Algunos criterios de univalencia dependientes de parámetros

Angelica Maria Blanco Paloma

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Popayán, Cauca
2017

Algunos criterios de univalencia dependientes de parámetros

Angelica Maria Blanco Paloma

Trabajo presentado como requisito parcial para
optar al título de Matemático

Director
Dr. Willy Will Sierra Arroyo
Profesor de la Universidad del Cauca

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Popayán, Cauca
2017

Nota de aceptación

Director: Dr. Willy Will Sierra Arroyo

Jurado:

Jurado:

Popayán, 19 de julio de 2018

Agradecimientos

Índice general

Introducción

La derivada schwarziana ocupa un lugar importante en el estudio de problemas relevantes en Teoría Geométrica de Funciones, tales como resultados de distorsión, crecimiento, extensiones cuasiconformes, criterios de inyectividad entre otros. Debido a esto y a sus aplicaciones en otras áreas de la matemática, la derivada schwarziana ha sido objeto de numerosos estudios, ver por ejemplo [11], donde se presenta un criterio de inyectividad para funciones analíticas, [6] donde los autores proponen una definición de derivada schwarziana para funciones armónicas y [15] donde se propone una definición mas general para derivada schwarziana de difeomorfismos entre variedades Riemannianas. Con respecto al problema de inyectividad, en 1949 Nehari [11] demuestra algunas condiciones suficientes para la inyectividad de funciones analíticas y localmente univalentes en el disco unidad en términos del crecimiento de la derivada schwarziana. Posteriormente, en [12], se generaliza este y otros resultados. En ambos trabajos Nehari usa convenientemente la relación entre la derivada schwarziana y ecuaciones diferenciales de segundo orden, en este punto la teoria de Sturm-Liouville juega un papel primordial.

El objetivo principal del presente trabajo es el estudio de criterios de inyectividad para funciones analíticas y localmente univalentes[1] en el disco unidad, dados en términos del crecimiento de la derivada schwarziana. Principalmente estudiaremos uno de los resultados presentados en [2], donde el autor muestra un criterio de inyectividad el cual generaliza algunos de los resultados dados por Nehari y otros autores.

[1]A lo largo del texto usaremos los términos inyectiva y univalente para referirnos a la misma clase de funciones.

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1. Sobre funciones univalentes

En el presente trabajo utilizaremos las siguientes notaciones y conceptos básicos del análisis complejo. El disco unidad $\{z \mid |z| < 1\}$ lo denotaremos por $\mathbb{D}$, la familia de funciones analíticas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ la representamos por $H(\Omega)$. $f \in H(\Omega)$ es univalente (inyectiva) si $f(z_1) \neq f(z_2)$ cuando z_1 y z_2 son puntos de Ω con $z_1 \neq z_2$. Diremos que $f \in H(\Omega)$ es localmente univalente si todo $z \in \Omega$ tiene una vecindad V tal que $f\mid_V$ es univalente. Recordemos que f es localmente univalente en Ω si y sólo si $f'(z) \neq 0$, para todo $z \in \Omega$.

1.1.1. La clase S

Para investigar cuestiones referentes a inyectividad de funciones analíticas en un dominio simplemente conexo del plano complejo $\mathbb{C}$, por el teorema de Riemann es suficiente considerar funciones definidas en el disco $\mathbb{D}$. En esta dirección, se considera la clase S de funciones analíticas y univalentes definida por

$$S = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \mid f \quad \text{es analítica y univalente}, \quad f(0) = 0 \quad \text{y} \quad f'(0) = 1\}\,.$$

Notar que una función f en la clase S tiene desarrollo en serie de Taylor de la forma

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots, \quad z \in \mathbb{D}, \quad a_n \in \mathbb{C}. \tag{1.1}$$

Además, si f es cualquier función univalente en $\mathbb{D}$, entonces $g(z) = (f(z)-f(0))/f'(0)$ es una función en S. Por esta razón, el estudio de muchas preguntas referentes a funciones univalentes, se reduce a estudiar estas preguntas en la clase S.

Esta clase no es cerrada bajo la adición y la multiplicación, aún así es invariante bajo ciertas transformaciones elementales.

Teorema 1.1. *Si $f \in S$, tenemos lo siguiente:*

1. *Rotación. Para todo $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) \in S$.*
2. *Dilatación. Para todo r, $0 < r < 1$, $\frac{1}{r} f(rz) \in S$.*
3. *Valor omitido. Si $\omega \notin f(\mathbb{D})$ y*

$$g(z) = \frac{\omega f(z)}{\omega - f(z)}\,, \qquad z \in \mathbb{D}\,,$$

   entonces $g \in S$.

4. *Transformación de Koebe. Si $z_0 \in \mathbb{D}$ y g se define por*

$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z_0 + z}{1 + \overline{z_0} z}\right) - f(z_0)}{(1- \mid z_0 \mid^2) f'(z_0)}\,, \qquad z \in \mathbb{D}\,,$$

   entonces $g \in S$.

5. *Raíz enésima. Para todo entero positivo n, la función $h(z) = \sqrt[n]{f(z^n)}$ pertenece a S.*

Para una prueba del teorema anterior, ver [10], Teorema 1.1.1

Estrechamente relacionada con la clase S introducimos la clase Σ de funciones g, univalentes en $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid \; |z| > 1\}$, con un polo simple en ∞ y con desarrollo en serie de Laurent de g en ∞ de la forma

$$g(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} +, \ldots, \qquad |z| > 1\,.$$

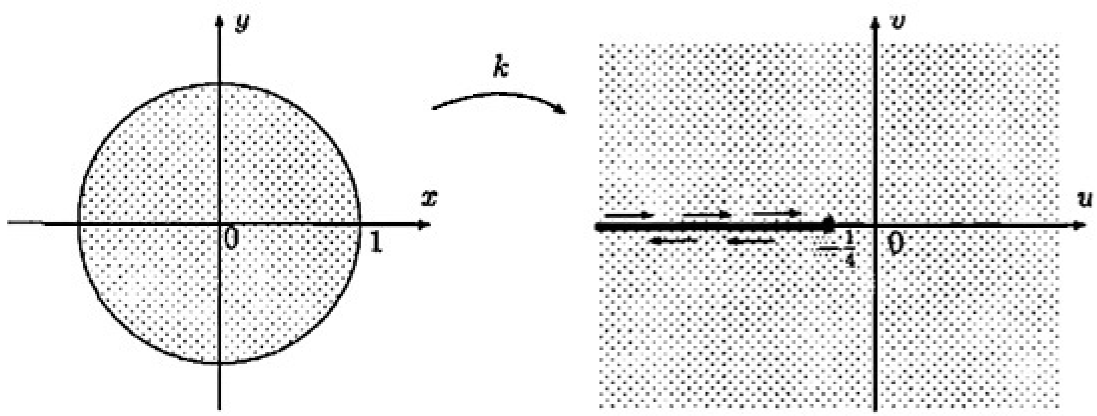
Toda función $g \in \Sigma$ envía Δ en el complemento de un conjunto compacto y conexo.

Un cálculo directo muestra que, dada $f \in S$, la función $g(z) = \frac{1}{f(1/z)} + \beta$, $z \in \Delta$, pertenece a Σ, para todo β.

Uno de los ejemplos más relevantes en la clase S, dado que tiene propiedades de función extremal en algunos problemas en teoría de geométrica de funciones, es la función de Koebe, la cual está definida por

$$k(z) = z + 2z^2 + \ldots + nz^n + \ldots, \qquad z \in \mathbb{D}\,.$$

La función de Koebe transforma el disco unidad $\mathbb{D}$ en el plano complejo menos el rayo $(-\infty, -1/4]$. Ver Figura



Otros ejemplos importantes en la clase S son los siguientes:

1. La función rotación de Koebe
$$k_\theta(z) := e^{-i\theta}k(e^{i\theta}z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}\,, \quad z \in \mathbb{D}\,, \quad \theta \in \mathbb{R}\,,$$
la cual mapea el disco $\mathbb{D}$ en el plano complejo excepto el rayo $\{-re^{-i\theta} \mid r \geq 1/4\}$.
2. La transformación de Möbius
$$l(z) := \frac{z}{1-z}\,,$$
la cual transforma el disco en el semiplano $\left\{\omega \in \mathbb{C} \mid Re\{\omega\} > -\frac{1}{2}\right\}$.

3. La función
$$s(z) := \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \qquad z \in \mathbb{D}\,,$$
es otro ejemplo clásico en la clase S. Dado que s transforma a $\mathbb{D}$ en $\{\omega \in \mathbb{C} \mid |Im\{\omega\}| < \frac{\pi}{4}\}$.

En 1916 fue probado que el segundo coeficiente de toda función en la clase S tiene módulo menor o igual que 2. Este resultado y otras observaciones dieron lugar a lo que se conoció durante muchos años como la conjetura de Bieberbach o conjetura de los coeficientes, la cual establece que el módulo del $n-$ésimo coeficiente de toda función en la clase $\mathcal{S}$ es menor o igual que n. Fue probado en 1985 por Luis De Branges que la conjetura es cierta. El punto de partida para el caso del segundo coeficiente es el siguiente teorema, conocido como el teorema del área, el cual fue demostrado por Gronwall en 1914, ver [10] Teorema 1.1.2.

Teorema 1.2 (Teorema del Área)**.** *Si $g \in \Sigma$, entonces*
$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 < 1\,.$$
donde los b_n son los coeficientes del desarrollo en serie del Lauret de g.

Corolario 1.1. *Para toda función $g \in \Sigma$, $|b_1| \leq 1$ y $|b_1| = 1$ si y sólo si $g(z) = z + b_0 + \frac{e^{i\theta}}{z}$, para algún $\theta \in \mathbb{R}$. Además, si $g(z) \neq 0$ para todo $|z| > 1$, entonces $|b_0| \leq 2$. La igualdad se da si y sólo si $g(z) = z + 2e^{i\sigma} + \frac{e^{2i\sigma}}{z}$, para algún $\sigma \in \mathbb{R}$.*

El anterior corolario y el teorema del área conduce al siguiente teorema.

Teorema 1.3 (Bieberbach)**.** *Si $f \in S$ como en (1.1). Entonces $|a_2| \leq 2$ con igualdad si y sólo si f es una rotación de la función de Koebe.*

Como comentamos arriba, el anterior teorema dio lugar a la siguiente conjetura.

Conjetura de Bieberbach: si $f \in S$ con desarrollo en serie de Taylor como en (1.1). Entonces $|a_k| \leq k$ para $k = 2, 3, \ldots$ La igualdad $|a_k| = k$ para algún $k \geq 2$ si y sólo si f es una rotación de la función de Koebe.

Algunas consecuencias del Teorema 1.3 están relacionadas con resultados de cubrimiento (distancia del origen a la frontera del rango), cotas sobre la función (crecimiento) y cotas para la derivada de la función (distorsión).

1.1.2. Cubrimiento, crecimiento y distorsión

Teorema 1.4 (Teorema de 1/4 de Koebe)**.** *La imagen de toda función $f \in S$ contiene el disco $D(0,1/4)$.*

Demostración. Sea $\omega_0 \in \mathbb{C}$ con $\omega_0 \notin f(\mathbb{D})$. Consideremos la función $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = \frac{\omega_0 f(z)}{\omega_0 - f(z)}\,, \quad z \in \mathbb{D}\,.$$

Por Teorema 1.1, $g \in S$. En primer lugar hallemos explícitamente los dos primeros coeficientes del desarrollo en serie de Taylor de g. Por definición de g,

$$\begin{aligned} g'(z) &= \frac{\omega_0 f'(z)(\omega_0 - f(z)) + f'(z)\omega_0 f(z)}{(\omega_0 - f(z))^2} \\ &= \frac{\omega_0^2 f'(z)}{(\omega_0 - f(z))^2}\,. \end{aligned}$$

De aquí obtenemos

$$\begin{aligned} g''(z) &= \frac{\omega_0^2 f''(z)(\omega_0 - f(z))^2 - \omega_0^2 f'(z)(2(-f'(z))(\omega_0 - f(z))}{(\omega_0 - f(z))^4} \\ &= \frac{\omega_0^2 f''(z)(\omega_0^2 - 2\omega_0 f(z) + f(z)^2) + 2\omega_0^2 f'(z)^2(\omega_0 - f(z))}{(\omega_0 - f(z))^4} \\ &= \frac{\omega_0^4 f''(z) - 2\omega_0^3 f''(z) f(z) + \omega_0^2 f''(z) f(z)^2 + 2\omega_0^3 f'(z)^2 - 2\omega_0^2 f'(z) f(z)}{(\omega_0 - f(z))^4}\,, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} g''(0) &= \frac{\omega_0^4 f''(0) - 2\omega_0^3 f''(0) f(0) + \omega_0^2 f''(0) f(0)^2 + 2\omega_0^3 f'(0)^2 - 2\omega_0^2 f'(0) f(0)}{(\omega_0 - f(0))^4} \\ &= \frac{\omega_0^4 f''(0) - 2\omega_0^3 f''(0)(0) + \omega_0^2 f''(0)(0)^2 + 2\omega_0^3 (1)^2 - 2\omega_0^2 (1)(0)}{(\omega_0 - (0))^4} \\ &= \frac{\omega_0^4 f''(0) + 2\omega_0^3}{\omega_0^4} \\ &= f''(0) + \frac{2}{\omega_0}\,. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\frac{g''(0)}{2} = \frac{f''(0)}{2} + \frac{1}{\omega_0}$$

y en consecuencia, $b_2 = b_2(g) = a_2 + \frac{1}{\omega_0}$. Por el Teorema 1.3 tenemos que

$$|b_2| = |a_2 + \frac{1}{\omega_0}| \leq 2 \quad y \quad |a_2| \leq 2\,.$$

De lo anterior obtenemos que

$$\left|\frac{1}{\omega_0}\right| = \left|a_2 + \frac{1}{\omega_0} - a_2\right| \leq \left|a_2 + \frac{1}{\omega_0}\right| + |a_2| \leq 4\,.$$

Por lo tanto $|\omega_0| \geq \frac{1}{4}$. Note que si $|\omega_0| = \frac{1}{4}$, entonces $\left|a_2 + \frac{1}{\omega_0}\right| + |a_2| = 4$, y como $\left|a_2 + \frac{1}{\omega_0}\right| \leq 2$, obtenemos que $|a_2| \geq 2$. Concluimos que $|a_2| = 2$, lo cual implica que f es una rotación de la función de Koebe, por Teorema 1.3. ♦

Teorema 1.5. *Sea $f \in S$. Entonces las siguientes estimaciones son válidas para todo $z \in \mathbb{D}$.*

1. $\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$;
2. $\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$,

con igualdad en un $z \neq 0$ si y sólo si f es una rotación de la función de Koebe.

Demostración. 1. Sea $|z| = r \in (0,1)$. Consideremos la transformación de Koebe g de f

$$g(\xi) = \frac{f\left(\frac{\xi+z}{1+\bar{z}\xi}\right) - f(z)}{(1-|z|^2)f'(z)}\,, \qquad \xi \in \mathbb{D}\,.$$

Encontremos los dos primeros coeficientes del desarrollo en serie de Taylor de g. Como

$$g'(\xi) = \frac{f'\left(\frac{\xi+z}{1+\bar{z}\xi}\right)\frac{1-|z|^2}{(1+\bar{z}\xi)^2}}{(1-|z|^2)f'(z)}\,,$$

entonces

$$g''(\xi) = \frac{f''\left(\frac{\xi+z}{1+\bar{z}\xi}\right)\left(\frac{1-|z|^2}{(1+\bar{z}\xi)^2}\right)^2 + f'\left(\frac{\xi+z}{1+\bar{z}\xi}\right)\left(\frac{-2(1+\bar{z}\xi)(\bar{z})((1-|z|^2)}{(1+\bar{z}\xi)^4}\right)}{(1-|z|^2)f'(z)}\,.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} g''(0) &= \frac{f''(z)(1-|z|^2)^2 + f'(z)(-2\bar{z})(1-|z|^2)}{(1-|z|^2)f'(z)} \\ &= \frac{f''(z)(1-|z|^2)}{f'(z)} - 2\bar{z} \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\frac{g''(0)}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{f''(z)(1-|z|^2)}{f'(z)} - 2\bar{z}\right] = b_2 \,.$$

Por Teorema 1.3, $|b_2| \leq 2$, de ahí que

$$\left|\frac{1}{2}\left[\frac{f''(z)(1-|z|^2)}{f'(z)} - 2\bar{z}\right]\right| \leq 2$$

o equivalentemente,

$$\left|\frac{f''(z)(1-|z|^2)}{f'(z)} - 2\bar{z}\right| \leq 4\,.$$

Como $|z| = r$, tenemos que

$$\left|(1-r^2)\left(\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2\bar{z}}{1-r^2}\right)\right| \leq 4\,,$$

de donde

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right| \leq \frac{4|z|}{1-r^2} = \frac{4r}{1-r^2}\,.$$

Luego

$$\left|Re\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right\}\right| \leq \left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right| \leq \frac{4r}{1-r^2}$$

y por lo tanto

$$\frac{-4r}{1-r^2} \leq Re\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right\} \leq \frac{4r}{1-r^2}\,.$$

En consecuencia,

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2} \leq Re\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} \leq \frac{2r^2+4r}{1-r^2}\,. \tag{1.2}$$

Como $f \in \mathcal{S}$, entonces f' no se anula en el disco y $f'(0) = 1$. Así, dado $z = re^{i\theta}$,

$$\frac{\partial}{\partial r}\ln|f'(z)| = \frac{\partial}{\partial r}Re\left\{Log f'(z)\right\} = \frac{1}{r}Re\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}\,.$$

De aquí y (1.2) se sigue que

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r}\ln|f'(z)| \leq \frac{2r+4}{1-r^2} \tag{1.3}$$

y en consecuencia

$$\int_0^r \frac{2s-4}{1-s^2}ds \leq \int_0^r \frac{\partial}{\partial s}\ln|f'(z)|ds \leq \int_0^r \frac{2s+4}{1-s^2}ds\,.$$

Entonces

$$\ln\left\{\frac{1-r}{(1+r)^3}\right\} \leq \ln|f'(z)| \leq \ln\left\{\frac{1+r}{(1-r)^3}\right\}$$

o equivalentemente

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}\,.$$

Esto prueba la parte 1 del teorema. Note que si se tiene la igualdad en la parte 1 del Teorema 1.5, en un punto $z = re^{i\theta} \neq 0$, entonces se tiene la igualdad para todo $0 \leq \rho \leq r$ en (1.3). Así tendriamos

$$\left|\frac{\partial}{\partial\rho}\ln|f'(\rho e^{i\theta})|\right|_{\rho=0} = \left|Re\left\{\frac{e^{i\theta}f''(0)}{f'(0)}\right\}\right|\,,$$

de donde

$$4 = \left|Re\left\{e^{i\theta}f''(0)\right\}\right| \leq |f''(0)|\,.$$

Es decir, $|f''(0)| \geq 4$. Por Teorema 1.3 tenemos que $\left|\frac{f''(0)}{2}\right| \leq 2$, por lo tanto $|f''(0)| \leq 4$. En consecuencia $|f''(0)| = 4$. Así f es rotación de Koebe.

2. Sea $z = re^{i\theta}$, $0 < r < 1$. Si $[0, z]$ denota el segmento comprendido entre 0 y z, tenemos

$$f(z) = \int_{[0,z]} f'(\zeta)d\zeta = \int_0^r f'(\rho e^{i\theta})e^{i\theta}d\rho\,.$$

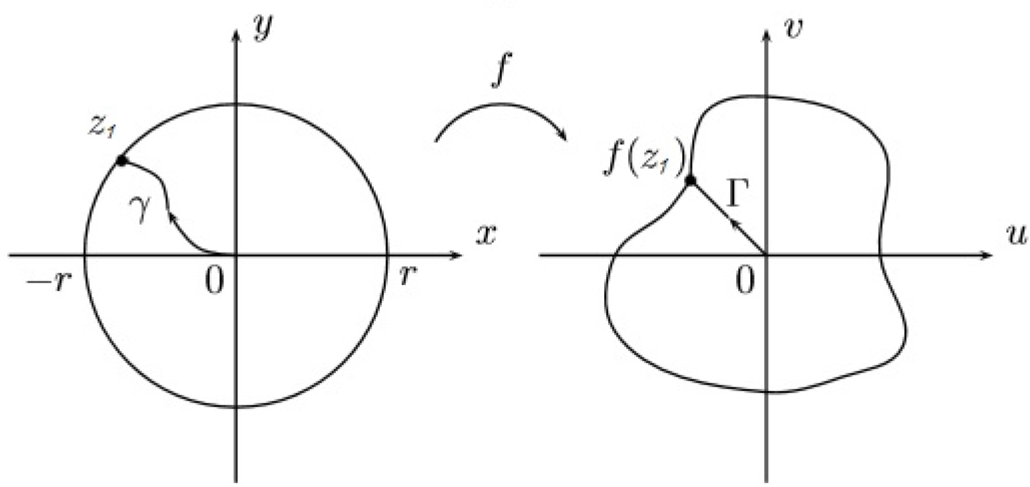
Aplicando la parte 1 del Teorema1.5,

$$|f(z)| = \left|\int_0^r f'(\rho e^{i\theta})e^{i\theta}d\rho\right| \leq \int_0^r |f'(\rho e^{i\theta})|d\rho \leq \int_0^r \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3}d\rho\,,$$

de donde

$$|f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}\,.$$

Para la otra desigualdad, dado r, sean $m(r) = min\left\{|f(z)| \mid |z| = r\right\}$ y $z_1 \in \mathbb{D}$, tal que $|z_1| = r$ y $|f(z_1)| = m(r)$. Entonces si $\Gamma = [0, f(z_1)]$, ya que f es inyectiva, $f^{-1}(\Gamma)$ está contenido en $\gamma = \{z \mid |z| \leq r\}$. Ver gráfica.



Se sigue que

$$m(r) = |f(z_1)| = \int_\Gamma |d\omega| = \int_\gamma |f'(\zeta)||d\zeta|\,,$$

lo cual implica, por parte 1 del Teorema 1.5, que

$$\begin{aligned} m(r) &\geq \int_\gamma \frac{1-|\zeta|}{(1+|\zeta|)^3}|d\zeta| \\ &\geq \int_\gamma \frac{1-|\zeta|}{(1+|\zeta|)^3}d|\zeta| \\ &= \int_0^r \frac{1-t}{(1+t)^3}dt\,. \end{aligned}$$

De aquí tenemos

$$|f(z)| \geq m(r) \geq \frac{r}{(1+r)^2}\,; \quad |z| = r\,.$$

Note que si se da la igualdad en la parte 2 del Teorema 1.5, entonces se tiene la igualdad para todo $0 \leq \rho \leq r$ en la parte 1 del mismo, por lo tanto f es una rotación de la función de Koebe. ♦

1.2. Teoría de Sturm -Liouville

Consideremos la ecuación diferencial

$$y'' + y = 0\,,$$

la cual tiene como una base de soluciones $\{\sin x, \cos x\}$. Notar que entre dos ceros consecutivos de la solución $y = \sin x$ existe exactamente un cero de la solución $y = \cos x$. Este interesante fenómeno se observa en un caso mas general, el cual probaremos en esta sección y hace parte de lo que se conoce como teoría de Sturm Liouville. Antes de probar los resultados principales de esta sección, veamos como preliminares algunas definiciones y resultados básicos de ecuaciones diferenciales ordinarias. En esta parte, I denota un intervalo.

Consideremos la ecuación diferencial

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \qquad x \in I\,. \tag{1.4}$$

Es conocido que la solución general de (1.4) es de la forma

$$ay_1 + by_2\,; \quad a, b \in \mathbb{R}\,,$$

donde y_1, y_2 son soluciones linealmente independientes de (1.4). El conjunto $\{y_1, y_2\}$ se denomina una base de soluciones de (1.4).

Definición 1.1. *Dadas $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. El Wronskiano de f y g es la función definida por*

$$W(x) := W(f,g)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}.$$

Lema 1.1. *Sean y_1, y_2 dos soluciones de la ecuación diferencial (1.4). Entonces $W \equiv 0$ en I o $W(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.*

Lema 1.2. *Dos soluciones y_1, y_2 de (1.4) son linealmente independientes si y sólo si $W(x) \neq 0$ para algún $x \in I$.*

Definición 1.2. *Una función $f : I \to \mathbb{C}$ se dice que tiene un cero aislado en $x_0 \in I$ si $f(x_0) = 0$ y existe un entorno U de x_0 tal que $f(x) \neq 0$, $x \in U \setminus \{x_0\}$.*

Lema 1.3. *Si y es una solución no trivial de la ecuación homogénea (1.4), entonces los ceros de y son aislados en I.*

Ahora estamos en condiciones de presentar la prueba de dos teoremas importantes de la teoria de Sturm-Luioville.

Teorema 1.6 (Teorema de separación de Sturm)**.** *Sea $\{y_1, y_2\}$ una base de soluciones de la ecuación homogenea (1.4). Entonces*

1. $\{x \in I \mid y_1(x) = 0\} \cap \{x \in I \mid y_2(x) = 0\} = \emptyset\,.$
2. *Entre dos ceros consecutivos de y_2 existe un único cero de y_1.*

Demostración. Para probar la parte 1, notemos que si existe $t_0 \in I$ tal que $y_1(t_0) = y_2(t_0) = 0$, entonces $W(t_0) = 0$, lo cual contradice el Lema 1.2. Ahora probemos la parte 2. Sean $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, $y_2(x_1) = y_2(x_2) = 0$ y $y_2(x) \neq 0$ para $x_1 < x < x_2$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $y_2 > 0$ en (x_1, x_2), lo cual implica que $y_2'(x_1) > 0$ y $y_2'(x_2) < 0$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} W(x_1) &= y_1(x_1)y_2'(x_1) - y_1'(x_1)y_2(x_1) \\ &= y_1(x_1)y_2'(x_1) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} W(x_2) &= y_1(x_2)y_2'(x_2) - y_1'(x_2)y_2(x_2) \\ &= y_1(x_2)y_2'(x_2)\,. \end{aligned}$$

De aquí, como $W = W(y_1, y_2)$ no cambia de signo en I y $y_1(x_1) \cdot y_1(x_2) \neq 0$, entonces $y_1(x_1)y_1(x_2) < 0$. Luego existe al menos un cero de y_1 en (x_1, x_2).

Supongamos que $x_3, x_4 \in (x_1, x_2)$ son ceros de y_1 con $x_3 < x_4$. Razonando como antes concluimos que y_2 tiene al menos un cero en $(x_3, x_4) \subset (x_1, x_2)$, lo cual no es posible ya que x_1 y x_2 son ceros consecutivos de y_2. ♦

Teorema 1.7 (Teorema de comparación de Sturm I)**.** *Sean $u, v : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que*

$$u'' + p(x)u = 0 \qquad y \qquad v'' + q(x)v = 0\,,$$

donde $p, q : I \to \mathbb{R}$ son continuas y $p(x) \leq q(x)$ para todo $x \in I$. Entonces v tiene al menos un cero entre dos ceros consecutivos de u, salvo que $\{u, v\}$ sea linealmente dependiente.

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ dos ceros consecutivos de u y supongamos que v no se anula en (x_1, x_2). Sin perdida de generalidad consideremos $u > 0$ y $v > 0$ en (x_1, x_2). Luego, $W := W(u, v)$ satisface

$$\begin{aligned} W(x_1) &= u(x_1)v'(x_1) - u'(x_1)v(x_1) \\ &= -u'(x_1)v(x_1) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} W(x_2) &= u(x_2)v'(x_2) - u'(x_2)v(x_2) \\ &= -u'(x_2)v(x_2) \\ &\geq 0\,. \end{aligned}$$

Además, como $W(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x)$, entonces $W'(x) = u(x)v''(x) - v(x)u''(x)$. Como

$$u'' = -p(x)u \qquad \text{y} \qquad v'' = -q(x)v\,,$$

se sigue que

$$\begin{aligned} W'(x) &= u(x)(-q(x)v(x)) - v(x)(-p(x)u(x)) \\ &= -q(x)u(x)v(x) + p(x)u(x)v(x) \\ &= (p(x) - q(x))u(x)v(x)\,, \end{aligned}$$

lo cual implica que W es decreciente en I, ya que $p \leq q$. Así, como $W(x_1) \leq 0$ y $W(x_2) \geq 0$ tenemos que $W(x) = 0$ para todo $x \in I$, de donde $p \equiv q$. Concluimos de aquí que u, v son soluciones de la ecuación diferencial homogénea $y'' + p(x)y = 0$. Así, como $W(u, v) \equiv 0$, entonces $\{u, v\}$ es linealmente dependiente. ⧫

Observación 1.1. *Si en el teorema anterior tomamos $p = q$, se concluye que si u_1, u_2 son soluciones linealmente independientes de $u'' + pu = 0$. Entonces entre dos ceros consecutivos de u_1 debe existir un único cero de u_2. Esto implica que si $u'' + pu = 0$ tiene una solución que no se anula, entonces cualquier otra solución tiene máximo un cero.*

Teorema 1.8 (Teorema de comparación de Sturm II)**.** *Sean $u, v : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que*

$$u'' + p(x)u = 0 \qquad y \qquad v'' + q(x)v = 0,$$

donde, $p, q \in C(I, \mathbb{R})$ y $p \leq q$. Sea $x_0 \in I$ tal que

$$u(x_0) = v(x_0) = a > 0 \qquad y \qquad u'(x_0) = v'(x_0) = b\,.$$

Si $x_1 > x_0$ satisface $v(x_1) = 0$ y $v > 0$ en $[x_0, x_1)$, entonces $u \geq v$. En particular u no se anula en $[x_0, x_1]$.

Demostración. Por definición de wronskiano, para todo $x \in I$ se tiene que

$$\begin{aligned} W(x) &:= W(v, u)(x) \\ &= v(x)u'(x) - v'(x)u(x)\,, \end{aligned} \tag{1.5}$$

de donde

$$\begin{aligned} W'(x) &= v(x)u''(x) - v''(x)u(x) \\ &= v(x)(-p(x)u(x)) - u(x)(-q(x)v(x)) \\ &= (q(x) - p(x))u(x)v(x)\,. \end{aligned}$$

Note que por hipótesis, $W(x_0) = 0$ y $v(x) \geq 0$ en $[x_0, x_1]$. Además, por continuidad de u, existe η tal que $u > 0$ en $[x_0, x_0 + \eta]$. En consecuencia, W es creciente en $[x_0, x_0 + \eta] \subset [x_0, x_1]$. Se sigue de aquí y (1.5) que

$$v(x)u'(x) \geq v'(x)u(x)\,, \qquad x \in [x_0, x_0 + \eta]\,.$$

Luego

$$\frac{u'(x)}{u(x)} \geq \frac{v'(x)}{v(x)}\,, \qquad x \in [x_0, x_0 + \eta]\,,$$

de donde

$$\int_{x_0}^{x} \frac{u'(t)}{u(t)} dt \geq \int_{x_0}^{x} \frac{v'(t)}{v(t)} dt\,.$$

Concluimos de aquí y la condición $u(x_0) = v(x_0)$ que

$$\ln u(x) \geq \ln v(x)\,,$$

lo cual implica que

$$u(x) \geq v(x) \geq 0 \qquad \text{en} \quad [x_0, x_0 + \eta]\,.$$

De aquí,

$$\delta = \sup\{\eta \in (0, x_1 - x_0) \mid u \geq v \geq 0 \quad \text{y} \quad W \geq 0 \quad \text{en} \quad [x_0, x_0 + \eta]\,\}$$

está bien definido. Probemos que $\delta = x_1 - x_0$. Si $\delta < x_1 - x_0$, entonces $u \geq v > 0$ en $[x_0, x_0 + \delta)$ y además $u(x_0 + \delta) \geq v(x_0 + \delta) > 0$. Por el teorema de conservación del signo $u > 0$ en $[x_0, x_0 + \delta + \omega] \subset [x_0, x_1]$. Así,

$$\delta + \omega \in \{\eta \in (x_0, x_1 - x_0) \mid u \geq v > 0 \quad \text{en} \quad [x_0, x_0 + \eta]\}\,,$$

lo cual contradice la definición de δ. Por consiguiente $u(x) \geq v(x)$ en $[x_0, x_1)$. ♦

1.3. La derivada schwarziana de funciones analíticas

La derivada schwarziana de una función f analítica y localmente univalente en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ se define por:

$$\mathcal{S}f = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2. \tag{1.6}$$

El nombre de "derivada schwarziana"fue introducido por Caley en honor a Schwarz en un artículo de 1880. En esta seccion, haremos énfasis en algunas propiedades y teoremas relevantes que involucran la derivada schwarziana. La primera propiedad es la conexión de este operador con ecuaciones diferenciales de segundo orden. En este sentido tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.9. *Sea $p : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analítica. $\mathcal{S}f = 2p$ si y sólo si $f = \frac{u_1}{u_2}$, donde u_1 y u_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $u'' + pu = 0$.*

Demostración. Consideremos la ecuación diferencial

$$u'' + pu = 0\,.$$

Si suponemos que f satisface $\mathcal{S}f = 2p$, se sigue inmediatamente que

$$u'' + \frac{\mathcal{S}f}{2}u = 0\,. \tag{1.7}$$

Primero verifiquemos que $u_1 = (f')^{-\frac{1}{2}}$ es solución de (1.7). En efecto, derivando u_1 tenemos

$$u_1'(z) = -\frac{1}{2}f'(z)^{-3/2}f''(z)\,,$$

de donde

$$\begin{aligned} u_1''(z) &= \frac{3}{4}f'(z)^{-5/2}f''(z)^2 - \frac{1}{2}f'(z)^{-3/2}f'''(z) \\ &= -\frac{1}{2}f(z)^{-1/2}\left[-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2 + \frac{f'''(z)}{f'(z)}\right] \\ &= -\frac{1}{2}f'(z)^{-1/2}\mathcal{S}f(z)\,, \end{aligned}$$

lo cual implica que $u_1'' + \frac{\mathcal{S}f}{2}u_1 = 0$.

Ahora encontremos otra solución u_2 linealmente independiente de u_1 mediante el método de variación de parámetros. Supongamos que $u_2 = cu_1$, donde c es una función analítica no constante, es solución de (1.7). En este caso,

$$u_2' = c'u_1 + cu_1\,,$$

de lo cual se sigue que

$$u_2'' = c''u_1 + 2c'u_1' + cu_1'\,.$$

Note que si $c'(t) = 0$, entonces $u_2'(t) = c(t)u_1(t)$. Luego $W(u_1, u_2) = 0$, de lo cual tendríamos $\{u_1, u_2\}$ es linealmente dependiente. Se sigue que,

$$\begin{aligned} u_2'' + pu_2 &= c''u_1 + 2c'u_1' + cu_1' + p(cu_1) \\ &= c(u_1'' + pu_1) + c''u_1 + 2c'u_1' \,, \end{aligned}$$

de donde, como u_1 es solución de la ecuación diferencial (1.7), tenemos que

$$u_2'' + pu_2 = c''u_1 + 2c'u_1' \,.$$

Dado que u_2 es solución de (1.7), vemos que $c''u_1 + 2c'u_1' = 0$. De aquí, $c''u_1 = -2c'u_1'$, lo cual implica que

$$(\log(c'))' = (\log u_1^{-2})' \,.$$

Integrando obtenemos

$$c' = e^k u_1^{-2}, \quad \text{para alguna } k \text{ constante.}$$

Como $u_1 = (f')^{-\frac{1}{2}}$, entonces $c' = (e^k f)'$. Integrando nuevamente tenemos

$$c(z) = e^k f(z) + l, \;\; l \text{ constante.}$$

Tomando $k = l = 0$, obtenemos $c(z) = f(z)$ y así, $u_2(z) = f(z)u_1(z)$ satisface la ecuación diferencial (1.7) y $\{u_1, u_2\}$ es linealmente independientes y por lo tanto una base de soluciones para (1.7). Concluimos de aquí que $f(z) = \frac{u_2(z)}{u_1(z)}$.

Recíprocamente, supongamos que $\{u_1, u_2\}$ es una base de soluciones de (1.7) y $f(z) = \frac{u_1(z)}{u_2(z)}$. Luego

$$f' = \frac{u_1'u_2 - u_2'u_1}{u_2^2} = \frac{W(u_1.u_2)}{u_2^2} \neq 0 \,,$$

de donde

$$f'' = \frac{1}{u_2^2}(u_1''u_2 - u_2''u_1) - \frac{2u_2'}{u_2^3}(u_1'u_2 - u_2'u_1) \,.$$

Se sigue que

$$\frac{f''}{f'} = \frac{u_2(u_1'' - u_1(u_2''/u_2))}{u_1'u_2 - u_2'u_1} - 2\frac{u_2'}{u_2} \,.$$

Note que $u_1'' - \frac{u_2''}{u_2}u_1 = 0$ ya que $p = -\frac{u_2''}{u_2}$. Entonces

$$\frac{f''}{f'} = -2\frac{u_2'}{u_2}$$

y por tanto,

$$\left(\frac{f''}{f'}\right)' = \frac{-2u_2''u_2 + 2u_2'u_2'}{u_2^2} \,.$$

De lo anterior, por definicón de schwarziana, tenemos que

$$\mathcal{S}f = \frac{-2u_2''u_2 + 2u_2'^2}{u_2^2} - \frac{1}{2}\left(-2\frac{u_2'}{u_2}\right)^2$$

y en consecuencia

$$\mathcal{S}f = 2\frac{u_2''}{u_2} = 2p\,,$$

lo cual finaliza la prueba. ♦

Otra propiedad importante de la derivada schwarziana es su relación con las transformaciones de Möbius, de hecho tenemos que el “Kernel”de la derivada shwarziana es el grupo de transformaciones de Möbius. Más precisamente tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.10. *Sea f una función analítica y localmente univalente. $\mathcal{S}f \equiv 0$ si y sólo si f es una transformación de Möbius.*

Demostración. Por Teorema 1.9, si $\mathcal{S}f \equiv 0$ entonces $f = \frac{u_1}{u_2}$ con $\{u_1, u_2\}$ una base de soluciones para la ecuación diferencial $u'' + 0u = 0$, cuyas soluciones tienen la forma

$$u(z) = k_1 z + k_2, \qquad k_1, k_2 \text{ constantes.}$$

Tomemos

$$u_1 = az + b, \quad u_2 = cz + d\,;$$

con a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ tales que $ad - bc \neq 0$. Así,

$$f(z) = \frac{u_1}{u_2} = \frac{az+b}{cz+d}\,.$$

Recíprocamente, sea $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad - cd \neq 0$ una transformación de Möbius y sean

$$u_1(z) = az + b \qquad \text{y} \qquad u_2(z) = cz + d\,.$$

Entonces $\{u_1, u_2\}$ es linealmente independiente y además son solución de $u'' = 0$ o de $u'' + 0u = 0$. Por Teorema 1.9, $\mathcal{S}f \equiv 0$. ♦

1.3.1. Otras propiedades de la derivada schawarziana

- Dadas f, g funciones analíticas y localmente univalentes,

$$\mathcal{S}(f \circ g) = (\mathcal{S}f(g))(g')^2 + \mathcal{S}g\,. \tag{1.8}$$

Demostración. Por definición de derivada schwarziana, tenemos que

$$\mathcal{S}(f\circ g)=\frac{(f\circ g)'''}{(f\circ g)'}-\frac{3}{2}\left(\frac{(f\circ g)''}{(f\circ g)'}\right)^2. \tag{1.9}$$

Como $(f\circ g)'=f'(g)g'$, entonces

$$(f\circ g)''=f''(g)(g')^2+f'(g)g''$$

y por tanto

$$(f\circ g)'''=f'''(g)(g')^3+2f''(g)(g')(g'')+f'(g)(g''')+f''(g)g''g'.$$

Así

$$\frac{(f\circ g)''}{(f\circ g)'}=\frac{f''(g)g'}{f'(g)}+\frac{g''}{g'}$$

y en consecuencia

$$\frac{(f\circ g)'''}{(f\circ g)'}=\frac{f'''(g)(g')^2}{f'(g)}+\frac{2f''(g)(g'')}{f'(g)}+\frac{g'''}{g'}+\frac{f''(g)g''}{f'(g)}.$$

De lo anterior y de (1.9), se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(f\circ g)&=\frac{f'''(g)(g')^2}{f'(g)}+\frac{2f''(g)(g'')}{f'(g)}+\frac{g'''}{g'}+\frac{f''(g)g''}{f'(g)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(g)g'}{f'(g)}+\frac{g''}{g'}\right)^2\\&=(g')^2\left(\frac{f'''(g)}{f'(g)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(g)}{f'(g)}\right)^2\right)+\frac{g'''}{g'}-\frac{3}{2}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2\\&=(g')^2\mathcal{S}(f(g))+\mathcal{S}(g).\end{aligned}$$

♦

- $\mathcal{S}f=\mathcal{S}g$ si y sólo si $f=T\circ g$ para alguna transformación de Möbius T.

Demostración. Consideremos las ecuaciones diferenciales

$$u''+\frac{\mathcal{S}f}{2}u=0 \tag{1.10}$$

y

$$u''+\frac{\mathcal{S}g}{2}u=0. \tag{1.11}$$

Por Teorema 1.9 existen $\{u_1,u_2\}$ y $\{v_1,v_2\}$ bases de soluciones para las ecuaciones (1.10) y (1.11) respectivamente. Sean $f=\frac{u_1}{u_2}$ y $g=\frac{v_1}{v_2}$. Por hipótesis tenemos que $\mathcal{S}f \equiv \mathcal{S}g$, entonces las ecuaciones (1.10) y (1.11) son la misma. Por tanto $v_1, v_2 \in gen\{u_1, u_2\}$ y en consecuencia,

$$\begin{aligned} g &= \frac{au_1 + bu_2}{cu_1 + du_2} \\ &= \frac{af + b}{cf + d}, \end{aligned}$$

con $ad - bc \neq 0$. De aquí,

$$g = T \circ f,$$

donde $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Recíprocamente, supongamos que T es una transformación de Mobius y $f = T \circ g$. De (1.8) tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(T \circ g) &= \mathcal{S}T(g)(g')^2 + \mathcal{S}g \\ &= \mathcal{S}g\,. \end{aligned}$$

♦

Definición 1.3. *Sea $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ regular de clase C^3. Definimos la derivada schwarziana de Ahlfors por*

$$\mathcal{S}_1\varphi := \frac{\langle \varphi', \varphi''' \rangle}{|\varphi'|^2} - 3\frac{\langle \varphi', \varphi'' \rangle}{|\varphi'|^4} - \frac{3}{2}\frac{|\varphi'''|^2}{|\varphi'|^2}\,.$$

Observación 1.2. *La schwaziana de Alhfors satisface propiedades similares a la derivada scharziana de una función analítica. En particular,*

$$\mathcal{S}_1(T \circ \varphi) = \mathcal{S}_1(\varphi) \tag{1.12}$$

para toda transformación de Möbius T en $\mathbb{R}^n$. Además, si $x : J \to I$ es diferenciable y $x'(t) \neq 0$ para todo $t \in J$, entonces

$$\mathcal{S}_1(\varphi \circ x) = \mathcal{S}\varphi(x)(x')^2 + \mathcal{S}x\,.$$

La definición está motivada por la expresión para la parte real de la derivada schwarziana de una función analítica: si $f \in H(\Omega)$, donde $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un dominio,

$$Re\{\mathcal{S}f\} = \frac{Re\{f'.\overline{f'''}\}}{|f'|^2} - 3\frac{Re\{f'.\overline{f''}\}}{|f'|^4} - \frac{3}{2}\frac{|f'''|^2}{|f'|^2}\,.$$

El siguiente teorema proporciona un criterio de inyectividad para curvas, en términos de la schwarziana de Ahlfors [5].

Teorema 1.11. *Sea* $p : (-1,1) \to \mathbb{R}$ *una función continua tal que la ecuación*

$$u'' + pu = 0$$

no tiene soluciones no triviales con más de un cero en $(-1,1)$. *Sea* $f : (-1,1) \to \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ *una curva regular de clase* C^3. *Si*

$$\mathcal{S}_1 f(x) \leq 2p(x)\,; \qquad -1 < x < 1,$$

entonces f *es inyectiva.*

Demostración. Si suponemos que f no es inyectiva en $(-1,1)$, entonces existen $x_1, x_2 \in (-1,1)$ tales que $x_1 < x_2$, $f(x_1) = f(x_2)$ y f es inyectiva en $[x_1, x_2)$. Ahora, sea $g = T \circ f$, donde T es una transformación de Möbius en $\mathbb{R}^n$ que envía $f(x_1)$ a infinito y definamos $v = |g'|^{-1/2} = \langle g', g' \rangle^{-1/4}$. Entonces se tiene $v'' + qv = 0$, donde $q = -\frac{v''}{v}$. Derivando v obtenemos

$$v' = -\frac{1}{2} \langle g', g' \rangle^{-5/4} \langle g', g'' \rangle\,,$$

de aqui que

$$v'' = \frac{5}{4}|g'|^{-9/2} \langle g', g'' \rangle^2 - \frac{1}{2}|g'|^{-5/2} \langle g', g''' \rangle - \frac{1}{2}|g'|^{-5/2}|g''|^2$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} q &= \frac{-\frac{5}{4}|g'|^{-9/2} \langle g', g'' \rangle^2 + \frac{1}{2}|g'|^{-5/2} \langle g', g''' \rangle + \frac{1}{2}|g'|^{-5/2}|g''|^2}{|g'|^{-1/2}} \\ &= \frac{\langle g', g''' \rangle}{2|g'|^2} + \frac{|g''|^2}{2|g'|^2} - \frac{5 \langle g', g'' \rangle^2}{4|g'|^4}\,. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} 2q &= \frac{\langle g', g''' \rangle}{|g'|^2} + \frac{|g''|^2}{|g'|^2} - \frac{5 \langle g', g'' \rangle^2}{2|g'|^4} \\ &= \frac{\langle g', g'' \rangle}{|g'|^2} - 3\frac{\langle g', g'' \rangle^2}{|g'|^4} + \frac{3|g''|^2}{2|g'|^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{|g''|^2}{|g'|^2} - \frac{\langle g', g'' \rangle^2}{|g'|^4} \right), \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$2q = \mathcal{S}_1 g - \frac{1}{2}\left(\frac{|g''|^2}{|g'|^2} - \frac{\langle g', g'' \rangle^2}{|g'|^4} \right).$$

Por (1.12) se tiene que $\mathcal{S}_1 g = \mathcal{S}_1 f$, de donde por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$2q = \mathcal{S}_1 f - \frac{1}{2}\left(\frac{|g''|^2}{|g'|^2} - \frac{\langle g, g''\rangle^2}{|g'|^2}\right) \leq \mathcal{S}_1 f \leq 2p\,.$$

Por consiguiente $q \leq p$. Por otro lado, consideremos una solución u del P.V.I

$$u'' + pu = 0\,, \qquad u(x_0) = v(x_0) > 0 \qquad u'(x_0) = v'(x_0)\,,$$

donde $x_0 \in [x_1, x_2)$. Por hipótesis, u se anula a lo más una vez en $(-1, 1)$, por tanto, $u > 0$ en $[x_1, x_0]$ ó $u < 0$ en $[x_0, x_2]$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $u > 0$ en $[x_1, x_0]$. Por Teorema de Comparación de Sturm II, $v(x) \geq u(x)$ para todo $x \in [x_1, x_0]$. En consecuencia, existe $m > 0$ tal que $v(x) > m$ para cualquier $x \in [x_1, x_0]$, lo cual implica que existe $\delta > 0$ tal que $|g'| \leq \frac{1}{m^2}$ en $(x_1 - \delta, x_1 + \delta)$. De aquí concluimos que $|g(x_1)| < +\infty$, lo cual contradice el hecho que $f(x_1) = \infty$. ♦

Teorema 1.12. *Sea p como en el teorema anterior y suponga además que p es par en $(-1, 1)$ y $p(x)(1-x^2)^2$ es no creciente en $(0, 1)$. Si f es una función analítica y localmente univalente en $\mathbb{D}$ y*

$$|\mathcal{S}f(z)| \leq 2p(|z|)\,, \tag{1.13}$$

entonces f es univalente en $\mathbb{D}$.

Demostración. **Paso 1.** Sea φ la curva definida por $\varphi(t) = f(t)$, $t \in (-1, 1)$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1\varphi(t) &= \mathcal{S}_1 f(t) \\ &= Re\,\{\mathcal{S}f(t)\} \\ &\leq |\mathcal{S}f(t)|\,, \qquad -1 < t < 1. \end{aligned}$$

De lo anterior y de (1.13) se tiene que $\mathcal{S}_1\varphi(t) \leq 2p(t)$ para $-1 < t < 1$. De aquí, por Teorema 1.11 se sigue que φ es inyectiva y por lo tanto f es uno a uno en $(-1, 1)$. Como consecuencia, toda función $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ localmente univalente que satisface (1.13) es inyectiva en $(-1, 1)$.

Paso 2. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ con $z_1 \neq z_2$ y sea Γ la geodésica hiperbólica que pasa por z_1 y z_2. Existe θ tal que $\{e^{i\theta}z \mid z \in \Gamma\}$ es una geodésica hiperbólica ortogonal al eje imaginario en un punto de la forma $i\rho$, $0 \leq \rho < 1$. Luego, por propiedades de la derivada schwarziana, la función $g(z) = f(e^{-i\theta}z)$ satisface la condición (1.13) y $f(z_1) \neq f(z_2)$ si $g(e^{-i\theta}z_1) \neq g(e^{-i\theta}z_2)$. Así, por conveniencia de notación, sin perdida de generalidad podemos suponer que Γ es ortogonal al eje imaginario en $i\rho$, $0 \leq \rho < 1$.

Consideremos un automorfismo del disco

$$T(z) = \frac{i\rho - z}{1 + i\rho z}\,, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Note que $T(0) = i\rho$ y $T'(0) = \rho^2 - 1$. Así, T aplica el segmento $(-1, 1)$ en Γ. Luego, si $g = f \circ T$ es inyectiva en $(-1, 1)$, f lo será en Γ.
De otro lado,

$$\mathcal{S}g(z) = \mathcal{S}f(t(z)) \{T'(z)\}^2 ,$$

de donde, por (1.13),

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}g(z)| &= |\mathcal{S}f(T(z))||T'(z)| \\ &\leq 2|T'(z)|p(|T(z)|) . \end{aligned} \tag{1.14}$$

Como $T \in Aut(\mathbb{D})$,

$$\frac{|T'(z)|}{1 - |T(z)|^2} = \frac{1}{1 - |z|^2} ,$$

se sigue que,

$$|T'(z)|p(|T(z)|) = \left(\frac{1 - |T(z)|^2}{1 - |z|^2} \right)^2 p(|T(z)|) . \tag{1.15}$$

Además, ya que $|T(x)| > |x|$ con $x \in (-1, 1)$, luego

$$(1 - |T(x)|^2)^2 p(|T(x)|) \leq (1 - |x|^2)^2 p(|x|) ,$$

lo cual implica, por (1.14) y (1.15), que

$$|\mathcal{S}g(x)| \leq 2p(|x|) ; \quad -1 < x < 1.$$

Por **Paso 1**, g es inyectiva en $(-1, 1)$, de lo cual se concluye que f es inyectiva en Γ. Se sigue que $f(z_1) \neq f(z_2)$. ♦

1.3.2. Resultados

- Si f es analítica y localmente univalente en $\mathbb{D}$ y

  $$|\mathcal{S}f(z)| \leq \frac{2}{(1 - |z|^2)^2} , \qquad z \in \mathbb{D} ,$$

  entonces f es univalente en $\mathbb{D}$.

  Demostración. Sea $p(x) = \frac{1}{(1-x^2)^2}$. Note que $p(x)$ es una función continua, positiva, par en $(-1, 1)$ y $p(x)(1 - x^2)^2$ es no creciente en $(0, 1)$. Además, $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$ es solución de la ecuación diferencial $y''(x) + p(x)y(x) = 0$ con $x \in (-1, 1)$ y no se anula en $(-1, 1)$. Luego, por Observación 1.1, $u'' + pu = 0$ no tiene soluciones no triviales con más de un cero. Así, por Teorema 1.12, f es univalente en $\mathbb{D}$. ♦

Similarmente, como corolario del Teorema 1.12, también se sigue que las condiciones

$$|\mathcal{S}f(z)| \leq \frac{4}{1-|z|^2} \qquad \text{o} \qquad |\mathcal{S}f(z)| \leq \frac{\pi^2}{2}, \qquad z \in \mathbb{D}\,,$$

implican que f es inyectiva en $\mathbb{D}$.

CAPÍTULO 2

Criterio de Univalencia Dependiente de un Parámetro

En este capítulo consideraremos una familia de funciones $p(\cdot, \lambda)$ dependiente de un parámetro real λ y la familia de ecuaciones diferenciales correspondiente

$$u''(x, \lambda) + pu(x, \lambda) = 0, \qquad x \in (-1, 1).$$

El objetivo central del capítulo es un resultado que proporciona una familia de criterios de univalencia, los cuales se obtendrán aplicando la teoría desarrollada en los capítulos anteriores a $p(\cdot, \lambda)$ para ciertos valores de λ.

Teorema 2.1. *Sea*

$$p(x, \lambda) = \frac{2(1 + \lambda) - 12\lambda x^2}{(1 - x^2)(1 - \lambda x^2)}\,, \qquad -1 < x < 1.$$

Si una función $f(z)$, analítica y localmente univalente en $\mathbb{D}$, satisface

$$|\mathcal{S}f(z)| \leq 2p(|z|)\,; \qquad 0 \leq \lambda \leq 1/5\,,$$

entonces f es univalente en $\mathbb{D}$.

Demostración. Primero notemos que $0 \leq \lambda \leq 1/5$ implica que $p(x, \lambda) \geq 0$ para todo $x \in (-1, 1)$. Además, p es continua y par para todo λ.

De otro lado, consideremos la familia

$$u(x,\lambda) = (1-x^2)(1-\lambda x^2)\,, \qquad x \in (-1,1)\,,$$

de funciones positivas dependientes del parámetro real λ, con $0 \leq \lambda \leq 1/5$. Luego

$$\begin{aligned} u'(x,\lambda) &= -2x(1-\lambda x^2) - 2\lambda x(1-x^2) \\ &= 4\lambda x^3 - 2x(1+\lambda) \end{aligned}$$

y de aquí

$$u''(x,\lambda) = 12\lambda x^2 - 2(1+\lambda)\,.$$

Aquí y en adelante, u' y u'' denotan derivadas con respecto a x. Se sigue que $u(\cdot\,,\lambda)$ es solución de la ecuación diferencial

$$u''(x,\lambda) + p(x,\lambda)u(x,\lambda) = 0\,, \qquad x \in (-1,1),$$

y por lo tanto, como esta solución no se anula en $(-1,1)$, concluimos de la observación 1.1, que $u''(x,\lambda) + p(x,\lambda)u(x,\lambda) = 0$ no tiene soluciones no triviales con más de un cero en $(-1,1)$.

Finalmente probemos que $p(x,\lambda)(1-x^2)^2$ es no creciente en $(0,1)$ para todo $0 \leq \lambda \leq 1/5$. En efecto

$$\begin{aligned} p(x,\lambda)(1-x^2)^2 &= \frac{2(1+\lambda) - 12\lambda x^2}{(1-x^2)(1-\lambda x^2)}(1-x^2)^2 \\ &= \frac{(2(1+\lambda) - 12\lambda x^2)(1-x^2)}{1-\lambda x^2}\,; \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Tomando $x^2 = y$, obtenemos una función, la cual denotaremos por G, dada por

$$G(y) = \frac{(2(1+\lambda) - 12\lambda y)(1-y)}{1-\lambda y}\,; \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Se sigue que

$$G'(y)(1-\lambda y)^2 = -12\lambda y^2 + 24\lambda y + 2(\lambda^2 - 6\lambda - 1)\,; \quad 0 \leq y \leq 1,$$

de donde $G'(y)(1-\lambda y)^2$ es una función continua cuya gráfica es una parábola que abre hacia abajo con vértice en $(\frac{1}{\lambda}, 2\lambda^2 - 12\lambda + 10)$. Luego, dado que $1/\lambda > 1$, entonces $G'(y)(1-\lambda y)^2$ es creciente en $(0,1)$ y por lo tanto $G'(y)(1-\lambda y)^2$ toma su máximo valor en $y = 1$. Así, para todo $y \in (0,1)$,

$$G'(y)(1-\lambda y)^2 \leq G'(1)(1-\lambda)^2 = -10\lambda^2 + 12\lambda - 2 \leq 0,$$

si $0 < \lambda \leq \frac{1}{5}$.

Por lo tanto, G es decreciente en $(0,1)$ o equivalentemente $p(x,\lambda)(1-x^2)^2$ es decreciente en $(0,1)$ para todo $0 < \lambda \leq 1/5$. En consecuencia $p(x,\lambda)$ satisface las hipótesis del Teorema 1.12, lo que permite concluir que f es univalente en $\mathbb{D}$. ♦

2.0.3. Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo fue analizar un criterio estudiado por D. Ahoronov y U. Elias [2], el cual es una extensión de los criterios de univalencia estudiados por Nehari [11], Pokornyi [16] entre otros autores. Esencialmente la técnica utilizada se reduce a construir nuevas funciones de Nehari a partir una función que depende de parámetros. Si bien en el presente trabajo consideramos el caso de un parámetro, recientemente otros autores han considerado casos más generales, ver por ejemplo [3] y [17]. Es importante señalar que en estos estudios juega un papel central la teoría de Sturm-Liouville, especialmente la referida a teoremas de separación y comparación de soluciones de cierto tipo de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo grado. Así mismo, hemos utilizado la relación entre la schwarziana de Ahlfors [5] y la schwarziana clásica pensando en las técnicas que se usan en contextos mas generales, donde relaciones análogas son esenciales en el estudio de criterios de inyectividad.

Bibliografía

[1] Aharonv D. and Elias U, *Singular Sturm comparison theorems,* J. Math. Anal. Appl. **371**(2010), 759–763.

[2] Aharonv D. and Elias U., *Univalence criteria depending on parameters,* Anal. Math. Phys. (2014), 23–34.

[3] Aliaga E. and Tuneski N., *Schwarzian derivative as a condition for univalence,* Adv. Math., Sci. J. (2016), 111–116.

[4] Beescak PR., *Non oscilliation and disconjugacy in the complex domain,* Bull. Aust. Math. Soc. **81** (1956), 211–242.

[5] Chuaqui M. and Gevirtz J., *Simple curves in $\mathbb{R}^n$ and Ahlfors´schwarzian derivative.* Proc. Am. Math. Soc.**123** (2003), 223–230.

[6] M. Chuaqui, P. Duren, and B. Osgood, *The Schwarzian derivative for harmonic mappings,* J. Anal. Math. **91** (2003), 329–351.

[7] Chuaqui M., Duren P. and Osgood B., *Univalence criteria for lifts of harmonic mappings to minimal surfaces,* J. Geom. Anal. **17** (2007), no. 1, 49–74.

[8] Chuaqui M., Duren P., Osgood B. and Stowe D., *Oscillation of solutions of linear differential equations.* Bull. Aust. Math. Soc. **79** (2009), 161–169.

[9] Cuaqui M. and Osgood B., *Sharp distortion theorems associated with the Schwarzian derivative,* J. London Math. Soc. **2** 48, (1993), no. 2, 289–298.

[10] Graham I. and Kohr G., *Geometric function theory in one and higher dimensions,* Marcel Dekker Inc, New York, 2003

[11] Nehari Z., *The Schwarzian derivative and Schlicht functions,* Math. Bull. Am. Math. Soc. **55** (1949), 545–551.

[12] Nehari Z., *Some criteria of univalence,* Proc. Am. Math. Soc. **5**, (1954), 700–704.

[13] Nehari Z., *Univalence criteria depending on the Schwarzian derivative,* Llinois J. Math. **23,** (1979), 345–351.

[14] Osgood B. and Stowe D, *A generalization of Nehari's univalence criterion,* Comment. Math. Helv. **65** (1990), 234–242.

[15] Osgood B. and Stowe D,*The Schwarzian derivative and conformal mapping of Riemannian manifolds,* Duke Math. J. **67** (1992), no. 1, 57–99.

[16] Pokornyi V., *On some sufficient conditions for univalence,* Dokl. Akad. Nauk SSSR.**79** (1951), 743–746.

[17] Tuneski N., Jolevska B. and Prangoski B, *On existence of sharp univalence criterion using the schwarzian derivative* C. R. Acad. Bulg. Sci. **68** (2015), no. 5, 568–576.