Funciones aritméticas

Entrenamiento #4 para 4ª etapa
08-10 de julio de 2016
Por: Lulú y Argel

Resumen

Bienvenidos por primera vez, desde 3ª, a algún tema de Números. Retomaremos los temas de divisibilidad y también se le dará importancia a la no-divisibilidad de los números. A lo largo de este documento entenderás lo importantes, útiles, e informativos que son las funciones aritméticas. Les daremos nombre de una vez: τ (*tau* es la cantidad de divisores), σ (*sigma* es la suma de divisores), π (*pi* es el producto de divisores) y ϕ (*phi* es la cantidad de primos relativos positivos menores al número). Ya entenderás bien a qué se refiere cada cosa.

1. Las dichosas funciones aritméticas

Sí, aquí se explica brevemente qué es una función, y por qué son funciones aritméticas. Todas y cada una de ellas las tendrás que demostrar; de modo que, lamentablemente, no les explicaremos cómo se demuestra ninguna (#sorrynotsorry).

A todo esto, es muy importante que conozcas lo que es la descomposición canónica. Los que ya estuvieron en entrenamientos de Teoría de Números previos a la Tercera Etapa deberían recordar. El resto de la gente puede preguntar por el Teorema Fundamental de la Aritmética (también los que tengan mala memoria).

1.1. La función τ y la cantidad (filosofal) de divisores

Primero, esa letra griega se llama *tau*, y su nombre se pronuncia como en "taurina". Espero que su memoria no sea tan mala porque ya la hemos visto antes. Es la función que, con base en la descomposición canónica de un número, nos dice cuántos divisores positivos tiene. Qué emocionante, ¿verdad? Ya no tenemos que contarlos todos. Si n es un número de la forma:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

Siendo esa su descomposición canónica, la función τ nos dice que la cantidad de divisores de n puede calcularse mediante:

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$$

Un ejemplo sencillo: el 24 puede escribirse como $2^3 \cdot 3^1$. De acuerdo a la fórmula de τ, su cantidad de divisores debería ser $(3 + 1)(1 + 1) = 8$. Sus divisores son $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, que, si los cuentas, son en efecto 8. Así, la cantidad de divisores depende sólo de los exponentes y no de los primos que componen a n.

1.2. La función σ y la suma de los secretos

Esta otra letra griega se llama *sigma* y su nombre se pronuncia tal cual como se lee (no es que no se nos haya ocurrido una palabra que tenga sigma en ella). Con esta función, y también con base en la descomposición canónica de un número n, podemos determinar fácilmente la suma de los divisores de n.

$$\sigma(n) = \left(\frac{p^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1}\right)\left(\frac{p^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1}\right)\cdots\left(\frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}\right)$$

Si pusieron atención a los entrenamientos de inducción, ésto puede reescribirse como:

$$\sigma(n) = (1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{\alpha_2}) \cdots (1 + p_k + p_k^2 + \cdots + p_k^{\alpha_k})$$

Aprovechando que ya sacamos los divisores de veinticuatro, hagamos la suma para ver si sí da. De acuerdo a la fórmula, $\sigma(24) = \left(\frac{2^{3+1}-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^{1+1}-1}{3-1}\right) = 15 \cdot 4 = 60$. Hagamos las cuentas "a patita" y veamos que no nos están mintiendo: $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 + 24 = 3 + 7 + 14 + 36 = 10 + 50 = 60$. En este caso quedan claro dos cosas: la fórmula dice la verdad, y el valor de la suma sí depende de los primos y de los exponentes.

1.3. La función π y el producto de Azkabán

Aquí la letra ya la conocen: *pi*. Su nombre se pronuncia como en "pintar". Ella nos calcula, con base en la descomposición canónica de un número, el producto de sus divisores. La función π se puede calcular mediante:

$$\pi(n) = n^{\frac{\tau(n)}{2}}$$

Aquí, pueden hacer las cuentas a mano y creerme con el caso del 24. Según esta función aritmética, el producto de sus divisores depende del valor en sí (que depende de los primos y los exponentes) y la cantidad de divisores (que a su vez depende de los exponentes). Para el caso de 24, el producto de divisores es

$$\pi(24) = 24^{\frac{\tau(n)}{2}} = 24^{\frac{8}{2}} = 24^4$$

Intenta verificarlo. No es muy difícil, lo prometo.

1.4. La función ϕ y los coprimos de fuego

Esta otra letra griega se llama *phi* y se pronuncia *fi* como en "figura". También se le conoce como "función de Euler" o "función phi de Euler". Su fórmula es la siguiente:

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$$

Si, como habrás de imaginarte, la usamos para el caso de $n = 24$, tendríamos que:

$$\phi(24) = 24\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 24\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = 24\left(\frac{2}{6}\right) = 8$$

Y si los contamos, ¡sí salen! El conjunto de todos los números que no tienen ni factor 2 ni 3 es $\{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$. ¿Cuántos son? Precisamente 8.

1.5. El algoritmo de Euclides y la orden del fénix

A continuación les hablaremos de algo muy interesante que ayuda para determinar el máximo común divisor entre dos números, es decir

$$(a, b) = (a, a - b)$$

Reiterando este paso hasta que ya no se pueda realizar es posible conocer el máximo común divisor de una pareja de números. Por ejemplo: $(24, 28) = (24, 4) = 4$, por lo que el *mcd* de 24 y 28 es 4. Para que quede más claro, otro ejemplo: $(35, 12) = (23, 12) = (13, 12) = (1, 12)$, de donde es claro que el *mcd* es 1 (lo que significa que son coprimos).

Para los que se estén preguntando "¿y qué pasó con el príncipe de fracción mixta?" o "¿y dónde quedó el dinosaurio de la muerte?": esos todavía no salen. Espéralos. Pronto.

2. Unos cuantos ejercicios

1. Calcula la cantidad de divisores de 420.
2. Encuentra los valores de $\tau(1024)$, $\sigma(1024)$, $\phi(1024)$.
3. Calcula $\pi(50)$.
4. ¿Qué tipo de enteros n son tales que $\tau(n)$ sea impar?
5. Demuestra que $\phi(p) = p - 1$.
6. Encontrar $mcd(44, 531)$.
7. Considera dos números a, b de forma que:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

$$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} \cdots p_k^{\beta_k}$$

Demuestra que $(a, b) = \prod_{i=1}^{k} p^{min(\alpha_i,\beta_i)}$ y que $[a, b] = \prod_{i=1}^{k} p^{max(\alpha_i,\beta_i)}$.

3. Agregados culturales

1. Existe una versión generalizada del algoritmo de Euclides. Esa generalización aplica hasta para polinomio, no sólo para números enteros.
2. El máximo común divisor de dos números a, b se suele representar como (a, b).
3. El mínimo común múltiplo de dos números a, b se suele representar como $[a, b]$.
4. Cualesquiera dos números consecutivos siempre son primos relativos.
5. Las ardillas son importantes contribuyentes de la reforestación porque seguido sucede, en el regreso de la primavera, que olvidan dónde enterraron algunas de sus nueces y bellotas durante el invierno. Con el tiempo, esas semillas se vuelven árboles.

4. Lista de problemas

1. Demuestra $\tau(n)$
2. Demuestra $\sigma(n)$
3. Demuestra $\pi(n)$
4. Muestra que $(a, b) \cdot [a, b] = ab$
5. Describe a todos los enteros positivos n tales que $\tau(n) = 10$
6. Demuestra que $[a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_1, [a_2, \dots, a_n]]$
7. Un entero positivo n tiene exactamente 2 divisores, mientras que el número $n + 1$ tiene exactamente 3 divisores. ¿Cuántos divisores tiene el número $n + 2$?
8. Demuestra que, dados dos enteros positivos a y b distintos de cero con $b \nmid a$, si q y r son enteros tales que $a = bq + r$, entonces $mcd(a, b) = mcd(b, r)$

9. Demuestre que si la suma de dos enteros positivos a, b es un número primo entonces $(a, b) = 1$

10. a) Encuentra todos los enteros positivos menores que 1000 que tengan exactamente tres divisores positivos.

    b) Demuestra que el producto de todos esos enteros es un cuadrado perfecto.

11. Encuentre el *mcd* de los números $2n + 13$ y $n + 7$

12. Demuestra que la fracción $\frac{12n+1}{30n+2}$ es irreducible para cualquier n número natural

13. Demuestra que si a y b son primos relativos, entonces $\tau(a \cdot b) = \tau(a) \cdot \tau(b)$

14. ¿Cuántos enteros positivos dividen a 20!?

15. Se tienen n focos apagados y numerados del 1 al n. También se tiene una fila de n personas $P_1, P_2, ..., P_n$. Cada persona P_i pasa junto a los focos y cambia de estado(apaga el que está prendido y prende el que está apagado) a los que están numerados con un múltiplo de i. ¿Cuáles focos quedarán prendidos después de que pasen todas las personas?

16. Demuestra que si a y b son primos relativos, entonces

$$\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$$

17. Dados enteros positivos a y b, muestre que $(a^n, b^n) = (a, b)^n$

18. Demuestra que una pareja de números naturales n y $nk + 1$ siempre son primos relativos, para cualquier valor entero no negativo de k.

19. Determina el producto de los divisores enteros positivos de 420^4

20. Encuentra el $mcd(2^{100} - 1, 2^{120} - 1)$

21. Si n es un entero, pruebe que el máximo común divisor de $a^2 + b^2 - nab$ y $a + b$ divide a $n + 2$

22. a) Si $p, p + 10, p + 14$ son primos, encuentre p

    b) Si $p, 2p + 1$ y $4p + 1$ son primos, encuentre p

23. Demuestra que si un entero positivo tiene una cantidad impar de divisores positivos, entonces es un cuadrado perfecto.

24. ¿Cuántos números naturales n existen tales que $n^2 + n + 1$ es divisible por 1955?

25. Suponga que M es un entero con la propiedad de que si x es elegido aleatoriamente del conjunto $\{1, 2, 3, \ddots 999, 1000\}$ la probabilidad de que x sea un divisor de M es $\frac{1}{100}$. Si $M \leq 1000$, determina el valor máximo posible de M.

26. Determina el máximo común divisor de todos los números de la forma $16^n + 10n - 1$, donde n es un entero positivo.

27. Sean $x, y \in \mathbb{N}$. Sea p un primo. ¿Cuántas ternas existen que cumplan la siguiente igualdad? $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$

28. Demostrar que $2^{2^n} + 2^{2^{n+1}} + 1$ tiene al menos n factores primos.

29. Encuentre el número n natural más pequeño tal que n tiene exactamente 144 divisores positivos y que existen 10 enteros positivos consecutivos dentro de los divisores positivos de n.

30. Demuestra que si $\sigma(n) = 2n + 1$, entonces n es el cuadrado de un entero impar.

31. Encontrar todas las n naturales tales que $\tau(n)^2 = n$
32. Calcula la probabilidad de escoger al azar un divisor positivo de 10^{99} que sea múltiplo de 10^{88}
33. Determina la cantidad de pares ordenados de enteros positivos (a, b) tales que el mínimo común múltiplo de a y b sea $2^3 \cdot 5^7 \cdot 11^{13}$
34. Describe a todos los enteros positivos n tales que
$$\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$$
35. Demuestra que
$$\frac{\sigma(a)}{a} < \frac{\sigma(ab)}{ab} \leq \frac{\sigma(a)\sigma(b)}{ab}$$
36. Demuestre que, para todo n entero positivo, la fracción $\frac{n^2+n-1}{n^2+2n}$ es irreducible.
37. ¿Cuál es el máximo común divisor de los números $p^4 - 1$, donde p es un primo mayor que 5?
38. Encuentra todos los números primos p, q y r con $p < q < r$, que cumplan con $25pq + r = 2004$ y que $pqr + 1$ sea un cuadrado perfecto.

5. Problemas más jarcors

1. Demuestra $\phi(n)$
2. Dado un número positivo n, sea $f(n)$ el promedio de todos sus divisores positivos.
   a) Demuestra que:
   $$\sqrt{n} \leq f(n) \leq \frac{n+1}{2}$$
   b) Encuentre todos los números enteros positivos n para los cuales:
   $$f(n) = \frac{91}{9}$$
3. Encuentra todos los enteros positivos n tales que $n + \tau(n) = (\tau(n))^2$.
4. Demuestra que si $\phi(n) \mid n - 1$, entonces n es libre de cuadrados, es decir, no existe un entero k tal que $k^2 \mid n$.
5. Dado un entero n un *cambio sensato* consiste en sustituir n por $2n + 1$ ó $3n + 2$. Dos enteros positivos a y b se llaman *compatibles* si existe un entero que se puede obtener haciendo uno o más cambios sensatos, tanto a partir de a, como a partir de b. Encuentra todos los enteros positivos compatibles con 2003 menores que 2003.
6. (**Pequeño Teorema de Fermat:**) Sea a un entero, sea p un primo. Prueba que $a^p \equiv a(\mod p)$