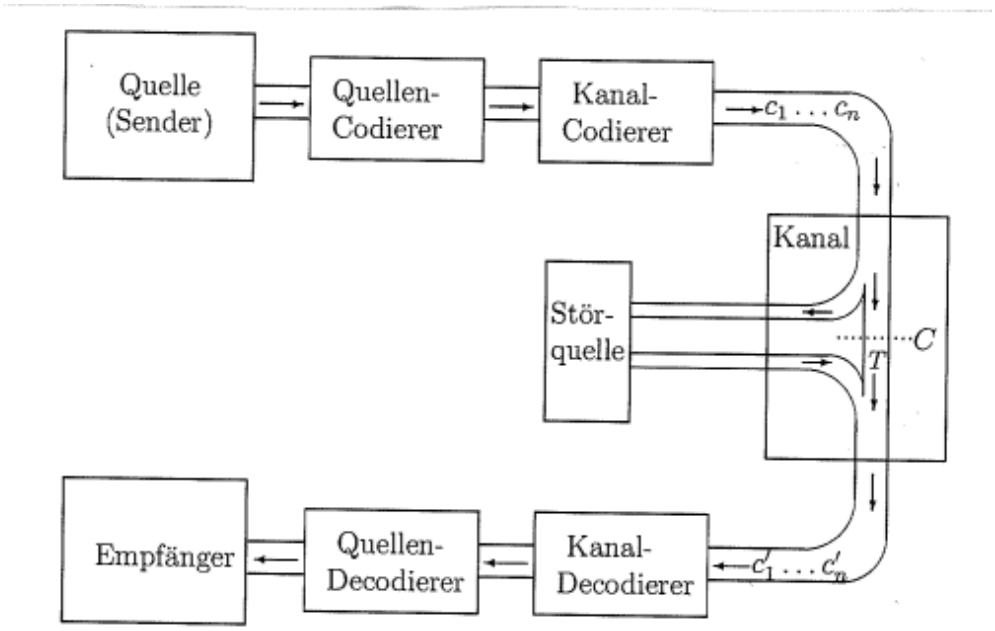
E: Anwendungsbeispiele in der Codierungstheorie

E 1.0 Schema eines Nacherichtenübertragungssystems

Das Schema eines Nachrichenübertragungssystems zeigt Figur E 1:



Figur E.1: Schema eines Nachrichtenübgerteragungssystems
mit gestörtem Kanal

Wir beschreiben zunächst ein Codier- und ein Decodierverfahren. Dass dieses eine Korrektur von Übertragungsfehlern gestattet, erläutern wir dann im Anschluss.

1.1 Definition Wort

In der Codierungstheorie schreit man ein $m-$Tupel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in A^m$ (mit $m \in \mathbb{N}$) über der Menge A meist ohne Klammern und Kommata und nennt es **Wort** (Plural: Wörter, nicht Worte) der Läge m über dem **Alphabet** A. Nach der Quellencodierung seien die Nachrichten Wörter der Länge k über einem Körper K, also von der Form

$$\alpha_1 \ldots \alpha_k := (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in K^k.$$

1.2 Lineare Codierung

Unter einer **linearen Codierung** dieser Nachrichten versteht man die durch Multiplikation mit einer Matrix $G \in K^{(k,n)}$ vom Rang k gegebene lineare Abbildung:

$$c_G : \begin{cases} K^k & \longrightarrow & K^n \\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) & \mapsto & (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \cdot G = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i g_{i\bullet} \end{cases}$$

(Hierbei bezeichnet $g_{i\bullet}$ die $i-$te Zeile von G.)

1.3 Beispiel

Seien K =GF(2) $= (\{0,1\}, \oplus, \odot) = \mathbb{Z}_2$, ferner $k = 4, n = 7$ und

$$G_1 := \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \in \mathrm{GF}(2)^{(4,7)}.$$

Die Nachricht 1100 wird dann codiert zu

$$1100 \cdot G_1 = g_{1\bullet} \oplus g_{2\bullet} = 1100010.$$

Da G_1 als linke $4 \times 4-$Untermatrix die $4 \times 4-$ Einheitsmatrix I_4 hat, ist beim Codewort

$$c_G(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4)$$

das Anfangsstück (*Präfix*) der Länge 4 gleich der ursprünglichen Nachricht. (Zu diesen **Informationsbits** kommen noch drei **Kontrollbits** .) Eine solche Codierung heißt **systematische Codierung**.

1.4 Generatormatrix eines linearen Codes

Der **Code** $\mathcal{C}$, also die Menge der Codewörter

$$\text{Bild}\, c_G = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \cdot G \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in K\} \subseteq K^n$$

ist ein Unterraum von K^n. Daher heißt C **linearer Code** oder **Linearcode**. Die Bilder der Einheitsvektoren von K^k unter c_G sind die Zeilen von G; diese erzeugen daher $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C} = < g_{1\bullet}, \cdots, g_{k\bullet} > .$$

G heißt dementsprechend eine **Generatormatrix**, oft auch **Basismatrix** von $\mathcal{C}$.

Beispiel (Fortsetzung):
Der Code $\mathcal{C}_1$ mit Generatormatrix G_1 hat Dimension 4 und Wörter der Länge 7. Er heißt **(7, 4)−Hammingcode** (nach R.W. Hamming, dem Erfinder einer ganzen Serie von Codes).

1.5 Kontrollmatrix eines linearen Codes

$\mathcal{C}$ kann (wie jeder Unterraum von K^n) als Lösunsraum eines homogenen linearen Gleichungssystems dargestellt werden:

$$c \in \mathcal{C} \quad \Leftrightarrow \quad H \cdot c^T = 0.$$

Dazu sucht man als Zeilen der Koeffizientenmatrix H, der sogenannten **Kontrollmatrix**, $n - k$ linear unabhängige Vektoren $h_1, \ldots, h_{n-k}$, die auf $\mathcal{C}$ senkrecht stehen, für die also gilt

$$h_i \cdot g_{j\bullet}^T = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-k, \quad j = 1, \ldots, k).$$

Wegen der Linearität der Abbildung

$$S_H : \begin{cases} K^n & \longrightarrow & K^{(n-k,1)} \\ v & \mapsto & H \cdot v^T \end{cases}$$

wird durch S_H dann jeder Codevektor als Linearkombination von $\{g_{1\bullet}, \ldots, g_{k\bullet}\}$ annulliert. Aus Dimensionsgründen gilt sogar

$$\mathcal{C} = \text{Kern}\, S_H.$$

Spezialfall: Ist $G = (I_k \mid B)$, so kann man $H = (-B^T \mid I_{n-k})$ wählen.
Beispiel (Fortsetzung)
Ist $G = G_1$, so wählen wir z.B. die $(4 \times 7)-$ Matrix

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,0 & 1\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,1 & 0\,1\,0 \\ 1\,1\,0\,1 & 0\,0\,1 \end{pmatrix}.$$

Für diese gilt insbesondere $H_1 \cdot {G_1}^T = 0$ und $H_1 \cdot c^T = 0$ für jeds $c \in \mathcal{C}_1$.
Z.B. folgt:

$$H_1 \cdot (1,1,0,0,0,1,0)^T = h_{\bullet 1} \oplus h_{\bullet 2} \oplus h_{\bullet 6} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.6 Fehlerkorrektur

Nach der Übertragung über einen Kanal seien die

empfangene Nachricht	y	$=$	η_1	$\dots$	η_n
gesendete Nachricht	c	$=$	γ_1	$\dots$	γ_n

und der sogenannte **Fehlervektor** $e := y - c = \eta_1 - \gamma_1 \quad \dots \quad \eta_n - \gamma_n$.

Wieder wegen der Linearität von S_H und wegen $S_H(c) = 0$ gilt:

$$S_H(y) = S_H(c+e) = S_H(c) = S_H(e).$$

Der Vektor $S_H(y)$ ist daher unabhängig von der gesendeten Nachricht c und nur vom Fehervektor abhängig; er heißt **Syndrom** von y. Die Abbildung S_H wird daher **Syndrom-Abbidung** genannt.
Sind nun die Syndrome $S_H(e_1), \dots, H(e_n)$, d.h. die Spalten von H paarweise verschieden, so kann man uner der Voraussetzung, dass ein Fehler in nur einer Komponente von c vorgekommen ist, diese Komponente bestimmen und im Falle $K = \mathrm{GF}(2)$ korrigieren. Ein solcher Code heißt 1-fehlererkennend bzw. **1-fehlerkorrigierend**. (Sind allerdings in einem Codewort mehrere Stellen verfälscht worden, so kann die Fehlerkorrektur sogar deren Anzahl vergrößern.)

Beispiel: $(7,4)-$Hammingcode (Fortsetzung):

In $H_1 = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,0 & 1\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,1 & 0\,1\,0 \\ 1\,1\,0\,1 & 0\,0\,1 \end{pmatrix}$ sind die 7 Spalten paarweise verschieden. Daher ist der $(7,4)-$Hammingcode $\mathcal{C}_1 = \text{Kern } S_{H_1}$ 1-fehlerkorrigierend.
Ist etwa das übertragene Codewort $c_1 = 1100010$ zu $y_1 = 1101010$ verfälscht, so liefert y_1 das Syndrom

$$S_{H_1}(y_1) = H_1 \cdot y_1 = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,0 & 1\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,1 & 0\,1\,0 \\ 1\,1\,0\,1 & 0\,0\,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = h_{\bullet 1} \oplus h_{\bullet 2} \oplus h_{\bullet 4} \oplus h_{\bullet 6}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = h_{\bullet 4};$$

Der Sequenzraum: Codes und Kugelpackungen

Wir betrachten im Folgenden Codes fester Länge n, sogenannte **Blockcodes**, also Teilmengen von A^n. Dabei wollen wir zunächst die Bemerkung (**??**) präzisieren. Wir führen dazu einen *Abstandsbegriff* ein:

E1.7 Hamming-Abstand, Sequenzraum

(a) **Definition: Hamming-Abstand**

Seien $\mathbf{a} = a_1 \dots a_n$ und $\mathbf{b} = b_1 \dots b_n$ Wörter der Länge n über dem Alphabet A; dann bezeichnet $d_H(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ die Anzahl der unterschiedlichen Komponenten von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$. Diese Zahl $d_H(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mid \{i \mid a_i \neq b_i\} \mid$ heißt *Hamming-Abstand (Hamming-Distanz)* zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$. (Wir schreiben oft nur d statt d_H).

Beispiel:

$$\begin{aligned} d(0001\underline{0}, 0001\underline{1}) &= 1 = d(000\underline{1}0, 000\underline{0}0). \\ d(000\underline{11}, 000\underline{00}) &= 2 = d(\underline{1}000\underline{1}, \underline{0}000\underline{0}). \end{aligned}$$

(b) *Eigenschaft:* [= **1cm Der Hamming-Abstand $d_H : A^n \times A^n \to \mathbb{N}_0$ ist eine *Metrik* auf A^n,!d.h. es gilt (für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in A^n$):

(i) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ (Positivität) (ii) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$

(iii) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (Symmetrie)

(iv) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \geq d(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ (Dreiecksungleichung) .

Beweisskizze

(i), (ii) und (iii) sind offensichtlich: Die Dreiecksungleichung (iv) sieht man folgendermaßen ein: Ist i die Nummer einer Komponente, in der sich $\mathbf{x}$ und $\mathbf{z}$ unterscheiden ($x_i \neq z_i$), so gilt mindestens eine der Beziehungen $x_i \neq y_i$ oder $y_i \neq z_i$. Eine Komponente, die einen Beitrag 1 zu $d(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ liefert, gibt einen solchen auch für $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ oder für $d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$. □

(c) **Definition: Sequenzraum**

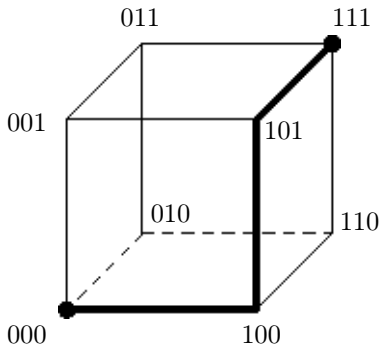
Der metrische Raum (A^n, d_H), bestehend aus der Menge aller Wörter der Länge n über A und dem Abstand d_H, heißt *Sequenzraum*. Ist speziell $A = \{0, 1\}$, so spricht man auch vom $n-$dimensionalen **Einheitswürfel**.

(Der Sequenzraum spielt u.a. auch in der Evolutionstheorie, vgl. Beispiel **??** (iv), eine Rolle; die Hamming-Distanz zwischen zwei Genen ist dort die minimale Anzahl der Punktmutationen, die nötig ist, um das Muster eines der beiden Gene in das des anderen umzuwandeln.)

E 1.8 Beispiel:

$(\{0, 1\}^3, d_H)$ lässt sich mittels eines Würfels der Kantenlänge 1 im 3-dim reellen Raum darstellen; die Wörter von $\{0, 1\}^3$ sind den Ecken des Würfels zugeordnet; der Abstand zweier Wörter ist die Länge des kürzesten Weges zwischen den

zugeordneten Ecken längs einer Würfelkante (s. Figur E.2).



Figur E.2: Darstellung des Sequenzraums $(\{0,1\}^3, d_H)$.
(Markiert ist ein kürzester Weg von 000 zu 111;
seine Länge ist 3 – entsprechend dem Hamming-Abstand.)

Aufgabe E.1
Zeigen Sie: Zu gegebenem Wort $\mathbf{z} \in A^n$ gibt es $\binom{n}{m}(|A|-1)^m$ Wörter in A^n, die Abstand m von $\mathbf{z}$ haben (für $0 \leq m \leq n$).

Das Begehen von t Fehlern bei Übermittlung eines Codeworts $\mathbf{c}$ führt zu einem Wort $\mathbf{x}$ des Sequenzraums, das sich von $\mathbf{c}$ in t Komponenten unterscheidet. Dieser Sachverhalt legt es nahe, Sphären oder Kugeln um Codewörter zu betrachten; dabei sind Kugeln wie in metrischen Räumen üblich definiert:

E 1.9 Definition: Kugel

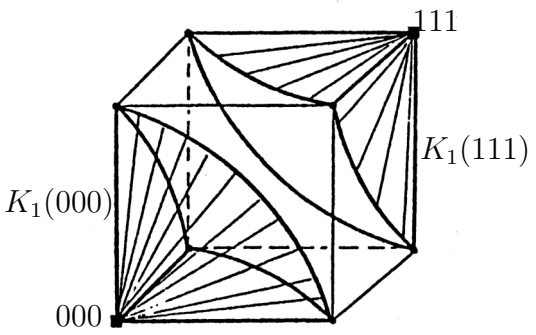
Ist $\mathbf{z} \in A^n$ und $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, dann heißt

$$K_t(\mathbf{z}) := \{\mathbf{x} \in A^n \mid d_H(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq t\}$$

Kugel vom Radius t um den Mittelpunkt $\mathbf{z}$.

E 1.10 Beispiel (Fortsetzung):

Figur E.3 skizziert die Kugeln $K_1(000) = \{000,\ 100,\ 010,\ 001\}$ und $K_1(111) = \{111,\ 011,\ 101,\ 110\}$ vom Radius 1 in $(\{0,1\}^3, d_H)$.



Figur E.3: Zwei Kugeln vom Radius 1 in $(\{0,1\}^3, d_H)$.

E 1.11 Bemerkungen: Kugeln und Fehlerkorrektur

(i) Die Elemente von A^n, die aus $\mathbf{z} \in A^n$ durch *Fehler in bis zu t Komponenten* entstehen, liegen in $K_t(\mathbf{z})$. Umgekehrt kann jedes Wort von $K_t(\mathbf{z})$ aus $\mathbf{z}$ durch t oder weniger Fehler entstanden sein.

(ii) Ist $\mathbf{b} \in K_t(\mathbf{z}_1) \cap K_t(\mathbf{z}_2)$, so kann $\mathbf{b}$ durch bis zu t Fehler aus $\mathbf{z}_1$ oder aus $\mathbf{z}_2$ entstanden sein.

(iii) Ist $\mathcal{C}$ ein Blockcode mit der Eigenschaft

$$(*) \qquad K_t(\mathbf{c}_i) \cap K_t(\mathbf{c}_j) = \emptyset \quad \text{für alle } \mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j \in \mathcal{C} \text{ mit } \mathbf{c}_i \neq \mathbf{c}_j,$$

so lassen sich (durch Decodierung zum Mittelpunkt derjenigen Kugel, in der das fehlerhafte Wort liegt) Wörter mit bis zu t Fehlern korrigieren.

(iv) Ein einfaches *Decodierschema* besteht dabei aus der Auflistung der Kugeln um Codewörter und ihrer Elemente mit der Vorschrift, zum Kugelmittelpunkt hin zu decodieren. Alle nicht erfassten Wörter gehören zum *Decodierungsausfall*, sind nicht decodierbar und werden als "fehlerhaft" gemeldet.

Durch (10.5)(ii) und (iii) wird die folgende Definition motiviert:

E 1.12 Definition: Fehlerkorrigierender Code

Ein Code $\mathcal{C}$, der die Eigenschaft $(*)$ von E 1.11(iii) besitzt, heißt
t-fehlerkorrigierender Code.

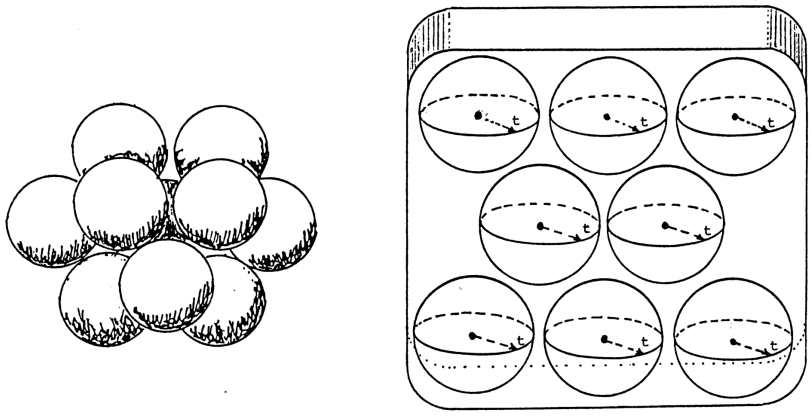
Er hat die Eigenschaft, dass bei ihm fehlerhafte Wörter mit Fehlern in m Komponenten für $m \leq t$ auf die in E 1.11 (iii) angegebene Weise richtig decodiert werden können.

Jeder $t-$ fehlerkorrigierende Code ist also auch $(t-1)-$fehlerkorrigierend, $(t-2)-$fehlerkorrigierend, usw..

Beispiel (Fortsetzung):
$\mathcal{C}_1 = \{000, 111\}$ ist nach E 1.10 ein 1-fehlerkorrigierender Code. Die fehlerhaften Wörter (in Figur E.3 durch • markiert) werden zum Kugelmittelpunkt (mit ■ markiert) korrigiert.

E 1.13 Kugelpackungen

Es ist also in unserem Zusammenhang sinnvoll, nach einer disjunkten Überdeckung von A^n (bzw. der Überdeckung einer Teilmenge von A^n) durch Kugeln vom Radius t zu fragen, nach sogenannten *Kugelpackungen.* Die Kugel-Mittelpunkte können dann als Elemente eines Codes $\mathcal{C}$ gewählt werden, der t-fehlerkorrigierend ist. (Vgl. Figur E.4 !)



a) b)

Bild E.4: Kugelpackung a) modellhaft b) schematisch

Wir behandeln *Schranken* für die Möglichkeit, solche Packungen zu finden. Dazu betrachten wir zunächst die Mächtigkeit einer Kugel und dann die Anzahl der durch die Kugeln abgedeckten Wörter.

E 1.14 Anzahlen

(a) **Kugel-Mächtigkeit**

Für eine Kugel vom Radius t in A^n gilt (mit $\mid A \mid = q$ und $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$):

$$\mid K_t(\mathbf{c}) \mid = \sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i} (q-1)^i$$

(b) **Kugelpackungs-Schranke** (Hamming-Volumenschranke)

Existiert ein t-fehlerkorrigierender Code $\mathcal{C}$ in A^n, so gilt folgende Ungleichung (mit $\mid A \mid = q$):

$$(**) \qquad \sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i} (q-1)^i |\mathcal{C}| \quad \leq \quad q^n.$$

Beweis:

(a) Nach Aufgabe E.1 gibt es $\binom{n}{i}(q-1)^i$ Wörter vom Abstand i von $\mathbf{c}$; in $K_t(\mathbf{c})$ liegen alle diese Wörter für $i = 0$ bis t.

(b) Definitionsgemäß sind die $|\mathcal{C}|$ Kugeln vom Radius t um Codewörter disjunkt; es gilt also

$$\mid \dot{\bigcup_{\boldsymbol{c} \in \mathcal{C}}} K_t(\mathbf{c}) \mid = \sum_{\boldsymbol{c} \in \mathcal{C}} \mid K_t(\mathbf{c}) \mid = \mid \mathcal{C} \mid \cdot K_t(\mathbf{c}) =: s \ .$$

Alle betrachteten Wörter liegen in A^n. Es gilt also $s \leq \mid A^n \mid = q^n$. □

(c) **Kugelüberdeckung**

In der Ungleichung $(**)$ *gilt die Gleichheit genau dann*, wenn die zum Code gehörige Kugelpackung die Eigenschaft hat, dass jedes Wort von A^n in einer (eindeutig bestimmten) Kugel vom Radius t liegt. Ein Code dieser Eigenschaft heißt *perfekter Code*.

Genauer:

E 1.15 Definition: Perfekter Code

Ein Code $\mathcal{C} \subseteq A^n$ heißt **t–perfekt** (mit $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), falls gilt:

(i) $K_t(\mathbf{c}_1) \cap K_t(\mathbf{c}_2) = \emptyset$ für alle $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in \mathcal{C}$ mit $\mathbf{c}_1 \neq \mathbf{c}_2$ (d.h. $\mathcal{C}$ ist t-fehlerkorrigierend) und

(ii) $A^n = \bigcup\limits_{\boldsymbol{c} \in \mathcal{C}} K_t(\mathbf{c})$ (d.h. die Kugeln vom Radius t um Codewörter überdecken A^n).

Statt $t-$perfekt sagt man auch nur **perfekt.**

E 1.16 Anmerkung zu perfekten Codes

(a) **Beispiele von perfekten Codes:**
Triviale perfekte Codes über dem Alphabet A sind:
• A^n (mit $t = 0$),
• nur aus einem einzigen Codewort der Länge n bestehende Codes (mit $t = n$) und
• im Falle $A = \{0, 1\}$ die Wiederholungscodes $\{00\ldots0, 11\ldots1\}$ der (ungeraden) Länge $2m + 1$ (mit $t = m$).

Wir erwähnen noch folgende perfekten Codes:

- einen binären Code der Länge $n = 23$ mit 2^{12} Wörtern (für $t = 3$), den sogenannten *binären Golay-Code* $\mathcal{G}_{23}$, s. **??** (d),
- einen ternären Code der Länge $n = 11$ mit 3^6 Wörtern (für $t = 2$), den sogenannten *ternären Golay-Code*,
- eine Serie von Codes $\mathcal{H}_{q,r}$ mit $n = (q^r - 1)/(q - 1), |\mathcal{H}_{q,r}| = q^{n-r}$ (mit $t = 1$) für jede Primzahlpotenz q, die sogenannten *Hamming-Codes* ; (s. §12 !)

(b) Perfekte Codes sind deswegen interessant, weil sie den Raum A^n gut ausschöpfen und weil die Decodierung für jedes Wort erklärt ist. Auch in anderem Zusammenhang gibt es Anwendungen; (s. Teil d)!).

(c) Nach weitgehender Vorarbeit von J.H. van Lint (s. auch [1971]) ist es A. Tietäväinen (und unabhängig davon V.A. Zinovjev und K.V. Leontjev) gelungen, die $t-$perfekten Codes über Alphabeten von Primzahlpotenz-Ordnungen zu kennzeichnen, (s. van Lint [1982], Pless [1982]):

Satz über perfekte Codes:
Ist $\mathcal{C}$ ein nicht-trivialer perfekter Code über einem Alphabet A mit $|A| = p^m$, p prim, dann hat $\mathcal{C}$ die gleichen Parameter wie ein Hamming- oder ein Golay- Code.

Für $t > 2, t \neq 6$ ist nach M.R. Best die Voraussetzung " q Primzahlpotenz" überflüssig.

(d) Mit Hilfe eines perfekten Codes über dem Alphabet $\{0, 1, 2\}$ lässt sich das Problem von **Garantiesystemen bei Toto-Wetten** behandeln. Sei der Ausgang von 13 Fußballspielen vorauszusagen; unter Verwendung der Codierung:

$$0 \triangleq \text{Unentschieden}, \quad 1 \triangleq \text{Heimsieg}, \quad 2 \triangleq \text{Heimniederlage}$$

wird das Ergebnis einer Ausspielung zu einem Wort $\mathbf{v}$ aus $\{0, 1, 2\}^{13}$. Von einem Tipp $\mathbf{c}$ mit 12 Richtigen hat $\mathbf{v}$ den Abstand 1; die richtige Tippreihe $\mathbf{v}$ liegt daher in $K_1(\mathbf{c})$. Wie aus Teil (a) zu ersehen (– s. auch 12.4 –), gibt es einen perfekten Code in $\{0, 1, 2\}^{13}$, den *ternären Hamming-Code $\mathcal{H}_{3,3}$ der Länge 13*. Man kann dann (theoretisch) die Mittelpunkte der (den Raum überdeckenden) Kugeln vom Radius 1 um Codewörter als Tippreihen wählen

und hat dann mit Sicherheit 12 Richtige zu erwarten. Nach 10.8(c) gibt es jedoch $3^{13}/(1+13\cdot 2) = 3^{10}$ solcher Punkte, für praktische Zwecke eine zu große Anzahl.

Allgemein kann man bei einer Toto-Wette mit n Tippreihen fragen, ob es ein Wettsystem gibt, das $n-t$ Richtige garantiert. Eine Lösung würden t-perfekte ternäre Codes mit Wortlänge n liefern. Für $t=1$ sind nicht wesentlich andere Zahlen zu erwarten als beim eben behandelten Beispiel. Für $t>1$ gibt es (nach Tietäväinen und Pless), im Wesentlichen nur einen einzigen nicht-trivialen ternären $t-$perfekten Code, und zwar mit $n=11$, $|\mathcal{C}| = 3^6 = 729$ und $t=2$ (d.h. 9 Richtige garantiert), den bereits erwähnten *ternären Golay-Code*. Wegen der zu großen Anzahl von nötigen Tipps und lediglich garantiertem Nebengewinn ist das Verfahren nicht lukrativ. Somit ist das Toto-System noch nicht zusammengebrochen.

Zwar ist die Voraussetzung einer *disjunkten* Überdeckung mit Kugeln gleichen Radius nicht *notwendige* Voraussetzung für ein Garantiesystem. Jedoch ist nicht zu erwarten, dass andere geeignete Überdeckungen mit wesentlich weniger Mittelpunkten auskommen als die der erwähnten perfekten Codes.

(e) Wie bemerkt, ist bei obigen Beispielen die Disjunktheit der Kugeln nicht wesentlich (ausser für deren Anzahl). Wir definieren in diesem Zusammenhang:

Ist $\mathcal{C} \subseteq A$, dann heißt $\rho(\mathcal{C})$ **Überdeckungsradius** von $\mathcal{C}$, falls $\rho(\mathcal{C})$ der kleinste Radius ρ ist mit der Eigenschaft, dass die Kugeln vom Radius ρ um Codewörter die Menge A^n überdecken, also $A^n = \bigcup_{\boldsymbol{c}\in\mathcal{C}} K_\rho(\mathcal{C})$ gilt. Bei einem $t-$perfekten Code $\mathcal{C}$ ist $\rho(\mathcal{C}) = t$, und zusätzlich sind die erwähnten Kugeln disjunkt. Ja es gilt sogar:

$\mathcal{C}$ ist $t-$perfekt genau dann, wenn $\rho(\mathcal{C}) = t$ ist und je zwei Codewörter mindestens den Hamming-Abstand $2t+1$ haben.

Um bei gegebenen Code $\mathcal{C}$ dessen Fehlerkorrektur-Eigenschaften zu bestimmen, ist es nicht nötig, die Kugeln vom Radius t um Codewörter auf Disjunktheit zu untersuchen. Es reicht dazu, den Abstand je zweier Codewörter zu kennen, genauer den minimalen Wert dieses Abstands:

E 1.17 Minimalabstand

(a) *Definition:* Sei $\mathcal{C} \subseteq A^n$; dann ist der Minimalabstand von $\mathcal{C}$ definiert als

$$d_{\min}(\mathcal{C}) := \min_{\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\in\mathcal{C},\boldsymbol{c}_1\neq\boldsymbol{c}_2} d_H(\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2)\ .$$

(b) *Eigenschaften:*

$\mathcal{C} \subseteq A^n$ ist t-fehlerkorrigierend genau dann, wenn gilt: $d_{\min}(\mathcal{C}) \geq 2t+1$

.

Beweis: "⇒" Sei $d_{\min}(\mathcal{C}) =: s \leq 2t$. Dann existieren $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in \mathcal{C}$ mit $d_H(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) = s$.
Ist $s < t$, so gilt $\mathbf{c}_2 \in K_t(\mathbf{c}_1)$. Ist $s \geq t$, so kann man bei $\mathbf{c}_1$ unter den s Komponenten, in denen sich $\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{c}_2$ unterscheiden, t Komponenten in solche von $\mathbf{c}_2$ umändern. Es entsteht ein Wort $\mathbf{z}$ mit $d_H(\mathbf{c}_1, \mathbf{z}) = t$ und $d_H(\mathbf{c}_2, \mathbf{z}) = s - t$. Wegen $s - t \leq t$ folgt $K_t(\mathbf{c}_1) \cap K_t(\mathbf{c}_2) \neq \emptyset$. Damit ist $\mathcal{C}$ nicht $t-$fehlerkorrigierend (s. 10.6).

"⇐" Ist $\mathcal{C}$ nicht t-fehlerkorrigierend, so existieren $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in \mathcal{C}$ und $\mathbf{v} \in A^n$ mit $\mathbf{v} \in K_t(\mathbf{c}_1) \cap K_t(\mathbf{c}_2)$. Aus der Dreiecksungleichung (10.1b) ergibt sich

$$d_{\min}(\mathcal{C}) \leq d_H(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) \leq d_H(\mathbf{c}_1, \mathbf{v}) + d_H(\mathbf{v}, \mathbf{c}_2) \leq t + t. \qquad \square$$

(c) **Beispiel:** Beim Wiederholungscode $\mathcal{C}_1 = \{000, 111\}$ aus Beispiel E 1.10 ist trivialerweise $d_{\min}$ gleich 3, in Übereinstimmung damit, dass $\mathcal{C}_1$ 1-fehlerkorrigierend ist.