Mat 426
Curvas Algebraicas
Prof. Pedro Montero
UTFSM Casa Central, Semestre 2020-2

Ayudantía 5
Fabián Levicán

Ejercicios de clases

Problema 1.
Recordemos la definición de semi-continuidad superior.

Definición 0.1. Sea X un espacio topológico, sea $x_0 \in X$, y sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Se dice que f es **semi-continua superior** en x_0 si para todo $y > f(x_0)$ existe una vecindad U de x_0 tal que para todo $x \in U$, $f(x) < y$.

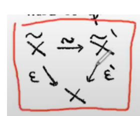
También recordemos el siguiente corolario visto en clases.

Corolario 1. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo regular sobreyectivo entre variedades algebraicas irreducibles. Si f es un morfismo* ***cerrado****, entonces la función $dim_{fib} : Y \to \mathbb{N}, \quad y \mapsto dim(f^{-1}(y))$ es semi-continua superior.*

La segunda edición del libro clásico de Shavarevich tiene la incorrección de no considerar la hipótesis en negrita. Demuestre que para el morfismo regular sobreyectivo no cerrado $f : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x, (xy-1)y, (xy-1)z)$ no se tiene la conclusión del corolario.

Indicación: Estudie el punto $x_0 = (0, 0, 0)$ y el abierto $x \neq 0$.

Problema 2.
Sea X una variedad algebraica afín, sean $f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s \in \mathcal{O}(X)$ tales que $I = \langle f_1, \dots f_r \rangle = \langle g_1 \dots g_s \rangle$, y sean $\epsilon : \tilde{X} \to X$ y $\epsilon' : \tilde{X}' \to X$ los blow-up de X en $(f_1, \dots, f_r)$ y $(g_1, \dots, g_s)$, respectivamente. Demuestre que existe un isomorfismo $\varphi : \tilde{X} \to \tilde{X}'$ tal que el diagrama (*la figura fue obtenida de los apuntes de clases*)



conmuta.

En otras palabras, el blow-up de una variedad algebraica afín X depende sólo del ideal I, y podemos decir que $\tilde{X} := Bl_Z(X) \to X, \quad x \mapsto \epsilon(x)$ es **el blow-up de X a lo largo de $Z := V(I) \subset X$**. La subvariedad afín cerrada Z es llamada el **centro** del blow-up.

Investigación

Nota: En esta sección se usaron fuertemente (a veces parafraseando o citando) como referencia el libro de Brasselet y el de Fulton. Toda esta construcción es muy gráfica, y el lector la podrá entender con mucha mayor facilidad haciendo dibujitos.

En esta sección discutiremos sobre **variedades tóricas**. Primero daremos una pequeña motivación, luego explicitaremos la construcción, y finalmente desarrollaremos algunos ejemplos.

Motivación

Las variedades tóricas afines son importantes en varias áreas de las matemáticas, pues relacionan la geometría discreta, combinatoria, con la geometría algebraica. Además, son una fuente de ejemplos y modelos, y proveen una perspectiva desde la que estudiar ejemplos y fenómenos en geometría algebraica. Históricamente han servido para probar muchas teorías generales.

Construcción

Preliminares

El conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ $G_\sigma = \{v_1, \dots, v_r\}$ es llamado el conjunto de **generadores** del **cono poliédrico** $\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad x = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}^{\geq 0}\}$. El cono generado por $\emptyset$ es el $\{0\}$. Un cono es llamado **racional** si $G \subset \mathbb{Z}^n$, y **fuertemente convexo** si $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$.

Si $u \in (\mathbb{R}^n)^*$ y $v \in \mathbb{R}^n$, entonces $\langle u, v\rangle := u(v)$ es el **producto dual** de u y v. Además, $u^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n : \quad \langle u, w\rangle = 0\}$ es el **ortogonal dual** de u.

Un **semigrupo** es un conjunto no vacío S con una operación asociativa cerrada $+$. Un **monoide** es un semigrupo conmutativo, con un elemento neutro 0, y que satisface la *ley de simplificación* ($\forall a, b, c \in S : \quad a + c = b + c \implies a = b$). Las definiciones de **monoide finitamente generado** y **$\mathbb{C}$-álgebra finitamente generada** son naturales (¡ojo! En el caso de un monoide no podemos necesariamente invertir elementos, luego consideramos escalares en $\mathbb{Z}^{\geq 0}$. En el caso de un álgebra, podemos tomar potencias y multiplicar por escalares en $\mathbb{C}$).

El conjunto $\mathbb{C}[Z, Z^{-1}] := \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n, Z_1^{-1}, \dots Z_n^{-1}]$ es llamado el anillo de **polinomios de Laurent**. Si $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, definimos $z^a := z_1^{a_1} \cdots z_n^{a_n}$. La aplicación $a \mapsto z^a$ induce un isomorfismo entre el grupo abeliano $\mathbb{Z}^n$ y el grupo multiplicativo de los monomios de Laurent. Notemos (¡muy importante!) que si se tiene que un monomio de Laurent es igual a 1, entonces se puede obtener un binomio (común y corriente, ya no de Laurent) igual a 0. Si $\sum_{\text{finita}} \lambda_a z^a \in \mathbb{C}[Z, Z^{-1}]$, el conjunto finito $\{a \in \mathbb{Z}^n : \quad \lambda_a \neq 0\}$ es llamado su **soporte**.

Finalmente, $\mathbb{Z}^n$ es el **retículo** (en inglés, *lattice*), $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$ es el **retículo dual** (isomorfo a $\mathbb{Z}^n$) y $\mathbb{T} := (\mathbb{C}^*)^n$ es el **n-toro algebraico complejo**.

Plan

La construcción de una variedad tórica se lleva a cabo en una sucesión de pasos descrita en el siguiente diagrama:

$$\sigma \mapsto \hat{\sigma} \mapsto S_\sigma \mapsto A_\sigma \mapsto X_\sigma \mapsto X_\Delta$$

Donde σ es un cono (poliédrico, racional, fuertemente convexo) en $\mathbb{R}^n$, $\hat{\sigma}$ es su cono dual, S_σ es su monoide finitamente generado, A_σ es su $\mathbb{C}$-álgebra finitamente generada, X_σ es su variedad tórica afín, y X_Δ es su variedad tórica.

El cono y el cono dual

En adelante, todos los conos que consideraremos serán poliédricos, racionales, y fuertemente convexos.

Sea σ un cono. Su **cono dual** es

$$\hat{\sigma} := \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \quad \langle u, v\rangle \geq 0, \quad \forall v \in \sigma\}$$

Una caracterización muy útil, en términos de medio-espacios (en inglés, *half-spaces*) es que, si $G_\sigma = \{v_1, \ldots, v_r\}$ genera a σ, y σ_{v_i} es el cono generado por $\{v_i\}$, entonces $\hat{\sigma} = \cap \hat{\sigma_{v_i}}$. **(1)**

El cono dual es un cono poliédrico, racional (de generadores en el retículo dual), y fuertemente convexos.

Si $\lambda \in \hat{\sigma}$, entonces $\tau := \sigma \cap \lambda^\perp$ es llamada una **cara** de σ. Escribimos $\tau < \sigma$.

Las caras también son conos poliédricos, racionales, y fuertemente convexos. Las intersecciones de caras son caras. Las caras de caras son caras. En particular, el origen es una cara de cualquier cono, y un cono es una cara de sí mismo. Para obtener una cara no trivial de σ, es necesario escoger λ como una cara no trivial de $\hat{\sigma}$. De **(1)** se sigue que si $\tau < \sigma$, entonces $\hat{\sigma} \subset \hat{\tau}$.

Finalmente, si $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp < \sigma$, entonces $\hat{\tau} = \hat{\sigma} + \mathbb{R}^{\geq 0}(-\lambda)$. **(2)**

El monoide y el álgebra

Iniciaremos esta subsección con un lema fundamental en nuestra discusión. La demostración es corta y linda, así que no nos la ahorraremos.

Lema 1. *(Lema de Gordon.)* Sea L el retículo $\mathbb{Z}^n$. Si $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ es un cono, entonces $\sigma \cap L$ es un monoide finitamente generado.

Demostración. Sean $G_\sigma = \{v_1, \ldots, v_r\}$ los generadores del cono. Si $v \in \sigma \cap N$, entonces podemos escribir $v = \sum (n_i + r_i)v_i$ para ciertos $n_i \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, r_i \in [0, 1]$. Es decir, $v = \sum n_i v_i + \sum r_i v_i$. Como todos nuestros conos son racionales, todos los v_i pertenecen a $\sigma \cap L$. Como además (restando $\sum n_i v_i$ a ambos lados) se tiene que $\sum r_i v_i \in \sigma \cap L$, basta demostrar que el conjunto $K = \{\sum s_i v_i, \quad s_i \in [0, 1]\} \cap L$ es finito. Esto es fácil de ver pues la intersección entre un conjunto compacto y el retículo es finita. $\square$

Notemos, además, que el conjunto de generadores de un monoide no es necesariamente único, y dos cualesquiera no tienen necesariamente la misma cardinalidad. **(3)**

Sea DL el retículo dual. Definimos **el monoide de un cono** como $S_\sigma := \hat{\sigma} \cap DL$. De **(2)** se sigue que, si $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp < \sigma$ para cierto $\lambda \in S_\sigma$, entonces $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}^{\geq 0}(-\lambda)$. **(5)**

Definimos **el álgebra A_σ de un cono** como el conjunto de monomios de Laurent cuyo soporte es un subconjunto de S_σ. Gracias al isomorfismo mencionado en la sección de preliminares, tenemos que esta es una $\mathbb{C}$-álgebra finitamente generada.

Finalmente, notemos que A_σ es isomorfa a $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_k]/I$ para ciertos k e I *no* únicos (por **(3)**). Este ideal de polinomios está determinado por las (finitas) relaciones binomiales que se obtienen de las (finitas) relaciones entre los generadores de S_σ o de A_σ. **(4)**

La variedad tórica afín y el abanico

Definimos **la variedad tórica afín de un cono** como $X_\sigma := Specm(A_\sigma)$. Esta definición es natural pues sabemos que los puntos de una variedad afín arbitraria están en biyección con los ideales maximales de su álgebra de polinomios. De **(3)** se sigue que A_σ depende de la elección de generadores de S_σ, por lo tanto existen muchas representaciones del mismo cono en distintos espacios afines $\mathbb{C}^k$. Sin embargo, como usando la topología de Zariski la biyección antes mencionada induce un homeomorfismo, se tiene que todas estas representaciones son homeomorfas.

Del análisis anterior, y de **(4)**, podemos representar X_σ como $V(I) \subset \mathbb{C}^k$ para ciertos k e I no únicos.

Un **abanico** Δ es una unión finita de conos tal que para todo cono $\sigma \in \Delta$, toda cara $\tau < \sigma$ pertenece a Δ, y para todos $\sigma, \sigma' \in \Delta$, $\sigma \cap \sigma' < \sigma$ y $\sigma \cap \sigma' < \sigma'$.

De **(5)** se sigue que, si $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp < \sigma$ es una cara no trivial, S_τ es generado por generadores $a_1, \ldots, a_k$ de S_σ unidos a $a_{k+1} = -a_k$ (pues, por propiedades de las caras, podemos escoger $a_k = \lambda$). Así, A_τ está determinado por las mismas relaciones binomiales que determinan a A_σ unidas a $u_k u_{k+1} = 1$, y luego $X_\tau \cong X_\sigma \setminus \{u_k = 0\}$ a través de $X_\tau \to X_\sigma \setminus \{u_k = 0\}, \quad (u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}) \mapsto (u_1, \ldots, u_k)$. Por lo tanto, podemos construir la **variedad tórica de un abanico** Δ a partir de un atlas algebraico dado, en las intersecciones, por la aplicación de pegado

$$\psi_{\sigma,\sigma'} : X_\sigma \setminus \{u_k = 0\} \xrightarrow{\sim} X_\tau \xrightarrow{\sim} X_{\sigma'} \setminus \{v_l = 0\}$$

para cualesquiera dos $\sigma, \sigma' \in \Delta$.

Ejemplos

El 2-toro algebraico complejo

Si partimos con el cono trivial, el cono dual es todo $(\mathbb{R}^2)^*$. El monoide es generado por $a_1 = e_1, a_2 = -e_1, a_3 = e_2, a_4 = -e_2$. Las relaciones son $a_1 + a_2 = 0$ y $a_3 + a_4 = 0$. En el álgebra, el ideal de polinomios es generado por $u_1 u_2 = 1$ y $u_3 u_4 = 1$. Estas son dos hipérbolas equiláteras, cada una isomorfa a $\mathbb{C}^*$ (o bien a $\mathbb{P}$). Por lo tanto, la variedad algebraica que obtenemos es $(\mathbb{C}^*)^2$, el 2-toro algebraico complejo. Dividiendo por u_2 y u_4 en sus respectivas ecuaciones, obtenemos una proyección de u_2 en u_1 y de u_4 en u_3. En general, el n-toro algebraico complejo es isomorfo a n hipérbolas equiláteras, y luego a $(\mathbb{C}^*)^n$.

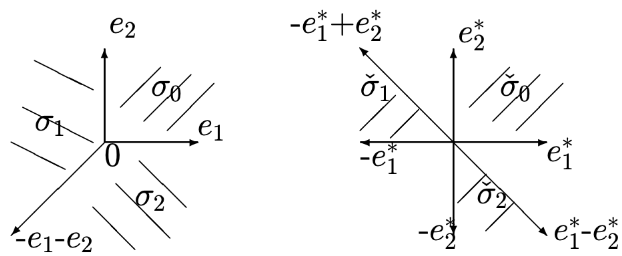
Mat 426
Curvas Algebraicas
Ayudantía 5 | Prof. Pedro Montero
Fabián Levicán | UTFSM Casa Central, Semestre 2020-2

Ejercicio. *Demuestre que el n-toro algebraico complejo se puede incluir dentro de cualquier variedad tórica afín obtenida de un cono en $\mathbb{R}^n$ como un subconjunto abierto denso de Zariski.*

El espacio proyectivo $\mathbb{P}^2$

Si $[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2$, podemos parametrizarlo en $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ con las coordenadas afines $(z_1, z_2) = (x_1/x_0, x_2/x_0)$. Así, en $U_1 = \{x_1 \neq 0\}$ la parametrización es $(z_1^{-1}, z_1^{-1}z_2) = (x_0/x_1, x_2/x_1)$, y en $U_2 = \{x_2 \neq 0\}$ la parametrización es $(z_2^{-1}, z_1 z_2^{-1}) = (x_0/x_2, x_1/x_2)$.

Sea el siguiente abanico Δ en $\mathbb{R}^2$ y su dual (*la figura fue obtenida del libro de Brasselet*):



S_{σ_0} es generado por $a_1 = e_1^*, a_2 = e_2^*$. No hay relaciones entre los a_i, por lo tanto $A_{\sigma_0} = \mathbb{C}[u_1 = z_1, u_1 = z_2]$ y X_{σ_0} es $\mathbb{C}^2$ con las coordenadas (u_1, u_2).

S_{σ_1} es generado por $a_1 = -e_1^*, a_2 = -e_1^* + e_2^*$. No hay relaciones entre los a_i, por lo tanto $A_{\sigma_1} = \mathbb{C}[u_1 = z_1^{-1}, u_2 = z_1^{-1}z_2]$ y X_{σ_1} es $\mathbb{C}^2$ con las coordenadas (u_1, u_2).

S_{σ_2} es generado por $a_1 = -e_2^*, a_2 = e_1^* - e_2^*$. No hay relaciones entre los a_i, por lo tanto $A_{\sigma_2} = \mathbb{C}[u_1 = -z_2^{-1}, u_2 = z_1 z_2^{-1}]$ y X_{σ_2} es $\mathbb{C}^2$ con las coordenadas (u_1, u_2).

Para la cara τ_{σ_0,σ_1} intersección entre σ_0 y σ_1 tenemos que $\lambda_0 = e_1^* \in \hat{\sigma_0}$ y $\lambda_1 = -e_1^* \in \hat{\sigma_1}$. Por lo tanto, a los generadores de S_{σ_0} debemos unir $a_3 = -e_1^*$ y a los generadores de S_{σ_1} debemos unir $a_3 = e_1^*$. En ambos casos, la nueva relación binomial es $u_1 u_3 = 1$, y por lo tanto $X_\tau \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ en distintas coordenadas. La aplicación de pegado es $(z_1, z_2) \mapsto (z_1^{-1}, z_1^{-1}z_2)$.

Ejercicio. *Realice el pegado de las otras caras.*

Se puede pensar que cada intersección agrega un *punto al infinito* a la construcción, y así la variedad tórica de Δ es $\mathbb{P}^2$. Esto se puede generalizar a $\mathbb{P}^n$ (sólo hay que extender la construcción).