Kontrollfragen zur Linearen Algebra I, Teil 2

1. **Lineare Unabhängigkeit, Erzeugendensysteme**

   (a) Wann heißt eine Menge von Vektoren $S \subset V$ linear abhängig über K?

   (b) Seien V ein Vektorraum über K, $U \subset V$ ein Unterraum, $L \subset K$ ein Unterkörper (z.B. $K = \mathbb{C}, L = \mathbb{R}$). Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

   $S \subset U$ linear abhängig $\Longrightarrow S \subset V$ linear abhängig
   $S \subset V$ linear abhängig über $L \Longrightarrow S \subset V$ linear abhängig über K

   (c) Man zeige:

      i. V durch n Vektoren erzeugt $\Longrightarrow$ jede Teilmenge von V mit $> n$ Elementen ist linear abhängig.

      ii. Eine maximal linear unabhängige Menge ist ein Erzeugendensystem. Ist es minimales Erzeugendensystem?

      iii. Ein minimales Erzeugendensystem ist eine maximale linear unabhängige Menge.

      iv. Alle maximalen linear unabhängigen Mengen eines Vektorraumes haben die gleiche Mächtigkeit.

   (d) Seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume. Wie ist $U_1 + U_2 \subseteq V$ definiert? Warum ist das ein Unterraum? Beweisen Sie die Dimensionsformel
   $\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$.

2. **Lineare Abbildungen:** $L : V \longrightarrow W$ sei lineare Abbildung

   (a) Gilt $L(0) = 0$? Warum?

   (b) Gilt $L(v) = 0 \Longrightarrow v = 0$?

   (c) Es seien $S := \{v_1, \ldots, v_r\} \subset V$ und $T := \{L(v_1), \ldots, L(v_r)\} \subset W$. Welche der Aussagen gilt, oder gilt unter bestimmten Bedingungen?

      i. S linear unabhängig $\Longrightarrow T$ linear unabhängig

      ii. T linear unabhängig $\Longrightarrow S$ linear unabhängig

      iii. S Erzeugendensystem $\Longrightarrow T$ Erzeugendensystem

      iv. T Erzeugendensystem $\Longrightarrow S$ Erzeugendensystem.

(d) Warum sind unter der Voraussetzung $\dim(V) = \dim(W) = n < \infty$ die folgenden Aussagen äquivalent?

i. L injektiv

ii. L surjektiv

iii. L bijektiv

iv. $\ker(L) = 0$

v. $S \subset V$ Basis von $V \Longrightarrow T = L(S) \subset W$ Basis von W

vi. $S \subset V$ linear unabhängig $\Longrightarrow T = L(S) \subset W$ linear unabhängig

(e) Welche Implikationen zwischen den Aussagen in (d) gelten auch ohne die Voraussetzung $\dim(V) = \dim(W)$?

(f) Induziert L die Abbildung $L^* : V^* \to W^*$ oder $L^* : W^* \to V^*$?

3. **Verfahren**

(a) Wie erhält man aus einem Erzeugendensystem $S \subset K^n$ eine Basis?

(b) Wie kann man einen Unterraum $U \subseteq K^n$ als Lösungsmenge eines homogenen Gleichungssystems darstellen?

(c) Gegeben seien zwei Unterräume $U_1, U_2 \subseteq K^n$ mit Basen $B_1 \subset U_1$ und $B_2 \subset U_2$. Wie erhält man Basen für die Unterräume $U_1 + U_2$ und $U_1 \cap U_2$? Wie kommt man zu einer Basis für K^n/U_1?

4. **Lineare Abbildungen und Matrizen**

(a) Ein K-Vektorraum V der Dimension n ist isomorph zum K^n. Wie erhält man solch einen Isomorphismus?

(b) Auf welche Weise entsprechen lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen Matrizen?

(c) Sei $L : W \to V$ eine lineare Abbildung, seien $B \subset V$, $C \subset W$ Basen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

i. rk(L)=dim$W$ $\Rightarrow$ L injektiv

ii. L ist Isomorphismus $\Leftrightarrow$ $M_{BC}(L)$ ist regulär.

iii. L injektiv $\Leftrightarrow$ rk(L)=dim$V$

iv. L surjektiv $\Rightarrow$ rk(L)=dim$V$

(d) Sei $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Gegeben zwei Basen $B, C \subset V$, wie unterscheiden sich die Matrixdarstellungen $M_{BB}(\varphi)$ und $M_{CC}(\varphi)$?