

# INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA ALGEBRAICA NO-ARQUIMEDEANA Y TROPICAL

CRISTHIAN GARAY

RESUMEN. La geometría algebraica sobre los complejos (y en menor medida sobre los reales) cuenta con una maravillosa herramienta técnica llamada *analitificación*, mediante la cual podemos usar la topología euclídeana de estos dos campos y asociarle a una variedad algebraica, un espacio topológico Hausdorff agradable en el que podemos realizar argumentos locales con mucha flexibilidad.

Por desgracia (o por fortuna) esta herramienta es exclusiva de estos dos campos. Este curso presenta alternativas para hacer este proceso para ciertas topologías en campos definidas por valores absolutos, como en el caso anterior. Esta rama se conoce como Geometría algebraica no-arquimedea, y tiene vínculos muy fuertes con la combinatoria, los cuales están agrupados bajo el término *geometría tropical*.

El curso se trata de aplicar técnicas del análisis y la geometría no-arquimedea para el estudio de las variedades algebraicas definidas sobre campos diferentes de  $\mathbb{C}$  y en  $\mathbb{R}$ . La geometría no-arquimedea tiene reputación de ser difícil, pues trabaja sobre la teoría de esquemas –la cual de por sí ya tiene reputación de ser complicada– por lo cual hemos dividido el curso en dos partes.

La primera parte es una motivación geométrica en forma de vistazo a las dos vertientes principales de la geometría tropical clásica : primero via tropicalización arquimedea (límite a gran escala de amibas arquimedeanas) y posteriormente por amibas de variedades algebraicas no-arquimedeanas. Esta parte es muy geométrica, consta de muchos ejemplos y no muy complicada de seguir.

En la segunda parte hacemos el vínculo de lo anterior con diferentes teorías de espacios analíticos no-arquimedeanos. Esta parte introduce las álgebras afinoides y sus espectros, los cuales son el alma de la construcción. Al final explicamos el vínculo concreto que existe entre estas dos partes.

Temario

## Parte I. Geometría tropical clásica

1. Preliminares: Álgebra y geometría de las álgebras afines sobre un campo
  - a) Variedades algebraicas como esquemas.
  - b) Analitificación clásica: el teorema GAGA en  $\mathbb{C}$  y en  $\mathbb{R}$
2. Motivación: Álgebra y geometría del semicampo tropical  $\mathbb{T}$ .
  - a) Polinomios tropicales e hipersuperficies tropicales afines.
  - b)  $\mathbb{T}$ -Modulos.
  - c) Matroides y espacios lineales tropicales.
  - d) Convexidad tropical y politopos tropicales (†)
3. Geometría tropical clásica I: el límite a gran escala de una amiba arquimedea
  - a) Amibas arquimedeanas complejas y reales
  - b) Teorema de Mikhalkin-Jonsson
  - c) Suavidad matroidal
  - d) Ejemplo: aplicaciones a la geometría enumerativa clásica (†)
4. Campos valorados
  - a) Semianillos tropicales
  - b) Valores absolutos, anillos de valoración y valoraciones de Krull

5. Geometría tropical clásica II : El teorema fundamental de la geometría algebraica tropical
  - a) Variedades tóricas y variedades tóricas tropicales
  - b) Amibas no-arquimedeanas y el Teorema de Kapranov
  - c) Degeneraciones iniciales de ideales de álgebras afines sobre un campo valuado
  - d) Tropicalizaciones como ciclos algebraicos en el toro tropical  $(\mathbb{T}^*)^n$
  - e) Teorema de estructura de las variedades tropicales en  $(\mathbb{T}^*)^n$ .(†)

### Parte II. Geometría algebraica rígida

6. Introducción al análisis no-Arquimedeano
  - a) Campos no-arquimedeanos de rango 1 y su topología
  - b) Campos de Banach. Construcciones básicas y Ejemplos.
  - c) Álgebras afinoides I: el caso estricto.
7. GAGA clásico : analitificación de Tate
  - a) Dominios afinoides
  - b) G-topologías y la topología rígida
  - c) Ejemplo: la curva de Tate
8. GAGA sobre un campo de Banach: analitificación de Berkovich
  - a) Analitificación de una variedad como espacio topológico
  - b) Propiedades básicas de las Álgebras de Banach afinoides
  - c) Analitificación como espacio localmente anillado
9. GAGA de Berkovich para curvas algebraicas suaves
  - a) Desigualdad de Abhyankar y tipos de puntos
  - b) Mapas en superficies de Riemann y esqueletos
  - c) Tropicalización abstracta
  - d) Modelos semiestables y sus fibras especiales (†)
10. Curvas tropicales abstractas
  - a) Espacios de moduli de curvas tropicales marcadas
11. Tropicalización encajada en variedades toricas
  - a) El mapeo de tropicalización
  - b) Relación entre tropicalización encajada y tropicalización abstracta
  - c) Esqueletos como espacios cubrientes generalizados

### Parte III. Temas adicionales

12. Aplicaciones (†)
  - a) La fibración híbrida de Jonsson
  - b) Fibra de Milnor clásica y analítica à la Nicaise-Sebag
  - c) Homología tropical
13. Introducción a la geometría algebraica tropical
  - a) La categoría de los semianillos
  - b) Esquemas en semianillos
  - c) Blueprints y Blueprints ordenados
  - d) Blue schemes, según O. Lorscheid
14. Otras nociones (†)
  - a) Espacios ádicos de Huber,
  - b) Relación de los espacios perfectoides con los espacios ádicos
  - c) Espacios de Riemann-Zariski à la Fujiwara-Kato,

### Bibliografía

#### REFERENCIAS

- [1] M. Baker, S. Payne, and J. Rabinoff. *Nonarchimedean Geometry, Tropicalization, and Metrics on curves*, arXiv: 1104.0320v3 (2015)
- [2] V. G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, volume 33 of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.

- [3] V. G. Berkovich. *A non-Archimedean interpretation of the weight zero subspaces of limit Hodge structures*. In Algebra, Arithmetic and Geometry – Manin Festschrift. Boston: Birkhauser.
- [4] E. Brugallé, I. Itenberg, G. Mikhalkin, and K. Shaw. *Brief introduction to tropical geometry*
- [5] L. Fantini, C. Favre, and M. Ruggiero, *Links of sandwiched surface singularities and self-similarity*. 2018
- [6] K. Fujiwara and F. Kato. *Foundations of rigid geometry I*. Preprint, arXiv:1308.4734v5, 2017.
- [7] J. Giansiracusa and N. Giansiracusa. *Equations of tropical varieties*. 2013
- [8] R. Huber. *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*. Aspects of Mathematics, E30. Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1996.
- [9] I. Itenberg, L. Katzarkov, G. Mikhalkin, and I. Zharkov. *Tropical homology*.
- [10] I. Itenberg, G. Mikhalkin, E. Shustin. *Tropical Algebraic Geometry*. Oberwolfach Seminars. Birkhauser 2005
- [11] M. Jonsson, *Topics in Algebraic Geometry I Berkovich Spaces*. Notes for a course by Takumi Murayama. University of Michigan, 2016.
- [12] M. Jonsson, Degenerations of amoebae and Berkovich spaces. Preprint, arXiv:1406.1430v2, 2015.
- [13] C. Lazda and A. Pal, *Rigid cohomology over Laurent series fields*. Springer 2016.
- [14] F. Shokrieh, *Non-archimedean geometry*. Notes for a course. Cornell University.
- [15] M. Temkin, *Introduction to Berkovich Analytic Spaces*. Notes for a course of the Summer School “Berkovich space” at Institut de Mathématiques de Jussieu. 2011
- [16] G. Mikhalkin and J. Rau. *Tropical Geometry*. 2015
- [17] D. Maclagan and B. Sturmfels. *Introduction to tropical geometry*, volume 161 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [18] S. Morel. *Adic spaces*. 2019
- [19] J. Nicaise. *Singular cohomology of the analytic Milnor fiber, and mixed Hodge structure on the Nearby cohomology*
- [20] D. Eisenbud, J Harris. *The geometry of Schemes*. Springer

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS, A. C. GUANAJUATO  
 Email address: [crsthian.garay@imat.mx](mailto:crsthian.garay@imat.mx)