

VARIEDADES TÓRICAS

NOLBERTO RIVERA

RESUMEN. El presente artículo versa sobre el concepto de *variedad tórica*. Daremos primeramente su definición “primordial” como variedad abstracta, para luego caracterizarlas mediante el lenguaje de los conos poliédricos; todo lo anterior siguiendo el flujo de ideas que aparece en el primer capítulo del libro *Introduction to Toric Varieties* de Fulton [Fu193].

ÍNDICE

1. Introducción	2
2. Preliminares	3
3. Sección Principal	4
Referencias	19

Esta construcción [las variedades tóricas] ha sido de una utilidad considerable dentro de la Geometría Algebraica en los últimos 10 años... y, asimismo, se ha revelado como una herramienta asombrosamente eficaz del *imperialismo algebro-geométrico*, infiltrando (incluso) áreas de la combinatoria.

Reid, 1983 [Cox11, slide 39/82]

1. INTRODUCCIÓN

En su desarrollo histórico, las variedades tóricas aparecieron, como concepto, de manera más o menos independiente en el trabajo de distintos matemáticos (y escuelas de matemáticos), originariamente en el contexto del estudio de problemas de compactificación.

Es desde ese lugar que surge la primera definición (la “original”) de *variedad tórica*, que se aprovecha de referir inmediatamente en la presente introducción (se volverá a los conceptos en ella implicados en la siguiente sección, de Preliminares).

Definición 1.1. Una variedad tórica es una variedad *normal* X que contiene un toro T como un conjunto abierto de Zariski (denso, por ende), junto a una acción (de grupo) $T \times X \rightarrow X$ de T sobre X que extiende la acción natural de T sobre sí mismo.

A la luz de esta definición, es más fácil entender el origen del primer nombre (o uno de los primeros nombres) que tuvieron las variedades tóricas: el de “incrustaciones de toros”.

Este nombre es desafortunado por engañoso: parece indicar que no habría mayor interés en estudiar las variedades tóricas que aquel que surja toda vez que exista un toro que se deba compactificar. El asunto es que esta idea no puede estar más alejada de la realidad (más aún, William Fulton, en su *Introduction to Toric Varieties* [Fu93] se lamenta de que este haya sido el caso, elucubrando que, quizá, de no ser por ello, el tópico habría tenido en sus inicios una mejor recepción en Occidente), lo anterior siendo debido a dos puntos.

Por un lado, está que las variedades tóricas ofrecen una forma, alternativa a la usual, y relativamente “elemental”, de aproximarse a varios ejemplos y fenómenos de la Geometría Algebraica. Con todo y que en el esquema general de clasificación se destacan como variedades bastante especiales (siendo, por ejemplo, siempre racionales, y aún siendo racionales sus singularidades las veces que sean singulares las variedades), brindan un terreno fértil para emplear las herramientas de teorías más generales, pues precisamente esta “regularidad” hace todo mucho más concreto y computacional de lo que es usualmente, en abstracto.

Por otro, está que las variedades en estudio, además de su arriba señalada definición primordial y más abstracta, pueden caracterizarse mediante el lenguaje de los reticulados y los conos poliédricos en \mathbb{R}^n , lo cual justamente es parte de lo que hace más manejables dichas variedades.

El objetivo del presente proyecto es, precisamente, explorar dicha caracterización.

2. PRELIMINARES

El presente proyecto ocupará la notación de Geometría Algebraica ocupada en clases y recursos a lo largo del semestre, que es la misma del apunte respectivo [Mon23], además de la que sucesivamente vayamos señalando en la medida que sea necesario. Una excepción importante a lo anterior se dará en la definición de algunos, y sólo algunos, objetos duales (notablemente, los espacios vectoriales duales) que se denotarán con un asterisco en lugar de una V , siguiendo la notación del libro en que se basa el presente trabajo, y permitiendo con ello, de paso, distinguir de qué objeto dual estamos hablando de manera aún más clara que si ello dependiera meramente del contexto (así, por ejemplo, si V es un espacio vectorial, su espacio dual se denotará V^*).

Asimismo, asumiremos los resultados del curso, sobre todo los de la primera mitad de la asignatura (capítulos 1 y 2).

Para entender la definición ya dada de *variedad tórica*, definiremos los conceptos de *toro algebraico* (en oposición a *topológico*, que sería aquel dado en \mathbb{R}^n por el producto de $n - 1$ copias de la circunferencia S^1), que designaremos *toro*, simplemente, y el de *variedad normal* (tal como aparece en los apuntes del curso).

Definición 2.1. Un *toro (algebraico)* corresponde a un producto cartesiano de la forma $(\mathbb{C}^*)^n$.

Definición 2.2. Sea X una variedad algebraica irreducible. Decimos que $x \in X$ es un punto normal, o que X es normal en $x \in X$, si el anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$ es normal (i.e., si $\mathcal{O}_{X,x}$ es integralmente cerrado en $k(X)$). Decimos que X es una variedad normal si todo punto $x \in X$ es normal.

Las variedades tóricas se construirán a partir de *reticulados* N (isomorfos a \mathbb{Z}^n , para algún n), y *abanicos* Δ , que serán colecciones de *conos poliédricos racionales fuertemente convexos*, denotados σ , pertenecientes al \mathbb{R} -e.v. $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Un *cono poliédrico racional fuertemente convexo* corresponderá a un cono con su vértice en el origen, generado por un número finito de vectores, donde (por ser racional) los vectores pertenecerán al reticulado N considerado, y (por ser fuertemente convexo) no contendrá línea alguna que pase por el origen.

Usualmente, abusando de la terminología, llamaremos a dicho σ simplemente un “cono en N ”.

Sea $M := \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$ el reticulado dual, donde el producto dualidad viene denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si σ es un cono en N , luego el cono dual σ^\vee es el conjunto de vectores no negativos en σ . Esto determina el semigrupo conmutativo

$$S_\sigma = \sigma^\vee \cap M = \{u \in M : \langle u, v \rangle \geq 0, \quad \forall v \in \sigma\}$$

Este semigrupo es finitamente generado, de manera que su correspondiente álgebra de grupo $\mathbb{C}[S_\sigma]$ es una \mathbb{C} -álgebra conmutativa finitamente generada, la cual corresponde a una variedad afín: $\text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$.

Tomemos un momento para notar que si τ es una cara de σ , luego S_σ está contenido en S_τ , de modo que $\mathbb{C}[S_\sigma]$ es sub-álgebra de $\mathbb{C}[S_\tau]$.

Tenemos también que el origen $\{0\}$ es cara de todo cono dado arbitrariamente; y, en ello, un cono él mismo, cuyo semigrupo dual es todo M , con generadores $\{\pm e_1^*, \dots, \pm e_n^*\}$, de modo que su correspondiente álgebra de grupos viene dada por

$$\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}]$$

que es el anillo afín del toro $U_{\{0\}} = T = (\mathbb{C}^*)^n$, de modo que toda variedad tórica contiene al toro como un abierto.

3. SECCIÓN PRINCIPAL

3.1. Conos Poliedrales Convexos. Se incluyen en esta sección algunos hechos básicos sobre los conos poliédricos convexos que serán requeridos para las construcciones posteriores. Se pueden encontrar demostrados en su generalidad en más de una referencia atingente, pero siendo las pruebas tan simples en el caso poliédrico, se detallan los enunciados con sus demostraciones, las cuales son también de utilidad porque muestran cómo encontrar generadores de los semigrupos, que es precisamente lo que requerimos para hacer cálculos concretos.

Definición 3.1. Sea V el espacio vectorial $N_{\mathbb{R}}$, con espacio dual $V^* = M_{\mathbb{R}}$. Un cono poliédrico convexo es un conjunto

$$\sigma = \{r_1 v_1 + \cdots + r_s v_s \in V : r_i \geq 0\}$$

generado por cualquier conjunto finito de vectores $v_1, \dots, v_s \in V$. Tales vectores (o, a veces, también, los correspondientes rayos, consistentes en los conjuntos de múltiplos positivos de cada uno de dichos vectores) son llamados los *generadores* del cono σ .

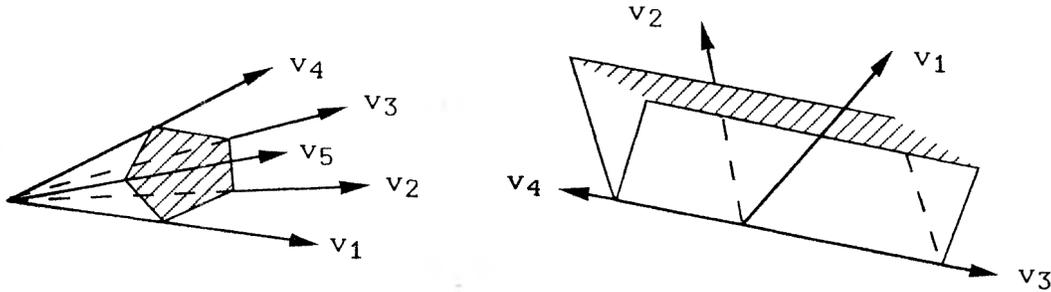


Figura 1.

Veremos luego una descripción dual de los conos como intersecciones de semiespacios. La *dimensión* de σ , denotada $\dim(\sigma)$ corresponde a la dimensión del espacio vectorial más pequeño que contiene a σ , o sea, del espacio $\mathbb{R} \cdot \sigma = \sigma + (-\sigma)$ generado por σ (donde $-\sigma$ es el cono generado por los opuestos aditivos de los generadores de σ).

Definición 3.2. El *dual* σ^\vee de cualquier conjunto σ (en particular, de algún cono) corresponde a

$$\sigma^\vee = \{u \in V^* : \langle u, v \rangle \geq 0, \quad \forall v \in \sigma\}$$

Todo lo que sigue está basado en el siguiente hecho fundamental, que participa de la teoría general de conjuntos convexos:

Hecho 3.3. Si σ es un cono poliédrico convexo y $v_0 \notin \sigma$, luego existe algún $u_0 \in \sigma^\vee$ con $\langle u_0, v_0 \rangle < 0$.

Dado que ya tenemos evidentemente que $\sigma \subseteq (\sigma^\vee)^\vee$, el hecho anterior resulta equivalente al siguiente

Teorema 3.4. (Teorema de Dualidad) $\sigma = (\sigma^\vee)^\vee$

Definición 3.5. Una cara τ de σ es cualquier intersección de σ con cualquier hiperplano *de soporte* (i.e., un hiperplano de intersección no vacía con σ tal que σ está completamente contenido en alguno de los dos semiplanos no estrictos que define); i.e., τ es de la forma

$$\tau = \sigma \cap u^\perp = \{v \in \sigma : \langle u, v \rangle = 0\}$$

para algún $u \in \sigma^\vee$.

Notemos que todo cono es cara de sí mismo. El resto de éstas son denominadas *propias*.

Aprovechemos de notar, asimismo, que todo subespacio vectorial de un cono está completamente contenido en toda cara de dicho cono.

Proposición 3.6. *Toda cara de un cono poliédrico convexo es también un cono poliédrico convexo*

Demostración. La cara $\sigma \cap u^\perp$ es generado por los vectores v_i en un conjunto generador de σ tales que $\langle u, v_i \rangle = 0$. En particular, esto significa que un cono tiene sólo finitas caras.

Proposición 3.7. *Toda intersección de caras es también una cara.*

Demostración. Esto se obtiene de que la igualdad entre conjuntos

$$\bigcup (\sigma \cap u_i^\perp) = \sigma \cap (\Sigma u_i)^\perp$$

se cumple para $u_i \in \sigma^\vee$.

Proposición 3.8. *Toda cara de una cara es una cara.*

Demostración. De hecho, si $\tau = \sigma \cap u^\perp$ y $\gamma = \tau \cap (u')^\perp$ para $u \in \sigma^\vee$ y $u' \in \tau^\vee$, luego, para p positivo grande, tenemos que $u' + pu$ está en σ^\vee y $\gamma = \sigma \cap (u' + pu)^\perp$.

Definición 3.9. Una faceta es una cara con codimensión 1 (i.e., dimensión uno menos que el espacio).

Proposición 3.10. *Toda cara propia está contenida en alguna faceta.*

Demostración. Para ver esto, basta con mostrar que si $\tau = \sigma \cap u^\perp$ tiene codimensión mayor a 1, luego está contenido en una cara más grande. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar V como el espacio vectorial generado por el cono σ . Sea W el espacio generado por τ . Así, las imágenes \bar{v}_i en V/W de los generadores de σ están contenidas en un semiespacio determinado por u . Moviendo este semiespacio en la esfera de semiespacios en V/W , se puede encontrar uno que contenga estos vectores \bar{v}_i , pero con a lo menos algún vector no nulo en el hiperplano de frontera.

En otras palabras, existe un u_0 en σ^\vee tal que u_0^\perp contiene a τ y a lo menos alguno de los vectores $v_i \notin W$. Esto significa que $\sigma \cap u_0^\perp$ es una cara más grande.

En particular, cuando la condimensión de τ en σ es 2, luego V/W es un plano, de modo que existen exactamente 2 hiperplanos (líneas) de soporte, lo cual demuestra que cualquier cara de codimensión 2 es intersección de exactamente 2 facetas.

De lo anterior, podemos deducir (por inducción en la codimensión), lo siguiente.

Proposición 3.11. *Toda cara propia es intersección de todas las facetas que la contienen.*

Demostración. En efecto, si τ es cualquier cara de codimensión mayor a 2, luego, de la proposición anterior, tenemos que podemos encontrar una faceta γ que la contenga. Así, por inducción, τ es intersección de facetas en γ , y cada una de éstas es intersección de dos facetas en σ , con lo que su intersección τ es también una intersección de facetas.

Proposición 3.12. *La frontera topológica de un cono que genera V es la unión de sus caras propias (o facetas).*

Demostración. Considerando que una cara es la intersección con algún hiperplano de soporte, los puntos de las caras propias de σ tienen puntos arbitrariamente cercanos que no están en σ . Luego, como σ tiene puntos interiores, mirando al segmento de línea desde un punto en una cara a un punto en el interior, vemos igualmente que puntos en las caras tienen puntos arbitrariamente cercanos que son puntos interiores.

Conversamente, si v está en en la frontera del cono σ , sea $w_i \rightarrow v$, con $w_i \notin \sigma$. Por el Hecho 3.3, existen vectores $u_i \in \sigma^\vee$ tales que $\langle u_i, v_i \rangle < 0$. Considerando los u_i en una esfera, encontramos una subsecuencia convergente, de manera que podemos asumir que u_i tiene un límite u_0 . Luego, $u_0 \in \sigma^\vee$ y, por ende, v está en la cara $\sigma \cap u_0^\perp$.

En particular, cuando σ genera V y τ es una faceta de σ , existe un $u \in \sigma^\vee$, único salvo multiplicación por un escalar positivo, tal que $\tau = \sigma \cap u^\perp$.

Este último vector, que denotamos por u_τ , brinda una ecuación para el hiperplano generado por τ .

Proposición 3.13. *Si σ genera V y $\sigma \neq V$, luego σ es intersección de los semiespacios $H_\tau := \{v \in V : \langle u_\tau, v \rangle \geq 0\}$, indexados por τ en las facetas de σ .*

Demostración. Si v estuviese en la intersección de los semiplanos, pero no en σ , tómesese cualquier v' en el interior de σ . Sea w el último punto en σ en el segmento de línea entre v' y v . Así, w está en la frontera de σ y, por ende, se encuentra en alguna faceta τ , de manera que $\langle u_\tau, v' \rangle > 0$ y $\langle u_\tau, w \rangle = 0$, de modo que $\langle u_\tau, v \rangle < 0$. Contradicción.

La prueba nos brinda un procedimiento práctico para encontrar generadores del cono dual σ^\vee . Por cada conjunto de $n-1$ vectores linealmente independientes entre los generadores de σ , se debe resolver para encontrar un vector u que anule el conjunto. Si ni u ni $-u$ son no-negativos en todos los generadores de σ^\vee , se le descarta; en caso contrario, u o $-u$ se tomando como generador para σ^\vee . Si los $n-1$ vectores están en alguna faceta τ , este vector será el que arriba fue denotado por u_τ .

Desde la anterior proposición podemos deducir el siguiente

Teorema 3.14. (Teorema de Farkas) *El dual de un cono poliédrico convexo es un cono poliédrico convexo.*

Demostración. Primeramente, notemos que si σ genera V , los vectores u_τ generan σ^\vee .

En efecto, si u en σ^\vee no estuviese en el cono generado por u_τ , aplicando el Hecho 3.3 a dicho cono tenemos que existe un vector $v \in V$ tal que $\langle u_\tau, v \rangle \geq 0$ para todas las facetas τ , y que $\langle u, v \rangle < 0$, y esto contradice la anterior proposición.

Ahora, si σ genera un espacio vectorial más pequeño $W = \mathbb{R} \cdot \sigma$, luego σ^\vee es generado por “levantamientos” de generadores del cono dual en $W^* = V^*/W^\perp$, junto con vectores u y $-u$ para u que se recorre un abase de W^\perp .

Esto muestra que los conos poliédricos pueden también recubrir una definición global como la intersección de semiespacios. Explícitamente: para generadores u_1, \dots, u_t de σ^\vee ,

$$\sigma = \{v \in V : \langle u_1, v \rangle \geq 0, \dots, \langle u_t, v \rangle \geq 0\}$$

Si ahora suponemos que σ es racional (recuérdese: esto significa que los generadores pueden obtenerse de N), luego σ^\vee es, también, racional.

Precisamente, el procedimiento anterior muestra cómo construir generadores $u_i \in \sigma^\vee \cap M$.

Lema 3.15. (Lema de Gordan) *Si σ es un cono poliédrico convexo racional, luego $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ es un semigrupo finitamente generado.*

Demostración. Tómense u_1, \dots, u_s en $\sigma^\vee \cap M$ que genera σ^\vee como un cono. Sea $K = \{\sum t_i u_i : 0 \leq t_i \leq 1\}$. Dado que K es compacto y M es discreto, su intersección $K \cap M$ es finita. Luego, $K \cap M$ genera el semigrupo. Efectivamente, si $u \in \sigma^\vee \cap M$, escríbase $u = \sum r_i u_i$, $r_i \geq 0$, de modo que $r_i = m_i + t_i$ con m_i un entero no-negativo y $0 \leq t_i \leq 1$. Así, $u = \sum m_i u_i + u'$, con cada u_i y $u' = \sum t_i u_i$ contenidos en $K \cap M$.

Usualmente es necesario encontrar un punto en el interior relativo de un cono σ , i.e., en un interior topológico de σ en el espacio $\mathbb{R} \cdot \sigma$ generado por σ .

Esto se consigue tomando cualquier combinación positiva de $\dim(\sigma)$ vectores linealmente independientes de entre los generadores de σ . En particular, si σ es racional, podemos encontrar puntos tales puntos en reticulado.

Proposición 3.16. *Si τ es una cara de σ , luego $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$ es una cara de σ , cumpliendo $\dim(\tau) + \dim(\sigma^\vee \cap \tau^\perp) = n = \dim(V)$. Esto imprime una correspondencia uno a uno que revierte el orden entre las caras de σ y las de σ^\vee . La cara más pequeña de σ es $\sigma \cap (-\sigma)$.*

Demostración. Para ver esto notemos primero que las caras de σ^\vee son, exactamente, los conos $\sigma^\vee \cap v^\perp$, con $v \in \sigma = (\sigma^\vee)^\vee$. Si τ contiene a v en su interior relativo, luego $\sigma^\vee \cap v^\perp = \sigma^\vee \cap (\tau^\vee \cap v^\perp) = \sigma^\vee \cap \tau^\perp$, de modo que toda cara de σ^\vee tiene la forma señalada.

La función $\tau \mapsto \tau^* = \sigma^\vee \cap \tau^\perp$ claramente invierte el orden de la inclusión, con lo que de $\tau \subseteq (\tau^*)^*$ se sigue formalmente que $\tau^* = ((\tau^*)^*)^*$, de modo que la función es tanto inyectiva como sobreyectiva.

Se sigue de esto que la cara más pequeña de σ es $(\sigma^\vee)^\vee \cap (\sigma^\vee)^\perp = \sigma \cap (-\sigma)$. En particular, vemos que $\dim(\sigma \cap (-\sigma)) + \dim(\sigma^\vee) = n$. La correspondiente ecuación para una cara general τ puede deducirse considerando τ en una cadena maximal de caras de σ , y comparando luego con la cadena dual de las caras en σ^\vee .

Proposición 3.17. *Si $u \in \sigma^\vee$ y $\tau = \sigma \cap u^\perp$, luego $\tau^\vee = \sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (-u)$.*

Demostración. En efecto, dado que ambos lados de esta ecuación son conos poliédricos convexos, es suficiente mostrar que sus duales son iguales. El dual del lado izquierdo es τ y el dual del lado derecho es $\sigma \cap (-u)^\perp = \sigma \cap u^\perp$, tal y como es requerido.

Proposición 3.18. *Sea σ un cono poliédrico convexo racional, y sea $u \in S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Así, $\tau = \sigma \cap u^\perp$ es un cono poliédrico convexo racional. Más aún, todas las caras de σ tienen dicha forma, y*

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (-u)$$

Demostración. Si τ es una cara, luego $\tau = \sigma \cap u^\perp$ para todo u en el interior relativo de $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$, y u puede tomarse en M (dado que $\sigma^\vee \cap \tau^\vee$ es racional).

Así, dado $w \in S_\tau$, tenemos que $w + p \cdot u \in \sigma^\vee$ para algún p positivo grande, y tomar p como un entero nos muestra que $w \in S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (-u)$.

Para finalizar esta subsección, requeriremos el siguiente resultado, que es una versión más fuerte de nuestro Hecho Fundamental 3.3. Este resultado separa los conjuntos convexos mediante hiperplanos y es a veces coocido como

Lema 3.19. *(Lema de Separación) Si σ y σ' son conos poliédricos convexos cuya intersección τ es cara de ambos, luego existe un $u \in \sigma^\vee \cap (-\sigma')^\vee$ tal que*

$$\tau = \sigma \cap u^\perp = \sigma' \cap u^\perp$$

Demostración. El previo lema se demuestra inspeccionando el cono $\gamma = \sigma - \sigma' = \sigma + (-\sigma')$. Sabemos ya que para cualquier u en el interior relativo de γ^\vee , se tiene que $\gamma \cap u^\perp$ es la cara más pequeña de γ , i.e.,

$$\gamma \cap u^\perp = \gamma \cap (\gamma) = (\sigma - \sigma') \cap (\sigma' - \sigma)$$

Se afirma que este u basta. En efecto, dado que σ está contenido en γ , tenemos que $u \in \sigma^\vee$, y como τ está en $\gamma \cap (-\gamma)$, luego $\tau \in \sigma \cap u^\perp$. Inversamente, si $v \in \sigma \cap u^\perp$, luego $v \in \sigma' - \sigma$, con lo que existe una ecuación $v = w' - w$ con $w \in \sigma, w' \in \sigma'$. Luego, $v + w$ está en la intersección τ entre σ y σ' , y la suma de 2 elementos en un cono puede estar en una cara sólo si los sumando están en dicha cara también, de modo que $v \in \tau$. Esto muestra que $\sigma \cap u^\perp = \tau$, y aplicar el mismo argumento para $-u$ muestra que $\sigma' \cap u^\perp = \tau$.

Proposición 3.20. *Si σ y σ' son conos poliédricos convexos cuya intersección τ es cara de ambos, luego*

$$S_\tau = S_\sigma + S_{\sigma'}$$

Demostración. La inclusión $S_\tau \supseteq S_\sigma + S_{\sigma'}$ es clara. Para la otra, por la prueba del Lema 3.19, podemos considerar u como dentro de $\sigma^\vee \cap (-\sigma')^\vee \cap M$, de manera que $\tau = \sigma \cap u^\perp = \sigma' \cap u^\perp$. Por la Proposición 3.18, junto al hecho de que $-u \in S_{\sigma'}$, tenemos que $S_\tau \subseteq S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (-u) \subseteq S_\sigma + S_{\sigma'}$, tal y como se solicitaba.

Proposición 3.21. *Para un cono poliédrico convexo σ , las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$
2. σ no contiene subespacios lineales distintos de $\{0\}$
3. Existe un $u \in \sigma^\vee$ tales que $\sigma \cap u^\perp = \{0\}$
4. σ genera V

Demostración. Las primeras dos son equivalentes porque $\sigma \cap (-\sigma)$ es el subespacio más grande en σ . La segunda y la tercera son equivalentes porque $\sigma \cap (-\sigma)$ es la cara más pequeña de σ . La primera y la última son equivalentes porque $\dim(\sigma \cap (-\sigma)) + \dim(\sigma^\vee) = n$.

Definición 3.22. Un cono es denominado *fuertemente convexo* si satisface alguna de las condiciones anteriores.

Todo cono es generado por un conjunto minimal de generadores. Si el cono es fuertemente convexo, luego los rayos generados por un conjunto mínimo de generadores son exactamente las caras de dimensión 1 del cono σ (según se puede notar aplicando el Hecho 3.3 a cualquier generador que no esté en el cono generado ór los otros). En particular, estos generadores minimales son únicos, excepto por la multiplicación por escalares positivos.

Por último, reiteramos nuevamente que, como nos interesan principalmente este tipo de conos, diremos que σ es un cono en N por decir que σ es un cono poliédrico racional fuertemente convexo en $N_{\mathbb{R}}$.

Asimismo, a veces se escribirá $\tau < \sigma$ o $\sigma > \tau$ para decir que τ es una cara de σ .

En particular, diremos que un cono es *simplicial*, o un *símplex*, si es generado por generadores linealmente independientes.

3.2. **Variedades Tóricas Afines.** Hemos visto que cuando σ es un cono poliédrico racional fuertemente convexo, tenemos que $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ es un semigrupo finitamente generado. Todo semigrupo aditivo S determina un “anillo de grupo” $\mathbb{C}[S]$ que es una \mathbb{C} -álgebra conmutativa.

Dado que corresponde a un espacio vectorial complejo, tiene un base χ^u , donde u se mueve en S , con una multiplicación determinada por la adición en S :

$$\chi^u \cdot \chi^{u'} = \chi^{u+u'}$$

La unidad 1 corresponde a χ^0 . Los generadores u_i del semigrupo S determinan generadores $\{\chi^{u_i}\}$ para la \mathbb{C} -álgebra $\mathbb{C}[S]$.

Toda \mathbb{C} -álgebra conmutativa finitamente generada A determina una variedad (compleja) afín, que denotamos por $\text{Spec}(A)$.

Revisaremos esta construcción y su notación relacionada. Si se escogen generadores de A , esto presenta A como $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_m]/I$, con I un ideal. Luego $\text{Spec}(A)$ puede identificarse con la subvariedad $V(I)$ del espacio afín \mathbb{C}^m de ceros comunes de los polinomios en I , pero (y como es usual) es conveniente usar descripciones que no ocupen coordenados.

En nuestras aplicaciones, A será un dominio, de modo que $\text{Spec}(A)$ será una variedad irreducible. Aunque $\text{Spec}(A)$ “oficialmente” incluye todos los ideales primos de A (correspondientes a subvariedades de $V(I)$), cuando hablamos de un *punto* en $\text{Spec}(A)$ nos referiremos a un *punto cerrado ordinario*, i.e., a un punto correspondiente a un ideal maximal (a menos que se indique lo contrario).

Dichos puntos cerrados se denotan $\text{Specm}(A)$. Cualquier $A \rightarrow B$ homomorfismo de \mathbb{C} -álgebras determina un morfismo $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ de variedades. En particular, los puntos cerrados corresponden a isomorfismos entre \mathbb{C} -álgebras de A a \mathbb{C} .

Si $X = \text{Spec}(A)$, para cada elemento $f \neq 0$ en A tenemos que el subespacio abierto principal $X_f = \text{Spec}(A_f) \subseteq X = \text{Spec}(A)$ corresponde al homomorfismo de localización $A \mapsto A_f$.

Para $A = \mathbb{C}[S]$ construido desde un semigrupo, los puntos son fáciles de describir: corresponden a homomorfismos de semigrupos desde S hasta \mathbb{C} , donde $\mathbb{C} = \mathbb{C}^* \cup \{0\}$ se considera un semigrupo abeliano vía la multiplicación $\text{Specm}(\mathbb{C}[S]) = \text{Hom}_{sg}(S, \mathbb{C})$.

Para un homomorfismo de semigrupos $x : S \rightarrow \mathbb{C}$ y $u \in S$, el valor de la función χ^u correspondiente, en el correspondiente punto de $\text{Specm}(\mathbb{C}[S])$ es la imagen de u para la función x , i.e., $\chi^u(x) = x(u)$.

Cuando $S = S_\sigma$ surge de un cono poliédrico racional fuertemente convexo, definimos $A_\sigma = \mathbb{C}[S_\sigma]$ y $U_\sigma = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma]) = \text{Spec}(A_\sigma)$ como su *variedad tórica afín* correspondiente.

Todos estos semigrupos serán subsemigrupos del grupo $M = S_{\{0\}}$. Si e_1, \dots, e_n es una base de N y e_1^*, \dots, e_n^* es la base dual de M , escribimos $X_i = \chi^{e_i^*} \in \mathbb{C}[M]$.

Como semigrupo, M tiene generadores $\pm e_1^*, \dots, \pm e_n^*$, de manera que tenemos

$$\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}] = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_{X_1 \dots X_n}$$

donde este último corresponde al anillo de *polinomios de Laurent* en n variables (comparar con el concepto, empleado en análisis complejo, de *series de Laurent*, donde los exponentes de la variable compleja, no negativos para las habituales series de Taylor de una función holomorfa, pueden tomar valores negativos).

Así, $U_{\{0\}} = \text{Spec}(\mathbb{C}[M]) \cong \mathbb{C}^* \times \dots \times \mathbb{C}^* = (\mathbb{C}^*)^n$ es un *toro* algebraico afín. Todos nuestros semigrupos S serán subsemigrupos de un reticulado M , de manera que $\mathbb{C}[S]$ será una subálgebra de $\mathbb{C}[M]$. En particular, $\mathbb{C}[S]$ será un dominio (i.e., lo mismo que un dominio integral, pero sin cumplir con la conmutatividad necesariamente).

Cuando se escoge una base de M de la manera que se hizo más arriba, es usual escribir los elementos de $\mathbb{C}[S]$ como polinomios de Laurent en las correspondientes variables X_i . Aprovechemos de notar que todas estas álgebras son generadas por *monomios* en las variables X_i .

El toro $T = T_N$ correspondiente a M o N puede escribirse intrínsecamente como $T_N = \text{Spec}(\mathbb{C}[M]) = \text{Hom}(M, \mathbb{C}^*) = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$

Para tener un ejemplo simple, consideremos σ el cono con generadores e_1, \dots, e_k , para algún k entero entre 1 y n (inclusive). Luego, tenemos que

$$S_\sigma = \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot e_1^* + \dots + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot e_n^*$$

Luego, $A_\sigma = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, X_{k+1}^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}]$ y $U_\sigma = \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \dots \times \mathbb{C}^* = \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^{n-k}$

Se sigue desde este ejemplo que, si σ es generado por k elementos que pueden completarse en una base para N , luego U_σ corresponde a un producto del k -espacio afín (i.e., el espacio afín de dimensión k) con el toro de dimensión $n + k$. En particular, dichas variedades tóricas afines son no-singulares.

Ahora, veamos un ejemplo singular. Sea N un reticulado de rango 3, y sea σ un cono generado por 4 vectores v_1, \dots, v_4 que satisfacen $v_1 + v_3 = v_2 + v_4$. La variedad U_σ es “un cono sobre una superficie cuádrica”, una variedad que se encuentra usualmente cuando se estudian singularidades.

Si tomamos $N = \mathbb{Z}^3$ y $v_i = e_i$ para $i = 1, 2, 3$, definiendo $v_4 = e_1 - e_3 - e_2$ de modo que se cumpla la relación estipulada tenemos que S_σ es generado por $e_1^*, e_3^*, e_1^* + e_2^*, e_2^* + e_3^*$, de manera que

$$A_\sigma = \mathbb{C}[X_1, X_3, X_1X_2, X_2X_3] = \mathbb{C}[W, X, Y, Z]/(WZ - XY)$$

Así, U_σ es la hipersuperficie definida por $WZ = XY$ en \mathbb{C}^4 .

Un homomorfismo de semigrupos $S \rightarrow S'$ determina un homomorfismo $\mathbb{C}[S] \rightarrow \mathbb{C}[S']$ de \mathbb{C} -álgebras, lo que explica el morfismo de variedades afines $\text{Spec}(\mathbb{C}[S']) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$. En particular, si τ está contenido en σ , luego S_σ es subsemigrupo de S_τ , correspondiente al morfismo $U_\tau \rightarrow U_\sigma$. Por ejemplo, el toro $T_N = U_{\{0\}}$ mapea a todas las variedades tóricas afines U_σ que vienen de conos σ en N .

Lema 3.23. *Si τ es una cara de σ , luego el mapeo $u_\tau \rightarrow U_\sigma$ incrusta U_τ en un subconjunto abierto principal de U_σ .*

Demostración. Por la 3.18, existe un $u \in S_\sigma$ con $\tau = \sigma \cap u^\perp$ y $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (-u)$.

Esto implica inmediatamente que cada elemento de la base para $\mathbb{C}[S_\tau]$ puede escribirse en la forma $\chi^{w-pu} = \chi^w/(\chi^u)^p$ para algún $w \in S_\sigma$. Luego, $A_\tau = (A_\sigma)_{\chi^u}$, que corresponde a la versión algebraica de la aseveración requerida.

Observación 3.24. Se puede demostrar que si $\tau \subseteq \sigma$ y el mapeo $U_\tau \rightarrow U_\sigma$ es una incrustación abierta, luego τ es una cara de σ ; esencialmente, el inverso del lema anterior.

Más generalmente, si $\varphi : N' \rightarrow N$ es un homomorfismo de retículos tal que $\varphi_{\mathbb{R}}$ mapea un cono (poliédrico fuertemente convexo y racional) σ' en N' a otro cono σ en N . Luego, el dual $\varphi^\vee : M \rightarrow M'$ mapea S_σ a $S_{\sigma'}$, determinando un homomorfismo $A_\sigma \rightarrow A_{\sigma'}$, y con ello un morfismo $U_{\sigma'} \rightarrow U_\sigma$.

Ejercicio 3.25. Mostrar que si $S \subseteq S' \subseteq M$ son subsemigrupos, el correspondiente mapeo $\text{Spec}(\mathbb{C}[S']) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$ es birracional si y sólo si S y S' generan el mismo subgrupo de M .

Los semigrupos S_σ que surgen desde conos son especiales a varios respectos. En primer lugar, se sigue de la definición que S_σ es *saturado*, i.e., si $p \cdot u$ está en S_σ para algún entero positivo p , luego u está en S_σ . Adicionalmente, el hecho de que σ sea fuertemente convexo implica que σ^\vee genera $M_{\mathbb{R}}$, de manera que S_σ genera M como un grupo, i.e., $M = S_\sigma + (-S_\sigma)$.

Observación 3.26. Se puede demostrar (conversamente) que cada subsemigrupo saturado finitamente generado de M que genera a M (en el sentido de teoría de grupos) tiene la forma $\sigma^\vee \cap M$ para un (único) cono poliédrico racional fuertemente convexo σ en N .

El siguiente ejercicio muestra que las variedades tóricas afines están definidas por ecuaciones monomiales.

Ejercicio 3.27. Si S_σ es generado por u_1, \dots, u_t , luego

$$A_\sigma = \mathbb{C}[\chi^{u_1}, \dots, \chi^{u_t}] = \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_t]/I$$

mostrar que I es generado por polinomios de la forma

$$Y_1^{a_1} \dots Y_t^{a_t} - Y_1^{b_1} \dots Y_t^{b_t}$$

donde $a_1, \dots, a_t, b_1, \dots, b_t$ son enteros no negativos que cumplen con la ecuación

$$a_1 u_1 + \dots + a_t u_t = b_1 u_1 + \dots + b_t u_t$$

Si σ es un cono en N , el toro T_N actúa en U_σ , donde su acción

$$T_N \times U_\sigma \longrightarrow U_\sigma$$

viene dada por la siguiente regla. Un punto $t \in T_N$ puede identificarse con un mapeo entre grupos $M \rightarrow \mathbb{C}^*$, y un punto $x \in U_\sigma$ con un mapeo entre semigrupos $S_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$. El producto $t \cdot x$ es el mapeo de semigrupos $S_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $u \mapsto t(u)x(u)$.

El mapa dual de álgebras $\mathbb{C}[S_\sigma] \rightarrow \mathbb{C}[S_\sigma] \otimes \mathbb{C}[M]$ viene dado por el mapeo de χ^u a $\chi^u \otimes \chi^u$ para $u \in S_\sigma$. Cuando $\sigma = \{0\}$, este corresponde al producto usual en el grupo algebraico T_N . Estos mapeos son compatibles con inclusiones de subconjuntos abiertos correspondientes a caras de σ . En particular, extienden la acción de T_N sobre sí mismo.

Ejercicio 3.28. Si σ es un cono en N y σ' es otro cono en N' , mostrar que $\sigma \times \sigma'$ es cono en $N \oplus N'$, y construir un isomorfismo canónico

$$U_{\sigma \times \sigma'} = U_\sigma \times U_{\sigma'}$$

3.3. **Abanicos y variedades tóricas.** Por abanico Δ en N entenderemos un conjunto de conos poliédricos fuertemente convexos y racionales σ en $N_{\mathbb{R}}$ tal que

1. Cada cara de un cono en Δ es también un cono en Δ .
2. La intersección de dos conos en Δ es una cara de cada uno.

Por simplicidad, y a menos que se diga lo contrario, asumimos que los abanicos son *finitos*, i.e., que consisten en un número finito de conos. Esto asegurará que nuestras variedades tóricas sean de tipo finito de forma global, y no sólo localmente de tipo finito.

De aquí en adelante, un cono en N , o simplemente un cono, se asumirá racional fuertemente convexo poliédrico, a menos que se diga lo contrario.

A partir de un abanico Δ , la variedad tórica $X(\Delta)$ se construye tomando la unión disjunta de las variedades tóricas afines U_{σ} , con σ en Δ , pegándolos de la siguiente manera: para conos arbitrarios σ y τ tenemos que su intersección $\sigma \cap \tau$ es cara de cada uno, de modo que $U_{\sigma \cap \tau}$ se identifica con alguna subvariedad abierta principal tanto de U_{σ} como de U_{τ} ; así, el pegado de U_{σ} con U_{τ} viene dado por esta identificación en dichas subvariedades abiertas. El hecho de que estas identificaciones son compatibles se deduce inmediatamente del hecho de que la correspondencia entre conos y variedades afines preserva el orden (de la inclusión). El hecho de que la variedad algebraica resultante es separada (o la variedad compleja es Hausdorff, o el "pre-esquemaresultante es un esquema, ...) se tiene a partir del siguiente

Lema 3.29. *Si σ y τ son conos que intersectan una cara común, luego el mapeo diagonal $U_{\sigma \cap \tau} \rightarrow U_{\sigma} \times U_{\tau}$ es una inscrustación cerrada.*

Demostración. Esto equivale a aseverar que el mapeo natural $A_{\sigma} \otimes A_{\tau} \rightarrow A_{\sigma \cap \tau}$ es sobreyectivo, lo cual se sigue del hecho que $S_{\sigma \cap \tau} = S_{\sigma} + S_{\tau}$, según vimos en la 3.20, que era, a su vez, consecuencia del Lema 3.19 para conos.

En particular, para cualesquiera dos conos σ y τ de Δ , tenemos la identidad $U_{\sigma} \cap U_{\tau} = U_{\sigma \cap \tau}$. Si σ es un cono en N , y Δ consiste en σ y todas sus caras, luego Δ es un abanico y $X(\Delta)$ es la variedad tórica afín U_{σ} . Es posible demostrar que estas son las únicas variedades tóricas que son afines.

Veamos algunos ejemplos elementales de variedades así construidas.

Si σ es el cono generado por e_1, \dots, e_n , luego S_{σ} es generado por la base dual, de modo que $\mathbb{C}[S_{\sigma}] = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, correspondiente al anillo afín del espacio afín $U_{\sigma} = \mathbb{C}^n$.

Para otro ejemplo, tomemos $n = 2$, y σ dado por e_2 y $2e_1 - e_2$.

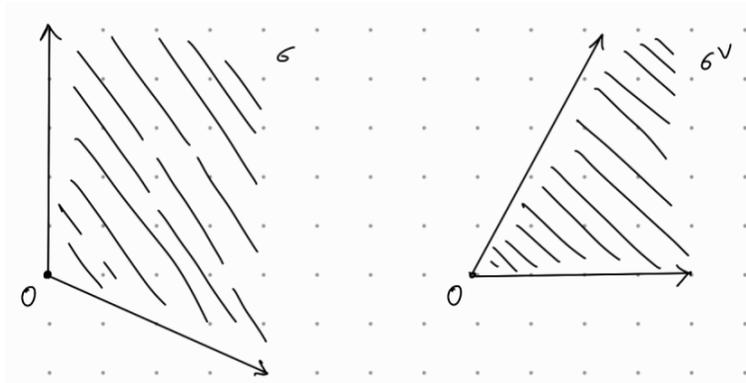


Figura 2.

Así, los generadores del semigrupo para S_{σ} son $e_1^*, e_1^* + e_2^*, e_1^* + 2e_2^*$, de modo que

$$\mathbb{C}[S_{\sigma}] = \mathbb{C}[X, XY, XY^2] = \mathbb{C}[U, V, W]/(V^2 - UW)$$

de modo que U_{σ} es un cono *cuádrico*, i.e., un cono sobre una cónica

Ahora, veamos un par de ejemplos (elementales) que no son afines.

Para $n = 1$, el único ejemplo no-afín (es ejercicio el convencerse) viene dado por el abanico dado por los conos $\mathbb{R}_{\geq 0}, \{0\}$ y $\mathbb{R}_{\leq 0}$,

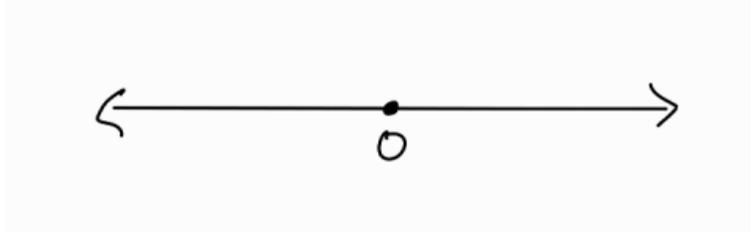


Figura 3.

que se corresponden con las variedades tóricas afines \mathbb{C} , \mathbb{C}^* y \mathbb{C} , respectivamente, con lo que la variedad tórica del abanico se construye desde el pegado

$$\mathbb{C}[X^{-1}] \hookrightarrow \mathbb{C}[X, X^{-1}] \hookrightarrow \mathbb{C}[X]$$

o sea

$$\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^* \hookrightarrow \mathbb{C}$$

Consideremos ahora, para $n = 2$, el abanico de la imagen.

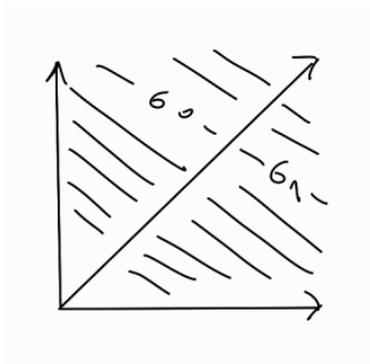


Figura 4.

Esta vez, $U_{\sigma_0} = \text{Spec}(\mathbb{C}[X, X^{-1}Y]) = \mathbb{C}^2$ y $U_{\sigma_1} = \text{Spec}(\mathbb{C}[Y, XY^{-1}]) = \mathbb{C}^2$. La variedad tórica resultante es el blow-up de \mathbb{C}^2 en el origen, para ver lo cual construimos el blow-up como la subvariedad de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$ definida por la ecuación $XT_1 = YT_0$, con T_0 y T_1 coordenadas homogéneas en \mathbb{P}^1 . Si definimos las variedades U_0 (resp. U_1) como el lugar donde T_0 (resp. T_1) es distinta de 0, luego ambas conforman un cubrimiento abierto de la variedad anterior, siendo cada una isomorfa a \mathbb{C}^2 ; en U_0 las coordenadas son X y $T_1/T_0 = X^{-1}Y$, mientras que en U_1 son Y y $T_0/T_1 = XY^{-1}$, lo cual coincide con la construcción anterior.

Ahora, consideremos el abanico

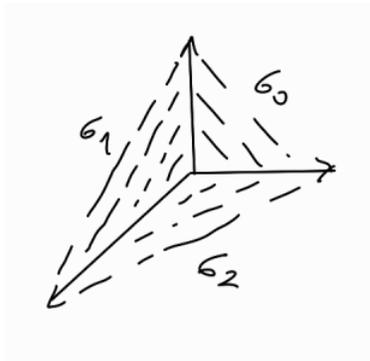


Figura 5.

cuyos conos duales en $M = \mathbb{Z}^2$ son

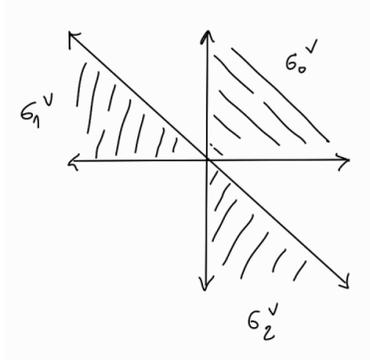


Figura 6.

Cada U_{σ_i} es isomorfo a \mathbb{C}^2 , con coordenadas (X, Y) para σ_0 , $(X^{-1}, X^{-1}Y)$ por σ_1 y (Y^{-1}, XY^{-1}) por σ_2 . Estas variedades se pegan para formar el plano proyectivo \mathbb{P}^2 de la manera usual: si $(T_0 : T_1 : T_2)$ son las coordenadas homogéneas de \mathbb{P}^2 , luego $X = T_1/T_0$ y $Y = T_2/T_0$.

Para un ejemplo más interesante, consideremos un abanico como el que aparece dibujado abajo, donde la flecha oblicua pasa por el punto $(-1, a)$, para algún entero positivo a .

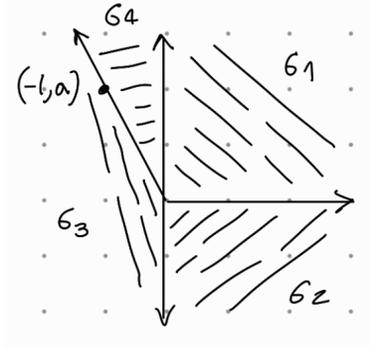


Figura 7.

Las cuatro variedades afines son $U_{\sigma_1} = \text{Spec}(\mathbb{C}[X, Y])$, $U_{\sigma_2} = \text{Spec}(\mathbb{C}[X, Y^{-1}])$, $U_{\sigma_3} = \text{Spec}(\mathbb{C}[X^{-1}, X^{-a}Y^{-1}])$ y $U_{\sigma_4} = \text{Spec}(\mathbb{C}[X^{-1}, X^aY])$, entre las cuales tenemos el pegado dado

- Entre U_{σ_1} y U_{σ_2} , por $(x, y) \longleftrightarrow (x, y^{-1})$
- Entre U_{σ_2} y U_{σ_3} , por $(x, y^{-1}) \longleftrightarrow (x^{-1}, x^{-a}y^{-1})$
- Entre U_{σ_3} y U_{σ_4} , por $(x^{-1}, x^{-a}y^{-1}) \longleftrightarrow (x^{-1}, x^ay)$
- Entre U_{σ_4} y U_{σ_1} , por $(x^{-1}, x^ay) \longleftrightarrow (x, y)$

respectivamente, en cada caso. Dicho pegado se proyecta en $x^{-1} \longleftrightarrow x$ de \mathbb{C} en sí mismo. Así, las variedades U_{σ_1} y U_{σ_2} (resp. U_{σ_3} y U_{σ_4}) se pegan en la variedad $\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$, de modo que en definitiva tenemos un \mathbb{P}^1 -fibrado sobre \mathbb{P}^1 .

Estas superficies regladas racionales son a veces denotadas \mathbb{F}_a , y denominadas *superficies de Hirzebruch*. Trabajemos todavía algunos ejemplos elementales más. Para algunos ejemplos simples de dimensión 2, dibujamos algunos abanicos en $N = \mathbb{Z}^2$.

Para el abanico

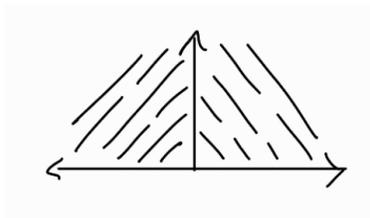


Figura 8.

tomamos dos copias de \mathbb{C}^2 , correspondientes a las álgebras $\mathbb{C}[X, Y]$ y $\mathbb{C}[X^{-1}, Y]$. El pegado de ambas corresponde a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}$.

Similarmente, para el abanico

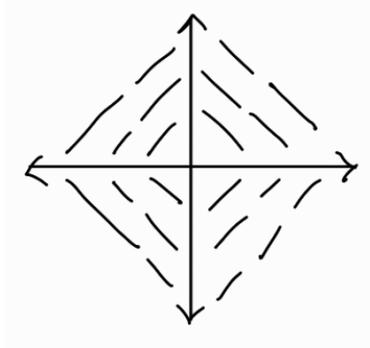


Figura 9.

tomamos cuatro copias de \mathbb{C}^2 para luego, al pegarlas, obtener $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Los dos ejemplos anteriores son casos especiales del siguiente hecho general.

Hecho 3.30. Si Δ es un abanico en N , y Δ' es un abanico en N' , es posible mostrar que el conjunto de productos de la forma $\sigma \times \sigma'$ con $\sigma \in \Delta$ y $\sigma' \in \Delta'$ forma un abanico $\Delta \times \Delta'$ en $N \otimes N'$, y que $X(\Delta \times \Delta') = X(\Delta) \times X(\Delta')$.

La generalización de la construcción de \mathbb{P} corresponde a

Ejercicio 3.31. Considerar vectores v_0, \dots, v_n que generan un reticulado N de rango n , con $v_0 + \dots + v_n = 0$. Sea Δ un abanico cuyos conos son generados por cualquier subconjunto propio de los vectores v_0, \dots, v_n . Construir un isomorfismo de $X(\Delta)$ con el espacio proyectivo \mathbb{P}^n .

([Idea de] Demostración.) Los vectores v_1, \dots, v_n en el ejercicio previo pueden tomarse como la base estándar e_1, \dots, e_n para $N = \mathbb{Z}^n$ con $v_0 = -(e_1 + \dots + e_n)$, lo cual corresponde a construir \mathbb{P}^n como la clausura de \mathbb{C}^n . Una descripción más simétrica de \mathbb{P}^n puede darse considerando N como el reticulado $\mathbb{Z}^{n+1}/\mathbb{Z} \cdot (1, 1, \dots, 1)$ con v_i la imagen del i -ésimo vector, donde $0 \leq i \leq n$. Con esta descripción, $T_N = (\mathbb{C}^*)^{n+1}/\mathbb{C}^*$ está naturalmente incrustada en $(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^* = \mathbb{P}^n$.

Ejercicio 3.32. Encuentre las variedades tóricas correspondientes a los siguientes 3 abanicos en \mathbb{Z}^2 .

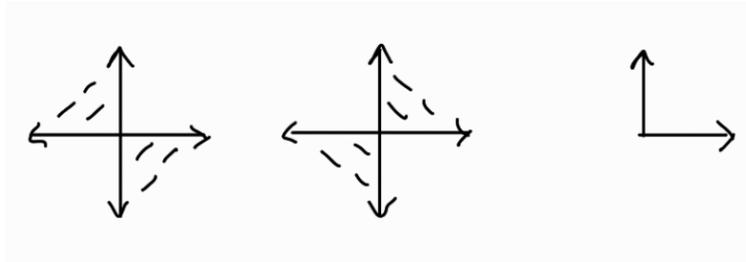


Figura 10.

Suponga $\varphi : N' \rightarrow N$ es un homomorfismo de reticulados, y Δ (resp. Δ') es un abanico en N (resp. N') que satisfacen que para todo cono σ' en Δ' existe algún cono σ en Δ tal que $\varphi(\sigma') \subseteq \sigma$.

Como vimos en la sección anterior, esto determina un morfismo $U_{\sigma'} \rightarrow U_{\sigma} \subseteq X(\Delta)$. Es fácil ver que este morfismo, considerado como de $U_{\sigma'}$ a $X(\Delta)$, es independiente del σ que se esté considerando, y que estos morfismos se pegan para originar un morfismo $\varphi_* : X(\Delta') \rightarrow X(\Delta)$.

Ya anteriormente construimos la superficie de Hirzebruch \mathbb{F}_a como una variedad tórica. La proyección $\mathbb{F}_a \rightarrow \mathbb{P}^1$ está determinada por la proyección $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ que lleva (x, y) en x . (Note que la segunda proyección no satisface la condición requerida si $a \neq 0$).

Ejercicio 3.33. Mostrar que para cada entero m el mapeo $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$ dado por $z \mapsto (z, mz)$ determina un sección $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{F}_a$ de esta proyección.

Las acciones del toro T_N en las variedades U_σ descritas en la sección anterior son compatibles con los isomorfismos de pegado, dada una acción de T_N en $X(\Delta)$. Esto extiende el producto en T_N

$$\begin{array}{ccc} T_N \times X(\Delta) & \rightarrow & X(\Delta) \\ \parallel & \uparrow & \uparrow \\ T_N \times T_N & \rightarrow & T_N \end{array}$$

La afirmación inversa también es cierta, i.e., toda variedad (separada y normal) X que contenga un toro T_N como una subvariedad abierta densa, con una acción compatible como la de más arriba, puede obtenerse como la variedad tórica $X(\Delta)$ de algún abanico Δ en N . (Esto se asumirá sin demostración).

Notemos que, a pesar de que venimos (y seguiremos) tratando con variedades tóricas *complejas*, no existe impedimento para llevar adelante las mismas construcciones sobre otro cuerpo (o, incluso, anillo) de escalares.

3.4. Variedades tóricas a partir de polítopos. Primero, necesitaremos algunas definiciones.

Definición 3.34. Un *polítopo convexo* K en un espacio vectorial E de dimensión finita es la *envolvente convexa* de (i.e., la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen) un determinado conjunto finito de puntos. Una *cara* (propia) F de dicho K corresponde a la intersección con algún hiperplano afín de soporte, i.e., $F = \{v \in K : \langle u, v \rangle = r\}$, donde $u \in E^*$ es una función $\langle u, v \rangle \geq r$ para todo $v \in K$. (K usualmente es incluido como una cara *impropia*).

Asumimos por simplicidad que K es una cara de dimensión $n - 1$. Los resultados de la subsección 3.1 (Conos Poliedrales Convexos) pueden ser usados para deducir los hechos básicos correspondientes sobre caras de polítopos convexos. Para esto, sea σ el cono sobre $K \times 1$ en el espacio vectorial $E \times \mathbb{R}$. Es fácil notar que las caras de σ corresponden, precisamente, a los conos sobre las caras de K (con el cono $\{0\}$ correspondiendo a la cara vacía de K). De aquí se sigue que las caras satisfacen propiedades análogas a las que aparecen en dicha subsección desde 3,6 a 3,12.

Respecto a la teoría de dualidad de polítopos, el *conjunto polar* (o, simplemente, *polar*) de K es definido como el conjunto

$$K^0 := \{u \in E^* : \langle u, v \rangle \geq -1, \quad \forall v \in K\}$$

(Usualmente, $\{u \in E^* : \langle u, v \rangle \leq 1, \quad \forall v \in K\} = -K^0$ es considerado como el conjunto polar, pero esto no cambia los resultados que presentaremos).

Por ejemplo, el conjunto polar del octaedro en \mathbb{R}^3 con vértices en los puntos $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ y $(0, 0, \pm 1)$ es el cubo de vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

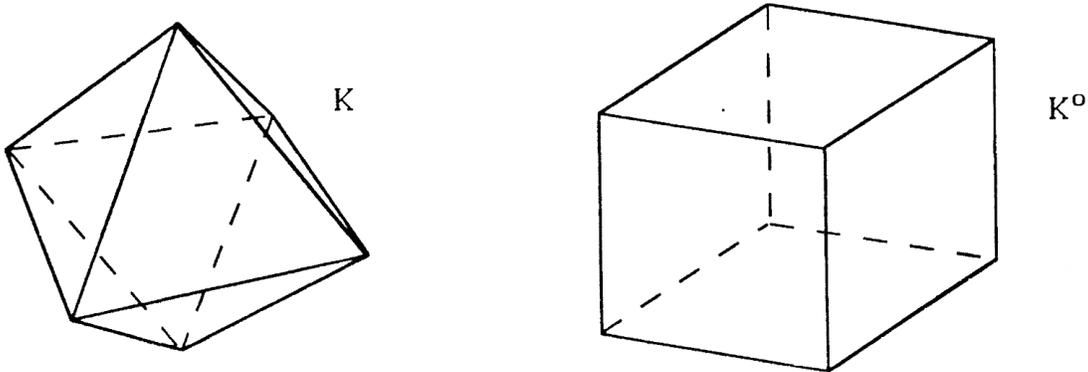


Figura 11.

Proposición 3.35. El conjunto polar K^0 es un polítopo convexo, y K es el polar de K^0 . Si F es una cara de K , luego

$$F^* = \{u \in K^0 : \langle u, v \rangle = -1, \quad \forall v \in F\}$$

es una cara de K^0 y $F \mapsto F^*$ es una correspondencia inyectiva entre las caras de F y las de F^* que invierte el orden de contención, con dimensión $\dim(F) + \dim(F^*) = \dim(E) - 1$. Si K es racional, i.e., si sus vértices se encuentran en un reticulado de E , luego K^0 es también racional, con sus vértices en el reticulado dual.

Demostración. Con σ el cono sobre $K \times 1$, el cono dual σ^\vee consiste en aquellos $u \times r$ en $E^* \times \mathbb{R}$ tales que $\langle u, v \rangle + r \geq 0$ para todo $v \in K$. Se sigue que σ^\vee es el cono sobre $K^0 \times 1$ en $E^* \times \mathbb{R}$. Las afirmaciones de la proposición se deducen ahora fácilmente de los resultados en la subsección 3,1 para los conos.

Por ejemplo, la dualidad $(K^0)^0 = K$ se sigue de la dualidad $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$. Para una cara F de K , si τ es el cono sobre $F \times 1$, luego el dual $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$ es el cono sobre $F^* \times 1$, de donde se tiene la dualidad entre las caras de K y K^0 .

Ejercicio 3.36. Sea K un *poliedro convexo* en E , i.e.,

$$K = \{v \in E : \langle u_1, v \rangle \geq -a_1, \dots, \langle u_r, v \rangle \geq -a_r\}$$

para algunos $u_1, \dots, u_r \in E^*$ y números reales a_1, \dots, a_r . Mostrar que K es acotado si y sólo si es la envoltura convexa de un conjunto finito.

Un politopo convexo racional K en $N_{\mathbb{R}}$ define un abanico Δ cuyos conos son los conos sobre las caras propias de K . Dado que asumimos que K contiene el origen en su interior, la unión de los conos en Δ corresponderá a todo $N_{\mathbb{R}}$. Todos los abanicos que hemos visto hasta ahora cuyos conos cubren $N_{\mathbb{R}}$ tienen esta forma.

En general, si K' es una subdivisión de la frontera de K , i.e., K' es una colección de politopos convexos cuya unión es la frontera de K y la intersección de cualesquiera dos politopos en K' forma un abanico. He aquí algunos ejemplos:

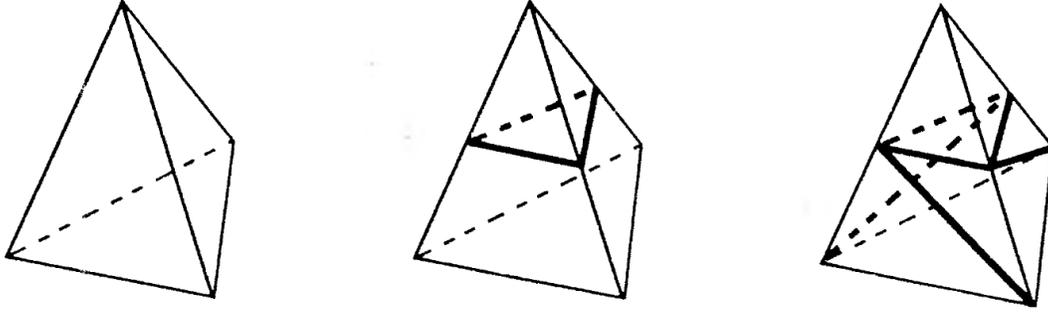


Figura 12.

Nótese que la segunda puede "desdoblarse" de modo que su cono corresponde a al cono sobre un politopo convexo, pero no así con la tercera.

Existen muchos tipos de abanicos, sin embargo, que no surgen de politopo convexo alguno, como sea que se les subdivide. Para ver un ejemplo, partamos con el abanico sobre las caras del cubo de vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ en \mathbb{Z}^3 . Sea Δ un abanico con conos generados por el mismo conjunto de generadores, excepto que el vértice $(1,1,1)$ se reemplaza por $(1,2,3)$. Es imposible encontrar 8 puntos, uno en cada uno de los 8 rayos positivos que atraviesan cada vértice, tal que para cada uno de los 6 conos generados por 4 de dichos vértices, los correspondientes 4 puntos yacen en el mismo plano afín.

Ejercicio 3.37. Suponga que por cada uno de los 8 vértices v existe un número real r_v , y que por cada uno de los 6 conos σ dados por 4 vértices existe un vector u_σ en $M_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3$ tal que $\langle u_\sigma, v \rangle = r_v$ siempre que v sea uno de los 4 vértices del cono σ . Mostrar que existe un vector u en $M_{\mathbb{R}}$ tal que $\langle u, v \rangle = r_v$ para cada v . En particular, los puntos $p_v = (1/r_v) \cdot v$ no pueden tener cada cuádruplo correspondiente a un cono en un plano a menos que todos los 8 puntos sean coplanares.

Una construcción particularmente importante de las variedades tóricas empieza con un politopo racional P en el espacio dual $M_{\mathbb{R}}$. Asumimos que P es de dimensión n pero no es necesario que contenga el origen.

A partir de P , se construye un abanico Δ_P de la manera que sigue. Existe un cono σ de Δ_P por cada cara Q de P , definido por

$$\sigma_Q = \{v \in N_{\mathbb{R}} : \langle u, v \rangle \leq \langle u', v \rangle, \quad \forall u \in Q, \quad \forall u' \in P\}$$

En otras palabras, σ_Q es el dual de la "esquina" en Q consistente en todos los vectores apuntando desde puntos de Q hacia puntos de P . Este cono dual σ_Q^\vee es generado por vectores $u' - u$ donde u y u' se mueven entre vértices de Q y P , respectivamente. No es difícil verificar directamente que estos conos forman un abanico. Es más elucidador, sin embargo, construir el abanico como uno sobre un "politopo dual" en $N_{\mathbb{R}}$.

Proposición 3.38. Los conos σ_Q , donde Q se mueve en el conjunto de las caras de P , forman un abanico Δ_P . Si P contiene el origen como un punto interior, luego Δ_P consiste de conos sobre las caras del politopo polar P^0 .

Demostración. Si el origen es un punto interior, de la definición se tiene inmediatamente que σ_Q es el cono sobre la cara dual Q^* de P^0 , y la segunda afirmación se tiene consecuentemente. Se sigue de la definición que Δ_P no cambia cuando P es trasladado por algún elemento u de M , o cuando P es multiplicado por un entero positivo m : $\Delta_{mP+u} = \Delta_P$. Dado que cualquier P que genere $M_{\mathbb{R}}$ puede cambiarse por uno que contenga el origen como un punto interior por medio de tales traslación y expansión, se tiene la primera afirmación.

Conversamente, por la dualidad de los politopos se sigue que, para un politopo convexo racional K en $N_{\mathbb{R}}$ (que contenga al origen en su interior) el abanico de conos sobre las caras de K es el mismo que Δ_P , donde $P = K^0$ es su politopo polar. La variedad tórica $X(\Delta_P)$ será a veces denotada X_P . Veamos algunos ejemplos.

- (1) Si P es el símplex en \mathbb{R}^n con vértices en el origen y los puntos e_1, \dots, e_n , luego Δ_P es el abanico usado para construir \mathbb{P}^n como una variedad tórica $X(\Delta_P) \cong \mathbb{P}^n$
- (2) Si P es el cubo en \mathbb{R}^3 con vértices en $\pm e_1^* \pm e_2^* \pm e_3^*$, luego Δ_P es el abanico sobre las caras del octaedro de vértices $\pm e_i$ y $X(\Delta_P) = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.
- (3) Sea P el octaedro en \mathbb{R}^3 con vértices en los puntos $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ y $(0, 0, \pm 1)$, de manera que el abanico Δ_P es el abanico sobre las caras del cubo con vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Si tomamos como N el reticulado de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tal que $x \equiv y \equiv z \pmod{2}$, luego cualesquiera 3 de los 4 vértices en cualquier cara σ del cubo genera $N\sigma$ y las sumas de vértices opuestos de σ son iguales. Cada una de las 6 subvariedades abiertas correspondientes U_σ tiene un punto singular isomorfo al cono sobre la superficie cuádrica descrito en la **Figura 2**.

REFERENCIAS

- [Ful93] William Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Princeton University Press, 1993.
- [Cox11] David Cox, *Snapshots from the History of Toric Geometry*, <https://wis.kuleuven.be/events/archive/toric2011/slides/Cox.pdf>, 2011.
- [Mon23] Pedro Montero, *Apunte MAT426 (versión 2023)*, https://pmontero.mat.utfsm.cl/pdf_mat426/Apunte_MAT426.pdf, 2023.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA, VALPARAÍSO, CHILE.
Email address: `nolberto.rivera@usm.cl`