UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

Aspectos Admissíveis em Grupos Topológicos

GABRIEL PEREIRA BOTH

Orientador: Josiney Alves de Souza

Maringá - PR

2016

Este trabalho contou com o apoio financeiro do CNPq

Aspectos Admissíveis em Grupos Topológicos

GABRIEL PEREIRA BOTH

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Geometria e Topologia

Orientador: Prof. Dr. Josiney Alves de Souza

Maringá - PR

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Both, Gabriel Pereira
B749a Aspectos admissíveis em grupos topológicos / Gabriel Pereira Both. -- Maringá, 2016.
69 f. : il.

Orientador: Prof°. Dr°. Josiney Alves de Souza.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia, 2016.

1. Espaço uniforme. 2. Espaço admissível. 3. Grupos topológicos. 4. Uniform spaces. 5. Admissible spaces. 6. Topological groups. I. Souza, Josiney Alves de, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia. III. Título.

CDD 22.ed. 514.3202

GABRIEL PEREIRA BOTH

ASPECTOS ADMISSÍVEIS EM GRUPOS TOPOLÓGICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Josiney Alves de Souza
Prof. Dr. Josiney Alves de Souza
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Prof. Dr. Hélio Vinicius Moreno Tozatti
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campo Mourão

Marcos A. Verdi
Prof. Dr. Marcos André Verdi
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em 26 de fevereiro de 2016.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho à meu pai

Reinhold Aloys Both

Agradecimentos

Agradeço a minha família, que sempre me apoiou. Em especial a minha irmã Heloísa e minha prima Marília pelas inúmeras palavras de incentivo.

Agradeço a meu orientador Prof. Dr. Josiney Alves de Souza pela paciência, compreensão e dedicação na realização deste trabalho.

Aos meus amigos Júlio César e Laís, e aos colegas do Departamento de Matemática da UEM.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho abordaremos duas construções clássicas de estruturas uniformes sobre um conjunto. Veremos que estas estruturas nos possibilitam definirmos conceitos como continuidade uniforme sem fazer uso de uma métrica. Mostraremos como os espaços uniformes se relacionam com os espaços topológicos admissíveis, faremos uso da estrutura admissível para introduzirmos o conceito de função lipschitziana e construiremos um sistema sobre o espaço que visa se aproximar de uma métrica. Além disso, faremos um estudo sobre grupos topológicos onde destacaremos suas relações com os espaços topológicos admissíveis.

Palavras-chave: espaços uniformes, espaços admissíveis, grupos topológicos.

Abstract

In this work we will approach two classical constructions of uniform structures on a set. We will see that these structures allow us to define concepts like uniform continuity without use a metric. We will show how uniform spaces are related with admissible topological spaces, we will make use of the admissible structure to introduce the concept of lipschitz functions and we will construct a system over the set which try to approach of a metric. Moreover, we will make a study over topological groups where we will highlight their relation with the admissible topological spaces.

Key-words: uniform spaces, admissible spaces, topological groups.

Sumário

Introdução

Em diversas áreas de alto nível como análise funcional e sistemas dinâmicos, muitos dos objetos mais importantes representam uma mistura de estruturas algébricas e topológicas. Talvez o conceito mais natural que faça ligação entre essas duas áreas seja o de grupos topológicos. As ideias por trás do conceito de grupos topológicos tem suas raízes em 1888-1893 nos trabalhos de S. Lie, que considerou grupos definidos por relações analíticas. A noção geral de grupos topológicos foi introduzida nos anos de 1925 e 1927 nos trabalhos *Abstrakte kontinuerliche Gruppen* de O. Schreier e *Sur la notion du groupe abstrait topologique* de F. Leja. Em 1937 no trabalho *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale* A. Weil introduz a teoria de espaços uniformes onde além de dar noções que não fazem uso de métricas dos conceitos de continuidade uniforme, completude e convergência uniforme trata da teoria de grupos topológicos da perspectiva da teoria de espaços uniformes.

No primeiro capítulo desta dissertação serão apresentadas duas abordagens clássicas da estrutura uniforme, uma via a família de vizinhanças diagonais e a outra via uma família de coberturas uniformes. Veremos que a estrutura uniforme pode ser usada para definir uma topologia sobre o conjunto e também para definirmos o conceito de continuidade uniforme.

Diremos que um espaço topológico é admissível se ele puder ser munido de uma família admissível de coberturas abertas. A noção de tal família foi introduzida em [6] no intuito de desenvolver a teoria de transitividade de cadeias para semifluxos. Um importante resultado provado em [10] diz que espaços uniformizáveis são espaços admissíveis, a recíproca de tal resultado, um problema em aberto até 2014, foi provada em [1]. Assim como nos espaços uniformes, podemos fazer uso da família admissível para definirmos continuidade uniforme e outros conceitos definidos para espaços métricos.

No segundo capítulo faremos um estudo sobre a família admissível de coberturas abertas.

Mostraremos como se relaciona com a topologia do espaço e introduziremos o conceito de funções lipschitzianas. Na última seção do capítulo construiremos sobre o espaço admissível um sistema que tenta se assemelhar ao papel de uma métrica em espaços métricos.

No último capítulo abordaremos os grupos topológicos. Estudaremos algumas relações entre suas propriedades topológicas e algébricas, e veremos como relacioná-los com os espaços admissíveis e, consequentemente, com os espaços uniformes.

Capítulo 1

Espaços Uniformes

Diferentemente de estruturas topológicas mais gerais, espaços topológicos uniformizáveis e estrutura uniforme, nos permite definir conceitos de continuidade uniforme e de proximidade entre pontos. Neste capítulo, abordaremos a construção de duas estruturas uniformes em um conjunto X.

1.1 Estrutura uniforme via família de vizinhanças diagonais

Antes de definirmos um Espaço Uniforme precisamos de alguns conceitos iniciais.

Definição 1.1.1. *Seja X um conjunto não vazio. Para $U, V \subseteq X \times X$ e $x \in X$ definimos*

1. $V^{-1} = \{(x, y) \in X \times X; (y, x) \in V\}$;
2. $U \circ V = \{(x, y) \in X \times X; \exists z \in X \text{ tal que } (x, z) \in U \text{ e } (z, y) \in V\}$;
3. $V[x] = \{y \in X; (x, y) \in V\}$, *que é chamada* **$V$-vizinhança de** x;
4. $\Delta = \{(x, x); x \in X\}$, *que é chamada de* **diagonal de** X.

Agora definiremos Espaço Uniforme.

Definição 1.1.2. *Um* **espaço uniforme** *é um par $(X, \mathcal{D})$ formado por um conjunto X e uma família $\mathcal{D}$ de subconjuntos de $X \times X$ chamada* **uniformidade diagonal** *(ou* **estrutura uniforme***, ou* **uniformidade***), cujos elementos são chamados* **vizinhanças diagonais***, e que satisfaz:*

1. *$D \in \mathcal{D} \Rightarrow \Delta \subset D$;*

2. *$D_1, D_2 \in \mathcal{D} \Rightarrow D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}$;*

3. *$D \in \mathcal{D} \Rightarrow E \circ E \subset D$ para algum $E \in \mathcal{D}$;*

4. *$D \in \mathcal{D} \Rightarrow E^{-1} \subset D$ para algum $E \in \mathcal{D}$;*

5. *$D \subset E$, $D \in \mathcal{D} \Rightarrow E \in \mathcal{D}$.*

Fazendo uso da estrutura de $\mathcal{D}$ podemos ter uma noção de distância entre $x, y \in X$ ao dizermos que x está D próximo de y se existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $(x, y) \in D$.

Observe que pelos itens (4) e (5) temos que se $D \in \mathcal{D}$, então $D^{-1} \in \mathcal{D}$. E também que (3) e (4) são equivalentes a: se $D \in \mathcal{D}$, então $E \circ E^{-1} \subset D$ para algum $E \in \mathcal{D}$. De fato, se (3) e (4) valem, tome $D \in \mathcal{D}$ e $E_1, E_2 \in \mathcal{D}$ tais que $E_1 \circ E_1 \subset D$ e $E_2^{-1} \subset E_1$. Dessa forma, fazendo $E = E_1 \cap E_2$, tem-se que $E \circ E^{-1} \subset D$. Por outro lado, seja $D \in \mathcal{D}$ e $E \in \mathcal{D}$ tal que $E \circ E^{-1} \in D$. Logo, $E^{-1} \subset D$ e fazendo $F = E \cap E^{-1}$ temos que $F \in \mathcal{D}$ e $F \circ F \in D$. Portanto, valem (3) e (4).

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.1.3. Dado qualquer conjunto X, a coleção $\mathcal{D}$ que consiste apenas do conjunto $X \times X$ é uma uniformidade diagonal em X chamada **uniformidade trivial**

Exemplo 1.1.4. Dado qualquer conjunto X, a coleção $\mathcal{D}$ de todos os subconjuntos de $X \times X$ que contém Δ é uma uniformidade diagonal em X chamada **uniformidade discreta**.

1.2 Base para uma uniformidade diagonal

Definição 1.2.1. *Uma* **base para uma uniformidade diagonal** *$\mathcal{D}$ é qualquer sub-coleção $\mathcal{E}$ de $\mathcal{D}$ tal que cada $D \in \mathcal{D}$ contém algum $E \in \mathcal{E}$.*

Proposição 1.2.2. *Uma coleção $\mathcal{E}$ de subconjuntos de $X \times X$ é base para uma uniformidade diagonal se, e somente se,*

1. *$E \in \mathcal{E} \Rightarrow \Delta \subset E$;*

2. $E_1, E_2 \in \mathcal{E} \Rightarrow E_3 \subset E_1 \cap E_2$ *para algum* $E_3 \in \mathcal{E}$*;*

3. $E \in \mathcal{E} \Rightarrow F \circ F \subset E$ *para algum* $F \in \mathcal{E}$*;*

4. $E \in \mathcal{E} \Rightarrow F^{-1} \subset E$ *para algum* $F \in \mathcal{E}$*.*

Demonstração: Suponha que $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ é base para uma uniformidade diagonal $\mathcal{D}$. Pela propriedade 1 da Definição 1.1.2 temos que 1 é válida.

Agora, sejam $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$. Pela propriedade 2 da Definição 1.1.2, $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{D}$ e como $\mathcal{E}$ é base existe $E_3 \in \mathcal{E}$ tal que $E_3 \subset E_1 \cap E_2$.

Se $E \in \mathcal{E}$, pela propriedade 3 da Definição 1.1.2 existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $D \circ D \subset E$. Já que $\mathcal{E}$ é base, existe $F \in \mathcal{E}$ tal que $F \subset D$. Assim, $F \circ F \subset D \subset D \circ D \subset E$.

Da mesma forma, se $E \in \mathcal{E}$, existe pela propriedade 4 da Definição 1.1.2 $D \in \mathcal{D}$ tal que $D^{-1} \subset E$ e, como $\mathcal{E}$ é base, existe $F \in \mathcal{E}$ tal que $F \subset D$. Assim, $F^{-1} \subset D^{-1} \subset E$.

Suponha agora que $\mathcal{E}$ é uma coleção de subconjuntos de $X \times X$ satisfazendo as propriedades de 1 a 4. Defina $\mathcal{D} = \{D \subset X \times X; E \subset D \text{ para algum } E \in \mathcal{E}\}$. Então $\mathcal{D}$ é uma uniformidade diagonal que tem $\mathcal{E}$ como base. De fato, verifiquemos que $\mathcal{D}$ satisfaz as propriedades da Definição 1.1.2.

Se $D \in \mathcal{D}$, existe $E \in \mathcal{E}$ tal que $E \subset D$ e por hipótese $\Delta \subset E$. Logo, $\Delta \subset D$.

Sejam $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$, então existem $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ tais que $E_1 \subset D_1$ e $E_2 \subset D_2$. Dessa forma, $E_1 \cap E_2 \subset D_1 \cap D_2$. Mas por hipótese, existe $E_3 \in \mathcal{E}$ tal que $E_3 \subset E_1 \cap E_2$. Assim, $E_3 \subset D_1 \cap D_2$, donde $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}$.

Para $D \in \mathcal{D}$, existe $F \in \mathcal{E}$ tal que $F \subset D$, mas por hipótese existe $E \in \mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ tal que $E \circ E \subset F$. Logo, $E \circ E \subset D$.

Da mesma forma, se $D \in \mathcal{D}$ existe $F \in \mathcal{E}$ tal que $F \subset D$. Por hipótese, existe $E \in \mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ tal que $E^{-1} \subset F$. Logo, $E^{-1} \subset D$.

Agora, seja $D \in \mathcal{D}$ tal que $D \subset E$ para alguma $E \subset X \times X$. Então existe $F \in \mathcal{E}$ tal que $F \subset D$, logo $F \subset E$ e, assim, $E \in \mathcal{D}$.

Portanto, $\mathcal{D}$ é uma uniformidade diagonal para X. □

Definição 1.2.3. *Uma* **sub-base para uma uniformidade diagonal** $\mathcal{D}$ *é uma sub-coleção* $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ *onde o conjunto formado por todas interseções finitas de seus elementos forma uma base para* $\mathcal{D}$.

Vejamos alguns exemplos de bases para uma uniformidade diagonal.

Exemplo 1.2.4. Para qualquer espaço uniforme $(X, \mathcal{D})$, a coleção formada pelos elementos simétricos de $\mathcal{D}$, $Sym(\mathcal{D}) = \{D \in \mathcal{D}\ ; D = D^{-1}\}$, é uma base para $\mathcal{D}$.

De fato, se $D \in \mathcal{D}$, temos que $D^{-1} \in \mathcal{D}$, mas repare que $E = D \cap D^{-1} \in Sym(\mathcal{D})$ e é tal que $E \subset D$.

Exemplo 1.2.5. Para cada $a \in \mathbb{R}$ defina $D_a = \Delta \cup \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x > a \text{ e } y > a\}$. Então $\mathcal{E} = \{D_a; a \in \mathbb{R}\}$ é base para uma uniformidade em $\mathbb{R}$. De fato,

1. Claramente $\Delta \subset D_a$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
2. Sejam $D_a, D_b \in \mathcal{E}$. Se $b \leq a$, então $D_a \cap D_b = D_a$. Se $a \leq b$, então $D_a \cap D_b = D_b$. Assim, tomando $c = \text{ máx } \{a, b\}$, tem-se $D_c \subset D_a \cap D_b$.
3. Basta observar que $D_a \circ D_a \subset D_a$, pois se $(x, y) \in D_a \circ D_a$, existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $(x, z) \in D_a$ e $(z, y) \in D_a$. Assim, $x, z > a$, $y, z > a$ e, portanto, $(x, y) \in D_a$.
4. Note que $D_a^{-1} = D_a$. Logo, se $D_a \in \mathcal{E}$, então $D_a^{-1} \subset D_a$.

Portanto, pela proposição anterior $\mathcal{E}$ é base para uma uniformidade diagonal em $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.2.6. Seja d uma métrica em um conjunto M. A coleção $\mathcal{E} = \{D^d_\epsilon; \epsilon > 0\}$, onde $D^d_\epsilon = \{(x, y) \in M \times M; d(x, y) < \epsilon\}$, é uma base para uma uniformidade diagonal.

Com efeito,

1. Para todo $\epsilon > 0$, $\Delta \subset D^d_\epsilon$.
2. Se $D^d_\epsilon, D^d_\delta \in \mathcal{E}$, temos que, para $\lambda = \min\{\epsilon, \delta\}$, $D^d_\lambda \in \mathcal{E}$ e $D^d_\lambda \subset D^d_\epsilon \cap D^d_\delta$.
3. Considere $D^d_\epsilon \in \mathcal{E}$. Para $\delta = \frac{\epsilon}{2} > 0$ tem-se que $D^d_\delta \in \mathcal{E}$ e $D^d_\delta \circ D^d_\delta \subset D^d_\epsilon$.

4. Para $D^d_\epsilon \in \mathcal{E}$, $D^{d-1}_\epsilon \subset D^d_\epsilon$, pois $D^d_\epsilon = D^{d-1}_\epsilon$.

Logo, pela proposição anterior, $\mathcal{E}$ é base para uma uniformidade diagonal chamada **uniformidade métrica**.

As uniformidades diagonais que podem ser geradas dessa forma por métricas são chamadas **uniformidades metrizáveis**.

1.3 Topologia gerada pela uniformidade diagonal

Nesta seção veremos que a uniformidade diagonal gera uma topologia.

Definição 1.3.1. *Seja $(X, \mathcal{D})$ um espaço uniforme. Para cada $x \in X$ e $D \in \mathcal{D}$ definimos*

$$D[x] = \{y \in X; (x, y) \in D\}$$

Essa definição é extendida a subconjuntos A de X da forma:

$$D[A] = \bigcup_{x \in A} D[x] = \{y \in X; (x, y) \in D \text{ para algum } x \in A\}$$

Teorema 1.3.2. *Seja $(X, \mathcal{D})$ um espaço uniforme e, para cada $x \in X$, considere a coleção $\mathcal{B}_x = \{D[x]; D \in \mathcal{D}\}$. Então $\mathcal{B}_x$ satisfaz:*

1. $D[x] \in \mathcal{B}_x \Rightarrow x \in D[x]$;

2. $D_1[x], D_2[x] \in \mathcal{B}_x \Rightarrow \exists D_3[x] \in \mathcal{B}_x$ *tal que* $D_3[x] \subset D_1[x] \cap D_2[x]$;

3. $D[x] \in \mathcal{B}_x \Rightarrow \exists E[x] \in \mathcal{B}_x$ *tal que se* $y \in E[x]$, *existe* $W \in \mathcal{B}_y$ *com* $W \subset D[x]$.

Demonstração:

1. Como $(x, x) \in \Delta \subset D$, $\forall D \in \mathcal{D}$, temos que $x \in D[x]$, $\forall D \in \mathcal{D}$.

2. Primeiramente note que $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}$ e que $D_1[x] \cap D_2[x] = (D_1 \cap D_2)[x]$. Assim, fazendo $D_3 = D_1 \cap D_2$ temos $D_3[x] \in \mathcal{B}_x$ e $D_3[x] \subset D_1[x] \cap D_2[x]$.

3. Seja $D[x] \in \mathcal{B}_x$. Tome $E \in \mathcal{D}$ tal que $E \circ E \subset D$. Então $E[x] \in \mathcal{B}_x$ e se $y \in E[x]$, $W = E[y] \in \mathcal{B}_y$ é tal que $W \subset D[x]$.

□

Em vista do teorema acima podemos definir uma topologia em X da seguinte forma:

$$\tau_{\mathcal{D}} = \{A \subset X; \forall x \in A, A \text{ contém um elemento de } \mathcal{B}_x\}$$

Em outras palavras, a topologia resultante em X é tal que cada $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças em x.

Observe que a mesma topologia é produzida se usarmos qualquer base $\mathcal{E}$ no lugar de $\mathcal{D}$. De fato, como $\mathcal{U}_x = \{\bar{D}[x]; \bar{D} \in \mathcal{E}\} \subset \mathcal{B}_x = \{D[x]; D \in \mathcal{D}\}$ temos que $\tau_{\mathcal{E}} \subset \tau_{\mathcal{D}}$.

Reciprocamente, se $A \in \tau_{\mathcal{D}}$, temos que para $x \in A$, $\exists D \in \mathcal{D}$ tal que $x \in D[x] \subset A$. Visto que $\mathcal{E}$ é base de $\mathcal{D}$, existe $\bar{D} \in \mathcal{E}$ tal que $\bar{D} \subset D$. Assim, $x \in \bar{D}[x] \subset D[x] \subset A$. Logo, $A \in \tau_{\mathcal{E}}$ e, portanto, $\tau_{\mathcal{D}} \subset \tau_{\mathcal{E}}$.

Definição 1.3.3. *A topologia $\tau_{\mathcal{D}}$ associada com uma uniformidade diagonal $\mathcal{D}$ de um espaço uniforme $(X, \mathcal{D})$ é chamada* **topologia uniforme gerada por** $\mathcal{D}$*. Quando uma topologia de um espaço topológico X pode ser obtida dessa forma de uma uniformidade diagonal, X é chamado* **espaço topológico uniformizável**.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.3.4. A uniformidade trivial em um conjunto X gera a topologia trivial.

Exemplo 1.3.5. A uniformidade discreta em um conjunto X gera a topologia discreta.

Exemplo 1.3.6. A uniformidade métrica em um espaço métrico (M, d) tem como topologia uniforme a topologia da métrica, pois

$$D_\epsilon^d[x] = \{y \in M; (x, y) \in D_\epsilon^d\} = \{y \in M; d(x, y) < \epsilon\} = B_d(x, \epsilon)$$

Exemplo 1.3.7. A uniformidade diagonal em $\mathbb{R}$ dada pela base do Exemplo 1.2.5 nos dá como topologia uniforme a topologia discreta em $\mathbb{R}$, pois para cada $x \in \mathbb{R}$, $D_a[x] = \{x\}$ sempre que $a \geq x$.

Este exemplo, juntamente com o Exemplo 1.3.5, nos mostra que diferentes uniformidades diagonais podem produzir a mesma topologia. Assim, uma uniformidade diagonal em X representa mais estrutura em X do que uma topologia.

Teorema 1.3.8. *Seja $(X, \mathcal{D})$ um espaço uniforme. Considere em X a topologia uniforme gerada por $\mathcal{D}$ e em $X \times X$ a topologia produto. Então, $\mathcal{E} = \{U \in \mathcal{D}; U$ é aberto em $X \times X\}$ forma uma base para $\mathcal{D}$.*

Demonstração: Claramente $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$. Agora, seja $D \in \mathcal{D}$. Como $\operatorname{int}(D) \subset D$, resta mostrarmos que $\operatorname{int}(D) \in \mathcal{E}$. De fato, seja $E \in Sym(\mathcal{D})$ tal que $E \circ E \circ E \subset D$. Tal E existe pois, como $Sym(\mathcal{D})$ é base de $\mathcal{D}$, existe $F \in Sym(\mathcal{D})$ tal que $F \subset D$. Usando a parte (3) da Proposição 1.2.2, temos que existe $W \in Sym(\mathcal{D})$ tal que $W \circ W \subset F$. Novamente pela parte (3) existe $E \in Sym(\mathcal{D})$ tal que $E \circ E \subset W$, daí

$$(a, b) \in E \circ E \circ E \Rightarrow \exists c \in X \text{ tal que } (a, c) \in E \circ E \subset W \text{ e } (c, b) \in E \subset E \circ E \subset W$$

Então $(a, b) \in W \circ W \subset D$. Utilizando a parte (5) da Definição 1.1.2 é suficiente mostrar que $E \subset \operatorname{int}(D)$. Seja $(x, y) \in E$. Note que $E[x] \times E[y]$ é um aberto em $X \times X$ que contém (x, y). Agora, se $(w, z) \in E[x] \times E[y]$, temos que $(x, w) \in E$, o que implica que $(w, x) \in E^{-1} = E$, e $(y, z) \in E$, o que implica que $(x, z) \in E \circ E$. Logo, $(w, z) \in E \circ E \circ E \subset D$. Portanto, $E \subset \operatorname{int}(D)$. □

Agora vamos fazer uso das uniformidades diagonais para definirmos o conceito de função uniformemente contínua.

Definição 1.3.9. *Sejam $(X, \mathcal{D})$ e $(Y, \mathcal{E})$ espaços uniformes. Uma função $f : X \to Y$ é chamada* **uniformemente contínua** *se para cada $E \in \mathcal{E}$, existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $(x, y) \in D \Rightarrow (f(x), f(y)) \in E$.*

Se f é uniformemente contínua e possui inversa também uniformemente contínua ela é chamada **isomorfismo uniforme**.

Teorema 1.3.10. *Toda função uniformemente contínua é contínua.*

Demonstração: Sejam $(X, \mathcal{D})$ e $(Y, \mathcal{E})$ espaços uniformes munidos com suas respectivas topologias uniformes e seja $f : X \to Y$ uniformemente contínua. Para $x \in X$, uma vizinhança básica de $f(x)$ é da forma $E[f(x)]$ para algum $E \in \mathcal{E}$. Como f é uniformemente contínua, existe $D \in \mathcal{D}$ tal que se $(x, y) \in D$, então $(f(x), f(y)) \in E$. Logo,

$$y \in D[x] \Rightarrow (x, y) \in D \Rightarrow (f(x), f(y)) \in E \Rightarrow f(y) \in E[f(x)]$$

Ou seja, $f(D[x]) \subset E[f(x)]$. Portanto, f é contínua. □

1.4 Espaços uniformes via família de coberturas uniformes

Nesta seção, descreveremos a uniformidade de X sem passar por $X \times X$, utilizando a família de coberturas uniformes. Mas antes disso, precisaremos de algumas definições.

Definição 1.4.1. *Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura de X e $A \subset X$. A* **estrela de A com respeito a $\mathcal{U}$** *é o conjunto $St[A,\mathcal{U}] = \cup\{U \in \mathcal{U}; U \cap A \neq \emptyset\}$.*

Definição 1.4.2. *Se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ são coberturas de X dizemos que $\mathcal{U}$* **refina $\mathcal{V}$**, *e denotamos por $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$, se cada $U \in \mathcal{U}$ está contido em algum $V \in \mathcal{V}$.*

Definição 1.4.3. *Se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ são coberturas de X dizemos que $\mathcal{U}$* **é um refinamento estrela de $\mathcal{V}$**, *e denotamos por $\mathcal{U}* \prec \mathcal{V}$, se para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $St[U,\mathcal{U}] \subset V$.*

Definição 1.4.4. *Se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ são coberturas de X dizemos que $\mathcal{U}$* **é um refinamento baricêntrico de $\mathcal{V}$**, *e denotamos por $\mathcal{U} \triangle \mathcal{V}$, se a cobertura $\{St[x,\mathcal{U}]; x \in X\}$ refina $\mathcal{V}$.*

Definição 1.4.5. *Seja $(X,\mathcal{D})$ um espaço uniforme. Uma cobertura $\mathcal{U}$ de X se diz* **cobertura uniforme** *se existe algum $D \in \mathcal{D}$ tal que a cobertura $\mathcal{U}_D = \{D[x]; x \in X\}$ refina $\mathcal{U}$.*

O teorema a seguir nos dará a caracterização desejada da uniformidade de X através de uma família de coberturas.

Teorema 1.4.6. *Se $\mathcal{O}$ é uma família de coberturas de X que satisfaz:*

(a) $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow \exists \mathcal{U}_3 \in \mathcal{O}$ *tal que* $\mathcal{U}_3 * \prec \mathcal{U}_1$ *e* $\mathcal{U}_3 * \prec \mathcal{U}_2$;

(b) $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ *e* $\mathcal{U} \prec \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{V} \in \mathcal{O}$.

Então, $\mathcal{E} = \{D_{\mathcal{U}}; \mathcal{U} \in \mathcal{O}\}$, onde $D_{\mathcal{U}} = \cup\{U \times U; U \in \mathcal{U}\}$, é base para uma uniformidade diagonal em X cujas coberturas uniformes são precisamente os elementos de $\mathcal{O}$.

Demonstração: Primeiramente mostremos que $\mathcal{E}$ é base para uma uniformidade diagonal em X. Para isso vamos utilizar a Proposição 1.2.2.

1. Seja $D_{\mathcal{U}} \in \mathcal{E}$ e tome $(x,x) \in \Delta$. Como $\mathcal{U}$ é uma cobertura de X, $x \in \bar{U}$ para algum $\bar{U} \in \mathcal{U}$. Daí, $(x,x) \in \bar{U} \times \bar{U} \subset \cup\{U \times U; U \in \mathcal{U}\} = D_{\mathcal{U}}$. Logo, $\Delta \subset D_{\mathcal{U}}$.

2. Sejam $D_{\mathcal{U}_1}, D_{\mathcal{U}_2} \in \mathcal{E}$. Como $\mathcal{O}$ satisfaz (a), existe $\mathcal{U}_3 \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{U}_3* \prec \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$. Então $D_{\mathcal{U}_3} \in \mathcal{E}$ é tal que $D_{\mathcal{U}_3} \subset D_{\mathcal{U}_1} \cap D_{\mathcal{U}_2}$. Com efeito, seja $(x,y) \in D_{\mathcal{U}_3}$. Então $(x,y) \in U_3 \times U_3$ para algum $U_3 \in \mathcal{U}_3$. Como $\mathcal{U}_3* \prec \mathcal{U}_1$, existe $U_1 \in \mathcal{U}_1$ tal que $U_3 \subset U_1$. Assim, $(x,y) \in U_1 \times U_1$. Logo, $(x,y) \in D_{\mathcal{U}_1}$. Portanto $D_{\mathcal{U}_3} \subset D_{\mathcal{U}_1}$ e, de forma análoga, $D_{\mathcal{U}_3} \subset D_{\mathcal{U}_2}$.

3. Seja $D_{\mathcal{U}} \in \mathcal{E}$. Por (a) existe $\bar{\mathcal{U}} \in \mathcal{O}$ tal que $\bar{\mathcal{U}}* \prec \mathcal{U}$. Então $D_{\bar{\mathcal{U}}} \in \mathcal{E}$ é tal que $D_{\bar{\mathcal{U}}} \circ D_{\bar{\mathcal{U}}} \subset D_{\mathcal{U}}$. De fato, seja $(x,y) \in D_{\bar{\mathcal{U}}} \circ D_{\bar{\mathcal{U}}}$. Então existe $z \in X$ tal que $(x,z),(z,y) \in D_{\bar{\mathcal{U}}}$. Logo, $(x,z) \in \bar{U}_1 \times \bar{U}_1$ e $(z,y) \in \bar{U}_2 \times \bar{U}_2$, onde $\bar{U}_1, \bar{U}_2 \in \bar{\mathcal{U}}$. Dessa forma, $x, y \in St[\bar{U}_1, \bar{\mathcal{U}}]$, pois $y \in \bar{U}_2 \in \bar{\mathcal{U}}$ e $z \in \bar{U}_2 \cap \bar{U}_1 \neq \emptyset$. E como $\bar{\mathcal{U}}* \prec \mathcal{U}$ temos que $x, y \in St[\bar{U}_1, \bar{\mathcal{U}}] \subset U$ para algum $U \in \mathcal{U}$. Assim, $(x,y) \in U \times U \subset \cup\{U \times U; U \in \mathcal{U}\} = D_{\mathcal{U}}$.

4. Basta notar que $D_{\mathcal{U}}^{-1} = D_{\mathcal{U}}$.

Portanto, $\mathcal{E}$ é base para uma uniformidade diagonal em X.

Resta mostrar que as coberturas uniformes são precisamente os elementos de $\mathcal{O}$.

Seja $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Repare que $\mathcal{U}$ é refinado pela cobertura $\mathcal{V}_{D_{\mathcal{U}}} = \{D_{\mathcal{U}}[x]; x \in X\}$. De fato, se $y \in D_{\mathcal{U}}[x]$, então $(x,y) \in D_{\mathcal{U}}$. Logo, $(x,y) \in U \times U$ para algum $U \in \mathcal{U}$, ou seja $y \in U$ para algum $U \in \mathcal{U}$. Dessa forma, $D_{\mathcal{U}}[x] \subset U$. Assim, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ é uma cobertura uniforme.

Agora, seja $\mathcal{U}$ uma cobertura uniforme de X. Então existe $D_{\mathcal{W}} \in \mathcal{E}$ tal que $\mathcal{V}_{D_{\mathcal{W}}} = \{D_{\mathcal{W}}[x]; x \in X\} \prec \mathcal{U}$. Note que se $\mathcal{W} \prec \mathcal{U}$ teremos por (b) que $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Seja $W \in \mathcal{W}$.

$$w \in W \Rightarrow (w,w) \in W \times W \Rightarrow (w,w) \in D_{\mathcal{W}} \Rightarrow w \in D_{\mathcal{W}}[w]$$

Como $\mathcal{V}_{D_{\mathcal{W}}} \prec \mathcal{U}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $D_{\mathcal{W}}[w] \subset U$. Logo, $w \in U$, concluindo que $\mathcal{W} \prec \mathcal{U}$ e portanto $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. $\square$

A recíproca do teorema anterior também é válida. A enunciaremos como uma proposição e precisaremos do seguinte lema para prová-la:

Lema 1.4.7. *Sejam $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ coberturas de X tais que $\mathcal{U} \triangle \mathcal{V}$ e $\mathcal{V} \triangle \mathcal{W}$. Então, $\mathcal{U}* \prec \mathcal{W}$.*

Demonstração: Fixe $U_0 \in \mathcal{U}$ e seja $x_0 \in U_0$ arbitrário. Seja $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \cap U_0 \neq \emptyset$ e tome $x \in U \cap U_0$. Como $\mathcal{U} \triangle \mathcal{V}$, existe $V_x \in \mathcal{V}$ tal que $U \cup U_0 \subset St[x,\mathcal{U}] \subset V_x$. Assim, $x_0 \in V_x$ e $U \subset V_x$, donde temos que $U \subset V_x \subset St[x_0,\mathcal{V}]$. Logo, $St[U_0,\mathcal{U}] \subset St[x_0,\mathcal{V}]$.

Agora, como $\mathcal{V} \triangle \mathcal{W}$, existe $W \in \mathcal{W}$ tal que $St[x_0,\mathcal{V}] \subset W$. Dessa forma, $St[U_0,\mathcal{U}] \subset W$ e portanto $\mathcal{U}* \prec \mathcal{W}$. □

Proposição 1.4.8. *Seja $(X,\mathcal{D})$ um espaço uniforme e $\mathcal{O}$ coleção de todas as coberturas uniformes de X. Então $\mathcal{O}$ satisfaz as condições (a) e (b) do teorema anterior.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2 \in \mathcal{O}$. Então existem $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ tais que $\mathcal{U}_{D_1} \prec \mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_{D_2} \prec \mathcal{U}_2$. Considere $D \in Sym(\mathcal{D})$ tal que $D \circ D \subset D_1 \cap D_2$.

Então $\mathcal{U}_3 = \mathcal{U}_D* \prec \mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2$. De fato, para $x \in X$, temos:

$$a \in St[x,\mathcal{U}_D] \Rightarrow x, a \in D[y] \text{ para algum } y \in X \Rightarrow (y,x),(y,a) \in D$$

Como D é uma vizinhança diagonal simétrica temos que $(x,y),(y,a) \in D$. Logo, $(x,a) \in D \circ D \subset D_1 \cap D_2$, donde, $a \in (D_1 \cap D_2)[x] = D_1[x] \cap D_2[x]$, concluindo que $St[x,\mathcal{U}_D] \subset D_1[x] \cap D_2[x]$. Assim, $\mathcal{U}_D \triangle \mathcal{U}_{D_1},\mathcal{U}_{D_2}$. Como $\mathcal{U}_{D_i} \prec \mathcal{U}_i$, $i = 1,2$, segue que $\mathcal{U}_D \triangle \mathcal{U}_i \triangle \mathcal{U}_i$, $i = 1,2$. Portanto, pelo lema anterior, $\mathcal{U}_3 = \mathcal{U}_D* \prec \mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2$ e dessa forma (a) é satisfeita.

A propriedade (b) é clara da definição de cobertura uniforme. □

Assim, as coberturas uniformes descrevem uma uniformidade tanto quanto as vizinhanças diagonais. Na maioria da literatura referente a espaços uniformes a estrutura considerada é a coleção de coberturas satisfazendo (a) e (b). Definamos formalmente um espaço uniforme através de coberturas uniformes.

Definição 1.4.9. *Um* **espaço uniforme** *é um par $(X,\mathcal{O})$ formado por um conjunto X e uma família $\mathcal{O}$ de coberturas de X chamada* **uniformidade de coberturas** *(ou* **estrutura**

uniforme, *ou* **uniformidade**), *cujos elementos são chamados* **coberturas uniformes**, *e que satisfaz:*

(a) $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow \exists \mathcal{U}_3 \in \mathcal{O}$ *tal que* $\mathcal{U}_3* \prec \mathcal{U}_1$ *e* $\mathcal{U}_3* \prec \mathcal{U}_2$;

(b) $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ *e* $\mathcal{U} \prec \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{V} \in \mathcal{O}$.

Da mesma forma como fizemos nas seções anteriores, podemos definir os conceitos de base e sub-base para uma uniformidade de coberturas.

Definição 1.4.10. *Uma* **base para uma uniformidade de coberturas** $\mathcal{O}$ *é qualquer sub-coleção* $\mathcal{O}'$ *de* $\mathcal{O}$ *tal que* $\mathcal{O} = \{\mathcal{U}; \mathcal{U}$ *é cobertura de* X *e* $\mathcal{U}' \prec \mathcal{U}$ *para algum* $\mathcal{U}' \in \mathcal{O}'\}$. *Uma* **sub-base para uma uniformidade de coberturas** $\mathcal{O}$ *é uma sub-coleção* $\mathcal{W} \subset \mathcal{O}$ *tal que o conjunto formado por todas interseções finitas de seus elementos forma uma base para* $\mathcal{O}$, *onde a interseção de duas coberturas* $\mathcal{U}$ *e* $\mathcal{V}$ *é definida como sendo a cobertura* $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} = \{U \cap V; U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$.

Evidentemente, $\mathcal{O}'$ é base para uma uniformidade de coberturas se, e só se, satisfaz a propriedade (a) da Definição 1.4.9.

Os três teoremas seguintes seriam as definições das propriedades em questão caso tivéssemos começado o capítulo pela construção via família de coberturas e não serão demonstrados. Suas demonstrações se encontram em [12] páginas 246 e 247.

Teorema 1.4.11. *Uma uniformidade é metrizável, isto é, gerada por uma métrica* d, *se, e somente se, as coberturas* $\mathcal{U}^d_\epsilon = \{B^d_\epsilon(x); x \in X\}$ *de* X *por* ϵ*-bolas, para* $\epsilon > 0$, *formam uma base.*

Teorema 1.4.12. *Se* $\bar{\mathcal{O}}$ *é base para uma uniformidade de coberturas* $\mathcal{O}$ *em* X, *então* $\mathcal{B}_x = \{St[x, \mathcal{U}]; \mathcal{U} \in \bar{\mathcal{O}}\}$ *é uma base de vizinhanças em* x *na topologia uniforme.*

Teorema 1.4.13. *Sejam* $(X, \mathcal{O}_X)$ *e* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *espaços uniformes. Uma função* $f : X \to Y$ *é uniformemente contínua se, e somente se, para cada* $\mathcal{U}_Y \in \mathcal{O}_Y$, *existe* $\mathcal{U}_X \in \mathcal{O}_X$ *tal que* $f(\mathcal{U}_X) \prec \mathcal{U}_Y$, *onde* $f(\mathcal{U}_X) = \{f(U); U \in \mathcal{U}_X\}$.

O teorema a seguir seria o equivalente ao Teorema 1.3.8 caso tivéssemos começado pelas famílias de coberturas e sua demonstração também se encontra em [12] página 246.

Teorema 1.4.14. *Seja $\mathcal{O}$ uma uniformidade de coberturas em X. Então as coberturas uniformes abertas de X formam uma base para $\mathcal{O}$.*

Capítulo 2

Espaços Topológicos Admissíveis

Neste capítulo, veremos como a família admissível de coberturas abertas caracteriza a topologia de um espaço topológico admissível e faremos uso da estrutura admissível para definirmos conceitos clássicos de espaços métricos, bem como para extender resultados conhecidos em espaços métricos para espaços admissíveis.

2.1 Definições e exemplos

Aqui, além das definições de estrela e de refinamento apresentadas no começo da Seção 1.4, será necessário definir mais um tipo de refinamento antes de definirmos um espaço topológico admissível.

Definição 2.1.1. *Se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ são coberturas de X dizemos que $\mathcal{U}$* **é um refinamento duplo de** *$\mathcal{V}$, e denotamos por $\mathcal{U} \prec \frac{1}{2}\mathcal{V}$, se para quaisquer $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ tais que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $U_1 \cup U_2 \subset V$.*

Agora estamos aptos a definir um espaço topológico admissível.

Definição 2.1.2. *Um espaço topológico X é dito* **admissível** *se ele admitir uma família de coberturas abertas $\mathcal{O}$ que satisfaz:*

1. *Para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V} \prec \frac{1}{2}\mathcal{U}$.*

2. *Se $A \subset X$ é um aberto e K um compacto em X tal que $K \subset A$, então existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $St[K,\mathcal{U}] \subset A$.*

3. *Para quaisquer $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{W} \prec \mathcal{U}$ e $\mathcal{W} \prec \mathcal{V}$.*

Uma família de coberturas abertas que satisfaz 1, 2 e 3 é chamada **família admissível de coberturas abertas**.

Podemos simplificar nossa definição ao percebermos que 1 e 3 equivalem à: Para quaisquer $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{W} \prec \frac{1}{2}\mathcal{U}$ e $\mathcal{W} \prec \frac{1}{2}\mathcal{V}$.

Antes de darmos alguns exemplos, vejamos um lema que nos possibilitará demonstrar uma forma alternativa de definir um espaço topológico admissível.

Lema 2.1.3. *Sejam X um espaço topológico, $\mathcal{O}$ uma família de coberturas abertas de X que satisfaz as propriedades 1 e 3 da Definição 2.1.2, $K \subset X$ um compacto e Y um subconjunto qualquer de X. Se para cada $x \in K$ existe $\mathcal{V}_x \in \mathcal{O}$ tal que $St[x, \mathcal{V}_x] \subset Y$, então existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que $St[K, \mathcal{W}] \subset Y$.*

Demonstração: Suponha que para cada $x \in K$ existe $\mathcal{V}_x \in \mathcal{O}$ tal que $St[x, \mathcal{V}_x] \subset Y$. Como $\mathcal{O}$ satisfaz 1, para cada $x \in K$ existe $\mathcal{U}_x \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{U}_x \prec \frac{1}{2}\mathcal{V}_x$. Sendo K compacto, a cobertura aberta $K \subset \bigcup_{x \in K} St[x, \mathcal{U}_x]$ admite subcobertura finita, digamos, $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} St[x_i, \mathcal{U}_{x_i}]$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Por 3 temos que existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{W} \prec \mathcal{U}_{x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Então, $St[K, \mathcal{W}] \subset Y$. De fato, seja $x \in K \subset \bigcup_{i=1}^{n} St[x_i, \mathcal{U}_{x_i}]$. Assim, $x \in St[x_j, \mathcal{U}_{x_j}]$ para algum $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Donde, $x, x_j \in U_{x_j}$ para algum $U_{x_j} \in \mathcal{U}_{x_j}$.

Se $y \in St[x, \mathcal{W}]$, então $x, y \in W$ para algum $W \in \mathcal{W}$ e já que $\mathcal{W} \prec \mathcal{U}_{x_j}$, $W \subset U'_{x_j}$ para algum $U'_{x_j} \in \mathcal{U}_{x_j}$. Assim, $U_{x_j} \cap U'_{x_j} \neq \emptyset$, pois $x \in U_{x_j} \cap U'_{x_j}$. Desse modo, como $\mathcal{U}_{x_j} \prec \frac{1}{2}\mathcal{V}_{x_j}$, tem-se que $y, x_j \in U_{x_j} \cup U'_{x_j} \subset V_{x_j}$, para algum $V_{x_j} \in \mathcal{V}_{xj}$. Logo, $y \in St[x_j, \mathcal{V}_{x_j}] \subset Y$. Donde, $St[x, \mathcal{W}] \subset Y$, qualquer que seja $x \in K$.

Portanto, $St[K, \mathcal{W}] = \bigcup_{x \in K} St[x, \mathcal{W}] \subset Y$. □

Proposição 2.1.4. *Um espaço topológico X é admissível se, e somente se, existe uma família $\mathcal{O}$ de coberturas abertas de X que satisfaz:*

(a) Para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V} \prec \frac{1}{2}\mathcal{U}$;

(b) Para quaisquer $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{W} \prec \mathcal{U}$ e $\mathcal{W} \prec \mathcal{V}$;

(c) Para todo $x \in X$, $\mathcal{B}_x = \{St[x,\mathcal{U}]; \mathcal{U} \in \mathcal{O}\}$ é uma base de vizinhanças em x.

Demonstração: Suponha que X é admissível e seja $\mathcal{O}$ sua família admissível de coberturas abertas. Verifiquemos que $\mathcal{O}$ satisfaz (a), (b) e (c). Observe que (a) e (b) são imediatas da Definição 2.1.2. Provemos (c).

Sejam $x \in X$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Pela definição de estrela temos que $St[x,\mathcal{U}] = \cup\{U \in \mathcal{U}; x \in U\}$. Como $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de X, seus elementos são abertos de X, então $\cup\{U \in \mathcal{U}; x \in U\}$ é um aberto de X tal que $x \in \cup\{U \in \mathcal{U}; x \in U\} \subset St[x,\mathcal{U}]$. Logo, $St[x,\mathcal{U}]$ é uma vizinhança de x.

Agora, seja V uma vizinhança de $x \in X$. Então existe $A \subset X$ aberto tal que $x \in A \subset V$. Logo, o compacto $\{x\}$ está contido no aberto A, daí, pela propriedade 2 da Definição 2.1.2, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $St[x,\mathcal{U}] \subset A \subset V$. Dessa forma, $\mathcal{B}_x = \{St[x,\mathcal{U}]; \mathcal{U} \in \mathcal{O}\}$ é uma base de vizinhanças em x.

Reciprocamente, suponha que (a), (b) e (c) são válidas para uma família $\mathcal{O}$ de coberturas abertas de X. Então 1 e 3 da Definição 2.1.2 são imediatamente satisfeitas. Resta mostrar 2.

Seja $A \subset X$ aberto e K um compacto de X tal que $K \subset A$. Como A é aberto, ele contém uma vizinhança básica de cada um de seus pontos, assim, por (c), para todo $x \in K \subset A$, existe $\mathcal{V}_x \in \mathcal{O}$ tal que $St[x, \mathcal{V}_x] \subset A$. Portanto, pelo lema anterior, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que $St[K, \mathcal{W}] \subset A$. □

Esta nova caracterização torna, através da propriedade (c), bem evidente a importância das estrelas nos espaços topológicos admissíveis, pois podemos caracterizar seus abertos completamente através delas.

Exemplo 2.1.5. Um espaço métrico (M, d) é um espaço topológico admissível se considerarmos a família de coberturas abertas $\mathcal{O}_d(M) = \{\mathcal{U}_\varepsilon; \varepsilon > 0\}$, onde $\mathcal{U}_\varepsilon = \{B(x, \varepsilon); x \in M\}$.

De fato, vamos utilizar a proposição anterior.

(a) Seja $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_d(M)$ e considere $\mathcal{U}_{\frac{\varepsilon}{2}} \in \mathcal{O}_d(M)$. Verifiquemos que $\mathcal{U}_{\frac{\varepsilon}{2}} \prec \frac{1}{2}\mathcal{U}_\varepsilon$. Seja $z \in B(x_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(x_2, \frac{\varepsilon}{2})$ e tome $a \in B(x_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cup B(x_2, \frac{\varepsilon}{2})$. Então,

$a \in B(x_1, \frac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow d(a,z) \leq d(a,x_1) + d(x_1,z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow a \in B(z,\varepsilon)$.

$a \in B(x_2, \frac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow d(a,z) \leq d(a,x_2) + d(x_2,z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow a \in B(z,\varepsilon)$.

Logo, $a \in B(z,\varepsilon)$ e, portanto, $B(x_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cup B(x_2, \frac{\varepsilon}{2}) \subset B(z,\varepsilon) \in \mathcal{U}_\varepsilon$.

(b) Sejam $\mathcal{U}_{\varepsilon_1}, \mathcal{U}_{\varepsilon_2} \in \mathcal{O}_d(M)$. Então $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_d(M)$, onde $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, é tal que $\mathcal{U}_\varepsilon \prec \mathcal{U}_{\varepsilon_1}, \mathcal{U}_{\varepsilon_2}$.

(c) Seja $U \subset M$ uma vizinhança de $x \in M$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset U$. Agora, para $\mathcal{U}_{\frac{\varepsilon}{2}} \in \mathcal{O}_d(M)$ temos, pela definição de estrela e das coberturas de $\mathcal{O}_d(M)$, que $St[x, \mathcal{U}_{\frac{\varepsilon}{2}}]$ é vizinhança de x e se

$$a \in St[x, \mathcal{U}_{\frac{\varepsilon}{2}}] \Rightarrow a, x \in B(z, \frac{\varepsilon}{2}) \text{ para algum } z \in M \Rightarrow d(a,x) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow a \in B(x,\varepsilon)$$

Logo, $St[x, \mathcal{U}_{\frac{\varepsilon}{2}}] \subset B(x,\varepsilon) \subset U$. Donde tem-se que $\mathcal{B}_x = \{St[x, \mathcal{V}]; \mathcal{V} \in \mathcal{O}_d(M)\}$ é uma base de vizinhanças em x.

O próximo teorema nos fornecerá um pouco mais de exemplos de espaços admissíveis, mas para prová-lo faremos uso do seguinte resultado:

Proposição 2.1.6. *Todo refinamento estrela é um refinamento duplo.*

Demonstração: Suponha que $\mathcal{V}* \prec \mathcal{U}$. Sejam $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ tais que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Então, $St[V_1, \mathcal{V}] \subset U$ para algum $U \in \mathcal{U}$. Desse modo, $V_2 \subset St[V_1, \mathcal{V}] \subset U$, pois $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Assim, $V_1 \cup V_2 \subset St[V_1, \mathcal{V}] \subset U$. Portanto, $\mathcal{V} \prec \frac{1}{2}\mathcal{U}$. □

Observe que nem todo refinamento duplo é um refinamento estrela. Por exemplo, em $\mathbb{R}$ com a topologia usual, $\mathcal{U} = \{(-n,n); n \in \mathbb{N}\}$ é uma cobertura aberta tal que $\mathcal{U} \prec \frac{1}{2}\mathcal{U}$, porém para $(-1,1) \in \mathcal{U}$ não existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $St[(-1,1), \mathcal{U}] \subset (-m,m)$, pois como $(-1,1) \subset (-n,n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $St[(-1,1), \mathcal{U}] = \mathbb{R}$.

Teorema 2.1.7. *Se X é um espaço topológico uniformizável, então ele é um espaço topológico admissível.*

Demonstração: Seja $\mathcal{O}_X$ uma uniformidade de coberturas para X e tome $\mathcal{O}$ como sendo a família de coberturas uniformes abertas de X. Temos pelo Teorema 1.4.14 que $\mathcal{O}$ é base para

$\mathcal{O}_X$. Afirmamos que $\mathcal{O}$ é uma família admissível de coberturas abertas de X. Utilizaremos novamente a Proposição 2.1.4.

(a) Seja $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Então, pelo item (a) da Definição 1.4.9, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V}* \prec \mathcal{U}$. Pela proposição anterior segue que $\mathcal{V} \prec \frac{1}{2}\mathcal{U}$.

(b) Sejam $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$. Novamente pelo item (a) da Definição 1.4.9, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{W}* \prec \mathcal{U}$ e $\mathcal{W}* \prec \mathcal{V}$. Logo, $\mathcal{W} \prec \mathcal{U}$ e $\mathcal{W} \prec \mathcal{V}$.

(c) Pelo Teorema 1.4.12, para todo $x \in X$, $\mathcal{B}_x = \{St[x,\mathcal{U}]; \mathcal{U} \in \mathcal{O}\}$ é uma base de vizinhanças em x. $\square$

Assim, todos exemplos de espaços uniformes servem como exemplos de espaços admissíveis.

A recíproca do teorema anterior era um problema em aberto até 2014 e foi provada em [1] página 40. Vejamos sua demonstração.

Teorema 2.1.8. *Se X é um espaço topológico admissível, então ele é um espaço topológico uniformizável.*

Demonstração: Seja $\mathcal{O}$ uma família admissível de coberturas abertas de X. Para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ defina a cobertura aberta $B_{\mathcal{U}} = \{St[x,\mathcal{U}]; x \in X\}$. Mostremos que a família $\mathcal{B}_{\mathcal{O}} = \{B_{\mathcal{U}}; \mathcal{U} \in \mathcal{O}\}$ é base para uma uniformidade de coberturas em X.

Sejam $B_{\mathcal{U}_1}, B_{\mathcal{U}_2} \in \mathcal{B}_{\mathcal{O}}$. Como $\mathcal{O}$ é uma família admissível, existe $\mathcal{U}_3 \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{U}_3 \prec \frac{1}{2}\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_3 \prec \frac{1}{2}\mathcal{U}_2$. Também pela admissibilidade de $\mathcal{O}$, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{W} \prec \frac{1}{2}\mathcal{U}_3$. Dessa forma, $B_{\mathcal{W}} \in \mathcal{B}_{\mathcal{O}}$ é tal que $B_{\mathcal{W}}* \prec B_{\mathcal{U}_1}$ e $B_{\mathcal{W}}* \prec B_{\mathcal{U}_2}$. De fato, verfiquemos que $B_{\mathcal{W}}* \prec B_{\mathcal{U}_1}$, o outro caso segue de forma análoga. Tome $St[x,\mathcal{W}] \in B_{\mathcal{W}}$ e $z \in St[St[x,\mathcal{W}], B_{\mathcal{W}}]$. Então $z \in St[y,\mathcal{W}]$ para algum $St[y,\mathcal{W}] \in B_{\mathcal{W}}$ tal que $St[y,\mathcal{W}] \cap St[x,\mathcal{W}] \neq \emptyset$. Considere agora $a \in St[y,\mathcal{W}] \cap St[x,\mathcal{W}]$. Daí, $a, y \in W_1 \in \mathcal{W}$ e $a, x \in W_2 \in \mathcal{W}$. Dessa forma, $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ e como $\mathcal{W} \prec \frac{1}{2}\mathcal{U}_3$ temos que $W_1 \cup W_2 \subset U_3$ para algum $U_3 \in \mathcal{U}_3$ e, assim, $x, y \in U_3$.

Por outro lado, como $z \in St[y,\mathcal{W}]$, $z, y \in W$ para algum $W \in \mathcal{W}$ e já que $\mathcal{W} \prec \frac{1}{2}\mathcal{U}_3$ temos que $W \subset U_3'$ para algum $U_3' \in \mathcal{U}_3$. Assim, $z, y \in U_3'$ e, dessa forma, $U_3 \cap U_3' \neq \emptyset$ pois $y \in U_3 \cap U_3'$. Agora, como $\mathcal{W} \prec \frac{1}{2}\mathcal{U}_1$, existe $U \in \mathcal{U}_1$ tal que $U_3 \cup U_3' \subset U$. Logo, $z, x \in U$ e assim $z \in St[x,\mathcal{U}_1] \in B_{\mathcal{U}_1}$. Logo, $St[St[x,\mathcal{W}], B_{\mathcal{W}}] \subset St[x,\mathcal{U}_1]$. Dessa forma, $B_{\mathcal{W}}* \prec B_{\mathcal{U}_1}$.

Assim, $\mathcal{B}_{\mathcal{O}}$ é base para uma uniformidade de coberturas em X. Mostremos agora que a topologia de X pode ser obtida pela uniformidade de coberturas, isto é, vamos mostrar que para cada $x \in X$, $\{St[x, B_{\mathcal{U}}]; B_{\mathcal{U}} \in \mathcal{B}_{\mathcal{O}}\}$ é uma base de vizinhanças de x.

Seja $A \subset X$ uma vizinhança de x. Como X é um espaço topológico admissível existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $St[x,\mathcal{U}] \subset A$. Temos também que existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V} \prec \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Dessa forma, $St[x, B_{\mathcal{V}}] \subset A$. De fato, se $y \in St[x, B_{\mathcal{V}}]$, existe $z \in X$ tal que $y, x \in St[z, \mathcal{V}]$. Desse modo, existem $V, V' \in \mathcal{V}$ tais que $y, z \in V$ e $x, z \in V'$. Assim, $V \cap V' \neq \emptyset$ pois $z \in V \cap V'$. Logo, $y, x \in V \cup V' \subset U$ para algum $U \in \mathcal{U}$. Donde, $y \in St[x,\mathcal{U}] \subset A$. Logo, $x \in St[x, B_{\mathcal{V}}] \subset A$. Donde temos o desejado. □

2.2 Lema da cobertura de Lebesgue

O Lema do número de Lebesgue é um dos resultados fundamentais sobre conjuntos compactos em espaços métricos. Uma de suas muitas aplicações é provar que toda aplicação contínua que sai de um espaço métrico compacto é uniformemente contínua. Esta adaptação para espaços admissíveis foi introduzida em [10] e nesta seção vamos reproduzi-la com o intuito de provarmos alguns resultados clássicos de espaços métricos em espaços admissíveis.

Teorema 2.2.1. *(***Lema da cobertura de Lebesgue***) Seja X um espaço topológico admissível e $\mathcal{O}$ sua família admissível de coberturas abertas. Considere $K \subset X$ um compacto e seja $K \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$ uma cobertura aberta de K. Então existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que para cada $x \in K$, $St[x,\mathcal{U}] \subset V_\alpha$ para algum índice α.*

Demonstração: Se $x \in K$, então $x \in V_\alpha$ para algum $\alpha \in \Lambda$. Pela propriedade 2 da Definição 2.1.2, existe $\mathcal{U}_x \in \mathcal{O}$ tal que $St[x,\mathcal{U}_x] \subset V_\alpha$. Agora, pela propriedade 1 existe $\mathcal{V}_x \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V}_x \prec \frac{1}{2}\mathcal{U}_x$.

Fazendo o mesmo para cada $x \in X$ podemos construir uma cobertura aberta $K \subset \bigcup_{x \in K} St[x, \mathcal{V}_x]$. Pela compacidade de K existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} St[x_i, \mathcal{V}_{x_i}]$. Usando a propriedade 3 da Definição 2.1.2 temos que existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}_{x_i}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Agora, fixe $x \in K$. Então $x \in St[x_i, \mathcal{V}_{x_i}]$ para algum $i \in \mathbb{N}$. Assim, existe $V \in \mathcal{V}_{x_i}$ tal que $x, x_i \in V$.

Se $y \in St[x,\mathcal{U}]$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x, y \in U$. E já que $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}_{x_i}$ e $\mathcal{V}_{x_i} \prec \frac{1}{2}\mathcal{U}_{x_i}$, existe $U_i \in \mathcal{U}_{x_i}$ tal que $U \cup V \subset U_i$. Como, $St[x_i,\mathcal{U}_{x_i}] \subset V_\alpha$ para algum α, segue que $y \in V_\alpha$.

Portanto, $St[x,\mathcal{U}] \subset V_\alpha$. □

A cobertura $\mathcal{U}$ é chamada **cobertura de Lebesgue**.

2.3 Continuidade uniforme e conjuntos limitados

Assim como fizemos uso da estrutura uniforme de um conjunto X para definirmos funções uniformente contínuas entre espaços uniformes, nesta seção utilizaremos a família admissível para definirmos o mesmo conceito e também para definirmos conjuntos limitados.

Incialmente vejamos como caracterizar uma função contínua através de uma família admissível de coberturas abertas.

Proposição 2.3.1. *Sejam X e Y espaços topológicos admissíveis e $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_Y$ suas respectivas famílias admissíveis de coberturas abertas. Uma função $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, para quaisquer $x \in X$ e $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_Y$ existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X$ tal que se $y \in St[x,\mathcal{U}]$, então $f(y) \in St[f(x), \mathcal{V}]$.*

Demonstração: Suponha que $f : X \to Y$ é uma função contínua. Sejam $x \in X$ e $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_Y$. Como $\mathcal{V}$ é uma cobertura de Y, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $f(x) \in V$. Assim, $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança aberta de x e, pela propriedade (c) da Proposição 2.1.4, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X$ tal que $St[x,\mathcal{U}] \subset f^{-1}(V)$. Logo, se $y \in St[x,\mathcal{U}]$ tem-se que $y \in f^{-1}(V)$. Dessa forma, $f(x), f(y) \in V \in \mathcal{V}$. Portanto, $f(y) \in St[f(x), \mathcal{V}]$.

Reciprocamente, suponha que para quaisquer $x \in X$ e $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_Y$ existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X$ tal que se $y \in St[x,\mathcal{U}]$ temos que $f(y) \in St[f(x), \mathcal{V}]$. Seja $V \subset Y$ um aberto qualquer e tome $x \in f^{-1}(V)$. Então, $f(x) \in V$ e como V é aberto em Y, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_Y$ tal que $St[f(x), \mathcal{V}] \subset V$. Pela hipótese, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X$ tal que se $y \in St[x,\mathcal{U}]$, então $f(y) \in St[f(x), \mathcal{V}]$. Dessa forma, $St[x,\mathcal{U}] \subset f^{-1}(St[f(x), \mathcal{V}]) \subset f^{-1}(V)$.

Assim, $f^{-1}(V)$ é aberto em X e, portanto, f é contínua. $\square$

Definição 2.3.2. *Sejam X e Y dois espaços admissíveis com famílias admissíveis de coberturas abertas $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_Y$ respectivamente. Uma função é dita* **uniformemente contínua com respeito a $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_Y$** *se para cada $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_Y$, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X$ tal que $f(St[x,\mathcal{U}]) \subset St[f(x), \mathcal{V}]$, qualquer que seja $x \in X$.*

Essa definição, juntamente com a proposição anterior, nos garante facilmente que toda função uniformente contínua entre espaços admissíveis é contínua.

A seguir provaremos, no contexto de espaços admissíveis, um dos resultados clássicos de espaços métricos que faz uso do Lema do número de Lebesgue.

Teorema 2.3.3. *Sejam X e Y espaços admissíveis e $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_Y$ suas respectivas famílias admissíveis de coberturas abertas. Suponha que X é compacto e $f : X \to Y$ é contínua, então f é uniformemente contínua.*

Demonstração: Seja $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_Y$. Como f é contínua, $X \subset \bigcup_{V \in \mathcal{V}} f^{-1}(V)$ é uma cobertura aberta de X. Sendo X compacto, pelo lema da cobertura de Lebesgue, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X$ tal que para qualquer $x \in X$, $St[x,\mathcal{U}] \subset f^{-1}(V)$ para algum $V \in \mathcal{V}$.

Logo, para qualquer $x \in X$, se $y, x \in St[x,\mathcal{U}]$, tem-se $f(y), f(x) \in V$ para algum $V \in \mathcal{V}$. Donde, $f(St[x,\mathcal{U}]) \subset St[f(x), \mathcal{V}]$. $\square$

Vejamos como fica a definição de equicontinuidade e equicontinuidade uniforme em espaços admissíveis.

Definição 2.3.4. *Sejam X e Y espaços admissíveis e $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_Y$ suas respectivas famílias admissíveis. Seja ainda $x \in X$. Uma família $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$, onde $C(X, Y)$ denota o conjunto de todas as funções contínuas de X em Y, é chamada* **equicontínua em x com respeito a $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_Y$**, *se para qualquer $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_Y$ existir $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X$ tal que $f(St[x,\mathcal{U}]) \subset St[f(x), \mathcal{V}]$ para toda função $f \in \mathcal{F}$. Se $\mathcal{F}$ é equicontínua em todos os pontos de X ela é dita* **equicontínua**.

Definição 2.3.5. *Uma família $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ é chamada* **uniformemente equicontínua** *se* *para todo $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_Y$, existir $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X$ tal que $f(St[x,\mathcal{U}]) \subset St[f(x),\mathcal{V}]$ para toda função $f \in \mathcal{F}$ e todo $x \in X$.*

A seguir definamos conjuntos limitados em espaços admissíveis.

Definição 2.3.6. *Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura de um espaço topológico X. Um subconjunto Y de X é chamado* **$\mathcal{U}$-limitado** *se existe $x \in X$ tal que $Y \subset St[x,\mathcal{U}]$. Um subconjunto Y de espaço admissível X com família admissível de coberturas abertas $\mathcal{O}$ é dito* **$\mathcal{O}$-limitado** *se é $\mathcal{U}$-limitado para algum $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$.*

O exemplo a seguir nos mostrará que os conceitos de conjuntos limitados coincidem no caso de espaços métricos.

Exemplo 2.3.7. Seja (X, d) um espaço métrico e $\mathcal{O}_d(M)$ a família admissível de coberturas abertas dada no Exemplo 2.1.5. Se $Y \subset X$ é um conjunto limitado segundo a definição clássica em espaços métricos, existem $\varepsilon > 0$ e $x \in M$ tais que $Y \subset B(x, \varepsilon)$. Mas repare que $B(x, \varepsilon) \subset St[x,\mathcal{U}_\varepsilon]$. Logo, Y é $\mathcal{O}_d(M)$-limitado.

Por outro lado, se Y é $\mathcal{O}_d(M)$-limitado, existem $\varepsilon > 0$ e $x \in M$ tais que $Y \subset St[x,\mathcal{U}_\varepsilon]$. Com um argumento semelhante ao da parte (c) do Exemplo 2.1.5, podemos mostrar que $St[x,\mathcal{U}_\varepsilon] \subset B(x, 2\varepsilon)$. Assim, Y é limitado.

O próximo resultado é uma versão do Lema da cobertura de Lebesgue por meio de conjuntos limitados.

Proposição 2.3.8. *Seja X espaço admissível compacto e $\mathcal{O}$ sua família admissível de coberturas abertas. Se $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ é uma cobertura aberta de X, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que se $Y \subset X$ é um conjunto $\mathcal{U}$-limitado, então $Y \subset V_\alpha$ para algum α.*

Demonstração: Pelo lema da cobertura de Lebesgue existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que para cada $x \in X$, $St[x,\mathcal{U}] \subset V_\alpha$ para algum α.

Se Y é $\mathcal{U}$-limitado existe $x \in X$ tal que $Y \subset St[x,\mathcal{U}]$. Logo, $Y \subset St[x,\mathcal{U}] \subset V_\alpha$ para algum α. □

Corolário 2.3.9. *Sejam X e Y espaços admissíveis e $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_Y$ suas respectivas famílias admissíveis de coberturas abertas. Suponha que X é compacto e que uma função $f : X \to Y$ é contínua. Então, para todo $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_Y$ existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X$ tal que se $A \subset X$ é $\mathcal{U}$-limitado, $f(A)$ é $\mathcal{V}$-limitado.*

Demonstração: Seja $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_Y$. Sendo f contínua, $\{f^{-1}(V)\}_{V\in\mathcal{V}}$ é uma cobertura aberta de X. Assim, pela proposição anterior, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X$ tal que se $A \subset X$ é $\mathcal{U}$-limitado, $A \subset f^{-1}(V)$ para algum $V \in \mathcal{V}$. Logo, $f(A) \subset V$.

Fixe $a \in A$. Daí, se $y, f(a) \in f(A)$, temos que $y, f(a) \in V \in \mathcal{V}$. Logo, $f(A) \subset St[f(a), \mathcal{V}]$.

Portanto, $f(A)$ é $\mathcal{V}$-limitado. □

2.4 Funções Lipschitzianas

O conceito de função lipschitzina faz forte uso da métrica do espaço. Nesta seção introduziremos uma noção de função lipschitziana em espaços admissíveis fazendo uso de sua família admissível de coberturas abertas.

Definição 2.4.1. *Sejam X e Y espaços admissíveis com famílias admissíveis de coberturas abertas $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_Y$, respectivamente. Uma função $f : X \to Y$ é dita* **lipschitziana com respeito a $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_Y$** *se existe uma correspondência $\mathcal{L} : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y$ que satisfaz*

1. *Para todo $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_Y$ existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X$ tal que $\mathcal{L}(\mathcal{U}) \prec \mathcal{V}$.*

2. *$f(St[x,\mathcal{U}]) \subset St[f(x), \mathcal{L}(\mathcal{U})]$ para todo $x \in X$ e todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X$.*

A correspondência $\mathcal{L}$ é chamada **correspondência de Lipschitz**.

Vejamos que funções lipschitzianas entre espaços métricos mantém essa propriedade quando consideramos a família admissível de coberturas abertas do Exemplo 2.1.5.

Proposição 2.4.2. *Sejam (M, d) e (M', d') espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função lipschitziana. Então f é lipschtziana com respeito a $\mathcal{O}_d(M)$ e $\mathcal{O}_{d'}(M')$.*

Demonstração: Suponha que $f : X \to Y$ é lipschitziana. Sejam $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_d(M)$ e $x \in M$. Considere a correspondência $\mathcal{L} : \mathcal{O}_d(M) \to \mathcal{O}_{d'}(M')$ dada por $\mathcal{L}(\mathcal{U}_\varepsilon) = \mathcal{U}'_{2c\varepsilon}$ onde $c > 0$ é a constante de Lipschitz.

Então se $y \in St[x,\mathcal{U}_\varepsilon]$ temos que $y, x \in B_d(z, \varepsilon)$ para algum $z \in M$. Dessa forma $d(y,x) < 2\varepsilon$. Agora, como f é lipschitziana, $d'(f(y), f(x)) \leq cd(y,x) < c2\varepsilon$.

Logo, $f(y) \in B_{d'}(f(x), 2c\varepsilon) \in \mathcal{U}'_{2c\varepsilon} = \mathcal{L}(\mathcal{U}_\varepsilon)$. Portanto, $f(St[x,\mathcal{U}_\varepsilon]) \subset St[f(x), \mathcal{L}(\mathcal{U}_\varepsilon)]$.

Agora, para $\mathcal{U}'_\varepsilon \in \mathcal{O}_{d'}(M')$ temos que $\mathcal{U}_{\frac{\varepsilon}{4c}} \in \mathcal{O}_d(M)$ é tal que $\mathcal{L}(\mathcal{U}_{\frac{\varepsilon}{4c}}) = \mathcal{U}'_{\frac{\varepsilon}{2}} \prec \mathcal{U}'_\varepsilon$. □

Proposição 2.4.3. *Sejam X e Y espaços admissíveis com famílias admissíveis $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_Y$, respectivamente. Se uma função $f : X \to Y$ é lipschitziana com respeito a $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_Y$, então f é uniformemente contínua.*

Demonstração: Seja $\mathcal{L} : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y$ a correspondência de Lipschitz e $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_Y$. Então existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X$ tal que $\mathcal{L}(\mathcal{U}) \prec \mathcal{V}$. Daí,

$$f(St[x,\mathcal{U}]) \subset St[f(x), \mathcal{L}(\mathcal{U})] \subset St[f(x), \mathcal{V}] \text{ qualquer que seja } x \in X$$

Portanto, f é uniformemente contínua. □

Proposição 2.4.4. *Sejam X e Y espaços admissíveis e $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_Y$ suas famílias admissíveis de coberturas abertas, respectivamente. Suponha que $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ é uma família de funções lipschitzianas com respeito à $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_Y$ com mesma correspondência de Lipschitz. Então $\mathcal{F}$ é uma família uniformemente equicontínua.*

Demonstração: Chame de $\mathcal{L}$ a correspondência de Lipschitz de cada $f \in \mathcal{F}$. Seja $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_Y$ e considere $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X$ tal que $\mathcal{L}(\mathcal{U}) \prec \mathcal{V}$. Então, para cada $f \in \mathcal{F}$ e $x \in X$, temos que $f(St[x,\mathcal{U}]) \subset St[f(x), \mathcal{L}(\mathcal{U})] \subset St[f(x), \mathcal{V}]$.

Portanto, $\mathcal{F}$ é uma família uniformemente equicontínua. □

2.5 Sistemas $\mathcal{O}$-compatíveis

Nesta seção introduziremos sobre um espaço admissível um sistema com intuito de obtermos uma estrutura semelhante a uma métrica.

Definição 2.5.1. *Seja X um espaço admissível e $\mathcal{O}$ uma família admissível de coberturas abertas de X. Uma função $\sigma : X \times X \to \overline{\Omega}$ de $X \times X$ em um conjunto pré-ordenado $\overline{\Omega}$ pela relação $\leq$ é dita* **compatível com a estrutura admissível de** X *(ou* $\mathcal{O}$**-compatível***) se existe um subconjunto $\Omega \subset \overline{\Omega}$ e uma função $\varsigma : \Omega \to \mathcal{O}$ satisfazendo:*

1. *Para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, existe $\omega \in \Omega$ tal que $\varsigma(\omega) \prec \mathcal{U}$.*

2. *$St[x, \varsigma(\omega)] = B_\sigma(x, \omega)$ para todo $x \in X$ e todo $\omega \in \Omega$, onde $B_\sigma(x, \omega)$ é definido por $B_\sigma(x, \omega) = \{y \in X; \sigma(x, y) < \omega\}$*

Se ς é sobrejetora a propriedade 1 é automaticamente satisfeita e, nesse caso, σ é chamada $\mathcal{O}$**-compatível forte**.

A quádrupla $(\sigma, \varsigma, \Omega, \overline{\Omega})$ é chamada **sistema $\mathcal{O}$-compatível de** X.

Vejamos alguns resultados envolvendo sistemas $\mathcal{O}$-compatíveis.

Proposição 2.5.2. *Seja X um espaço admissível munido de uma família admissível $\mathcal{O}$ de coberturas abertas. Se para cada par de pontos $x, y \in X$ existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $y \in St[x, \mathcal{U}]$, então X admite um sistema $\mathcal{O}$-compatível forte.*

Demonstração: Considere o conjunto $\overline{\Omega} = \mathcal{C}(X)$ de todas as coberturas de X munido com a relação de pré-ordem dada por: $\mathcal{W}_1 \leq \mathcal{W}_2 \Leftrightarrow \mathcal{W}_1 \prec \mathcal{W}_2$. Defina $\sigma : X \times X \to \mathcal{C}(X)$ por $\sigma(x, y) = \wedge\{\mathcal{V} \in \mathcal{O}; x, y \in V$ para algum $V \in \mathcal{V}\}$, onde $\wedge$ denota a interseção de coberturas apresentada na Definição 1.4.10.

Note que σ está bem definida pois para qualquer par de pontos $x, y \in X$ existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O} \subset \mathcal{C}(X)$ tal que $y \in St[x, \mathcal{U}]$, donde segue que $x, y \in U$ para algum $U \in \mathcal{U}$.

Considere agora $\Omega = \mathcal{O} \subset \mathcal{C}(X) = \overline{\Omega}$ e defina $\varsigma : \Omega \to \mathcal{O}$ por $\varsigma(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. Mostremos que $St[x, \varsigma(\mathcal{U})] = B_\sigma(x, \mathcal{U})$.

Seja $y \in St[x, \varsigma(\mathcal{U})] = St[x,\mathcal{U}]$. Então existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x, y \in U$. Logo, $\mathcal{U} \in \{\mathcal{V} \in \mathcal{O}; x, y \in V \text{ para algum } V \in \mathcal{V}\}$.

Tome W um elemento da cobertura $\sigma(x, y)$. Assim, $W = \bigcap_{\alpha \in L} V_\alpha$, onde cada V_α é um elemento de uma cobertura do conjunto $\{\mathcal{V} \in \mathcal{O}; x, y \in V \text{ para algum } V \in \mathcal{V}\}$. Dessa forma, para algum $\alpha' \in L$, $V_{\alpha'}$ é um elemento de $\mathcal{U}$. Então $W = \bigcap_{\alpha \in L} V_\alpha \subset V_{\alpha'} \in \mathcal{U}$.

Logo, $\sigma(x, y) \prec \mathcal{U}$. Assim, $y \in B_\sigma(x,\mathcal{U})$ e, portanto, $St[x, \varsigma(\mathcal{U})] \subset B_\sigma(x,\mathcal{U})$.

Agora, tome $y \in B_\sigma(x,\mathcal{U})$. Então, $\sigma(x, y) \prec \mathcal{U}$. Chame

$$\{\mathcal{V} \in \mathcal{O}; x, y \in V \text{ para algum } V \in \mathcal{V}\} = L$$

e denote por $V_\mathcal{W}$ o elemento de $\mathcal{W} \in L$ que contém x e y.

Assim, $\bigcap_{\mathcal{W} \in L} V_\mathcal{W}$ é um elemento da cobertura $\sigma(x, y)$. Então, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x, y \in \bigcap_{\mathcal{W} \in L} V_\mathcal{W} \subset U$. Logo, $y \in St[x,\mathcal{U}]$. Desse modo, $B_\sigma(x,\mathcal{U}) \subset St[x,\mathcal{U}] = St[x, \varsigma(\mathcal{U})]$.

Portanto, $St[x, \varsigma(\mathcal{U})] = B_\sigma(x,\mathcal{U})$.

Claramente ς é sobrejetora. Portanto, o sistema é $\mathcal{O}$-compatível forte. $\square$

O resultado a seguir nos permite caracterizar funções contínuas através dos sistemas compatíveis.

Proposição 2.5.3. *Sejam X e Y espaços admissíveis munidos respectivamente das famílias admissíveis $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_Y$ e suponha que $(\sigma_X, \varsigma_X, \Omega_X, \overline{\Omega}_X)$ e $(\sigma_Y, \varsigma_Y, \Omega_Y, \overline{\Omega}_Y)$ são sistemas $\mathcal{O}_X$-compatível e $\mathcal{O}_Y$-compatível, respectivamente. Então, uma função $f : X \to Y$ é contínua em um ponto $x \in X$ se, e somente se, para cada $\varepsilon \in \Omega_Y$ existe $\delta \in \Omega_X$ tal que $\sigma_X(x, y) < \delta$ implica $\sigma_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Demonstração: Suponha que $f : X \to Y$ é contínua em $x \in X$ e seja $\varepsilon \in \Omega_Y$. Então, pela Proposiçõ 2.3.1, para $\varsigma_Y(\varepsilon) \in \mathcal{O}_Y$ existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X$ tal que se $y \in St[x,\mathcal{U}]$, tem-se que $f(y) \in St[f(x), \varsigma_Y(\varepsilon)]$. Temos também que existe $\delta \in \Omega_X$ tal que $\varsigma_X(\delta) \prec \mathcal{U}$. Dessa forma, $St[x, \varsigma_X(\delta)] \subset St[x,\mathcal{U}]$.

Agora, se $\sigma_X(x, y) < \delta$, temos que $y \in B_{\sigma_X}(x, \delta)$. E como o sistema $(\sigma_X, \varsigma_X, \Omega_X, \overline{\Omega}_X)$ é $\mathcal{O}_X$-compatível, $B_{\sigma_X}(x, \delta) = St[x, \varsigma_X(\delta)]$. Daí, $y \in St[x,\mathcal{U}]$.

Desse modo, $f(y) \in St[f(x), \varsigma_Y(\varepsilon)]$ e visto que o sistema $(\sigma_Y, \varsigma_Y, \Omega_Y, \overline{\Omega}_Y)$ é $\mathcal{O}_Y$-compatível, $St[f(x), \varsigma_Y(\varepsilon)] = B_{\sigma_Y}(f(x), \varepsilon)$. Logo, $f(y) \in B_{\sigma_Y}(f(x), \varepsilon)$ e, portanto, $\sigma_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Reciprocamente, suponha que para cada $\varepsilon \in \Omega_Y$ existe $\delta \in \Omega_X$ tal que $\sigma_X(x, y) < \delta$ implica $\sigma_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Sejam $x \in X$ e $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_Y$. Então existe $\varepsilon \in \Omega_Y$ tal que $\varsigma_Y(\varepsilon) \prec \mathcal{V}$.

Tome $\delta \in \Omega_X$ tal que $\sigma_X(x, y) < \delta$ implica $\sigma_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ e considere $\mathcal{U} = \varsigma_X(\delta)$ em $\mathcal{O}_X$. Assim, se $y \in St[x, \mathcal{U}] = St[x, \varsigma_X(\delta)]$, temos que $y \in B_{\sigma_X}(x, \delta)$, pois $(\sigma_X, \varsigma_X, \Omega_X, \overline{\Omega}_X)$ é $\mathcal{O}_X$-compatível.

Logo, $\sigma_X(x, y) < \delta$, o que implica que $\sigma_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Donde, $f(y) \in B_{\sigma_Y}(f(x), \epsilon)$. Sendo $(\sigma_Y, \varsigma_Y, \Omega_Y, \overline{\Omega}_Y)$ $\mathcal{O}_Y$-compatível, temos que $B_{\sigma_Y}(f(x), \epsilon) = St[f(x), \varsigma_Y(\varepsilon)]$. E como $\varsigma_Y(\varepsilon) \prec \mathcal{V}$ tem-se que $St[f(x), \varsigma_Y(\varepsilon)] \subset St[f(x), \mathcal{V}]$.

Assim, $f(y) \in St[f(x), \mathcal{V}]$ e, pela Proposição 2.3.1, f é contínua. □

Com argumentos semelhantes ao da proposição anterior também podemos caracterizar continuidade uniforme da seguinte forma

Proposição 2.5.4. *Sejam X e Y espaços admissíveis munidos respectivamente das famílias admissíveis $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_Y$ e suponha que $(\sigma_X, \varsigma_X, \Omega_X, \overline{\Omega}_X)$ e $(\sigma_Y, \varsigma_Y, \Omega_Y, \overline{\Omega}_Y)$ são sistemas $\mathcal{O}_X$-compatível e $\mathcal{O}_Y$-compatível, respectivamente. Uma função $f : X \to Y$ é uniformemente contínua com respeito à $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_Y$ se, e somente se, para cada $\varepsilon \in \Omega_Y$ existe $\delta \in \Omega_X$ tal que $\sigma_X(x, y) < \delta$ implica $\sigma_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$, para quaisquer par de pontos $x, y \in X$.*

A próxima proposição nos dará um exemplo de sistema $\mathcal{O}$-compatível.

Proposição 2.5.5. *Seja (M, d) um espaço métrico e $\mathcal{O}_d(M)$ a família admissível de coberturas abertas como no Exemplo 2.1.5. Definindo $\sigma : M \times M \to \mathbb{R}^+$ por*
$\sigma(x, y) = \inf\{\varepsilon > 0; B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) \neq \emptyset\}$ e $\varsigma : \mathbb{R}^+_* \to \mathcal{O}_d(M)$ por $\varsigma(\varepsilon) = \mathcal{U}_\varepsilon$ temos que

1. *O sistema $(\sigma, \varsigma, \mathbb{R}^+_*, \mathbb{R}^+)$ é $\mathcal{O}_d(M)$-compatível forte;*

2. *$\frac{1}{2}d(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq d(x, y)$.*

Demonstração:

1. Sejam $x \in M$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}^+_*$. Tome $y \in St[x, \varsigma(\varepsilon)] = St[x, \mathcal{U}_\varepsilon]$. Então, $x, y \in B(z, \varepsilon)$ para algum $z \in M$. Assim, $z \in B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon)$. Logo, $\sigma(x, y) \leq \varepsilon$. Donde, $y \in B_\sigma(x, \varepsilon)$.

Se $y \in B_\sigma(x,\varepsilon)$, $\sigma(x,y) \leq \varepsilon$. Logo, $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) \neq \emptyset$. Dessa forma, para $z \in B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon)$ temos que $x, y \in B(z,\varepsilon)$, donde, $y \in St[x, \mathcal{U}_\varepsilon] = St[x, \varsigma(\varepsilon)]$.

Assim, $St[x,\varsigma(\varepsilon)] = B_\sigma(x,\varepsilon)$ para todo $x \in M$ e todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+_*$.

Observe que ς é claramente sobrejetora.

2. Seja $\varepsilon > 0$. Se existe $z \in B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon)$, então $x, y \in B(z,\varepsilon)$. Logo, $d(x,y) < 2\varepsilon$. Assim, $\frac{1}{2}d(x,y) < \varepsilon$, donde $\frac{1}{2}d(x,y)$ é uma cota inferior para o conjunto

$$\{\varepsilon > 0; B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) \neq \emptyset\}$$

Dessa forma, $\frac{1}{2}d(x,y) \leq \sigma(x,y)$. Agora, suponha por absurdo que $\sigma(x,y) > d(x,y)$. Então existe $c > 0$ tal que $\sigma(x,y) > c > d(x,y)$. Daí, $y \in B(x,c) \cap B(y,c)$. Logo, $\sigma(x,y) \leq c$, o que é um absurdo. Portanto, $\sigma(x,y) \leq d(x,y)$. $\square$

Capítulo 3

Grupos Topológicos

Neste capítulo estudaremos com base no capítulo 2 de [9] as propriedades topológicas de um grupo munido de uma topologia compatível com sua operação. Damos destaque à Seção 3.5 onde relacionaremos a teoria de grupos topológicos com a de espaços topológicos admissíveis.

O elemento neutro do grupo será denotado por 1 e sua operação será chamada de produto.

3.1 Definições e exemplos

Definição 3.1.1. *Um* **grupo topológico** *é um grupo G cujo conjunto subjacente está munido de uma topologia compatível com a operação do grupo, no sentido que*

1. *o produto $p : G \times G \to G$, $p(g,h) = gh$, é uma aplicação contínua quando se considera $G \times G$ com a topologia produto e*
2. *a aplicação $\iota : G \to G$, $\iota(g) = g^{-1}$, é contínua.*

Observação 3.1.2. *Uma forma alternativa de definirmos grupos topológicos é pedirmos a continuidade da aplicação $q : G \times G \to G$, definida por $q(g,h) = gh^{-1}$.*

De fato, se p e ι são contínuas a composição $(g,h) \mapsto (g,h^{-1}) \mapsto gh^{-1}$ é uma composição de aplicações contínuas e portanto é contínua. Mas tal composição é justamente q. Agora, se q é contínua, a composição $g \mapsto (1,g) \mapsto g^{-1}$ é uma composição de aplicações contínuas e portanto ι é contínua. Assim, a composição $(g,h) \mapsto (g,\iota(h)) = (g,h^{-1}) \mapsto g(h^{-1})^{-1} = gh$ é uma composição de aplicações contínuas e portanto p é contínua.

Definição 3.1.3. *Seja G um grupo. Cada $g \in G$ define as seguintes aplicações:*

1. $E_g : G \to G$, $E_g(h) = gh$, *chamada de* **translação à esquerda**.

2. $D_g : G \to G$, $D_g(h) = hg$, *chamada de* **translação à direita**.

3. $C_g : G \to G$, $C_g(h) = ghg^{-1}$, *chamada de* **conjugação**.

No caso em que G é um grupo topológico, as aplicações da definição acima são homeomorfismos. Com efeito, seja $g \in G$. Veja que $E_g \circ E_{g^{-1}} = E_{g^{-1}} \circ E_g = Id$, $D_g \circ D_{g^{-1}} = D_{g^{-1}} \circ D_g = Id$ e $C_g \circ C_{g^{-1}} = C_{g^{-1}} \circ C_g = Id$. Logo, as translações e a conjugação são bijetoras. E $E_g = p \circ s$, onde $s(h) = (g, h)$ é contínua e $D_g = p \circ s'$, onde $s'(h) = (h, g)$ que é contínua. Donde, E_g e D_g são contínuas e, assim, $C_g = E_g \circ D_{g^{-1}}$ também é contínua. Visto que $(E_g)^{-1} = E_{g^{-1}}$, $(D_g)^{-1} = D_{g^{-1}}$ e $(C_g)^{-1} = C_{g^{-1}}$ temos que as inversas das translações e a inversa da conjugação são contínuas.

Em geral aplicações definidas em espaços produtos podem ser contínuas em cada variável sem que a aplicação seja contínua, o que motiva a seguinte definição.

Definição 3.1.4. *Seja G um grupo cujo conjunto subjacente está munido de uma topologia. Se $p : G \times G \to G$, $p(g, h) = gh$, é contínuo em cada variável, isto é, todas as translações são contínuas, G é chamado* **grupo semi-topológico**.

Vejamos alguns exemplos de grupos topológicos.

Exemplo 3.1.5. $(\mathbb{R}^n, +)$ e $(\mathbb{R}_*, \cdot)$ com a topologia usual são grupos topológicos.

Exemplo 3.1.6. Qualquer grupo em que o conjunto subjacente é munido com a topologia discreta é um grupo topológico.

Exemplo 3.1.7. Seja G um grupo topológico e X um espaço topológico. Denote por $\mathcal{C}(X, G)$ o conjunto de todas as aplicações contínuas de X em G. Note que as composições $x \mapsto (f(x), g(x)) \mapsto f(x)g(x)$ e $x \mapsto f(x) \mapsto f(x)^{-1}$ são contínuas. Dessa forma, $\mathcal{C}(X, G)$ tem uma estrutura de grupo com o produto $(fg)(x) = f(x)g(x)$, cuja inversa é $f^{-1}(x) = f(x)^{-1}$. Munindo $\mathcal{C}(X, G)$ com a topologia do compacto-aberto, que tem como base de abertos os conjuntos $A_{K,U} = \{f \in \mathcal{C}(X, G); f(K) \subset U\}$, onde $K \subset X$ é compacto e $U \subset G$ é aberto, $\mathcal{C}(X, G)$ é um grupo topológico. De fato, primeiramente mostremos que a função

$\lambda : \mathcal{C}(X,G) \times \mathcal{C}(X,G) \to \mathcal{C}(X, G\times G)$, definida por $\lambda(f,g) = h_{f,g}$ com $h_{f,g}(x) = (f(x), g(x))$ é contínua quando se considera em $\mathcal{C}(X, G\times G)$ a topologia do compacto-aberto.

Seja $A_{K,V\times W}$ aberto básico de $\mathcal{C}(X, G\times G)$, onde V e W são abertos de G. Se $(f,g) \in \lambda^{-1}(A_{K,V\times W})$, então $h_{f,g}(K) \subset V \times W$. Logo $f(K) \subset V$ e $g(K) \subset W$, donde $(f,g) \in A_{K,V} \times A_{K,W}$. E como $A_{K,V} \times A_{K,W} \subset \lambda^{-1}(A_{K,V\times W})$ temos que λ é contínua.

Chame de $q_{\mathcal{C}}$ e q as aplicações da Observação 3.1.2 referentes a $\mathcal{C}(X,G)$ e G, respectivamente. Como G é grupo topológico, q é cotínua, assim $q^{-1}(U)$ é aberto em $G \times G$, qualquer que seja $U \subset G$ aberto. Tome $U \subset G$ aberto e $K \subset X$ compacto. Mostremos que $q_{\mathcal{C}}^{-1}(A_{K,U}) = \lambda^{-1}(A_{K,q^{-1}(U)})$. Com efeito,

$$(f,g) \in q_{\mathcal{C}}^{-1}(A_{K,U}) \Leftrightarrow \forall x \in K, f(x)g(x)^{-1} \in U \Leftrightarrow \forall x \in K, q(f(x), g(x)) \in U \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in K, (f(x), g(x)) \in q^{-1}(U) \Leftrightarrow \lambda(f,g) \in A_{K,q^{-1}(U)} \Leftrightarrow (f,g) \in \lambda^{-1}(A_{K,q^{-1}(U)}).$$

E como λ é contínua, seque que $q_{\mathcal{C}}^{-1}(A_{K,U})$ é aberto e, portanto, $\mathcal{C}(X,G)$ é um grupo topológico.

Exemplo 3.1.8. Seja $\{G_\alpha\}_{\alpha\in L}$ uma família de grupos topológicos. O conjunto $G = \prod_{\alpha\in L} G_\alpha$ munido com a operação coordenada a coordenada e com $1_G = (1_\alpha)_{\alpha\in L}$, onde cada 1_α denota o elemento neutro de G_α, tem estrutura de grupo. Se considerarmos em G a topologia produto G é um grupo topológico. De fato, para cada $\alpha \in L$, seja $p_\alpha : G_\alpha \times G_\alpha \to G_\alpha$ a operação produto no grupo G_α e chame de p a operação produto no grupo G. Como o produto em G é feito coordenada a coordenada, $p = (p_\alpha)_{\alpha\in L}$, e como cada G_α é grupo topológico, todas as coordenadas de p são contínuas, logo p é contínua. Da mesma forma a operação inversão em G pode ser demonstrada que é contínua.

3.2 Vizinhanças do elemento neutro

Observe que se U é um aberto não vazio de um grupo topológico G, para todo $g \in U$, Ug^{-1} e $g^{-1}U$ são vizinhanças abertas da identidade de G e reciprocamente, se V é uma vizinhança de 1, então, para todo $g \in G$, gV e Vg são vizinhanças de g. Dessa forma, estudar a topologia de um grupo topológico se resume a estudar as vizinhanças da identidade.

Definição 3.2.1. *Sejam A e B subconjuntos de um grupo G e $g \in G$.*

1. $E_g(A) = \{gx; x \in A\}$ *é denotado simplesmente por* gA *e de forma semelhante definimos* $Ag = \{xg; x \in A\}$.

2. $AB = \{xy; x \in A \text{ e } y \in B\}$.

3. $A^2 = AA$, $A^3 = A^2A = AA^2$, *etc.*

4. $A^{-1} = \{x^{-1}; x \in A\}$.

5. *Se* $A^{-1} = A$, A *é chamado conjunto* **simétrico**.

Definição 3.2.2. *Seja G um grupo. Um* **sistema de vizinhanças da identidade** *é qualquer família $\mathcal{V}$ de subconjuntos de G que satisfaz:*

(T1) $U \in \mathcal{V} \Rightarrow 1 \in U$;

(T2) $U_1, U_2 \in \mathcal{V} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{V}$;

(GT1) $U \in \mathcal{V} \Rightarrow V^2 \subset U$, *para algum* $V \in \mathcal{V}$;

(GT2) $U \in \mathcal{V} \Rightarrow U^{-1} \in \mathcal{V}$;

(GT3) Para todo $g \in G$ *e* $U \in \mathcal{V}$, $gUg^{-1} \in \mathcal{V}$.

Vejamos dois exemplos importantes de sistema de vizinhanças da identidade em grupos topológicos.

Exemplo 3.2.3. Num grupo topológico G a família $\mathcal{V}(1)$ de todas as vizinhanças abertas da identidade é um sistema de vizinhanças da identidade. De fato, as propriedades T1 e T2 valem para as vizinhanças de um ponto num espaço topológico qualquer. Já GT1 segue da continuidade do produto e GT2 segue do fato que a aplicação inversão é um homeomorfismo. Por fim, GT3 segue de que a aplicação conjugação é um homeomorfismo e $g1g^{-1} = 1$.

Exemplo 3.2.4. O conjunto $\mathcal{V}_s$ das vizinhanças abertas e simétricas da identidade de um grupo topológico G é um sistema de vizinhanças da identidade. Com efeito, T1 e GT2 são óbvias. Verifiquemos T2. Tome $U, V \in \mathcal{V}_s$, é claro que $U \cap V$ é vizinhança aberta de 1, se $z \in (U \cap V)^{-1}$, então $z = a^{-1}$, onde $a \in U \cap V$. Logo, $z \in U^{-1} \cap V^{-1} = U \cap V$, donde $(U \cap V)^{-1} \subset U \cap V$. Agora, se $z \in U \cap V$, temos que $z^{-1} \in U^{-1} \cap V^{-1} = U \cap V$. Assim, como $z = (z^{-1})^{-1}$, temos que $z \in (U \cap V)^{-1}$. Dessa forma, $U \cap V \subset (U \cap V)^{-1}$ e, portanto, T2 é satisfeita.

Repare que $\mathcal{V}_s \subset \mathcal{V}(1)$, então para $U \in \mathcal{V}_s$, existe $W \in \mathcal{V}(1)$ tal que $W^2 \subset U$. Mas repare que $V = W \cap W^{-1} \in \mathcal{V}_s$. Dessa forma, $V^2 \subset W^2 \subset U$. Logo, GT1 é satisfeita.

Agora, sejam $g \in G$ e $U \in \mathcal{V}_s$. Se $z \in (gUg^{-1})^{-1}$, então $z = (gug^{-1})^{-1} = (g^{-1})^{-1}u^{-1}g^{-1} = gu^{-1}g^{-1}$, para algum $u \in U$. Como $U = U^{-1}$, $u^{-1} \in U$. Logo, $z = gu^{-1}g^{-1} \in gUg^{-1}$, donde $(gUg^{-1})^{-1} \subset gUg^{-1}$. Por outro lado, se $z \in gUg^{-1}$, $z = gug^{-1}$, para algum $u \in U \subset U^{-1}$. Assim, $z = g\bar{u}^{-1}g^{-1}$ para algum $\bar{u} \in U$. Dessa forma $z = g\bar{u}^{-1}g^{-1} = (g\bar{u}g^{-1})^{-1} \in (gUg^{-1})^{-1}$. Donde $gUg^{-1} \subset (gUg^{-1})^{-1}$ e portanto GT3 é satisfeita.

Demonstraremos mais adiante que um sistema de vizinhanças da identidade define de forma única a topologia de um grupo topológico. Para isso precisaremos do conceito de topologia invariante à esquerda e invariante à direita.

Definição 3.2.5. *Uma topologia τ num grupo G é dita* **invariante à esquerda** *se gA é aberto para todo $g \in G$ e todo $A \in \tau$. Se Ag é aberto para todo $g \in G$ e todo $A \in \tau$, a topologia é dita* **invariante à direita**.

Observe que uma topologia é invariante à esquerda (ou direita) se, e somente se, as translações à esquerda (ou direita) são contínuas (e, portanto, homeomorfismos). E mais, se τ é uma topologia de um grupo G que é invariante à esquerda a topologia produto em $G \times G$ é invariante à esquerda pois $(g, h)(A \times B) = gA \times hB$, quaisquer que sejam $g, h \in G$ e $A, B \subset G$. O mesmo vale quando τ é invariante à direita.

Lema 3.2.6. *Seja τ uma topologia num grupo G que é invariante à esquerda e à direita. Então, G é um grupo topológico se, e somente se,*

1. *$p : G \times G \to G$, $p(g, h) = gh$, é contínua em $(1, 1)$;*

2. $\iota : G \to G$, $\iota(g) = g^{-1}$, *é contínua em* 1.

Demonstração: A ida segue da definição de grupo topológico. Sejam $E_{(g,h)}$ e $D_{(g,h)}$ translações à esquerda e à direita em $G \times G$, respectivamente.

Então, $p \circ E_{(g,1)} = E_g \circ p$ e $p \circ D_{(1,g)} = D_g \circ p$. Dessa forma, para $(g,h) \in G \times G$, $p \circ E_{(g,1)} \circ D_{(1,h)} = E_g \circ D_h \circ p$. O segundo membro dessa igualdade é contínua em $(1,1)$ pois $E_g \circ D_h$ é um homeomorfismo. Portanto, $p \circ E_{(g,1)} \circ D_{(1,h)}$ é contínua em $(1,1)$. Mas $E_{(g,1)} \circ D_{(1,h)}$ é um homeomorfismo, donde $p = (p \circ E_{(g,1)} \circ D_{(1,h)}) \circ (E_{(g,1)} \circ D_{(1,h)})^{-1}$ é contínua em $E_{(g,1)} \circ D_{(1,h)}(1,1) = (g,h)$.

Por outro lado, $D_{g^{-1}} \circ \iota$ é contínua em 1, logo, $\iota \circ E_g = D_{g^{-1}} \circ \iota$ é contínua em 1. Portanto, $\iota = (\iota \circ E_g) \circ (E_g)^{-1}$ é contínua em $E_g(1) = g$. □

Agora estamos aptos a mostrar que um sistema de vizinhanças da identidade define a topologia de um grupo topológico.

Teorema 3.2.7. *Seja G um grupo e suponha que $\mathcal{V}$ é um sistema de vizinhanças da identidade. Então existe uma única topologia τ que torna G um grupo topológico de tal forma que $\mathcal{V}$ é uma base de vizinhanças da identidade.*

Demonstração: Defina $\tau = \{A \subset G; \forall g \in A, \exists U \in \mathcal{V}$ tal que $gU \subset A\} \cup \{\emptyset\}$. Mostremos que de fato τ é uma topologia em G.

Claramente G e $\emptyset$ pertencem à τ. Seja $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L} \subset \tau$ e tome $g \in \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Então $g \in A_{\lambda'}$, para algum $\lambda' \in L$. Dessa forma existe $U \in \mathcal{V}$ tal que $gU \subset A_{\lambda'} \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ e, portanto, $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \tau$.

Agora, para $A, B \in \tau$ e tome $x \in A \cap B$, então existem $U, V \in \mathcal{V}$ tais que $xU \subset A$ e $xV \subset B$. Por T2, $U \cap V \in \mathcal{V}$. Mas, $x(U \cap V) = xU \cap xV$. Assim, $x(U \cap V) \subset A \cap B$ e, portanto $A \cap B \in \tau$.

Logo, τ é uma topologia em G.

Mostremos que os elementos de $\mathcal{V}$ são vizinhanças de 1. Com efeito, seja $U \in \mathcal{V}$ e defina $W = \{g \in U; gV \subset U,$ para algum $V \in \mathcal{V}\}$. Claramente $1 \in W \subset U$. Assim, se $W \in \tau$

temos o desejado. Tome $g \in W$, então existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $gV \subset U$. Por GT1, existe $V' \in \mathcal{V}$ tal que $V'^2 \subset V$. Observe que $V' \subset V'^2$, dessa forma, para qualquer $v' \in V'$, $gv' \in gV' \subset gV \subset U$. Além disso, $gv'V' \subset gV'^2 \subset gV \subset U$. Logo, $gv' \in W$ e, portanto, $gV' \subset W$. O que prova que $W \in \tau$.

Por outro lado, se A é uma vizinhança de 1, então existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $1V = V \subset A$. Logo, $\mathcal{V}$ é uma base de vizinhanças em 1.

Vejamos agora que τ é invariante à esquerda e à direita. De fato, seja $A \in \tau$ e $g \in G$. Se $x \in gA$, então $g^{-1}x \in A$. Logo, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $g^{-1}xV \subset A$, donde $xV \subset gA$ e, assim, $gA \in \tau$. Com argumentos semelhantes mostramos que τ é invariante à direita.

Dessa forma, para provar que G é um grupo topológico basta usarmos o lema anterior. Mas as continuidades de p e ι são equivalentes as propriedades GT1 e GT2, respectivamente. Assim, G é um grupo topológico.

Por fim, suponha que τ' é outra topologia que tenha $\mathcal{V}$ como base de vizinhanças em 1. Realizando translações à esquerda podemos constatar que $\{gV; V \in \mathcal{V}\}$ é uma base de vizinhanças em $g \in G$. Portanto, para todo $A \in \tau'$ e $g \in A$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $gV \subset A$. Logo, $A \in \tau$. Assim, $\tau' \subset \tau$. A outra inclusão é análoga, bastando alternar os papéis de τ e τ'. Portanto, $\tau' = \tau$. □

A proposição a seguir nos dará um critério para que a topologia de um grupo topológico seja de Hausdorff.

Proposição 3.2.8. *Seja G um grupo topológico e $\mathcal{V}(1)$ a família de todas as vizinhanças abertas da identidade. Então são equivalentes:*

1. *A topologia de G é Hausdorff.*

2. *$\{1\}$ é um conjunto fechado.*

3. $\displaystyle\bigcap_{U \in \mathcal{V}(1)} U = \{1\}$

Demonstração: Numa topologia Hausdorff todo conjunto unitário é fechado, então 1 implica 2. Seja $x \in G$ tal que $x \neq 1$. Como $\{1\}$ é fechado, existe $V \in \mathcal{V}(1)$ tal que $1 \notin x^{-1}V$, ou seja, $x \notin V$. Logo, 2 implica 3.

Por fim, suponha que $\bigcap_{U \in \mathcal{V}(1)} U = \{1\}$. Se $x \neq 1$, existe $U \in \mathcal{V}(1)$ tal que $x \notin U$. Daí, tomando $V \in \mathcal{V}(1)$ tal que $V^2 \subset U$ temos que $V \cap xV^{-1} = \emptyset$. De fato, se $z \in V \cap xV^{-1}$, $z = u = xv^{-1}$, para $u, v \in V$. Assim, $x = uv \in V^2 \subset U$, o que contradiz a escolha de U. Tome agora $y, z \in G$ tais que $y \neq z$. Então, existem abertos U_1, U_2 tais que $y^{-1}z \in U_1$ e $1 \in U_2$, com $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Assim, os abertos yU_1 e yU_2 separam z de y. Portanto 3 implica 1. □

3.3 Homomorfismos

Os homomorfismos de grupos constituem uma parte importante no estudo da teoria de grupos. Nesta seção veremos um pouco da forma com que eles se relacionam com a topologia de um grupo topológico.

Proposição 3.3.1. *Sejam G e H grupos topológicos e $\phi : G \to H$ um homomorfismo. Então ϕ é contínua, se e somente se, ϕ é contínua na identidade de G.*

Demonstração: Se ϕ é contínua então é contínua em todos os elementos de G, em particular em 1_G. Suponha que ϕ é contínua em 1_G. Como ϕ é homomorfismo, vale que $\phi \circ E_g = E_{\phi(g)} \circ \phi$ para todo $g \in G$. Já que o segundo membro é contínuo em 1_G, pois é composição de contínuas em 1_G, segue que $\phi \circ E_g$ é contínua em 1_G e visto que E_g é homeomorfismo, segue que $\phi = (\phi \circ E_g) \circ (E_g)^{-1}$ é contínuo em $E_g(1_G) = g$. □

Enunciaremos dois lemas que serão úteis para caracterização dos gráficos de homomorfismos no contexto topológico. O primeiro lema é um resultado conhecido da teoria de grupos e o segundo da teoria de espaços topológicos.

Lema 3.3.2. *Seja $\phi : G \to H$ uma aplicação entre grupos.*

(a) ϕ é homomorfismo se, e somente se, graf$\phi = \{(x, \phi(x)); x \in G\}$ é um subgrupo de $G \times H$

(b) Se ϕ é homomorfismo, G e grafϕ são isomorfos pela aplicação $x \mapsto (x, \phi(x))$.

(c) Um subgrupo $\Gamma \subset G \times H$ é gráfico de um homomorfismo se, e somente se, $\pi_1 |_\Gamma$ é um isomorfismo, onde π_1 é a projeção na primeira coordenada.

Lema 3.3.3. *Seja X um espaço topológico e Y um espaço de Hausdorff. Se $f : X \to Y$ é contínua, então o gráfico de f é fechado em $X \times Y$.*

Proposição 3.3.4. *Sejam G e H grupos topológicos tal que H é de Hausdorff. Uma aplicação $\phi : G \to H$ é um homomorfismo contínuo se, e somente se, seu gráfico é um subgrupo fechado de $G \times H$ homeomorfo a G.*

Demonstração: Suponha que $\phi : G \to H$ é um homomorfismo contínuo. Pelo Lema 3.3.2 o gráfico de ϕ é subgrupo de $G \times H$ e pelo Lema 3.3.3 ele é fechado em $G \times H$. Agora, como ϕ é contínua, a aplicação $l : G \to$ grafϕ dada por $l(x) = (x, \phi(x))$ é contínua com sua inversa $l^{-1} = \pi_1 :$ graf$\phi \to G$, $l^{-1}(x, \phi(x)) = x$ também contínua. Logo, G e grafϕ são homeomorfos.

Reciprocamente, se graf$\phi \subset G \times H$ é fechado e homeomorfo a G, então, para todo fechado $F \subset H$, $(G \times F) \cap$ grafϕ é um fechado de grafϕ. Assim, $\pi_1((G \times F) \cap \text{graf}\phi)$ é fechado em G, mas $\pi_1((G \times F) \cap \text{graf}\phi) = \phi^{-1}(F)$ e, portanto, ϕ é contínua. □

Definição 3.3.5. *Um* **isomorfismo topológico** *é um isomorfismo entre grupos topológicos que é um homeomorfismo.*

3.4 Subgrupos de grupos topológicos

Uma pergunta natural é se subgrupos de grupos topológicos continuam grupos topológicos ao considerarmos sobre eles a topologia do subespaço. O resultado a seguir responde a essa pergunta.

Proposição 3.4.1. *Seja G um grupo topológico e H um subgrupo de G. Munindo H com a topologia do subespaço ele se torna um grupo topológico.*

Demonstração: Chame de p a aplicação produto em G e denote p_H a restrição de p à H. Repare que para qualquer $A \subset G$ vale que $p_H^{-1}(A \cap H) = p^{-1}(A) \cap (H \times H)$. De fato, se $(x, y) \in p^{-1}(A) \cap (H \times H)$, então $x, y \in H$ e $p(x, y) \in A$. Como $x, y \in H$, $p(x, y) = p_H(x, y)$, logo, $(x, y) \in p_H^{-1}(A \cap H)$.

Agora, se $(x, y) \in p_H^{-1}(A \cap H) \subset H \times H$, $p_H(x, y) = p(x, y) \in A \cap H \subset A$, assim $(x, y) \in p^{-1}(A) \cap (H \times H)$.

Seja $B = A \cap H$ um aberto de H. Então, $p_H^{-1}(B) = p_H^{-1}(A \cap H) = p^{-1}(A) \cap (H \times H)$. Como G é grupo topológico e A é aberto em G, $p^{-1}(A)$ é aberto em $G \times G$. Assim, $p^{-1}(A) \cap (H \times H)$ é um aberto da topologia do subespaço em $H \times H$. Mas a topologia do subespaço coincide com a topologia produto em $H \times H$ pois, $(U \times V) \cap (H \times H) = (U \cap H) \times (V \cap H)$, quaisquer que sejam $U, V \subset G$. Portanto, p_H é contínua.

Da mesma forma, usando $\iota_H^{-1}(A \cap H) = \iota^{-1}(A) \cap H$, para todo $A \subset G$, mostra-se que $\iota_H : H \to H$, $\iota_H(h) = \iota(h)$, é contínua. □

A proposição anterior sugere a seguinte definição.

Definição 3.4.2. *Um subgrupo H de um grupo topológico G munido da topologia do subespaço é chamado* **subgrupo topológico**.

A seguir serão veremos alguns resultados envolvendo propriedades topológicas dos subgrupos de um grupo G. Mas antes vejamos um lema que nos será útil nas demonstrações desses resultados.

Lema 3.4.3. *Seja X um espaço topológico e $\phi : X \to X$ um homeomorfismo. Suponha que $A \subset X$ é um subconjunto invariante por ϕ, isto é, $\phi(A) \subset A$. Então,*

1. *$\overline{A}$ é invariante por ϕ.*
2. *Se $\phi(B) \subset \overline{B}$, então $\phi(\overline{B}) \subset \overline{B}$.*
3. *$int(A)$ é invariante por ϕ.*

Demonstração:

1. Como ϕ é contínua, para todo $C \subset X$ vale que $\phi(\overline{C}) \subset \overline{\phi(C)}$. Daí, $\phi(\overline{A}) \subset \overline{\phi(A)}$. E como A é invariante por ϕ, $\overline{\phi(A)} \subset \overline{A}$.

2. Novamente pela continuidade de ϕ temos que $\phi(\overline{C}) \subset \overline{\phi(C)}$ para todo $C \subset X$. E já que $\phi(B) \subset \overline{B}$, tem-se $\overline{\phi(B)} \subset \overline{\overline{B}} = \overline{B}$.

3. Seja $y \in \phi(\text{int}(A))$. Então $y = \phi(x)$ para algum $x \in \text{int}(A)$, logo, existe aberto $U \subset X$ tal que $x \in U \subset A$. Assim, pelo homeomorfismo de ϕ, $\phi(U)$ é um aberto de X tal que $x \in \phi(U) \subset \phi(A)$. E como A é invariante por ϕ, segue que $y \in \phi(U) \subset \phi(A) \subset A$. Donde, $y \in \text{int}(A)$. Portanto, $\phi(\text{int}(A)) \subset \text{int}(A)$. □

Proposição 3.4.4. *Seja G um grupo topológico.*

1. *Se $H \subset G$ um subgrupo, então $\overline{H}$ também é subgrupo.*

2. *Se $H \subset G$ é um subgrupo normal, então $\overline{H}$ é um subgrupo normal.*

Demonstração:

1. Como H é subgrupo, $1 \in H$, mas $H \subset \overline{H}$. Logo, $1 \in \overline{H}$. Mostremos que $\overline{H}$ é fechado em relação ao produto do grupo.

Como H é subgrupo, se $x \in H$, $E_x(H) \subset H$. Visto que G é grupo topológico, E_x é homeomorfismo, daí, pelo lema anterior, $E_x(\overline{H}) \subset \overline{H}$. Logo, se $x \in H$, $xy \in \overline{H}$, para todo $y \in \overline{H}$. O que significa, $D_y(H) \subset \overline{H}$ para todo $y \in \overline{H}$. E já que D_y é homeomorfismo, pelo lema anterior, $D_y(\overline{H}) \subset \overline{H}$ para todo $y \in \overline{H}$. Logo, $\overline{H}$ é fechado em relação ao produto do grupo.

Agora, como H é subgrupo de G, $\iota(H) \subset H$ e como G é grupo topológico, ι é homeomorfismo. Então pelo lema anterior, $\iota(\overline{H}) \subset \overline{H}$. Portanto, $\overline{H}$ é subgrupo de G.

2. Como H é subgrupo normal de G, $gHg^{-1} \subset H$, para todo $g \in G$, ou seja, $C_g(H) \subset H$, para todo $g \in G$. E como G é grupo topológico, C_g é um homeomorfismo para todo $g \in G$. Logo, pelo lema anterior, $C_g(\overline{H}) \subset \overline{H}$, para todo $g \in G$. Portanto, $\overline{H}$ é um subgrupo normal de G. □

Proposição 3.4.5. *Seja G um grupo topológico e $H \subset G$ um subgrupo de G. Se int$(H) \neq \emptyset$, então H é aberto.*

Demonstração: Seja $x \in \text{int}(H)$. Note que para $y \in H$, $E_{yx^{-1}}(\text{int}(H))$ é um aberto tal que $y \in E_{yx^{-1}}(\text{int}(H)) \subset H$. De fato, como G é grupo topológico, as translações à esquerda são homeomorfismos e visto que $\text{int}(H)$ é aberto, segue que $E_{yx^{-1}}(\text{int}(H))$ é aberto. Tem-se também que $y = E_{yx^{-1}}(x)$, donde $y \in E_{yx^{-1}}(\text{int}(H))$. Agora, para $h \in \text{int}(H) \subset H$, $E_{yx^{-1}}(h) = yx^{-1}h$ e já que y, x^{-1} e h pertencem à H e H é subgrupo, segue que $yx^{-1}h \in H$. Assim, $E_{yx^{-1}}(\text{int}(H)) \subset H$. Portanto, H é aberto. □

Proposição 3.4.6. *Seja G um grupo topológico e $H \subset G$ um subgrupo de G. Se H é aberto, então H é fechado.*

Demonstração: Se H é aberto, para todo $g \in G$, as classes laterais $gH = \{gh; h \in H\}$ são abertas pois como G é grupo topológico as translações à esquerda são homeomorfismos. E já que as classes laterais particionam G e $hH = H$, para todo $h \in H$, pois H é subgrupo, temos que $G = (\bigcup_{g \in G \setminus H} gH) \cup H$. Donde, $G \setminus H = \bigcup_{g \in G \setminus H} gH$ é uma união de abertos. Portanto H é fechado. □

Observação 3.4.7. *A última proposição nos garante que subgrupos abertos de um grupo topológico são uniões de componentes conexas do grupo. Em particular se um grupo topológico é conexo ele é o único de seus subgrupos abertos.*

Com efeito, seja A é um subconjunto aberto e fechado de um espaço topológico X e seja $C \subset X$ uma componente conexa tal que $C \cap A \neq \emptyset$. Se C não está contido em A, então $A \subset C$ ou $A \cap C$, mas $A \neq C$. Daí, $C = (A \cap C) \cup ((X - A) \cap C)$ é uma separação para C, o que é um absurdo, pois componentes conexas são conjuntos conexos. Logo, $C \subset A$.

A próxima proposição nos descreve qualquer componente conexa de um grupo topológico G através da componente conexa que contém a identidade do grupo. Essa componente será chamada **componente da identidade** e será denotada por G_0.

Proposição 3.4.8. *Seja G um grupo topológico. Então,*

1. *G_0 é um subgrupo fechado e normal de G.*

2. *C é componente conexa de G se, e somente se, C é uma translação de G_0.*

Demonstração:

1. Primeiramente verifiquemos que G_0 é subgrupo de G. Seja $g \in G_0$. Como G_0 é conexo e E_g é homeomorfismo, $E_g(G_0)$ é conexo. Agora, repare que $g \in E_g(G_0)$, pois $g = E_g(1)$. Logo, $G_0 \cap E_g(G_0) \neq \emptyset$. E já que todo conexo está contido em uma única componente conexa, segue que $E_g(G_0) \subset E_0$. Assim, para quaisquer $g, h \in G_0$, $gh = E_g(h) \in G_0$.

Da mesma forma temos que $\iota(G_0)$ é um conexo tal que $\iota(G_0) \cap G_0 \neq \emptyset$, pois $1 \in \iota(G_0) \cap G_0$. Assim, $\iota(G_0) \subset G_0$. Dessa forma, para todo $g \in G_0$, $g^{-1} = \iota(g) \in G_0$. Portanto, G_0 é subgrupo de G.

Note que para um espaço topológico qualquer as componentes conexas são fechadas. De fato, se C é uma componente conexa de um espaço topológico X, então C é conexo, e assim, $\overline{C}$ é conexo. Agora, como $\overline{C} \cap C \neq \emptyset$ pois $C \subset \overline{C}$, temos que $\overline{C} \subset C$, donde C é fechado.

Para verificar que G_0 é normal, basta lembrar que para todo $g \in G$ as conjugações C_g são homeomorfismos quando G é um grupo topológico. Assim, qualquer que seja $g \in G$, o conexo $C_g(G_0)$ intercepta G_0, pois $1 = g1g^{-1} \in C_g(G_0) \cap G_0$. Logo, $C_g(G_0) \subset G_0$, para todo $g \in G$. Donde, $gG_0g^{-1} \subset G_0$, para todo $g \in G_0$ e portanto G_0 é subgrupo normal de G.

2. Seja $C \subset G$ uma componente conexa de G e tome $g \in C$. Então $E_g(G_0) = gG_0$ é conexo. Logo, gG_0 está contido em uma única componente conexa. Mas repare que $gG_0 \cap C \neq \emptyset$, pois $g = g1 \in gG_0$ e $g \in C$. Logo, $gG_0 \subset C$.

Agora, suponha por absurdo que C não está contido em gG_0. Então existe $c \in C$ tal que $c \notin gG_0$. Assim, $g^{-1}c$ pertence ao conexo $g^{-1}C$ e não pertence à G_0, o que é um absurdo pois, já que $1 = g^{-1}g \in g^{-1}C \cap G_0$, o conexo $g^{-1}C$ deveria estar contido em G_0.

Reciprocamente, se $g \in G$, $C = gG_0$ é um conexo. Então C está contido em uma única componente conexa de G. Chame esta componente de C'. Da mesma forma como fizemos na ida obtemos um absurdo se C' não estiver contido em $C = gG_0$. Assim, $C = C'$ é uma componente conexa. □

Em geral a componente da identidade não é um subgrupo aberto. No caso do subgrupo $(\mathbb{Q}, +)$ de $(\mathbb{R}, +)$, onde $\mathbb{R}$ está com a topologia usual e $\mathbb{Q}$ com a topologia do subespaço, a componente da identidade é o conjunto $\{0\}$, pois os únicos conexos de $\mathbb{Q}$ são os conjuntos unitários. Mas $\{0\}$ não é aberto em $\mathbb{Q}$.

Já no caso em que o grupo topológico é localmente conexo, a componente da identidade é um subgrupo aberto.

Proposição 3.4.9. *Se um grupo topológico G é localmente conexo, então G_0 é um subgrupo aberto de G.*

Demonstração: Se G é localmente conexo, existe um conexo aberto U contendo 1. Assim, $U \cap G_0 \neq \emptyset$, pois $1 \in U \cap G_0$. Logo, $1 \in U \subset G_0$, donde, $\text{int}(G_0) \neq \emptyset$. Portanto pela Proposição 3.4.5, G_0 é um subgrupo aberto de G. $\square$

O resultado a seguir mostra uma forma de gerar grupos conexos.

Proposição 3.4.10. *Seja G um grupo topológico conexo e seja U uma vizinhança aberta da identidade. Então $G = \bigcup_{n\geq 1} U^n$.*

Demonstração: Seja $V = U \cap U^{-1}$ uma vizinhança simétrica contida em U. Então $\bigcup_{n\geq 1} V^n \subset \bigcup_{n\geq 1} U^n$. Dessa forma, basta mostrar que $G = \bigcup_{n\geq 1} V^n$, pois $\bigcup_{n\geq 1} U^n \subset G$.

Mostremos que $\bigcup_{n\geq 1} V^n$ é subgrupo de G.

Como V é vizinhança simétrica da identidade, $1 \in V \subset \bigcup_{n\geq 1} V^n$. Se $a, b \in \bigcup_{n\geq 1} V^n$, então $a \in V^{n_1}$ e $b \in V^{n_2}$, onde $n_1, n_2 \geq 1$. Daí, $ab \in V^{n_1+n_2} \subset \bigcup_{n\geq 1} V^n$.

Note que para todo $n \geq 1$, $(V^n)^{-1} = V^n$, logo, se $x \in \bigcup_{n\geq 1} V^n$, então $x \in V^{n_0}$ para algum $n_0 \geq 1$. Assim, $x^{-1} \in (V^{n_0})^{-1} = V^{n_0} \subset \bigcup_{n\geq 1} V^n$.

Portanto, $\bigcup_{n\geq 1} V^n$ é subgrupo de G.

Repare agora que $\text{int}(\bigcup_{n\geq 1} V^n) \neq \emptyset$, pois V é um aberto tal que $1 \in V \subset \bigcup_{n\geq 1} V^n$. Logo, pela Proposição 3.4.5, $\bigcup_{n\geq 1} V^n$ é aberto e, pela Proposição 3.4.6, também é fechado. Sendo G conexo, seus únicos subconjunto abertos e fechados são $\emptyset$ e G, como $1 \in \bigcup_{n\geq 1} V^n$, tem-se que $\bigcup_{n\geq 1} V^n = G$.

Assim, $G = \bigcup_{n\geq 1} V^n \subset \bigcup_{n\geq 1} U^n$ e, portanto, $G = \bigcup_{n\geq 1} U^n$. □

3.5 Aspectos admissíveis em grupos topológicos

Nesta seção faremos uso da família de vizinhanças simétricas abertas da identidade e de suas propriedades apresentadas na Definição 3.2.2 para construir uma família admissível de coberturas abertas em um grupo topológico G e provaremos alguns resultados sobre esse novo espaço admissível.

Proposição 3.5.1. *Seja G um grupo topológico e $\mathcal{V}$ a família das vizinhanças simétricas abertas da identidade de G. Para cada $V \in \mathcal{V}$, defina a cobertura aberta $\mathcal{R}_V$ de G por $\mathcal{R}_V = \{Vg; g \in G\}$ e a cobertura aberta $\mathcal{L}_V$ por $\mathcal{L}_V = \{gV; g \in G\}$.*

Então, para todo $g \in G$ e $V \in \mathcal{V}$, valem

1. $St[1, \mathcal{R}_V] = St[1, \mathcal{L}_V] = V^2$.
2. $St[g, \mathcal{R}_V] = St[1, \mathcal{R}_V]g = V^2 g$.
3. $St[g, \mathcal{L}_V] = gSt[1, \mathcal{L}_V] = gV^2$.

Demonstração:

1. Seja $x \in St[1, \mathcal{R}_V]$. Então, existe $g \in G$ tal que $x, 1 \in Vg$. Dessa forma, existem $v, v_0 \in V$ tais que $1 = v_0 g$ e $x = vg$. Donde, $x = vg = vg1 = vg1^{-1} = vg(g^{-1}v_0^{-1}) = vv_0^{-1}$. Agora, como V é simétrica, $v_0^{-1}, v^{-1} \in V^{-1} = V$, daí, $x \in vV \subset V^2$ e $1 = vv^{-1} \in vV$. Logo, $x \in St[1, \mathcal{L}_V]$ e $x \in V^2$. Donde, $St[1, \mathcal{R}_V] \subset St[1, \mathcal{L}_V]$ e $St[1, \mathcal{R}_V] \subset V^2$.

Por outro lado, se $x \in St[1, \mathcal{L}_V]$, existe $g \in G$ tal que $x, 1 \in gV$. Assim, $1 = gv_0$ e $x = gv$, onde $v, v_0 \in V$. Então, $x = gv = 1gv = 1^{-1}gv = (v_0^{-1}g^{-1})gv = v_0^{-1}v$. E já que V é simétrica, $v_0^{-1}, v^{-1} \in V^{-1} = V$. Logo, $x \in Vv$ e $1 = v^{-1}v \in Vv$, donde $x \in St[1, \mathcal{R}_V]$ e, assim, $St[1, \mathcal{L}_V] \subset St[1, \mathcal{R}_V]$. Logo, $St[1, \mathcal{R}_V] = St[1, \mathcal{L}_V]$.

Agora, se $x \in V^2$, existem $v_1, v_2 \in V$ tais que $x = v_1v_2$. Assim, $x \in Vv_2$ e, como V é simétrica, $v_2^{-1} \in V^{-1} = V$, logo, $1 = v_2^{-1}v_2 \in Vv_2$. Donde $x \in St[1, \mathcal{R}_V]$ e, assim, $V^2 \subset St[1, \mathcal{R}_V]$. Portanto, $St[1, \mathcal{R}_V] = St[1, \mathcal{L}_V] = V^2$.

2. Se $x \in St[g_0, \mathcal{R}_V]$, existe $g \in G$ tal que $x, g_0 \in Vg$. Daí, $x = vg$ e $g_0 = v_0g$, onde $v, v_0 \in V$. Logo, $x = vg = v(v_0^{-1}g_0) = (vv_0^{-1})g_0$. Perceba que $vv_0^{-1} \in V^2$ pois $v_0^{-1} \in V^{-1} = V$. Assim, pelo item anterior $vv_0^{-1} \in St[1, \mathcal{R}_V]$ e, portanto, $x = (vv_0^{-1})g_0 \in St[1, \mathcal{R}_V]g_0$. Desse modo, $St[g_0, \mathcal{R}_V] \subset St[1, \mathcal{R}_V]g_0$.

Agora, se $x \in St[1, \mathcal{R}_V]g_0$, pelo item anterior, existem $v_1, v_2 \in V$ tais que $x = v_1v_2g_0$. Assim, $x \in V(v_2g_0)$ e como V é simétrica, $v_2^{-1} \in V^{-1} = V$, daí $g_0 = v_2^{-1}(v_2g_0) \in V(v_2g_0)$. Dessa forma, $x \in St[g_0, \mathcal{R}_V]$. Portanto, $St[g_0, \mathcal{R}_V] = St[1, \mathcal{R}_V]g_0 = V^2g_0$.

3. Segue de maneira análoga ao item anterior. □

Teorema 3.5.2. *Seja G um grupo topológico e $\mathcal{V}$ a família de vizinhanças simétricas abertas da identidade de G. Para cada $V \in \mathcal{V}$ defina $\mathcal{R}_V$ e $\mathcal{L}_V$ como na proposição anterior. Então $\mathcal{O}_R = \{\mathcal{R}_V; V \in \mathcal{V}\}$ e $\mathcal{O}_L = \{\mathcal{L}_V; V \in \mathcal{V}\}$ são famílias admissíveis de coberturas abertas de G.*

Demonstração:

Faremos a demonstração para a família de coberturas $\mathcal{O}_R$, o caso de $\mathcal{O}_L$ é análogo.

Seja $\mathcal{R}_U \in \mathcal{O}_R$. Por GT1, temos que existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V^2 \subset U$. Então, $\mathcal{R}_V \prec \frac{1}{2}\mathcal{R}_U$. Com efeito, sejam $Vg_1, Vg_2 \in \mathcal{R}_V$ tais que $Vg_1 \cap Vg_2 \neq \emptyset$. Então existe $g \in Vg_1 \cap Vg_2$. Se $x \in Vg_1$, existem $v, v_1 \in V$ tais que $x = vg_1$ e $g = v_1g_1$. Logo, $x = vg_1 = v(v_1^{-1}g) = (vv_1^{-1})g$. Como V é simétrica $v_1^{-1} \in V^{-1} = V$, daí, $vv_1^{-1} \in V^2 \subset U$. Assim, $x = (vv_1^{-1})g \in V^2g \subset Ug$. Logo, $Vg_1 \subset Ug \in \mathcal{R}_U$. De forma análoga se mostra que $Vg_2 \subset Ug \in \mathcal{R}_U$. Então, $Vg_1 \cup Vg_2 \subset Ug \in \mathcal{R}_U$ e, portanto, $\mathcal{R}_V \prec \frac{1}{2}\mathcal{R}_U$.

Agora, sejam $\mathcal{R}_{U_1}, \mathcal{R}_{U_2} \in \mathcal{O}_R$. Por T2, $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{V}$, então por GT1 existe $V \in \mathcal{V}$ tal que

$V^2 \subset U_1 \cap U_2$, mas como cada elemento de $\mathcal{V}$ contém 1, temos que $V \subset V^2$, logo, $V \subset U_1 \cap U_2$. Desse modo, $\mathcal{R}_V \prec \mathcal{R}_{U_1}$ e $\mathcal{R}_V \prec \mathcal{R}_{U_2}$.

De fato, seja $Vg \in \mathcal{R}_V$. Como $V \subset U_1 \cap U_2 \subset U_1$, temos que $Vg \subset U_1 g \in \mathcal{R}_{U_1}$, donde $\mathcal{R}_V \prec \mathcal{R}_{U_1}$. Da mesma maneira se mostra que $\mathcal{R}_V \prec \mathcal{R}_{U_2}$.

Assim, $\mathcal{O}_R$ satisfaz as condições 1 e 3 da Definição 2.1.2. Para provar a condição 2 utilizaremos o Lema 2.1.3. Seja $K \subset G$ um compacto e $A \subset G$ um aberto tal que $K \subset A$. Note que para cada $x \in K$, o aberto $Y_x = Ax^{-1}$ contém 1. Logo, $U_x = Y_x \cap Y_x^{-1} \in \mathcal{V}$. Então, por GT1 existe $V_x \in \mathcal{V}$ tal que $V_x^2 \subset U_x$. Então, $\mathcal{R}_{V_x} \in \mathcal{O}_R$, é tal que $St[x, \mathcal{R}_{V_x}] \subset A$. De fato,

$$St[x, \mathcal{R}_{V_x}] = V_x^2 x \subset U_x x = (Y_x \cap Y_x^{-1})x \subset Y_x x = (Ax^{-1})x = A$$

Logo, todas as hipóteses do lema 2.1.3 estão satisfeitas. Assim, existe $\mathcal{R}_W \in \mathcal{O}_R$ tal que $St[K, \mathcal{R}_W] \subset A$.

Portanto, $\mathcal{O}_R$ é uma família admissível de coberturas abertas de G. □

Definição 3.5.3. *Seja G um grupo topológico. As famílias de coberturas $\mathcal{O}_R$ e $\mathcal{O}_L$ definidas no teorema acima são chamadas* **família admissível à direita** *e* **família admissível à esquerda***, respectivamente.*

A seguir, vejamos alguns resultados envolvendo grupos topológicos e sua estrutura admissível. Faremos forte uso das propriedades sobre as estrelas da Proposição 3.5.1. Os resultados que abordarem apenas a família admissível à direita também podem ser verificados de forma análoga para a família admissível à esquerda.

Proposição 3.5.4. *Seja G um grupo topológico munido da família admissível à direita e $g \in G$. As translações E_g e D_g são uniformemente contínuas.*

Demonstração: Primeiramente verifiquemos para a translação à esquerda. Seja $\mathcal{R}_V \in \mathcal{O}_R$ e tome $\mathcal{R}_U \in \mathcal{O}_R$, onde $U^2 \subset g^{-1}Vg$. Dessa forma, para $x \in G$,

$$E_g(St[x, \mathcal{R}_U]) = E_g(U^2 x) = g(U^2 x) \subset g(g^{-1}Vgx) \subset V^2(gx) = V^2 E_g(x) = St[E_g(x), \mathcal{R}_V]$$

Donde segue que E_g é uniformemente contínua.

No caso da translação à direita, para $\mathcal{R}_V \in \mathcal{O}_R$ temos que para todo $x \in G$,

$$D_g(St[x, \mathcal{R}_V]) = D_g(V^2x) = (V^2x)g = V^2(xg) = V^2D_g(x) = St[D_g(x), \mathcal{R}_V]$$

Logo, D_g também é uniformemente contínua. $\square$

Proposição 3.5.5. *Sejam G e H grupos topológicos e $\mathcal{O}_R(G)$, $\mathcal{O}_R(H)$ suas respectivas famílias admissíveis à direita. Se $\phi : G \to H$ é um isomorfismo topológico, então ϕ é lipschitziana com respeito à $\mathcal{O}_R(G)$ e $\mathcal{O}_R(H)$ e, consequentemente, é uniformemente contínua.*

Demonstração: Primeiramente observe que se U é uma vizinhança aberta e simétrica da identidade de G, então $\phi(U)$ é uma vizinhança aberta e simétrica da identidade de H. De fato, como ϕ é isomorfismo e $1_G \in U$ temos que $1_H = \phi(1_G) \in \phi(U)$ e mais, visto que ϕ é homeomorfismo temos que $\phi(U)$ é um aberto de H. Agora, se $y \in \phi(U)^{-1}$, tem-se que $y = \phi(u)^{-1}$ para algum $u \in U$. Sendo ϕ isomorfismo temos que $y = \phi(u)^{-1} = \phi(u^{-1})$. Logo, $y \in \phi(U^{-1})$, mas sendo U simétrico temos que $y \in \phi(U^{-1}) = \phi(U)$. Logo, $\phi(U)^{-1} \subset \phi(U)$. Por outro lado, se $y \in \phi(U)$, $y = \phi(u)$ para algum $u \in U$. Mas como U é simétrico, $u = u'^{-1}$ para algum $u' \in U$. Daí, $y = \phi(u'^{-1})$, e como ϕ é isomorfismo $\phi(u'^{-1}) = \phi(u')^{-1}$. Dessa forma, $y = \phi(u')^{-1} \in \phi(U)^{-1}$, donde segue que $\phi(U) \subset \phi(U)^{-1}$ e, assim, $\phi(U)$ é uma vizinhança aberta e simétrica da identidade de H.

Desse modo $\mathcal{L} : \mathcal{O}_R(G) \to \mathcal{O}_R(H)$ dada por $\mathcal{L}(\mathcal{R}_U) = \mathcal{R}_{\phi(U)}$ fica bem definida. Mostremos que $\mathcal{L}$ é a correspondência de Lipschitz.

Seja $\mathcal{R}_V \in \mathcal{O}_R(H)$. Como a inversa de um isomorfismo é um isomorfismo temos que $\phi^{-1}(V)$ é uma vizinhança aberta e simétrica da identidade de G. Assim, $\mathcal{R}_{\phi^{-1}(V)} \in \mathcal{O}_R(G)$ e é tal que $\mathcal{L}(\mathcal{R}_{\phi^{-1}(V)}) = \mathcal{R}_V \prec \mathcal{R}_V$.

Agora, sejam $x \in G$ e $\mathcal{R}_U \in \mathcal{O}_R(G)$. Então $\phi(St[x, \mathcal{R}_U]) = \phi(U^2x) = \phi(U^2)\phi(x)$. Sendo ϕ isomorfismo temos que $\phi(U^2) \subset \phi(U)^2$. Logo,

$$\phi(St[x, \mathcal{R}_U]) \subset \phi(U)^2(x) = St[\phi(x), \mathcal{R}_{\phi(U)}] = St[x, \mathcal{L}(\mathcal{R}_U)]$$

Portanto, ϕ é lipschitziana com respeito à $\mathcal{O}_R(G)$ e $\mathcal{O}_R(H)$. $\square$

O próximo resultado pode ser facilmente demonstrado fazendo uso da composição de aplicações contínuas, como feito no Exemplo 3.1.7. Apresentaremos uma outra demonstração que ilustra o uso das propriedades de um grupo topológico admissível.

Proposição 3.5.6. *Seja X um espaço topológico admissível com família admissível de coberturas abertas $\mathcal{O}$ e G um grupo topológico com a família admissível $\mathcal{O}_R$. Se $f : X \to G$ e $g : X \to G$ são funções contínuas, então*

1. *$fg : X \to G$, definida por $fg(x) = f(x)g(x)$, é contínua.*
2. *$f^{-1} : X \to G$, definida por $f^{-1}(x) = f(x)^{-1}$, é contínua.*

Demonstração:

1. Sejam $x \in X$ e $\mathcal{R}_V \in \mathcal{O}_R$. Por GT3 temos que $f(x)^{-1}Vf(x) \in \mathcal{V}$. Logo, por GT1 existem $U_1, U_2 \in \mathcal{V}$ tais que $U_1^2 \subset V$ e $U_2^2 \subset f(x)^{-1}Vf(x)$.

Como f e g são contínuas, existem $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{O}$ tais que se $y \in St[x, \mathcal{U}_1]$, $f(y) \in St[f(x), \mathcal{R}_{U_1}]$ e se $y \in St[x, \mathcal{U}_2]$, $g(y) \in St[g(x), \mathcal{R}_{U_2}]$.

Como X é admissível, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{U} \prec \mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U} \prec \mathcal{U}_2$. Dessa forma, se $y \in St[x, \mathcal{U}]$, então $fg(y) \in St[fg(x), \mathcal{R}_V]$.

De fato, seja $y \in St[x, \mathcal{U}]$. Então $y \in St[x, \mathcal{U}_1]$ e $y \in St[x, \mathcal{U}_2]$, pois $\mathcal{U} \prec \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$. Logo, $f(y) \in St[f(x), \mathcal{R}_{U_1}]$ e $g(y) \in St[g(x), \mathcal{R}_{U_2}]$. Assim,

$$fg(y) = f(y)g(y) \in St[f(x), \mathcal{R}_{U_1}]St[g(x), \mathcal{R}_{U_2}] = U_1^2 f(x) U_2^2 g(x) \subset Vf(x)f(x)^{-1}Vf(x)g(x)$$

Donde temos que $fg(y) \in VVf(x)g(x) = V^2 f(x)g(x) = V^2 fg(x) = St[fg(x), \mathcal{R}_V]$. Portanto, fg é contínua.

2. Sejam $x \in X$ e $\mathcal{R}_V \in \mathcal{O}_R$. Tome $U \in \mathcal{V}$ tal que $U^2 \subset f(x)Vf(x)^{-1}$. Como f é contínua, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que se $y \in St[x, \mathcal{U}]$, $f(y) \in St[f(x), \mathcal{R}_U]$. Desse modo, se $y \in St[x, \mathcal{U}]$, temos que $f^{-1}(y) = f(y)^{-1} \in (St[f(x), \mathcal{R}_U])^{-1} = (U^2 f(x))^{-1} \subset f(x)^{-1}(U^2)^{-1}$. Como U é simétrico, $(U^2)^{-1} = U^2$. Daí,

$$f^{-1}(y) = f(y)^{-1} \in f(x)^{-1}(U^2)^{-1} = f(x)^{-1}U^2 \subset f(x)^{-1}f(x)Vf(x)^{-1}$$

Logo, $f^{-1}(y) \in Vf(x)^{-1} = Vf^{-1}(x) \subset V^2 f^{-1}(x) = St[f^{-1}(x), \mathcal{R}_V]$. Portanto, f^{-1} é contínua. $\square$

No caso em que o grupo topológico é compacto as funções fg e f^{-1} definidas acima são uniformemente contínuas quando f e g são uniformemente contínuas. Para provar este resultado precisaremos do seguinte lema que se encontra em [2] página 34:

Lema 3.5.7. *Seja G um grupo topológico compacto e $\mathcal{V}$ a família de vizinhanças abertas simétricas da identidade de G. Então, para cada $V \in \mathcal{V}$, existe $U \in \mathcal{V}$ tal que $gUg^{-1} \subset V$, para todo $g \in G$.*

Demonstração: Seja $V \in \mathcal{V}$. Tome $W \in \mathcal{V}$ tal que $W^3 \subset V$. Tal W existe pois, por GT1 existe $W' \in \mathcal{V}$ tal que $W'^2 \subset V$. Assim, novamente por GT1, existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $W^2 \subset W'$. Dessa forma, $W^3 = W^2W \subset W'W \subset W'W^2 \subset W'W' = W'^2 \subset V$.

Sendo G compacto, a cobertura $\{Wg\}_{g \in G}$ admite subcobertura finita, digamos, $\{Wg_i\}_{i=1,\dots,n}$. Note que, por T2 e GT3, $U = \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1} W g_i \in \mathcal{V}$.

Agora, tome $g \in G$. Então $g = wg_j$, onde $j \in \{1, \dots, n\}$. Daí,

$$gUg^{-1} = wg_jUg_j^{-1}w^{-1} \subset wg_j(g_j^{-1}Wg_j)g_j^{-1}w^{-1} = wWw^{-1} \subset W^3 \subset V$$

$\square$

Proposição 3.5.8. *Seja X um espaço topológico admissível com família admissível de coberturas abertas $\mathcal{O}$ e G um grupo topológico compacto com a família admissível $\mathcal{O}_R$. Se $f : X \to G$ e $g : X \to G$ são funções uniformemente contínuas, então*

1. *$fg : X \to G$, $fg(x) = f(x)g(x)$, é uniformemente contínua.*

2. *$f^{-1} : X \to G$, $f^{-1}(x) = f(x)^{-1}$, é uniformemente contínua.*

Demonstração:

1. Seja $\mathcal{R}_V \in \mathcal{O}_R$. Pelo lema anterior, existe $U \in \mathcal{V}$ tal que $U \subset g^{-1}Vg$, para todo $g \in G$. Dessa forma, existem $U_1, U_2 \in \mathcal{V}$ tais que $U_1^2 \subset V$ e $U_2^2 \subset U$.

Sendo f e g uniformemente contínuas, existem $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{O}$ tais que $f(St[x,\mathcal{U}_1]) \subset St[f(x), \mathcal{R}_{U_1}]$ e $g(St[x,\mathcal{U}_2]) \subset St[g(x), \mathcal{R}_{U_2}]$, para todo $x \in X$.

Como X é admissível, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{U} \prec \mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U} \prec \mathcal{U}_2$. Agora, seja $x \in G$ e tome $y \in St[x,\mathcal{U}]$. Então,

$$fg(y) = f(y)g(y) \in St[f(x), \mathcal{R}_{U_1}]St[g(x), \mathcal{R}_{U_2}] = U_1^2 f(x) U_2^2 g(x) \subset V f(x) U g(x)$$

Assim,

$$fg(y) \in V f(x) U g(x) \subset V f(x) f(x)^{-1} V f(x) g(x) = V V f(x) g(x) = V^2 fg(x) = St[fg(x), \mathcal{R}_V]$$

Portanto, fg é uniformemente contínua.

2. Seja $\mathcal{R}_V \in \mathcal{O}_R$ e tome $U \in \mathcal{V}$ tal que $U \subset gVg^{-1}$, para todo $g \in G$, e $U' \in \mathcal{V}$ tal que $U'^2 \subset U$. Como f é uniformemente contínua, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $f(St[x,\mathcal{U}]) \subset St[f(x), \mathcal{R}_{U'}]$, para todo $x \in X$. Então, para $x \in X$, se $y \in St[x,\mathcal{U}]$ temos que

$$f^{-1}(y) = f(y)^{-1} \in (St[f(x), \mathcal{R}_{U'}])^{-1} = (U'^2 f(x))^{-1} = f(x)^{-1}(U'^2)^{-1} = f(x)^{-1} U'^2 \subset f(x)^{-1} U$$

Daí,

$$f^{-1}(y) \in f(x)^{-1} U \subset f(x)^{-1} f(x) V f(x)^{-1} = V f(x)^{-1} = V f^{-1}(x) \subset V^2 f^{-1}(x) = St[f^{-1}(x), \mathcal{R}_V]$$

Portanto, f^{-1} é uniformemente contínua. □

Observe que se o grupo topológico G é abeliano a proposição acima se mantém verdadeira.

Proposição 3.5.9. *Seja X um espaço topológico admissível com família admissível de coberturas abertas $\mathcal{O}$ e G um grupo topológico abeliano com a família admissível $\mathcal{O}_R$. Se $f : X \to G$ e $g : X \to G$ são funções uniformemente contínuas, então*

1. *$fg : X \to G$, $fg(x) = f(x)g(x)$, é uniformemente contínua.*

2. *$f^{-1} : X \to G$, $f^{-1}(x) = f(x)^{-1}$, é uniformemente contínua.*

Demonstração:

1. Seja $\mathcal{R}_V \in \mathcal{O}_R$. Tome $U_1, U_2 \in \mathcal{V}$ tais que $U_1^2 \subset V$ e $U_2^2 \subset V$.

Sendo f e g uniformemente contínuas, existem $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{O}$ tais que $f(St[x,\mathcal{U}_1]) \subset St[f(x), \mathcal{R}_{U_1}]$ e $g(St[x,\mathcal{U}_2]) \subset St[g(x), \mathcal{R}_{U_2}]$, para todo $x \in X$.

Como X é admissível, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{U} \prec \mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U} \prec \mathcal{U}_2$. Agora, seja $x \in G$ e tome $y \in St[x,\mathcal{U}]$. Então,

$$fg(y) = f(y)g(y) \in St[f(x), \mathcal{R}_{U_1}]St[f(x), \mathcal{R}_{U_2}] = U_1^2 f(x) U_2^2 g(x) \subset Vf(x)Vg(x)$$

Já que G é abeliano, $Vf(x)Vg(x) = VVf(x)g(x)$. Logo, $fg(y) \in VVf(x)g(x) = V^2 f(x)g(x) = St[fg(x), \mathcal{R}_V]$. Portanto, fg é uniformemente contínua.

2. Seja $\mathcal{R}_V \in \mathcal{O}_R$ e tome $U \in \mathcal{V}$ tal que $U^2 \subset V$. Como f é uniformemente contínua, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $f(St[x,\mathcal{U}]) \subset St[f(x), \mathcal{R}_U]$, para todo $x \in X$. Então, para $x \in X$, se $y \in St[x,\mathcal{U}]$ temos que

$$f^{-1}(y) = f(y)^{-1} \in (St[f(x), \mathcal{R}_U])^{-1} = (U^2 f(x))^{-1} = f(x)^{-1}(U^2)^{-1} = f(x)^{-1}U^2$$

E como G é abeliano, $f(x)^{-1}U^2 = U^2 f(x)^{-1}$. Logo, $f^{-1}(y) \in U^2 f(x)^{-1} \subset Vf^{-1}(x) \subset V^2 f^{-1}(x) = St[f^{-1}(x), \mathcal{R}_V]$. Portanto, f^{-1} é uniformemente contínua. □

Proposição 3.5.10. *Um grupo topológico G admite um sistema $\mathcal{O}_R$-compatível forte.*

Demonstração: Considere em $\mathcal{F} = \{F \subset G; 1 \in F\}$ a relação de pré-ordem:

$$F_1 \leq F_2 \Leftrightarrow \text{ existe } g \in G \text{ tal que } F_1 \subset F_2 g$$

Defina $\sigma : G \times G \to \mathcal{F}$ por $\sigma(g,h) = \cap\{Vx; V \in \mathcal{V}, x \in V, gh^{-1} \in Vx\}$ e $\varsigma : \mathcal{V} \to \mathcal{O}_R$ por $\varsigma(V) = \mathcal{R}_V$. Então o sistema $(\sigma, \varsigma, \mathcal{V}, \mathcal{F})$ é $\mathcal{O}_R$-compatível forte.

De fato, σ está bem definida pois como cada $V \in \mathcal{V}$ é simétrico, $1 = x^{-1}x \in Vx$ quando $x \in V$. Agora, sejam $V \in \mathcal{V}$ e $g \in G$. Se $h \in St[g, \varsigma(V)] = St[g, \mathcal{R}_V]$, então $g \in St[h, \mathcal{R}_V] = V^2 h$. Daí, $gh^{-1} \in V^2$. Logo, $gh^{-1} \in Vx$, para algum $x \in V$ e, pela definição de σ, tem-se que $\sigma(g,h) \subset Vx$, o que implica que $\sigma(g,h) < V$, donde $h \in B_\sigma(g,V)$. Assim, $St[g, \varsigma(V)] \subset B_\sigma(g,V)$.

Por outro lado, se $h \in B_\sigma(g,V)$, $\sigma(g,h) < V$, ou seja, $\sigma(g,h) \subset Vy$, para algum $y \in G$. Dessa forma, $1 \in Vy$. Donde, $y = v^{-1}1$, para algum $v \in V$. Sendo V simétrica temos que $y = v^{-1} \in V^{-1} = V$. Assim, $gh^{-1} \in \sigma(g,h) \subset Vy \subset V^2$. Daí, $hg^{-1} = (gh^{-1})^{-1} \in (V^2)^{-1} = V^2$. Logo, $h \in V^2 g = St[g, \mathcal{R}_V] = St[g, \varsigma(V)]$. Assim, $B_\sigma(g,V) \subset St[g, \varsigma(\mathcal{R}_V)]$.

Logo, $St[g, \varsigma(\mathcal{R}_V)] = B_\sigma(g,V)$.

Agora, para $\mathcal{R}_V \in \mathcal{O}_R$, tome $V \in \mathcal{V}$. Então $\varsigma(V) = \mathcal{R}_V = \mathcal{R}_V$.

Portanto, o sistema $(\sigma, \varsigma, \mathcal{V}, \mathcal{F})$ é $\mathcal{O}_R$-compatível forte. □

Um outro sistema compatível sobre um grupo topológico G é obtido se definirmos σ da proposição anterior por $\sigma(g,h) = \{1, hg^{-1}\}$.

3.6 Ações de grupos

Nesta seção estudaremos as ações de grupos no contexto topológico quando o grupo envolvido for um grupo topológico.

3.6.1 Descrição algébrica

Definição 3.6.1. *Uma* **ação à esquerda** *de um grupo G num conjunto X é uma função a que associa a cada $g \in G$ uma aplicação $a(g) : X \to X$ que satisfaz:*

1. *$a(1) = Id_X$, isto é, $a(1)(x) = (x)$, para todo $x \in X$.*

2. *$a(gh) = a(g) \circ a(h)$, para todo $g, h \in G$.*

Uma **ação à direita** *é definida de forma análoga substituindo a propriedade 2 por $a(gh) = a(h) \circ a(g)$. Quando tal função existe, diremos que G* **age à esquerda** *(ou* **à direita***)* **sobre** *X.*

Essas propriedades garantem que cada $a(g)$ é uma bijeção, pois $a(g) \circ a(g^{-1}) = Id_X = a(g^{-1}) \circ a(g)$. Isto nos possibilita definir ação à esquerda como sendo um homomorfismo

$a : G \to \mathcal{B}(X)$, onde $\mathcal{B}(X)$ é o grupo das bijeções de X com a operação da composição de funções.

De forma alternativa, uma ação à esquerda é definida como sendo uma aplicação $\phi : G \times X \to X$ satisfazendo

1. $\phi(1, x) = x$, para todo $x \in X$.

2. $\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x))$, para todo $g, h \in G$ e todo $x \in X$.

Repare que $a(g)$ é a aplicação ϕ quando a primeira coordenada é fixada, ou seja, $a(g) = \phi_g$, onde $\phi_g : X \to X$ é dada por $\phi_g(x) = \phi(g, x)$. Outra aplicação associada à ϕ é obtida fixando $x \in X$, isto é, $\phi_x : G \to X$, $\phi_x(g) = \phi(g, x) = a(g)(x)$.

Normalmente na teoria de ação de grupos os símbolos a ou ϕ são omitidos. Assim, uma ação à esquerda escreve-se apenas $g(x)$, $g \cdot x$ ou gx ao invés de $a(g)(x)$. Com essas notações uma ação à esquerda satisfaz:

1. $1x = x$, para todo $x \in X$.

2. $(gh)x = g(hx)$, para todo $g, h \in G$ e todo $x \in X$.

No que se segue serão tratadas apenas ações à esquerda, visto que se a é uma ação à esquerda de G em X, então a aplicação $a^{'}(g) = a(g^{-1})$ é uma ação à direita.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.6.2. Para o grupo $G = (\mathbb{Z}, +)$ e o conjunto $X = \mathbb{R}$, $\phi(n, x) = n + x$ é uma ação de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}$

Exemplo 3.6.3. O grupo $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ das matrizes inversíveis com entradas reais age sobre $\mathbb{R}^n$ pela ação canônica $\phi(A, x) = Ax$, onde o x do segundo membro é a matriz coluna cujas entradas são as coordenadas de x.

Exemplo 3.6.4. Seja G um grupo e $H \subset G$ um subgrupo de G. Denote por G/H o conjunto das classes de equivalência da relação de equivalência em G em que $x \sim y \Leftrightarrow y^{-1}x \in H$. Note que a classe de equivalência de $x \in G$ é o conjunto xH. Desse modo, $\phi(g, xH) = (gx)H$ é uma ação de G em G/H.

A seguir veremos algumas definições e resultados clássicos da teoria de ação de grupos que nos serão úteis ao longo do capítulo.

Definição 3.6.5. *Seja G um grupo agindo sobre um conjunto X. Dado $x \in X$, definimos sua* **órbita** *por G como sendo o conjunto $Gx = \{gx \in X; g \in G\}$.*

De forma mais geral, se $A \subset G$, então $Ax = \{gx; g \in A\}$, isto é, $Ax = \phi_x(A)$.

Observação 3.6.6. *Cada órbita é uma classe de equivalência segundo uma relação de equivalência em X dada por: $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G; y = gx$. Assim, duas órbitas ou são disjuntas ou coincidem.*

Definição 3.6.7. *Seja G um grupo agindo sobre um conjunto X. Um subconjunto $B \subset X$ é dito ser* **G-invariante** *se $gB = \{gb; b \in B\} \subset B$ para todo $g \in G$.*

Observação 3.6.8. *Um conjunto G-invariante B é uma união de órbitas. De fato, se B é G-invariante, $Gb \subset B$, para todo $b \in B$. Logo, $\bigcup_{b \in B} Gb \subset B$. Por outro lado, $B \subset \bigcup_{b \in B} Gb$.*

Definição 3.6.9. *Seja G um grupo agindo sobre um conjunto X. Dado, $x \in X$, o conjunto G_x dos elementos de G que fixam x, isto é,*

$$G_x = \{g \in G; gx = x\}$$

é chamado **estabilizador de** x.

Observação 3.6.10. *O estabilizador de $x \in X$ é um subgrupo de G, pois para quaisquer $g, h \in G_x$, $(gh)x = g(hx) = gx = x$ e $1x = x$. Assim, $gh \in G_x$. E como $a(g^{-1}) = a(g)^{-1}$, tem-se que $g^{-1}x = x$ quando $gx = x$.*

Dessa forma, o estabilizador de x também é chamado de **subgrupo de isotropia de** x.

Proposição 3.6.11. *Seja G um grupo agindo sobre um conjunto X. Se para $x, y \in X$ existe $g \in G$ tal que $y = gx$, então $G_y = gG_xg^{-1}$.*

Demonstração: Por definição $h \in G_y$, se, e só se, $h(gx) = gx$, pois $y = gx$. Aplicando g^{-1} a esta igualdade temos que $g^{-1}(h(gx)) = g^{-1}(gx)$. Donde, $(g^{-1}hg)x = (g^{-1}g)x = 1x = x$. Logo, $(g^{-1}hg) \in G_x$ e, assim, $h \in gG_xg^{-1}$ se, e somente se, $h \in gG_xg^{-1}$. □

Definição 3.6.12. *Seja G um grupo agindo sobre um conjunto X.*

1. *A ação é dita* **efetiva** *se* $\bigcap_{x \in X} G_x = \{1\}$.

2. *A ação é dita* **livre** *se* $G_x = \{1\}$, *para todo* $x \in X$.

3. *A ação é dita* **transitiva** *se para todo par de elementos* $x, y \in X$ *existe* $g \in G$ *tal que* $y = gx$.

Proposição 3.6.13. *Seja G um grupo agindo transitivamente sobre um conjunto X e tome $x \in X$. Então a aplicação $\xi_x : G/G_x \to X$, $\xi_x(gG_x) = gx$, é uma bijeção.*

Demonstração: Note que ξ_x está bem definida, pois se g_1 e g_2 estão na mesma classe temos que

$$g_1G_x = g_2G_x \Leftrightarrow g_2^{-1}g_1 \in G_x \Leftrightarrow (g_2^{-1}g_1)x = x \Leftrightarrow g_1x = g_2x$$

Pela volta das equivalências, ξ_x também é injetora.

Agora, seja $y \in X$, como a ação é transitiva existe $g \in G$ tal que $y = gx$. Logo $gG_x \in G/G_x$ é tal que $\xi_x(gG_x) = y$. Donde, ξ_x é sobrejetora.

Portanto, ξ_x é uma bijeção. □

Observação 3.6.14. *A identificação acima se aplica de imediato às órbitas de uma ação $\phi : G \times X \to X$ qualquer, pois para $x \in X$, $\overline{\phi} : G \times Gx \to Gx$, $\overline{\phi}(g, y) = \phi(g, y)$, é uma ação transitiva sobre Gx. Dessa forma, através da proposição anterior, podemos identificar G/G_x com Gx.*

3.6.2 Ações contínuas

Agora começaremos o estudo das ações num contexto topológico.

Definição 3.6.15. *Seja G um grupo topológico e X um espaço topológico. Uma ação de G em X é* **contínua** *se a aplicação $\phi : G \times X \to X$, $\phi(g, x) = gx$, é contínua.*

Se $H \subset G$ é um subgrupo, a restrição da ação a H é uma ação de H. Tomando a topologia do subespaço, a restrição de uma ação contínua também é contínua.

No caso de uma ação contínua as aplicações parciais, $\phi_x : G \to X$, $\phi_x(g) = gx$, e $\phi_g : X \to X$, $\phi_g(x) = gx$, são contínuas. Além do mais, como $a(g) = \phi_g$ e $a(g)^{-1} = a(g^{-1})$, temos que para cada $g \in G$, $a(g) = \phi_g : X \to X$ é um homeomorfismo de X.

Proposição 3.6.16. *Seja G um grupo topológico e X um espaço topológico de Hausdorff. Se uma ação ϕ de G em X é contínua, então o subgrupo G_x é um fechado de G para todo $x \in X$.*

Demonstração: Repare que para qualquer $x \in X$,

$$G_x = \{g \in G; gx = x\} = \{g \in G; \phi(g,x) = x\} = \phi_x^{-1}(\{x\})$$

Como X é Hausdorff e ϕ é contínua temos que $\{x\}$ é fechado e ϕ_x é contínua. Logo, $G_x = \phi_x^{-1}(\{x\})$ é um fechado de G. □

3.6.3 Espaços quocientes

Nesta seção veremos algumas propriedades no contexto topológico do conjunto G/H apresentado no Exemplo 3.6.4.

Em geral no quociente de um espaço topológico por uma relação de equivalência se define a seguinte topologia:

Definição 3.6.17. *Sejam Y um espaço topológico e $\sim$ uma relação de equivalência em Y. Denote por $Y/\sim$ o conjunto das classes de equivalência de $\sim$ e por $\pi : Y \to Y/\sim$ a aplicação sobrejetora canônica que a cada $y \in Y$ associa sua classe de equivalência. A* **topologia quociente** *em $Y/\sim$ é aquela em que um subconjunto $A \subset Y/\sim$ é aberto se, e só se, $\pi^{-1}(A)$ é aberto em Y. De forma equivalente $F \subset Y/\sim$ é fechado se, e só se, $\pi^{-1}(F)$ é fechado em Y.*

A continuidade, em relação à topologia quociente, de funções definidas em $Y/\sim$ pode ser verificada através da seguinte proposição:

Proposição 3.6.18. *Sejam Y e Z espaços topológicos em que Y está munido da relação de equivalência $\sim$. Então, uma aplicação $f : Y/\sim \to Z$ é contínua, se e somente se, $f \circ \pi : Y \to Z$ é contínua.*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f\circ\pi"] & \\ Y/\sim \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

Demonstração: Suponha que f é contínua. Pela definição de π e da topologia quociente, temos que π contínua. Assim, a composição $f \circ \pi$ é contínua. Reciprocamente, suponha que $f \circ \pi$ é contínua e tome $A \subset Z$ um aberto. Então $(f \circ \pi)^{-1}(A) = \pi^{-1}(f^{-1}(A))$ é aberto em Y. Logo, pela definição da topologia quociente, temos que $f^{-1}(A)$ é aberto em $Y/\sim$. $\square$

Observe que a sobrejetividade de π nos garante que a recíproca do resultado anterior é válida no caso de aplicações abertas.

Proposição 3.6.19. *Sejam G um grupo topológico, $H \subset G$ um subgrupo de G e $\pi : G \to G/H$ a projeção canônica. Então π é uma aplicação aberta em relação a topologia quociente.*

Demonstração: Tome $A \subset G$ aberto em G. Então, $\pi^{-1}(\pi(A)) = AH = \bigcup_{h\in H} Ah$. Sendo G grupo topológico, as translações são homeomorfismos, dessa forma Ah é aberto para todo $h \in H$. Assim, $\pi^{-1}(\pi(A))$ é aberto em G e, portanto, $\pi(A)$ é aberto em G/H. $\square$

Fazendo uso da proposição anterior, é mostrado em [11] que G/H admite uma família admissível de coberturas abertas quando G é localmente compacto e H um subgrupo fechado de G. A seguir, utilizaremos a Proposição 2.1.4 para verificar que a admissibilidade de G/H se mantém sem a necessidade da compacidade local de G e sem a necessidade de que H seja fechado.

Proposição 3.6.20. *Seja G um grupo topológico e $H \subset G$ é um subgrupo de G. Então G/H com a topologia quociente é um espaço topológico admissível.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{V}$ o sistema de vizinhanças abertas e simétricas da identidade de G, $\mathcal{O}_R$ a família admissível de G à direita e π a projeção canônica de G em G/H. Como π é sobrejetora e aberta $\mathcal{P}_V = \{\pi(Vg); g \in G\}$ é uma cobertura aberta de G/H para todo $V \in \mathcal{V}$. Defina $\mathcal{O}_\pi = \{\mathcal{P}_V; V \in \mathcal{V}\}$ e mostremos que $\mathcal{O}_\pi$ é uma família admissível de coberturas abertas de G/H.

Seja $\mathcal{P}_V \in \mathcal{O}_\pi$ e tome $U \in \mathcal{V}$ tal que $\mathcal{R}_U \prec \frac{1}{2}\mathcal{R}_V$. Então $\mathcal{P}_U \prec \frac{1}{2}\mathcal{P}_V$. De fato, se $\overline{y} \in \pi(Ug_1) \cap \pi(Ug_2)$, então $\overline{y} = \pi(u_1g_1) = \pi(u_2g_2)$, onde $u_1, u_2 \in U$. Assim, $(u_2g_2)^{-1}(u_1g_1) \in H$, logo, $u_1g_1 = (u_2g_2)h$ para algum $h \in H$. Dessa forma, $u_1g_1 \in Ug_1 \cap Ug_2h$ e como $\mathcal{R}_U \prec \frac{1}{2}\mathcal{R}_V$ temos que $Ug_1 \cup U(g_2h) \subset Vg$ para algum $g \in G$. Assim, $\pi(Ug_1) \cup \pi(Ug_2h) \subset \pi(Ug_1 \cup Ug_2h) \subset \pi(Vg)$. Agora note que como $h \in H$ e H é subgrupo de G, $\pi(Ug_2h) = \pi(Ug_2)$. Logo, $\mathcal{P}_U \prec \frac{1}{2}\mathcal{P}_V$.

Para $\mathcal{P}_V, \mathcal{P}_U \in \mathcal{O}_\pi$ temos que $V \cap U \in \mathcal{V}$ e assim $\mathcal{P}_{V\cap U} \prec \mathcal{P}_V$ e $\mathcal{P}_{V\cap U} \prec \mathcal{P}_U$.

Finalmente, mostremos que $\{St[\overline{x},\mathcal{U}]; \mathcal{U} \in \mathcal{O}_\pi\}$ é uma base de vizinhanças em cada $\overline{x}$ pertencente a G/H.

Pela definição de estrela é claro que $St[\overline{x},\mathcal{U}]$ é uma vizinhança de $\overline{x}$ qualquer que seja $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_\pi$. Seja $W \subset G/H$ uma vizinhança de $\overline{x} \in G/H$. Então existe $A \subset G/H$ aberto tal que $\overline{x} \in A \subset W$. Como π é sobrejetora existe $x \in G$ tal que $\pi(x) = \overline{x}$ e da definição de aberto da topologia quociente temos que $\pi^{-1}(A)$ é um aberto de G tal que $x \in \pi^{-1}(A)$. Desse modo, existe $\mathcal{R}_V \in \mathcal{O}_R$ tal que $x \in St[x, \mathcal{R}_V] \subset \pi^{-1}(A)$. Então $\mathcal{P}_V \in \mathcal{O}_\pi$ é tal que $\overline{x} \in St[\overline{x}, \mathcal{P}_V] \subset W$. Com efeito, seja $g \in G$ tal que $\overline{x} \in \pi(Vg)$. Então $\overline{x} = \pi(vg)$ para algum $v \in V$, mas como $\overline{x} = \pi(x)$ temos que $(vg)^{-1}x \in H$, donde $x = (vg)h$ para algum $h \in H$. Assim, $x \in Vgh$ e como $St[x, \mathcal{R}_V] \subset \pi^{-1}(A)$ temos que $x \in Vgh \subset \pi^{-1}(A)$. Logo, $\overline{x} = \pi(x) \in \pi(Vgh) = \pi(Vg) \subset \pi(\pi^{-1}(A)) \subset A \subset W$. Assim, $\overline{x} \in St[\overline{x}, \mathcal{P}_V] \subset A \subset W$. Logo, $\{St[\overline{x},\mathcal{U}]; \mathcal{U} \in \mathcal{O}_\pi\}$ é uma base de vizinhanças em $\overline{x}$ e, portanto, G/H é um espaço topológico admissível. $\square$

Em geral a projeção canônica não é uma aplicação fechada. Por exemplo, se $G = (\mathbb{R}^2, +)$, $H = \{0\} \times \mathbb{R}$ e $F = \{(x, \mathrm{tg}(x)) \in \mathbb{R}^2; x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ então $\pi(F)$ não é fechado.

Mas se H for compacto, então π é uma aplicação fechada. Para provarmos esse resultado faremos uso da seguinte proposição:

Proposição 3.6.21. *Seja G um grupo topológico. Se $K \subset G$ é compacto e $F \subset G$ é fechado, então FK é fechado.*

Demonstração: Seja $\mathcal{V}(1)$ a coleção de todas a vizinhanças abertas da identidade de G. Primeiramente mostremos que se $F \cap K = \emptyset$, então existe $V \in \mathcal{V}(1)$ tal que $F \cap VK = \emptyset$. Com efeito, se $x \in K$, então x pertence ao aberto $G \setminus F$, logo $(G \setminus F)x^{-1} \in \mathcal{V}(1)$. Por GT1 existe $W_x \in \mathcal{V}(1)$ tal que $W_x^2 \subset (G \setminus F)x^{-1}$. Sendo K compacto a cobertura aberta $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} W_x x$ admite subcobertura finita, digamos, $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} W_{x_i} x_i$. Por T2 temos que $V = \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_{x_i} \in \mathcal{V}(1)$. Vejamos que tal V é a vizinhança procurada.

Seja $x \in K$, então $x \in W_{x_j} x_j$ para algum $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Assim,

$$Vx \subset W_{x_j} x \subset W_{x_j} W_{x_j} x_j = W_{x_j}^2 x_j \subset (G \setminus F) x_j^{-1} x_j = G \setminus F$$

Logo, $F \cap VK = \emptyset$.

Provemos agora que FK é fechado. Seja $y \in G \setminus FK$, então $F \cap yK^{-1} = \emptyset$. Mas sendo K compacto, yK^{-1} é compacto, dessa forma existe $V \in \mathcal{V}(1)$ tal que $F \cap VyK^{-1} = \emptyset$, assim $FK \cap Vy = \emptyset$. Logo, Vy é um aberto contendo y tal que $Vy \subset G \setminus FK$, donde segue que FK é fechado. □

Proposição 3.6.22. *Sejam G um grupo topológico, $H \subset G$ um subgrupo compacto de G e $\pi : G \to G/H$ a projeção canônica. Então π é uma aplicação fechada em relação a topologia quociente.*

Demonstração: Seja $F \subset G$ fechado. Então $\pi^{-1}(\pi(F)) = FH$ é fechado pela proposição anterior. □

A topologia quociente tem um bom comportamento em relação ao produto cartesiano de grupos. Sejam G_1 e G_2 grupos topológicos e $H_1 \subset G_1, H_2 \subset G_2$ subgrupos. O cartesiano $H_1 \times H_2$ é um subgrupo de $G_1 \times G_2$ e o quociente $(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2)$ se identifica a

$(G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$ através da bijeção

$$\varphi : (g_1, g_2)(H_1 \times H_2) \mapsto (g_1H_1, g_2H_2)$$

Essa bijeção é um homeomorfismo em relação as topologias quociente. Isso pode ser visto pela definição de topologia quociente e pelo seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
G_1 \times G_2 \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "\pi"'] & G_1 \times G_2 \arrow[d, "\pi_1 \times \pi_2"] \\
(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \arrow[r, "\varphi"'] & (G_1/H_1) \times (G_2/H_2)
\end{tikzcd}$$

onde $(\pi_1 \times \pi_2)(g_1, g_2) = (\pi_1(g_1), \pi_2(g_2))$ e π_i é a projeção canônica de G_i em G_i/H_i, $i = 1, 2$.

Proposição 3.6.23. *Seja G um grupo topológico e $H \subset G$. A topologia quociente em G/H é Hausdorff se, e somente se, H é fechado.*

Demonstração: Suponha que G/H é Hausdorff. Então $\{1H\} = \{H\}$ é um fechado de G/H na topologia quociente. Logo, $\pi^{-1}(\{H\})$ é fechado em G. Mas $\pi^{-1}(\{H\}) = H$. Logo, H é um fechado de G.

Reciprocamente, suponha que H é fechado. Para mostrar que G/H é Hausdorff vamos mostrar que a diagonal $\Delta = \{(x, x) \in G/H \times G/H; x \in G/H\}$ é fechada na topologia produto em $G/H \times G/H$. Faremos isso mostrando que $\varphi^{-1}(\Delta)$ é fechado em $(G \times G)/(H \times H)$, onde φ é o homeomorfismo entre $(G \times G)/(H \times H)$ e $G/H \times G/H$. Assim,

$$(g, h) \in \pi^{-1}((\varphi^{-1})(\Delta)) \Leftrightarrow (g, h)(H \times H) \in \varphi^{-1}(\Delta) \Leftrightarrow gH = hH \Leftrightarrow (g, h) \in \overline{q}^{-1}(H)$$

Onde $\overline{q} : G \times G \to G$ é a aplicação contínua definida por $\overline{q}(x, y) = y^{-1}x$. Logo, $\pi^{-1}((\varphi^{-1})(\Delta)) = \overline{q}^{-1}(H)$ e, como H é fechado, $\pi^{-1}((\varphi^{-1})(\Delta))$ é fechado em $G \times G$.

Portanto, G/H é Hausdorff. $\square$

Proposição 3.6.24. *Seja G um grupo topológico e $H \subset G$ um subgrupo de G. A ação $\phi(g, xH) = (gx)H$ é transitiva e contínua com respeito a topologia quociente.*

Demonstração: Sejam p e π o produto de G e a projeção canônica de G em G/H, respectivamente. Considere φ_1 o homeomorfismo entre $(G \times G)/(\{1\} \times H)$ e $G/\{1\} \times G/H$ dado por $\varphi_1((g,h)(\{1\} \times H)) = (g\{1\}, hH)$.

Repare agora que $\pi' : G/\{1\} \to G$, $\pi'(g\{1\}) = g$, é também um homeomorfismo. Dessa forma $\varphi_2 : G/\{1\} \times G/H \to G \times G/H$, definida por $\varphi_2(g\{1\}, hH) = (g, hH)$ é um homeomorfismo, pois suas funções coordenadas são justamente π' e $Id_{G/H}$.

Chame de $\overline{\pi}$ a projeção canônica de $G \times G$ em $(G \times G)/(\{1\} \times H)$ e considere o homeomorfismo $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$. Desse modo, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[d, "\overline{\pi}"'] \arrow[dr, "\pi \circ p"] & \\ (G \times G)/(\{1\} \times H) \arrow[r, "\phi \circ \varphi"'] & G/H \end{tikzcd}$$

Note que $(\phi \circ \varphi) \circ \overline{\pi} = \pi \circ p$, e como π e p são contínuas, temos pela Proposição 3.6.18 que $\phi \circ \varphi$ é contínua.

Portanto, $\phi = (\phi \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$ é contínua.

Verifiquemos a transitividade de ϕ. Para $xH, yH \in G/H$, temos que $yx^{-1} \in G$ é tal que $yH = \phi(yx^{-1}, xH)$. Logo, a ação é transitiva. $\square$

Quando o subgupo H é normal em G o quociente tem uma estrutura de grupo quando munido da operação $(gH)(hH) = (gh)H$ e a projeção canônica é um homomorfismo.

Com a topologia quociente G/H passa a ser um grupo topológico. Para ver que o produto em G/H é contínuo basta aplicar os mesmos argumentos da demonstração acima para o diagrama:

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[d, "\overline{\pi}"'] \arrow[dr, "\pi \circ p"] & \\ (G \times G)/(H \times H) \arrow[r, "\overline{p} \circ \overline{\varphi}"'] & G/H \end{tikzcd}$$

Onde $\overline{p}$ é a aplicação produto de G/H e $\overline{\varphi}$ o homeomorfismo entre $(G \times G)/(H \times H)$ e $G/H \times G/H$.

No caso da continuidade da aplicação inversão $\overline{\iota}$ em G/H basta usar a Proposição 3.6.18 no diagrama:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\overline{\iota}\circ\pi"] & \\ G/H \arrow[r, "\overline{\iota}"'] & G/H \end{tikzcd}$$

Pois $\overline{\iota} \circ \pi = \pi \circ \iota$ que é uma composição de aplicações contínuas.

3.6.4 Grupos compactos e conexos

Nesta seção serão demonstrados dois resultados úteis para verificar que certos grupos topológicos são compactos ou conexos.

O primeiro diz respeito a compacidade. Na sua demonstração será utilizado a propriedade da interseção finita: um espaço topológico K é compacto se, e só se, para uma família $\mathcal{F}$ de fechados que satisfaz a propriedade da interseção finita, vale que $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $\mathcal{F}$ é completa, isto é, fechada por interseção finita de seus elementos, pois a família de todas as interseções finitas de elementos de $\mathcal{F}$ também satisfaz a propriedade da interseção finita.

Proposição 3.6.25. *Seja G um grupo topológico e $H \subset G$ um subgrupo. Se H e G/H são compactos, então G é compacto.*

Demonstração: Suponha que H e G/H são compactos e seja $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in L}$ uma família completa de fechados de G satisfazendo a propriedade da interseção finita. Pela Proposição 3.6.22 a projeção canônica π de G em G/H é uma aplicação fechada. Então, $\pi(F_\alpha)$ é um fechado de G/H para todo $\alpha \in L$.

Note que a família $\{\pi(F)\}_{F \in \mathcal{F}}$ também satisfaz a propriedade da interseção finita, pois $\pi(F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_k) \subset \pi(F_1) \cap \pi(F_2) \cap \ldots \cap \pi(F_k)$.

Assim, como G/H é compacto, $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \pi(F) \neq \emptyset$. Então existe $g \in G$ tal que $gH \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \pi(F)$. Dessa forma, $F \cap gH \neq \emptyset$, para todo $F \in \mathcal{F}$. De fato, como $gH \in \pi(F)$ para todo $F \in \mathcal{F}$ existe $a \in F \subset G$ tal que $\pi(a) = gH$, donde, $aH = gH$. Logo, $a \in gH$ e, assim, $a \in F \cap gH$.

Note que $\{F \cap gH\}_{F\in\mathcal{F}}$ é uma família da fechados de gH satisfazendo a propriedade da interseção finita, pois $(F_1 \cap gH) \cap \ldots \cap (F_k \cap gH) = (F_1 \cap \ldots \cap F_k) \cap gH$ e já que $\mathcal{F}$ é completa, $(F_1 \cap \ldots \cap F_k) \in \mathcal{F}$. Logo, $(F_1 \cap \ldots \cap F_k) \cap gH \neq \emptyset$.

Da compacidade de H temos que $gH = E_g(H)$ é compacto. Então, $(\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F) \cap gH = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} (F \cap gH) \neq \emptyset$.

Logo, $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$ e, portanto G é compacto. □

A recíproca da proposição acima vale se H é fechado pois todo fechado num compacto é compacto e se G é compacto é claro que G/H é compacto já que $\pi : G \to G/H$ é contínua e sobrejetora.

Proposição 3.6.26. *Seja G um grupo topológico e H um subgrupo de G. Se H e G/H são conexos, então G é conexo.*

Demonstração: Suponha por absurdo que existam $A, B \subset G$ abertos disjuntos não vazios tais que $G = A \cup B$. Pela Proposição 3.6.19 a projeção canônica $\pi : G \to G/H$ é um aplicação aberta. Logo, $G/H = \pi(A) \cup \pi(B)$ e sendo ele conexo, devemos ter $\pi(A) \cap \pi(B) \neq \emptyset$. Assim, existe $gH \in G/H$ tal que $gH \in \pi(A) \cap \pi(B)$. Dessa forma, $gH \cap A$ e $gH \cap B$ são abertos disjuntos e não vazios de gH.

Agora, repare que $gH = G \cap gH = (A \cup B) \cap gH = (A \cap gH) \cup (B \cap gH)$ é uma separação de gH, o que é um absurdo pois, sendo H conexo, $gH = E_g(H)$ é conexo.

Portanto, G é conexo. □

Veremos algumas aplicações destes resultados ao final da seção seguinte.

3.6.5 Homeomorfismo $G/G_x \to X$

Vimos na Proposição 3.6.13 que uma ação transitiva de um grupo G sobre um conjunto X estabelece uma bijeção entre X e G/G_x. No contexto topológico uma situação ideal seria poder indentificar o espaço topológico X com G/G_x através de ξ_x. Em geral isso não é possível, veremos no Exemplo 3.6.28 que ξ_x pode não ser homeomorfismo.

Nesta seção estudaremos condições para que tal identificação através de ξ_x seja possível.

Proposição 3.6.27. *Sejam G um grupo topológico, X um espaço topológico e $\phi : G\times X \to X$ uma ação contínua e transitiva de G em X. Fixe $x \in X$ e considere a bijeção $\xi_x : G/G_x \to X$, $\xi_x(gG_x) = gx$. Então, ξ_x é contínua em relação a topologia quociente.*

Demonstração: Note que para todo $g \in G$, $(\xi_x \circ \pi)(g) = \xi_x(gH) = gx = \phi(g, x) = \phi_x(g)$. E como a ação ϕ é contínua, ϕ_x é contínua. Logo, pela Proposição 3.6.18, temos que ξ_x é contínua. $\square$

Exemplo 3.6.28. Considere o grupo topológico $G = (\mathbb{R}, +)$, onde $\mathbb{R}$ está com a topologia discreta τ_d, agindo sobre o espaço topológico $X = \mathbb{R}$ com a topologia usual de $\mathbb{R}$ segundo a ação $\phi : G\times X \to X$, $\phi(g, x) = g+x$. Temos que ϕ é transitiva, pois para $x, y \in \mathbb{R}$, $y-x \in G$ é tal que $y = (y - x) + x$. Repare agora que $G_0 = \{0\}$. Logo, ξ_0 é a aplicação identidade, que não é aberta segundo as topologias tomadas.

O homeomorfismo $G/G_x \to X$ será provado para um grupo topológico separável e X um espaço de Baire, isto é, a união enumerável de subconjuntos de X com interior vazio ainda tem interior vazio. Antes disso precisaremos de dois lemas.

Lema 3.6.29. *Seja G um grupo topológico agindo sobre um espaço topológico X através de uma ação transitiva e contínua e $\mathcal{V}(1)$ o conjunto das vizinhanças abertas da identidade. Suponha que exista $x_0 \in X$ tal que para todo $U \in \mathcal{V}(1)$, o conjunto $U \cdot x_0 = (\xi_{x_0} \circ \pi)(U)$ contém x_0 em seu interior. Então, ξ_x é uma aplicação aberta para todo $x \in X$ e, portanto, um homeomorfismo.*

Demonstração: Primeiramente mostremos que ξ_{x_0} é uma aplicação aberta. Seja $V \subset G$

aberto e $x \in V \cdot x_0$. Então existe $g \in V$ tal que $x = gx_0$. Note que $U = g^{-1}V \in \mathcal{V}(1)$, assim, por hipótese, $x_0 \in \text{int}(U \cdot x_0)$.

Como a ação é contínua, $\phi_g(x) = gx$ é homeomorfismo, logo $\phi_g(x_0) \in \text{int}(\phi_g(U \cdot x_0))$. Agora, note que $\phi_g(U \cdot x_0) = g(U \cdot x_0) = (gU) \cdot x_0 = V \cdot x_0$.

Dessa forma, $x \in \text{int}(V \cdot x_0) \subset V \cdot x_0$. Logo, $\xi_{x_0} \circ \pi$ é aberta e, portanto, ξ_{x_0} é aberta.

Verifiquemos agora que ξ_x é uma aplicação aberta para todo $x \in X$. Como a ação de G em X é transitiva, para $x \in X$, existe $h \in G$ tal que $x = hx_0$. Daí, $\xi_x(gG_x) = gx = g(hx_0) = (gh)x_0 = \xi_{x_0}((gh)G_{x_0}) = (\xi_{x_0} \circ \overline{D}_h)(gG_x)$, onde $\overline{D}_h : G/G_x \to G/G_{x_0}$ é dada por $\overline{D}_h(gG_x) = (gh)G_0$.

Como vimos, ξ_{x_0} é aberta, então é suficiente provarmos que $\overline{D}_h$ é aberta. Chame de π_x a projeção canônica de G sobre G/G_x. Então, $(\overline{D}_h \circ \pi_x)(g) = \overline{D}_h(gG_x) = (gh)G_{x_0} = \pi(gh) = (\pi \circ D_h)(g)$.

E já que π e D_h são aplicações abertas, tem-se que $\overline{D}_h \circ \pi_x$ é uma aplicação aberta, donde $\overline{D}_h$ é uma aplicação aberta e, portanto, ξ_x é uma aplicação aberta para todo $x \in X$. □

Lema 3.6.30. *Seja G um grupo topológico e $\mathcal{V}(1)$ a família de vizinhanças abertas da identidade. Se $D \subset G$ é um subconjunto denso e $U \in \mathcal{V}(1)$, então $G = \bigcup_{g \in D} gU$.*

Demonstração: Seja $x \in G$ e tome a vizinhança simétrica $W = U \cap U^{-1} \subset U$. Como as translações são homeomorfismo, xW é um aberto de G e como D é denso, $xW \cap D \neq \emptyset$. Logo, existe $g \in D \cap xW$. Assim, $x^{-1}g \in W \subset U$. Sendo W simétrico, $g^{-1}x \in W^{-1} = W$. Logo, $x = g(g^{-1}x) \in gW \subset gU$. Dessa maneira, $G = \bigcup_{g \in D} gU$. □

Proposição 3.6.31. *Seja G um grupo topológico separável e X um espaço topológico de Baire. Se uma ação ϕ de G sobre X é contínua e transitiva, então as aplicações $\xi_x : G/G_x \to X$ são homeomorfismos.*

Demonstração: Tome $x_0 \in X$ e $U \in \mathcal{V}(1)$. Por GT1 existe $V \in \mathcal{V}(1)$ tal que $V^2 \subset U$. Assim, $W = V \cap V^{-1} \in \mathcal{V}(1)$ é uma vizinhança aberta simétrica tal que $W^2 \subset U$. Pelo Lema 3.6.28 é suficiente mostrar que $U \cdot x_0$ contém x_0 em seu interior.

Seja $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o subconjunto denso e enumerável de G. Pelo lema anterior $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} g_n W$. Já que a ação é transitiva $X = Gx$ para todo $x \in X$. Assim, $X = Gx_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (g_n W \cdot x_0)$.

Como X é espaço de Baire e $\text{int}(X) \neq \emptyset$ devemos ter $\text{int}(g_{n_0} W \cdot x_0) \neq \emptyset$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Então, existe $g \in W$ tal que $(g_{n_0} g)x_0 \in \text{int}(g_{n_0} W \cdot x_0)$.

Já que $\phi_{g_{n_0} g}(x) = g_{n_0} g x$ é homeomorfismo, temos que

$$x_0 = \phi^{-1}_{g_{n_0} g}(g_{n_0} g x_0) \in \text{int}(\phi^{-1}_{g_{n_0} g}(g_{n_0} W \cdot x_0)) = \text{int}(g^{-1} g^{-1}_{n_0}(g_{n_0} W \cdot x_0)) = \text{int}(g^{-1} W \cdot x_0)$$

Logo, $x_0 \in \text{int}(g^{-1} W \cdot x_0)$. Mas como $g \in W$ e W é simétrica, $g^{-1} \in W$. Assim, $g^{-1} W \subset W^2 \subset U$. Donde, $g^{-1} W \cdot x_0 \subset U \cdot x_0$. Portanto, $x_0 \in \text{int}(g^{-1} W \cdot x_0) \subset U \cdot x_0$. $\square$

A seguir vejamos alguns exemplos que fazem uso desse homeomorfismo bem como das duas proposições da seção anterior.

Exemplo 3.6.32. O grupo $G = \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ tem duas componentes conexas. A ação ϕ apresentada no Exemplo 3.6.3 é contínua pois é a restrição da aplicação contínua $M_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Temos que existem apenas duas órbitas: $\{(0, 0, \ldots, 0)\}$ e $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \ldots, 0)\}$.

De fato, $G(0, 0, \ldots, 0) = \{g(0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n; g \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})\} = \{(0, 0, \ldots, 0)\}$. Agora, seja $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \neq (0, 0, \ldots, 0)$. Complete x à uma base $\{x, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ de $\mathbb{R}^n$ e defina uma matriz quadrada g de ordem n que tem nas suas colunas as coordenadas de x, v_1, ..., v_{n-1}, respectivamente. Dessa forma, $g \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ e $ge_1 = x$, donde $e_1 = g^{-1}x$. Assim, $e_1 \in Gx$, logo, $Gx \subset \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \ldots, 0)\}$. Agora, se $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \ldots, 0)\}$ temos pelo mesmo argumento acima que existe $h \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ tal que $z = he_1$. Assim, $z = he_1 = h(g^{-1}x) = (hg^{-1})x$. Logo, $z \in Gx$, donde $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \ldots, 0)\} \subset Gx$ e, assim, $Gx = \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \ldots, 0)\}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Temos ainda que $G_0 = \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ e que $G_{e_1} = \{g \in \text{Gl}(n, \mathbb{R}); ge_1 = e_1\}$ é formado pelas matrizes do tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & \\ \vdots & C \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Onde b é uma matriz linha $1 \times (n-1)$ e $C \in \mathrm{Gl}(n-1, \mathbb{R})$. Dessa, forma G_{e_1} é homeomorfo à $\mathrm{Gl}(n-1, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Portanto, pela Proposição 3.6.31, $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})/G_{e_1}$ é homeomorfo à $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \ldots, 0)\} = Ge_1$.

As mesmas considerações valem para os subgrupos $\mathrm{Gl}^+(n, \mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}); \det g > 0\}$ e $\mathrm{Gl}^-(n, \mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}); \det g < 0\}$ com a diferença que se $n = 1$ devemos tomar $\mathbb{R}_+$ no lugar de $\mathbb{R}$ e a matriz C tem determinante positivo no caso de $\mathrm{Gl}^+(n, \mathbb{R})$ e negativo no caso de $\mathrm{Gl}^-(n, \mathbb{R})$.

Dessa forma, se $n = 2$, $\mathrm{Gl}^+(2, \mathbb{R})/G_{e_1}$ é homeomorfo à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e, portanto, conexo. Mas G_{e_1} é homeomorfo à $\mathrm{Gl}^+(1, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ que é cartesiano de conexos, logo, G_{e_1} é conexo. Assim, pela Proposição 3.6.26, $\mathrm{Gl}^+(2, \mathbb{R})$ é conexo.

Agora suponha que $\mathrm{Gl}^+(n, \mathbb{R})$ é conexo e provemos que $\mathrm{Gl}^+(n+1, \mathbb{R})$ é conexo. Como $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ é conexo, $\mathrm{Gl}^+(n+1, \mathbb{R})/G_{e_1}$ é conexo e como $\mathrm{Gl}^+(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ é conexo, G_{e_1} é conexo. Donde, pela Proposição 3.6.26, temos que $\mathrm{Gl}^+(n+1, \mathbb{R})$ é conexo.

Logo, $\mathrm{Gl}^+(n, \mathbb{R})$ é conexo para todo $n \geq 1$. E os mesmos argumentos valem para $\mathrm{Gl}^-(n, \mathbb{R})$. Portanto $\mathrm{Gl}^+(n, \mathbb{R})$ e $\mathrm{Gl}^-(n, \mathbb{R})$ são as únicas componentes conexas de $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$.

Exemplo 3.6.33. De maneira semelhante ao exemplo anterior o grupo $Sl(n, \mathbb{R}) = \{g \in Gl(n, \mathbb{R}); \det g = 1\}$ agindo pela ação canônica em $\mathbb{R}^n$ tem seus subgrupos de isotropia homeomorfos a $Sl(n-1, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-1}$. E uma aplicação da Proposição 3.6.26 por indução permite provar que $Sl(n, \mathbb{R})$ é conexo.

Exemplo 3.6.34. O subgrupo $G = O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}); AA^t = I\} \subset \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ é compacto. Lembre que $O(n)$ pode ser definido de duas outras formas alternativas:

$$O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}); \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle\}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$ e

$$O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}); A \text{ leva bases ortonormais em bases ortonormais }\}$$

Vejamos quem são as órbitas da ação contínua $\phi : O(n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\phi(A, x) = Ax$.

Seja $|\cdot|$ a norma em $\mathbb{R}^n$ proveniente do produto interno canônico e $x \in \mathbb{R}^n$. Claramente $Gx \subset S_r = \{y \in \mathbb{R}^n; |y| = r\}$, onde $r = |x|$, pois para $A \in O(n)$, $\langle Ax, Ax \rangle = \langle x, x \rangle$ o que implica que $|Ax| = |x| = r$.

Agora, seja $y \in S_r$. Extendendo $u_1 = \frac{x}{|x|}$ e $v_1 = \frac{y}{|y|}$ a bases ortonormais $\{u_1, \ldots, u_n\}$ e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ temos que $Au_i = v_i$, $i = 1, \ldots, n$, para algum $A \in O(n)$. Assim, $Ax = A(ru_1) = rAu_1 = rv_1 = y$. Logo, $y \in Gx$. Donde, $Gx = S_{|x|}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e, assim, $Ge_1 = S^{n-1}$.

Determinemos o conjunto $G_{e_1} = \{A \in O(n); Ae_1 = e_1\}$. Se $A = (a_{ij}) \in G_{e_1}$, então $a_{11} = 1$ e $a_{21} = a_{31} = \ldots = a_{n1} = 0$. E como $AA^t = I$, temos que $1 + a_{12}^2 + \ldots + a_{1n}^2 = 1$, donde $a_{12} = \ldots = a_{1n} = 0$. Assim A deve ser da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

onde $C \in O(n-1)$. Dessa forma, G_{e_1} é homeomorfo à $O(n-1)$. E pela Proposição 3.6.31 $O(n)/G_{e_1}$ é homeomorfo à S^{n-1}.

Para $n = 1$, $O(1) = \{-1, 1\}$, que é compacto. Agora suponha que $O(n)$ é compacto e provemos que $O(n+1)$ é compacto.

Como $O(n+1)/G_{e_1}$ é homeomorfo à $S^{n+1-1} = S^n$, $O(n+1)/G_{e_1}$ é compacto e como G_{e_1} é homeomorfo à $O(n+1-1) = O(n)$ temos que G_{e_1} é compacto. Assim, pela Proposição 3.6.25 temos que $O(n+1)$ é compacto.

Portanto, $O(n)$ é compacto para $n \geq 1$.

Exemplo 3.6.35. Os mesmos argumentos do exemplo anterior permitem mostrar que as órbitas de $SO(n) = \{A \in O(n); \det A = 1\}$ também são esferas. Nesse caso o estabilizador de e_1 é homeomorfo a $SO(n-1)$. Dessa forma pode-se usar a Proposição 3.6.26 para provar por indução que $SO(n)$ é conexo.

Exemplo 3.6.36. Assim como nos exemplos anteriores pode-se provar que os grupos $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})$ e $Sl(n, \mathbb{C})$ agindo sobre $\mathbb{C}^n$ são conexos. A diferença aqui é que $\mathrm{Gl}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ é conexo, permitindo iniciar a indução. Da mesma forma os grupos $U(n) = \{A; A^*A = AA^* = I\}$ e $SU(n) = \{M \in U(n); \det M = 1\}$ são compactos e conexos, respectivamente.

Conclusão

Vimos através do Teorema 3.5.2 que os grupos topológicos constituem uma nova classe de espaços topológicos admissíveis e, consequentemente pelo Teorema 2.1.8, uma nova classe de espaços topológicos uniformizáveis. Fazendo uso da estrutura admissível do espaço permeamos o desenvolvimento das relações entre esses três conceitos com definições de continuidade uniforme e funções lipschitzianas, e nas Proposições 3.5.4 e 3.5.5 relacionamos estas definições com aplicações clássicas da teoria de grupos.

Referências

[1] Alves, R. W. M. *Aspectos de Uniformidade em Espaços Topológicos Admissíveis*. Dissertação de Mestrado. Maringá, 2014.

[2] Arhangel'skii, A. V. *Topological groups and related structures*. Atlantis Studies in Mathematics, Atlantis Press/World Scientific, Amsterdan, 2008.

[3] Lima, E. L. *Espaços Métricos*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[4] Lima, E.L. *Elementos de Topologia Geral*. Ao Livro Técnico, Rio, 1970.

[5] Munkres, J.R. *Topology, a First Course*. Prentice-Hall, N. Jersey, 1975.

[6] Patrão, M.; San Martin, L. A. B. *Semiflows on topological spaces: chain transitivity and semigroups. J. Dynam. Differential Equations* (2007), 19. 155-180.

[7] Rotman, J. J. *An introduction to the theory of groups*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[8] Runde, V. *A taste of topology*. Springer-Verlag, New York, 2005.

[9] San Martin, L. A. B. *Grupos de Lie*. Disponível em `http://arquivoescolar.org/bitstream/arquivo-e/186/1/gruplie0-1.pdf`

[10] Souza, J. A. *Lesbesgue covering lemma on nonmetric spaces*. International Journal of Mathematics (2013), 1-12.

[11] Souza, J. A. *On limit behavior of semigroup actions on noncompact spaces*. Proceedings of the American Mathematical Society (2012), 3959-3972

[12] Willard, S. *General Topology*. Dover Publications, New York, 2004.