VARIEDADES DIFERENCIALES

CHAPTER 1

VARIEDADES DIFERENCIALES

1. Variedades

Las variedades son espacios topológicos que son localmente igual a $\Re^n$. Este hecho permite entonces utilizar conceptos que conocemos de $\Re^n$ y usarlos en la variedad, al menos localmente (es decir, al menos para cada abierto). Por ejemplo, la diferencial es un concepto bien importante de $\Re^n$ porque nos da un modelo simple de movimiento. El movimiento es la propiedad más importante de todo objeto en la naturaleza, de hecho la física se dedica a estudiar principalmente esta caracteristica, el movimiento. Ya sea el movimiento de un objeto o el movimiento de los campos en el espacio tiempo o el movimiento de las cantidades termodinámicas en un sólido. Esa es la razón de la importancia del cálculo diferencial, tanto en ciencias exactas, como en su aplicación más directa, que es la tecnología avanzada. Las variedades diferenciales son una generalización del cálculo diferencial a variedades, que llamamos variedades diferenciales. En la actualidad, las variedades diferenciales tienen aplicación en un gran número de áreas de la ciencia y la tecnología. Por sólo nombrar algunas, diremos que el mejor modelo que se tiene hasta el momento del espacio tiempo es el de una variedad diferenciable. El estudio de teoría de campos en espacios curvos necesita para su mejor comprensión de las variedades diferenciables. La función de calor en termodinámica es una fafiana, es decir, una 1-forma, que es un concepto formal de variedades diferenciables. O el estudio moderno del control automático en ingeniería, usa intensivamente la herramienta de las variedades diferenciales, etc. En este capítulo daremos los conceptos más importantes de las variedades y de las variedades diferenciables. Vamos a empezar por su definición.

Definición 1. *Una* ***variedad real de dimensión*** n *es un espacio topológico de Hausdorff* (M^n, τ_{M^N}), *tal que para todo elemento* $p \in M^n$ *existe una terna* $c = (U_p, \psi, V)$ *donde* $U_p \in \tau_{M^n}, V \in \tau_{\Re^n}$ *y* $\psi : U_p \to V$, *homeomorfismo. Ver figura 1.*

Es decir, una variedad es un espacio topológico que localmente es $\Re^n$ (o sea, para todo $p \in M^n$, se tiene que $U_p \in \tau_{M^n}$, es homeomorfo a $\Re^n$). Si en la definición cambiamos real por complejo, tenemos variedades complejas de dimensión n. Por ejemplo, $\mathcal{C} \overset{\text{hom}}{\cong} \Re^2$ es una variedad compleja de dimensión uno.

Para trabajar con variedades se acostumbra definir algunos conceptos de la variedad, que estaremos usando en el futuro.

Definición 2. *Sea* M^n *una variedad, a:*

· $c_\alpha = (U_\alpha, \psi_\alpha, V_\alpha)$, $\bigcup\limits_{\alpha \in J} U_\alpha = M^n$ *se le denomina* ***carta*** *sobre* M^n

· U_α *se le llama* ***dominio de la carta****.*

· (U_α, ψ_α) *se le llama* ***sistema de coordenadas*** *sobre* U_α

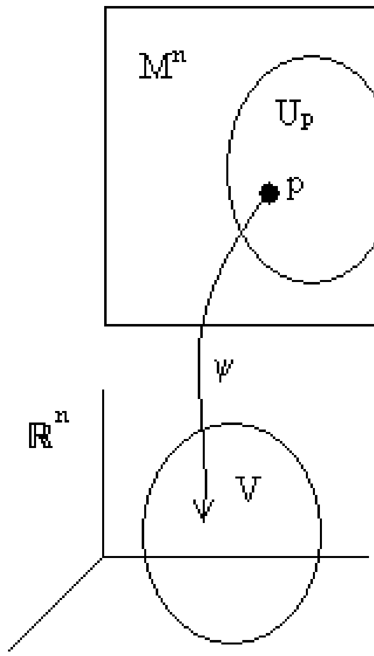

FIGURE 1. Una variedad real de dimensión n es un espacio topológico de Hausdorff localmente homeomorfo a $\Re^n$.

· $\left(\psi_\alpha^{-1}, V_\alpha\right)$ *se le llama* ***parametrización*** *de* U_α

· $V_\alpha = \psi_\alpha\left(U_\alpha\right)$ *se le llama* ***imagen de la carta*** c_α

· $r^i : \Re^n \to \Re, \left(\lambda^1, \cdots, \lambda^n\right) \to r^i\left(\lambda^1, \cdots, \lambda^n\right) = \lambda^i$ *se llama la* ***i-esima función coordenada*** *sobre* $\Re^n$

· $x_\alpha^i := r^i \circ \psi_\alpha$ *es la* ***i-esima función coordenada del sistema de coordenadas***

· *Sean* c_α *y* c_β *dos cartas* $c_\alpha = \left(U_\alpha, \psi_\alpha, V_\alpha\right)$ *y* $c_\beta = \left(U_\rho, \psi_\beta, V_\beta\right)$. *A las funciones* $\psi_{\alpha\beta} := \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \to \psi_\beta\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$ *y se les llama* ***funciones de transición****, donde* $\psi_{\alpha\beta}$ *es un homeomorfismo, ver figura 2.*

COMENTARIO 1. *Las funciones* $\left(x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^n\right) : U_\alpha \to \Re^n$

$$p \to \left(x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^n\right)(p)$$

se pueden representar como $\psi_\alpha = \left(x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^n\right)$

COMENTARIO 2. *Todos los conceptos de la definición 2 dependen de los abiertos del espacio topológico. Se dice entonces que son* ***conceptos locales****.*

Es decir, cuando hablemos de algún concepto local, significa que este concepto vale en los abiertos del espacio. Veamos algunos ejemplos de variedades.

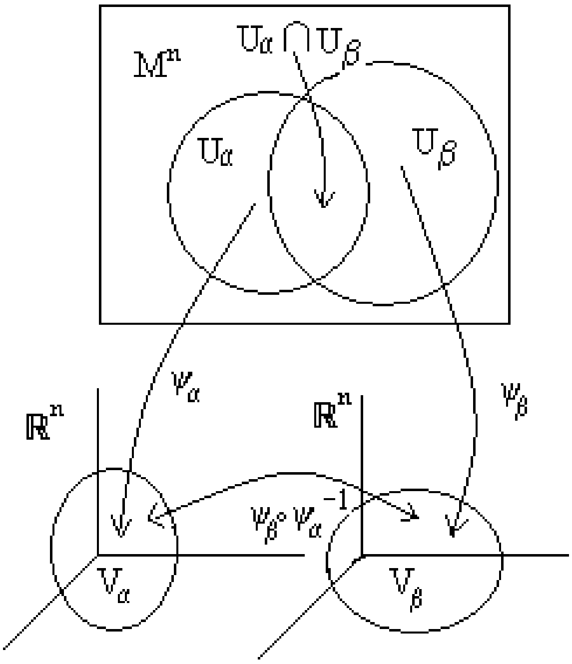

FIGURE 2. En esta figura se muestran dos cartas, con sus dominios, sus sistemas coordenados, sus imágenes y sus funciones de transición.

EXEMPLO 1. $(\Re, \tau_{\Re^n})$ *es una variedad real de dimensión n con una sola carta* $c = (\Re^n, id|_{\Re^n}, \Re^n)$.

EXEMPLO 2 (Pelota). *Vamos a estudiar un ejemplo que vamos a utilizar a lo largo de estos capítulos. Se trata de las pelotas o* $\left(S^2, \tau_{S^2}\right)$*, con su topología heredada de* $\Re^3$*. La pelota es una 3-esfera y es una variedad 2-dimesional real que al menos tiene dos cartas. Estas son:*

$$c_1 = \left(U_1, \sigma_+, \Re^2\right) \quad con \quad U_1 = S^2 \setminus \{(0,0,1)\}.$$

donde el homeomorfismo σ_+ *esta definido como:*

$$\sigma_+(x,y,z) = \frac{1}{1-z}(x,y)$$

cuya inversa esta dada por:

$$\sigma_+^{-1}(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}\left(2x, 2y, x^2+y^2-1\right)$$

Análogamente, la segunda carta, ahora sin el polo sur, esta dada por:

$$c_2 = \left(U_2, \sigma_-, \Re^2\right) \quad con \quad U_2 = S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}.$$

donde el homeomorfismo σ_- esta definido como:

$$\sigma_-(x,y,z) = \frac{1}{1+z}(x,y)$$

cuya inversa esta dada por:

$$\sigma_-^{-1}(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}\left(2x, 2y, -x^2-y^2+1\right)$$

Entonces $U_1 \cup U_2 = S^2$ y σ_+ y σ_- son homeomorfismos. A σ_+ se le llama la ***proyección estereográfica*** *desde el norte y a σ_- desde el sur.*

Exemplo 3 (Esferas). *Vamos ahora a generalizar el ejemplo anterior a cualquier dimensión, y formemos la variedad de las esferas. La esfera con su topología heredada de $\Re^n$, es el espacio topológico (S^n, τ_{S^n}). La n-esfera es una variedad n-dimesional, real que al menos tiene dos cartas. Estas son:*

$$c_1 = (U_1, \sigma_+, V_1) \quad con \quad U_1 = S^n \setminus \{(0,\cdots,0,1)\}, \qquad V_1 = \Re^n$$

donde el homeomorfismo σ_+ esta definido como:

$$\sigma_+\left(x^1,\cdots,x^{n+1}\right) = \frac{1}{1-x^{n+1}}\left(x^1,\cdots,x^n\right)$$

cuya inversa esta dada por:

$$\sigma_+^{-1}\left(x^1,\cdots,x^n\right) = \frac{1}{1+{x^1}^2+\cdots+{x^n}^2}\left(2x^1,\cdots,2x^n, {x^1}^2+\cdots+{x^n}^2-1\right)$$

Hay que comparar estos homeomorfismos con los de la compactificación de $\Re^n$ en el ejemplo **??**. *Analogamente, la segunda carta, ahora sin el polo sur, esta dada por:*

$$c_2 = (U_2, \sigma_-, V_2) \quad con \quad U_2 = S^n \setminus \{(0,\cdots,0,-1)\}, \qquad V_2 = \Re^n$$

donde el homeomorfismo σ_- esta definido como:

$$\sigma_-\left(x^1,\cdots,x^{n+1}\right) = \frac{1}{1+x^{n+1}}\left(x^1,\cdots,x^n\right)$$

cuya inversa esta dada por:

$$\sigma_-^{-1}\left(x^1,\cdots,x^n\right) = \frac{1}{1+{x^1}^2+\cdots+{x^n}^2}\left(2x^1,\cdots,2x^n, -{x^1}^2-\cdots-{x^n}^2+1\right)$$

Entonces $U_1 \cup U_2 = S^n$ y σ_+ y σ_- son homeomorfismos. Igual que en el caso de las pelotas, a σ_+ se le llama la ***proyección estereográfica*** *desde el norte y a σ_- desde el sur.*

En lo que sigue, vamos a trasladar el concepto de diferencial a la variedad utilizando los homeomofismos de ésta en $\Re^n$. Como sabemos como diferenciar en $\Re^n$, podemos definir diferenciales en la variedad. Cuando esto se puede, se dice que la variedad es suave. Recordemos la definición de suave en $\Re^n$.

Definición 3. *Sean U y V abiertos de $\Re^n$ y $\Re^m$ respectivamente y $f: U \to V$. Se dice que f es* ***suave*** *si $r^i \circ f : U \to \Re$ tiene derivadas de todos los órdenes.*

Vamos a entender lo que es una variedad diferenciable. En una forma simple se puede decir que una variedad diferenciable es basicamente una variedad en donde las funciones de transición son suaves. Otra manera de decirlo es la siguiente. Dos cartas se dicen compatibles si su función de transición es suave, es decir, una variedad se dice diferenciable si esta cubierta con cartas compatibles. Formalmente se tiene:

DEFINICIÓN 4. *Dos* ***cartas*** c_α *y* c_β *son* ***compatibles*** *si*
i) $U_\alpha \cap U_\beta = \phi$ *ó*
ii) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ *y las funciones de transición son suaves.*

DEFINICIÓN 5. *Un* ***atlas*** *sobre* M^n *es una colección de cartas compatibles que cubran* M^n.

DEFINICIÓN 6. *Una* ***variedad real diferenciable*** *ó* ***suave*** *de dimensión* n *es un par* $(M^n, \mathcal{A})$ *donde* M^n *es una variedad real de dimensión* n *y* $\mathcal{A}$ *es un atlas sobre* M^n*, ver figura 3.*

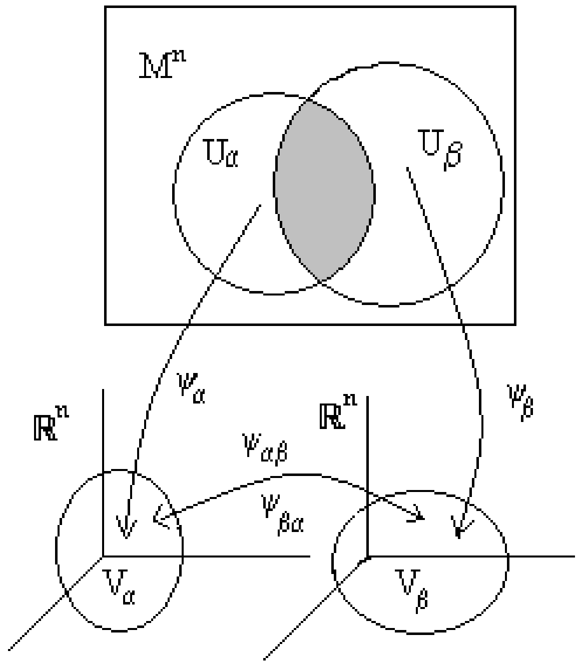

FIGURE 3. Una variedad real diferenciable suave de dimensión n es una variedad real de dimensión n en donde las funciones de transición son suaves.

DEFINICIÓN 7. *Dos* ***atlas*** $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{A}'$ *sobre* M^n *son* ***equivalentes*** *si* c_α *y* c'_β *son compatibles para toda* $c_\alpha \in \mathcal{A}$ *y* $c'_\beta \in \mathcal{A}'$.

Si tomamos todo el conjunto de atlas sobre M^n, la relación $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$ con $\mathcal{A}$ es equivalente a $\mathcal{A}'$, es una relación de equivalencia, la cual separa el conjunto de cartas equivalentes en clases de equivalencia. Si solo usamos los representantes de las clases, lo que se tiene es una estructura direrenciable.

DEFINICIÓN 8. *$[\mathcal{A}]$, el conjunto de clases de atlas sobre M^n se llama una* ***estructura diferenciable*** *sobre M^n*

Intiutivamente, una variedad suave es aquella que tiene una forma suave, es decir, sin aristas o puntas como las del cuadrado o el cubo, sino es suave como el círculo o la esfera.

EJERCICIO 1. *Sean $(M^n, \mathcal{A})$ y $(N^n, \mathcal{B})$ variedades diferenciables. Demuestre que $(M^n \times N^n, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$ es variedad diferenciable.*

EJERCICIO 2. *Sea $(S^n, \mathcal{A})$, $\mathcal{A} = \{c_1, c_2\}$ del ejercicio 3 de esferas. Demuestre que $(S^n, \mathcal{A})$ es variedad diferenciable.*

2. Funciones suaves

El siguiente paso es definir la diferencial en una variedad diferenciable. Para hacer esto, lo que se acostumbra es transladar a $\Re^n$ por medio de los homeomorfismos, la diferenciabilidad de una función. Vamos a iniciar con la definición de diferencial de una función.

DEFINICIÓN 9. *Sea $f : M^n \to \Re$ una función en una variedad (M^n, A). f es* ***suave o diferenciable*** *si $f \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha (U_\alpha) \to \Re$ es suave para toda carta de $\mathcal{A}$, ver figura 4.*

Es decir, una función f que va de la variedad a los reales es suave, si su función correspondiente, la que va de $\Re^n$ a los reales, es suave. Para analizar la función f entonces, es necesario estudiar su función $f \circ \psi_\alpha^{-1}$ correspondiente.

NOTACIÓN 1. *Se denota al* ***conjunto de funciones suaves*** *por $C^\infty(M^n, \Re)$ ó al conjunto de* ***funciones suaves en la vecindad de*** *x por $C^\infty(M^n, x, \Re)$*

COMENTARIO 3. *Observe que*
a) $(C^\infty(M^n, \Re), +, \cdot, \Re, \cdot)$ es un álgebra conmutativa con unidad.
b) $(C^\infty(M^n, \Re), +, \cdot)$ es anillo
c) $(\Re, C^\infty(M^n, \Re), +, \cdot)$ es espacio vectorial.

DEFINICIÓN 10. *Si f es suave en todo punto $x \in W \subset M^n$, se dice que f es una* ***función suave en W***.

PROPOSICIÓN 1. *f suave implica f continua.*

DEM. 1. *Sin dem.* ■

En base a la definición de una función podemos definir la diferencial de una función vectorial. Primero introduciremos la definición formal y luego explicaremos con cuidado el significado de esta.

DEFINICIÓN 11. *Sean M^m y N^n variedades y $F : M^m \to N^n$ función. F es* ***suave*** *si para toda $f \in C^\infty(N^n, \Re)$ $F^* : C^\infty(N^n, \Re) \to C^\infty(M^m, \Re)$ $F^*(f) = f \circ F$ es suave.*

Para simplificar la notación es conveniente definir el full-back de una función.

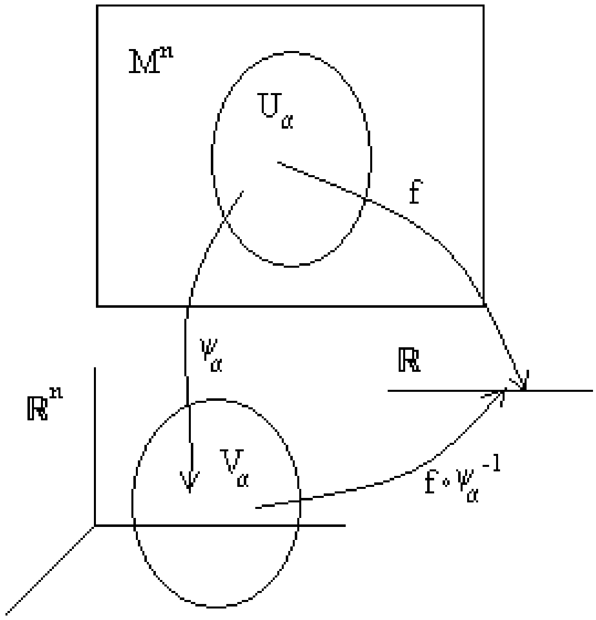

FIGURE 4. Esta figura muestra la representación de una función f suave en una variedad de dimensión n.

NOTACIÓN 2. *A F^* se le llama* ***imagen recíproca*** *o* ***"full-back"*** *de f y se denota al conjunto de "full backs" como $C^\infty(M^m, N^n)$, ver figura 5.*

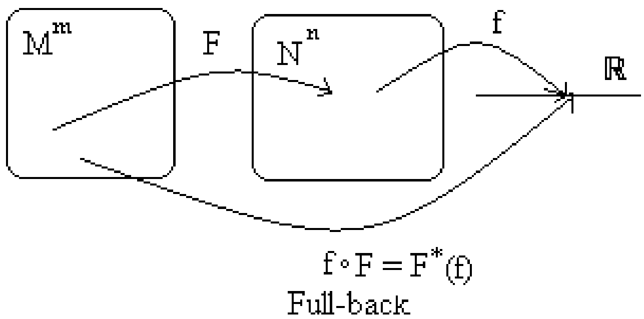

FIGURE 5. La representación del Full-back F^* de una función F.

Como en el caso de una función de una variedad a los reales, la diferenciabilidad de una función que va de una variedad a otra se traduce a la diferenciabilidad de la función correspondiente, en este caso es la función $f \circ F$, llamado el full-back, que va de la variedad a los reales. Así podemos ver su diferenciabilidad tomando en cuenta la definición 9 anterior.

Una consecuencia interesante de las funciones suaves es que la composición de funciones suaves es también suave.

PROPOSICIÓN 2. *La composición de funciones suaves es suave.*

DEM. 2. *Sean M^m, N^n y S^s variedades y $F : M^m \to N^n, G : N^n \to S^s$ y $f : S^s \to \Re$ funciones suaves. Entonces, G suave implica $G^*(f) = f \circ G \in C^\infty(N^n, \Re)$ es suave y F suave implica a su vez que $F^*(G^*(f)) = G^*(f) \circ F = (f \circ G) \circ F = f \circ (G \circ F) = (G \circ F)^*(f)$ es suave. Entonces $G \circ F$ es suave, se tiene que $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$.* ■

EJERCICIO 3. *Sea $c_\alpha = (U_\alpha, \psi_\alpha, V_\alpha)$ carta sobre M^n variedad. Mostrar que ψ_α es suave y $x^i_\alpha = r^i \circ \psi_\alpha$ es suave.*

EJERCICIO 4. *Demuestre que funciones suaves entre variedades son continuas.*

Ahora podemos definir los isomorfismos de variedades diferenciables, aquí son llamados difeomorfismos. Su definición es clara.

DEFINICIÓN 12. *Sea $F \in C^\infty(M^m, N^n)$ biyectiva. F se dice difeomorfismo si $F^{-1} \in C^\infty(N^n, M^m)$.*

DEFINICIÓN 13. *Dos **variedades** se dicen **difeomórficas** si existe un difeomorfismo entre ellas. Se denota $M^m \overset{dif}{\cong} N^n$.*

NOTACIÓN 3. *Si dos variedades M^m y N^n son difeomórficas, se denota como $M^m \overset{dif}{\cong} N^n$.*

La relación $M^m \sim N^n$ si M^m y N^n son difeomórficas $M^m \overset{dif}{\cong} N^n$, es de nuevo una relación de equivalencia. Entonces las variedades difeomórficas están clasificadas en clases de equivalencia, lo cual ayuda mucho para su estudio.

3. Vectores Tangentes.

En esta sección vamos a construir los vectores tangentes a una variedad diferenciable. Esta construcción tiene varios objetivos, pero el más importante es que con los vectores tangente podemos construir un espacio vectorial en cada punto de la variedad. A este espacio se le llama el espacio tangente. Es necesario construir tantos vectores base del espacio tangente a la variedad diferenciable como la dimensión de la variedad, o sea, tantos como la dimensión al espacio $\Re^n$ al cual la variedad diferenciable es homeomorfica. Ya construido el espacio tangente podemos construir el dual a este espacio vectorial, o sea, el espacio de las transformaciones lineales en el espacio tangente. A este espacio se le llama el espacio contangente de la variedad. Estos dos espacios son muy importantes en modelos del espacio tiempo, ya que la métrica de una variedad, es un elemento del espacio contangente, como veremos más adelante. Para simplificar un poco, cuando hablemos de variedad, vamos a referirnos realmente a variedad diferenciable, aunque ya no se especifique en el texto. Vamos a iniciar con la definición de vector tangente a una variedad.

DEFINICIÓN 14. *Sea M^n variedad y $x \in M^n$. Un **vector tangente** a la variedad en $x \in M^n$ es una función $v_x : C^\infty(M^n, x, \Re) \to \Re$ tal que para una* *carta* $c := (U, \psi, V) \in \mathcal{A}$ *con* $x \in U$*, existe* $(a^1, \cdots, a^n) \in \Re^n$ *tal que para toda* $f \in C^\infty (M^n, x, \Re)$ *se cumple* $v_x(f) = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial r^i}\left(f \circ \psi^{-1}\right)\big|_{\psi(x)}$ *(ver figura 6).*

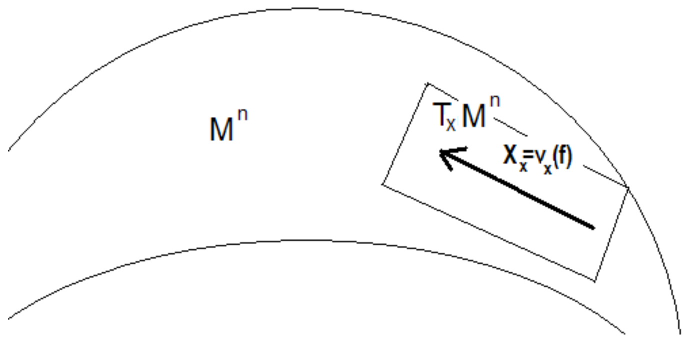

FIGURE 6. El vector tangente formado por la función f y el espacio tangente formado por este vector tangente.

Vamos a entender la definición. Primero notemos que la función $\left(f \circ \psi^{-1}\right)|_{\psi(x)}$ es una función que va de $\Re^n$ a los reales y esta evaluada en el punto $\psi(x)$. Por tanto sabemos tratar con ella. También sabemos que el gradiente de una función en $\Re^n$ es un vector tangente a la superficie que forma la función. Es por eso que podemos interpretrar a la función $v_x(f)$ como un vector tengente a la variedad.

NOTACIÓN 4. *Al conjunto de vectores tangentes sobre* M^n *en* $x \in M^n$ *se le denota por* $T_x M^n$ *y se le llama* ***espacio tangente en*** x.

NOTACIÓN 5. *Al vector con la u-upla* $(0, \cdots, 1, 0, \cdots)$ *se le denota* $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_x$ *de tal forma que* $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_x (f) := \frac{\partial}{\partial r^i}\left(f \circ \psi^{-1}\right)\big|_{\psi(x)}$.

El conjunto $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_x\right\}_{i=1,\cdots,n}$ es entonces una base de $T_x M^n$, todo vector v_x se escribe como $v_x = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_x$. Sea $x^i = r^i \circ \psi \in C^\infty (M^n, x, \Re)$ observemos que

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x (x^j) = \frac{\partial}{\partial r^i}\left(x^j \circ \psi^{-1}\right)\big|_{\psi(x)} = \frac{\partial}{\partial r_i}\left(r^j\right)\big|_{\psi(x)} = \delta_i^j.$$

La función v_x es una derivación, es decir, cumple con la ley de superposición y con la regla de Leibnitz, esto es:

PROPOSICIÓN 3. $v_x \in T_x M^n$ *es una derivación, es decir:*
i) $v_x(f+g) = v_x(f) + v_x(g)$
ii) $v_x(\lambda f) = \lambda v_x(f)$
iii) $v_x(fg) = v_x(f)\, g(x) + f(x)\, v_x(g)$ *para todo* $f, g \in C^\infty (M^n, x, \Re)$ *y para todo* $\lambda \in \Re$.

EJERCICIO 5. *Demostrar la proposición.*

Solo queda ver que el espacio formado por los vectores tangentes es, como se espera, un espacio vectorial. Este se demuestra en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 4. *La estructura* $(\Re, T_xM^n, +, \cdot)$ *es un espacio vectorial de dimensión* n*, con*

1.- $(v_x + w_x)(f) = v_x(f) + w_x(f)$

2.- $(\lambda v_x)(f) = \lambda(v_x(f))$.

El conjunto $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_x \right\}_{i=1,\cdots,n}$ *es una base del espacio vectorial llamado* ***base coordenada****.*

EJERCICIO 6. *Demuestren la proposición anterior.*

COMENTARIO 4. *Observen que si* (U, φ, V) *y* (U', ψ', V') *son cartas de* M^n *en* x*, entonces* $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_x \right\}_{i=1,\cdots,n}$ *y* $\left\{ \frac{\partial}{\partial x'^i}\big|_x \right\}_{i=1,\cdots,n}$ *son bases del espacio tangente de la variedad en* x*. Se tiene que*

$$\left.\frac{\partial}{\partial x'^i}\right|_x \left(x^k\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x \left(x^k\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j \delta_j^k = \alpha_i^k,$$

es decir

$$\left.\frac{\partial}{\partial x'^i}\right|_x = \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial}{\partial x'^i}\right|_x \left(x^j\right) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x .$$

El resultado anterior nos da una fórmula, como la regla de la cádena, para cambiar de homeomorfismo en la variedad, o sea, para cambiar de sistema de coordenadas. En el lenguaje de variedades, hacer un cambio de coordenadas significa cambiar de homeomorfismo de la variedad a los reales. Hay otro tipo de cambio de coordenadas que tiene un significado dinámico, pero de eso no platicaremos aqui. Algunos ejemplos simples de variedades son los siguientes.

EXEMPLO 4. *La variedad* $(\Re^n, \mathcal{A} = \{(\Re^n, id|_{\Re^n}, \Re^n)\})$*. Como* $\psi = id|_{\Re^n}$ *se sigue que* $x^i = r^i \circ id|_{\Re^n} = r^i$ *entonces*

$$v_x = \sum_{i=1}^{n} a^i \left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_x = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial r^i}.$$

En tal caso $T_x\Re^n \overset{iso}{\cong} \Re^n$*, donde el isomorfismo esta dado por la función iso definida como* $iso : T_x\Re^n \to \Re^n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial r^i} \to \left(a^1, \cdots, a^n\right)$

EXEMPLO 5. *El espacio tangente de* S^n *es*

$$T_xS^n = \left\{ v_x \in \Re^{n+1} \mid x \cdot v_x = \sum_{i=1}^{n+1} x^i v_x^i = 0 \right\} \quad x \in S^n \subset \Re^{n-1}.$$

La demostración detallada de esto la veremos más adelante.

4. Uno formas

En todo espacio vectorial se pueden definir transformaciones lineales que forman a la vez un espacio vectorial de la misma dimensión, llamado el espacio dual (ver capítulo 3). Entoces podemos formar el conjunto de transformaciones lineales en el espacio tangente a una variedad y formar el espacio dual. A este espacio se le llama espacio contangente y a sus elementos, las transformaciones lineales, se les llama formas. Vamos a ver todo esto formalmente.

Sean M^m y N^n variedades y $F \in C^\infty(M^m, N^n)$ con $x \in M^m$.

DEFINICIÓN 15. *La **diferencial de** F **en** x es la función definida por*

$$\begin{array}{llll} dF_x: & T_xM^m & \to T_{F(x)}N^n & \\ & v_x & \to dF_x(v_x): & C^\infty(N^n, F(x), \Re) & \to \Re \\ & & & g & \to dF_x(v_x)(g) := v_x(F^*(g)) \end{array}$$

ver figura 7.

NOTACIÓN 6. *Si denotamos $dF_x = F_{x*}$, podemos escribir*

$$F_{x*}(v_x)(g) := v_x(F^*(g))$$

NOTACIÓN 7. *También lo podemos denotar como*

$$dF_x(v_x)(g) = v_x(g \circ F) = v_x \circ F^*(g)$$

ó

$$dF_x(v_x) = v_x \circ F^*$$

Veamos con cuidado el significado de la diferencial de una función. Sea $c = (U, \psi, V)$ carta de M^m que contiene a $x \in U \subset M^m$ y $C' = (W, \psi, V')$ carta en N^n que contiene a $F(x) \in W \subset N^n$. Sea $v_x \in T_xM^m$ con $v_x = \sum_{z=1}^{m} a_i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x$ y sea $g \in C^\infty(N^n, F(x), \Re)$. Vamos a escribir explicitamente la definición anterior en términos de las cantidades como las leemos en $\Re^n$, para poder entender mejor el significado de la diferencial. Entonces,

$$\begin{aligned} dF_x(v_x)(g) &= v_x(g \circ F) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x\right)(g \circ F) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial r^i}\left(g \circ F \circ \varphi^{-1}\right)\Big|_{\varphi(x)} \\ &= \sum_{i=1}^{m} a^i \frac{\partial}{\partial r^i}\left(g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1}\right)\Big|_{\varphi(x)} \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial s^j}\left(g \circ \psi^{-1}\right)\Big|_{\psi \circ F(x)} \frac{\partial}{\partial r^i}\left(s^j \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1}\right)\Big|_{\varphi(x)} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(x)}(g) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x \left(y^j \circ F\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x \left(y^j \circ F\right)\right) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(x)}(g) \\ &= \sum_{J=1}^{n} v_x\left(y^j \circ F\right) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(x)}(g) \end{aligned}$$

Vean la figura 8. Podemos escribir

$$dF_x(v_x) = \sum_{j=1}^{n} \left(dF_x(v_x)\right)^j \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(x)}$$

de donde se sigue que $\left(dF_x(v_x)\right)^j = v_x\left(y^j \circ F\right)$

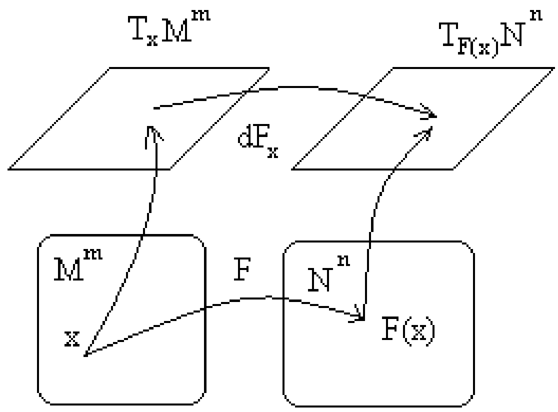

FIGURE 7. La diferencial dF de una función F. La diferencial de F es un mapeo entre los espacios tangente de la variedad en x y de la variedad imagen en $F(x)$.

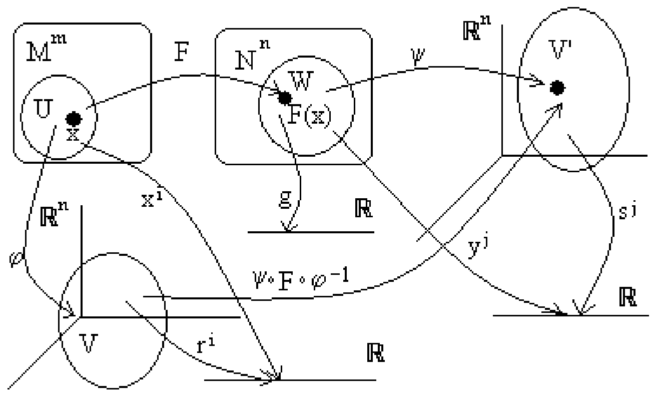

FIGURE 8. Figura que representa la construcción de la diferencial de F. Aquí se representan las variedades y mapeos que toman parte en la explicación de la definición.

Sólo falta demostrar que efectivamente la diferencial dF_x es una transformación lineal. Esta demostración la dejaremos como ejercicio.

EJERCICIO 7. *Demostrar que dF_x es lineal.*

Para poder decir que la diferencial dF_x es realmente una diferencial, sería de esperarse que se cumpliera la regla de la cadena. Este es el caso, vamos a demostrar la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 5 (La regla de la cadena). $d\,(G \circ F)_x = dG_{F(x)} \circ dF_x$

DEM. 3. *Sea* M^m, N^n *y* S^s *variedades y* $F \in C^\infty(M^m, N^n)$ *y* $G \in C^\infty(N^n, S^s)$. *Sea* $x \in M^m$ *y* $v_x \in T_x M^m$, *entonces*

$$\begin{aligned} d(G \circ F)_x (v_x) &= v_x \circ (G \circ F)^* = v_x (F^* \circ G^*) \\ &= (v_x \circ F^*) \circ G^* = dG_{F(x)} (v_x \circ F^*) \\ &= dG_{F(x)} (dF_x (v_x)) = dG_{F(x)} \circ dF_x (v_x) \end{aligned}$$

■

Un ejemplo simple es la diferencial de la indentidad.

EXEMPLO 6. $d\ id|_{M^n} = id|_{T_x M^n}$ *ya que*

$$\begin{array}{lll} d\ id|_{M^n}: & T_x M^m & \to T_x M^m \\ & v_x & \to d\ id|_{M^n}(v_x): \quad \begin{array}{ll} C^\infty(M^m, \Re) & \to \Re \\ g & \to d\ id|_{M^n}(v_x)(g) \end{array} \end{array}$$

$$= v_x \left(id|^*_{M^n}(g) \right) = v_x \left(g \circ id|_{M^n} \right) = v_x(g) \quad \textit{es decir}$$

$$d\ id|_{M^n}(v_x) = v_x$$

Un caso especial de diferencial muy importante es cuando la diferencial es una función inyectiva, entonces se dice que la diferencial es una inmersión: esto es:

DEFINICIÓN 16. *Una inmersión de* M^m *en* N^n, *es una función suave* $F : M^m \to N^n$ *con diferencial* dF_x *inyectiva.*

Ahora vamos a definir las formas formalmente. Las formas son diferenciales de una función que va de la variedad a los reales. Como los reales también son una variedad, podemos usar la definición de la diferencial en estas funciones. La diferencia es que vamos a identificar al espacio tangente de los reales con los reales mismos. De hecho son el mismo espacio. Veamos esto formalmente.

DEFINICIÓN 17. *Sea* M^n *variedad,* $f \in C^\infty(M^n, \Re)$ *y* $x \in M^n$. *Entonces*

$$\begin{aligned} df_x : T_x M^n &\to T_{f(x)}\Re, \\ v_x &\to df_x(v_x) = \lambda \frac{d}{dr} \in T_{f(x)}\Re,\ \lambda \in \Re \end{aligned}$$

con

$$df_x(v_x)(r) = \lambda \frac{d}{dr}(r) = \lambda = v_x(f^*(r)) = v_x(r \circ f) = v_x(f)$$

(recuerden que $r : \Re \to \Re$ *tal que* $r(x) = x$*). Esto es*

$$df_x(v_x) = v_x(f) \frac{d}{dr} \in T_{f(x)}\Re.$$

Consideremos el isomorfismo $J : T_{f_{(x)}}\Re \to \Re, \lambda \frac{d}{dr} \to J\left(\lambda \frac{d}{dr}\right) = \lambda$, entonces la composición $J \circ df_x : T_x M^n \to \Re, v_x \to J(df(v_x)) = J\left(v_x(f) \frac{d}{dr}\right) = v_x(f)$ es un homomorfismo de espacios lineales y $J \circ df_x$ es un elemento del espacio dual de $T_x^* M^n$ que llamaremos el **espacio cotangente** de la variedad en x. A los elementos de este espacio, que denotamos como $T_x^* M^n$, se llaman **1-formas en** x y se denotan como $w_x \in T_x^* M^n$. Identificamos entonces $T_{f_{(x)}}\Re$ con $\Re$ (a través del isomorfismo J), por lo que podemos escribir

$$\begin{aligned} df_x : T_x M^n &\to \Re, \\ v_x &\to df_x(v_x) = v_x(f). \end{aligned}$$

Comentario 5. *Tomemos* $f = x^i \in C^\infty(U, \Re)$, $\left. dx^i \right|_x : T_x M^n \to \Re$ *tal que*

$$v_x \to \left. dx^i \right|_x (v_x) = v_x\left(x^i\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} a^j \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_x \right) \left(x^i\right) = a^i.$$

En particular tomemos $v_x = \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_x$, *entonces*

$$\left. dx^i \right|_x \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_x \right) = \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_x \left(x^i\right) = \delta^i_j,$$

se sigue que $\left\{ \left. dx^i \right|_x \right\}_{i=1,\cdots,n}$ *es una base del espacio* $T^*_x M^n$ *llamada la base coordenada dual o base de las 1-formas.*

De una forma natural podemos definir campos vectoriales o campos de formas, simplemente definiendo los espacios vectoriales para cada punto de la variedad. Vamos a definir entoces los campos vectoriales y de formas.

Definición 18. *Sea* M^n *variedad y* $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x \right\}$ *base de* $T_x M^n$. *Un campo vectorial, es una asignación suave de vectores para cada punto* $x \in M^n$.

Notación 8. *Se denota* $v(f) : M^n \to \Re$, *suave, tal que* $v(f)(x) := v_x(f)$. *Se tiene que* $v = \sum\limits_{r-1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, *tal que*

$$v(f)(x) = \sum_{i=1}^{n} a^i(x) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x (f),$$

donde $a^i : M^n \to \Re$ *son funciones suaves para toda* $i = 1, \cdots, n$.

Notación 9. *Al conjunto de* ***campos vectoriales*** *en* M^n *se denota por* TM^n.

Comentario 6. *Observen que* $v : C^\infty(M^n, \Re) \to C^\infty(M^n, \Re)$.

Definición 19. *Sea* M^n *variedad y* $\left\{ \left. dx^i \right|_x \right\}_{i=1,\cdots,n}$ *base de* $T^*_x M^n$. *Una* ***1-forma*** *en* M^n *es una transformación lineal para cada* $T_x M^n$ *con* $x \in M^n$. *Se denota*

$$\begin{aligned} df(v) : \quad & M^n \to \Re \\ & df(v) = v(f) \end{aligned}$$

suave, tal que $df(v)(x) = df_x(v_x)$.

Notación 10. *Al conjunto de las 1-formas en* M^n *se denota por* $\bigwedge^n$. *Tenemos que*

$$df = \sum_{j=1}^{n} b_j \, dx^j$$

tal que

$$df(v)(x) = df_x(v_x) = \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \left. dx^j \right|_x (v_x),$$

con $b_j : M^n \to \Re$ *funciones suaves.*

Notación 11. *Se suele denotar al "producto" de 1-formas con vectores como* $\langle w, v\rangle = w(v)$. *Si* $w = \sum_{j=1}^{n} b_j \ dx^j$ *y* $v = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^j}$, *entonces*

$$\begin{aligned}\langle w, v\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} b_j dx^j \ , \ \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle &:= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a^i b_j \left\langle dx^j \ , \ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a^i b_j dx^j \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right),\end{aligned}$$

como para cada punto $x \in M^n$ *se cumple* $dx^j\big|_x \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_x \right) = \delta_i^j$, *tenemos que*

$$\langle w, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} a^i b_i.$$

Observen que $df : TM \to C^\infty (M^n, \Re)$.

Tenemos que T^*M^n es un espacio vectorial para cada punto $x \in M^n$. Su dual en cada punto será isomórfico a TM^n en ese punto. Nosotros vamos a identificar ambos espacios.

Definición 20. *Como* $(T_x^* M^n)^* = T_x M^n$ *para toda* $x \in M^n$. *Se tiene que si* $w \in T^*M^n$ *y* $v \in T_x M^n$, *entonces* $v_x(w_x) \in \Re$, *con* $v_x(w_x) = w_x(v_x) = \langle w_x, v_x\rangle$.

El ejemplo de las esferas es muy representativo y simple para entender el material anterior. Vamos a tomar de nuevo este ejemplo.

Exemplo 7. *Sea* $S^2 = \left\{(x, y, z) \in \Re^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$. *Ya sabemos que los homeomorfismos de la esfera son* $\sigma_\pm : \Re^3 \to S^2$ $\sigma_\pm^{-1} : S^2 \to \Re^3$ *dados por*

$$\begin{aligned}\sigma_\pm (x, y, z) &= \frac{(x, y)}{1 \mp z} = (u, v) \\ \sigma_\pm^{-1} (u, v) &= \frac{\big(2u, 2v, \pm(u^2 + v^2 - 1)\big)}{1 + u^2 + v^2}\end{aligned}$$

Entonces los vectores tangentes en S^2 *estarán dados por*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_+^1}\bigg|_x (f) &= \frac{\partial}{\partial u} \left(f \circ \sigma_+^{-1}\right)\bigg|_{\sigma_+(x)} \\ &= \frac{\partial}{\partial u} f \left(\frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \frac{2v}{1 + u^2 + v^2,}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{1 + u^2 + v^2} \right)\bigg|_{\sigma_+(x)} \\ &= \frac{\partial}{\partial u} f(x, y, z)\bigg|_{\sigma_+(x)} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_{\sigma_+(x)} \\ &= \frac{1}{(1 + u^2 + v^2)^2} \left[2\left(1 - u^2 + v^2\right) \frac{\partial}{\partial x} - 4uv \frac{\partial}{\partial y} + 4u \frac{\partial}{\partial z} \right]\bigg|_{\sigma_+(x)} (f)\end{aligned}$$

Podemos escribir

$$\frac{\partial}{\partial x_+^1} = \left(1 - z - x^2\right) \frac{\partial}{\partial x} - xy \frac{\partial}{\partial y} + x(1 - z) \frac{\partial}{\partial z}$$

ya que

$$u^2+v^2\big|_{\sigma_+(x)}=\frac{x^2+y^2}{(1-z)^2}\quad y\quad 1-u^2+v^2\big|_{\sigma_+(x)}=\frac{(1-z)^2-x^2+y^2}{(1-z)^2}$$

Análogamente

$$\frac{\partial}{\partial x_+^2}=-xy\frac{\partial}{\partial x}+\left(1-z-y^2\right)\frac{\partial}{\partial y}+y(1-z)\frac{\partial}{\partial z}$$

Como era de esperarse, los vectores base del espacio tangente de S^2 son perpendiculares al radio vector, es decir:

$$\begin{aligned}(x,y,z)\cdot\left(1-z-x^2,-xy,x\,(1-z)\right)&=0=\underset{\rightharpoondown}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial x_+^1}\\(x,y,z)\cdot\left(-xy,1-z-y^2,y\,(1-z)\right)&=0=\underset{\rightharpoondown}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial x_+^2}\end{aligned}$$

Es decir, los vectores tangente, son realmente tangentes a la esfera en cada punto, pues son perpendiculares al radio vector $\underset{\rightharpoondown}{r}$. Entonces el espacio tangente en el punto x a una pelota es $T_{\underset{\rightharpoondown}{x}}S^2=\left\{\overrightarrow{y}\in\Re^3|\overrightarrow{y}\cdot\underset{\rightharpoondown}{x}=0\right\}$

EJERCICIO 8. *Calcular $\frac{\partial}{\partial x_-^1}$, $\frac{\partial}{\partial x_-^2}$. Demostrar que $\left\{\frac{\partial}{\partial x_\pm^1},\frac{\partial}{\partial x_\pm^2}\right\}$ son li.*

EXEMPLO 8. *Los duales al espacio tangente, el espacio contangente, se encuentran usando la regla $\left\langle dx^i,\frac{\partial}{\partial xj}\right\rangle=\delta_j^i$, se obtiene*

$$dx_+^1=\frac{dx}{1-z}+\frac{xdz}{(1-z)^2}\ ,\quad dx_+^2=\frac{dy}{1-z}+\frac{ydz}{(1-z)^2}$$

Estos dos vectores (transformaciones lineales) del espacio contangente son dos uno-formas definidas en la carta sin polo norte.

EJERCICIO 9. *Calcular dx_-^1, dx_-^2. Demostrar que $\left\{dx_\pm^1,\ dx_\pm^2\right\}$ son li.*

EXEMPLO 9. *Vamos a encontrar los vectores base de T_xS^2 cambiando las coordenadas a coorenadas esfericas, definidas por*

$$\begin{aligned}x&=r\sin(\theta)\cos(\varphi)\\y&=r\sin(\theta)\sin(\varphi)\\x&=r\cos(\theta)\end{aligned}\tag{4.1}$$

Cláramente, para r constante, las coordenadas cumplen que $x^2+y^2+z^2=r^2$, o sea, ya estan restringidas a la esfera. Con esta coordenadas se puede ver que los vectores tangente

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}&=-\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\\\frac{\partial}{\partial y}&=\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\\\frac{\partial}{\partial z}&=-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial\theta}\end{aligned}$$

Usando estos resultados, los vectores base del espacio tangente en coordenadas esféricas se leen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_+^1} &= (\cos(\theta)-1)\left(\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\sin(\varphi)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\ \frac{\partial}{\partial x_+^2} &= (\cos(\theta)-1)\left(\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\end{aligned}$$

De la misma forma podemos ahora calcular los duales, las uno formas del espacio cotangente. Se obtiene:

$$\begin{aligned}dx_+^1 &= \frac{1}{\cos(\theta)-1}\left(\cos(\varphi)d\theta+\sin(\varphi)\sin(\theta)d\varphi\right)\\ dx_+^2 &= \frac{1}{\cos(\theta)-1}\left(\sin(\varphi)d\theta-\cos(\varphi)\sin(\theta)d\varphi\right)\end{aligned}$$

Claramente podriamos definir como bases del espacio tangente y cotangente una combinacion lineal de estos vectores, por ejemplo $w_+^1 = (\cos(\theta)-1)dx_+^1$ $w_+^2 = (\cos(\theta)-1)dx_+^2$ *y a los vectores* $X_+^1,\ X_+^2$ *como sus duales, de tal forma que podamos hacer lo mismo con los correspondientes vectores* w_-^1 w_-^2 $X_+^1,\ X_+^2$*, al multiplicar los vectores base por* $(\cos(\theta)+1)$*. Entonces los vectores* $w's$ *y* $X's$ *obtendrán la misma forma en ambas cartas, ambos serían*

$$\begin{aligned}X^1 &= \frac{1}{r}\left(\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\sin(\varphi)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\ X^2 &= \frac{1}{r}\left(\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\ dw^1 &= r\left(\cos(\varphi)d\theta+\sin(\varphi)\sin(\theta)d\varphi\right)\\ dw^2 &= r\left(\sin(\varphi)d\theta-\cos(\varphi)\sin(\theta)d\varphi\right)\end{aligned} \tag{4.2}$$

donde hemos puesto el factor r *en caso de que el radio de la esfera no sea 1 sino* r*.*

EJERCICIO 10. *Calcular* $\frac{\partial}{\partial x_+^1},\ \frac{\partial}{\partial x_+^2}$ *y* $dx_-^1,\ dx_-^2$ *en coordenadas esféricas.*

En lo que sigue vamos a introducir otros dos conceptos en variedades diferenciales. El primero es el paréntesis de Lie y el segundo es el concepto de vectores φ-relacionados. Ambos conceptos son muy usados en ciencias e ingeniería. Con el paréntesis de Lie los espacios tangente pueden tener estructura de álgebra. Esta estructura puede ser muy importante para caracterizar a la variedad, si por ejemplo, los vectores estan asociados a alguna simetría de la variedad. Esto lo veremos más adelante. Por ahora definamos los paréntesis de Lie.

DEFINICIÓN 21. *Sea* M^n *variedad y* X *y* $Y \in TM^n$*. Se define* $[X,Y] = X\circ Y - Y\circ X$*. A la función* $[\ ,\ ] : TM^n \times TM^n \to TM^n\ (X,Y)\to[X,Y]$ *se denomina* ***producto ó paréntesis de Lie*** *de los campos vectoriales.*

De la definición se siguen sus propiedades y el hecho que con el paréntesis de Lie, el espacio tangente es una álgebra.

PROPOSICIÓN 6. *El paréntesis de Lie tiene las siguientes propiedades*
i) $[X,Y] = -[Y,X]$
ii) $[\alpha X+\beta Y,Z] = \alpha[X,Z]+\beta[Y,Z],\ [X,\alpha Y+\beta Z] = \alpha[X,Y]+\beta[X,Z]$
iii) $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$ *(**Identidad de Jacobi**).*

iv) La estructura $(TM^n, +, [,]; \Re, \cdot)$ es una álgebra, llamada Álgebra de Lie de los vectores tangentes.

Ejercicio 11. *Demostrar la proposición.*

Por supuesto los vectores coordenados conmutan, esto se ve en la siguiente proposición.

Proposición 7. $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial xj}\right] = 0$

Dem. 4. *Tomamos* $\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} f\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial r^j}\left(f \circ \psi^{-1}\right)\right) \circ \psi$ *para la carta* $c = (U, \psi, V)$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial r^i}\left(\left(\frac{\partial}{\partial r^j}(f \circ \psi^{-1}) \circ \psi\right) \circ \psi^{-1}\right) \circ \psi \\
&= \frac{\partial}{\partial r^i}\left(\frac{\partial}{\partial r^j}(f \circ \psi^{-1})\right) \circ \psi \\
&= \frac{\partial}{\partial r^j}\left(\frac{\partial}{\partial r^i}(f \circ \psi^{-1})\right) \circ \psi \\
&= \frac{\partial}{\partial r^j}\left(\left(\frac{\partial}{\partial r^i}(f \circ \psi^{-1}) \circ \psi\right) \circ \psi^{-1}\right) \circ \psi \\
&= \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(f)\right)
\end{aligned}
$$

(Hay que recordar que $\frac{\partial}{\partial x^i}(f) = \frac{\partial}{\partial r^i}(f \circ \psi^{-1}) \circ \psi$*, ya que para cada punto* $x \in M^n$ *se tiene* $\frac{\partial}{\partial x^i}(f)(x) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x (f) = \frac{\partial}{\partial r^i}(f \circ \psi^{-1})|_{\psi(x)}$*).* ■

Para calcular con los paréntesis de Lie, es conveniente trabajar en una base coordenada. En terminos de una base coordenada, se puede ver que los parentesis de Lie de dos vectores se ven como:

Proposición 8. $[X, Y] = \sum_{i=1}^{n} [X, Y]^i \frac{\partial}{\partial x^i}$*, con*

$$
[X, Y]^i = \sum_{j=1}^{n}\left(X^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(Y^i\right) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(X^i\right)\right)
$$

Dem. 5. *Por substitución directa.* ■

Supongamos que existe una función φ que va de una variedad a otra. En la primera variedad se tiene un vector X y en la segunda variedad se tiene un vector Y. Si mapeamos el vector X con la diferencial $d\varphi$, este mapeo no necesariamente tiene algo que ver con el vector Y. Sin embargo, si para todo punto de la variedad se tiene que el mapeo del vector X por medio de $d\varphi$ corresponde al vector Y evaluado en el punto por φ, se dice que estos dos vectores estan relacionados por medio de φ, que estan φ-relacionados. Es decir, se tiene la definición:

Definición 22. *Sean* M^m *y* N^n *variedades y* $\varphi \in C^\infty(M^m, N^n)$*. Se dice que* $X \in TM^m$ *y* $Y \in TN^n$ *están* φ ***-relacionados*** *si para toda* $x \in M^m$ *se sigue que* $d\varphi_x(X_x) = Y_{\varphi(x)}$*, vean la figura 9.*

De aquí se desprenden varias propiedades muy interesantes que despues se usaran. Vamos a ver las más importantes.

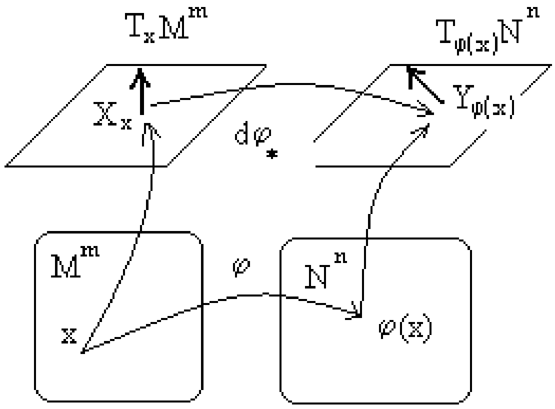

FIGURE 9. Los vectores X y Y están φ relacionados, si para todo elemento x de la variedad M^m se sigue que $d\varphi_x(X_x) = Y_{\varphi(x)}$.

PROPOSICIÓN 9. *Sean $X \in TM^m$ y $Y \in TN^n$. X y Y están φ -relacionados ssí $\varphi^* \circ Y = X \circ \varphi^*$*

DEM. 6. *Sea $f \in C^\infty(N^n, \Re)$ y $x \in M^m$. Se sigue que*

$$\begin{aligned} d\varphi_\alpha(X_x)(f) &= X_x(\varphi^*(f)) = X_x \circ \varphi^*(f) = X(\varphi^*(f))(x) = X \circ \varphi^*(f)(x) \\ &= X_x(f \circ \varphi) = Y_{\varphi(x)}(f) = Y(f)(\varphi(x)) = Y(f) \circ \varphi(x) = \varphi^*(Y(f))(x) \\ &= \varphi^* \circ Y(f)(x) \ \textit{ssi} \ \varphi^* \circ Y = X \circ \varphi^*, \end{aligned}$$

es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(M^m, \Re) & \xleftarrow{\varphi^*} & C^\infty(N^n, \Re) \\ X \downarrow & & Y \downarrow \\ C^\infty(M^m, \Re) & \xleftarrow{\varphi^*} & C^\infty(N^n, \Re) \end{array}$$

conmuta. ■

Si ahora aplicamos la definición de vectores φ-relacionados al mismo vector, obtenemos la definición de φ-invariante. Formalmente la definición es:

DEFINICIÓN 23. *Sean $X \in TM^n$ y $\varphi \in C^\infty(M^m, M^m)$. X se llama **φ-invariante o invariante bajo** φ si $X \circ \varphi^* = \varphi^* \circ X$, es decir si $d\varphi_x(X_x) = X_{\varphi(x)}$ para toda $x \in M^n$*

COMENTARIO 7. *Observemos que si $\varphi : M^m \to N^n$, entonces*

$$d\varphi : TM^m \to TN^n$$

tal que $d\varphi(X)(g)(y) = d\varphi(X)_y(g)$ *con* $\varphi(x) = y \in N^n, x \in M^m$. *Si* φ *es un difeomorfismo entre* $M^m \overset{dif}{\cong} N^n$*, entonces*

$$\begin{aligned} d\varphi_x(X_x)(g) = X_x(g \circ \varphi) &= d\varphi_{\varphi^{-1}(y)}\left(X_{\varphi^{-1}(y)}\right)(g) \\ &= X_{\varphi^{-1}(y)}(g \circ \varphi) \\ &= X(\varphi^*(g))\left(\varphi^{-1}(y)\right) \\ &= X(\varphi^*(g)) \circ \varphi^{-1}(y), \end{aligned}$$

entonces se tiene la identidad

$$d\varphi(X)(g) = X(\varphi^*(g)) \circ \varphi^{-1}$$

Para terminar este capítulo vamos a introducir una transformación lineal equivalente a la diferencial, pero ahora en los espacios contangente a una variedad. La manipulación y sus propiedades son muy parecidas a las de la diferencial.

Definición 24. *Sean* M^m *y* N^n *variedades y* $F : M^m \to N^n$ *suave. Sea* $x \in M^m$ *y* $y = F(x) \in N^n$*. Con* F *podemos inducir la función*

$$\begin{aligned} &F_y^* : T_y^* N^n \to T_x^* M^m, \\ &\qquad w_y \to F_y^*(w_y) : \qquad T_x M^m \to \Re, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad X_x \to F_y^*(w_y)(X_x) := w_y\left(dF|_x(X_x)\right) \end{aligned}$$

y notemos que $w_y(dF|_x(X_x)) = w_y \circ dF|_x(X_x) = w_y \circ F_{x*}(X_x)$*, es decir, se tiene la identidad* $F_y^*(w_y) = w_y \circ F_{x*}$.

A esta función también se le conoce con el nombre de pull-back, su definición es:

Definición 25. *A* $F_y^*(w_y)$ *se le denomina la* ***imagen reciproca*** *o* ***"pull-back"*** *de la 1 forma* w_y *por* F.

El Pull-back es una tranformación lineal entre los espacios contangentes.

Proposición 10. F_y^x *es una transformación lineal.*

Ejercicio 12. *Demostrar la proposición.*

A esta transformación lineal a veces también se le llama la diferencial del espacio cotangente, ya que tiene propiedades de una diferencial, por ejemplo cumple la regla de la cadena, veamos.

Proposición 11. $(G \circ F)^*_{G \circ F(x)} = F^*_{F(x)} \circ G^*_{G \circ F(x)}$

Dem. 7. *Sea* M^m, N^n *y* S^s *variedades,* $F \in C^\infty(M^m, N^n), G \in C^\infty(N^n, S^s)$, $x \in M^m, w_{F(x)} \in T^*_{F(x)} N^n$, $v_{G \circ F(x)} \in T^*_{G \circ F(x)} S^s$. *Entonces se tiene si* $w_{F(x)} =$

$G^*_{G\circ F(x)}\left(v_{G\circ F(x)}\right)$,

$$\begin{aligned} F^*_{F(x)}\left(w_{F(x)}\right) &= F^*_{F(x)}\left(G^*_{G\circ F(x)}\left(v_{G\circ F(x)}\right)\right) \\ &= F^*_{F(x)} \circ G^*_{G\circ F(x)}\left(v_{G\circ F(x)}\right) \\ &= w_{F(x)} \circ dF|_x \\ &= G^*_{G\circ F(x)}\left(v_{G\circ F(x)}\right) \circ dF|_x \\ &= \left(v_{G\circ F(x)} \circ dG|_{F(x)}\right) \circ dF|_x \\ &= v_{G\circ F(x)} \circ d\left(G \circ F\right)|_x \\ &= \left(G \circ F\right)^*_{G\circ F(x)}\left(v_{G\circ F(x)}\right), \end{aligned}$$

vean la figura 10. ■

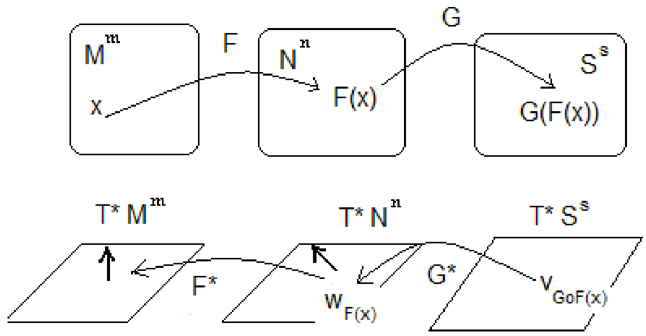

FIGURE 10. Esquema de la demostración de la proposición 11.