Kvantumlogika

FÁY GYULA - TŐRÖS RÓBERT

A kvantummechanika a fizikai mikrovilág egyfajta matematikai modellje, a kvantumlogika pedig e modellben foglalt kijelentések tulajdonságaival és törvényszerűségeivel foglalkozik. Mintegy ötven évvel ezelőtt Garrett Birkhoff és Neumann János kezdték el e diszciplína felépítését. Neumann 1935. november 13-án ezt írta Birkhoffnak: "Szeretnék egy vallomást tenni, amely lehet, hogy erkölcstelennek fog tűnni: többé már egyáltalán nem hiszek a Hilbert-térben. A Hilbert-teret mindenekelőtt (amennyiben kvantummechanikai dolgokkal kapcsolatos) az euklideszi-tér általánosításával nyertük elfogadva az összes formális szabályok érvényben maradásának elvét... kezdjük azonban azt hinni, hogy ennek a térnek nem a vektorai, hanem altereinek hálója a lényeges." Az erkölcstelen szó használata némi magyarázatot igényel. Neumann János alkotta meg a kvantumjelenségek leírására alkalmas, adekvát matematikai apparátust: a Hilbert-teret és a Hilbert-térben értelmezett transzformációk, operátorok elméletét. Miután ennek célrateremtettségéről meggyőzte a világ elméleti fizikusait és matematikusait – azaz az elmélet elterjedt a tudományos" köztudatban" – lényegesen módosította saját koncepcióját. Neumann János és Garrett Birkhoff megmutatták, hogy a kvantummechanika nemcsak önálló, új diszciplína, hanem egyben új logika is. Nézzük, milyen logika!

A kvantumfizika világában az ítéletek másféle törvényszerűséget követnek, mint a makrofizikában. (A továbbiakban azonos értelemben használjuk az ítélet, az állítás és a kijelentés szavakat.) A legegyszerűbb kijelentés: a mikrofizikai részecske helykoordinátáinak és impulzustartományának megadása: pl. az x,y,z pontban van. Vagy p impulzusa a (p_1,p_2) tartományba esik. Ez elég kevés információt tartalmazó állítás, hiszen a közvetlenül érzékelhető makroszkopikus világban is kevés, ha például egy autóról csak annyit mondunk, hogy adott helyen van, vagy hogy sebessége (impulzusa) mely tartományba esik. Nos az elvi újdonság az, hogy amíg a makroszkopikus fizikában egyszerre pontosan megadhatjuk a test helyét és sebességét, sőt ilyenfajta elemi kijelentést korlátozás nélkül többet is tehetünk egyszerre, a kvantumfizikában nem, illetve nem mindig lehetséges ez.

Paul Jordan, a kvantummechanika egyik megalkotója 1950-ben így ír: "G. Birkhoff és J. von Neumann vetették fel azt a vonzó elgondolást, hogy a kvantumelmélet nem annyira a mechanika általánosítása (kvantummechanika), sokkal inkább a logikáé."

A kvantumelméletről röviden

Nézzük a kvantumelmélet kialakulásának előzményeit! A huszadik század fizikája két új elmélettel gazdagodott. Az egyik a nagy sebességek és nagy tömegek tartományában érvényes relativitáselmélet, a másik a mikrofizikai objektumokra alkalmazandó kvantumelmélet. A századfordulóig úgy látszott, hogy az elméleti fizika problémái megoldottak, a néhány nyitva maradt kérdés – ilyenek voltak a fekete sugárzás spektrumának, a gázok és gőzök vonalas színképeinek, a szilárdtestek fajhőjének és a fotoeffektusnak az elméleti magyarázata – megoldhatónak tűnt az akkoriban már jól kifejlesztett, nagy érvényességi körű diszciplínák, a mechanika és az elektrodinamika segítségével. A felsorolt jelenségek magyarázatára való törekvés szülte a Planck-féle kvantumhipotézist, a Bohr-féle atomhéjmodellt, a Broglie-féle anyaghullám elméletet. A hipotézisek ragyogóan származtatták a tapasztalati úton is mérhető tulajdonságokat, ezért a huszas évek közepétől megindult a modellek konzisztens elméletté történő összeállítása. *Erwin Schrödinger, Werner Heisenberg, Max Born, Paul Jordan* és *Paul Dirac* nevéhez fűződik azoknak az alapelveknek és fundamentális összefüggéseknek a felismerése és megfogalmazása, amelyek segítségével a mikrofizikai rendszerek jellemezhetők. A mechanikai mennyiségek – gyakran diszkrét – értékkészletét, annak adott állapotban lévő valószínűségeloszlását, általános érvényű szabályok alkalmazásával ki lehet számítani. Az elmélet kellő szigorúsággal megfogalmazott matematikai és fogalmi apparátusát, amely még ma sem avult el, végül *Neumann János* adta meg az 1932-ben megjelent *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (A kvantummechanika matematikai alapjai) című könyvében. Az alapelmélet ezzel bizonyos nyugvópontra jutott és azóta beszélhetünk kvantummechanikáról, mint deduktív tudományról. A Neumann-féle felépítés a kvantummechanikai rendszer állapotait a Hilbert-tér elemeiként kezeli, a fizikai mennyiségek a Hilbert-tér meghatározott operátorai, értékkészleteik pedig ezen operátorok sajátértékei. A kvantummechanikai mennyiségekre vonatkozó állítások a Hilbert-tér alterei. Az elmélet meglehetősen elvont, de egzaktságát tekintve a klasszikus mechanika és az elektrodinamika matematikai megfogalmazásával egyenrangú.

A hétköznapi szemlélet csak a megszokottat tudja elképzelni. Vannak fizikusok, akik emiatt képszerűbben, szemléletesebben szeretnék lát(tat)ni a kvantumjelenségek elméletét. Véleményünk szerint éppen a minden áron való képszerűségre törekvés, a szemléltetés erőszakolása nehezíti meg a mikrofizika törvényeinek megértését. A mikro- és a makrofizika a világ két különböző természetű modellje, különbözőségük a törvények eltérő jellegében van. A ténylegesen meglévő világ kérdéseire hol az egyik, hol a másik elmélet ad helyes választ. A kettő közötti egzakt átmenetet ma még nem sikerült megtalálni.

A mikrovilágról makroszkopikus modellt készíteni csak "hamisítások" sorozatával lehet, ezért a "képszerű modellhez" kompromisszumokat kell kötni. Ilyenkor nem egzakt fizikai törvényekkel dolgozunk, hanem a makroszkopikus világból felépített modellt szemléljük. A "szemléletes" kvantumelmélet a mikrovilágot a részecske és hullám-kép dualitással mutatja be. Individuális elemi részecskéről beszél, de a modellezett képződmények se nem elemiek se nem individuumok. E szemléltetésben a mikrovilág a közvetlenül látott világnak ellentmondásokkal teli változata.

Ez a szemléltetés esetenként munkahipotézisként alkalmazható és célszerű használni, de semmiképpen nem hagyható figyelmen kívül ilyenkor, hogy nem az egzakt elmélettel dolgozunk; meg kell adni a munkahipotézis határait. A kvantumelmélet tényismerete nélkül világképet alkotni nem szabad, mert az folytatás nélküli eklektikus világkép lenne.

A kvantáltság

Milyen különös kijelentéseket szolgáltat a kvantummechanika? Az egyik ilyen a kvantumszerűség. Ez a tulajdonság tapasztalati tény, amelyet matematikailag algoritmussal célszerű megfogalmazni, mivel a kvantált értékkészlet csak bizonyos esetekben áll egyetlen kvantumérték egész számú többszöröseiből. (Egy makroszkopikus test töltése az elektron töltésének egész számú többszöröse, tömege az alkotó molekulák vagy atomok tömegének egész számú többszöröse.) Az elektromágneses sugárzási tér — a fotonok energiája azonban a legváltozatosabb módon kvantált. A kvantummechanika nagy eredménye mármost, hogy az atom és a molekula héjszerkezetére jellemző sugárzási spektrumát nagy pontossággal szolgáltatja, de folytonos változókat is figyelembe tud venni. Az atomi részek kettős természetűek egyszerre rendelkeznek részecske és hullámtulajdonságokkal. A részecske helyzetkoordinátája lehet kvantált (részecske jelleg) és ezzel nem egyidejűleg az impulzusa is lehet kvantált (hullámtermészet). Erőtérmentes tartományban (szabadon mozgó részecske esetén) ezek egyike sem pontosan definiált, sem koordináta, sem impulzus "sajátállapot" nincsen, ezért ez a szemlélődésben némi bonyodalmat okoz. A *Niels Bohr* által megfogalmazott komplementaritási elv szerint lehetőségekben kiegészítő, megnyilvánulásokban kizáró tulajdonságokról van itt szó. A kvantumelmélet nem csak a helyzet és impulzus mennyiségpár esetében állít kizáró alternatívát. Bármilyen tulajdonság (mennyiség) pontos ismeretét feltételezve mindig található számos további olyan mennyiség, amelynek értéke nem definiált, ismételt mérése egy (folytonos vagy kvantált) értelmezési tartomány feletti valószínűségeloszlást nyújt. Ennek tudomásulvétele már igazolja a kvantumlogika létjogosultságát, hiszen nem egy határozatlansági reláció magyarázatára alkalmaz a Hilbert-tér matematikai apparátusnak absztrakciós szintjén is túllépő struktúrát, a hálóelméletet, hanem az egész elmélet statisztikus jellegének használatához ad támpontokat.

Principálisan új jelenségeket szolgáltatnak a jellegzetesen kvantummechanikai effektusok, amelyek az elmélet fundamentális szabályainak következményeként lépnek fel és a klasszikus szemlélődéssel megérthetetlenek. Ezek miatt ajánlotta a közelmúltban Magyarországot látogató világhírű magyar fizikus, *Teller Ede* a kvantummechanika megtanítását és a kutatásokban való alkalmazását.

Egyik ilyen effektus, hogy a kölcsönhatásokban résztvevő objektumok individualitása megszűnik. A legegyszerűbb szerkezetű molekula, a H_2 kötésének kvantummechanikai számítása a kötési energiát több tag összegeként állítja elő. Ezek egyike elektromos eredetű ugyan, de nem lokalizálható a kölcsönhatásban résztvevő protonok és elektronok egyikére sem. A kötést létrehozó elektronok egyedisége szétmosódik, ezért az energia csak térfogati bontásban lokalizálható és úgy additív. Bármely rendszernek (egy mikrorészecskének is) csak addig van állapota, ameddig a környezetétől elszigetelt. Mivel a klasszikus mechanika nem csak ilyen izolált rendszereket képes determinisztikusan leírni, ezért a kvantummechanikától is elvárjuk, hogy képes legyen ilyenre. Míg a klasszikus tárgyalásmód az izolált rendszeren belüli kölcsönhatást ugyanazon dinamikai törvények szerint adja meg, amelyeket az izolált rendszer egészére is vonatkoztat, a kvantumelmélet ilyen értelemben vett kölcsönhatásokat, zárt rendszeren belüli energia-kicserélődéseket nem ismer és nem alkalmaz ilyen dinamikai törvényeket, hanem az energetikailag zárt (izolált) rendszerekben lezajló folyamatokat *spontán folyamatoknak* tekinti, szemben a *mérési folyamatokkal* (a megkülönböztetés Neumann Jánostól származik), amelyek úgy írhatók le, hogy a mérendő objektum és a mérő rendszer együttese izolált, a mérés a rendszeren belül zajlik le. A részrendszer állapota — hullámfüggvénye — ilyenkor már nem változik determinisztikusan, az állapot jövőjére vonatkozó kijelentések statisztikus természetűek, a pontos (nem statisztikus) állapot ismeretében is csak statisztikus természetű ítéleteket tehetünk az állapot jövőjére. Az ilyen állapotot *keveréknek* nevezzük. Az állapot lehetséges előfordulásainak valószínűségei a keverés súlyai. Az izolált rendszer állapotának időbeli változása determinisztikus, az állapot egy adott pillanatban meghatároz minden későbbi állapotot. Ezt *tiszta* állapotnak nevezzük. (Csak egy állapotfüggvény van és marad is.) Ez a leírás hasonló a pontmechanikai állapot- (koordináta + impulzus) és folyamat- (dinamikai egyenlet) leíráshoz, de nem azonos vele. Ott egy időpontbeli állapot és a kölcsönhatás ismeretében a test jövőbeli állapota kiszámítható.

Rejtett paraméterek

Sajátosan kvantumelméleti eredetű probléma a rejtett paraméterek kérdése. A klasszikus elmélet *Ludwig Eduard Boltzmann* úttörő kezdeményezése nyomán a fenomenologikus elméletet (termodinamikát) megpróbálta úgy leszármaztatni, hogy a jellegzetes termodinamikai mennyiségeket (hő, hőmérséklet) továbbá a mechanikai természetű, de fenomenologikusan értelmezett nyomást (feszültséget) mikrorészecskékből álló sokaság egyedi adatainak átlagadataként értelmezi. Ezek az átlagok mikrofizikai tulajdonságokat tartalmaznak és makroszkopikus mérés alapján visszakövetkeztethetünk ezen közvetlenül nem mérhető tulajdonságokra, ami az ismereti szint mélyülését jelenti és sikeres próbálkozás esetén úgy mondhatjuk, jobban megértettük a termodinamikai törvényeket illetve folyamatokat. Az ilyen klasszikus elmélet szükségszerű következménye a determinisztikus leírás – legalább részbeni – elhagyása különben nem lesz statisztikus: a jövőbeni állapot biztos, valószínűsége egy, az összes többié zérus lesz. Az *elhagyás* pl.: azt jelenti, hogy nem vesszük figyelembe a pontmechanikai sokaságok elemeinek koordinátáit, ezzel a koordináták összes lehetséges értékei szerinti sokasághoz jutottunk. Ezt tehetjük részben kényelemszeretetből, részben pedig azért, mert olyan mennyiségeket mérünk (nyomás, hőmérséklet), amelyek értelmezésük szerint is statisztikai átlagok. Kereshetjük azon változókat, amelyek újrafelvétele a leírást ismét determinisztikussá teszi. Az említett példában ezek a helykoordináták. Mivel az elméletben nem szerepelnek, ezért ezeket rejtett változóknak, jobban meghonosodott kifejezéssel rejtett paramétereknek nevezzük.

A kvantumelmélet is statisztikus. Explicit és egyetlen állapothatározója a Ψ függvény, amely minden átlag meghatározásához szükséges (nélküle nem lehet számolni) és elegendő (más adatot nem kell megadni a számításhoz). Kérdés – ezt is *Neumann János* vetette fel –, hogy megadhatók-e olyan további változók, amelyek felvétele mellett a kvantumelmélet statisztikus jellege megszűnik és determinisztikussá válik, mint pl. a pontmechanika vagy az elektrodinamika? Természetes, hogy e további állapotváltozók a meglévő Ψ állapotváltozóval *együtt* szerepelnének. Arra vonatkozólag ugyanis semmiféle tiltás nincsen, hogy az egész elméletet elvetve esetleg valamilyen új "mikroszkopikus mechanikát" kreáljon valaki. Erre nézve van egységes állásfoglalás: mihelyt ilyen elmélet létezik, a meglévő régi rövidesen a tudományág fejlődéstörténeti archívumába kerül és átveszi szerepét az ellentmondást már nem tartalmazó, de a régi eredményeket maradéktalanul származtató mechanika. Egyöntetűen elfogadott ilyen új elmélet ma még nincsen, sőt a kvantummechanika fogalomrendszerére építve dolgozták ki az elektromágneses, a gyenge és a magkölcsönhatások kvantumelméletét is, a kvantum-elektrodinamikát, illetve az erőterek kvantumelméletét.

Mi a válasz a kvantummechanika kiegészíthetőségének kérdésére? *Neumann János* bebizonyította, hogy a kvantummechanika lényegileg statisztikus, nincsenek olyan rejtett paraméterek, amelyekkel determinisztikussá tehető lenne. Bizonyítása nem intuitív érvelés, hanem az általa adott axiomatikán belül szabatos igazolás. Lényege, hogy átfogalmazza a rejtett paraméterek létezésének állítását olyan Ψ állapot létezésének állítására, amelyben minden mechanikai mennyiség szórásmentes, ami azt jelenti, hogy értéke definiált. Ezt az állítást már nem nehéz cáfolni.

Ugyanis valamely mennyiség szórásmentes állapota definíció szerint megegyezik a sajátállapotával. Az összes mennyiségnek azért nem lehet közös szórásmentes állapota, mert vannak nem felcserélhető operátorok, ezeknek pedig nincsen közös sajátállapotuk.

Ebben a megfogalmazásban nem szerepel a csererereláció, – amelynek szigorú matematikai megfogalmazása hiányzott –, mindössze az a kikötés, hogy vannak nem felcserélhető operátorok. Neumannak ez a tétele nemcsak fizikus-, hanem filozófuskörökben is nagy megütközést keltett. A materialista lételmélet ugyanis azt tartja, hogy a világ bár szukcesszív approximációval, de megismerhető. Egy ilyen tétel, hogy nem lehet az állapot fogalmát kibővíteni, hogy a világ azt csinál amit akar, másképpen: az elektronnak szabad akarata van – ellentmondásnak tűnik. A materialista ismeretelmélet ezt úgy küszöböli ki, hogy a megismerhetőség tartalmi megváltoztatása által a statisztikus természetleírás útján történő megismerhetőséget vallja.

A kérdés ma is megválaszolatlan, konzekvens állásfoglalás csak kettő van: a determinizmus vagy a szabad akarat elfogadása. (Véleményünk szerint ebbe a dilemmába nem szabad nagyon elmélyülni, ajánlatos valamelyiket elfogadni, vagy állásfoglalás nélkül egyikkel sem törődni. A már korábban is idézett *Teller Ede* a szabad akarat híve.)

Kvantumlogika

A bevezetőben említettük, hogy a kvantumlogika a mikrofizikai rendszerekre vonatkozó kijelentések törvényszerűségeivel foglalkozik. Nyelvezetének, leírási eszközeinek, matematikai apparátusának megértéséhez a matematika több ágának előismerete szükséges. Általános alapjai a matematikai logika, azon belül a Boole-algebra, az ítéletkalkulus és a halmazelmélet. Speciális alapjai közé tartozik a Hilbert-tér elmélete és a hálóelmélet. Nyilvánvaló, hogy a kvantumlogika elnevezésben szereplő logika szó a megfelelő korlátozásokkal használt matematikai logikát jelenti. Az ítélet fogalmát cikkünk elején szinonímái segítségével megvilágítottuk. Az ítéleteknek igazségértéke van, amely nem az ítélet adottsága. Pl. az eső esik – olyan ítélet, amely lehet igaz is, hamis (nem igaz) is. Ennek neve kontingens ítélet. Van feltétel nélküli, abszolút igaz ítélet is, ilyen a következő: a Magyar Köztársaság fővárosa Budapest. Az összetett ítéletek több – ún. ítéletkötőjellel – összekapcsolt ítéletet mondanak ki. Ítéletkötőjel pl. az és (jele $\wedge$), a vagy (jele $\vee$), a negáció (jele $\bar{\ }$ felső vonás), a ha-akkor (jele $\Rightarrow$). Ha az összetett ítélet egyike feltétlenül hamis, akkor önellentmondó. Ilyen pl.: ha egy férfi kutya, akkor katona. Ez olyan kijelentés, amelyre tapasztalati ellenpélda nem adható, ezért igaznak kell tekinteni, viszont olyan férfit sem lehet találni, aki kutya és katona.

A kvantumlogika csak olyan ítéletekkel dolgozik, amelyeknél van értelme vizsgálni, hogy igazak-e vagy sem. Szemben a klasszikus logikával csak a következő alakú ítéletekkel foglalkozunk: valamely kvantummechanikai rendszer adott Ψ állapotában valamilyen adott kvantummechanikai tulajdonsággal rendelkezik. (A kvantummechanikai tulajdonság alapfogalom, később még visszatérünk rá.)

Az ítéleteket nagybetűkkel, igaz és hamis (nem igaz) voltukat a $\uparrow$ ill. a $\downarrow$ jellel jelöljük. Ha például az A ítélet így szól: az asztal barna, és ez igaz, akkor azt mondjuk, hogy A logikai értéke igaz és így írjuk $A=\uparrow$. Az összetett ítéletek logikai értéke kiszámítható az összetevő ítéletekéből. A számításhoz felhasználható egyenleteket az *ítéletkalkulus alapegyenleteinek* nevezzük. Ezeket bizonyítás nélkül közöljük, helyességükről meggyőzőghetünk a bennük szereplő A,B,C változóknak a lehetséges értékeket adva.

(L_1) $A\wedge(B\wedge C)=(A\wedge B)\wedge C$	(L_2) $A\vee(B\vee C)=(A\vee B)\vee C$
(L_3) $A\wedge B=B\wedge A$	(L_4) $A\vee B=B\vee A$
(L_5) $A\wedge(B\vee A)=A$	(L_6) $A\vee(B\wedge A)=A$
(D_1) $A\wedge(B\vee C)=(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$	(D_2) $A\vee(B\wedge C)=(A\vee B)\wedge(A\vee C)$
(N) $A\wedge\overline{A}=\downarrow$	(N) $A\vee\overline{A}=\uparrow$
(0) $A\wedge\downarrow=\downarrow$	(1) $A\vee\uparrow=\uparrow$

A zárójelek a műveletek végrehajtási precedenciáját jelölik ki, a számtest-algebrai zárójelekhez hasonlóan. A formulák előtti (L_1)-(L_6) jelek arra utalnak, hogy pusztán ezek megtartásával egy új algebrai struktúra, a háló alapegyenletrendszerét kapjuk, amelyet angol neve (lattice) kezdőbetűjével jelölnek. (A háló fogalma E. Schrödertől ered, aki logikai vizsgálataiban külön algebrai struktúrának tekintette, l.: *Schröder, E.: Algebra der Logik T. Teubner,* Leipzig, 1890. Az (N_1) és (N_2) törvények szerint A és $\overline{A}$ egymást kölcsönösen meghatározzák, azaz egy állításnak nem lehet két (különböző) tagadása.

Példák:

Adott állapottú rendszer E energiája az E_1, E_2 intervallumban van, azaz $E\in[E_1,E_2]$. Ennek tagadása: $E\notin[E_1,E_2]$.

Konjunkció: valamely részecske q helykoordinátája a Δq intervallumban és p impulzusa a Δp intervallumban van. Ez a példa a Heisenberg-féle relációval kapcsolatban fontos.

Diszjunkció: valamely részecske q koordinátája egyenlő q_0-lal vagy p impulzusa egyenlő p_0-lal.

Az ítéletekből számos többszörösen összetett ítéletet képezhetünk. Azokat a formulákat, amelyek a bennük szereplő ítéletektől függetlenül egyenlőek, logikai azonosságoknak (törvényeknek) nevezzük. A kettős tagadás törvénye: A ugyanaz, mint nem(nem A), vagyis: $A=\overline{\overline{A}}$. A De Morgan törvény: $\overline{A\vee B}=\overline{A}\wedge\overline{B}$.

A kvantumlogika általános alapjaihoz a halmazelmélet is hozzátartozik. Ennek elemeit ismertnek tételezzük fel. A speciális alapokat a Hilbert-tér elmélete és a hálóelmélet adja. A hálóelmélet néhány alapegyenletéről már szóltunk, a Hilbert-teret Neumannt idézve az olvasmányosság érdekében rövidebben mutatjuk be. Ezt természetesen csak a pontosság rovására tudjuk megtenni.

A H Hilbert-tér *megszámlálhatóan végtelen* dimenziós *lineáris* halmaz – azaz, ha f és g elemei a halmaznak és a és b tetszőleges számok, akkor h=af+bg is eleme a halmaznak –, amelynek elempárjain értelmezve van a skalárszorzat nevű funkcionál. A skalárszorzat egy mindkét tényezőjében lineáris komplex szám, jele: (f,g); továbbá teljesül rá, hogy $(f,g)=(g,f)^*$. Itt a csillag a komplex konjugáltat jelöli. Segítségével bevezethető egy pozitív szám: az f elem hossza, jele $\|f\| = +\sqrt{(f,f)}$, a neve norma. A Hilbert-tér normált.

A H teljessége azt jelenti, hogy minden f_1, f_2, ...végtelen sorozat esetén, ha

$$\lim_{n;m\to\infty} \| f_n - f_m \| = 0$$

akkor van olyan $f\in H$ elem, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \| f - f_n \| = 0$$

azaz a határátmenet-képzés nem vezet ki a Hilbert-térből.

A H szeparabilis tér, amelyben van olyan teljes elemrendszer, amelynek alkalmas lineáris kombinációjként minden elem előállítható. (A háromdimenziós térben a koordináta-egységvektorok ilyenek.) A Hilbert-tér olyan M részhalmazát, amely elemeivel együtt azok lineáris kombinációját is tartalmazza *lineáris sokaságnak* mondjuk. Ha az M-beli konvergens sorozatok limeszpontjai is elemei M-nek, akkor M neve *altér.* Az euklideszi-tér példáján szemléltetve elemek az origóból kiinduló vektorok, az alterek az origón átmenő egyenesek és síkok.

H lineáris operátorán a $D_T \subseteq H$ tartománynak a H-ra való olyan leképezését értjük, amelyre:

$$T(af+bg)=aTf+bTg \tag{1}$$

minden $f,g \in D_T$-re, D_T neve értelmezési tartomány.

Az operátorok olyan függvények, amelyek értelmezési tartománya és értékkészlete H elemeiből áll, lineáris operátoroknál (1) is teljesül. Az értelmezési tartományra és az értékkészletre vonatkozó kikötések mellett felépíthető az operátorok algebrája.

Az operátorok (T+S) összegén és (TS) szorzatán a

$$(T+S)f=Tf+Sf$$

ill. a

$$(TS)f=T(Sf)$$

egyenletekkel meghatározott operátort értjük. Könnyű megmutatni, hogy a fenti egyenletek szerint az összeg kommutatív és asszociatív, a szorzat asszociatív, de általában nem kommutatív, továbbá a szorzat az összegre vonatkozóan disztributív.

Az operátor ρ sajátértékét és f sajátfüggvényét az

$$Rf=\rho f$$

sajátértékegyenlet definiálja, ahol ρ valós szám.

A H lineáris operátorát projektornak nevezzük, ha

$$(Pf,g)=(f,Pg) \text{ (hermitikus)} \tag{2}$$

$$PP=P \text{ (idempotens)} \tag{3}$$

Az euklideszi térben a projektorok egy origót tartalmazó síkra vagy egyenesre való vetítés műveletét jelentik.

Két (f és g) elemet ortogonálisnak nevezünk, ha $(f,g)=0$. Euklideszi térben két vektor ilyenkor merőleges, hacsak $f \neq g \neq 0$.

A H M alterének ortokomplementuma az az $M^{\perp}$ halmaz, amelynek minden eleme ortogonális M minden elemére.

Az eddigiekben a Hilbert-tér elméletének néhány jellegzetes fogalmát mutattuk meg. Ezek segítségével fogalmazhatjuk meg a kvantummechanika alapvető kijelentéseit, posztulátumait. Említettük már, hogy ezek a következő típusúak:

P.: Az S kvantummechanikai rendszer valamely P kvantummechanikai tulajdonsággal rendelkezik a Ψ állapotban.

A Neumann-féle axiómák és a kvantummechanika

A kvantummechanika axiómái:

1. A kvantummechanikai rendszer Ψ állapota a Hilbert-tér eleme. Az állapot absztrakt, mert önálló jelentése nincsen, de mindazt, amit kiszámítani egyáltalán lehetséges Ψ ismeretében, kiszámíthatjuk.

2 . Az S kvantummechanikai rendszer minden r fizikai mennyiségéhez H-nak egy operátora tartozik, amelynek sajátértékei a fizikai mennyiség lehetséges (mérhető) értékei.

3. Ha q és r az S rendszer *egyidejűleg mérhető* fizikai mennyiségei, akkor oprátoraik *felcserélhetők,* azaz minden φ-re teljesül, hogy

$$QR\varphi=RQ\varphi$$

4. Az aq+br fizikai mennyiséghez az aQ+bR operátor tartozi, ahol a és b tetszőleges számok.

5. Az r^2 fizikai mennyiséghez az $RR=R^2$ operátor tartozik.

Megjegyzendő: az rq mennyiséghez 4. és 5. miatt az ½(QR+RQ) operátor tartozik akkor is, ha nem felcserélhetők. Klasszikus felfogásban az rq és qr mennyiségek nem különböznek, de az operátorokkal való jellemzés különbözőeknek reprezentálja őket: $RQ \neq QR$.

A kvantummechanika 1.-5. alatti axiómáit alkalmazzuk most a kvantummechanika említett (P-típusú) kijeletéseire:

Az S minden P *kvantummechanikai tulajdonságához* hozzátesszük azt a kijelentést, hogy a P tulajdonság megvan (S rendelkezik P-vel). A P tulajdonsághoz hozzárendeljük a p fizikai mennyiséget úgy, hogy :

$$p=1, \text{ ha a P kijelentés igaz} \tag{4}$$
$$p=0, \text{ ha a P kijelentés hamis}$$

Így a kijelentéseket olyan mennyiségekkel reprezentáltuk, amelyekre fennáll a $p=0$ vagy a $p=1$ feltétel, de ezzel ekvivalens az, hogy $p^2=p$. Ennek megfelelően 3-5. szerint az ítéleteket $P^2=P$ tulajdonságú operátorok jellemzik . Ilyenek a (2)-ben és (3)-ban említett projektorok. 5-ből következik, hogy a P és Q kijelentésnek az

$$½(PQ+QP) \tag{5}$$

operátor felel meg. Ahhoz, hogy a kvantummechanika axiómái szerinti hozzárendelés ismét kijelentés legyen, szükséges, hogy P-vel és Q-val együtt az ½(PQ+QP) is projektor legyen, azaz

$$[½(PQ+QP)]^2=½(PQ+QP) \tag{6}$$

fennálljon. Ez teljesül, ha P és Q felcserélhetők. A kvantumlogikának kell megválaszolnia, hogy mit mondhatunk azokról az összetett kijelentésekről , amelynek elemi kijelentéseihez nem felcserélhető projektorok tartoznak. Az ilyeneket inkompatibilis kijelentéseknek nevezzük. Kérdés, milyen az inkompatibilis kijelentések logikájának alap-egyenletrendszere? A hagyományos kvantummechanika nem képes konstruktív módon interpretálni az inkompatibilitás tényét. Paradoxonokkal vagy a deduktív felépítésből nem következő képek felvázolásával reagál. Az ilyen képek (elvek) túlmutatnak a kvantummechanika kontextusain; hullám-részecske dualitás, Heisenberg-féle bizonytalansági reláció, Bohr-féle komplementaritási elv, a determinizmus feladásának elve (a rejtett paraméterek lehetetlensége miatt), a mérési beavatkozás miatti identitásvesztés. Ezeknek az elveknek a Neumann-féle felépítéshez nincsen köze és sokszor olyanoktól származnak, akik alapfogalmak és axiómák nélkül szemlélődni akarnak. A kvantummechanika mutat néhány kirívó újdonságot a mindennapi gondolkodás számára, de ezek a logika szintjén jelentkeznek, tudományosan megalapozott formában, nem pedig a mikrojelenségek groteszk, nem érthető viselkedésében.

Visszatérve az inkompatibilis kijelentések projektorára, közöljük *Neumann* és *Birkhoff* 1936-ban adott megoldását.

A P és Q kvantummechanikai kijelentések *konjunkciójához*, azaz a $P \wedge Q$ fizikai mennyiséghez tartozó $\underline{P \wedge Q}$ projektor definíciója

$$\underline{P \wedge Q} = P_{[M_P \cap M_Q]}$$

Itt M_P és M_Q a P és Q kijelentésekhez rendelt P és Q projektoroknak megfelelő alterek, $M_P \cap M_Q$ pedig ezek közös része. (Az, hogy minden altérnek van megfelelő projektora és fordítva: az euklideszi tér analógiáján belátható.) A leképezést az $M_P=\{\varphi:P\varphi=\varphi\}$ definíció adja, azon elemek halmaza, amelyeket P önmagára képez le. P lineáris, így az M_P halmaz lineáris sokaság. Két altér közös része is altér, ha M_P és M_Q altér, akkor altér az

$$M_P \cap M_Q = \{\varphi:\varphi \in M_P \text{ és } \varphi \in M_Q\}$$

is.

A *tagadás* kvantumlogikai reprezentálása lényegesen különbözik a klasszikus logikai tagadástól. Ha a P kijelentés projektora P, akkor a $\overline{P}$ kijelentés operátora I-P, amelyről látható, hogy projektor: $(I-P)^2 = I-P$, ahol I az egységoperátor, amely minden elemet önmagára képez le. Ezért a kvantumlogikai tagadás nem vezet ki a kvantummechanikai tulajdonságokból álló kijelentésösszességből, másképpen: a kvantummechanikai tulajdonságok olyan kijelentések, amelyeknek tagadása is kvantummechanikai tulajdonság. Az ítéletek tárgyait individuumtartománynak nevezve mondhatjuk; a negáció művelete nem vezet ki az individuumtartományból.

A logika ideális típusa egy adott halmaz összes részhalmazainak halmaza. Ennek individuumtartományából nem vezet ki a negáció, a konjunkció és a diszjunkció művelete. Ha H az a halmaz, amelynek R részhalmazairól beszélünk $x \in R$ formában, akkor az $x \notin R$ azt jelenti, hogy $x \in H\text{-}R$ és itt H-R éppúg része H-nak , mint R.

A kvantumlogikában más a helyzet. Ha H a Hilbert-tér és M egy altér, akkor H-M nem altér H-ban, hanem részhalmaz, tehát a $\varphi \in M$ kijelentés tagadása nem $\varphi \notin M$, mert ez azt jelenti, hogy: $\varphi \in H\text{-}M$, ez pedig nem altér, projektora nincsen, ezért az előbb mondottak szerint nem kvantummechanikai kijelentés. Az $I\text{-}P_M$ projektorhoz milyen altér tartozik ekkor? Melyik az az N altér, amelynek projektora a $\varphi \in M$ kijelentés tagadása? A kvantumlogika fontos eredménye, hogy ez az M ortokomplexuma, a tagadás kijelentés altere, vagyis:

$N=\{f:f \perp M\}$.

A kvantumlogikai *diszjunkciót* az alábbiak szerint definiáljuk

$\underline{P \cup Q}=P_{[M_P \cup M_Q]}$

ahol

$M_P \cup M_Q=(M_P{}^{\perp} \cap M_Q={}^{\perp})^{\perp}$

ami az alterekre vonatkozó De Morgan szabály analogonja. Fontos megkülönböztetés, hogy a $PQ=\overline{PQ}$ kijelentés projektora nem megfelelő választás, mert:

$PQ=I-(I-P)(I-Q)=I-(I-P-Q+PQ)=P+Q-PQ$

ami nem mindig projektor (P és Q felcserélhetősége esetén természetesen az).

A mondottak alapján megvizsgálható, hogy a logika alapegyenletrendszere hogyan módosul. Melyik egyenlet marad érvényben? Korábban már említettük, hoqy az (L_1)-(L_6) formulák igazak maradnak, sőt (0) és (1) is. Kivételt (D_1) és (D_2) jelentenek. Megeshet ugyan, hogy a P,Q,R kijelentések kompatibilis hármast alkotnak, de általában nem így van, azaz

$P \wedge (Q \vee R) \neq (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

és

$P \vee (Q \wedge R) \neq (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

vagyis a kvantumlogika *nem disztributív* logika. A disztributív törvények helyébe a kompatibilitás-szimmetria törvények lépnek:

$P=(P \wedge Q) \vee (P \wedge \overline{Q}) \Leftrightarrow Q=(Q \wedge P) \vee (Q \wedge \overline{P})$

és

$P=(P \vee Q) \wedge (P \vee \overline{Q}) \Leftrightarrow Q=(Q \vee P) \wedge (Q \vee \overline{P})$

A $\Leftrightarrow$ az ekvivalencia jele, $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow A)=A \Leftrightarrow B$.

Az elnevezést az indokolja, hogy P és Q két kvantummechanikai kijelentés akkor és csak akkor kompatibilis, ha a köztük fennálló $P=(P \wedge Q) \vee (P \wedge \overline{Q})$ reláció(ban P és Q felcserélhető, azaz) szimmetrikus.

Alapvető jelentőségű, hogy a kompatibilitás szimmetriatörvényei a klasszikus (Boole) *logikában is fennállnak,* a disztributivitási törvények viszont *nem állnak fenn* a kvantumlogikában. Ez azt jelenti, hogy *a klasszikus logika speciális esete a kvantumlogikának nem pedig megfordítva,* ahogyan a mikrovilág speciális "elvei" esetleg sugalmazzák.

E cikk megírásával az volt a célunk, hogy rámutassunk: a kvantumjelenségekről a kvantumlogika szerint kell gondolkodni.