnit cíl sledující činnost.“ ([1], přeloženo P. Harcubovou ze slovenštiny).

Nejčastěji používanými strategiemi žáků bylo řešení shora-dolů a zleva-doprava, strategie pokus-omyl a hledání výchozího bodu. Postup řešení shora-dolů a zleva-doprava vychází z podstaty čtení a psaní, je proto i pro řešení matematických úloh přirozený. Strategie pokus-omyl je zpravidla první řešitelskou strategií, kterou žák volí, neví-li si s řešením úlohy rady. Často však tato strategie může sloužit jako východisko k lepším strategiím [1].

Žáci často používali jiné, jim dobře známé, strategie, které však při řešení pavučinových úloh nelze uplatnit. Sčítali například čísla v pavučině nebo se domnívali, že hodnota šipky je totožná s číslem, ze kterého vychází. Pokud žáci neodhalili správnou řešitelskou strategii, často tipovali. Některé strategie vedoucí k řešení pavučinových úloh byly pro žáky těžko odhalitelné. Princip sčítání šipek a hledání jednobarevné cesty se ukázaly být náročné pro žáky nižších ročníků. Pro odhalení těchto strategií je zapotřebí, aby jim předcházela vhodně gradovaná kaskáda úloh.

Nezáměrná chyba v zadání úlohy

Chyba v zadání úlohy může být použita záměrně jako diagnostický prostředek zjišťující hloubku myšlení žáka. Během experimentů došlo k nezáměrným chybám v zadání několika úloh, na kterých však bylo možné sledovat jednání žáků. Někdy bylo zajímavé pozorovat, jak si s ní žák poradí, jindy byla velmi nežádoucí, především pokud se žák v prostředí pavučin příliš neorientoval či pokud se vyskytla v úlohách na počátku experimentu.

Orientace šipek

Vzhledem ke skutečnosti, že doplnění šipky je úlohou s antisignálem, činila mnohým žákům orientace šipky problémy. Někteří žáci tento problém řešili záměnou šipek za čáry. Fakt, že někteří šipku nazývají čárou, může být způsoben tím, že v pavučině se zprvu více soustředí na hodnotu šipky reprezentovanou barvou než na její orientaci. Jiným vysvětlením je, že žák vyjadřuje „orientaci“ čáry pouze tím, odkud kam ji kreslí.

„Postupka“

Převážně mladší žáci jsou fixováni na řadu po sobě jdoucích čísel, která je zapříčiněna jejich převážně procesuálním matematickým myšlením. Je proto nutné obměňovat čísla v pavučině tak, aby nedošlo k jevu, kdy žák automaticky dopisuje čísla, které chybí v „postupce“.

Fixace

Jedná se o jev, kdy žák správně vypočítá výsledek, avšak fixuje si číslo z výpočtu natolik, že ho zapíše namísto správného výsledku. Případně i výpočet je chybný kvůli výraznému fixování určitého čísla.

Nula

„Záporná a kladná čísla jsou dva protilehlé světy. Jsou odděleny jediným číslem, nulou. Ta, jak známo, patří k náročným objektům matematiky. Hlavní příčinu náročnosti nuly lze formulovat pomocí tří tezí: 1. Nula nemá v představě žáka sémantické ukotvení. 2. Nula, jako objekt aritmetické struktury, stojí izolovaně. . . “ ([5], str. 340).

Symbol nula tedy často, především mladším dětem, velmi zkomplikoval situaci. Je to zvláštní číslo, se kterým se zatím příliš často nesetkávají, proto neuvažují o jeho možném výskytu v pavučině.

Závěr

Tento příspěvek je pouze nástinem možností prostředí Pavučiny, jehož záměrem je inspirovat čtenáře k obohacení hodin matematiky o atraktivní prostředí. Je nyní na každém čtenáři, stejně jako na autorkách, jak další možnosti, které prostředí skýtá, rozvinou.

Literatura

[1] HEJNÝ, M. a MICHALCOVÁ, A. *Skúmanie matematického riešiteľského postupu.* Bratislava : Metodické centrum v Bratislave, 2001.

[2] HEJNÝ, M. *Prostředí Pavučiny.* [cit. 1. dubna 2008] dostupné na Internetu <www.dokumenty.webzdarma.cz>

[3] HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ D. a SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, S. *Matematika I, II.* Plzeň : Fraus, 2007, 2008.

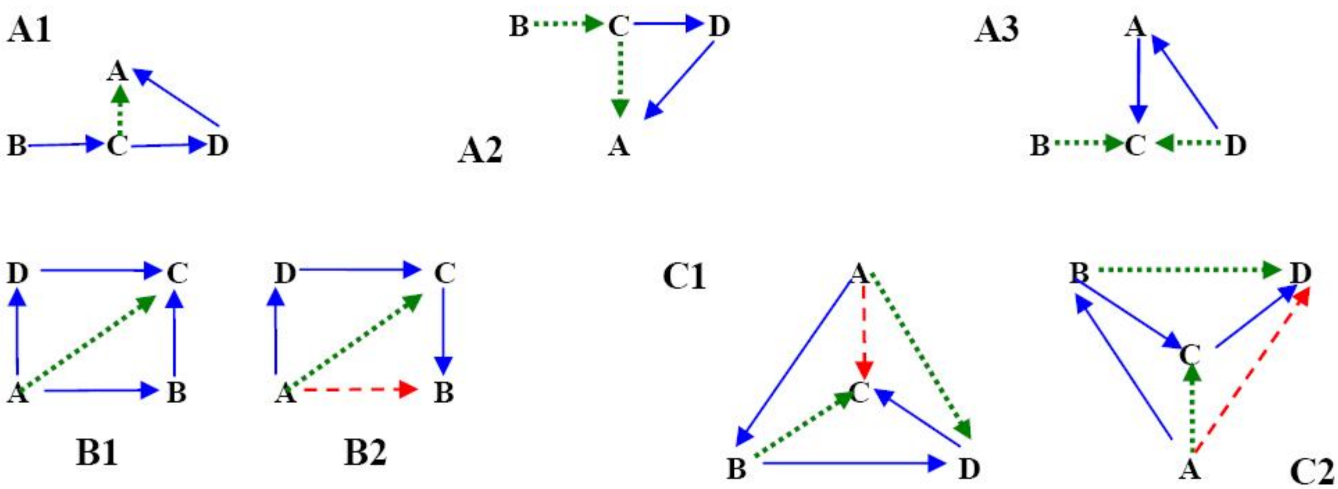
[4] HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ D. a SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, S. *Matematika: příručka učitele pro 1./2. ročník základní školy.* Plzeň : Fraus, 2007, 2008.

[5] HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J. a STEHLÍKOVÁ, N. (Eds.) *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky : 2. díl.* Praha : PedF UK, 2004. (2. sv.)

Pavučiny a Barevné trojice: Dvě aritmetická prostředí, v nichž je barva dominantní

Milan Hejný, Darina Jirotková[1]

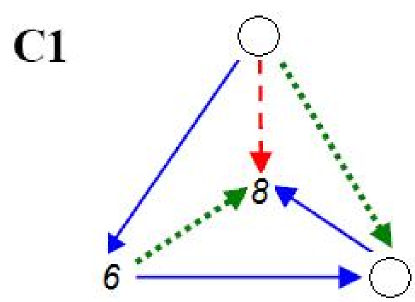
Pavučiny



Obr. 1: Různé typy pavučin

Na obrázku 1 je uvedeno několik typů pavučin. Podívejte se například na pavučinu C1. Jsou v ní čtyři čísla, která jsou zatím označena písmeny A, B, C, D, a šest šipek – tři jsou plné, dvě jsou tečkované a jedna je čárkovaná.

Pro žáky a v textu, kde lze rozlišovat barvy, používáme barevně odlišené šipky: plné šipky jsou modré, tečkované jsou zelené a čárkované jsou červené. Do této pavučiny místo písmene B vložíme číslo 6 a místo písmene C číslo 8 (obr. 2).



Obr. 2: Pavučina C1 s vloženými čísly

Tato pavučina je úlohou. Žák má za úkol místo písmen A a D napsat čísla tak, aby každá šipka znamenala přičítání jistého přirozeného čísla a šipky stejných barev znamenaly přičítání stejných čísel. Z daných dvou čísel vidíme, že tečkovaná (zelená) šipka má hodnotu $8 - 6 = 2$. Dále vidíme, že dvě plné (modré) šipky mají též dohromady hodnotu 2, tedy jedna plná šipka má hodnotu 1. Tedy místo písmene D je nutno dát číslo 7 a místo písmene A číslo 5. Čárkovaná (červená) šipka pak znamená přičtení čísla 3.

[1]Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta; milan.hejny@pedf.cuni.cz, darina.jirotkova@pedf.cuni.cz

MATEMATICKÝ POPIS PROSTŘEDÍ PAVUČIN

Orientovaný graf, jehož každý vrchol i každá hrana je ohodnocena přirozeným číslem, nazveme *pavučinou*, jestliže platí:

1. je-li A→B orientovaná hrana jdoucí od vrcholu A k vrcholu B, pak hodnota vrcholu A plus hodnota hrany je rovna hodnotě vrcholu B;

2. každá hrana (tj. šipka) je obarvena; dvě hrany mají stejnou barvu, právě když mají stejné hodnoty.

Například u pavučiny C1 z ilustrace je hodnota vrcholu A rovna 5, což zapíšeme jednoduše $A = 5$. Podobně je $B = 6$, $C = 8$ a $D = 7$. Hodnota plné (modré) šipky je 1, hodnota tečkované (zelené) je 2 a hodnota čárkované (červené) je 3.

DIDAKTICKÉ CÍLE PROSTŘEDÍ PAVUČIN

Prostředí nabízí úlohy, které obohacují žákovy zkušenosti nejen v oblasti základní aritmetiky (sčítání a odčítání přirozených čísel), ale i v mnoha dalších oblastech: násobení a dělení, čísla celá i čísla racionální, lineární rovnice, diofantické rovnice, soustavy rovnic, relace, funkce, kombinatorika, pravděpodobnost, logika. Modifikované pavučiny, které připouští i nekonečně mnoho vrcholů, otevírají cesty k posloupnostem a limitám. Modifikované pavučiny, u nichž je hrana vázána na vztah hodnota vrcholu A vynásobena hodnotou hrany z A do B je rovna hodnotě vrcholu B, otevírají cestu k mocninám i odmocninám, ke kvadratickým rovnicím i polynomům.

Dále uvedeme nejdříve sérii úloh pro první stupeň základních škol, pak několik úloh pro druhý stupeň a nakonec jednu náročnou úlohu pro maturanty. Nejprve zavedeme sérii pavučinových grafů, v nichž jsou šipky barveny, ale hodnoty vrcholů určeny ještě nejsou.

Na obrázku 1 jsou grafy obsahující 4 vrcholy. Grafy A1, A2, A3, B1 mají dvě barvy šipek a grafy B2, C1, C2 mají tři barvy šipek. Tabulka 1 uvádí ke každému z uvedených grafů jednu pavučinu. Tak například v řádce A1 tabulky je popsána pavučina A1, kde ohodnocení vrcholů je: $A = 3$, $B = 0$, $C = 1$ a $D = 2$. Když ke každému z těchto čísel přičteme nějaké stejné číslo, dostaneme další pavučinu, například $A = 9$, $B = 6$, $C = 7$ a $D = 8$. Ohodnocení hran ve všech těchto případech je stejné: plné hrany (to jsou BC, CD a DA) mají hodnotu 1 a tečkovaná (je to pouze hrana CA) má hodnotu 2. Hrany AD a BD v pavučině nejsou. V tabulce je u hrany AD uvedeno číslo -1. To znamená, že hrana DA má hodnotu $+1$. Podobně hodnota hrany CA je 2, neboť tabulka uvádí, že hodnota hrany AC je -2. Hodnoty hran je možné násobit stejným číslem, například plnou šipku ohodnotíme číslem 9 a tečkovanou pak číslem 18. V tom případě je ale nutné příslušně změnit i hodnoty vrcholů.

V tabulce je ještě uvedena *charakteristika pavučiny*. Je to trojice čísel, kde první číslo znamená počet hran o základní hodnotě 1, druhé číslo počet hran o základní hodnotě 2 a třetí počet hran o základní hodnotě 3. Charakteristiku pavučiny lze použít například při klasifikaci pavučin nebo při zkoumání míry náročnosti jednotlivých typů pavučin.

Typ	Hodnota vrcholu				Hodnota hrany						Charakteristika
A1	3	0	1	2	-	1	1	–1	–2	-	3,1,0
A2	4	0	2	3	-	2	1	–1	–2	-	2,2,0
A3	1	0	2	0	-	2	1	2	1	-	2,2,0
B1	0	1	2	1	1	1	–1	1	2	-	4,1,0
B2	0	3	2	1	3	–1	–1	1	2	-	3,1,1
C1	1	2	4	3	1	2	–1	2	3	1	3,2,1
C2	0	2	1	3	1	1	1	3	2	2	3,2,1

Tab. 1

Z každé z uvedených pavučin lze tedy vytvořit více různě náročných úloh. Příkladem může být následující kaskáda osmi úloh vytvořených z pavučiny A1. Úlohy jsou uvedeny v tabulce 2. Zde p = 1 značí, že plná šipka má hodnotu 1 a t = 2 značí, že tečkovaná šipka má hodnotu 2. Pod tabulkou je ke každé úloze uveden didaktický komentář s náznakem řešení a zdůrazněním, co úloha přináší nového.

Úloha	Ú1	Ú2	Ú3	Ú4	Ú5	Ú6	Ú7	Ú8
dáno	B = 3 p = 1	C = 5 p = 1	A = 7 D = 5	A = 8 C = 6	D = 20 B = 10	D = 25 t = 12	A = 78 B = 69	A + B = = 17

Tab. 2

Didaktický komentář k úlohám

Ú1. Přičítáním 1 žák najde $C = 4$, $D = 5$, $A = 6$, pak $t = A - C = 2$, nebo $t = p + p = 2$. První cestu použije žák, který vnímá čísla A, B, C a D jako základní prvek. Druhou cestu použije žák, který vnímá šipky jako základní prvek.

Ú2. Objevilo se i jedno odčítání. $B = C - p = 5 - 1 = 4$.

Ú3. Tři hodnoty nutno najít odčítáním: $t = A - D, C = D - t, B = C - t$.

Ú4. Objevilo se půlení. Nejprve $t = A - C = 2$, pak $p = t : 2$.

Ú5. Narostla čísla a žádný údaj nelze najít přímo z údajů známých. Úloha se stává pro některé žáky úlohou implicitní. Žák hledá p tak, aby $10 + p = C$ a zároveň $C + p = 20$.

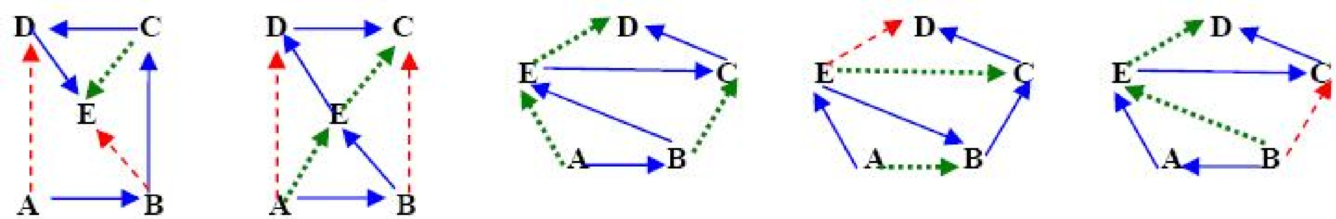
Ú6. Je nutné objevit, že $p = t : 2$. Když zjistíme, že $p = 6$, vše jde již rychle.

Ú7. Narostla čísla a nutno odhalit vztah $A = B + 3p$. Z něj je potřeba nejprve najít pomocnou hodnotu $3p = A - B = 9$ a pak $p = 3$.

Ú8. Náročnost lze stupňovat až na vyšší gymnázium. Ze vztahu $A = B + 3p$ sestavíme diofantickou rovnici $2B + 3p = 17$ a najdeme její tři řešení v oblasti přirozených čísel: $B = 7$, $p = 1$; $B = 4$, $p = 3$; $B = 1$, $p = 5$. V oblasti celých čísel má pavučina nekonečně mnoho řešení: $B = 7 - 3n$, $p = 2n + 1$, kde n je libovolné celé číslo.

Další typy pavučin

Na obrázku 3 jsou pavučiny D1, D2, E1, E2, E3, které obsahují 5 vrcholů a 7 nebo 8 hran.



D1 **D2** **E1** **E2** **E3**

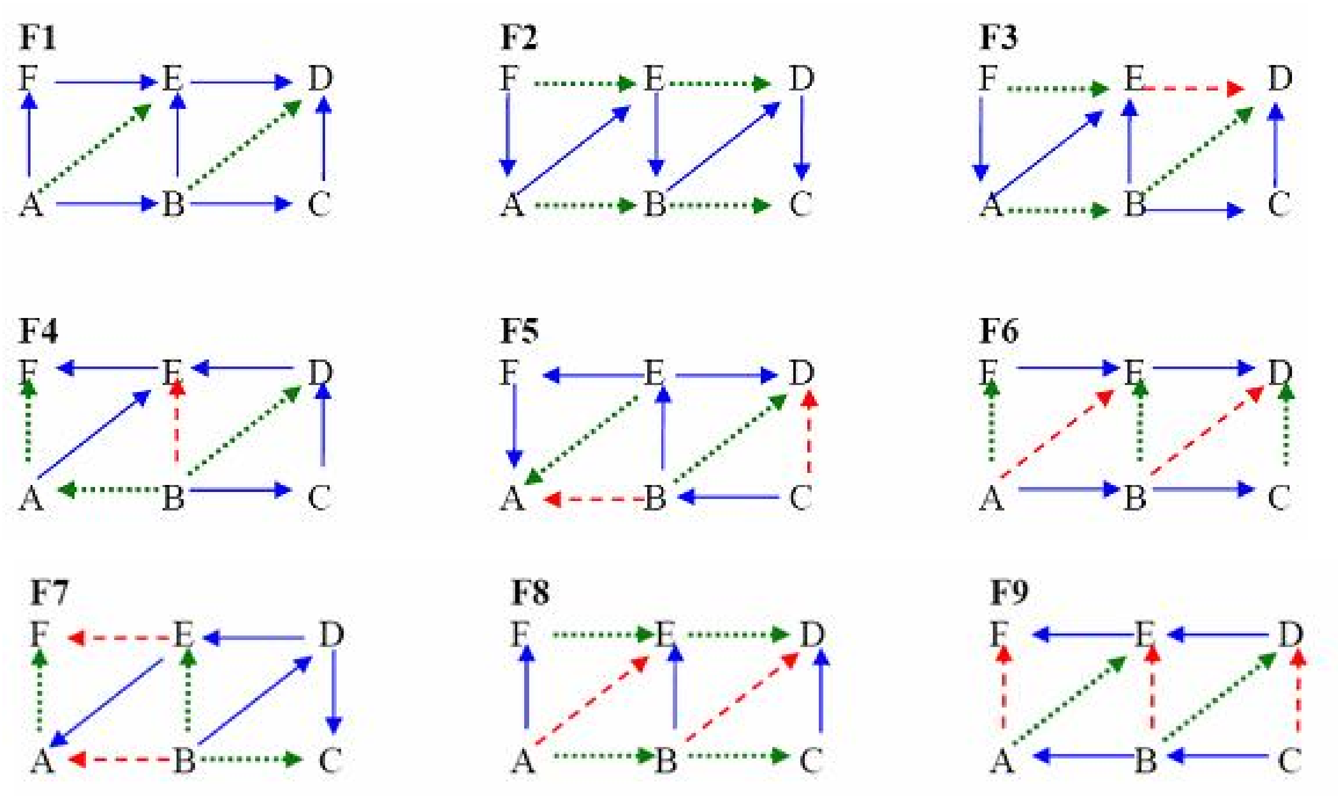
Obr. 3: Další typy pavučin

Základní vazby v jednotlivých pavučinách jsou opět dány v tabulce, ve které lze každý řádek modifikovat tím, že k hodnotě každého vrcholu připočítáme stejné číslo, nebo hodnotu každé šipky vynásobíme stejným kladným celým číslem a hodnoty vrcholů příslušně upravíme.

Typ	Hodnota vrcholu					Hodnota hrany								Charakteristika
	A	B	C	D	E	AB	BC	CD	AD	AE	BE	CE	DE	
D1	0	1	2	3	4	1	1	1	3	-	3	2	1	4,1,2
D2	0	1	4	3	2	1	3	–1	3	2	1	–2	–1	4,2,2
E1	0	1	3	4	2	1	2	1	-	2	1	–1	–2	4,3,0
E2	0	2	3	4	1	2	1	1	-	1	–1	–2	–3	4,2,1
E3	1	0	3	4	2	–1	3	1	-	1	2	–1	–2	4,2,1

Tab. 3

Pavučiny F1 – F9 na obrázku 4 obsahují 6 vrcholů a 9 hran a jejich hodnoty jsou také dány v tabulce 4.



Obr. 4: Pavučiny se 6 vrcholy

Typ	Hodnoty vrchol						Hodnoty hran									Charakte-ristika
	A	B	C	D	E	F	AB	BC	CD	DE	EF	AF	AE	BE	BD	
F1	0	1	2	3	2	1	1	1	1	–1	–1	1	2	1	2	7,2,0
F2	1	3	5	4	2	0	2	2	–1	–2	–2	–1	1	–1	1	5,4,0
F3	1	3	4	5	2	0	2	1	1	–3	–2	–1	1	–1	2	5,3,1
F4	2	0	1	2	3	4	–2	1	1	–1	–1	2	1	3	2	5,3,1
F5	4	1	0	3	2	3	–3	–1	3	–1	1	–1	–2	1	2	5,3,2
F6	0	1	2	4	3	2	1	1	2	–1	–1	2	3	2	3	4,3,2
F7	3	0	2	1	2	5	–3	2	-1	1	3	2	–1	2	1	4,3,2
F8	0	2	4	5	3	1	2	2	1	–2	–2	1	3	1	3	3,4,2
F9	2	1	0	3	4	5	–1	-1	3	–1	–1	3	2	3	2	4,2,3

Tab. 4

Barevné trojice

Ilustrace

Na stole leží 12 barevných karet, na každé kartě je jedno číslo.
Červené (č) karty 1, 2, 3, 8; modré (m) karty: 1, 2, 3, 7; zelené (z) karty 1, 2, 4, 6.
Úkolem je vytvořit trojice tak, aby v každé trojici byla jedna **č**, jedna **m** a jedna **z** karta a aby součet všech tří čísel v každé skupině byl 10.

Matematický popis prostředí

Je dána matice typu m x n, jejíž prvky jsou přirozená čísla. Hledáme takový soubor permutací čísel každého řádku kromě prvního, aby součet čísel v každém sloupci byl stejný.

Například úloha z ilustrace je dána maticí typu 3 x 4: $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{matrix}$

Řešením jsou permutace: druhý řádek (7 2 3 1), třetí řádek (2 6 4 1).

Didaktické cíle prostředí barevných trojic

Zde jsou didaktické cíle skrovnější než u pavučin. Kromě sčítání a porovnávání je zde zastoupena kombinatorika a logika. Hlavím didaktickým cílem těchto úloh je budování schopnosti tvořit řešitelské strategie. To ukážeme na příběhu, který je zkonstruován z mnoha našich zkušeností. Aktéry příběhu jsou žáci Adam a Elsa, kteří odhalí tři různé řešitelské strategie.

1. **Pokus omyl**

   Žák Adam vezme do ruky č3 (červená trojka), protože leží nejblíže. Pak vezme m7 (modrá sedmička) a tuto dvojici odloží bokem. Podívá se na kamaráda a vidí, že ten dává dohromady tři lístečky. Vezme tedy dvojici č3, m7 a hledá mezi zelenými čísly nulu. Nenajde ji. Odloží obě čísla, která drží, chvíli se dívá na karty a bere do ruky č8.

2. **Extrémní čísla**

   Adam přechází na novou strategii – začíná s největším číslem, které je na stole. Po chvíli k němu bere karty m1 a z1. Karty položí a kontroluje součet. Pak celou trojici odloží. Na stole zůstává 9 karet: č – 1,2,3; m – 2,3,7; z – 2,4,6. Opět bere do ruky největší číslo m7 a k němu č3. Pak č3 odloží a vezme č1 a z2. Trojici položí na stůl, kontroluje součet a dá trojici stranou. Na stole zůstává 6 karet: č – 2, 3; m – 2, 3; z – 4, 6. Adam se na ně chvíli dívá a řekne: „To nejde, čtyřka i šestka jsou obě zelené“. Vzápětí ale řekne objevné „jo“ a dá k sobě trojici (č2, m2, z6) a pak zbylé tři karty.

3. **Majákové spoje**

   Žačka Elsa si prohlíží karty, po chvíli vybere trojici (č2, m2, z6) a dá ji bokem. Pak pokračuje v řešení.

Komentář k Adamovi. Chlapci dělá potíže si uvědomit, že číslo 10 se má vytvořit ze tří čísel. Opakovaně se soustřeďuje na dvojici čísel, které dávají 10.

Komentář k Else. V rozhovoru s dívkou jsme se dozvěděli, že její maminka má v zaměstnání telefonní linku 226 a že již v předškolním věku Elsa věděla, že tato tři čísla dávají 10. Pro dívku je tedy spoj 2 + 2 + 6 = 10 spojem majákovým. Okamžitě naskakuje ve vědomí.

Didaktické nástroje na řešení těchto úloh

Úlohy řešíme již v prvním ročníku, ale pro žáky jsou to úlohy velice náročné, zejména když připouští pouze jediné řešení. Učitel ale může úlohu žákům přiblížit pomocí dramatizace. Dvanáct žáků stojí u tabule tváří ke třídě, každý drží ceduli s jedním číslem. Na jedné straně čísla červená (1, 2, 3, 8), uprostřed čísla modrá (1, 2, 3, 7) a na druhé straně čísla zelená (1, 2, 4, 6). Učitel nejprve ukáže, co je cílem hry. Vybere červenou 1, modrou 3 a zelenou 6 a tito žáci předstoupí. „Jaký je součet těchto tří čísel?“ ptá se učitel. Třída odpoví, že 10. Pak učitel vyzve žáky, aby i oni z těchto 12 čísel našli jiné tři, jejichž součet je 10 a přitom má každé jinou barvu. Třída najde 2–3 další řešení.

Pak učitel vyzve červenou 8, ať si najde jedno modré číslo a jedno zelené číslo tak, aby společně v součtu dali 10. Číslo 8 si najde obě jedničky. Trojice $8 + 1 + 1$ se postaví stranou a učitel řekne žákům, aby si v učebnici spojili červenou 8, modrou 1 a zelenou 1 a tuto trojici napsali do první řádky. Dále učitel vyzve modrou 7, aby si našla 2 kamarády, červeného a zeleného tak, aby společně v součtu dali 10. Číslo 7 si najde červenou 1 a zelenou 2. Trojice $1 + 7 + 2$ se postaví stranou. Žáci si do učebnic opět tuto trojici zapíší. Učitel potom vyzve zelenou 6 a ta si najde obě dvojky. Trojice $2 + 2 + 6$ se postaví stranou a zbylá trojice $3 + 3 + 4$ pouze prověří, že i ona v součtu dá 10. Před třídou teď stojí čtyři trojice. V každé jsou tři čísla různých barev a každá trojice v součtu dává 10. Úloha je vyřešena. Žáci si kontrolují, zda si to správně zapsali.

Další úlohy

V tomto odstavci předkládáme v úsporné formě 30 úloh i s řešením. Zkušenějšímu řešiteli doporučujeme, aby úlohy sám začal tvořit, čímž nejlépe pronikne do problému.

	červené	modré	zelené		Řešení (začínáme podtrženými čísly)
01	1,2,4,9	0,3,4,9	0,1,2,5		$\underline{9}$+0+1 = 1+$\underline{9}$ +0 = 2+3+$\underline{5}$ = 4+4+2
02	1,2,3,8	1,2,3,7	1,2,4,6	10	$\underline{8}$+1+1 = 1+$\underline{7}$+2 = 2+2+6 = 3+3+4
03	0,2,4,9	0,1,4,9	0,1,2,8	10	0+$\underline{9}$ +1 = $\underline{9}$+1+0 = 2+0+$\underline{8}$ =4+4+2
04	0,1,3,7	0,2,4,8	1,2,3,9	10	1+0+9 = 0+$\underline{8}$+2 = 7+2+1 = 3+4+3
05	0,1,2,7	1,2,6,8,	0,1,3,9	10	1+6+3 = 2+8+0 = 7+2+1 = 0+1+9
06	0,2,3,9	0,2,3,7	1,3,4,6	10	$\underline{9}$+0+1 = $\underline{0}$+7+3 = 2+2+$\underline{6}$ =3+3+4
07	1,2,3,6	1,2,4,7	1,2,3,8	10	1+1+$\underline{8}$ = 2+$\underline{7}$+1 = $\underline{6}$+2+2 = 3+4+3
08	1,2,3,7	0,3,5,8	1,2,3,5	10	1+$\underline{8}$+1 = $\underline{7}$+0+3 = 2+3+5 = 3+5+2
09	0,3,4,6	1,2,3,7	2,3,4,5	10	$\underline{0}$+7+3 = $\underline{6}$+2+2 = $\underline{3}$+3+4 = 4+1+5
10	0,1,2,9	0,5,6,8	0,1,3,5	10	$\underline{9}$+0+1 = $\underline{1}$+6+3 = $\underline{0}$+5+5 = 2+8+0
11	1,3,5,6	0,2,4,6	1,3,4,5	10	6+0+4 = 3+6+1 = 1+4+5 = 5+2+3
					6+0+4 = 3+2+5 = 1+6+3 = 5+4+1

12	0,1,5,8	0,1,2,10	1,2,4,10	11	0+10+1 = 1+0+10 =8+1+2 = 5+2+4
13	1,3,4,10	0,2,3,7	1,3,4,6	11	$\underline{10}$+0+1 = 1+$\underline{7}$+3 = 3+2+$\underline{6}$ =4+3+4
14	0,2,3,9	1,3,4,8	1,3,4,6	11	$\underline{9}$+1+1 = 0+$\underline{8}$+3 = 2+3+$\underline{6}$ =3+4+4
15	0,1,2,9	0,5,6,8	1,2,4,6	11	$\underline{9}$+0+2 = $\underline{1}$+6+4 = $\underline{0}$+5+6 = 2+8+1
16	0,2,3,6	2,3,4,9	0,3,4,8	11	2+$\underline{9}$+0 = 0+3+$\underline{8}$ = 6+2+3 = 3+4+4
17	1,2,3,7	1,4,6,9	1,2,3,5	11	1+$\underline{9}$+1 = $\underline{7}$+1+3 = 2+4+5 = 3+6+2
18	1,2,3,7	0,3,5,8	2,3,4,6	11	1+$\underline{8}$+2 = $\underline{7}$+0+4 = 2+3+6 = 3+5+3
19	0,3,4,6	1,2,3,7	3,4,5,6	11	$\underline{0}$+7+4 = $\underline{6}$+2+3 = $\underline{3}$+3+5 = 4+1+6
20	1,4,5,7	1,2,3,7	2,3,4,5	11	$\underline{1}$+7+3 = $\underline{7}$+2+2 = 4+3+4 = 5+1+5
21	3,4,5,6	2,3,4,7	1,2,3,4	11	6+3+2 = 5+2+4 = 3+7+1 = 4+4+3
					6+2+3 = 5+4+2 = 4+3+4 = 3+7+1
22	1,3,5,6	0,2,4,6	2,4,5,6	11	6+0+5 = 3+6+2 = 1+4+6 = 5+2+4
					6+0+5 = 3+2+6 = 1+6+4 = 5+4+2

23	0,1,5,8	1,2,3,11	1,2,4,10	12	0+11+1 = 1+1+10 =8+2+2 = 5+3+4
24	2,4,5,11	0,2,3,7	1,3,4,6	12	11+0+1 = 2+7+3 = 4+2+6 =5+3+4
25	0,1,5,8	0,1,2,10	2,3,5,11	12	0+10+2 = 1+0+11 =8+1+3 = 5+2+5
26	1,2,6,9	0,1,2,10	1,2,4,10	12	1+10+1 = 2+0+10 =9+1+2 = 6+2+4
27	1,2,3,10	0,5,6,8	1,2,4,6	12	10+0+2 = 2+6+4 = 1+5+6 = 3+8+1
28	2,3,4,8	1,4,6,9	1,2,3,5	12	2+9+1 = 8+1+3 = 3+4+5 = 4+6+2
29	1,2,3,7	1,4,6,9	2,3,4,6	12	1+9+2 = 7+1+4 = 2+4+6 = 3+6+3
30	3,4,7,8	0,2,4,6	2,3,4,5	12	4+4+4 = 3+6+3 = 7+0+5 = 8+2+2
					4+6+2 = 8+0+4 = 7+2+3 = 3+4+5

Závěrem

Obě dvě uvedená prostředí jsou rozpracována v učebnicích matematiky z nakladatelství Fraus v současné době pro 1. – 3. ročník. Například pavučina z obrázku 2 je z učebnice pro 2. ročník, 1. díl, s. 56. Mimo tyto učebnice úlohy z obou prostředí, ale zejména z prostředí pavučin, s úspěchem používala ve výuce v 5. ročníku i ve svých výzkumech Eva Bomerová ze ZŠ Dědina. Prostředí pavučin bylo také hlavním tématem otevřené hodiny v rámci semináře.

Článek prezentuje výsledky výzkumu, který byl podpořen výzkumným záměrem *Učitelská profese v měnících se požadavcích na vzdělávání* MSM 0021620862.

Řešení slovních úloh s antisignálem žáky na 1. stupni ZŠ

Sylva Chaloupková[1]

Slovní úlohy tvoří významnou součást učiva nejen základní školy. Na 1. stupni jsou též nepostradatelnou součástí a na rozdíl od ostatních tematických celků prostupují téměř celou škálu témat učební látky. Slovní úlohy představují jedinečnou příležitost propojit a aplikovat ve škole získané poznatky s realitou. Umožňují také řešit reálné situace ze života a připravovat se tak na řešení problémů a překážek, které se v budoucnu

[1]sylva.chaloupkova@centrum.cz

člověku postaví do cesty. V případě kvalitního konstruktivního vedení třídy učitelem otvírají slovní úlohy prostor k diskusi odhalující různé způsoby uvažování žáků i jejich možné problémy. Společná diskuse nad slovní úlohou tak přináší nejen nápravu chyb bez přímého zásahu učitele, ale dává žákovi rovněž možnost nacházet si vlastní strategie pro příští, samostatné řešení.

Zkušenosti však ukazují, že ve školní praxi málokterý žák přistupuje ke slovním úlohám bez obav a s chutí je řešit. Většina z nich dá přednost mechanickému řešení sloupců početních příkladů o nejrůznějších početních operacích před slovní úlohou, která třeba i řeší problémy jejich běžného života. A i když jsou k řešení úlohy donuceni, málokterý z nich úlohu dořeší. Jejich odpovědí pak je, že slovní úlohy jsou těžké a že tomu nerozumí. Nastává zde tedy rozpor mezi tím, co slovní úlohy mohou přinášet, a tím, jak jsou ve skutečnosti vnímány.

Pracovní dílna byla zaměřena na specifickou skupinu slovních úloh, a to *slovní úlohy s antisignály* (Hejný, Kuřina, 2001). Ve slovních úlohách se často objevují slova, jež poukazují na operaci, kterou je nutné k řešení použít. Jde například o slova jako přidat, výše, vystoupat, přistoupit, zvětšit. . . , která všechna poukazují na operaci sčítání. Nebo o slova ubrat, níže, klesat, vystoupit, zmenšit. . . , která všechna poukazují na operaci odčítání. Taková slova nazýváme *signálem*. Jestliže je však příslušné slovo vázáno na operaci opačnou, než je ta, na kterou slovo poukazuje, pak toto slovo nazýváme *antisignálem*. Slovní úlohy s antisgnálem činí žákům při řešení často velké problémy. Jde totiž o specifickou skupinu slovních úloh, kde není možné využívat naučeného způsobu řešení pomocí signálních slov, ale naopak je nutné úplné porozumění problému v dané úloze. Slovní úlohy s antisignály je proto možné využít i pro diagnostiku formálně získaných poznatků v matematice.

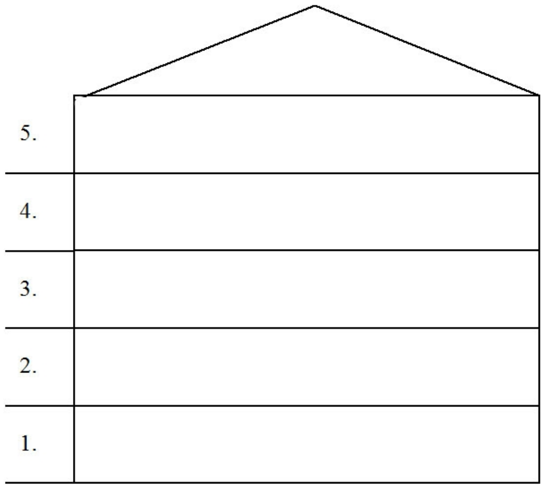
Účastníci pracovní dílny měli možnost shlédnout videozáznam, který zachycuje řešení série 4 slovních úloh s antisignálem žákem 2. ročníku základní školy. Tento videozáznam byl poté pouštěn po malých sekvencích za účelem popsat jednotlivé jevy i problémy při řešení žáka a pokusit se společně hledat možné příčiny těchto nesnází. Videozáznam se tak tedy snaží pomocí této jedné ukázky nahlédnout do některých problémů, s nimiž se žáci na 1. stupni základní školy jako řešitelé mohou potýkat.

Nejdříve byl představen pracovní list s jednotlivými úlohami. Jeho součástí byl nákres vícepodlažního domu – obchodního domu, kdy úkolem řešitele je zjisti podle zadání úloh pod obrázkem, v jakém podlaží obchodního domu se nachází který obchod. Pravidlem je, že v každém podlaží bude pouze jeden obchod. Toto pravidlo bylo pro žáky stanoveno proto, aby v případě špatného řešení některé z úloh si žák sám na chybu přišel a i si ji opravil. Podotýkám, že toto byla má původní představa o výhodě zapisování řešení do podlaží jednoho obrázku domu, která se však nepotvrdila. V zadání úloh je užíván termín podlaží a ne patro. Termín patro je sice žákům bližší, ale je zavádějící. Pokud totiž řekneme, že někdo bydlí v 1. patře, bydlí ve 2. podlaží. Podlaží používám proto, že odpovídá tomu, co řešitel vidí na obrázku. Vidí 2 kolonky, tedy mluvíme o 2. podlaží.

Vítejte v našem obchodním domě

Jméno: ______________________________

Datum: ______________________________



Zjisti, v kterém podlaží je jaké oddělení, když víš….

1. Oddělení hraček je ve 3. podlaží, a to je o 2 podlaží výše než oddělení potravin. Ve kterém podlaží je oddělení potravin?

2. Pokud se v oddělení sportu rozhodnu podívat ještě do oddělení hraček, musím sejít 2 podlaží. Kde je tedy oddělení sportu?

3. Už vím, kde je oddělení potravin i sportu, ale potřebuji ještě zjistit, kde si mohu nakoupit oblečení. Když jsem se zeptala na informacích, poradili mi, že oddělení potravin je o 3 podlaží níže než hledané oddělení s oblečením. Najdeš již oddělení s oblečením?

4. Pokud jsi doposud postupoval správně, vyjde ti, že oddělení, kde si můžeš koupit knihy, je umístěno tak, že abys odtud došel do oddělení s oblečením, musíš vystoupat 2 podlaží. Kde je tedy oddělení s knihami?

Následující řádky jsou věnovány evidenci některých fragmentů videozáznamu doplněné komentáři. V komentářích je možné nalézt některé z možných náhledů na popisované jevy s cílem hledat jejich příčiny. V zápisu rozhovorů v experimentu je používáno písmeno E pro označení toho, co říká experimentátor, a písmeno N pro výpovědi řešícího chlapce Nikolase.

Úloha 1

Evidence

Po seznámení se všemi instrukcemi se Nikolas ihned pustí do čtení zadání první úlohy. Je však ještě vyrušen instrukcí, že si má vzít tužku, zároveň s prosbou, aby četl nahlas.

Komentář

Instrukce, aby si vzal tužku, je zbytečná. Zaprvé by experimentátor neměl vstupovat do žákova přemýšlení, a zadruhé by ho měl nechat, aby si vzal tužku, až sám ucítí potřebu si řešení zapisovat. Dalším poznáním zde tedy je omezit přílišnou snahu instruovat žáka a říkat mu přesně, co kdy má dělat. Pokud by Nikolas tuto instrukci nedostal, mohl by experimentátor navíc ještě sledovat, kdy nastane okamžik potřeby si zapisovat.

Důvodem žádosti o čtení zadání nahlas, stejně tak jako o hlasité komentování řešení je, aby bylo možné lépe sledovat, nad čím žák přemýšlí nebo zda zrovna neví, jak dál.

Evidence

Přečte celé zadání. Následuje rychlé přelétnutí textu očima a hned odpověď, že v *pátým podlaží*. Spolu s tím zaměří pohled na experimentátora a čeká, jak bude jeho odpověď přijata.

Namísto souhlasného nebo nesouhlasného přikývnutí dostane další otázku.

E: „A co si myslíš, že je v pátým podlaží?“

N: (pohled do textu) „Oddělení potravin.“

Komentář

Při čtení nahlas přečte zadání úlohy správně. V momentě, kdy ale prolétává text znovu jen očima, čte již 1. souvětí jako 2 věty oddělené tečkou. Oddělení hraček je ve 3. podlaží. O 2 podlaží výše je oddělení potravin. Druhou větu prvního souvětí, v níž je přítomen antisignál, si tedy interpretuje tak, aby byla signální.

Na úlohu reaguje velmi rychle, přičemž v jeho odpovědi se dozvídáme 5. podlaží bez udání dalšího vysvětlení. Experimentátor ale v úloze vnímá 2 problémy, kterých je třeba si povšimnout, tedy umístění hraček do 3. podlaží a pak oddělení potravin. Pro jistotu se tedy ještě zeptá, co je v tom 5. podlaží, aby bylo jasné, že oba uvažují o tom samém.

Nikolasův pohled na experimentátora při vyřčení odpovědi jasně naznačuje, že je chlapec zvyklý na vnější kontrolu. Pravděpodobně tedy poté, co něco vypočítá nebo udělá, dostává od učitele ihned zpětné zhodnocení. Zřejmě tedy nebude zvyklý zaměřovat se na vlastní kontrolu své práce.

EVIDENCE

Nikolas je vyzván, aby do obrázku do příslušných podlaží zapsal umístění zjištěných oddělení. Zapisuje pouze potraviny do 5. podlaží. Hračky zatím do žádného podlaží neumísťuje.

KOMENTÁŘ

Při výpočtu setrvává paměťová stopa, že hračky jsou ve 3. podlaží, čemuž napomáhá i pro představu obrázek, a tak nemá potřebu si hračky přímo psát.

EVIDENCE

Chlapec má vysvětlit, jak tuto úlohu řešil.

E: „Mohl bys mi ještě říct, jak jsi na to přišel? Že je to právě v pátém podlaží?“
N: „Normálně příkladama.“
E: „Jako z toho zadání, nebo jak to myslíš?“
N: „Jako normálně příklady, že se to vypočítá.“
E: „A jak?“
N: „Jak?“
E: „No.“
N: „Že tři a dva je pět.“
E: „Super.“

KOMENTÁŘ

Příčinou nedorozumění v tomto rozhovoru je, že otázka experimentátora je kognitivní, zatímco odpověď Nikolase již metakognitivní. Na otázku, jakým způsobem to řeší, odpovídá, že přeci tak jako vždy. Dává tedy mnohem hlubší informaci, než experimentátor očekává. Slovo příklad je mu zde zřejmě sloganem, který s paní učitelkou používají pro řešení úloh.

Na otázku, jak to tedy vypočítal, je ze strany experimentátora očekávána odpověď, že od hraček, které jsou ve 3. podlaží, jdeme o 2 podlaží výše do potravin. Očekáváno je slovo výše, protože 5, které uvedl jako řešení 1. úlohy, nasvědčovalo nerozpoznání antisignálu a tedy i operaci sčítání. On ale na otázku o postupu řešení reaguje matematicky, že 3 a 2 je 5. Má pravdu, 3 a 2 je skutečně 5. Je za to pochválen, protože tím bylo zdánlivě ověřeno očekávání o nerozpoznání antisignálu. Ve skutečnosti ale dostává pochvalu za to, že umí správně sčítat. Je tedy chválen za něco, co by už měla být jasná samozřejmost. Přitom při řešení vůbec sčítání použít neměl. To už se ale nedozví. On je tedy spokojen, že jeho řešení bylo pochváleno, je tedy nejspíš správné, a experimentátor má pocit, že nevystoupil z role experimentátora, tedy že neupozornil řešitele na to, že neřešil správně. Přičemž již zde je možné sledovat rozdíl mezi tím, jak oba celou situaci vnímají, a tím, co si z ní odnášejí.

Úloha 2

Evidence

Opět přečte celé zadání. Druh číslovky na konci 1. souvětí čte nesprávně. Druhovou číslovku zaměňuje za řadovou, a tak místo sejít 2 podlaží čte sejít 2. podlaží. Téměř okamžitě po dočtení odpovídá na otázku.

N: „Ve druhým. Myslim. Nevim."

Následuje krátký pohled na experimentátora, ale jelikož z jeho strany nedochází ke komunikační vstřícnosti, znovu se sklání nad text.

Komentář

Oproti předchozí úloze je zde možné pozorovat již podstatně nižší jistotu. I čekání na odpověď, která je stále velmi rychlá, je o něco delší než v předchozím zadání.

Evidence

Text čte nyní znovu potichu sám pro sebe. Mezi tím, kdy se znovu skloní nad text, a než odpoví, uběhne přibližně 35 sekund. Během této doby očima projde text a tužkou si ukazuje pohyb o 2 podlaží od 3. směrem dolů. Znovu si polohlasně přečte i otázku úlohy. Potom se zaměří na slovo sejít.

N: (říká si sám pro sebe) „Sejít. . . To je nahoru nebo dolu? (letmý pohled na experimentátora) Dolu. Takže oddělení sportu je v prvním."

Opět pohled na experimentátora, jestli mu odpověď schválí.

Komentář

Slovo sejít mu znemožňuje, aby napsal oddělení sportu přímo do 2. podlaží, jak původně říkal. Toto slovo u něj působí jako *alert*, takže se na něj více zaměří. Má ale trochu problém s abstraktní představivostí, musí se tedy soustředit na význam tohoto slova. Přemýšlí, který směr slovo sejít vlastně znamená, zda jde o pohyb vzhůru nebo dolů. Nakonec slovo sejít vyřeší správně, je to pohyb dolů. Zřejmě ale většinu své energie spotřebuje na porozumění tomuto slovu, takže se více nezaměřuje na jeho užití v kontextu úlohy. I k této slovní úloze, která je s antisignálem, přistupuje signálně. Zaměří se na slovo sejít, předtím vidí uvedené hračky, tedy sejít z hraček o 2 podlaží a dostane se do sportu. Zaměňuje tak hračky a sport, tedy to odkud kam jdeme.

Důvodem umístění sportu do 1. podlaží může být též to, že 5. podlaží je již obsazeno oddělením potravin. Jde o didaktický kontrakt. To, co je už napsané, se nemění. Vůbec ho nenapadne, že už v předchozím by mohla být chyba, protože v tom případě by ho to autorita přeci nenechala napsat.

ÚLOHA 3

EVIDENCE

Po přečtení 3. úlohy Nikolas ihned neodpovídá. Naopak čte celé zadání ještě jednou. Pak asi 10 sekund přemýšlí a odpovídá, že ve 2. podlaží. Bez vyzvání oddělení oblečení zapisuje do 2. podlaží.

Obr. 2: Nikolas

KOMENTÁŘ

Zadání této úlohy je již delší než u předchozích úloh. Cesta slov této úlohy pro Nikolase není příliš schůdná a energetická dotace také ubývá. Z toho důvodu si musí celé zadání přečíst ještě jednou a tentokrát již se snahou po porozumění sdělení. I čekání na odpověď je mnohem delší než v předchozích případech.

EVIDENCE

E: „Teď bylo vidět, že si nad tím nějak přemýšlel, a mě by zajímalo, jestli bys mi dokázal říct, jak jsi přišel na to, že je to ve druhém podlaží. Kdybys mi to měl vysvětlit.“

N: „Protože potraviny. . . jsou. . . v tom poslední patře. Jako v pátym, kdy už to dál nepokračuje. Řekli. . . je o tři podlaží níže než hledané oddělení s oblečením.“ (Tuto část čte z textu a ukazuje si v něm prstem.) „Takže to bude. . . ve druhym.“

KOMENTÁŘ

V tomto případě příliš neuvažuje nad samotným obsahem textu, ale spíše se hodně orientuje podle obrázku. Pohledem do obrázku zjistí, že potraviny jsou úplně nahoře. Od potravin jít tedy nahoru již nemůže. V textu si najde informaci o 3 podlaží níže.

Z potravin sejde 3 podlaží směrem dolů a je spokojený, protože tady volné políčko má. Zadání si tak přizpůsobuje obrázku, aby mu to vycházelo.

Úloha 4

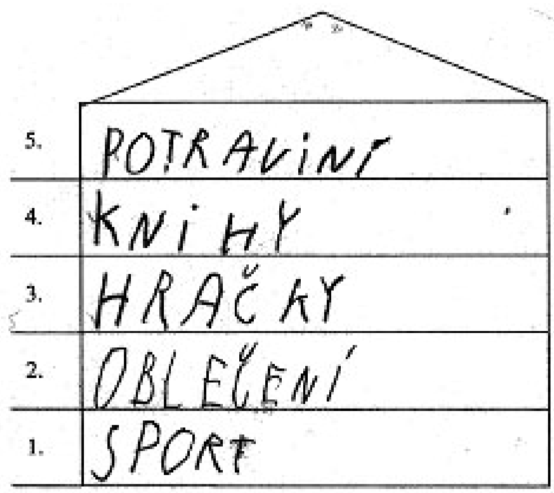
Evidence

Přečte celé zadání, přičemž se na chvíli zarazí před slovem vystoupat. Po dočtení stejně jako u prvních 2 úloh ihned dává odpověď.

Dozvídám se, že oddělení knih je umístěno ve 4. podlaží.

Komentář

Těžko odhadnout, zda se před slovem vystoupat zarazil z důvodu neporozumění nebo kvůli problému se čtením. Každopádně nad odpovědí tentokrát nijak dlouze nepřemýšlí. Nad úlohou nepřemýšlí skoro vůbec. Vidí v obrázku prázdné políčko ve 4. podlaží. Zřejmě nepředpokládá, že by někde v předchozím vyplňování mohla být chyba, takže logicky uvažuje, že pokud v každém podlaží má být jedno z uvedených oddělení, na oddělení knih zbývá 4. podlaží.



Obr. 3: Řešení Nikolase v obrázku obchodního domu

Evidence

Nikolas má znovu popřemýšlet nad svým řešením.

E: „A souhlasí to s tím textem?“

N: „Jo, protože oblečení je ve dvojce a o dvě podlaží řekli,“ (ukazuje na papíře tužkou směrem vzhůru) „jako“, „protože dolu už to nejde. Takže to bude ve čtvrtým. Souhlasí to.“

Komentář

Tento rozhovor jen potvrzuje předchozí komentáře, protože i zde nad samotným porozuměním obsahu textu spíše převládá snaha upravit si zadání tak, aby řešení odpovídalo momentální situaci v obrázku, tedy rozmístění prázdných a volných políček.

V pracovní dílně se kromě jiného otevřela i diskuze nad vhodností pracovního listu. Z komentářů účastníků dílny vyplynulo několik doporučení pro příští experimenty, které korespondovaly s některými poznatky, k nimž jsem během zpracovávání experimentů také dospěla. Všichni se shodli na tom, že formulování zadání úloh v pracovním listě není příliš vhodné pro žáka 2. ročníku základní školy. Zadání jsou příliš dlouhá a pro žáky, kteří mají často ještě problémy se čtením, nesrozumitelná. Bylo by tedy vhodnější souvětí rozdělit do stručných vět jednoduchých. Na základě experimentu s Nikolasem a několika dalších se ukázalo jako velmi svazující poskytnout žákovi pro všechny úlohy jen jeden obrázek, protože se již nevrací k (pro něj) vyřešeným úlohám a neopravuje je. Z toho důvodu byl pro příští experimenty připraven nový pracovní list s novou formulací úloh a se samostatným obrázkem pro řešení každé z nich. Kvalita tohoto pracovního listu však ještě čeká na ověření v experimentech.

LITERATURA

[1] HEJNÝ, Milan, KUŘINA, František. *Dítě, škola a matematika*. Praha : Portál, 2001.

[2] HEJNÝ, M, MICHALCOVÁ, A. *Skúmanie matematického riešitelškého postupu*. Bratislava : Metodické centrum v Bratislavě, 2001.

STRATEGIE ŘEŠENÍ PROBLÉMŮ

RUDOLF CHOUPEK[1]

Potřebujeme vzdělávat studenty, kteří umí myslet kriticky a logicky. Na začátku nového století bude důležitější vědět, jaké otázky klást, než dávat odpovědi na jakoukoliv položenou otázku. Následně i pamětné a mechanické učení musí pomáhat procesům myšlení, objevování a komunikace. Nastal čas pro všechny učitele matematiky od mateřské školy po univerzitu obrátit se ke kurikulu založenému na řešení problémů, které pomůže dětem stát se zdatnými mysliteli [3].

Přední světoví odborníci se shodují v tom, že jádrem klíčových kompetencí pro život a práci v budoucím světě je schopnost řešit problémové úlohy, v nichž se prolínají prvky a pojmy z různých oborů, různé způsoby znázornění a různé postupy řešení. I v běžném životě se často lidé dostávají do situací, kdy musí řešit problémy, které nejsou přesně vymezeny, je třeba hledat nejen data, ale klást si i správné otázky a vyžadují syntézu více oblastí. Na takové situace však škola žáky zatím příliš nepřipravuje, ačkoli již delší dobu pobíhají diskuse o potřebě rozvoje tvořivého myšlení, klíčových kompetencí apod.

[1]Základní škola Jihlava, Kollárova30. rchloupek@zskol.ji.cz

Problémové úlohy nelze jednoznačně zařadit pouze do oblasti čtení, matematiky nebo přírodních věd, jednotlivé obory se v nich prolínají a při jejich řešení musí žáci tvořivě kombinovat vědomosti a dovednosti z různých vyučovacích předmětů [4].

Nejedná se tedy pouze o metodu vyučování matematice, ale o zvyšování kompetence žáků.

Co je problémová úloha?

- Postup řešení není zřejmý na první pohled,
- vyžaduje tvořivé myšlení,
- na řešení mají vliv předchozí znalosti,
- znalosti musí být syntetizovány a aplikovány k dosažení závěru.

Specifické cíle

- Podporovat touhu žáků zkusit problém vyřešit a upevňovat jejich vytrvalost v řešení problémů.
- Podporovat sebepojetí žáků s ohledem na jejich schopnost řešit problémy.
- Seznamovat žáky se strategiemi řešení problému.
- Přesvědčit žáky o významu systematického přístupu při řešení problému.
- Přesvědčit žáky, že mnohé problémy lze vyřešit různými způsoby.
- Zlepšovat schopnosti žáků zvolit odpovídající strategii řešení.
- Zlepšovat schopnost použít různé strategie.
- Zlepšovat schopnost žáků získat a ověřit správné odpovědi.

Kategorie problémových úloh

- **Rozhodování:**
  výběr z více možností (omezující podmínky).
- **Systémová analýza a projektování:**
  identifikace vztahů mezi částmi systému, projektování systému, který splňuje požadované vztahy mezi částmi.

- **Odstraňování chyb:**
  nalezení a opravení chyb špatně fungujícího systému.

Proč zařazovat problémové úlohy?

- Vnější důvody: výstup RVP, výsledky žáků.
- Vlastní důvody: motivace žáků, lepší pochopení pojmů, výchova žádoucích vlastností a schopností žáků.

Jak řešit problémové úlohy?

Obecné kroky postupu:

1. Porozumění situaci, podmínkám, požadavkům a vztahům a jejich identifikace.
2. Znázornění variant, vytvoření systému, analýza vztahů, nalezení řešení.
3. Kontrola a posouzení řešení.
4. Prezentace výsledků.

Strategie řešení problémových úloh

- *„Přehraj si"* problém (manipulace s předměty, modelování, dramatizace, pokusy)
- *Hledej vzorce, řady, vzory, pravidelné opakování* (vytváření pojmů číselných řad, posloupností, hledání obecného vyjádření, příprava na řešení úloh rovnicemi)
- *Přemýšlej a zkoušej* (metoda pokusu a omylu s prověřováním výsledku a postupným přibližováním správnému řešení)
- *Nakresli si obrázek (diagram)* (Jednoduché náčrtky a obrázky pomáhají vizualizovat a následně pochopit problém a nahlédnout jeho řešení.)
- *Seřaď data do tabulky* (Tabulka umožňuje zaznamenat a organizovat informace, takže nalezení pravidel a vztahů je snazší. Strategii použijeme zejména u úloh s větším počtem datových údajů. Zpracování tabulky je rovněž výbornou propedeutikou k hledání vzorců a posléze k funkcím.)
- *Postupné kroky, převedení na známou úlohu* (Tyto problémové úlohy jsou obvykle slovní úlohy, které mohou být řešeny použitím dvou nebo více základních operací. Naší definici problémových úloh příliš neodpovídají, žákům ale často činí potíže stanovit strategii řešení, tj. posloupnost operací (chcete-li algoritmus řešení úlohy.)

- *Speciální strategie* (I když převážná většina slovních úloh řešených na základní škole (ať už problémových nebo klasických) se dá řešit popsanými strategiemi, používáme zejména ve vyšších ročnících i speciální matematické nástroje. Tato kategorie začíná trojčlenkou a pokračuje rovnicemi a jejich soustavami včetně úloh na pohyb, směsi a společnou práci. *Významnou složkou jsou i úlohy z geometri*e – ať už výpočetní (Pythagorova věta, obvody, obsahy, povrchy, objemy), nebo úlohy konstrukční. Do samostatné kategorie je vyčleňuji víceméně uměle. Předpokladem pro úspěšné řešení úloh je totiž znalost řady matematických pouček a také uplatnění výše popsaných strategií.

Je zřejmé, že asi nejde v řadě případů jednotlivé strategie zcela oddělit a často se prolínají, užijeme více strategií najednou apod.

UKÁZKY PROBLÉMOVÝCH ÚLOH

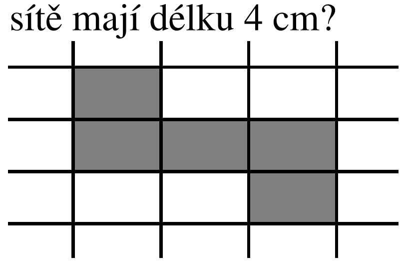
Rozsah příspěvku nedovoluje zde popsat větší množství úloh. Příklady je možno najít na `www.zskol.ji.cz` (text k pracovní dílně). Zde uvádím jen příklady netradičních úloh.

Úloha 1. V kapse mám sedm platných českých mincí. Jejich celková hodnota je 56 Kč. Jaké mince mohu mít v kapse? (Tuto úlohu můžeme různě modifikovat – neurčitý počet mincí, padesátikoruna, alespoň jedna dvacetikoruna apod.)

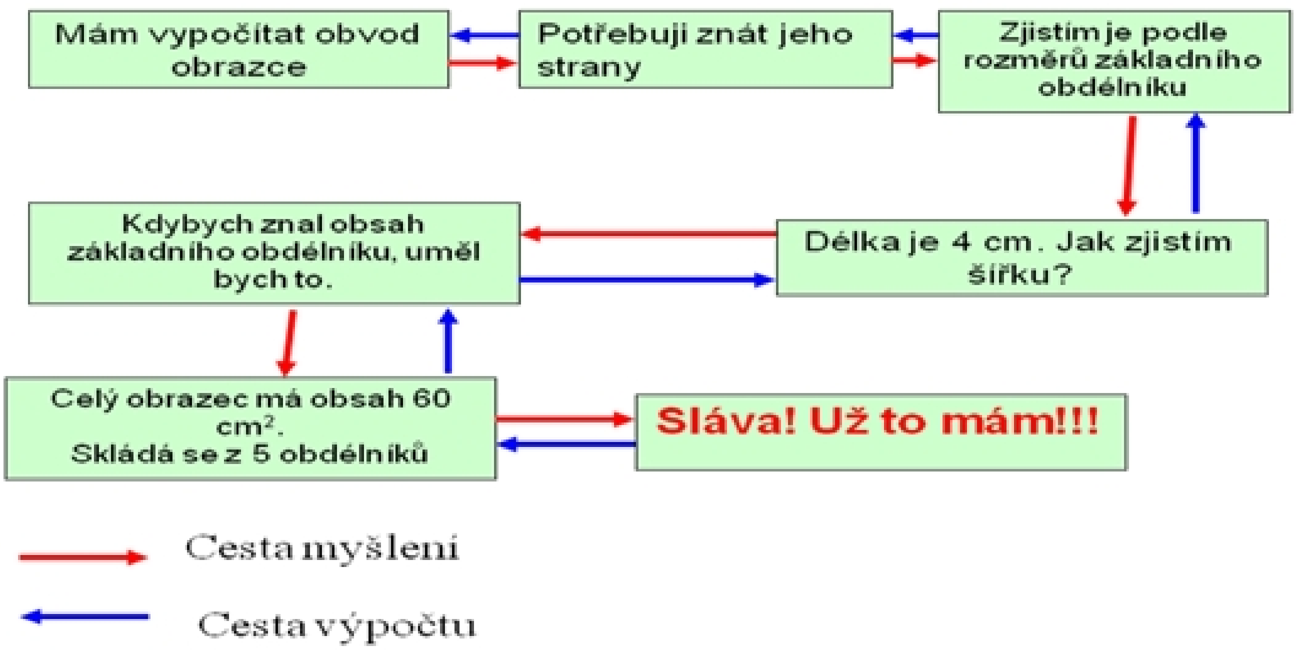
Úlohy tohoto typu se ve školské matematice bohužel příliš neobjevují. Přitom podněcují rozvoj hledání různých cest k řešení, návyky k systematické práci a ověřování vlastních výsledků. K řešení poslouží asi nejlépe tabulka:

	mince						
	1 Kč	2 KČ	5 Kč	10 Kč	20 Kč	50 Kč	**součet**
	6					1	56
počet	2	2		1	2		56
		3		3	1		56

Úloha 2. Vybarvený obrazec v obdélníkové síti má obsah 60 cm^2. Jaký je jeho obvod, jestliže obdélníky obdélníkové sítě mají délku 4 cm?



Uvedená úloha patří k úlohám, k jejichž řešení je potřebný pouze sled výpočtů. Pro žáky je ale problém „konstrukce“ postupu. Postup myšlení a výpočtu je totiž protisměrný. Vhodnou strategií řešení podobných úloh je vytvoření myšlenkové mapy.



Závěr – Jak žáky naučit řešit problémy?

- Řešením problémů,
- používáním různých strategií,
- různými způsoby zadání,
- otevřenými úlohami.

Literatura

[1] Skalková, J.: *Obecná didaktika,* 2. vydání, str. 156–161, Grada, Praha 2007.

[2] Averbach B., Chein O.: *Problem Solving Through Recreational Mathematics*, Courier Dover Publications, 2000.

[3] Coffland, J. A., Cuevas, G. J.: *Primary Problem Solving in Math, Good Year Books*, 1992. Ověřeno 15. 3. 2009

[4] Tomášek, V., Potužníková, E.: *Netradiční úlohy, Problémové úlohy mezinárodního výzkumu PISA,* Praha 2004.

[5] http://lide.uhk.cz/pdf/ucitel/cachoja1/VYUKA.HTM

[6] http://www.mathgoodies.com/articles/problem_solving.html

[7] http://www.techyes.info/rservice.php?akce=tisk&cisloclanku=2007090022

[8] http://library.thinkquest.org/25459/learning/

[9] http://math.about.com/od/1/a/problemsolv.htm

[10] http://nrich.maths.org/public

OTEVŘENÉ HODINY SPOJENÉ S PRACOVNÍ DÍLNOU – FRAKTÁLY A MATEMATICKÝ SLOH

MICHAELA KASLOVÁ[1]

V tomto příspěvku bude popsána otevřená hodina s následnou diskusí. Učitelé sledují hodinu a pracují jako žáci. V průběhu hodiny jsou pro ně klíčová místa komentována.

FRAKTÁLY – ROZŠIŘUJÍCÍ TÉMA V 8. ROČNÍKU ZŠ

STRUKTURA PŘÍPRAVY

Cíl hodiny

1. **ve vztahu k ŠVP opakování**: učivo o trojúhelnících a čtvercích, smysluplnost přesnosti konstrukce a znalosti dělení úsečky na daný počet shodných částí, význam učiva o středních příčkách trojúhelníka, osové souměrnosti, modelování zlomků

2. **nad rámec ŠVP:** objevování vztahu geometrie a algebry, narůstání plochy přidáváním přesně vymezených částí, vytváření řad, setkání s nekonečnem, zobecňování, přesah do světů mimo školní matematiku

[1]PedF UK, michaela.kaslova@pedf.cuni.cz

Kontext: Zasazeno do projektu „Od B. Bolsana (160 let od jeho úmrtí) přes Cantora k zajímavým partiím matematiky“. Zpracování osobnosti B. Bolsana se opíralo o informace z jeho životopisu a dat na internetu, charakteristika jeho práce byla hledána ve skriptech pro VŠ, v různých publikacích k dějinám matematiky a internetu a konečně i z kapitol jeho díla *Vědosloví* vybraných samotnými žáky (největší diskuse byla k postoji o existenci více pravd). Na kapitolu o usuzování navázala hodina s takto vystavěnými slovními úlohami. Fraktály navazují na žáky objevenou zmínku o nekonečnu. Do této míry se vlastně žáci podílejí na nasměrování projektu.

Předchozí hodiny: 1. pololetí – práce ve skupinách: Bolsano (viz třídní nástěnka a `www.branajazyku.cz`); 2. pololetí – práce jednotlivců nebo dvojic v počítačové pracovně s využitím internetu:

a) Cantor a jeho úsečky ve spojení se zlomky, kde žáci dospěli k řadě vyjadřující délku grafického součtu

b) fraktály (fraction – zlomek) cesta od matematiky k výtvarnému umění (Francie – obrazy, Itálie – podlahy chrámů), fraktály v přírodě (brokolice, kapradí), fraktály kolem nás (barevná hudba), povinné adresy. . . Dále práce na internetu dle výběru žáků (nečastěji pod heslem fraktály-obrázky). Společně analyzované fraktály: Sierpinského koberec, Mengerova houba, Hausdorfův čtverec, Kochova křivka, výběr z této hodiny prezentován na nástěnce školy

Vytvoření podmínek pro uplatnění efektů: Aha efekt, Jsem lepší; barva – facilitátor objevování a zobecnění.

Pomůcky: Žáci: pomůcky na rýsování a pastelky nebo barevné fixy. Učitel připraví rozkreslení části každého fraktálu tak, aby bylo možné odvodit postup (obrázek není celý, aby byl výsledek pro žáka překvapením i odměnou, příliš informací v obrázku rozptyluje a unavuje oko), dále učitel připraví 2 možnosti vybarvení části jednoho fraktálu tak, aby působil inspirativně pro žáky a nepřímo instruktivně tak, aby barva umocnila objevení řady.

Organizační formy: od frontální práce k převaze práce ve dvojicích v oblasti porady, tvorby fraktálu individuálně

PRŮBĚH HODINY

Úvod (frontální práce). Stručné shrnutí toho, co si žáci pamatují o fraktálech.

Instruktážně motivační část (kombinace frontální práce a diskuse ve dvojicích). Na tabuli jsou žákům postupně nabídnuty 4 fraktály tak, že žáci sledují jejich vytváření na bázi náčrtku. Fraktály nejsou rýsovány, nejsou ani připraveny na tabuli předem z následujících důvodů: a) hotový obrázek neumožňuje proniknout do postupu a slovní instruktáž dnešní žáky velmi paměťově zatěžuje, je u nich více rozvinuta obrazová dynamická paměť, opírající se o poměrně rychlou sekvenci obrazů doprovázených rytmickým komentářem; b) přesně narýsovaný obrázek je obtížnější k dekódování a nemotivuje tolik jako esteticky provedený náčrt; vzor, který nedává šanci k lepší kopii, je pro řadu žáků mírně nemotivující (efekt „jsem lepší“).

Hlavní část (diskuse ve dvojicích, individuální technické řešení). Žáci si vybírají z nabídky na tabuli a dostávají k tomu i vzor načrtnutý ve čtvercové síti. Záleží na dvojici, zda chce pracovat na stejném fraktálu, a tedy vytvořit možnost pro diskusi k volbě postupu v konstrukci, nebo volit každý jiný a pracovat samostatně (což nevylučuje poradu ze strany učitele či souseda). Žáci rýsují vybraný fraktál na bílý papír, zpravidla komentují, co dělají, ukazují si v obrázku, dodatečně někteří objevují shodnost částí, i když se o tom několikrát v předchozí hodině hovořilo při sledování fraktálů na internetu (nestačilo, k objevu dochází až v průběhu rýsování). Vybarvování částí je inspirováno předlohou, ale žáci si volí své barevné pojetí. Průběžná kontrola, pochvala, prezentace, odpovídání na dílčí dotazy. Na dotaz, zda je možné rýsovat ještě jiný fraktál, než je v nabídce, byl žákům nabídnut čtvrtý obrázek – fraktál šestiúhelníkový.

Shrnutí a pochvala. Ti, kteří nestihli práci vybarvit, dokončí doma. Ve všech případech (až na jednoho problémového žáka bez pomůcek, který pracoval metodou črtání ve čtvercové síti) byly výsledné „obrázky“ nadprůměrně přesně a tence prorýsovány. Žákům bylo přislíbeno vystavení jejich prací nejen na nástěnce ve škole, ale i na portálu školy.

Reflexe. Prokázalo se, že smysluplnost přesnosti práce je opravdu úzce spojena s tvorbu fraktálů. Ukázalo se, že práce ve dvojicích, které jsou si postupem nejisté, je funkční. Náročnost vybraných fraktálů je přiměřená – hodnotíme takto z důvodů, že se ve třídě nevyskytl moment, kdy by si žáci nevěděli rady nebo si nedokázali vzájemně pomoci. Průběžné porovnávání postupů ve dvojici, kde pracovali na stejném fraktálu, se ukázalo efektivní. Dělení celku na stejné části vyžadovalo v některých krocích konstrukci, protože měření nevycházelo v celých centimetrech. Některým žákům by možná lépe vyhovovalo pracovat na větší ploše i za cenu menších nepřesností.

Ohlasy žáků mimo hodiny během dne na chodbách školy:

Ch: Dá se to naprogramovat? Abych nemusel rýsovat. Co k tomu potřebuju (chápej, co musím umět z matematiky)?

D: Kdy budem eště dělat s nekonečnem?

Ch: Jsou k tomu knihy, jako kde?

Ch: Musí se to vybarvovat, mně se to líbilo tou tužkou… (žák,který nerad vybarvuje a navíc pracoval tentokrát výjimečně přesně)

D: Kde to vystavíme? Můžou se podívat rodiče?

D: Je to hrozný, jak se to opakuje, a je to jiný.

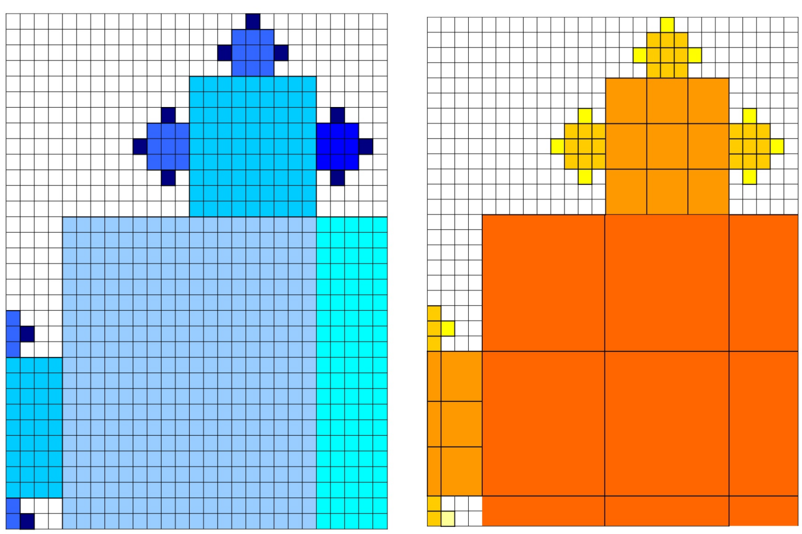
D: Děsná práce. Nakonec to bylo hezký.

D: Ty barvy se pěkně měnily, takhle by mě to nenapadlo.

Ch: Dá se vymyslet vlastní (fraktál)?

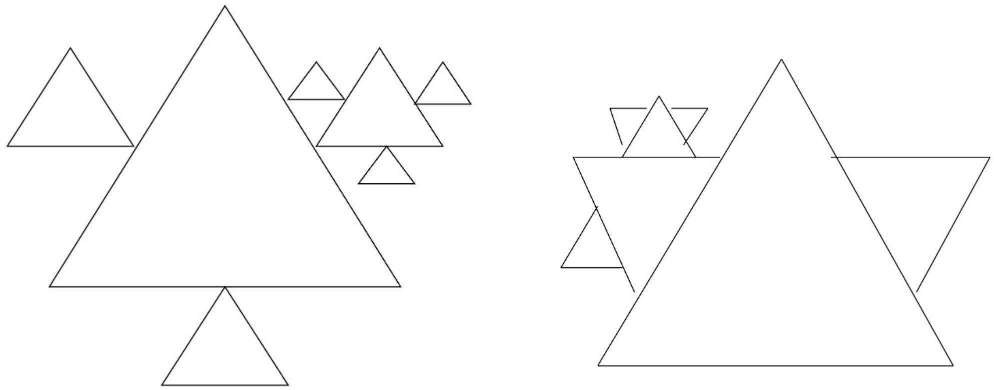
Návaznost a další využití

Po této hodině bude následovat výstava prací, analýza vzhledem k vybarveným plochám a k popisu rostoucí plochy pomocí řad.



Obr. 1 a 2: Čtvercové fraktály

K obrázku 1 a 2 – řada $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$, pro $(n+1)$ní člen $\frac{1}{2^n}$ $\forall n \in N_0$). K obrázku číslo 2 – řada $1 + 4 \cdot \frac{1}{9} + 12 \cdot \frac{1}{81} + 36 \cdot \frac{1}{729}$, pro každý nový typ přidaného dílku platí popis pomocí zlomku $\frac{1}{3^n}$.



Obr. 3 a 4: Trojúhelníkové fraktály

K obrázku číslo 3: $\frac{1}{1}+3\cdot\frac{1}{4}+2\cdot3\cdot\frac{1}{16}+2\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{32}$, popis každého přidaného dílku nového typu je představován zlomkem $\frac{1}{2^n}$. Zvlášť se budeme věnovat fraktálu obrázku číslo 4, který směřuje k řadě $\frac{1}{1}+3\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\frac{1}{16}+12\cdot\frac{1}{32}\ldots$, kde jsou nové díly charakterizovány stejně jako u obrázků 1 a 3. Objevení však není tak snadné, pro slabší je připravena trojúhelníková síť (rovnostranné trojúhelníky). Předpokládá se diskuse, jak je možné, že dva různé fraktály se mohou vázat ke stejné řadě. V případě příznivého klimatu zkusíme vytvořit nový fraktál k téže řadě.

Pro nadprůměrné žáky se dotkneme intuitivně uvození limity. Zamyslíme se také nad růstem obvodu u jednoho z obrázků.

Matematický sloh v 7. ročníku ZŠ

Výchozí situace

Suplování českého jazyka matematikem (3. vyučovací hodina). Využití návaznosti na projekt „Geometrie a umění“. Sledovaní žáci zatím mají v tomto roce za sebou část projektu *Geometrie a umění*: výstava grafiky pod tímtéž názvem, listopad 2008, Praha 1, Betlémské náměstí, dále procházka centrem s objevováním kubistické architektury (sledování, dotýkání prvků fasády), práce s interaktivní tabulí a hledání prvků geometrie v architektuře baroka a renesance, tvorba vlastní grafiky s podmínkou, že bude použito pouze geometrických rovinných útvarů (na barevnosti nezáleží); promítání naskenovaných prací, sledování Vasarelyho děl na internetu, tvorba básně na vybrané téma (trojúhelník nebo čtverec) – minimálně čtyřverší; návštěva výstavy Artěl v UMPRUM Praha 1 – leden 2009, pozorování, jak se zobrazuje těleso při zakreslování do roviny; tvorba kompozice těles nebo návrh na objekt denní potřeby ve stylu kubismu.

Hodina českého jazyka s matematickým zaměřením

Toto zpracování navazuje na experimenty prováděné koncem osmdesátých a počátkem devadesátých let, kdy se ukázalo, že žáci daleko otevřeněji prezentují své představy o světě geometrie v rámci slohu, než když odpovídají na otázky typu: „Co víš o. . . ?“ Výsledky byly prezentovány na mezinárodní konferenci ERCME v Poděbradech. Po rozšíření experimentů se významně prokázalo, že u třetiny žáků pátých ročníků splývá svět roviny a prostoru. Žáci toto zdůvodňovali tím, že tak to brali v mateřské škole. K podobným závěrům s časovým odstupem došla i diplomantka, která se však dále zaměřila na to, u kterých žáků se více vyskytují plošné a u kterých prostorové útvary. Esej tedy může plnit dílčím způsobem diagnostickou funkci. Experiment byl opakován i v Itálii s podobnými výsledky.

Technické zabezpečení: Notebook, interaktivní tabule, internetová adresa obrázky kubismus (nalezeno pomocí `http://www.google.cz`), bílé papíry formátu A4, v rezervě balicí papír s obrázky geometrických útvarů.

Úvodní část (frontálně – cca 9 minut). Pantomima – všichni ve stoje předvést těleso zadané učitelem, komentář sledující výstižnost a porovnání shod a rozdílů v provedení, pochvala, vše za účelem vybavení hmatových vjemů jednotlivých tvarů.

Na interaktivní tabuli 3 obrázky (Dům Diamant ve stylu kubismu cca 500 m od školy, kubistické osvětlení U Pinkasů na Jungmannově náměstí cca 750 m od školy, kubistická dóza, která byla vystavena v UMPRUM na výstavě Artěl. Hledání geometrických prvků na obrázcích.

Hlavní část (samostatná práce cca 25 minut). Navození situace: Představ si, že jsi ve zvláštním světě – světě geometrie. Můžeš si vybrat, jestli to bude svět 2D nebo 3D. (žáci vysvětlují, co to znamená). Pak tedy víš, co se ve světě nazvaném 2D vyskytuje a co se vyskytuje ve světě 3D. Vyber si svůj svět. Představ si ho. Rozhodni se, kterým geometrickým útvarem bys v tom světě chtěl být a proč a případně také, kterým útvarem bys nechtěl být a proč. Co se ti na tvé volbě líbí, čím je tvůj útvar nápadný, hezký, jaké máš výhody a podobně.

Rozdávání papírů. Žákům jsou rozdány bílé papíry formátu A4.

Kdybych si vybrala já svět 3D, čím bych mohla být? Kdybych si ale zvolila 2D? Tak a pusťte se do psaní. Kdo je rychlý, může sloh doplnit ilustrací.

Závěr (cca 6 minut). Čtení prací těch žáků, kteří si to přejí, pochvala, komentář či dotazy. Vybrání prací.

Reflexe. I když hospitující učitelé dělali stejnou práci jako žáci, přece jen změnili částečně atmosféru ve třídě. Podle zkušenosti potřebují žáci na takovou práci více pocitu intimity. To bylo patrné také z rozpaků, které u některých vznikly, když jsem je požádala o čtení. Z těchto důvodů bylo čteno jen 7 prací. Výběr žáků byl přizpůsoben také volbě typů (výborný vyrovnaný žák, neurotický ale nadprůměrný žák, žák s řadou psychických problémů a neschopností soustředit se, žák pomalý, relativně ale dobře se soustředící, značně neklidný žák a nakonec velmi ambiciózní žákyně).

I z ukázek bylo patrné, jak je možné slohu využít pro odkrytí drobných deformací, nedostatků v představách, pro diagnostikování míry vyzrálosti daného pojmu zejména v souvislosti s pozorováním žáků při pantomimě. V zápalu práce jsem oproti plánu vynechala ocenění slohů samolepkami. Dotazy a diskuse, které by zřejmě byly bez návštěvy bezprostřednější, živější a nejen delší, ale i hlubší. Na žádost žáků v hodině matematiky v šesté vyučovací hodině ještě týž den jsem musela slíbit, že se ke slohům vrátíme.

Literatura

[1] `http://www.google.cz/search?hl=cs&rlz=1T4ADBR_enCZ233CZ260&q=VAsarely+obrazy&btnG=Hledat&lr=ů`

[2] `http://magazin.ceskenoviny.cz/index_view.php?id=306116`

[3] `http://vemi.blog.cz/0512/filmy`

[4] `http://en.wikipedia.org/wiki/Victor_Vasarely`

[5] `http://www.galerieonline.cz/pozvanka/?typ=0&hash=&menu_obr=6`

[6] `http://www.galeriecaesar.cz/Galerie%20Archiv/2008/198%20Sykora vystava/index.html`

[7] `http://in.ihned.cz/c4-10021130-29600430-n00000_d-krasa-struktur-a-linii`

Čtyři pohledy na vizuální gramotnost

František Kuřina[1]

Člověk vidí jen to, co hledá,
ale také hledá jen to, co může vidět.
Heinrich Wölfflin
([1], s. 16)

[1]Univerzita Hradec Králové, Pedagogická fakulta; frantisek.kurina@uhk.cz

Úvod

V roce 1988 jsem se poprvé zúčastnil světového kongresu o vyučování matematice. Konal se v Budapešti a v jednom z hlavních referátů položil ruský matematik Jeršov otázku: „Jak učinit myšlenku viditelnou?“ To mě velmi potěšilo, neboť jsem již rok předtím odevzdal rukopis knihy *Umění vidět v matematice*, která vyšla v r. 1989 ve Státním pedagogickém nakladatelství. Vzpomínám si, že redakce nakladatelství rukopis uvítala, jen ten titul se zdál některým redaktorkám „nepatřičný“. Povzbuzen Jeršovem, jsem si uvědomil, že problematika, kterou se v knize zabývám, není okrajovým, ale i světovými autoritami uznávaným tématem. Dnes činí tematika tzv. vizualizace dosti bohatý okruh bádání a já se k ní zde vracím v souvislosti s kultivací matematické kultury a gramotnosti. Není cílem tohoto příspěvku formulovat teoretický nebo historický pohled na problematiku; chci pouze podat informaci o dílně, kterou jsem vedl na Dvou dnech s didaktikou matematiky 2009.

Snad jen v úvodu připomenu dvě myšlenky, z nichž první pochází od spisovatele Lubomíra Martínka a druhá od matematika Petra Vopěnky.

Myšlení jen málokdy pomůže vyhnout se omylům, ale umožňuje vymotat se z bludiště, v němž jsme se ocitli. Zahlédnout city, slova, mechanismy, struktury i bytosti v jejich nejednoznačnosti, neuchopitelnosti a rozporuplnosti představuje pouze počátek. Od spatření vede k pochopení dlouhá a nepohodlná cesta ([1], s. 19).

Martínkův jazyk prozrazuje, že vizuální hlediska jsou důležitá pro myšlení a řešení problémů. Tam, kde já říkám vidět souvislosti, píše Martínek obrazně zahlédnout city. . .

V monografii *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky* Vopěnka zdůrazňuje:

Neuznávání obrázků a náčrtků za plnohodnotný způsob sdělování matematických poznatků, to je důsledné trvání na úplných slovních popisech sdělovaných poznatků, výrazně umrtvuje dynamiku matematického poznání ([2], s. 569).

Ve vzdělávání můžeme odlišit složku *civilizační* (soubor postojů a návyků, které přebíráme od okolí) a složku *kulturní*. Kultura je *výsledkem osobního usilování. Ten, kdo si dává práci se něčemu naučit, stojí výš než ten, kdo sebou nechá jen cloumat a spokojuje se s pasivním přejímáním* ([1], s. 45). Vizuální kultura je produktem zájmu poznávajícího. Vizuální gramotnost je prvním stupněm vizuální kultury.

Proč je vizuální kultura tak důležitá? *Protože myšlení v pojmech se vynořuje z myšlení v obrazech pomalým vývojem silou abstrakce a symbolizace, právě tak jako hláskové písmo vznikalo z obrázkových symbolů a hieroglyfů ([4], s. 8). Vizuální gramotnost nám pomáhá uvidět to, nač se díváme a poznat to, co poznáváme* ([4], s. 19). Je tedy podstatnou složkou porozumění.

Historicky prvním autorem, který prakticky ukázal na obraz jako na nositele informací a prostředek porozumění jevu, byl patrně Jan Amos Komenský. Na ukázce z jeho knihy *Orbis pictus* si může každý ověřit, že např. význam anglického či ruského termínu pro *chůdy* nebo *houpačku* rychleji pochopíme z obrázku než z případného slovního popisu.

Naše dílna

Boys play either a game of marbles[1] or they play bowls trying to throw the bowl[2] so as to hit the nine-pins[3], or they guide a little ball through a ring[5] with a stick[4], or spin a top (cone)[6] with a whip[7], or shoot with a blow-tube or a crossbow[8], or walk upon stilts[10], or stamp their feet swinging on a merry-trotter[11].

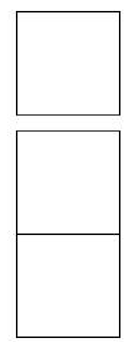
Мальчики обычно играют или глиняными шарами[1], или катая шар[2] на кегли[3], или же с помощью дубинки[4] они мечут через кольцо[5], приводят во вращение кубарь[6] посредством бича[7], стреляют из полой тростинки[8] или из лука[9], ходят на ходулях[10] или качаются на качелях[11].

Cílem setkání bylo podnítit zájem účastníků o problematiku vizuální gramotnosti ve čtyřech oblastech, o nichž pojednáváme v odstavcích A, B, C, D.

A. Úroveň poznávání objektů z jejich ikonické reprezentace

Správně identifikovat objekt z jeho obrazu je významná složka technické civilizace. K prověření úrovně poznávání geometrických objektů z jejich půdorysu a nárysu jsme zadali absolventům základní školy **úlohu 1**:

Na obrázku je nárys a půdorys geometrického útvaru. Nakreslete jeho názorný obrázek v případech:



a) *geometrický útvar je těleso nebo několik těles (T),*

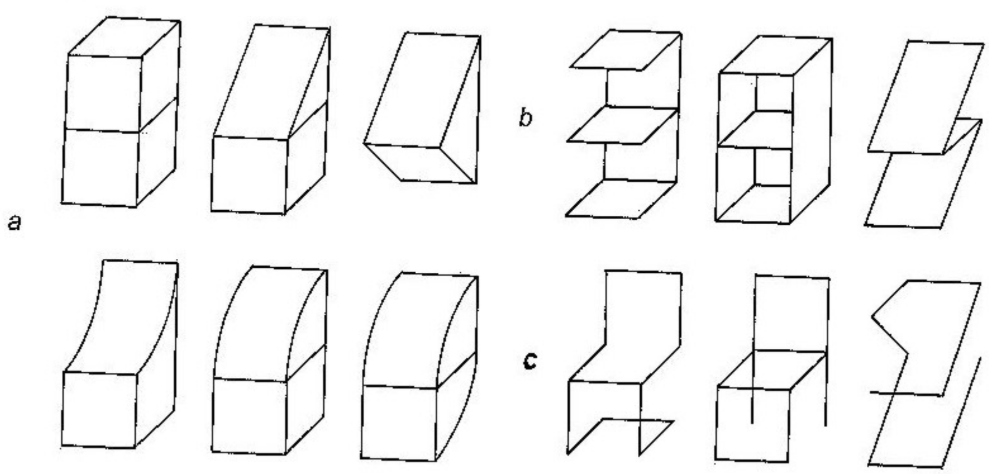
b) *geometrický útvar je složen z ploch (např. čtverců) (P),*

c) *geometrický útvar je složen z úseček nebo křivek (model je z drátů) (D).*

Každá úloha má několik řešení. Nakreslete vždy aspoň dvě.

Překvapující zjištění bylo, že mnozí řešitelé neporozuměli textu: nakreslili správně těleso s daným nárysem a jiné těleso s daným půdorysem, které však mělo jiný nárys.

Ačkoliv bylo v textu zdůrazněno, že každá z úloh má několik řešení, byly výsledky velmi chudé. Z nekonečně mnoha řešení úloh a, b, c uveďme některá.



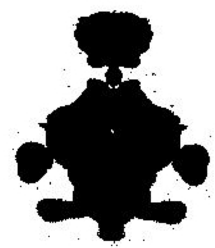
Podobně jako studentům, činila úloha potíže i některým účastníkům naší dílny. Touto úlohou můžeme doložit, že uvažování „jedním směrem“ zcela jasné (dvě krychle nad sebou tvoří těleso, které je řešením naší úlohy), může „v opačném směru“ být obtížné. Dvě krychle blokují utváření představ o dalších tělesech splňujících podmínky úlohy. Jen nemnozí studenti popsali správně dvě krychle nad sebou (řešení a), stěny těchto krychlí (řešení b) a hrany těchto krychlí (řešení c). Takovouto trojici jsme pochopitelně považovali za řešení všech tří úloh.

Celkem řešilo úlohu 171 studentů na počátku středoškolského studia ze tří tříd gymnaziálních, jedné třídy průmyslové školy strojní a dvou tříd průmyslové školy stavební. Skutečnost, že 63 % studentů nenakreslilo ani jediné řešení úlohy, 30 % uvedlo řešení jediné a pouhých 7 % více řešení, svědčí o zanedbávání vizuální gramotnosti na základní škole.

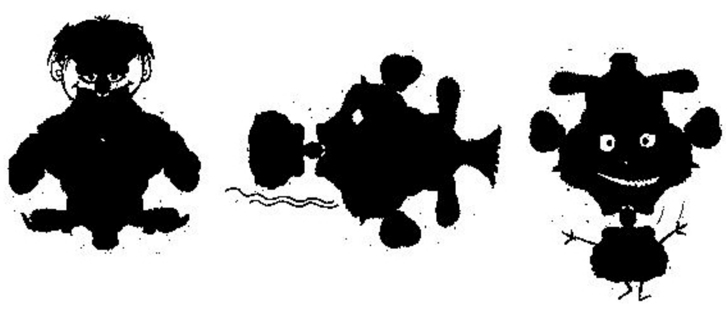
Jako sondu do „fantazijní“ představivosti studentů jsme zadali následující modifikaci Rorschachova testu.

Úloha 2

Dokreslete obrázek. Můžete ho libovolně otáčet.



Ačkoliv většina řešitelů nakreslila výsledky ne příliš nápadité (obrázek na raketě, skvrny na obličeji atp.), objevily se i výsledky pozoruhodné.



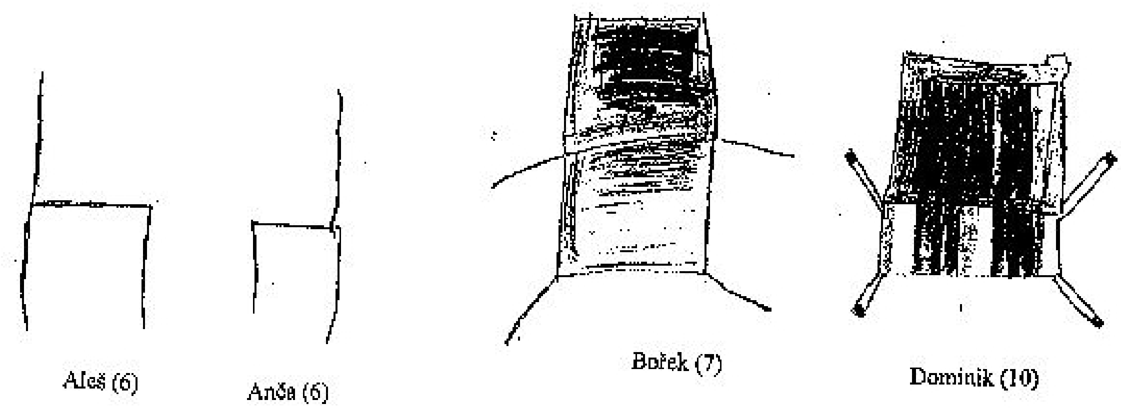
B. Úroveň zobrazování prostoru dětmi na začátku školní docházky

Nízká úroveň „čtení“ geometrických obrazů patrně souvisí s tím, že učíme málo, učíme-li vůbec, zobrazovat prostor. Jako v každém vzdělávání bychom i zde měli rozvíjet ty dovednosti, které si žáci přinášejí z rodiny a společnosti. K zjištění jejich úrovně jsme zadali dětem na mateřských školách a v nižších třídách základní školy následující **úlohu 3:** *Nakresli židli tak, aby ji každý poznal.*

Inspirací k této úloze byl známý obraz Vincence Van Gogha Židle s dýmkou. Na něm jsem si uvědomil, že židle je, díky své funkci, stereometrický útvar v pravém slova smyslu a dítě je s ní dobře seznámeno, taktilně i vizuálně. Dětské kresby byly neobyčejně zajímavé. Jejich soubor lze klasifikovat podle různých kritérií. My jsme je rozdělili do čtyř částí označených metaforickými názvy. Na obrázcích, jejichž malou část zde reprodukujeme, je vždy uvedeno křestní jméno a věk autora.

I. Čtyřka (obr. 1a) (schématická kresba, v níž je zcela zanedbána např. tloušťka nohou židle, ale je zachycena kolmost sedátka a opěradla). Tento výsledek je poněkud překvapivý, neboť ukazuje, že i malé dítě může grafickou zkratkou postihnout charakteristický rys židle. Protože tyto obrázky se vyskytovaly výhradně u přibližně šestiletých dětí, není vyloučeno, že jsou ovlivněny nácvikem psaní číslic v první třídě (čtyřka je převrácená židle).

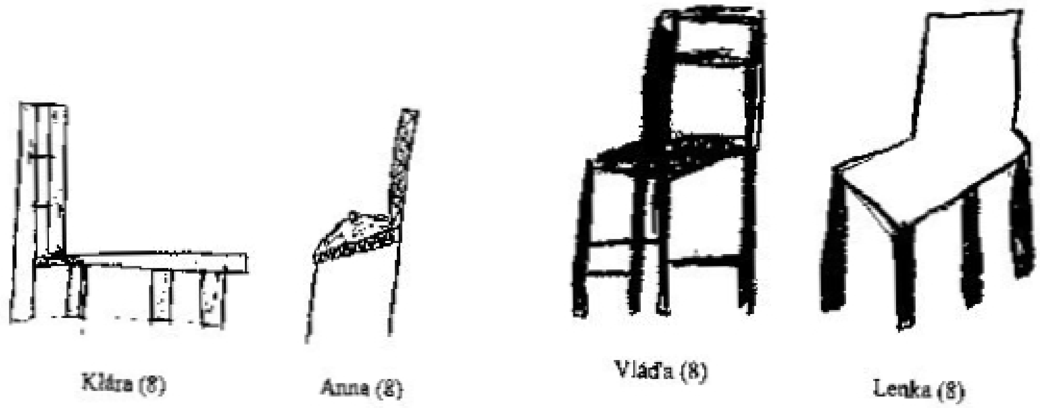
II. Brouk (obr. 1b) (obraz sedadla, z něhož vycházejí čtyři nohy na různé strany). Obrázky tohoto typu můžeme dokumentovat známou věc: dítě kreslí to, co ví, nikoliv to, co vidí, a nakreslí nohy židle jako nohy brouka, ačkoliv je tak vidět nemůže.



Obr. 1: (a) (b)

III. Zákryt (obr. 2a) (nárys židle doplněný v některých případech detaily). Skutečnost, že geometricky neškolené dítě kreslí konstruktivně správný nárys, je patrně ovlivněna zážitky dítěte z doby, kdy bylo malé a mělo příležitost vidět sedátka jako úsečky.

IV. VanGogh (obr. 2b) (názorné vyjádření prostorových vztahů sedadla, noh a opěradla židle). Paleta obrázků tohoto typu je veliká a ukazuje na schopnost dítěte vystihnout prostor různými způsoby. Je zajímavé, že náznaky těchto výsledků lze doložit již u čtyřletých dětí.



Obr. 2: (a) (b)

Úroveň zobrazování prostoru na začátku školní docházky se nám jeví jako dobrá. Je škoda, že škola tyto dovednosti dětí nerozvíjí, zdá se, že je spíše potlačuje. Promyšleným systémem „geometrického kreslení" bychom měli rozvíjet vizuální gramotnost žáků. Realizace tohoto úkolu by ovšem v praxi narazila na nízkou úroveň grafické gramotnosti některých učitelů. V učitelském vzdělání se této problematice prakticky nevěnuje pozornost.

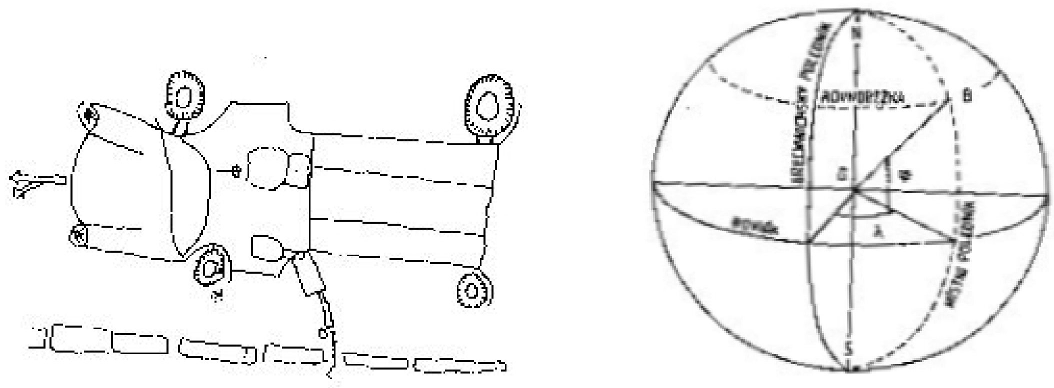
C. Úroveň zobrazování prostoru v odborných publikacích

Začněme opět dětskou kresbou. Šestiletý Honza nakreslil auto v půdorysu (obr. 3a). V obrázku ovšem nejsou vidět kola, něco pro automobil podstatného. Přidal tedy ještě pohledy z obou boků. Nejen to, cítil i potřebu zakreslit, že výfuková roura má kruhový průřez a přidal tedy další pohled. Tímto způsobem šestileté dítě vytušilo princip pomocných průměten známý z deskriptivní geometrie. Průmětny ovšem na obrázku zakresleny nejsou a člověk, který by o autu nic nevěděl, by si z tohoto obrázku správnou představu neučinil.

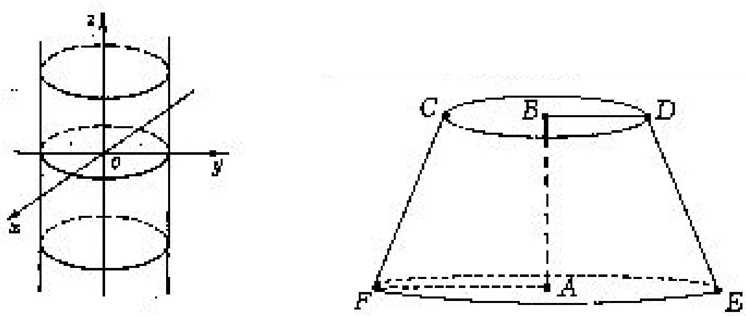
Stejné chyby jako šestiletý Honza se ovšem dopustil řadou titulů ozdobený autor publikace [5], když zobrazil pól globu na jeho obrysu a zároveň rovník jako elipsu (obr. 3b). I zde se „slévají" v jednom obrázku dva průměty.

Dosti častou chybou je zobrazení válce v pravoúhlém souřadnicovém systému podle obrázku z knihy [6] (obr. 4a). Zde je těleso zobrazeno v jiném promítání než souřadnicové osy.

Nedostatky ve vizuální kultuře se objevují např. i v americkém časopise *Mathematics Teacher* [7]: kruhové podstavy komolého kužele se v rovnoběžném promítání musí zobrazit jako podobné elipsy, a ne tak, jak je na obrázku 4b.

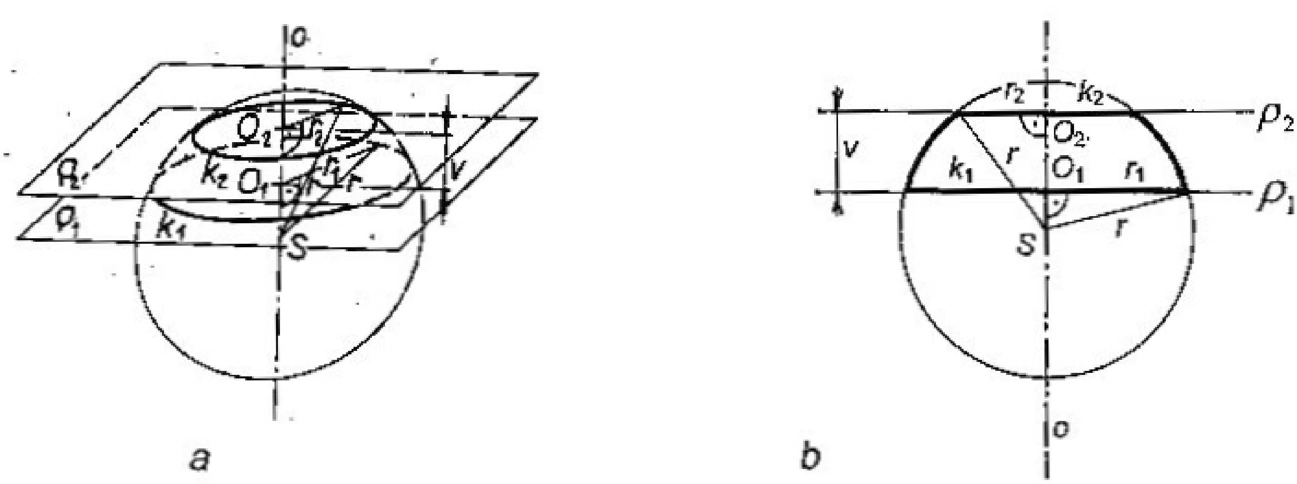


Obr. 3: (a) (b)



Obr. 4: (a) (b)

Někdy jsou ovšem obrázky geometricky správné, ale autoři pod dojmem, že kosoúhlé promítání je názornější než pravoúhlé, kreslí obrázky zbytečně složitě. Porovnejte, který z obrázků kulové vrstvy je výmluvnější ([8]).



Úroveň zobrazování prostorových útvarů je v mnoha publikacích nízká. Úpadek deskriptivní geometrie není dosud kompenzován konstrukcí vhodných počítačových programů. V průběhu dílny jsme posoudili řadu ukázek z naší i světové literatury.

D. Závislost řešení úlohy na její vizualizaci

Již zmíněný Lubomír Martínek píše: . . . *stát se vidoucím vyžaduje jisté předpoklady, talent, schopnosti, ale především zaujetí a nesmírné úsilí . . . Vidění je . . . spojeno s myšlením mnohem těsnější vazbou, než se původně zdálo. Nestačí jen bedlivě pozorovat, viděné je nutno ještě interpretovat a uvádět do souvislostí. Vidění není pasivní činnost, nýbrž tvůrčí akt* ([1], s. 71).

Dovolím si v této souvislosti uvést tři provokující otázky, kterými chci doložit, že umění vidět si můžeme prověřit i na takřka „nulové“ úrovni matematického obsahu.

1. Kolik sčítanců je na pravé straně rovnosti?

$$7^7 = 7 + 7 + \ldots + 7$$

2. Existují dva shodné geometrické útvary, z nichž první je částí druhého, ale druhý není částí prvního?

3. Je číslo $\sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{3}$ racionální nebo iracionální?

Ukažme dále na jednoduché úloze na úrovni střední školy, jak způsob různého vidění situace vede i k diametrálně různým řešením úlohy.

Úloha 4 ([9], s. 336)

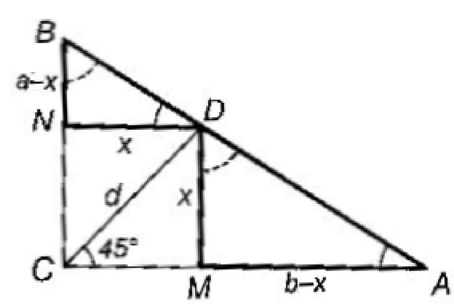
V pravoúhlém trojúhelníku ABC s odvěsnami $|AC| = b$, $|BC| = a$ určete délku úsečky DC, kde D je bod přepony a CD je osa pravého úhlu ACB.

Uveďme pouze několik pohledů na úlohu, vlastní rutinní řešení s výsledkem

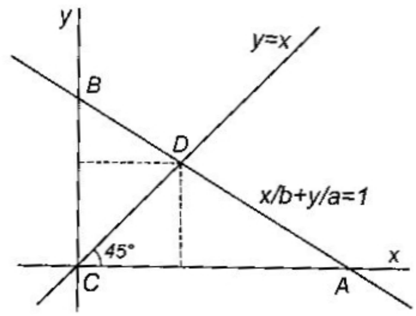
$$|DC| = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}$$

přenechávám čtenáři.

Pohled 1. Všimněme si, že obrázek můžeme doplnit čtvercem $CMDN$ a z podobnosti trojúhelníků BND, DMA určíme stranu a pak úhlopříčku čtverce.



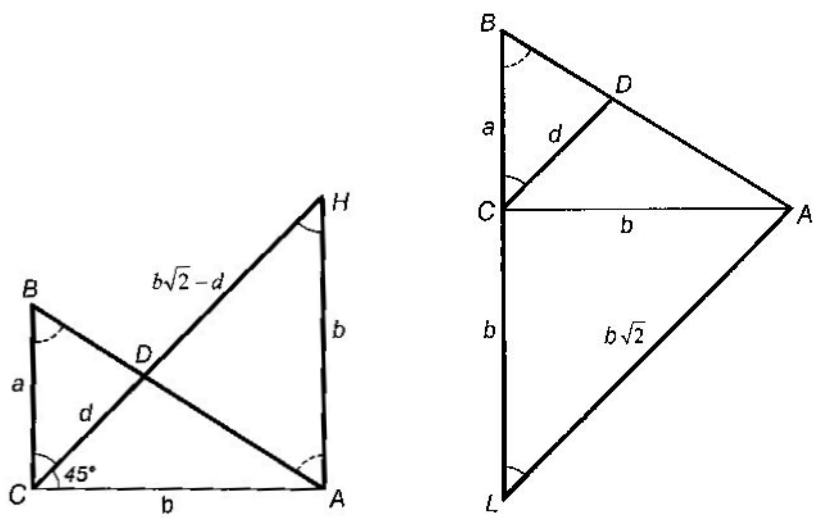
Pohled 2. Umístíme-li trojúhelník ABC do souřadnicového systému, můžeme určit souřadnice bodu D jako souřadnice průsečíku přímek $y = x$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.



Pohled 3. Všimněme si, že obsah trojúhelníku ABC je součtem obsahů trojúhelníků BCD a DCA. Z aplikací vzorce $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ na tyto trojúhelníky získáme výsledek.

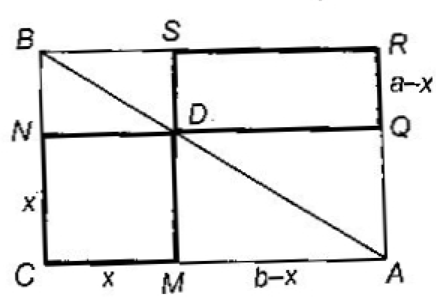
Pohled 4. Doplníme-li obrázek úsečkou AH kolmou ke straně AC, můžeme využít podobnosti trojúhelníků DBC a DAH (obr. 5a).

Pohled 5. Doplníme-li obrázek úsečkou AL rovnoběžnou s CD, můžeme využít podobnosti trojúhelníků BCD a BLA (obr. 5b).



Obr. 5: (a) (b)

Pohled 6. (Vlastimil Dlab) Délku strany čtverce $CMDN$ získáme, vyjádříme-li, že tento čtverec má stejný obsah jako obdélník $DQRS$.



Další řešení úlohy umožňuje aplikace sinové a kosinové věty. K tomu ovšem potřebujeme nejdříve vypočítat délku úsečky AD (např. na základě věty, že osa úhlu v trojúhelníku dělí protilehlou stranu v poměru stran přilehlých.

ZÁVĚRY

V dílně jsme se zabývali čtyřmi aspekty vizuální gramotnosti. Tři z nich (rozpoznávání objektů z jejich ikonické reprezentace, zobrazování prostorových útvarů a vizualizace při řešení úloh) souvisejí přímo se školní praxí.

Z šetření, která jsme provedli, nelze patrně činit žádné všeobecně platné závěry, nicméně většina ze 171 středoškoláků vykázala na počátku studia *nedostatečnou orientaci* v prostorové interpretaci půdorysu a nárysu. Tento nedostatek považuji za vážný. Ta část populace, která se bude zabývat technickými obory, bude snad v příslušném směru vycvičena, avšak vyznat se v návodu na sestavení kusu nábytku či domácího mechanismu nebo posoudit byt podle plánu by mělo být součástí všeobecné přípravy pro život.

V druhém šetření jsme si znovu uvědomili, že většina dětí je na počátku školní docházky schopna vyjadřovat graficky informace o prostorových útvarech dosti dobře a překvapivě tvořivě. Tuto dovednost naše škola dostatečně nerozvíjí a vizuální gramotnost dítěte tak spíše upadá než roste.

Vizualizace při řešení úloh byla v naší dílně zaměřena převážně na geometrii a nezabývala se řešením tzv. slovních úloh a rolí obrázků v procesu převodu textu úlohy do symbolického tvaru (rovnice) nebo řešením slovních úloh úsudkem. Připomínám, že snad dosud nepřekonaným textem na toto téma je sbírka úloh [10] klasiků naší didaktiky Emila Kraemera, Františka Hradeckého a Vítězslava Jozífka z r. 1959.

V části D našeho příspěvku dokumentujeme, že nápad či představa, zde vyjádřená obrázkem, předchází řešení. Podobně patrně idea či představa předchází pojmu a až postupně dochází k explicitnímu popisu či definici. Není správné, když se tato etapa hledání studentům zamlčuje a předvádějí se jim pouze elegantní řešení úloh, precizně formulované definice a vybroušené důkazy. Nemyslím však, že základem matematického vzdělávání mohou být objevy žáků ([11], s. 36). Jsem ovšem přesvědčen, že žák má být zasvěcován do těch základních činností, které dovedly historicky matematiku k roli, kterou hraje v současné společnosti. Jsou to, stručně shrnuto, umění počítat (přirozeně dnes s použitím techniky), umění argumentovat, umění sestrojovat, ale i umění vidět, a to nejen vidět geometrické „tvary“, ale především vidět souvislosti a tak přispívat k porozumění světu.

Podle mého názoru je matematické vzdělávání příliš zatíženo verbálními přístupy na úkor *komunikace činnostní* (ukaž jak to počítáš, sestrojíš, opravíš,. . .) a *vizuální* (nakresli, vymodeluj,. . .). Je samozřejmé, že tyto přístupy je nutno modifikovat podle duševní vyspělosti žáků. Na prvním stupni se patrně spokojíme na otázku *Co je to trojúhelník* s odpovědí ve tvaru obrázku, jestliže však student na otázku *Co je to čtyřstěn* nakreslí čtyřboký hranol, spokojeni být nemůžeme, přestože toto těleso má čtyři (boční) stěny a dvě podstavy. Tato chyba může být způsobena verbálním charakterem výuky. Obrázek jako prvek jazyka matematiky má tu nevýhodu, že je obvykle „konkrétní“ (nemůžeme nakreslit „obecný“ trojúhelník) a „kompletní“ (není z něho vidět postup jeho tvorby).

Z druhé strany ovšem tato „hotovost“ obrázku může vést naši intuici, která zpravidla předchází preciznějším způsobům řešení.

Úlohy o kreslení židle a krychle plně potvrdily ideu, kterou formuloval E. H. Gombricht: *Dětská zobrazení jsou... rezidui mnoha smyslových dojmů uložených v paměti, kde splynuly v typické tvary... Stejně jako dítě pojímá i primitivní umělec toto zobrazení své paměti jako výchozí bod. Bude mít snahu znázornit lidské tělo zpředu, koně z profilu a ještěrku shora* ([12], s. 37).

Úloha 4 o ose úhlu znovu navozuje otázku, zda řešení úloh je prioritně otázkou logiky nebo zda zde hrají roli jiné aspekty. Dušan Šindelář zdůrazňuje v knize [14]: *Myšlení v obrazech se neřídí zcela tím, čím myšlení logické. Jde o motiviku, spíše než o zákony... Oblasti této motiviky jsou: podvědomí, vzpomínka, asociace, srovnání, přirovnávání,...* ([14, s. 139).

Příspěvek byl vypracován v rámci řešení úkolu GAČR 406/08/0710.

Literatura

[1] Martínek, L.: *Mýtus o Lynkeovi.* Paseka, Praha 2008.

[2] Vopěnka, P.: *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky.* Práh, Praha 2004.

[3] Komenský, J. A.: *Orbis sensualium pictus.* Trizonia, Praha 1991.

[4] Dondis, D. A.: *A Primer of Visual Literacy.* MIT Press, Cambridge 1983.

[5] Maršíková, M., Maršík, Z.: *Dějiny zeměměřictví.* Libri, Praha 2007.

[6] Yakovlev, G. N.: *Geometry.* Mir Publisher, Moscow 1982.

[7] Mathematics Teacher, No. 5, Vol. 102, 2009.

[8] Pomykalová, E.: *Matematika pro gymnázia – stereometrie*, Prométheus, Praha 1997.

[9] Dam, Z.: Kilka sposobów na dwusieczna. *Matematyka* 6, 2004.

[10] Kraemer, E., Hradecký, F., Jozífek, V.: *Sbírka řešených úloh z matematiky pro 6. až 8. ročník.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1959.

[11] Hejný, M., Michalcová, A.: *Skúmanie matematického riešitelského postupu.* Metodické centrum, Bratislava 2001.

NÁMĚTY NA MATEMATICKÉ SEMINÁŘE NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

MARIE NEČASOVÁ[1]

ÚVOD

Během svého studia řešíme velkou řadu různých úloh. Existuje však mnoho zajímavých témat, s nimiž se setkáme až při studiu na vysoké škole nebo se s nimi nesetkáme vůbec. Je pochopitelné, že ne každý student střední školy je matematicky založený, ale někteří by se matematice rádi věnovali více než jen v běžných hodinách. K tomu slouží právě matematický seminář.

K napsání mé diplomové práce mne inspiroval matematický seminář na gymnáziu, kde jsem absolvovala svou učitelskou praxi. Učitelka se zde okrajově věnovala historii matematiky a seznamovala studenty s novými tématy – např. zlatý řez, Hippokratovy měsíčky a jiné. Vzhledem k tomu, že já jsem se s těmito tématy setkala až při studiu na vysoké škole, rozhodla jsem se ve své práci popsat některá méně běžná matematická témata.

Součástí diplomové práce jsou pracovní listy, které mají učitelům sloužit jako učební materiál. Obsahují několik úloh, které jsou okomentované a vyřešené. Dva pracovní listy – *Hippokratovy půlměsíčky* a *Tangram* byly použity s učiteli, kteří se účastnili popisované pracovní dílny.

OBSAH DÍLNY

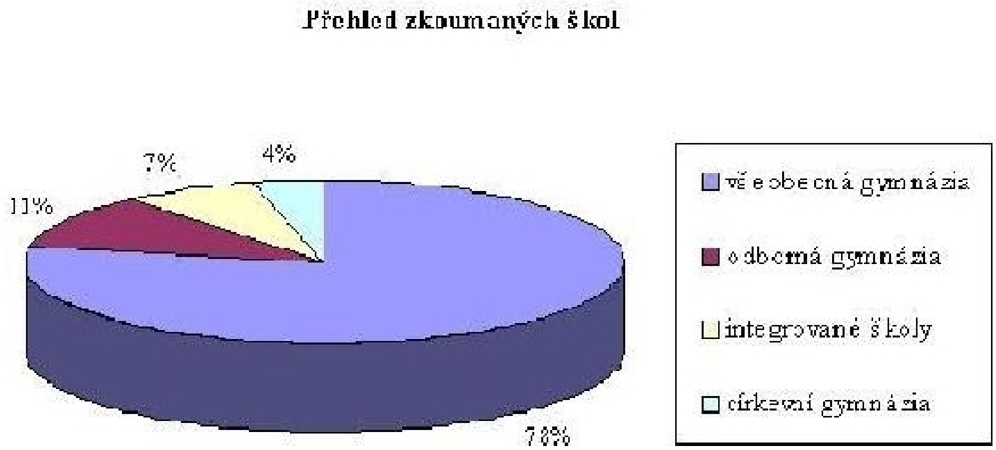
Učitelé byli nejprve seznámeni s výsledky dotazníku, ve kterém byla zjišťována náplň matematických seminářů na středních školách. Následně se dozvěděli základní informace o Hippokratových půlměsíčkách a o tangramu. Poté dostali dva pracovní listy, které měli vypracovat, zhodnotit a okomentovat. Dílny se zúčastnilo 18 učitelů z různých typů škol.

DOTAZNÍK

V rámci své diplomové práce jsem se rozhodla zjistit náplň matematických seminářů na středních školách. Zajímalo mne, jakým tématům se zde věnují. Vytvořila jsem dotazník, který se skládá z 10 otázek, a rozeslala ho prostřednictvím e-mailu na 216 škol v celé republice. Kontakty na školy jsem získala prostřednictvím internetu. Výsledný vzorek tvoří 72 středních škol z různých částí České republiky, typy jsou uvedeny na obrázku 1. 66 z nich poskytuje svým studentům matematický seminář. V dotazníku jsem zjišťovala jednak délku seminářů a pro které ročníky jsou semináře připravovány (výsledky jsou uvedeny na obrázcích 2 a 3), a jednak náplň matematických seminářů.

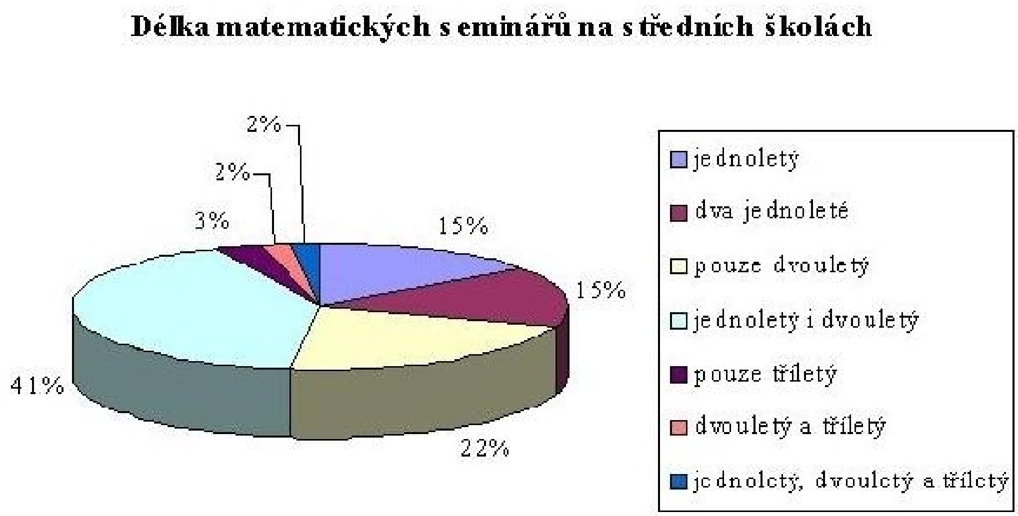
[1] studentka PedF UK Praha, m.neca@post.cz

Obr. 1



Obr. 2

Obr. 3



Obr. 4

Zjistila jsem, že 99 % učitelů se v rámci seminářů věnuje maturitním tématům, prohlubují probíranou látku a zároveň seznamují studenty s novými tématy. Zbývající procento škol se věnuje pouze některé z nabízených možností. Například neprocvičují maturitní témata, protože k tomu slouží předmět nazvaný Cvičení z matematiky, ale prohlubují probíranou látku a probírají nová témata. Jiné naopak maturitní témata procvičují, ale nevěnují se novým tématům. Hippokratovými půlměsíčky se v seminářích zabývá zhruba 26 % učitelů a zlatému řezu se věnuje přibližně 36 % dotázaných učitelů. Z hlediska mé diplomové práce mne nejvíce zajímalo, jaká nová matematická témata jsou v rámci seminářů probírána. Jejich seznam je uveden v tabulce.

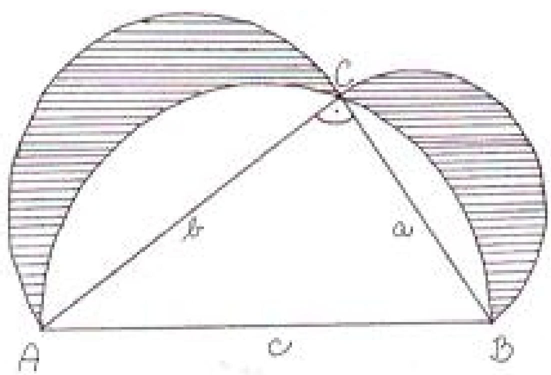
diferenciální a integrální počet, průběh funkce, limity funkcí a posloupností	matice a determinanty
Cramerovo pravidlo	Gaussova eliminační metoda
homotetie (stejnolehlost)	shodná zobrazení v prostoru
nekonečná geometrická řada	Apolloniovy úlohy
reciproké rovnice	iracionální a goniometrické nerovnice
řešení zábavných matematických problémů, hlavolamy	funkce cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické
Hippokratovy měsíčky	algebraické rovnice vyšších stupňů
kruhová inverze	fyz. úlohy využitím derivací a integrálů
konstrukční úloh pomocí Cabri	AG v prostoru a ve vyšších dimenzích
teorie grafů, teorie množin	algebraické struktury – grupy
finanční a pojistná matematika	transformace souřadnicové soustavy
zlatý řez	kvadratické rovnice v oboru C
Hornerovo schéma	historie matematiky
Cardanovy vzorce – kubické rovnice	důkazové metody
pravděpodobnost a statistika	složitější kombinatorické úlohy

HIPPOKRATOVY PŮLMĚSÍČKY

Jedná se o půlměsíčky – rovinné útvary omezené dvěma kruhovými oblouky, které mají stejný obsah jako nějaký mnohoúhelník (většinou se jedná o trojúhelník nebo lichoběžník). Lze tedy přesně vyjádřit jejich obsah. Autorem půlměsíčků je Hippokrates z Chiu, řecký matematik, filosof a lékař. Podle něj se také měsíčky nazývají. Hippokratovy půlměsíčky se také označují jako Hippokratovy měsíčky či Hippokratovy menisky. Jedná se důkazové úlohy. Nejznámějšími Hippokratovými měsíčky jsou měsíčky, jejichž součet obsahů je stejný jako obsah pravoúhlého trojúhelníka – obvod měsíčků je tvořen půlkružnicemi, jejichž průměry odpovídají stranám pravoúhlého trojúhelníka ABC.

PRACOVNÍ LIST – HIPPOKRATOVY MĚSÍČKY

1. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC. Dokažte, že obsah půlměsíčků sestrojených nad odvěsnami tohoto pravoúhlého trojúhelníka ABC (vyšrafovaná oblast na obr. 5) se rovná obsahu pravoúhlého trojúhelníka ABC. Tyto půlměsíčky se nazývají Hippokratovy půlměsíčky, někdy se setkáváme i s označením Hippokratovy měsíčky nebo menisky.

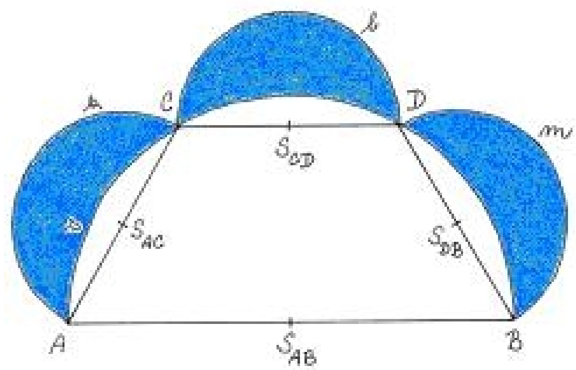


Obr. 5

2. Sestrojte Hippokratovy půlměsíčky nad stranami pravoúhlého trojúhelníka ABC. Délky odvěsen trojúhelníka jsou $|AC| = 8$ cm, $|BC| = 6$ cm. Vypočítejte obsah těchto půlměsíčků.

3. Nechť lichoběžník $ABCD$ tvoří polovinu pravidelného šestiúhelníka o straně 6 cm. Nad jeho stranami sestrojíme půlkružnice. Vypočítejte obsah vybarvených Hippokratových měsíčků na obrázku 6.

4. Pokuste se zjistit, kdy se bude obsah tří měsíčků, který jste vypočítali v úloze 3, rovnat obsahu lichoběžníka $ABCD$.



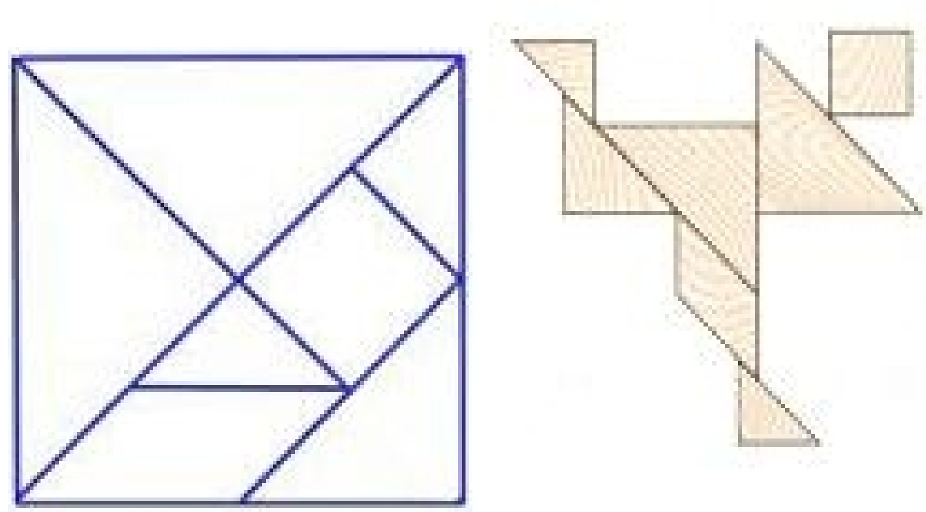
Obr. 6

PRACOVNÍ LIST – TANGRAM

Tangram je stará čínská skládačka, která se již celá staletí těší nehasnoucí popularitě. Hráče všech věkových skupin fascinuje skutečnost, že ze sedmi dílků skládačky lze složit opravdu velké množství rozmanitých útvarů. Jedná se o geometrické obrazce, předměty, zvířata a lidské postavy v charakteristických postaveních. Pro sestavení každého obrázku je vždy nutno použít všech sedmi dílů.

Tangram lze využít k dokazování Pythagorovy věty pro rovnoramenný trojúhelník. Můžeme zkoumat obsahy jednotlivých dílů tangramu, zjišťovat délky stran dílů. Pomocí něj můžeme přetvářet jeden geometrický útvar na jiný o stejném obsahu.

Tangram je možno také použít jako motivační prvek ve cvičeních matematiky. Můžeme zadat studentům sadu úloh k samostatné práci a pokud je někdo hotov, může si vzít hlavolam, aby nevyrušoval ostatní. Zbytek studentů může v klidu pokračovat v řešení.



Obr. 7

1. Seznámili jste se s tangramem, víte, jak vypadá. Narýsujte tento čtvercový tangram se všemi jeho dílky, pokud víte, že:

   - odvěsna velkého trojúhelníku má přesně stejnou délku jako přepona středního trojúhelníku,
   - odvěsna středního trojúhelníku má stejnou délku jako přepona malého trojúhelníku a jedna ze stran rovnoběžníku,
   - odvěsna malého trojúhelníku má stejnou délku jako strana čtverce a druhá strana rovnoběžníku. Stranu čtverce zvolte o libovolné velikosti a tak, abyste mohli s obrázkem dále pracovat. Dále zjistěte délky stran jednotlivých dílů tangramu (malý trojúhelník, střední trojúhelník, velký trojúhelník, čtverec, rovnoběžník), když velký čtverec má stranu o délce a.

2. Vypočítejte obsahy jednotlivých dílů skládačky. Co o nich můžete říci? Mají některé útvary stejné obsahy? Je některý obsah násobkem jiného obsahu?

3. Mají některé útvary skládačky stejný obvod? Pokud ano, uveďte které.

4. Vystřihněte si sestrojený tangram a nejdříve jej sestavte zpět do čtverce. Poté sestavte trojúhelník a zakreslit si jej na papír. Nezapomínejte, že vždy musíte použít všech sedm dílů tangramu.

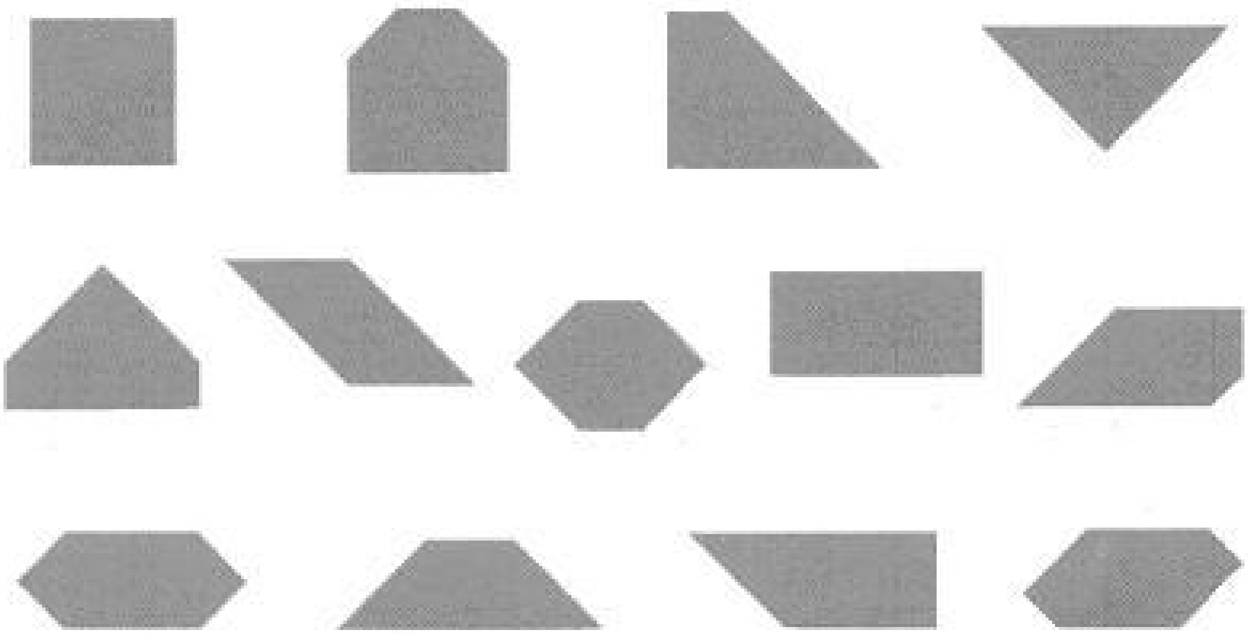
5. Vytvořte ze všech dílků tangramu postupně obdélník s jednou stranou dvakrát delší než druhou a lichoběžník s dolní stranou třikrát delší než horní. Zakreslete je. Porovnejte obsahy těchto útvarů. Jaké budou?

6. Složte některé z konvexních útvarů podle předlohy (obr. 8). Čtverec, trojúhelník, obdélník a lichoběžník jste už skládali v předchozích úkolech. Existují nějaké závislosti mezi stranami některých útvarů?

Závěr

Potvrdilo se mi, že o netradiční témata pro matematické semináře mají učitelé zájem a že zejména pracovní listy doplněné komentářem o tématu jsou pro ně vhodné. V průběhu dílny učitelé řešili mnou zadané úlohy a poskytli mi řadu cenných doporučení, která jsem do výsledných pracovních listů zapracovala. Doporučení se týkala zejména formulace úloh, aby byly pro studenty srozumitelné. Pracovní dílna byla přínosem nejen pro moji diplomovou práci, ale snad i pro učitele. Dověděli se nové informace, protože většina z nich například neslyšela o Hippokratových půlměsíčkách.

Konečná verze pracovních listů je vystavena na webovských stránkách SUMA JČMF (`www.suma.jcmf.cz`, sekce Metody práce).



Obr. 8

LITERATURA

[1] DUDENEY, H. E. *Matematické hlavolamy a hříčky*. Praha: Olympia, 1995.

[2] KOLMAN, A. *Dějiny matematiky ve starověku.* Praha: Academia, 1969.

[3] KONFOROVIČ, A. G. *Významné matematické úlohy*. Praha: SPN, 1989.

[4] OPAVA, Z. *Matematika kolem nás.* Praha: Albatros, 1989.

[5] VEJMOLA, S. *Hlavolamy.* Praha: Grada Publishing, 2007.

[6] Tangram – čínská skládačka. *Mozkolam*, 2007, č. 16, s. 13–16.

HRAVÁ ALGEBRA S POLYMINY

JAROSLAV ZHOUF[1]

ÚVOD

Článek si klade za cíl předložit problémy rekreační matematiky, ilustrovat některé myšlenky a metody používané v kombinatorické geometrii. Předložené problémy lze

[1]PedF UK, Praha; jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz

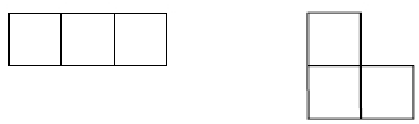
řešit experimentováním, ale také logickým uvažováním. Lze je použít při práci se žáky na všech stupních škol, a to s většinou žáků, případně jen s talentovanějšími žáky.

Článek je koncipován jako námět na vytváření „nové teorie" ve výuce matematiky. Zde konkrétně nová teorie propojuje algebru s geometrií a kombinatorikou. Tato teorie má vyvolat obecnější pohled na strukturu matematiky, má narušit klasické školní uvažování. Konkrétně zde se objevují rovnice, které mají v této teorii jiné řešení než doposud ve školské matematice prezentované.

Pojmy použité v článku

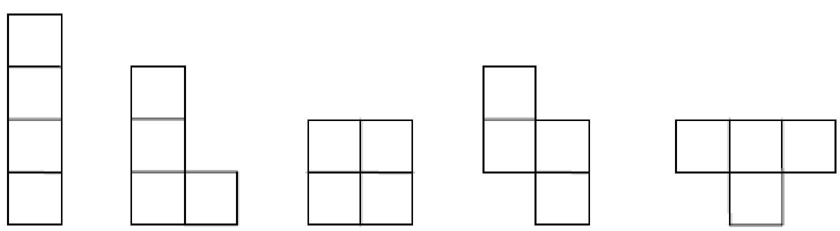
V článku se používá pojem *polymino*. Je to útvar složený z jistého počtu čtverců se shodnými stranami, v nichž každý čtverec má společnou aspoň jednu stranu s jiným čtvercem (s výjimkou monomina). Podle počtu čtverců jde o monomino, domino, trimino, tetramino, pentamino atd. [2]. Existují i trojúhelníková a šestiúhelníková polymina, jimi se ale tento článek nezabývá.

V článku vystupují čtvercová trimina a tetramina. Trimina jsou dvojího tvaru:



I-trimino L-trimino

Tetramin je pět tvarů:



I L O S T

Jednoduchá algebra s triminy

V dalších úvahách budeme manipulovat s obrazci trimin. Pro tuto manipulaci si označíme jednotlivá trimina proměnnými, např. x, y, . . . Proměnné chápeme tak jako obvykle, tj. že v různých případech může jedna proměnná označovat různá trimina. V následujících situacích budou proměnné plnit hlavně druhou funkci, a to funkci neznámých v rovnicích. Z trimin budeme skládat jednoduché obrazce. Přiložení dvou trimin k sobě jednou celou stranou budeme považovat za operaci, kterou zde označíme operátorem $+$. Součet dvou, tří atd. trimin stejného tvaru zapíšeme jako násobek. Znakem $=$ označíme relaci (vztah) shodnosti dvou vytvořených obrazců.

Algebra se dvěma triminy

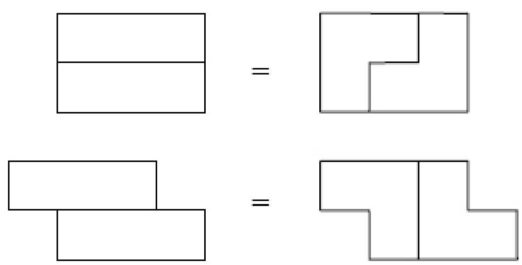
Nejprve se zaměříme na skládání obrazců ze dvou trimin. V tomto případě mohou nastat dvě situace:

A: *Dvě trimina jsou stejná.*

B: *Každé ze dvou trimin je jiné.*

Podle toho můžeme dostat tři teoretické možnosti rovností: $A = A$, $A = B$, $B = B$. Hledejme tedy obrazce, které splňují tyto tři rovnosti. Sestavme proto rovnice pro neznámá trimina, aby byly splněny tyto tři rovnosti.

Rovnost $A = A$ nastane, pokud najdeme trimina x, y splňující rovnost $2x = 2y$, čili pokud vyřešíme rovnici $2x = 2y$. Tato rovnice má dvě řešení znázorněná na obrázku:



Nejpodstatnější při řešení rovnice $2x = 2y$ je to, že z rovnosti $2x = 2y$ neplyne $x = y$, jak jsme zvyklí v algebře s čísly. Uvědomme si ale, že z rovnosti $x = y$ rovnost $2x = 2y$ vyplývá, což je v souladu s algebrou s čísly. Celkově v případě algebry s triminy krácení/rozšiřování dvěma není ekvivalentní úpravou.

Rovnost $A = B$ nastane, pokud bude vyřešena rovnice $2x = x + y$. Ukáže se, že tato rovnice řešení nemá. K důkazu je možné použít trojbarevnou šachovnici, v níž se pravidelně střídají vždy celé řádky obarvené jednou barvou, každé dva sousední řádky mají jinou barvu. Na tuto šachovnici se kladou k sobě dvě stejná trimina všemi možnými způsoby a počítá se, kolik čtverečků stejné barvy pokryjí. Pak se k sobě přikládají dvě různá trimina a opět se počítá počet zakrytých čtverečků stejné barvy. Při žádném pokrytí nemají dva stejné obrazce pokrytý stejný počet políček stejné barvy. V případě této rovnice z rovnosti $x = y$ rovnost $2x = x + y$ neplyne, což je jiná situace než v případě A = A.

Rovnost $B = B$ nastat nemůže, protože sice na levé straně rovnosti může být součet $x + y$, ovšem na pravé straně už žádný takový součet vzniknout nemůže, protože máme k dispozici jen dvě trimina.

Algebra se třemi triminy

V případě tří trimin mohou nastat tři situace:

C: *Tři trimina jsou stejná.*

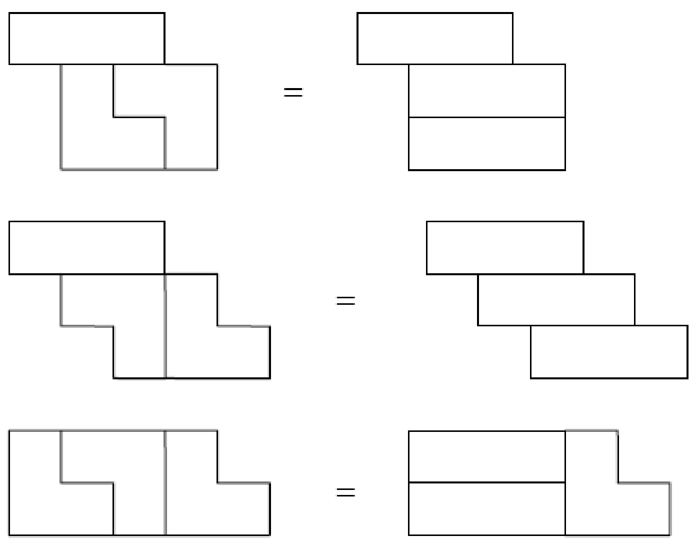
D: *Právě dvě trimina jsou stejná.*

E: *Všechna tři trimina jsou jiná.*

Podle toho můžeme dostat šest rovností: $C = C$, $C =$, $C = E$, $D = D$, $D = E$, $E = E$.

Rovnost $C = C$ nastane, pokud najdeme trimina x, y splňující rovnost $3x = 3y$, čili pokud vyřešíme rovnici $3x = 3y$. Ukáže se, že tato rovnice řešení nemá. K důkazu je možné použít trojbarevnou střídavou šachovnici.

Rovnost $C = D$ představuje vyřešit dvě rovnice, a to $3x = 2x + y$, nebo $3x = x + 2y$. První rovnice řešení nemá a dá se to ověřit opět na trojbarevné střídavé šachovnici. Druhá rovnice řešení má a některá její řešení jsou na obrázku:



Rovnice $3x = x + 2y$ má řešení, protože má řešení rovnice $2x = 2y$. Totiž ke dvěma existujícím shodným obrazcům je možno na stejné místo přiložit trimino x. Naopak ale neplatí, že každé řešení rovnice $3x = x + 2y$ vede odebráním trimina x k řešení rovnice $2x = 2y$. Příkladem toho je poslední rovnost obrazců na předchozím obrázku, kde v levém obrazci odebereme levé trimino L a v pravém obrazci pravé trimino L.

Rovnost $C = E$ nastat nemůže, protože sice na levé straně rovnosti může být součet $3x$, ovšem na pravé straně už žádný takový součet vzniknout nemůže, protože máme k dispozici jen dvě trimina.

Rovnost $D = D$ je vyjádřena řešením rovnice $2x + y = x + 2y$. Tato rovnice ale řešení nemá a dá se to ověřit opět trojbarevnou střídavou šachovnicí. Opět zde nastává situace, kdy z platné rovnosti $x + y = x + y$ neplyne rovnost $2x + y = x + 2y$.

Rovnost $D = E$ nastat nemůže, protože sice na levé straně rovnosti může být součet $2x + y$, ovšem na pravé straně už žádný takový součet vzniknout nemůže, protože máme k dispozici jen dvě trimina.

Rovnost $E = E$ nastat nemůže, protože máme k dispozici jen dvě trimina.

Algebra se čtyřmi triminy

V případě čtyř trimin může nastat pět situací:

F: *Čtyři trimina jsou stejná.*

G: *Právě tři trimina jsou stejná.*

H: *Dvě a dvě trimina jsou stejná, ale ne všechna stejná.*

I: *Právě dvě trimina jsou stejná.*

J: *Všechna čtyři trimina jsou jiná.*

Podle toho můžeme dostat 15 rovností: $F = F$, $F = G$, $F = H$, $F = I$, $F = J$, $G = G$,... Tyto rovnosti generují ale jen šest možných rovnic: $4x = 4y$, $4x = 3x + y$, $4x = x + 3y$, $4x = 2x + 2y$, $3x + y = x + 3y$, $3x + y = 2x + 2y$. Jejich řešení ponecháme jako otevřený problém.

Algebra se dvěma tetraminy

U tetramin se zaměříme pouze na algebru se dvěma tetraminy, a to pouze kvůli demonstraci, neboť práce s více tetraminy je už poměrně rozsáhlá. Mohou tedy nastat dvě situace:

A: *Dvě tetramina jsou stejná.*

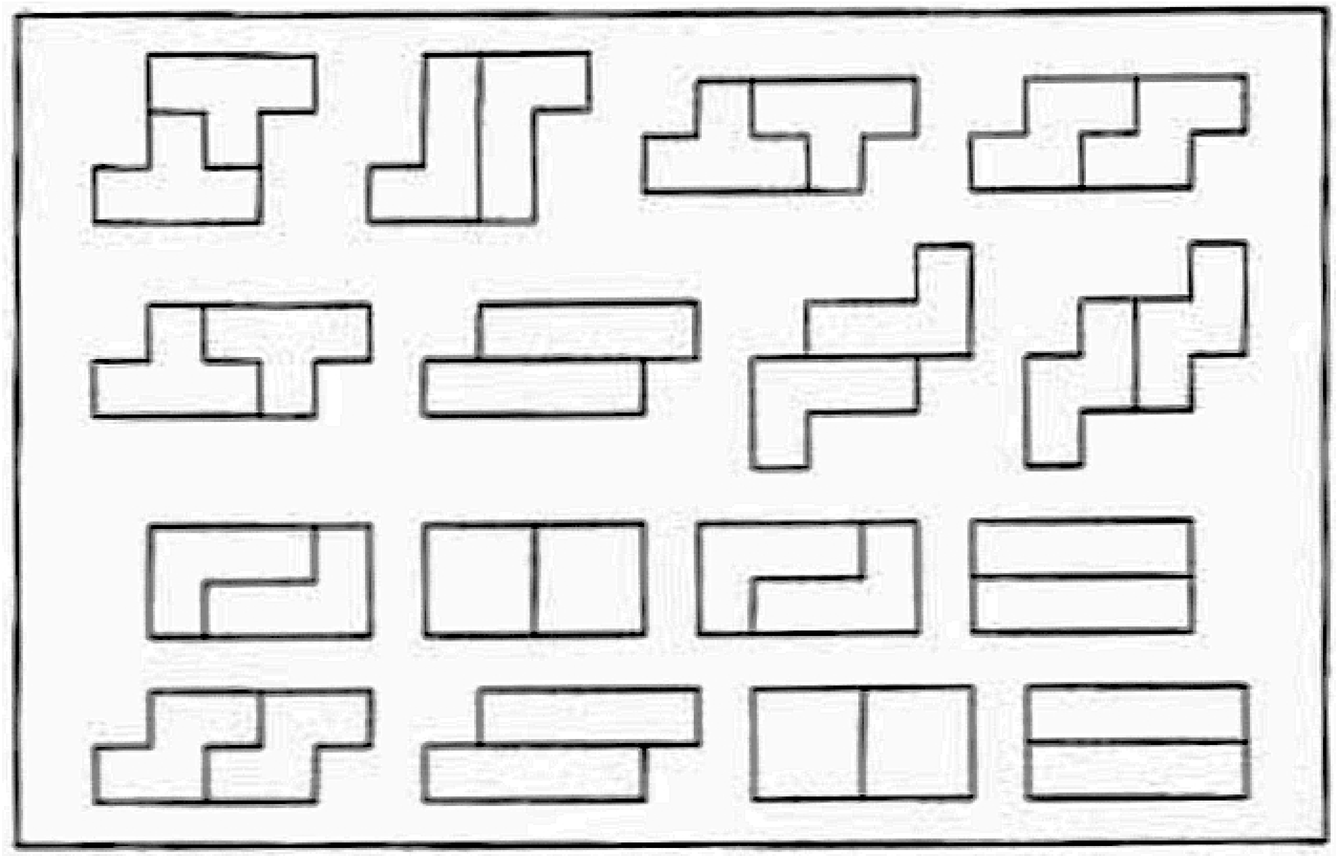
B: *Každé ze dvou tetramin je jiné.*

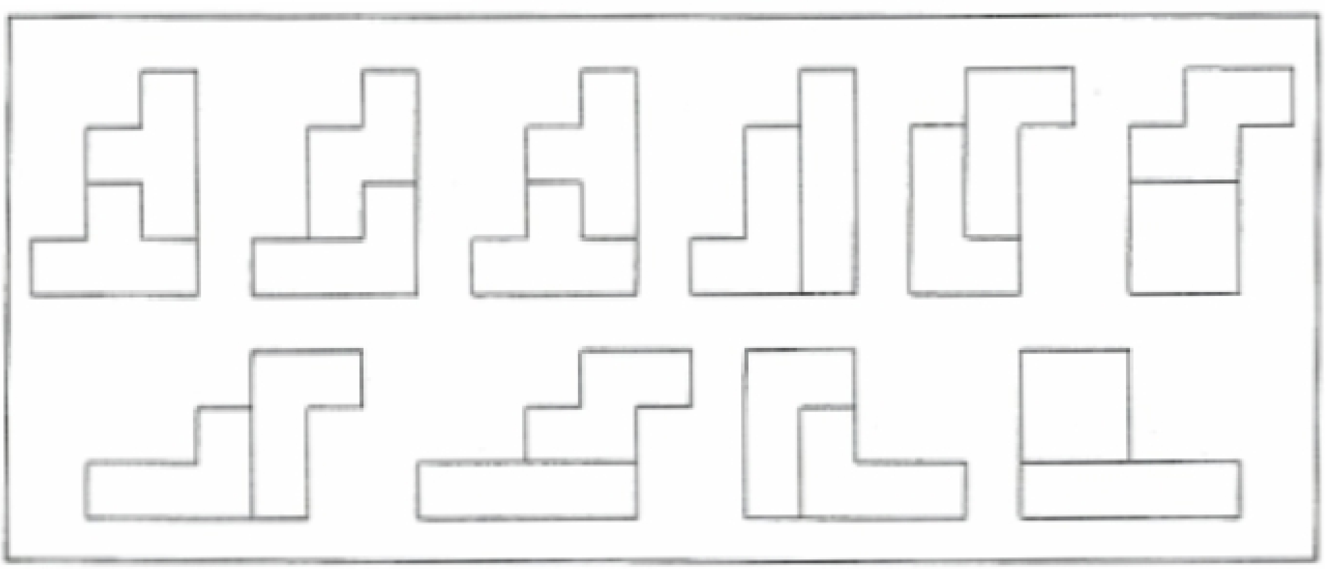
Podle toho můžeme dostat tři teoretické možnosti rovností: $A = A$, $A = B$, $B = B$.

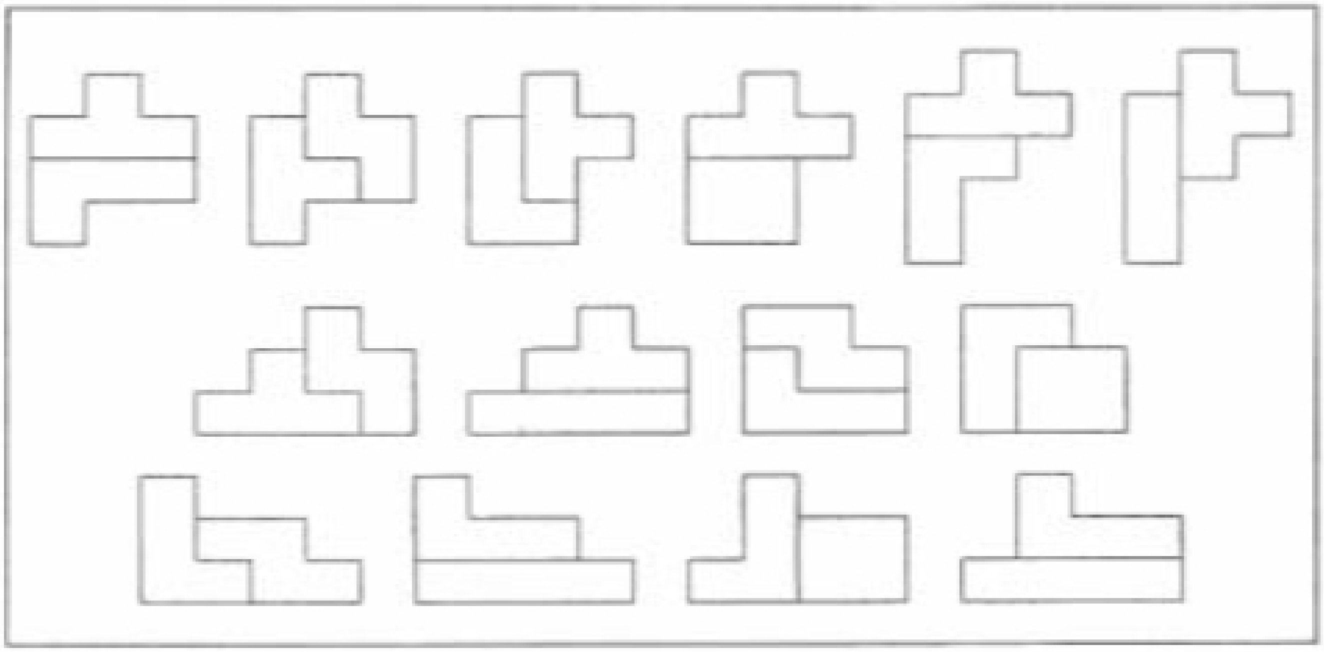
Rovnost $A = A$ představuje řešení rovnice $2x = 2y$. Tato rovnice má všechna řešení znázorněná na obrázku (viz [1]):

Rovnost $A = B$ vede na řešení dvou rovnic, a to buď $2x = x + y$, nebo $2z = x + y$. První rovnice řešení nemá, druhá rovnice má řešení znázorněná na obrázku (viz [1]):

Rovnost $B = B$ vede na řešení dvou rovnic, a to buď $x + y = u + v$, nebo $x + y = x + z$. První rovnice řešení nemá, druhá rovnice má řešení znázorněná na obrázku (viz [1]):







ZÁVĚR

Článek nás seznamuje s netradiční algebrou a s platností, či spíše neplatností pravidel, na která jsme zvyklí při počítání s čísly. (V literatuře se algebra pracující s tetraminy nazývá tetris algebra [1].) Má se tím akcentovat promýšlení práce s matematickými objekty a nikoli jen pouhé přebírání poznatků z předchozího studia matematiky. Úvahy zde provedené je možné ještě zvětšovat do šířky i do hloubky. Např. je možné uvažovat operaci odebírání polymin, je možné pracovat s dalšími typy polymin.

Článek je vhodným námětem práce v matematických kroužcích. Velice vhodný je pro práci s talentovanějšími žáky v matematice.

Příspěvek vznikl za podpory grantu GAUK 4309/2009/A-PP/PedF.

LITERATURA

[1] Chou Chun-Yen, D, Lin Yu-Chuan, N., Tetris Algebra. *Journal of Recreational Mathematics,* Volume 33 (2004–2005), 3, s. 182–192.

[2] Zhouf, J., Polymina. In *Dva dny s didaktikou matematiky 2002*, PedF UK a JČMF Praha 2002, s. 75–80.

Další příspěvky

MULTIMEDIÁLNÍ NOTEBOOKOVÁ UČEBNA KMDM

NAĎA STEHLÍKOVÁ[1]

Pracovníci na KMDM PedF UK řešili spolu s KBEV a KCHDCH v roce 2008 projekt FRVŠ *Podpora ICT v přípravě budoucích učitelů přírodovědných předmětů*. Jedním z jejich cílů bylo zakoupení a využití notebookové učebny, kterou měli možnost využít i účastníci konference *Dva dny s didaktikou matematiky*.

Multimediální mobilní notebooková učebna byla zakoupena a v letním semestru 2007/2008 a v zimním semestru 2008/2009 využívána ve výuce všech tří zainteresovaných kateder. Konkrétně v pravidelné výuce v kurzech Sazba matematického textu a Numerické metody a nárazově v kurzech Didaktika matematiky, Analytická geometrie, Polynomická algebra, Diferenciální počet, Pravděpodobnost a statistika, Diplomový seminář, Chemická informatika, Genetika a molekulární biologie, Kurz mineralogie a geologie.

Účastníci konference měli možnost využít i *multimediální seminární místnost* spojenou s e-learningovou studovnou a pracovnou, v níž se pravidelně koná výuka kurzů Didaktika matematiky, CLIL, Elementární matematika, Integrální počet a Algoritmy. Při tom je využíván zejména potenciál, který skýtá interaktivní tabule. Dále se učebna využívá pro Matematicko-didaktický seminář katedry matematiky a semináře pro doktorandy.

Závěrem dodejme, že zejména pro budoucí učitele je důležité, aby měli příležitost pravidelně při své výuce pracovat s interaktivní tabulí, počítači a dalšími technickými prostředky typu dataprojektu, audiotechniky apod., protože v praxi se od nich jejich využívání ve výuce bude samozřejmě očekávat.

[1]Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta; nada.stehlikova@pedf.cuni.cz

E-learningová multimediální podpora kurzů Didaktika matematiky pro 1. a 2. stupeň ZŠ

Naďa Stehlíková[1]

V roce 2008 jsme byli řešitelé projektu FRVŠ s výše zmíněným názvem, jehož cílem bylo vytvoření e-learningových modulů jako podpory kurzů didaktiky matematiky v prezenční i kombinované formě studia učitelství matematiky a prvního stupně.

Bylo vytvořeno šest e-learningových modulů v systému MS Class Server. Moduly jsou interaktivní, tj. studenti odpovídají na zadané otázky přímo v modulu a učitel má možnost jejich odpovědi komentovat a bodovat je. Vyučující si může vybrat, který modul se pro jeho účely nejvíce hodí. Pro větší provázanost přípravy učitelů na různých stupních škol mohou být moduly primárně určené pro budoucí učitele prvního stupně použity i u budoucích učitelů matematiky a naopak.

Každý modul bude popsán krátkým názvem, cílovou skupinou studentů a stručným obsahem.

Úvodní kurz k analýze videí. (Budoucí učitelé matematiky na 2. a 3. stupni škol, budoucí učitelé prvního stupně.) Cílem modulu je, aby si studenti uvědomili, čeho si ve videozáznamu hodin matematiky všímají a co zanedbávají. Zpětnou vazbu, kterou takto získají, využijí v dalších modulech, kdy mají analyzovat různé záznamy z hodin matematiky. Modul je založen na videozáznamu celé vyučovací hodiny matematiky, který studenti shlédnou, a pak odpovídají na otázky týkající se organizačních forem, činnosti učitele, činnosti žáků, matematické látky apod. Po opakovaném shlédnutí hodiny jsou vyzváni k napsání vlastního komentáře a k navržení svého přístupu k výuce dané látky.

Podnětná výuka matematiky. (Budoucí učitelé matematiky na 2. a 3. stupni škol, budoucí učitelé prvního stupně.) Modul je organizován kolem sedmi principů podnětné výuky. Každý z nich je stručně popsán a ilustrován videoukázkami z různých hodin matematiky, u nichž je jeden nebo více úkolů pro studenty. Některé videoukázky jsou pro větší přehlednost doplněny transkripcí. Modul je doplněn odkazy na relevantní literaturu.

Přístupy k výuce v planimetrii. (Budoucí učitelé matematiky na 2. a 3. stupni škol.) U vybraných planimetrických poznatků (např. věty o shodných trojúhelnících, kosinová věta, Pythagorova věta, Thaletova věta) je popsáno několik způsobů jejich výuky. Tyto

[1]Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta; nada.stehlikova@pedf.cuni.cz

způsoby jsou zpravidla ilustrovány videoukázkami z různých hodin matematiky, k nimž studenti vypracovávají úkoly. Modul navazuje na předchozí v tom, že studenti rozhodují, kam by zařadili předložené způsoby na pomyslné ose od nejinstruktivnějšího k nejpodnětnějšímu. Modul je doplněn odkazy na relevantní literaturu a internetové zdroje.

Geometrická reprezentace zlomků. (Budoucí učitelé prvního stupně, budoucí učitelé matematiky na 2. a 3. stupni škol.) Modul je založen na videozáznamu jedné vyučovací hodiny, která je rozdělena na fragmenty. Ty jsou opatřeny otázkami pro studenty a didaktickými komentáři, které si student může přečíst po zodpovězení otázek. Zdůrazněny jsou zejména fragmenty, v nichž se vyskytuje práce s chybou a konstruktivistický eventuálně transmisivní přístup učitele k výuce. Na závěr jsou formulovány globální otázky směrované do kognitivní oblasti žáků i do oblasti interaktivní. Modul je doprovázen odborným textem o podnětném vyučování.

Výuka indického násobení ve 3., 4. a 5. ročníku základní školy. (Budoucí učitelé prvního stupně.) Modul sestává z videozáznamu tří vyučovacích hodin, ve kterých vyučující seznamuje žáky s Brahmínským násobením. Hodiny jsou vyučovány podle jediného scénáře, ale třemi vyučujícími ve třech různých ročnících základní školy. Materiál je zpracován obdobně jako u předchozího modulu. Jsou zdůrazněny otázky směřující ke konstruktivistickým přístupům k výuce, k práci s chybou a k individuálním přístupům k žákům vzhledem k jejich potřebám. Odborný text, který je přiložen, je úvod k individualizaci výuky.

Diagnostická analýza písemných prací žáků – mnohoúhelníky. (Budoucí učitelé prvního stupně.) Při práci s tímto materiálem se studenti učí analýze písemných prací žáků. Modul obsahuje naskenované ukázky písemných řešení žáků 4. ročníku úloh týkajících se mnohoúhelníků vepsaných do kružnice (ciferníku). Studenti mají zjišťovat zajímavé jevy ukryté v těchto řešeních a poté je porovnat se seznamem jevů pořízeným autory. Nakonec jsou vedeni otázkami k analýze jevů: Co je na tomto jevu pozoruhodného? Co je zde správné či nesprávné z hlediska matematiky? Jaká je příčina tohoto jevu? Jaké by byly možné reedukační postupy? Jaká je vazba tohoto jevu k ostatním jevům? Přiložený odborný text je o chybách, jejich příčinách, typech a reedukaci.

Moduly jsou v současnosti využívány jako podpora kurzů Didaktika matematiky pro budoucí učitele 1. stupně a pro budoucí učitele matematiky 2. a 3. stupně škol v prezenční i kombinované formě studia. Předpokládáme, že budou využity i v dalším vzdělávání učitelů.

Závěrem dodejme, že moduly jsou charakteristické tím, že jsou založeny nejen na odborných textech, ale zejména na videozáznamech výuky matematiky v různých ročnících základní školy, kolem nichž jsou navrženy učební úkoly pro budoucí učitele s cílem propojit teoretické poznatky získané ve studiu na vysoké škole s jejich praktickým uplatněním a rozvíjet schopnost reflexe budoucího učitele jako nástroje sebezdokonalování.

APLIKOVANÁ MATEMATIKA NA TECHNICKÝCH UNIVERZITÁCH

ALENA VAGASKÁ[1]

Abstrakt: Vzhľadom na inovatívny prístup k výučbe matematických predmetov na technických univerzitách sa autorka článku zaoberá metodickými postupmi výučby predmetu Aplikovaná matematika na Fakulte výrobných technológií Technickej univerzity v Košiciach, s dôrazom na využitie vhodnej počítačovej podpory.

ÚVOD

V edukácii matematických predmetov na technických univerzitách je smerodajným cieľom pripraviť študentov na zvládnutie odborných predmetov, t.j. rozvíjať u nich schopnosť aplikovať nadobudnuté vedomosti z matematiky vo svojom odbore počas štúdia a neskôr aj v technickej praxi. V súlade s týmto cieľom sme po štrukturalizácii vysokoškolského štúdia na FVT Technickej univerzity v Košiciach uvítali zavedenie predmetu Aplikovaná matematika v 1. ročníku inžinierskeho štúdia s rozsahom 2/2 ukončeného semestrálnou skúškou. V zimnom semestri šk. r. 2008/2009 sa zahájila výučba tohto predmetu s prvými absolventmi bakalárskeho štúdia. V článku uvádzam metodické poznámky na výučbu daného predmetu na základe skúseností získaných na tzv. počítačových cvičeniach.

IMPLEMENTÁCIA IKT DO VÝUČBY APLIKOVANEJ MATEMATIKY

Pri tvorbe obsahovej náplne predmetu Aplikovaná matematika na FVT TUKE sa vychádzalo zo skutočnosti, že v dôsledku štrukturalizácie vysokoškolského štúdia boli zrušené niektoré matematické predmety, medzi nimi aj predmet Numerická matematika a štatistika. Vzhľadom na to, že metódy numerickej matematiky a štatistiky majú svoje opodstatnenie pri riešení technických problémov v rámci vypracovávania diplomových

[1]Katedra matematiky, informatiky a kybernetiky, FVT TU v Košiciach so sídlom v Prešove; alena.vagaska@tuke.sk

prác, obsahová náplň Aplikovanej matematiky na to reflektovala. V tomto zmysle bol definovaný aj cieľ daného predmetu: „Cieľom prednášok a cvičení je, aby študenti získali teoretické a praktické poznatky z vybraných numerických metód a štatistiky s predpokladom, že ich budú vedieť využiť pri tvorbe a aplikácií algoritmov na riešenie konkrétnych úloh s podporou PC.“, ako sa dozvedáme z tzv. informačného listu predmetu.

Predmet Aplikovaná matematika poskytuje dostatočný priestor pre inovatívne prístupy k výučbe prostredníctvom implementácie IKT do výučby a zavádzaním nových foriem výučby. Cvičenia, priebežné kontroly počas semestra ako aj písomná časť skúšky sa totiž realizujú výlučne v počítačovej učebni, čo je vzhľadom na prácnosť výpočtov v numerických metódach a náročnosť matematických výpočtov v technických aplikáciách nevyhnutnosťou a samozrejmosťou. Počítačom podporovaná výučba Aplikovanej matematiky na FVT s danou obsahovou náplňou má množstvo výhod, medzi ktoré nesporne môžeme zaradiť zvýšenie motivácie študentov, veľké grafické a zobrazovacie možnosti súčasných PC, ktoré umožňujú vizualizáciu a simuláciu vzťahov, no hlavne čiastočnú, či dokonca úplnú elimináciu rutinných prác a prácnych výpočtov (najmä čo sa týka numerických metód) [1]. Avšak počítačová podpora výučby prináša aj určité nevýhody, na čo upozorním neskôr.

Aplikácie MS Excelu vo výučbe Aplikovanej matematiky

Pri riešení konkrétnych úloh na cvičeniach z Aplikovanej matematiky sa na FVT využíva v súčasnosti MS Excel. Je samozrejmé, že sme na cvičeniach pri riešení úloh mohli využívať aj iný softvér, napr. MATLAB, MAPLE a pod. No keďže MATLAB je na FVT v bakalárskom štúdiu zaradený len medzi voliteľné predmety, nemohli sme sa spoliehať na zručnosti v práci s týmto matematickým programom u všetkých študentov. Nezanedbateľná časť študentov by bola na cvičeniach v nevýhode. Ich aktívnejšie sa zapojenie do výučby bo bolo takmer nemožné vzhľadom na ich neschopnosť algoritmizácie príslušnej metódy v MATLABE. Preto sa MS Excel javil ako vhodnejšia voľba, ak sme vzali do úvahy jednoduchosť práce v prostredí MS Excel a v neposlednom rade aj jeho ľahkú dostupnosť.

Uvedieme si príklad metodického postupu pri vedení cvičenia z Aplikovanej matematiky napr. na tému „Numerické metódy riešenia nelineárnych rovníc“. V odborných predmetoch, či v technickej praxi sa totiž často možno stretnúť s algebraickými a transcendentnými rovnicami, ktoré sa nie vždy dajú riešiť analyticky (presné určenie koreňov rovnice). Napr. v odbornom predmete *Pružnosť a pevnosť* pri posudzovaní stability prúta, t.j. pri určovaní Eulerovej kritickej sily F_k a kritického napätia σ_k pre prút konštantného prierezu s plochou A, ktorý je na jednom konci votknutý a druhý koniec prúta je kĺbovo uložený, je potrebné vyriešiť diferenciálnu rovnicu s okrajovými podmienkami. Pri hľadaní jej netriviálneho riešenia narazíme na rovnicu $\operatorname{tg} x = x$, ktorú nevieme vyriešiť analyticky. V takých prípadoch je vhodné použiť numerické a grafické metódy riešenia rovníc, ktoré síce umožňujú nájsť len približné riešenie rovnice, avšak s požadovanou presnosťou. Pri oboch metódach sa vo veľkej miere realizuje využitie PC.

V predmete Aplikovaná matematika učíme študentov využívať pri riešení nelineárnych rovníc metódu bisekcie, metódu Regula-falsi, Newtonovu a iteračnú metódu. Niekedy rovnaké úlohy náročky riešime rôznymi numerickými metódami, aby študenti mali možnosť porovnať ich presnosť, náročnosť počas riešenia, či rýchlosť konvergencie. Vzhľadom na využitie výpočtovej techniky si to môžeme dovoliť, nie je to časovo náročné a má to svoj efekt. Našim cieľom na cvičeniach totiž nie je len študentov zoznámiť s algoritmami numerických metód a s ich používaním za vhodnej počítačovej podpory. Chceme, aby študenti vedeli nielen základné vzorce vzťahujúce sa k daným numerickým metódam, ale aby boli schopní rozpoznať ich obmedzenia, slabiny. Aby vedeli zdôvodniť, kedy daná metóda diverguje a prečo, prečo použiť radšej inú. Preto na cvičeniach študentom ukazujeme na určitých príkladoch divergenciu vybraných metód a to ako pri nesplnení podmienok konvergencie, tak i v dôsledku numerickej nestability výpočtu. Na konkrétnom príklade poukážeme na tieto atribúty a na možností využitia MS Excelu vo vyučovaní Aplikovanej matematiky.

Metódou regula-falsi vypočítajme s presnosťou $\epsilon = 10^{-5}$ najväčší reálny koreň rovnice

$$x^3 - 5x^2 - 8x + 6 = 0 \tag{7}$$

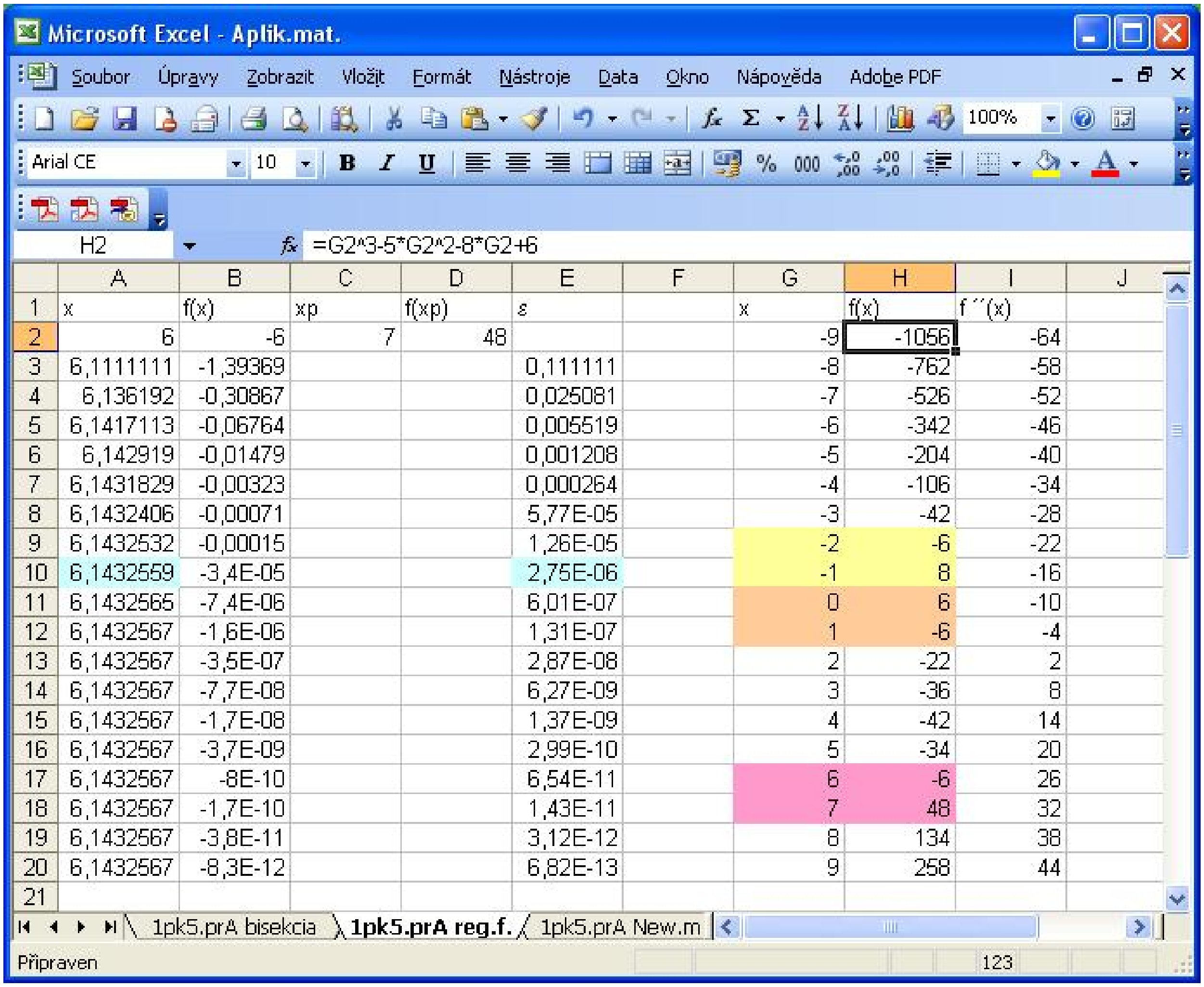
Cieľom článku nie je uvádzať teoretické základy jednotlivých metód, študentom ich na cvičeniach ozrejmujeme cez prezentácie, odkiaľ ľahšie pochopia význam jednotlivých vzťahov a podmienok pre iterácie. Pri metóde regula-falsi je podstatné študentom uviesť, že táto metóda (ináč nazývaná aj metóda tetív) pri riešení rovnice $f(x) = 0$ vychádza z toho, že na intervale $\langle a, b\rangle$, kde $f(a) \cdot f(b) < 0$ je funkcia $f(x)$ nahradená Newtonovym lineárnym interpolačným polynómom, priamkou. Postupnosť iterácií počítame potom podľa vzťahu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(\bar{x})}(x_n - \bar{x}), n = 0, 1, 2 \dots \tag{8}$$

Iteračná postupnosť $\{x_n\}$ konverguje ku koreňu α. Začiatočný bod iterácie x_0 a pevný bod iterácie $\bar{x}$ musia spĺňať tieto podmienky:

$$\begin{aligned} f(x_0) \cdot f''(x_0) < 0 \\ f(\bar{x}) \cdot f''(\bar{x}) > 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Iteračný výpočet sa ukončí, ak je splnená podmienka $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$, kde ϵ je požadovaná presnosť riešenia. Pri numerickom riešení nelineárnych rovníc v tvare $f(x) = 0$ musíme vždy najprv urobiť separáciu koreňov rovnice a potom vybrať a realizovať vhodnú numerickú metódu. Už pri separácii koreňov môžeme demonštrovať význam počítačovej podpory vyučovania Aplikovanej matematiky, konkrétne silu nástroja MS Excel. Ako vidno z obr. 1, stačí v jednom stĺpci (v našom prípade v stĺpci G) vytvoriť číselnú postupnosť. Pre náš príklad má rovnica reálne koeficienty, preto všetky reálne korene sú v intervale $\langle -9, 9\rangle$ [Majerčák]. V druhom stĺpci vložíme do bunky H2 predpis ľavej strany nelineárnej rovnice $f(x) = 0$, t.j. v našom prípade predpis `=G2^3-5*G2^2-8*G2+6`. Využijúc relatívny odkaz nám Excel vyráta funkčné hodnoty v ďalších bodoch. Veľmi rýchle zistíme intervaly, na ktorých dochádza k tzv. znamienkovej zmene funkčných hodnôt. Na obr. 1 máme intervaly, v ktorých sa nachádza koreň rovnice, vyznačené v stĺpci H farebne. Na týchto intervaloch je totiž splnená podmienka $f(a) \cdot f(b) < 0$. Keďže my hľadáme najväčší reálny koreň, ďalej budeme pracovať s intervalom $\langle 6, 7\rangle$.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x	f(x)	xp	f(xp)	ε		x	f(x)	f´´(x)
2	6	-6	7	48			-9	-1056	-64
3	6,1111111	-1,39369			0,111111		-8	-762	-58
4	6,136192	-0,30867			0,025081		-7	-526	-52
5	6,1417113	-0,06764			0,005519		-6	-342	-46
6	6,142919	-0,01479			0,001208		-5	-204	-40
7	6,1431829	-0,00323			0,000264		-4	-106	-34
8	6,1432406	-0,00071			5,77E-05		-3	-42	-28
9	6,1432532	-0,00015			1,26E-05		-2	-6	-22
10	6,1432559	-3,4E-05			2,75E-06		-1	8	-16
11	6,1432565	-7,4E-06			6,01E-07		0	6	-10
12	6,1432567	-1,6E-06			1,31E-07		1	-6	-4
13	6,1432567	-3,5E-07			2,87E-08		2	-22	2
14	6,1432567	-7,7E-08			6,27E-09		3	-36	8
15	6,1432567	-1,7E-08			1,37E-09		4	-42	14
16	6,1432567	-3,7E-09			2,99E-10		5	-34	20
17	6,1432567	-8E-10			6,54E-11		6	-6	26
18	6,1432567	-1,7E-10			1,43E-11		7	48	32
19	6,1432567	-3,8E-11			3,12E-12		8	134	38
20	6,1432567	-8,3E-12			6,82E-13		9	258	44
21									

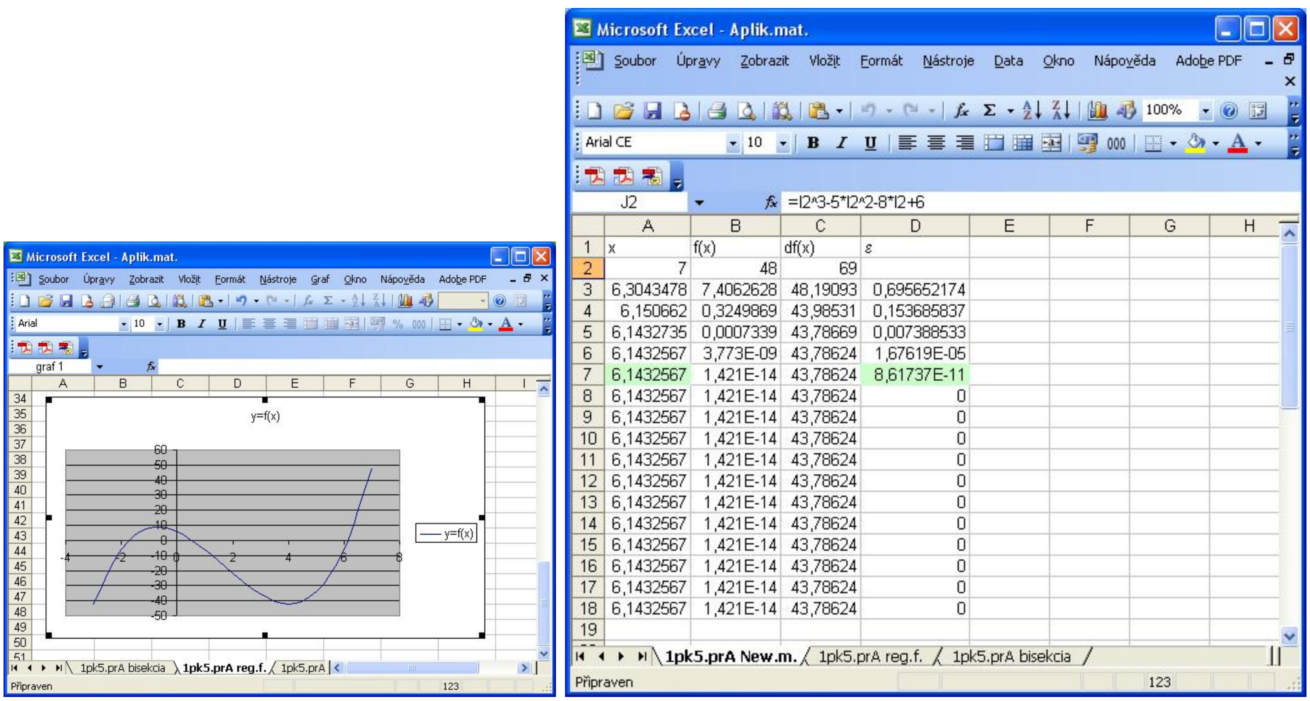
Obr. 1: Intervaly kořene rovnice

V metóde regula-falsi potrebujeme určiť začiatočný bod iterácie x_0 a pevný bod iterácie $\bar{x}$ podľa podmienok zo vzťahu (3). S Excelom je to opäť veľmi jednoduché, stačí do ďalšieho stĺpca (stĺpca I) vložiť predpis pre druhú deriváciu funkcie a hneď je zrejmé, že $x_0 = 6$ a $\bar{x} = 7$. V stĺpcoch A až E je realizovaný výpočet metódou regula-falsi. Do bunky A2 vložíme číslo 6, do bunky B2 ľavú stranu rovnice, t.j. hodnotu $f(x)$ v začiatočnom bode, teda predpis `=A2^3-5*A2^2-8*A2+6`, do bunky C2 číslo 7, do bunky D2 hodnotu v pevnom bode, t.j. predpis `=C2^3-5*C2^2-8*C2+6`. V bunke A3 je iteračný vzorec

(2), ktorý po prepise v Exceli vyzerá následovne: `=A2-B2/(B2-$D$2)*(A2-$C$2)`. Tu už študenti musia vedieť používať absolútny odkaz. Cez relatívny odkaz vzhľadom na bunku B2 doplníme bunku B3. V bunke E3 je prepis vzťahu $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$ pre presnosť riešenia, t.j. `=ABS(A3-A2)`. Ak označíme pole A3–E3, tak cez relatívny odkaz nám Excel veľmi rýchle vypočítava jednotlivé iterácie. Z obr. 1 vidno, že požadovaná presnosť je splnená pri deviatej iterácii. Koreň $\alpha = 6\,14325$ je vyznačený v bunke A10, požadovaná presnosť v bunke E10.

Excel má svoje opodstatnenie aj pri grafickej interpretácii separácie koreňov, t.j. grafickom riešení nelineárnych rovníc a sústav nelineárnych rovníc. MS Excel dokáže z vypočítaných údajov veľmi jednoducho vytvárať grafy rôznych typov. Grafická interpretácia umožňuje študentom skontrolovať svoje výpočty a taktiež podporuje rozvoj matematickej predstavivosti. Na obr. 2a máme v Exceli znázornený graf funkcie $y = f(x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 6$. Vidíme, že v bodoch, v ktorých graf tejto funkcie pretína os x, sa nachádzajú korene riešenej rovnice (1).

Na obr. 2b je ukážka riešenia rovnice (1) Newtonovou metódou v Exceli. Je zrejmé, že pri tejto metóde je vyššia rýchlosť konvergencie.



Obr. 2: (a) Graf funkcie $y = f(x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 6$; (b) Riešenia rovnice Newtonovou metódou

ZÁVER

Nadšenie študentov z možnosti využívať pri riešení úloh MS Excel bolo evidentné už pri úvodných témach Aplikovanej matematiky (aproximácia funkcií, numerické metódy riešenia nelineárnych rovníc, riešenie sústav lineárnych a nelineárnych rovníc, numerický výpočet integrálu. . .). Študenti oceňovali možnosť grafickej interpretácie a mnohokrát si uvedomovali, koľko pracných výpočtov za nich vykoná MS Excel, čo sa im veľmi rátalo. No ukázalo sa, že pre niektorých študentov prílišná dôvera vo výpočtovú techniku viedla k podceňovaniu teoretických znalosti, čo viedlo k problémom interpretovať výsledky získané v Exceli. To sa prejavovalo už počas priebežných kontrol a aj neskôr na skúškach. Nedá mi nespomenúť, že u týchto študentov prvého ročníka inžinierskeho štúdia sa taktiež negatívne prejavila skutočnosť, že prváci v inžinierskom štúdiu nemali žiadny matematický predmet predchádzajúce dva roky, naposledy v letnom semestri 1. ročníka bakalárskeho štúdia. Je to dlhá doba, preto sa štýl výkladu učiva na cvičeniach často musel prispôsobovať slabým teoretickým základom študentov. Často krát sme museli „oprášiť" dávno zabudnuté poznatky z diferenciálneho počtu funkcie jednej reálnej premennej - študenti zabudli derivovať, čo vyplávalo na povrch napr. pri overovaní podmienok konvergencie riešenia nelineárnej rovnice Newtonovou metódou či metódou regula-falsi. Aj napriek uvedenému môžeme na záver konštatovať, že využívanie IT vo vzdelávacom procese, konkrétne v rámci výučby Aplikovanej matematiky výrazne uľahčuje a zefektívňuje ako prácu študentov, tak aj učiteľa.

LITERATURA

[1] Beisetzer, P.: Učiteľ a jeho schopnosť zhodnotiť aplikáciu počítača. In *Kľúčové kompetencie a technické vzdelávanie* [elektronický zdroj] : III. InEduTech 2007. - Prešov : Prešovská univerzita v Prešove, 2007. S. 94–98. Popis urobený 16.10.2007.

[2] Fulier, J. – Ďuriš, V.: O niektorých aspektoch využitia programov počítačovej algebry (CAS) vo vyučovaní matematiky, In *IKT vo vyučovaní matematiky 2*, Edícia Prírodovedec č. 230, Nitra: FPV UKF v Nitre, 2006, s. 5–14.

[3] Fulier, J. – Šedivý, O.: *Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky*, edícia Prírodovedec č. 87. Nitra : FPV UKF, 2001, 270 str..

[4] Hrubina, K. – Majerčák, J. – Boržíková, J.: *Riešené úlohy algoritmami numerických metód s podporou počítača.* Košice : Informatech, 2001. 237 s.

[5] Stanoyevitch, A.: *Introduction to Numerical Ordinary and Partial Differential Equations Using Matlab*. Wiley Series in Pure and Applied Mathematics. J. Wiley Sons, 2005.

[6] Šterbáková, K.: Multimédia a počítačom podporovaná výučba fyziky. In *INFOTECH 2007. Moderní informační a komunikační technologie ve vzdělávání* [elektronický zdroj] : sborník příspěvků : díl 2. Olomouc : Univerzita Palackého, 2007, s. 433–436.

EKOGRAM

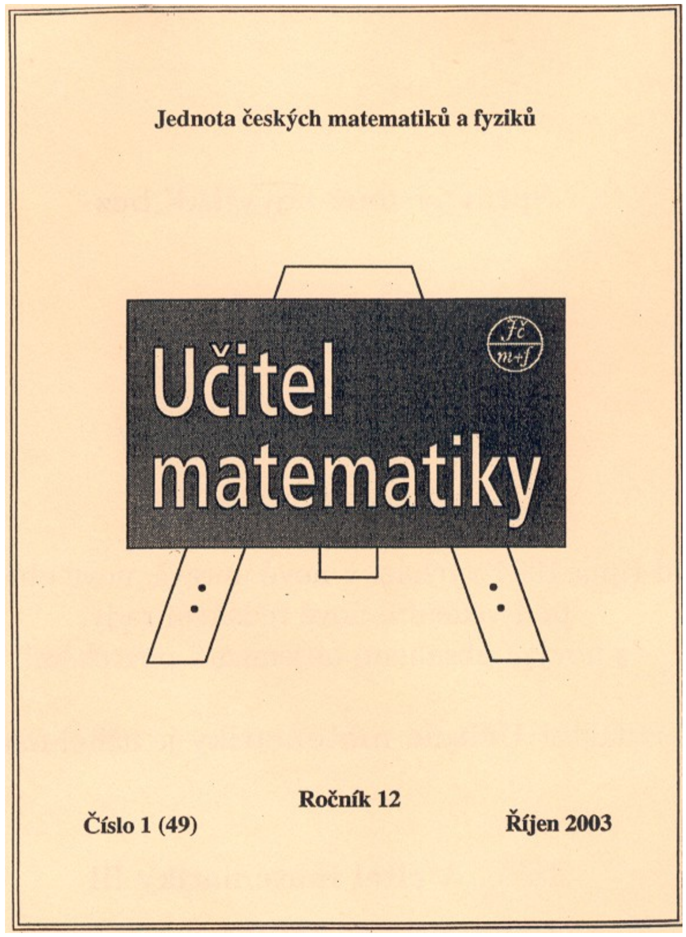
centrum pro podporu ekonomické a finanční gramotnosti

V říjnu 2009 se zástupci neziskové organizaceEkogram zúčastnili celostátní konference matematiků v Litomyšli. Na konferenci představili seminář zaměřený na zvyšování finanční a ekonomické gramotnosti, při kterém si studenti virtuálně prožijí život v moderované hře *Virtulife*. Seminář se setkal u pedagogů s velkým úspěchem.

Ekogram je nezisková organizace, která se zabývá zvyšováním ekonomické a finanční gramotnosti. Posláním Ekogramu je působit na žáky a studenty tak, aby se vyznali ve finančních produktech dostupných na trhu a uměli si z nich správně vybrat. Pro vyzkoušení semináře ve školách vždy nejprve sehrajeme hru s pedagogy, aby mohli posoudit přínos hry pro jejich školu.

Další informace najdete na stránkách

`www.ekogram.cz` a `www.virtulife.cz`.



Časopis *Učitel matematiky*, vydávaný *Jednotou českých matematiků a fyziků*, vkročil již do 18. ročníku. Snahou redakce je přiblížit náplň časopisu skutečným potřebám učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Nechceme vydávat „akademické“ periodikum o teoretických otázkách vyučování, ale živý časopis reagující na problémy učitelů matematiky.

Časopis uveřejňuje nejen „matematické“ články, ale rovněž články o vztahu matematiky a umění, o historii matematiky, o alternativním školství, staré i nové úlohy a zajímavé příklady, aktuální informace o dění ve školství, o matematické olympiádě, o seminářích, letních školách a dalších akcích pro učitele, informace o nových učebnicích, recenze atd. Časopis vychází čtyřikrát ročně v rozsahu 64 stran.

Administrace časopisu:

Miluše Hrubá
Gymnázium, A. K. Vítáka 452
Jevíčko
569 43
e-mail: hruba@gymjev.cz

Vedoucí redaktor: Dag Hrubý Výkonný redaktor: Eduard Fuchs

Dva dny s didaktikou matematiky 2009. Sborník příspěvků.

Editoři:	Naďa Stehlíková, Lenka Tejkalová
Sazba:	Naďa Stehlíková a Lenka Tejkalová, systémem $\LaTeX$
Počet stran:	154
Vydala:	Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, v roce 2009
Místo vydání:	Praha

Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.
Text sborníku neprošel jazykovou úpravou.

Pro vnitřní potřebu, neprodejné.

ISBN tištěné verze: ISBN 978-80-7290-420-4
ISBN CD ROM verze: 978-80-7290-421-1