Matematika III - Příprava pro magisterské studium

Miroslava Dubcová, Drahoslava Janovská, Daniel Turzík

Vysoká škola chemicko-technologická v Praze
Ústav matematiky

Nový předmět ZS 2012-2013
FRVŠ 748/2012, F6/b

Obsah

Cíle

Naším cílem je umožnit studentům bakalářského studia doplnit si znalosti získané v základních kursech Matematika I. a Matematika II. Studenti konkrétně zvládnou

- základy teorie číselných a funkčních řad,
- základy lineární algebry:
- úvod do funkcionální analýzy,
- základy vektorové analýzy.

Elektronické materiály k přednáškám a cvičením:

http://www.vscht.cz/mat/Ostatni/MIII/MIII.html

Název předmětu: N413031 Matematika III
Ústav: Ústav matematiky
Přednášející: Doc. RNDr. Drahoslava Janovská, CSc.,
Doc. RNDr. Daniel Turzík, CSc.
Rozsah: 2/2/0 z,Zk
Kredit: 5
Povinné předcházející předměty: Matematika I, Matematika II

Sylabus

1. Číselné řady, konvergence a absolutní konvergence, kritéria konvergence.
2. Funkční řady, bodová, stejnoměrná konvergence, kritéria konvergence.
3. Mocninné řady, poloměr konvergence. Taylorovy řady.
4. Ortogonální matice, ortogonální transformace.
5. Normální rovnice, jejich řešení, aplikace.
6. Maticové rozklady LR, QR.
7. Vlastní čísla a vlastní vektory.
8. Singulární hodnoty, singulární rozklad matice.
9. Norma a skalární součin v prostorech funkcí $C^k(\Omega)$, $L^2(\Omega)$. Banachův a Hilbertův prostor. Ortogonální systémy.
10. Lineární funkcionály.
11. Lineární a nelineární operátory.
12. Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů.
13. Základy vektorové analýzy: Hamiltonův operátor "nabla" a operátory grad, div, rot.
14. Věta Gaussova-Ostrogradského. Greenovy formule.

Číselné řady, konvergence a absolutní konvergence, kritéria konvergence

- Číselné řady
  - Součet nekonečné řady
  - Kritéria konvergence
- Funkční řady
  - Bodová konvergence
  - Stejnoměrná konvergence
- Mocninná a Taylorova řada
  - Mocninná řada. Poloměr konvergence
  - Taylorova řada

Základy lineární algebry

- Ortogonální transformace
  - Ortogonální báze
  - Ortogonální podprostory
  - Projekce
  - Řešení ve smyslu nejmenších čtverců
  - Soustava normálních rovnic
- Maticové rozklady
  - Ortogonální matice
  - Rozklady LR a QR
  - Givensovy matice rovinné rotace
  - Householderovy matice zrcadlení
- Vlastní čísla a vlastní vektory matice
  - Singulární rozklad matice
- Přeurčené soustavy ještě jednou
  - Řešení normálních rovnic s využitím singulárního rozkladu

Úvod do funkcionální analýzy

- Banachův a Hilbertův prostor. Ortogonální systémy
  - Normované lineární prostory.
  - Prostor se skalárním součinem.
  - Ortonormální soustavy a baze.
- Lineární zobrazení, operátor a funkcionál.
  - Lineární zobrazení.
  - Norma lineárního zobrazení.
  - Příklady.
- Spektrální teorie.
  - Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů.
  - Spektrum operátoru.
  - Příklady.
  - Spektrální teorie v Hilbertových prostorech

Základy vektorové analýzy

- Skalární a vektorový součin
  - Skalární součin
  - Vektorový součin
- Diferenciální operace
  - Gradient
  - Divergence
  - Rotace
  - Greenova věta
  - Diferenciální operace 2. řádu
  - Gaussova–Ostrogradského věta

Doporučená studijní litetratura

- Z: J. Lukeš: Zápisky z funkcionální analýzy,Univerzita Karlova v Praze, Nakladatelství Karolinum, 2002,ISBN 80-7184-597-3.
- Z: Turzík a kol.: Matematika II ve strukturovaném studiu, skripta, VŠCHT Praha, 2005, ISBN 80-7080-555-2.
- Z: M. Kubíček., M. Dubcová., D. Janovská: Numerické metody a algoritmy, VŠCHT Praha 2005.
- Z: A. Klíč, M. Dubcová: Základy tenzorového počtu s aplikacemi, VŠCHT Praha, 1998.
- D: R. A. Horn, C. R. Johnson: Matrix Analysis. Cambridge Universitz Press 1999 (6. vydání). ISBN 0-521-38632-2
- D: M. Fiedler: Speciální matice a jejich použití v numerické matematice, SNTL, Praha, 1981.
- D: J. Lukeš: Teorie míry a integrálu 1., Univerzita Karlova v Praze, 1980. http://matematika.cuni.cz/dl/lukes/tmi1.pdf
- D: A. E. Taylor: Úvod do funkcionální analýzy, Academia Praha,1973.

Zápočet a zkouška

Studenti získají zápočet na základě kontrolovaných domácích miniprojektů (6 až 8, dle obtížnosti).
Zkouška se skládá z povinné písemné a nepovinné ústní části.
Klasifikace písemného testu: E . . . 50 - 59 bodů, D. . . 60 - 69 bodů, C. . . 70 - 79 bodů, B. . . 80 - 89 bodů, A. . . 90 - 100 bodů. Pokud student nezíská alespoň 50 bodů, musí písemný test opakovat. Chce-li student získat lepší ohodnocení, než ukazuje písemný test, může, po dohodě se zkoušejícím, přijít na ústní zkoušku.

Sylabus přednášky je dobře vyvážený tak, aby studenti měli možnost nahlédnout do těch oblastí matematiky, kam nesahá Matematika I ani Matematika II, ale které jsou přesto například při modelování chemických procesů nezbytností.

Příklad písemného testu a jeho vzorové řešení

Najděte rozvoj funkce $f(x) = \cos 2x$ do Taylorovy řady v bodě $a = \frac{\pi}{4}$, zjistěte pro která x řada konverguje. $\boxed{\text{25 bodů}}$

Řešení Několik derivací a obecně sudou a lichou derivaci

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = \cos 2x & f(\frac{\pi}{4}) = 0 \\
f'(x) = -2\sin 2x & f'(\frac{\pi}{4}) = -2 \\
f''(x) = -4\cos 2x & f''(\frac{\pi}{4}) = 0 \\
f'''(x) = 8\sin 2x & f'''(\frac{\pi}{4}) = 8 \\
f''''(x) = 16\cos 2x & f''''(\frac{\pi}{4}) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, 3 \text{ body} \\
\vdots & \vdots \\
f^{(2n)}(x) = (-1)^n 2^{2n}\cos 2x & f^{(2n)}(\frac{\pi}{4}) = 0 \\
f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1}2^{2n+1}\cos 2x & f^{(2n+1)}(\frac{\pi}{4}) = (-1)^{n+1}2^{2n+1} \quad \ldots\ldots\, 10 \text{ bodů}
\end{array}
$$

Řada $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}(x-\frac{\pi}{4})^{2n+1}$ .... 2 body

Konvergence řady např. podílové kriterium

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{|(-1)^{n+2}|\frac{2^{2n+3}}{(2n+3)!}|x-\frac{\pi}{4}|^{2n+3}}{|(-1)^{n+1}|\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}|x-\frac{\pi}{4}|^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4|x-\frac{\pi}{4}|^2}{(2n+3)(2n+2)} = 0 \quad \ldots\ldots\ 8 \text{ bodů}
$$

Řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$ .... 2 body

Necht **A** je čtvercová matice se singulárním rozkladem $\mathbf{A} = \mathbf{USV}^{\mathrm{T}}$.

(a) Jaký je singulární rozklad matice $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$?

(b) Je-li **A** invertovatelná, jaký je singulární rozklad matice $\mathbf{A}^{-1}$?

(c) Ukažte, že $|\det(\mathbf{A})|$ je rovna součinu singulárních hodnot matice **A**.

Řešení $\boxed{\text{15 bodů}}$

(a) $\mathbf{A} = \mathbf{USV}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{USV}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{VS}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \mathbf{VSU}^{\mathrm{T}}$, kde

$$\mathbf{S} = \left[\begin{array}{c|c} \widetilde{\mathbf{S}}_{r\times r} & \mathbf{0}_{r\times(n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(n-r\times r} & \mathbf{0}_{(n-r)\times(n-r)} \end{array}\right], \quad \widetilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_r \end{bmatrix},$$

$\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ jsou nenulové singulární hodnoty matice **A** . . . . 4 body

(b) $\mathbf{A}_{n\times n}$ invertovatelná $\Longleftrightarrow$ hodnost matice $\mathbf{A} = n$, t.j. všechny singulární hodnoty jsou nenulové. $\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{USV}^{\mathrm{T}})^{-1} =$

$$= (\mathbf{V}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{VS}^{-1}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}, \ \mathbf{S}^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \ldots, \frac{1}{\sigma_n}\right) \ldots\ldots\ldots \text{ 5 bodů}$$

(c) $|\det \mathbf{A}| = |\det(\mathbf{USV}^{\mathrm{T}})| = |\det(\mathbf{U})\det(\mathbf{S})\det(\mathbf{V}^{\mathrm{T}})| = |\det(S)| = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_n$, protože **U** a **V** jsou ortogonální matice, jejich determinant je 1 nebo -1 a singulární hodnoty jsou nezáporné. . . . . 6 bodů

Vypočtěte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jaké jsou singulární hodnoty matice **A**? $\boxed{\text{10 bodů}}$

Řešení Charakteristický polynom a vlastní čísla matice **A**:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix},\ \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_{1,2} = 1 \pm \mathbf{i} \ldots \text{2 body}$$

Vlastní vektor příslušný $\lambda_1 = 1 + \mathbf{i}$ je $\mathbf{h}_1 = (1, -\mathbf{i})^{\mathrm{T}}$, vlastní vektor příslušný $\lambda_2 = 1 - \mathbf{i}$ je $\mathbf{h}_2 = (1, \mathbf{i})^{\mathrm{T}}$. ....3 body

Singulární hodnoty jsou odmocniny z vlastních čísel matice $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ (nebo z vlastních čísel matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$).

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{2}$$

jsou hledané singulární hodnoty. ....5 bodů

Necht D je kruh o poloměru a umístěný v počátku. C je jeho hranice orientovaná proti směru hodinových ručiček. Pomocí Greenovy věty zjistěte, pro kterou nenulovou hodnotu a je

$$\int_C \left(-y + \frac{1}{3}y^3 + x^2 y\right)\mathrm{d}x = 0 \ .$$

25 bodů

Řešení

$$\vec{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) = \left(-y + \frac{1}{3}y^3 + x^2 y, 0\right), \ \ldots\ldots\ldots 1 \text{ bod}$$

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\,\vec{dr} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}A = \iint_D (1 - y^2 - x^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ldots\ldots\ldots 5 \text{ bodů}$$

$D \ldots$ kruh $\Longrightarrow$ substituce do polárních souřadnic:

$$\begin{array}{rclll} x & = & r\cos(t) & r \in (0, a\rangle\,, & \\ y & = & r\sin(t) & t \in \langle 0, 2\pi)\,. & \end{array} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 9 \text{ bodů}$$

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\,\vec{dr} = \int_0^{2\pi}\int_0^a (1 - r^2)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}a^2(2 - a^2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 9 \text{ bodů}$$

$\Longrightarrow$ integrál je nulový pro $a = \sqrt{2}$ . . . . 1 bod

Rozhodněte, zda daný operátor T je lineární a spojitý. V kladném případě určete normu operátoru.

$$T : X \to X, \quad T(f) = t\,f(t^2) \ \text{ pro } f \in X\,, \quad X = C([0,1]), \quad \|f\| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

25 bodů

Řešení

Ověření linearity operátoru ....5 bodů

Spojitost:

Protože funkce t^2 zobrazuje interval $[0,1]$ na $[0,1]$ platí

$\max_{t\in[0,1]} |f(t^2)| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$ ....5 bodů

$$\|Tf\| = \max_{t\in[0,1]} |t\,f(t^2)| \le \max_{t\in[0,1]} |f(t^2)| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)| = \|f\|$$ ......5 bodů

$\|T\| \le 1$, operátor T je spojitý ....2 body

Norma operátoru

Zvolme funkci $f_0 \equiv 1$, $\|f_0\| = 1$ a platí

$\|T\| \ge \|Tf_0\| = \max_{t\in[0,1]} |t| = 1$ ....6 bodů

$\|T\| = 1$ ....2 body.