13. Übung zu Physik 4 (SS 07)

19./20. Juni 2007

72) "Alles nach vorne!" (Lorentztransformation)

Ein Kaon ($m_{K^0} = 498$ MeV/c^2) fliegt in +z-Richtung und zerfällt in zwei geladene Pionen.

a) Welchen Impuls muss das Kaon mindestens haben, damit beide Zerfallsteilchen nach vorne fliegen (d.h. $p_z \geq 0$)?
Überlegen Sie sich dazu, in welche Richtungen relativ zur Flugrichtung des Kaons die beiden Pionen im Schwerpunktsystem in diesen Grenzfall fliegen müssen.

b) Wie gross ist für diesen Impuls des Kaons der Winkel zwischen den beiden Pionen im Laborsystem (Öffnungswinkel α), wenn diese im Schwerpunksystem senkrecht zur Flugrichtung des Kaons ausgesandt werden (und natürlich entgegengesetzt).

73) Schwellenenergie für Paarerzeugung von Proton–Antiproton

Das Antiproton $\bar{\mathrm{p}}$ wurde 1955 von E. Segré und O. Chamberlain entdeckt. Mit einem Protonenstrahl erzeugten Sie die Reaktion

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{p} + \mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}}$$

Wie groß muß dazu die kinetische Energie des einlaufenden Protons im Laborsystem mindestens sein (das zweite Proton befindet sich dort in Ruhe)?

74) Z-Boson: σ, Luminosität und Anzahl der Reaktionen

a) Am **L**arge–**E**lectron–**P**ositron Collider am CERN werden e^+ und e^- soweit entgegengesetzt beschleunigt und zur Kollision gebracht, daß im Schwerpunktsystem (CMS), das hier gleich dem Labor-System ist, gilt: $E_{cm} = m_{\mathrm{z}} = 91.2$ GeV.
Um welchen Bruchteil ist die Geschwindigkeit v der Elektronen kleiner als c?

b) Bei dieser Energie ist der Wirkungsquerschnitt (WQ) σ für die Produktion des Z Bosons maximal. Für den differentiellen WQ des Prozesses $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \rightarrow \mathrm{Z} \rightarrow \mu^+\mu^-$ gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(E_{cm}, \theta) = \frac{\alpha^2}{s} \cdot \frac{G_1}{4}\,(1 + \cos^2\theta), \quad \text{mit} \quad G_1 = \frac{s^2\, g_{\mathrm{e}}^w\, g_\mu^w}{(s - m_{\mathrm{z}}^2)^2 + m_{\mathrm{z}}^2 \Gamma_{\mathrm{z}}^2}$$

$s := E_{cm}^2$, $\Gamma_{\mathrm{z}} = 2.5$ GeV ist die Massenunschärfe des Z, $g_{\mathrm{e}}^w = g_\mu^w = 0.355$ sind die schwachen Ladungen der Leptonen. Alles in natürlichen Einheiten!
Wie groß ist $\sigma(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \rightarrow \mathrm{Z} \rightarrow \mu^+\mu^-)$ bei $E_{cm} = 91.2$ GeV in nanobarn?
Einer Kreisfläche mit welchem Radius würde dies entsprechen?
Um welche Wechselwirkung handelt es sich bei diesem Prozess?

c) Wie sieht hier die Winkelabhängikeit des differentiellen WQs aus? Skizze.
Vergleichen Sie mit der Winkelabhängigkeit bei Rutherfordstreuung. Was fällt auf?

d) Zeichnen Sie die Funktion $\sigma(E_{cm})$ im Bereich 50 – 150 GeV, oder, falls ein Grafikprogramm vorhanden ist, im Bereich 0 – 1000 GeV in doppeltlogarithmischer Darstellung (d.h. x und y-Achse logarithmisch).

e) Wieviele Z-Zerfälle in $\mu^+\mu^-$ werden pro Sekunde beobachtet, wenn die Luminosität $\mathcal{L} = 10^{32}\mathrm{cm}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$?

75) Wie gross ist die maximale Energie kosmischer Strahlung?

Die maximale Energie E_{max}^{p} von auf der Erde ankommenden kosmischen Protonen (= Hautanteil der primären kosmischen Strahlung) ist gegeben durch die Resonanzenergie (= Schwellenenergie), ab welcher die Protonen durch Photonen der Hintergrundstrahlung in den $\Delta^+(m = 1232$ MeV/$c^2)$ Zustand angeregt werden können:

$$\mathrm{p} + \gamma_{2.7K} \rightarrow \Delta^+ \qquad (\rightarrow \mathrm{p} + \pi^0 \text{ oder } \rightarrow \mathrm{n} + \pi^+\ , \text{ mit } 99\,\%\text{ Wahrscheinlichkeit})$$

Berechnen Sie die Schwellenenergie für diesen Prozess (und damit E_{max}^{p})!
Lösung mittels Energie-Impuls-Erhaltung oder Lorentztransformation (vom Ruhesystem des Δ^+ in das Laborsystem der Hintergrundstrahlung).
Bemerkung: Für Energien $E^{\mathrm{p}} > E_{max}^{\mathrm{p}}$ verlieren die Protonen innerhalb kurzer kosmischer Distanzen die überschüssige Energie (etwa 20 % alle 6 Megaparsec). Protonen mit so hohen Energien können daher nur innerhalb eines Radius von ca. 50 Megaparsec erzeugt werden (1 parsec = 1 AU(*astronomical units*)/1 arcsec $\sim$ 3 *lightyears*). Es ist jedoch nicht klar wie!

76) Neutron–Lebensdauer: theoretisch (vgl. VO Kap. 1.3.3 Phasenraum)

Aus Aufgabe 29 wissen wir, daß die Zerfallsenergie E_0 (Summe der kinetischen Energien der Zerallsprodukte) beim Neutronzerfall $\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_\mathrm{e}$ gleich der maximalen kinetischen Energie $E_\mathrm{kin}^\mathrm{max} = 0.78\,\mathrm{MeV}$ des Elektrons ist. In der folgenden Ableitung wird die Ruheenergie des Elektrons m_e zu E_0 hinzugerechnet. Da in der Endformel die Differenz $E_0 - E_\mathrm{e}$ vorkommt, spielt dies keine Rolle. Wir betrachten allgemein einen β-Zerfall mit der Zerfallsenergie E_0. Nach Fermi ("Goldene Regel") ist die Zerfallsrate (= Zerfälle pro sec) proportional zur Anzahl der möglichen Quantenzustände des Endzustandes (= Volumen des Impulsraums mal einem normierten Ortsvolumen). Die Proportionalitätskonstante kann aus Gleichung (1) weiter unten abgelesen werden. Das differentielle Volumselement des 9-dimensionalen 3-Teilchen[Impuls]Phasenraums ist gegeben durch

$$\mathrm{d}^9 V_\mathrm{Ph} = \mathrm{d}^3 p_\mathrm{e}\, \mathrm{d}^3 p_{\nu_e}\, \mathrm{d}^3 p_\mathrm{p} \cdot \delta(E_\mathrm{n} - E_\mathrm{e} - E_{\nu_e} - E_\mathrm{p}) \cdot \delta^3(\vec{p}_\mathrm{n} - \vec{p}_\mathrm{e} - \vec{p}_{\nu_e} - \vec{p}_\mathrm{p})$$

Wenn man $\delta^3()$ dazu benützt, den Phasenraum des Protons aufzuintegrieren und auch über die Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega_e$ und $\mathrm{d}\Omega_{\nu_e}$ integriert (unter der Voraussetzung, daß es keine winkelabhängigen Terme gibt), erhält man mit der Notation $p = |\vec{p}|$:

$$\mathrm{d}^2 V_\mathrm{Ph} = 4\pi p_\mathrm{e}^2 \mathrm{d}p_\mathrm{e}\, 4\pi p_{\nu_e}^2 \mathrm{d}p_{\nu_e} \cdot \delta(E_\mathrm{n} - E_\mathrm{e} - E_{\nu_e} - E_\mathrm{p})$$

Im Ruhesystem des Neutrons folgt aus der Energieerhaltung und der Tatsache, daß dort die kinetische Energie des Protons vernachlässigbar ist: $E_\mathrm{e} + E_{\nu_e} = m_\mathrm{n} - m_\mathrm{p} =: E_0$. Da $E_{\nu_e} = p_{\nu_e}$ [masselose Neutrinos], und daher $\mathrm{d}p_{\nu_e} = \mathrm{d}E_{\nu_e}$, folgt nach Integration über $\mathrm{d}E_{\nu_e}$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V_\mathrm{Ph} &= (4\pi)^2\, p_\mathrm{e}^2\, (E_0 - E_\mathrm{e})^2 \cdot \mathrm{d}p_\mathrm{e} \\ &= (4\pi)^2\, p_\mathrm{e} E_\mathrm{e} (E_0 - E_\mathrm{e})^2 \cdot \mathrm{d}E_\mathrm{e} \end{aligned}$$

Begründen Sie die in der letzten Zeile verwendete Beziehung $p\mathrm{d}p = E\mathrm{d}E$.
Ein Beispiel für die Häufigkeit beim Neutronzerfall (bzw. Kern-β-Zerfall) ein Elektron mit einer bestimmten kinetischen Energie E_kin zu finden, ist in der Grafik auf der home page angegeben. Man spricht von der differentiellen Zerfallsrate $\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}E$. Je größer die totale Zerfallsrate Γ, desto kleiner die Lebensdauer.

$$\mathrm{d}\Gamma = \frac{G_F^2}{2\pi^3} \cdot \frac{\mathrm{d}V_\mathrm{Ph}}{(4\pi)^2} \tag{1}$$

$$\frac{\hbar}{\tau} := \Gamma = \int_\mathrm{min}^\mathrm{max} \mathrm{d}\Gamma\,, \qquad \text{mit } \mathrm{d}\Gamma = \frac{G_F^2}{2\pi^3}\, p_\mathrm{e}^2\, (E_0 - E_\mathrm{e})^2 \mathrm{d}p_\mathrm{e}$$

mit der Fermi Konstanten $G_F = 1.166 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2}$ (siehe Aufgabe Myonlebensdauer) und $E_0 = 1.3$ MeV.
Bemerkung: Gleichung (1) gilt nur für Fermi Übergänge. Daneben gibt es noch Gamov-Teller Übergänge. Neutron und Tritium Zerfall sind gemischte Prozesse. In erster Näherung ist der Beitrag des Gamov-Teller Überganges um einen Faktor 3 (Spinmultiplizität) grösser als der Beitrag des Fermi Überganges. Die Summe beider Prozesse gibt einen Faktor ≈ 4 in Formel (1). Für das Tritium muss berücksichtigt werden, dass beide Neutronen zerfallen können.

• Berechnen Sie die mittlere Lebensdauer τ_n des Neutrons.
Vernachlässigen Sie dabei die Elektronmasse, d.h. verwenden Sie $E_\mathrm{kin} = E = p$ und $\mathrm{d}p = \mathrm{d}E$.
Wo besitzt $\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}E_\mathrm{e}$ ein Maximum? Skizzieren Sie $\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}E_\mathrm{e}$.

77) Myon–Lebensdauer: theoretisch (3-Teilchenzerfall, Phasenraum, FP1)

a) Berechnen Sie wiederum analog zu Aufg. 29 die maximale relativistische Energie des Elektrons beim μ^--Zerfall.

b) Die Wahrscheinlichkeit ein Elektron (bzw. Positron) mit einer bestimmten relativistischen Energie E zu finden, ist durch die differentiellen Zerfallsrate $\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}E$ gegeben. Die totale Zerfallsrate erhält man mittels Integration über alle möglichen Energien. Sie ist umgekehrt proportional zur mittleren Lebensdauer τ.

$$\frac{\hbar}{\tau} := \Gamma = \int_\mathrm{min}^\mathrm{max} \frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}E}\, \mathrm{d}E\,, \qquad \text{mit } \frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}E} = \frac{G_F^2}{12\pi^3}\, m_\mu^2\, E^2 (3 - \frac{4E}{m_\mu}) \qquad \text{(in nat. Einheiten)}$$

Wo besitzt $\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}E$ ein Maximum? Berechnen Sie allgemein die mittlere Lebensdauer τ_μ des μ^- Leptons. Vernachlässigen Sie dabei die Elektronmasse gegenüber der Myonmasse, d.h. setzten Sie $m_e = 0$.
Im Endergebnis soll nur mehr die Muonmasse m_μ vorkommen, keine Energie. Aus dem Experiment (z.B. F1-Praktikum) erhält man $\tau_\mu = 2.2\ \mu$s. Mit dem experimentellen Wert für die Myonmasse $m_\mu = 106\ \mathrm{MeV}/c^2$ sollen Sie nun die Fermi-Konstante G_F bestimmen (in Einheiten von GeV^{-2}).