SOBRE FORMAS DIFERENCIALES EN VARIEDADES Y ALGUNOS CONCEPTOS RELACIONADOS

Juan Manuel Manquillo Molina

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Programa de Matemáticas
Popayán
2019

SOBRE FORMAS DIFERENCIALES EN VARIEDADES Y ALGUNOS CONCEPTOS RELACIONADOS

Propuesta de Trabajo de Grado
En modalidad de Investigación, presentado como requisito parcial
para optar al título de Matemático

Juan Manuel Manquillo Molina

Director
Dr. Willy Sierra Arroyo

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Programa de Matemáticas
Popayán
2019

Índice general

Introducción

La geometría diferencial es considerada una de las áreas más importantes en el campo de las matemáticas y de una creciente actividad investigativa. Debido a sus numerosas aplicaciones, especialmente en física e ingeniería, ha tenido un gran desarrollo desde sus inicios hasta la actualidad. En particular, el concepto de forma diferencial, el cual aparece a principios del siglo XX como una generalización de funciones, y en algún sentido, se define de manera análoga a campos vectoriales en espacios euclidianos, tiene numerosas aplicaciones en el campo de la física. Conceptos básicos en electricidad, magnetismo, termodinámica entre otros, pueden ser formulados y estudiados de mejor manera en términos de formas diferenciales. En el presente documento " Sobre formas diferenciales en variedades y algunos conceptos relacionados"se realiza un estudio sistemático de formas diferenciales, incluyendo entre otros aspectos importantes, la definición de algunas operaciones entre ellas, tales como: el producto exterior, el pullback y la derivada exterior. Además, se extienden resultados de diferenciabilidad a variedades y, con el fin de mostrar el Teorema de Stokes en este contexto, se presenta detalladamente conceptos de integración en variedades diferenciables.

El documento se encuentra dividido en cinco capítulos, en los cuales es desarrollado la parte teórica necesaria para alcanzar el objetivo. En el primer capítulo, se realiza una introducción a funciones $k-$lineales y alternantes sobre un espacio vectorial de dimensión finita en donde se definen algunas operaciones tales como el producto tensorial y el producto exterior; en el segundo capítulo, se presenta el concepto de vector tangente en un punto p de $\mathbb{R}^n$, como una derivación en p, de tal manera que el vector tangente coordenado e_i, coincide con la derivación parcial ∂_i. Habiendo desarrollado esta idea, se considera una $k-$forma diferencial como una función $k-$lineal y alternante que asigna a cada punto p un $k-$covector en el espacio tangente $T_p\mathbb{R}^n$. Por último, en éste capítulo se define el producto exterior y surge la noción de diferenciación para formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$. A lo largo del tercer capítulo, se establece por primera vez el concepto de variedad, siendo dotada de estrutura topológica y diferenciable, considerandose como el espacio base para generalizar lo desarrollado en $\mathbb{R}^n$; los conceptos de espacio tangente en $p \in M$, forma diferencial y las operaciones mencionadas anteriormente se extienden de manera natural. En el cuarto capítulo, se hace uso de la información presentada anteriormente, con el fin de desarrollar la integración de formas diferenciales sobre variedades, presentando gran relevancia lo que significa una variedad orientada y una variedad con frontera. Así mismo, la integración de Riemman en $\mathbb{R}^n$ y particiones de la unidad, juegan un papel central en la parte teórica para definir la integral de una $n-$forma con soporte compacto sobre una variedad orientada. De esta manera, se desarrolla lo necesario para formular y probar el Teorema de Stokes. Finalmente se incluye un último capítulo, en el cual se hace una aproximación a la integración sobre variedades Riemannianas, para lo cual se explica brevemente el concepto de forma de volumen asociada a una métrica Riemanniana en variedades Riemannianas orientadas. Esta teoría es fundamental para abordar problemas de investigación en esta área.

Capítulo 1

Preliminares

La teoría desarrollada por el matemático aleman Hermann Grassmann en el siglo XIX, posteriormente conocida como Álgebra exterior de multicovectores, es la base teórica que se introduce en el primer capítulo, puesto que en él se estudian funciones multilineales alternantes sobre un espacio vectorial; fundamento principal para la teoría de formas diferenciales. En particular, el cálculo vectorial en $\mathbb{R}^3$ es generalizado a $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, el producto exterior de multicovectores desarrollado en esta sección no es más que una exensión del producto cruz en $\mathbb{R}^3$. A continuación se fijan las notaciones y se hace un breve repaso de los conceptos básicos que se usarán a lo largo del trabajo.

1.1. Un breve repaso sobre tensores

1.1.1. El espacio dual

Sea V un espacio vectorial real y, como es usual, se denota por V^* el espacio dual de V. Esto es, V^* es el espacio vectorial de todos los funcionales lineales $f : V \to \mathbb{R}$. Un elemento $f \in V^*$ es llamado covector.

Si bien la anterior definición es válida para espacios vectoriales generales, por el objetivo del trabajo, en adelante se considera solo espacios vectoriales de dimensión finita con coeficientes en $\mathbb{R}$. En este caso, $dimV = dimV^*$. De hecho, si

$$\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$$

es una base de V, entonces

$$\mathcal{B}^* = \left\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\right\},$$

donde $\alpha^i : V \to \mathbb{R}$ es el covector definido por

$$\alpha^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

es una base de V^*, la cual se denomina base dual (asociada a $\mathcal{B}$).

Note que si $f \in V^*$, existen escalares $\lambda_1, \dots \lambda_n$ tales que

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha^i.$$

Por tanto $f(e_j) = \lambda_j$, para todo $j = 1, \dots, n$. Así, $f \in V^*$ se puede expresar en la forma

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) \alpha^i.$$

Para otros aspectos relacionados con el espacio dual, ver [4, Páginas 171-175].

1.1.2. Permutaciones

Dado un conjunto no vacío A, se denota por S_A el grupo de biyecciones de A sobre A con la composición como operación del grupo, el cual se denomina grupo de permutaciones de A. Si $n \geq 1$ es un número natural, S_n denota el grupo de permutaciones del conjunto $\{1, \dots, n\}$.

Definición 1. *Una permutación $\sigma \in S_n$ es un ciclo de longitud r, $r \leq n$, si existe $I = \{a_1, a_2, \dots, a_r\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ tal que*

i) $\sigma(a_i) = a_{i+1}$, *para todo* $i = 1, \dots, r-1$, *y* $\sigma(a_r) = a_1$;

ii) $\sigma(a_j) = a_j$, *para todo* $a_j \notin I$.

Un ciclo de longitud r también es llamado un $r-$ciclo.

En tal caso, el ciclo σ es denotado por $(a_1 \dots a_r)$ y al número r es llamado longitud de σ. Una transposición es un $2-$ciclo, no es más, que un ciclo de la forma $(a\,b)$ en el que se intercambia a con b.

Dos ciclos $(a_1 \dots a_m)$ y $(b_1 \dots b_r)$ de S_n son disjuntos si los conjuntos $\{a_1, \dots, a_m\}$ y $\{b_1, \dots b_r,\}$ no tienen elementos en común.

Observación 1. *Toda permutación de S_n se puede descomponer en un producto de ciclos disjuntos. Esta descomposición es única, salvo el orden de los factores, ver [5, Página 50].*

Ejemplo 1. *En S_7 encontramos que*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 5 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1\,3\,5)(2\,6)(4\,7).$$

Observación 2. *Ya que todo ciclo puede ser escrito como un producto de transposiciones, entonces toda permutación de S_n distinta de la identidad se puede descomponer como producto de transposiciones. En el caso de un $m-$ciclo $\sigma = (a_1\,a_2 \dots a_m) \in S_n$, se tiene*

$$(a_1\,a_2 \dots a_m) = (a_1\,a_m) \cdots (a_1\,a_3)(a_1\,a_2).$$

Ejemplo 2. *De acuerdo al ejemplo anterior*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 5 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1\,3\,5)(2\,6)(4\,7) = (1\,5)(1\,3)(2\,6)(4\,7).$$

Una permutación es par o impar, si es el producto de un número par o impar de transposiciones respectivamente. El signo de una permutación, denotado por $sgn(\sigma)$, se define por 1 si la permutación es par y -1 si es impar. Es fácil ver que el signo de una permutación satisface la igualdad

$$sgn(\sigma\tau) = sgn(\sigma)sgn(\tau).$$

Estos y otros resultados sobre el grupo de permutaciones pueden ser estudiados en [5, páginas 49-54].

1.1.3. Funciones multilineales

Se denota por $V^k = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k-\text{factores}}$ el producto cartesiano de k "copias"del espacio vectorial V.

Una función $f : V^k \to \mathbb{R}$ es $k-$ lineal si es lineal en cada argumento. Esto es,

$$f(\ldots, av + bw, \ldots) = af(\ldots, v, \ldots) + bf(\ldots, w, \ldots)$$

para $a, b \in \mathbb{R}$ y $v, w \in V$.

Es claro que el conjunto de funciones $k-$lineales con las operaciones usuales de suma y producto por escalar de funciones es un espacio vectorial; denotado por $L_k(V)$. Una función en $L_k(V)$ se denomina un $k-$tensor covariante sobre V.

Ejemplo 3. *Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base estándar para $\mathbb{R}^n$, el producto punto definido por*

$$f(v, w) = v \cdot w = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i,$$

donde $v = \sum v^i e_i$ y $w = \sum w^i e_i$ es una función bilineal.

Ejemplo 4. *Sea $f(v_1, \ldots, v_n) = det[v_1, \ldots, v_n]$, considerada como una función de n vectores columna $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ es $n-$lineal.*

Definición 2. *Dada una función $k-$lineal f y $\sigma \in S_k$, la función $k-$lineal σf definida por la fórmula*

$$(\sigma f)(v_1, \ldots, v_k) = f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}).$$

La función $k-$lineal $f : V^k \to \mathbb{R}$ es simétrica si

$$f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) = f(v_1, \ldots, v_n)$$

para toda permutación $\sigma \in S_k$ ($\sigma f = f$). Se dice que f es alternante si

$$f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) = sgn(\sigma)f(v_1, \ldots, v_n)$$

para toda permutación $\sigma \in S_k$ ($\sigma f = sgn(\sigma)f$).

Ejemplo 5.

i) El producto punto $f(v,w) = v \cdot w$ *en* $\mathbb{R}^n$ *es simétrico.*

ii) El determinante $f(v_1, \ldots, v_n) = det[v_1, \ldots, v_n]$ *en* $\mathbb{R}^n$ *es alternante.*

iii) Dado un espacio vectorial V *y* $f, g \in V^*$, *la función*

$$f \wedge g : V \times V \to \mathbb{R}$$

definida por

$$(f \wedge g)(u, v) = f(u)g(v) - f(v)g(u),$$

es alternante.

Lema 1. *Sea* $\sigma, \tau \in S_k$ *y* f *una función* $k-$*lineal sobre un espacio vectorial* V, *entonces* $\tau(\sigma f) = (\tau\sigma)f$.

Demostración. Dados $v_1, \ldots, v_k \in V$,

$$\begin{aligned}
\tau(\sigma f)(v_1, \ldots, v_k) &= (\sigma f)(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(k)}) \\
&= f(v_{\tau(\sigma(1))}, \ldots, v_{\tau(\sigma(k))}) \\
&= f(v_{(\tau\sigma)(1)}, \ldots, v_{(\tau\sigma)(k)}) \\
&= (\tau\sigma) f(v_1, \ldots, v_k),
\end{aligned}$$

lo cual completa la prueba. □

En el presente trabajo presenta gran interes el espacio vectorial $A_k(V)$ de todas las funciones $k-$lineales alternantes sobre un espacio vectorial real V. Los elementos de $A_k(V)$ son llamados $k-$covectores. Un $0-$covector no es más que una constante, así que se acostumbra a usar la identificación $A_0(V) = \mathbb{R}$. Además, un $1-$covector es un covector.

Definición 3. *Sea* V *un espacio vectorial y* f *una función* $k-$*lineal sobre* V. *Se define el operador simétrico de* f, *el cual se denota por* Sf, *mediante la fórmula*

$$(Sf)(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{\sigma \in S_k} f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}).$$

De igual manera se define el operador alternante de f *por*

$$(Af)(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}).$$

La siguiente proposición justifica el nombre de Sf y Af.

Proposición 1. *Sea* f *una función* $k-$*lineal sobre un espacio vectorial* V, *entonces*

i) La función $k-$*lineal* Sf *es simétrica;*

ii) La función $k-$*lineal* Af *es alternante.*

Demostración. i) La $k-$linealidad de Sf se sigue del hecho que σf es lineal para toda $\sigma \in S_k$ y el conjunto de funciones $k-$lineales es un espacio vectorial. De otro lado, dada una permutación $\tau \in S_k$ y $v_1, \ldots, v_k \in V$,

$$\begin{aligned}
\tau(Sf)(v_1, \ldots, v_k) &= (Sf)(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(k)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_k} f(v_{\sigma(\tau(1))}, \ldots, v_{\sigma(\tau(k))}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_k} (\sigma\tau) f(v_1, \ldots, v_k) \\
&= (Sf)(v_1, \ldots, v_k)
\end{aligned}$$

ya que la aplicación $\sigma \mapsto \tau\sigma$ es claramente una biyección de S_k sobre sí mismo.
ii) Como en el caso anterior, la $k-$linealidad de Af se sigue del hecho que σf es lineal para toda $\sigma \in S_k$ y el conjunto de funciones $k-$lineales es un espacio vectorial. Para $\tau \in S_k$ y $v_1, \ldots, v_k \in V$, por el Lema1,

$$\begin{aligned}
\tau(Af)(v_1, \ldots, v_k) &= (Af)(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(k)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma) f(v_{\sigma(\tau(1))}, \ldots, v_{\sigma(\tau(k))}) \\
&= sgn(\tau) \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma\tau) f(v_{\sigma(\tau(1))}, \ldots, v_{\sigma(\tau(k))}) \\
&= sgn(\tau)(Af)(v_1, \ldots, v_k)
\end{aligned}$$

Nuevamente es usado el hecho que $\tau\sigma$ recorre todas las permutaciones en S_k cuando σ recorre todas las permutaciones en S_k. □

Observación 3. *De la definición de Sf y Af y el hecho que la cardinalidad de S_k es $k!$, se sigue que si f es $k-$lineal y simétrica, entonces $Sf = k!f$ y si f es $k-$lineal y alternante, entonces $Af = k!f$.*

Ejemplo 6. *Calculemos Af para una función f $3-$lineal sobre un espacio vectorial V.*

Primero se puede notar que S_3 está compuesto por las seis permutaciones (1), $(1,3)(1,2)$, $(2,3)(2,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$ y $(2,3)$. Además, dado que $sgn(1) = +1$, $sgn(1,3)(1,2) = +1$, $sgn(2,3)(2,1) = +1$, $sgn(1,2) = -1$, $sgn(1,3) = -1$ y $sgn(2,3) = -1$, entonces

$$\begin{aligned}
Af(v_1, v_2, v_3) &= \sum_{\sigma \in S_3} sgn(\sigma)\sigma f(v_1, v_2, v_3) \\
&= f(v_1, v_2, v_3) - f(v_1, v_3, v_2) + f(v_2, v_3, v_1) \\
&\quad - f(v_2, v_1, v_3) + f(v_3, v_1, v_2) - f(v_3, v_2, v_1),
\end{aligned}$$

para todo $v_1, v_2, v_3 \in V$.

1.1.4. Producto tensorial

En matemáticas, el producto tensorial, denotado por $\otimes$, se puede aplicar en diversos contextos tales como vectores, tensores, matrices, espacios vectoriales, entre otros. Aquí, es usado una definición en el contexto de los tensores definidos en la sección anterior.

Sean f una función $k-$lineal y g una función $l-$lineal sobre un espacio vectorial V. Su producto tensorial es la función $(k+l)-$lineal $f \otimes g$ definida por

$$(f \otimes g)(v_1, \ldots, v_{k+l}) = f(v_1, \ldots, v_k)g(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}),$$

para $v_1, \ldots, v_{l+k} \in V$.

Ejemplo 7. *Dado un espacio vectorial V, sea $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V y $\mathcal{B}^* = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ la base dual correspondiente.*

Si $B : V \times V \to \mathbb{R}$ es una función bilineal en V, escribiendo $v, w \in V$ en la forma $v = \sum v^i e_i$ y $w = \sum w^j e_j$, por bilinealidad se expresa a B en términos del producto tensorial de la siguiente manera:

$$B(v, w) = \sum v^i w^j B(e_i, e_j) = \sum \alpha^i(v)\alpha^j(w) g_{ij} = \sum g_{ij}(\alpha^i \otimes \alpha^j)(v, w),$$

donde $g_{ij} = B(e_i, e_j) \in \mathbb{R}$.

Observación 4 (Asociatividad del Producto Tensorial)**.** *Si f, g y h son funciones multilineales sobre un espacio vectorial V, entonces*

$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h).$$

En efecto, si f es $k-$lineal, g $l-$lineal y h $m-$lineal sobre V, entonces

$$\begin{aligned}((f \otimes g) \otimes h)(v_1, \ldots, v_{k+l+m}) &= (f \otimes g)(v_1, \ldots, v_{k+l})h(v_{k+l+1}, \ldots, v_{k+l+m}) \\ &= f(v_1, \ldots, v_k)g(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l})h(v_{k+l+1}, \ldots, v_{k+l+m}) \\ &= f(v_1, \ldots, v_k)(g \otimes h)(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l+m}) \\ &= (f \otimes (g \otimes h))(v_1, \ldots, v_{k+l+m}),\end{aligned}$$

para todo $v_1, \ldots, v_{k+l+m} \in V$.

1.1.5. Producto exterior

Dadas f y g funciones multilineales alternantes sobre un espacio vectorial V, se está interesado en un producto que también sea alternante. Este es conocido como producto exterior o wedge y se define como sigue

$$f \wedge g = \frac{1}{k!\, l!} A(f \otimes g).$$

para $f \in A_k(V)$ y $g \in A_l(V)$. Más precisamente, $f \wedge g$ es el $(k+l)-$covector dado por

$$(f \wedge g)(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!\, l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sgn(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}),$$

$v_1, \ldots, v_{k+l} \in V$.

Como el producto exterior es definido en términos del operador alternante, por la Proposición 1 se tiene que $f \wedge g$ es alternante.

Ya que $A_0(V) = \mathbb{R}$, si $c \in \mathbb{R}$ y $g \in A_l(V)$, el producto exterior $c \wedge g$ no es nada más que la multiplicación por escalar. De hecho,

$$(c \wedge g)(v_1, \ldots, v_l) = \frac{1}{l!} \sum_{\sigma \in S_l} sgn(\sigma) cg(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(l)}) = \frac{1}{l!}[l! cg(v_1, \ldots, v_l)] = cg(v_1, \ldots, v_l),$$

para $v_1, \ldots, v_l \in V$.

Ejemplo 8. *Si $f, g \in V^* = A_1(V)$, entonces*

$$(f \wedge g)(u, v) = f(u)g(v) - f(v)g(u),$$

para todo $u, v \in V$.

Ejemplo 9. *Sean V un espacio vectorial, $f \in A_2(V)$ y $g \in A_1(V)$. Dados $v_1, v_2, v_3 \in V$,*

$$\begin{aligned}(f \wedge g)(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{2!1!}[&f(v_1, v_2)g(v_3) - f(v_1, v_3)g(v_2) + f(v_2, v_3)g(v_1) \\ &- f(v_2, v_1)g(v_3) + f(v_3, v_1)g(v_2) - f(v_3, v_2)g(v_1)].\end{aligned}$$

De aquí y las igualdades

$$f(v_1, v_2) = -f(v_2, v_1), \quad f(v_1, v_3) = -f(v_3, v_1) \quad y \quad f(v_2, v_3) = -f(v_3, v_2),$$

las cuales son válidas por ser f alternante, se sigue que

$$(f \wedge g)(v_1, v_2, v_3) = f(v_1, v_2)g(v_3) - f(v_1, v_3)g(v_2) + f(v_2, v_3)g(v_1).$$

Ejemplo 10. *En el caso $f, g \in A_2(V)$, se procede como en el ejemplo anterior para calcular $f \wedge g$. Dados $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$,*

$$\begin{aligned}(f \wedge g)(v_1, v_2, v_3, v_4) = \frac{1}{2!2!}[&f(v_1, v_2)g(v_3, v_4) - f(v_1, v_2)g(v_4, v_3) - f(v_1, v_3)g(v_2, v_4) \\ &+ f(v_1, v_3)g(v_4, v_2) + f(v_1, v_4)g(v_2, v_3) - f(v_1, v_4)g(v_3, v_2) \\ &- f(v_2, v_1)g(v_3, v_4) + f(v_2, v_1)g(v_4, v_3) + f(v_2, v_3)g(v_1, v_4) \\ &- f(v_2, v_3)g(v_4, v_1) - f(v_2, v_4)g(v_1, v_3) + f(v_2, v_4)g(v_3, v_1) \\ &+ f(v_3, v_1)g(v_2, v_4) - f(v_3, v_1)g(v_4, v_2) - f(v_3, v_2)g(v_1, v_4) \\ &+ f(v_3, v_2)g(v_4, v_1) + f(v_3, v_4)g(v_1, v_2) - f(v_3, v_4)g(v_2, v_1) \\ &- f(v_4, v_1)g(v_2, v_3) + f(v_4, v_1)g(v_3, v_2) + f(v_4, v_2)g(v_1, v_3) \\ &- f(v_4, v_2)g(v_3, v_1) - f(v_4, v_3)g(v_1, v_2) + f(v_4, v_3)g(v_2, v_1)].\end{aligned}$$

Usando el hecho que f y g son alternantes se obtiene

$$\begin{aligned}(f \wedge g)(v_1, v_2, v_3, v_4) = f(v_1, v_2)g(v_3, v_4) - f(v_1, v_3)g(v_2, v_4) + f(v_1, v_4)g(v_2, v_3) + \\ f(v_2, v_3)g(v_1, v_4) - f(v_2, v_4)g(v_1, v_3) + f(v_3, v_4)g(v_1, v_2).\end{aligned}$$

Los ejemplos anteriores muestran que $f \wedge g$ puede ser expresado, salvo signos, como una suma de productos de la forma $f(v_I)g(v_J)$, donde $I = (i_1, \ldots, i_k)$, $J = (j_1, \ldots, j_l)$, $i_1 < \cdots < i_k$, $j_1 < \cdots < j_l$, $v_I = (v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})$ y $v_J = (v_{j_1}, \ldots, v_{j_l})$. Este punto es retomado mas adelante.

Algunas propiedades del producto exterior

Proposición 2 (Anticonmutatividad del producto exterior)**.** *Dado V un espacio vectorial,*

$$f \wedge g = (-1)^{kl} g \wedge f,$$

para todo $f \in A_k(V)$ y $g \in A_l(V)$.

Demostración. Sea $\tau \in S_{k+l}$ la permutación

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & l & l+1 & \dots & l+k \\ k+1 & \dots & k+l & 1 & \dots & k \end{pmatrix}.$$

Entonces, para toda $\sigma \in S_{k+l}$,

$$\sigma(1) = \sigma\tau(l+1), \dots, \sigma(k) = \sigma\tau(l+k),$$

$$\sigma(k+1) = \sigma\tau(1), \dots, \sigma(k+l) = \sigma\tau(l).$$

Así, para $v_1, \dots, v_{k+l} \in V$,

$$\begin{aligned} A(f \otimes g)(v_1, \dots, v_{k+l}) &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sgn(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sgn(\sigma) f(v_{\sigma\tau(l+1)}, \dots, v_{\sigma\tau(l+k)}) g(v_{\sigma\tau(1)}, \dots, v_{\sigma\tau(l)}) \\ &= sgn(\tau) \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sgn(\sigma\tau) g(v_{\sigma\tau(1)}, \dots, v_{\sigma\tau(l)}) f(v_{\sigma\tau(l+1)}, \dots, v_{\sigma\tau(l+k)}) \\ &= sgn(\tau) A(g \otimes f)(v_1, \dots, v_{k+l}). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que σ recorre todas las permutaciones en S_{k+l}, también lo hace $\sigma\tau$. Finalmente, al dividir por $k!l!$, se obtiene

$$f \wedge g = sgn(\tau) g \wedge f.$$

Ahora se prueba que $sgn(\tau) = (-1)^{kl}$. Para ilustrar el procedimiento, se muestra solo el caso $k = l$. En tal caso, τ puede expresarse en la forma

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & 2k \\ k+1 & \dots & 2k & 1 & \dots & k \end{pmatrix} = (1\, k+1) \cdots (k\, 2k),$$

lo cual muestra que el $sgn(\tau) = 1$ si k es par y será -1 en otro caso. Así, $sgn(\tau) = (-1)^{k^2} = (-1)^{kl}$. □

Observación 5. *Se sigue de la proposición anterior que si k es impar y $f \in A_k(V)$, entonces*

$$f \wedge f = (-1)^{k^2} f \wedge f = (-1) f \wedge f,$$

de donde $f \wedge f = 0$. En particular esto es válido para $f \in V^*$.

Ahora se prueba que el producto exterior es asociativo. Utilizando el siguiente lema.

Lema 2. *Sea f una función $k-$lineal y g una función $l-$lineal sobre un espacio vectorial V. Entonces*

i) $A(A(f) \otimes g) = k!A(f \otimes g)$;

ii) $A(f \otimes A(g)) = l!A(f \otimes g)$.

Demostración. Para i), consultar [1, Lemma 3.24]. Probemos ii). Por definición,

$$A(f \otimes A(g)) = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sgn(\sigma)\sigma \left(f \otimes \sum_{\tau \in S_l} sgn(\tau)(\tau g) \right).$$

Por otro lado, $\tau \in S_l$ puede verse como una permutación en S_{k+l}, definiendo (abusando de notación) $\tau(i) = i$, si $i \in \{1, \ldots, k\}$ y $\tau(k+j) := \tau(j)$, para $j = 1, \ldots, l$. Entonces τ satisface $f \otimes (\tau g) = \tau(f \otimes g)$, de donde

$$A(f \otimes A(g)) = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \sum_{\tau \in S_l} sgn(\sigma) sgn(\tau)(\sigma\tau)(f \otimes g).$$

Dado $\tau \in S_l$ fijo, τ es también considerado un elemento de S_{k+l} como se explica arriba, se tiene que $\mu = \sigma\tau$ recorre todas las permutaciones en S_{k+l} cuando σ recorre todas las permutaciones en S_{k+l}. Luego $\mu = \sigma\tau$ aparece una sola vez en la doble suma, para σ fijo, lo cual implica que aparece $l!$ veces en el total. Así, la ecuación anterior puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} A(f \otimes A(g)) &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sgn(\sigma) sgn(\tau_1)(\sigma\tau_1)(f \otimes g) + \cdots + \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sgn(\sigma) sgn(\tau_{l!})(\sigma\tau_{l!})(f \otimes g) \\ &= l! \sum_{\mu \in S_{k+l}} sgn(\mu)\mu(f \otimes g) \\ &= l!A(f \otimes g). \end{aligned}$$

La última igualdad obtenida al reemplazar $\mu = \sigma\tau$ y aplicar la Definición 3. □

Proposición 3. *Sea V un espacio vectorial real. Entonces*

$$(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h),$$

para todo $f \in A_k(V)$, $g \in A_l(V)$ y $h \in A_m(V)$.

Demostración. Por definición de producto exterior y el Lema 2, se tiene

$$\begin{aligned} (f \wedge g) \wedge h &= \frac{1}{(k+l)!m!} A((f \wedge g) \otimes h) \\ &= \frac{1}{(k+l)!m!} \frac{1}{k!l!} A(A(f \otimes g) \otimes h) \\ &= \frac{(k+l)!}{(k+l)!m!k!l!} A((f \otimes g) \otimes h) \\ &= \frac{1}{k!l!m!} A((f \otimes g) \otimes h). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} f \wedge (g \wedge h) &= \frac{1}{k!(l+m)!} A(f \otimes (g \wedge h)) \\ &= \frac{1}{k!(l+m)!} A(f \otimes \frac{1}{l!m!} A(g \otimes h)) \\ &= \frac{1}{k!l!m!} A(f \otimes (g \otimes h)). \end{aligned}$$

La igualdad se obtiene ya que el producto tensorial es asociativo, ver la Observación 4. □

El resultado anterior justifica omitir los paréntesis en un producto exterior con múltiples factores. Más precisamente, bajo las hipótesis de la proposición anterior,

$$(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h) = f \wedge g \wedge h = \frac{1}{k!l!m!} A(f \otimes g \otimes h).$$

Claramente esto puede ser extendido a más factores como sigue: si $f_i \in A_{d_i}(V)$, entonces

$$f_1 \wedge \cdots \wedge f_r = \frac{1}{(d_1)! \cdots (d_r)!} A(f_1 \otimes \cdots \otimes f_r).$$

En el caso particular del producto exterior de k 1-covectores $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$ sobre un espacio vectorial V, se tiene que

$$\begin{aligned} (\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k)(v_1, \ldots, v_k) &= A(\alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^k)(v_1, \ldots, v_k) \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma) \alpha^1(v_{\sigma(1)}) \cdots \alpha^k(v_{\sigma(k)}) \\ &= det[\alpha^i(v_j)]. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Una base para el espacio de k-covectores

Sea V un espacio vectorial real $n-$dimensional y $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V y $\mathcal{B}^* = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ la base dual correspondiente. Así,

$$\alpha^i(e_j) = \delta^i_j, \quad \text{para todo} \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Dado un multiíndice $I = (i_1, \ldots, i_k)$, se escribe e_I para denotar $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$ y α^I para denotar $\alpha^{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{i_k}$. Aquí, el multiíndice $I = (i_1, \ldots, i_k)$ es estrictamente ascendente (de longitud k) si

$$1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n.$$

Con esta notación, se prueba que si $I = (i_1, \ldots, i_k)$ y $J = (j_1, \ldots, j_k)$ son multiíndices estrictamente ascendentes, entonces

$$\alpha^I(e_J) = \delta^I_J = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad I = J \\ 0, & \text{si} \quad I \neq J. \end{cases} \tag{1.2}$$

Por (1.1) se tiene que

$$\alpha^I(e_J) = det[\alpha^i(e_j)]_{i\in I, j\in J}.$$

Así, en el caso $I = J$, $[\alpha^i(e_j)]_{i\in I,j\in J}$ es la matriz identidad I_k y por lo tanto

$$\alpha^I(e_J) = det\, I_k = 1.$$

Ahora, sea $I \neq J$ y l el menor índice tal que $i_l \neq j_l$. Sin pérdida de generalidad se supone que $i_l < j_l$, entonces se concluye que i_l es diferente a $j_1, \ldots, j_{l-1}$, ya que $j_s = i_s < i_l$ para todo $s \in \{1, \ldots, l-1\}$. De manera similar, i_l es diferente a $j_l, \ldots, j_n$, ya que $i_l < j_l < j_s$ para todo $s \in \{l+1, \ldots, n\}$. Así, la $l-$ésima fila de la matriz $[\alpha^i(e_j)]_{i\in I,j\in J}$ está compuesta por ceros, de donde su determinante es cero. Esto completa la prueba de (1.2).

Proposición 4. *Con la notación de arriba, se tiene que las funciones $k-$lineales alternantes α^I, $I = (i_1 < \cdots < i_k)$ forman una base para el espacio $A_k(V)$ de funciones $k-$lineales alternantes sobre V.*

Demostración. Para ser probada la independencia lineal, suponemos $\sum c_I\alpha^I = 0$, donde $c_I \in \mathbb{R}$ y I recorre todos los multiíndices estrictamente ascendentes de longitud k.

Dado un multiíndice estrictamente ascendente J de longitud k, existe un único coeficiente c_I con $I = J$. Luego, por (1.2),

$$0 = \sum_I c_I\alpha^I(e_J) = \sum_I c_I\delta^I_J = c_J.$$

Es probado ahora

$$\left\{\alpha^I \mid I \quad \text{es un multi-índice estrictamente ascendentes de longitud } k\right\}$$

genera a $A_k(V)$. Sea $f \in A_k(V)$ dada y es probado que $f = \sum f(e_I)\alpha^I$. Si $g = \sum f(e_I)\alpha^I$, entonces $g \in A_k(V)$ y cuando es aplicado g a e_J, donde J es un multiíndice estrictamente ascendente de longitud k, por (1.2)

$$g(e_J) = \sum_I f(e_I)\alpha^I(e_J) = \sum_I f(e_I)\delta^I_J = f(e_J). \tag{1.3}$$

Para probar que $f = g$, por multilinialidad de f y g, es suficiente mostrar que $f(e_J) = g(e_J)$ para todo $J = (j_1, \ldots, j_k)$ multiíndice de longitud k. Ya que f, g son alternantes, suponiendo $j_s \neq j_t$ para $t \neq s$; de no ser así, se tendría $f(e_J) = g(e_J) = 0$. Con esta condición sobre J, sus componentes pueden reorganizarse para obtener un nuevo multiíndice $I = (j_{i_1}, \ldots, j_{i_k})$ estrictamente ascendente de longitud k. Así, si $\sigma \in S_k$ es la permutación $\sigma(s) = i_s$, entonces $\sigma(J) = I$. De aquí, por definición de σf y por ser f alternante, se sigue que

$$f(e_I) = f(e_{\sigma(J)}) = \sigma f(e_J) = sgn(\sigma)f(e_J).$$

Similarmente

$$g(e_I) = g(e_{\sigma(J)}) = \sigma g(e_J) = sgn(\sigma)g(e_J).$$

De aquí y (1.3) se concluye que $f = g$. □

Observación 6. *Como corolario se sigue que, si V es un espacio vectorial de dimensión n, entonces $A_k(V)$, el espacio vectorial de los $k-$covectores en V, tiene dimensión $\binom{n}{k}$; número de formas posibles de escoger un subconjunto de k números de $\{1,\ldots,n\}$.*

Además, si $k > dimV$, entonces $A_k(V) = 0$. En efecto, dado un multiíndice estrictamente ascendente $I = (i_1 < \cdots < i_k)$, en la expresión $\alpha^I = \alpha^{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{i_k}$, es claro que hay por lo menos dos factores que son iguales. Sin pérdida de generalidad, $\alpha^j = \alpha^l = \alpha$, ya que α es un $1-$covector, entonces por la Observación 5, $\alpha \wedge \alpha = 0$. De aquí, se concluye $\alpha^{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{i_k} = 0$.

Capítulo 2

Formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$

A manera de motivación para el tema central de la presente monografía, en este capítulo se estudian conceptos asociados a formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$. Para alcanzar este objetivo, primero se presenta la noción de espacio tangente en un punto p de $\mathbb{R}^n$, el cual se denota por $T_p\mathbb{R}^n$. Este espacio es introducido de manera habitual; como un espacio de vectores "geométricos" y luego se presenta como un espacio de derivaciones. Lo anterior porque para nuestros propósitos resulta mas adecuado utilizar funciones lineales en el espacio tangente en p. Posteriormente, utilizando el álgebra exterior de multicovectores sobre el espacio tangente, son definidas las formas diferenciales además de algunas operaciones entre ellas, tales como el producto exterior y la noción de diferenciación de formas diferenciales, la cual es conocida como derivada exterior.

2.1. Espacio tangente en $\mathbb{R}^n$

El espacio tangente en un punto $p \in \mathbb{R}^n$ es definido como el conjunto

$$T_p\mathbb{R}^n := \{(p, v) \mid v \in \mathbb{R}^n\},$$

el cual puede considerarse como el conjunto de vectores v en $\mathbb{R}^n$ con punto inicial en p. En algunos casos es escrito v_p para denotar el elemento (p, v). La figura (2.1) muestra una representación de un vector tangente en $p \in \mathbb{R}^2$ del espacio tangente en dicho punto.

Este conjunto tiene estructura natural de espacio vectorial real $n-$dimensional con las operaciones usuales

$$(u_p + v_p) = (u + v)_p \qquad \text{y} \qquad \lambda(v_p) = (\lambda v)_p.$$

Es claro que si $\{E_1, \dots, E_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, entonces $\{(p, E_1), \dots, (p, E_n)\}$ es una base de $T_p\mathbb{R}^n$. También, es fácil ver que la aplicación que envía v_p a v es un isomorfismo canónico del espacio vectorial $T_p\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$. Luego, es costumbre escribir v en lugar de v_p o de (p, v), cuando no hay posibilidad de confusión. En adelante, se denota por $\{e_1, \dots, e_n\}$ a la base estándar de $\mathbb{R}^n$ (o de $T_p\mathbb{R}^n$) y es usado $(x^1, \dots, x^n)$ para las coordenadas estándar de $\mathbb{R}^n$.

Es importante observar que si bien $T_p\mathbb{R}^n$ es isomorfo a $\mathbb{R}^n$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$, si $p \neq q$, entonces $T_p\mathbb{R}^n \cap T_q\mathbb{R}^n = \emptyset$.

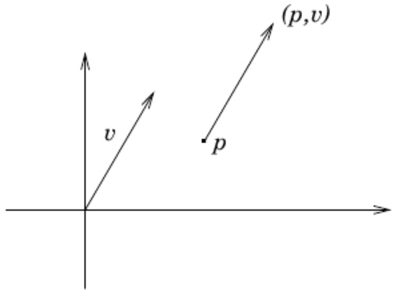

Figura 2.1: Espacio Tangente.

2.1.1. Vectores tangentes como operadores

El primer objetivo es proporcionar una generalización de vectores tangentes a variedades diferenciables. Si f es una función real diferenciable en p y $v \in \mathbb{R}^n$, entonces la derivada direccional de f en p en la dirección de v es el número real

$$D_v f(p) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+tv)-f(p)}{t} = \frac{d}{dt} f(c(t))\bigg|_{t=0},$$

donde c es la curva $c(t) = p + tv$, t en alguna vecindad de 0. Por la regla de la cadena

$$D_v f(p) = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p),$$

por lo cual, el operador D_v se puede escribir en la forma

$$D_v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{2.1}$$

Si f, g son funciones diferenciables en p y son iguales en una vecindad de p, entonces $D_v f(p) = D_v g(p)$. Esto se sigue de (2.1) y el hecho que las derivadas parciales de f y g coinciden en p. Lo anterior motiva definir una relación de equivalencia en el conjunto C_p^∞ de funciones diferenciables en alguna vecindad de p. Así, se define

$$(U, f) \sim (V, g) \quad \text{si y solo si, existe} \quad W \subseteq U \cap V \quad \text{tal que} \quad f = g \quad \text{en} \quad W.$$

Aquí, U, V son vecindades de p y f, g son diferenciables en p. Es claro que $\sim$ define una relación de equivalencia en C_p^∞, la clase de equivalencia de (U, f) se denomina germen de f en p. El símbolo C_p^∞ es usado para representar el espacio de gérmenes en p. De la discusión de arriba, si $(U, f) \sim (V, g)$, entonces $D_v f(p) = D_v g(p)$, además se puede considerar a D_v como un operador de C_p^∞ en $\mathbb{R}$. En este sentido, del cálculo básico D_v es una derivación en p.

Definición 4. *El operador $D_v : C_p^\infty \to \mathbb{R}$ satisface las siguientes propiedades: para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y todo par de funciones f, g diferenciables en p,* *i)* $D_v(af + bg) = aD_v(f) + bD_v(g)$ *(D_v es $\mathbb{R}-$lineal);*

ii) $D_v(fg) = fD_vg + gD_vf$ *(D_v satisface la regla de Leibniz).*

Observación 7. *Por las propiedades de derivadas parciales, es claro que los operadores*

$$\partial_i := \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p : C_p^\infty \to \mathbb{R}, \qquad i = 1, \dots, n$$

son derivaciones en p. Más aún, $\partial_i = D_{e_i}$, $i = 1, \dots, n$. *Así,*

$$\partial_i(x^j) = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = \delta_i^j, \qquad i, j = 1, \dots, n.$$

A continuación, se muestra que el espacio de derivaciones en $p \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}_p(\mathbb{R})^n = \{D_v : C_p^\infty \to \mathbb{R} \,|\, v \in \mathbb{R}^n\}$ es un espacio vectorial de dimensión n.

Teorema 1. *Dado* $p \in \mathbb{R}^n$, *el espacio* $\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ *de derivaciones en* p *es un espacio vectorial de dimensión* n *con las operaciones usuales de suma y producto por escalar de funciones.*

Demostración. Primero se supone que $T, S \in \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ y α es un real, entonces $T + S \in \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha T \in \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$. Dados $f, g \in C_p^\infty$ y $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned}(T + S)(af + bg) &= T(af + bg) + S(af + bg) \\ &= a(T(f) + S(f)) + b(T(g) + S(g)) \\ &= a(T + S)(f) + b(T + S)(g)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(T + S)(fg) &= T(fg) + S(fg) \\ &= f(T(g) + S(g)) + g(T(f) + S(f)) \\ &= f(T + S)(g) + g(T + S)(f).\end{aligned}$$

Así, $T + S \in \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$. Similarmente se demuestra que $\alpha T \in \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$. Las propiedades de espacio vectorial son obvias.

En segundo lugar, por la Observación 7, $\partial_i \in \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ para todo $i = 1, \dots, n$. Además, si $c_1, \dots, c_n$ son escalares tales que

$$c_1\partial_1 + \cdots + c_n\partial_n = 0,$$

aplicando al germen representado por $\pi_j(x) = x^j$, se obtiene nuevamente por la Observación 7, que $c_j = 0$, para todo $j = 1, \dots, n$, de donde $\mathcal{B} = \{\partial_1, \dots, \partial_n\} \subset \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ es linealmente independiente. Finalmente, $\mathcal{B}$ genera a $\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$. Para ello, se prueba que si c es una función constante, entonces $T(c) = 0$ para toda derivación T. De la igualdad $T(c) = cT(1)$, es suficiente probar que $T(1) = 0$, pero esto se sigue directamente de la igualdad

$$T(1) = T(1 \cdot 1) = T(1) \cdot 1 + 1 \cdot T(1) = 2T(1).$$

Ahora, sea T una derivación en p y (U, f) un germen en C_p^∞. Sin pérdida de generalidad, suponer que U es una bola centrada en p y por el Lemma 1.4 en [1, Página 6], f puede expresarse en U en la forma

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - p^i) g_i(x)$$

para algunas funciones diferenciables g_i que satisfacen $g_i(p) = \partial_i(f)$. Aplicando T a ambos lados de la igualdad anterior y teniendo en cuenta que T es una derivación, entonces

$$\begin{aligned} T(f) &= \sum_{i=1}^{n} T((x^i - p^i) g_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(T(x^i) g_i(p) + (p^i - p^i) T(g_i) \big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} T(x^i) g_i(p). \end{aligned}$$

De aquí y $g_i(p) = \partial_i(f)$, se sigue que

$$T(f) = \sum_{i=1}^{n} T(x^i) \partial_i(f),$$

de donde $\mathcal{B}$ genera al espacio de derivaciones $\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Observación 8. *De la prueba y* (2.1)*, se puede concluir que si* $T \in \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$*, entonces* $T = D_v$*, donde* $v = (T(x_1), \ldots, T(x_n))$*. De esto, se sigue que la aplicación que asigna* v *a* D_v *es un isomorfismo del espacio tangente* $T_p(\mathbb{R})$ *al espacio de derivaciones* $\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$*, es decir,* $T_p\mathbb{R}^n \simeq \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$*. De esta manera, un vector* $v \in T_p(\mathbb{R})$ *se identifica con la derivación* D_v*, lo cual justifica la igualdad*

$$v(f) = v_p(f) = D_v(f) = \sum_{i=1}^{n} v^i \partial_i(f),$$

para toda $f \in C_p^\infty$*. El vector* e_i *se identifica con la derivación* ∂_i*, para todo* $i = 1, \ldots, n$*, razón por la cual nos referimos a* $\{\partial_1|_p, \ldots, \partial_n|_p\}$ *como la base canónica del espacio tangente* $T_p\mathbb{R}^n$*.*

Observación 9. *Sean* $U \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y* $f : U \to \mathbb{R}^m$ *una función diferenciable. Para cada punto* $p \in U$*, la diferencial de* f *en* p*, denotada por* $f_*(p)$ *o también por* df_p*, es la transformación lineal*

$$f_*(p) = df_p : T_p\mathbb{R}^n \to T_{f(p)}\mathbb{R}^m$$

dada por

$$f_*(p)(p, v) = (f(p), D_v f(p)).$$

Aquí y en adelante, si $f = (f^1, \ldots, f^m)$, $D_v f(p) = (D_v f^1(p), \ldots, D_v f^m(p))$. *En el caso particular en que* $m = 1$,

$$df_p : T_p\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

está dada por

$$df_p(v) := df(v) = \sum_{i=1}^{n} v^i \partial_i|_p(f) = v(f).$$

Así, la diferencial de las funciones coordenadas en p, *viene dada por* $dx^i(v) = v^i$, *para todo* $i = 1, \ldots, n$.

Definición 5. *Un campo vectorial en un conjunto abierto* $U \subset \mathbb{R}^n$ *es una función que a cada punto* $p \in \mathbb{R}^n$ *le asigna un vector tangente (o equivalentemente una derivación)* X_p *en* $T_p\mathbb{R}^n$.

Del Teorema 1 se sigue que si X es un campo vectorial en U, entonces X puede expresarse en la forma

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p, \qquad p \in U,$$

lo cual induce funciones $a_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Diremos que X es C^∞ si las funciones componentes a_i son C^∞.

Ejemplo 11. *Con la terminología definida anteriormente, el campo vectorial*

$$X(x, y) = \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

es expresado en la forma

$$X = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Así, si $p = (1, 2)$ *y* $f(x, y) = x^2 + y$, *entonces*

$$X_p(f) = -\frac{2}{\sqrt{5}}(2x)|_p + \frac{1}{\sqrt{5}}(1)|_p = -\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

2.2. Formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$

Sea $T_p^*\mathbb{R}^n$ el espacio dual de $T_p\mathbb{R}^n$. Por la Observación 9, si $(x^1, \ldots, x^n)$ son las coordenadas estándar de $\mathbb{R}^n$, entonces, dado $p \in \mathbb{R}^n$,

$$(dx^i)_p(\partial_j|_p) = \delta^i_j.$$

De aquí, $\{(dx^1)_p, \ldots, (dx^n)_p\}$ será la base dual para el espacio cotangente $T_p^*\mathbb{R}^n$, correspondiente a la base canónica $\{\partial_1|_p, \ldots, \partial_n|_p\}$ del espacio tangente $T_p\mathbb{R}^n$. Luego, si $\omega \in T_p^*\mathbb{R}^n$, entonces

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega(\partial_i|_p)(dx^i)_p. \tag{2.2}$$

En particular,

$$df_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(dx^i)_p\,,$$

ver la Observación 9.

Ahora se define el concepto de forma diferencial en $\mathbb{R}^n$, así como también se presentan operaciones entre ellas. Comenzando con las formas mas simples, las $1-$formas.

2.2.1. $1-$formas

Una $1-$forma (diferencial) sobre un subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$, es una función ω que a cada punto $p \in \mathbb{R}^n$ le asigna un covector $\omega_p \in T_p^*\mathbb{R}^n$. Así, si TU denota el fibrado tangente de $U \subseteq \mathbb{R}^n$; la unión disyunta de los espacios tangentes $T_p\mathbb{R}^n$, $p \in U$, una 1-forma ω sobre U puede ser vista como una función de la forma

$$\omega : U \to TU := \bigsqcup_{p\in U} T_p\mathbb{R}^n,$$

donde $\bigsqcup$ denota la unión disyunta de conjuntos y $\omega(p) := \omega_p \in T_p^*\mathbb{R}^n$.

Dado que para todo $p \in U$, $\{(dx^1)_p, \ldots, (dx^n)_p\}$ es una base de $T_p^*\mathbb{R}^n$, entonces

$$\omega_p = \sum_{i=1}^{n} a_i(p)(dx^i)_p,$$

donde $a_i(p) \in \mathbb{R}$. Así, toda 1-forma ω sobre U puede ser expresada en la forma

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i dx^i,$$

para algunas funciones $a_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. De hecho, por (2.2), $a_i(p) = \omega_p(\partial_i|_p)$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Ejemplo 12. *Si $f \in C^\infty(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, entonces df es una 1-forma sobre U. Como se ha visto antes,*

$$df = \sum_{i=1}^{n} \partial_i(f)dx^i.$$

Esto es, los coeficientes de df en la base $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$, son las funciones $a_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dadas por

$$a_i(p) = \partial_i|_p(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p),$$

$i = 1, \ldots, n$.

Observación 10. *Las* $1-$*formas se encuentran presentes incluso cuando se está solo interesado en campos vectoriales definidos sobre un abierto* $U \subseteq \mathbb{R}^n$*, ya que como* $X_p \in T_p\mathbb{R}^n$*, para todo* $p \in U$*, él puede ser escrito (en coordenadas estándar) como*

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} a^i(X_p) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p .$$

Como para cada $p \in \mathbb{R}^n$*, tenemos* $a^i(X_p) = (dx^i)(X_p)$*, vemos que los coeficientes de* X *en la base estándar no son más que los covectores duales* $a^i = dx^i$*.* X *es escrito en la forma*

$$X = \sum_{i=1}^{n} dx^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Por convención, si ω es una 1-forma y X es un campo vectorial sobre un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\omega(X)_p := \omega_p(X_p)$. En coordenadas, si

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i dx^i \quad \text{y} \quad X = \sum_{j=1}^{n} b^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \text{para} \quad a_i, b^j \in C^\infty,$$

entonces

$$\omega(X) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i dx^i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} b^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i b^i.$$

Esto muestra que la función $p \to \omega(X)_p$ es C^∞ en U.

2.2.2. $k-$formas

Es sabido que si V es un espacio vectorial real, un $k-$covector (o $k-$forma) sobre V es una función $k-$lineal alternante sobre V. El espacio de $k-$formas sobre V es denotado por $A_k(V)$.

De manera más general al caso de las $1-$formas en $\mathbb{R}^n$, una forma diferencial de grado k (o simplemente $k-$forma) sobre un subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$, es una función ω que asigna a cada punto p en U una función $k-$lineal alternante $\omega_p \in A_k(T_p\mathbb{R}^n)$. Así, por Proposición 4 se tiene en coordenadas estándar, para todo $p \in U$,

$$\omega_p = \sum a_I(p) dx_p^I, \qquad a_I(p) \in \mathbb{R},$$

donde la suma se hace sobre todos los multiíndices estrictamente ascendentes $I = (i_1, \ldots, i_k)$ de longitud k y, como se ha definido antes,

$$dx_p^I = (dx^{i_1})_p \wedge \ldots \wedge (dx^{i_k})_p.$$

De aquí, la $k-$forma ω acostumbra a expresarse en la forma $\omega = \sum a_I dx^I$, entendiendo que la suma se hace sobre todos los multiíndices estrictamente ascendentes $I = (i_1, \ldots, i_k)$ de longitud k.

Observación 11. *El conjunto de* $k-$*formas en un subconjunto abierto* U *de* $\mathbb{R}^n$*, es denotado por* $\Omega^k(U)$*, el cual es un espacio vectorial bajo las operaciones usuales de suma y multiplicación puntuales. Es decir, si* ω, η *son* $k-$*formas diferenciales, entonces su suma está dada por*

$$\omega + \eta = \sum (a_I + b_I)dx^I$$

y la multiplicación por escalar está dada por

$$\lambda\omega = \sum \lambda a_I dx^I.$$

Por convención, $f : U \to \mathbb{R}$ *es una* $0-$*forma, es decir* $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$*. De otro lado, por la Observación 5 no existen* $k-$*formas diferenciales no nulas si* $k > n$*, ya que en este caso, cada término* dx^I *tendría al menos un factor* dx^α *repetido, lo cual nos lleva a que* $dx^I = 0$*.*

Ejemplo 13. *Sean* x*,* y*,* z *las coordenadas estándar de* $\mathbb{R}^3$*. Las 1-formas en* $\mathbb{R}^3$ *se expresan en la forma*

$$\omega = fdx + gdy + hdz,$$

las 2-formas en $\mathbb{R}^3$ *tienen la expresión general*

$$\omega = fdx \wedge dy + gdx \wedge dz + hdy \wedge dz$$

y las 3-formas en $\mathbb{R}^3$ *se escriben*

$$\omega = fdx \wedge dy \wedge dz,$$

donde $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$*.*

Ahora al aplicar lo estudiado en la Sección 1 para definir algunas operaciones entre formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$.

Definición 6. *Dada una* $k-$*forma* ω *y una* $l-$*forma* τ *sobre un conjunto abierto* $U \subseteq \mathbb{R}^n$*. El producto exterior de* ω *por* τ *es la* $(k+l)-$*forma diferencial* $\omega \wedge \tau$*, definida puntualmente por*

$$(\omega \wedge \tau)_p = \omega_p \wedge \tau_p, \qquad p \in U.$$

En coordenadas estándar, si $\omega = \sum_I a_I dx^I$ *y* $\tau = \sum_J b_J dx^J$*, entonces*

$$(\omega \wedge \tau) = \sum_{I,J} (a_I b_J) dx^I \wedge dx^J.$$

Note que la suma es realmente sobre multiíndices distintos, ya que sí $I \cap J \neq \emptyset$, $dx^I \wedge dx^J = 0$.

Ejemplo 14. *Sean* ω, η *las formas en* $\mathbb{R}^3$ *dadas por*

$$\omega = xdx + ydy + zdz \qquad y \qquad \eta = xdx \wedge dy + ydx \wedge dz,$$

la $3-$*forma* $\omega \wedge \eta$ *es*

$$\begin{aligned}\omega \wedge \eta = & x^2 dx \wedge dx \wedge dy + xydx \wedge dx \wedge dz + yxdy \wedge dx \wedge dy \\ & + y^2 dy \wedge dx \wedge dz + zxdz \wedge dx \wedge dy + zydz \wedge dx \wedge dz.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las propiedades del producto exterior hay términos que se anulan, entonces

$$\begin{aligned}\omega \wedge \eta &= y^2 dy \wedge dx \wedge dz + zxdz \wedge dx \wedge dy \\ &= -y^2 dx \wedge dy \wedge dz + zxdx \wedge dy \wedge dz \\ &= (xz - y^2) dx \wedge dy \wedge dz.\end{aligned}$$

Observación 12. *Cuando uno de los factores es una* $0-$*forma, el producto exterior es la multiplicación puntual de una función* C^∞ *por una* $l-$*forma. Más precisamente,*

$$(f \wedge \omega)_p = f(p) \wedge \omega_p = f(p)\omega_p.$$

Proposición 5. *Sean* ω *una* $k-$*forma,* η *una* $l-$*forma y* ψ *una* $p-$*forma en* $U \subset \mathbb{R}^n$*. Entonces*

i) $\omega \wedge (\eta \wedge \psi) = (\omega \wedge \eta) \wedge \psi$*;*

ii) $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$*;*

iii) si $l = p$*, entonces* $\omega \wedge (\eta + \psi) = \omega \wedge \eta + \omega \wedge \psi$*.*

Demostración. Las parte i) y ii) son consecuencia inmediata de la Proposición 3 y la Proposición 2 respectivamente. De otro lado, es fácil verificar de manera directa que

$$\begin{aligned}\omega \wedge (\eta + \psi) &= \sum a_I (b_J + c_L) dx^I \wedge dx^J \\ &= \sum a_I b_J dx^I \wedge dx^J + \sum a_I c_L dx^I \wedge dx^J \\ &= \omega \wedge \eta + \omega \wedge \psi,\end{aligned}$$

lo cual prueba iii). □

Observación 13. *Por la parte ii) de la proposición anterior, como en el caso de funciones multilineales alternantes, si* k *es impar y* ω *es una* $k-$*forma diferencial, entonces* $\omega \wedge \omega = 0$*.*

2.2.3. Derivada exterior

Cuando f es una función diferenciable, la diferencial de f, en coordenadas estándar, puede expresarse en la forma

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Luego, si f es una $0-$forma, su diferencial es una $1-$forma. De manera más general se tiene la siguiente definición.

Definición 7. *(La derivada exterior de $k-$formas) Sea $k \geq 1$ y $\omega = \sum a_I dx^I \in \Omega^k(U)$ una $k-$forma sobre un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. La derivada exterior de ω es la $k+1-$forma definida por*

$$d\omega = \sum da_I \wedge dx^I = \sum_I \left(\sum_i \frac{\partial a_I}{\partial x^i} dx^i \right) \wedge dx^I. \tag{2.3}$$

Note que d se convierte en un operador lineal entre los correspondientes espacios, esto es

$$d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$$

definido como en (2.3), es lineal. En los siguientes ejemplos es ilustrada la definición.

Ejemplo 15. *Sea $\omega = f dx + g dy$ una $1-$forma en $\mathbb{R}^2$, donde f y g son funciones C^∞ en $\mathbb{R}^2$. Entonces, por propiedades del producto exterior,*

$$\begin{aligned} d\omega &= df \wedge dx + dg \wedge dy \\ &= (f_x dx + f_y dy) \wedge dx + (g_x dx + g_y dy) \wedge dy \\ &= f_y dy \wedge dx + g_x dx \wedge dy \\ &= (g_x - f_y) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

donde $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Ejemplo 16. *Sea ω la $1-$forma diferencial en $\mathbb{R}^3$ dada por*

$$\omega = xy dx - y^2 dy + 3z dz.$$

Entonces, $d\omega$ es la $2-$forma diferencial

$$\begin{aligned} d\omega &= d(xy) \wedge dx - d(y^2) \wedge dy + d(3z) \wedge dz \\ &= (y dx + x dy) \wedge dx - (2y dy) \wedge dy + (3dz) \wedge dz \\ &= x\, dy \wedge dx \\ &= -x\, dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Ejemplo 17. *Sea ω la $2-$forma en $\mathbb{R}^3$ dada por*

$$\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy,$$

donde P, Q y R son funciones C^∞, entonces $d\omega$ es la $3-$forma diferencial

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Proposición 6. *Sean ω y η formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$, entonces* *i) Si* ω *y* η *son* $k-$*formas,* $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$;

ii) si ω *es una* $k-$*forma y* η *una* $l-$*forma, entonces*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta;$$

iii) $d^2\omega = 0$.

Demostración. La primera parte se sigue directamente de la definición. Para la segunda parte, si $\omega = \sum_I a_I dx^I$ y $\eta = \sum_I b_J dx^J$, se obtiene que $\omega \wedge \eta = \sum a_I b_J dx^I \wedge dx^J$, de donde

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= \sum_{I,J} d(a_I b_J) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= \sum_{I,J} (b_J da_I + a_I db_J) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= \sum_{I,J} b_J da_I \wedge dx^I \wedge dx^J + \sum_{I,J} a_I db_J \wedge dx^I \wedge dx^J. \end{aligned}$$

De aquí, por la Proposición 5 y la definición de $d\omega$,

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d\omega \wedge \eta + \sum_{I,J} a_I (-1)^k dx^I \wedge db_J \wedge dx^J \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

Para la tercera parte si $\omega = \sum_I a_I dx^I$, por cálculo directo

$$\begin{aligned} d(d(\omega)) &= d\left(\sum_I da_I \wedge dx^I\right) = d\left(\sum_I \sum_{i=1}^n \partial_i a_I dx^i \wedge dx^I\right) \\ &= \sum_I \sum_{i=1}^n d(\partial_i a_I) \wedge dx^i \wedge dx^I = \sum_I \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_j \partial_i a_I dx^j \wedge dx^i \wedge dx^I. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que si $i = j$, $dx^i \wedge dx^j = 0$ y además $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$, entonces

$$d(d(\omega)) = \sum_I \sum_{i<j} (\partial_j \partial_i a_I - \partial_i \partial_j a_I) dx^i \wedge dx^j \wedge dx^I = 0.$$

Aquí, se ha usado el hecho que las derivadas parciales mixtas de funciones C^∞ son iguales. □

Definición 8 (Formas cerradas y formas exactas)**.** *Una* $k-$*forma* ω *en un abierto* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *se dice cerrada si* $d\omega = 0$*, y se dice exacta si existe una* $(k-1)-$*forma* η *tal que* $d\eta = \omega$ *en* U.

Note que si ω es exacta, con $d\eta = \omega$, por la parte iii) de la proposición anterior, $d\omega = 0$ y por tanto ω es cerrada.

Ejemplo 18. *Sea ω la $1-$forma en $\mathbb{R}^2/\{0\}$ dada por*

$$\omega = \frac{1}{x^2+y^2}(-ydx + xdy).$$

Veamos que ω es cerrada. En efecto,

$$\begin{aligned} d\omega &= d\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) \wedge dx + d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \wedge dy \\ &= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} dx \wedge dx + \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \wedge dx \\ &\quad + \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} dx \wedge dy + \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} dy \wedge dy \\ &= \frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2} dx \wedge dy + \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} dx \wedge dy \\ &= \frac{2(x^2+y^2)-2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} dx \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

Un cálculo muestra que la 0-forma $f(x,y) = -\arctan(x/y)$ satisface $df = \omega$ en $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$. Luego ω es exacta en $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$.

Capítulo 3

Formas diferenciales en variedades

Las variedades diferenciables son generalizaciones del concepto de superficie, localmente pueden ser consideradas como espacios euclidianos, es decir, para cada punto en la variedad existe un entorno homeomorfo a un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Esto permite que en un entorno de cada punto de la variedad se pueda introducir un sistema coordenado, por medio del cual los conceptos clásicos de cálculo, incluyendo entre ellos las formas diferenciales, se extienden a variedades. Es importante notar que en general las variedades no poseen coordenadas estándar y formas diferenciales es un concepto intrinseco a cualquier variedad, siendo esto una ventaja al momento de trabajar con ellas. Para fijar notaciones a continuación se presenta un resumen de los principales conceptos requeridos para variedades diferenciables, los cuales pueden ser consultados en [1] o en [3].

3.1. Conceptos básicos sobre variedades diferenciables

Dado un espacio topológico (X, τ_X), τ_X denota la topología de X o la familia de abiertos en X.

Una variedad topológica $n-$dimensional es un espacio topológico M, Hausdorff y segundo contable, tal que para todo $p \in M$ existe una pareja (U, ϕ), la cual es llamado una carta de M, tal que $U \in \tau(M)$, $p \in U$ y $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$. La carta está centrada en $p \in U$ si $\phi(p) = 0$.

El ejemplo mas simple de variedad topológica es $\mathbb{R}^n$, cubierto por una sola carta $(\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n})$, donde $1_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es la función identidad.

Definición 9. *Dos cartas $(U, \varphi : U \to \mathbb{R}^n)$, $(V, \psi : V \to \mathbb{R}^n)$ de una variedad topológica M son C^∞-compatibles si las funciones*

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V), \qquad \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

son C^∞.

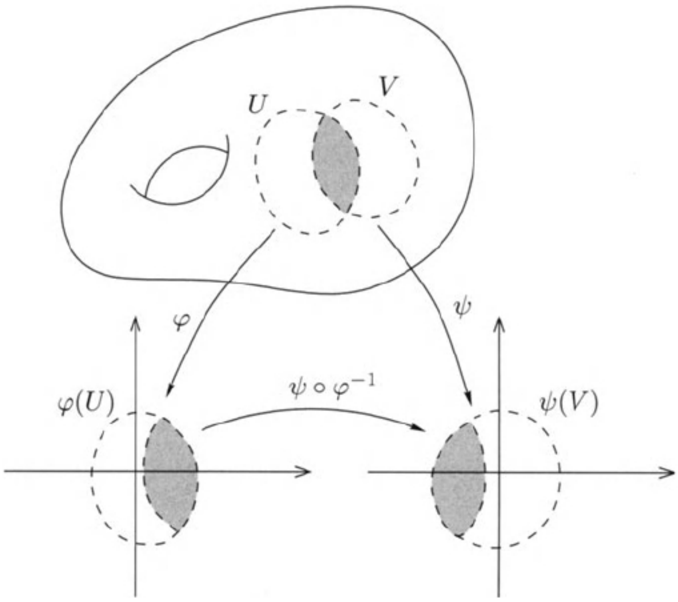

Figura 3.1: Funciones de Transición.

Estas dos funciones son llamadas funciones de transición entre las cartas. Si $U \cap V$ es vacío, entonces las dos cartas son inmediatamente $C^\infty-$compatibles. La figura 3.1 muestra en que sentido se entiende la compactibilidad entre cartas en una variedad diferenciable.

Definición 10. *Un atlas C^∞(o simplemente atlas) sobre una variedad topológica M es una familia de cartas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ que satisfacen*

i) $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$;

ii) Para cada par de índices α y β tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, las cartas (U_α, ϕ_α) y (U_β, ϕ_β) son $C^\infty-$compatibles.

Los atlas $\mathcal{A}_1 = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ y $\mathcal{A}_2 = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ son compatibles si todo par de cartas $(U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathcal{A}_1$ y $(V_\beta, \psi_\beta) \in \mathcal{A}_2$ son compatibles.

Es claro que la unión de atlas compatibles de una variedad topológica M es de nuevo un atlas de M. Dado un atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, el atlas que resulta de unir todos los atlas compatibles con $\mathcal{A}$, se denomina atlas máximal determinado por $\mathcal{A}$.

Definición 11. *Una variedad diferenciable $n-$dimensional es una variedad topológica de dimensión n junto con un atlas máximal $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ de cartas $C^\infty-$compatibles.*

Si (U, ϕ) es una carta de una variedad topológica M, ϕ puede expresarse en la forma $\phi = (x^1, \ldots, x^n)$, donde para cada i, $x^i : U \to \mathbb{R}$. Las funciones x^i se denominan componentes o coordenadas de ϕ.

Ejemplo 19. *$\mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable con una solo carta $(\mathbb{R}^n, r^1, \ldots, r^n)$, donde $r^1, \ldots, r^n$ son las coordenadas estándar en $\mathbb{R}^n$.*

Otros ejemplos de variedades diferenciables pueden ser consultados en [6].

3.1.1. Funciones diferenciables en una variedad

Definición 12. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Una función*

$$f : M \to \mathbb{R}$$

se dice C^∞ en $p \in M$, si existe una carta (U, ϕ) de $p \in M$ tal que la función $f \circ \phi^{-1}$ definida en el subconjunto abierto $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ es C^∞ en $\phi(p)$. La función f se dice C^∞ en M si es C^∞ en cada punto de M.

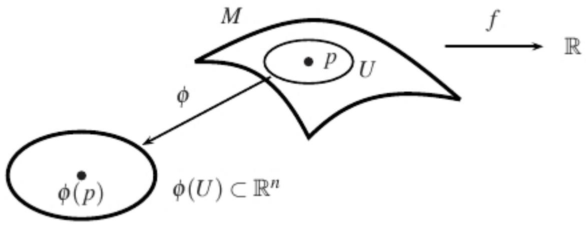

Figura 3.2: Funciones diferenciables en una variedad diferenciable

La diferenciablidad de la función f en un punto p es independiente de la carta (U, ϕ). De hecho, si $f \circ \phi^{-1}$ es C^∞ en $\phi(p)$ y es supuesto que (V, ψ) es otra carta de $p \in M$, entonces sobre $\psi(U \cap V)$ se tiene

$$f \circ \psi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \psi^{-1})$$

$f \circ \psi^{-1}$ es C^∞ en $\psi(p)$.

Definición 13. *Sean N y M variedades de dimensión n y m respectivamente, una función continua $F : N \to M$ es C^∞ en un punto $p \in N$ si existen cartas (V, ψ) de $F(p)$ en M y (U, ϕ) de p en N tal que $F(U) \subseteq V$ y la composición $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ es C^∞ en $\phi(p)$.*

Observación 14. *Como en el caso de la Definición 12, es posible probar que la definición anterior es independiente de cartas.*

Proposición 7. *Si $F : N \to M$ y $G : M \to P$ son funciones C^∞ entre variedades, entonces la composición $G \circ F : N \to P$ es C^∞.*

Demostración. Sean (U, ϕ), (V, ψ) y (W, φ) cartas en N, M y P respectivamente. Escogidas de tal forma que $F(U) \subset V$ y $G(F(U)) \subset W$ entonces

$$\varphi \circ (G \circ F) \circ \phi^{-1} = (\varphi \circ G \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ F \circ \phi^{-1}).$$

Por hipótesis, ya que F y G son C^∞, entonces es claro que $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ y $\varphi \circ G \circ \psi^{-1}$ son C^∞. Como en $\mathbb{R}^n$ la composición de funciones C^∞ es C^∞, se sigue que la función $\varphi \circ (G \circ F) \circ \phi^{-1}$ es C^∞ y por lo tanto $G \circ F$ también lo es. $\square$

3.1.2. Derivadas parciales

Sean $(U, \phi = (x^1, \ldots, x^n))$ una carta de una variedad diferenciable $n-$dimensional M y $f : M \to \mathbb{R}$ una función C^∞.

Para $p \in U$, la derivada parcial $\partial f/\partial x^i$ de f con respecto a x^i en p se define como el número real

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f := \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial r^i}(\phi(p)) := \left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{\phi(p)} (f \circ \phi^{-1}), \tag{3.1}$$

donde $(r^1, \ldots, r^n)$ son las coordenadas estándar de $\mathbb{R}^n$.

Observación 15. *De manera similar al caso de $\mathbb{R}^n$, ver Subsección 2.1.1, se define la noción de germen de una función en un punto de una variedad. El símbolo C_p^∞ (o $C_p^\infty(M)$) también es usado para denotar el espacio de gérmenes en $p \in M$. Así, dada una carta $(U, \phi = (x^1, \ldots, x^n))$, la definición de derivada parcial induce n operadores*

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p : C_p^\infty \to \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

$i = 1, \ldots, n$. Es fácil ver que en el caso particular de las funciones coordenadas x^i de ϕ, se obtiene

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j. \tag{3.3}$$

3.1.3. Espacio tangente

Dado $p \in \mathbb{R}^n$, se establece una correspondencia entre los vectores con punto inicial en p y las derivaciones en p, a través de lo cual es definido el espacio tangente $T_p\mathbb{R}^n$. Siguiendo estas mismas ideas, dado un punto p en una variedad diferenciable M, se define el espacio tangente a M en p, el cual es denotado por T_pM. Comenzando con la extensión de derivación (o vector tangente) al contexto de variedades diferenciales.

Definición 14. *Sea p un punto de una variedad diferenciable M. Una derivación en p es una aplicación $D : C_p^\infty(M) \to \mathbb{R}$ que cumple:*

i) $D(af + g) = aD(f) + D(g),$ *para* $f, g \in C_p^\infty(M)$ *y* $a \in \mathbb{R}$;

ii) $D(f \cdot g) = D(f)g(p) + f(p)D(g),$ *para* $f, g \in C_p^\infty$.

El conjunto de todas las derivaciones en p, es un espacio vectorial real con las operaciones usuales de suma y producto por escalar de funciones; este espacio será llamado espacio tangente a M en p y denotado por T_pM. Dada una carta (U, ϕ) de p, los operadores definidos en (3.2) por la fórmula (3.1) son claramente derivaciones en p. Además, como en el caso $\mathbb{R}^n$, puede ser probado que forman una base de T_pM, por lo tanto $dim T_pM = n$.

De lo anterior, dada una carta (U, ϕ) de p, si $v \in T_pM$ es un vector tangente a M en p, entonces existen escalares $a_i := a_i(p)$, $i = 1, \ldots, n$, tales que

$$v = a_1 \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p + \ldots + a_n \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p,$$

de donde, por (3.1),

$$v(f) = a_1 \frac{\partial f}{\partial x^1}\bigg|_p + \ldots + a_n \frac{\partial f}{\partial x^n}\bigg|_p,$$

para toda $f \in C_p^\infty$. En particular, si f es la $i-$ésima función coordenada x^i de ϕ, por (3.3) se obtiene una expresión para $v \in T_pM$ en términos de coordenadas, a saber,

$$v(f) = v(x_1)\frac{\partial f}{\partial x^1}(p) + \ldots + v(x_n)\frac{\partial f}{\partial x^n}(p).$$

Esto muestra que en una carta (U, ϕ) de p, todo vector $v \in T_pM$ tiene la expresión

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(x^i)\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_p.$$

3.1.4. Fibrado tangente y campos vectoriales

Dada una variedad diferenciable M, el fibrado tangente de M, denotado por TM, se define como la unión disyunta de los espacios tangentes a M. Esto es,

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM.$$

El fibrado tangente TM puede ser dotado de estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n$, siendo n la dimensión de M, ver [7, Página 15]. Como en $\mathbb{R}^n$, un elemento de TM puede ser identificado con una pareja de la forma (p, v), donde $p \in M$ y $v \in T_pM$. Un campo vectorial diferenciable sobre M es una función $X : M \to TM$ diferenciable tal que $X(p) := X_p \in T_pM$. Así, en una carta $(U, x^1, \ldots, x^n)$, X puede expresarse en la forma

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} a_i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p, \qquad p \in U,$$

lo cual induce funciones $a_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Se puede mostrar que X es C^∞ en p si y sólo si, las funciones componentes a_i son C^∞ en p.

3.1.5. Diferencial de una función

Definición 15. *Sean N, M variedades diferenciables y $F : N \to M$ una función C^∞. La diferencial de F en el punto $p \in N$ es la aplicación*

$$DF_p := F_* : T_pN \to T_{F(p)}M,$$

definida de la siguiente manera: dado $X_p \in T_pN$, definimos $F_*(X_p) \in T_{F(p)}M$ por la ecuación

$$(F_*(X_p))f = X_p(f \circ F) \in \mathbb{R},$$

donde $f \in C^\infty_{F(p)}(M)$.

Observación 16. *Es importante notar que $f \circ F \in C_p^\infty(N)$, luego el lado derecho de la igualdad está bien definida. También, es fácil probar que F_* es una aplicación lineal.*

Como en el cálculo básico, si $F : N \to M$ y $G : M \to P$ son funciones C^∞ entre variedades y $p \in N$, entonces

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_*.$$

De aquí, se sigue fácilmente que si $F : N \to M$ es un difeomorfismo[1] entre variedades diferenciables y $p \in N$, entonces $F_* : T_pN \to T_{F(p)}M$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Es importante mencionar

3.2. Formas en variedades diferenciables

3.2.1. 1-Formas diferenciales

Sea M una variedad diferenciable y p un punto en M. El espacio dual T_p^*M del espacio tangente T_pM es llamado el espacio cotangente a M en p. Un covector en p es un elemento ω_p de T_p^*M. De manera similar a la definición de fibrado tangente, el fibrado cotangente se define como la unión disyunta de los espacios cotangentes. Así, T^*M denota el fibrado cotangente de M, entonces

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M.$$

Una $1-$forma diferencial en M es una función ω que asigna a cada punto p en M un covector ω_p en p. Así, una $1-$forma diferencial ω en M es una función de M en T^*M satisfaciendo la condición $\omega_p \in T_p^*M$. Se Denota por $\Omega^1(M)$ el espacio de $1-$formas diferenciales en M.

Por ejemplo, si $f : M \to \mathbb{R}$ es una función C^∞, la diferencial de f es una $1-$forma en M, ya que para todo $p \in M$, $df_p : T_pM \to \mathbb{R}$, la cual está definida por

$$(df)_p(v) = v(f), \qquad v \in T_pM,$$

es lineal. En particular, si $(U, x^1, \ldots, x^n)$ es una carta coordenada de M, entonces se tiene que $dx^1, \ldots, dx^n$ son $1-$formas en U. Por lo desarrollado anteriormente, si

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

entonces $dx^i(v) = v^i$. En consecuencia, dado $p \in U$, los covectores $\{(dx^1)_p, \ldots, (dx^n)_p\}$ forman una base para el espacio cotangente T_p^*M, dual a la base $\{\partial/\partial x^1|_p, \ldots, \partial/\partial x^n|_p\}$ del espacio tangente T_pM. Por lo tanto, en coordenadas locales, df se expresa en la forma

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \, dx^i.$$

[1]Un difeomorfismo entre variedades es una función $F : N \to M$ biyectiva C^∞ cuya inversa F^{-1} es también C^∞.

Más aún, cada 1−forma ω en U puede ser escrita como combinación lineal

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i dx^i,$$

donde los coeficientes a_i son funciones reales definidas en U.

Observación 17. *La 1−forma diferencial ω es C^∞ si y sólo si en cualquier carta (U, ϕ) los coeficientes $a_i : U \to \mathbb{R}$ son C^∞ para todo $i = 1, \ldots, n$, ver [1].De está manera es entendido el sentido en el cual se presenta el concepto de forma diferencial.*

Definición 16. *Dada una 1−forma diferencial ω sobre una variedad diferenciable M y un campo vectorial X sobre M, éllas inducen una función $\omega(X) : M \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\omega(X)_p := \omega(X)(p) = \omega_p(X_p), \qquad p \in M.$$

Proposición 8 (Linealidad de una 1−forma sobre funciones)**.** *Sea ω una 1−forma en una variedad diferenciable M y X un campo vectorial en M, entonces $\omega(fX) = f\omega(X)$.*

Demostración. Sea $p \in M$, por linealidad de las 1−formas diferenciales y como $\omega(X)$ está definida puntualmente tenemos que

$$\omega(fX)_p = \omega_p(f(p)X_p) = f(p)\omega_p(X_p) = (f\omega(X))_p.$$

□

Proposición 9 (Suavidad de una 1−forma en términos de campos vectoriales)**.** *Una 1−forma diferencial ω sobre una variedad M es C^∞ si y sólo si para cada campo vectorial X sobre M, la función $\omega(X)$ es C^∞ en M.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Se supone que ω es una 1−forma diferenciable C^∞ y X es un campo vectorial C^∞ sobre una variedad M. Sea $(U, x^1, \ldots, x^n)$ una carta en M, entonces $\omega = \sum a_i dx^i$ y $X = \sum b^j \partial/\partial x^j$ donde a_i, b^j son funciones C^∞ en U. De aquí, $\omega(X)$ en U puede expresarse en la forma

$$\omega(X) = \left(\sum a_i dx^i\right)\left(\sum b^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum a_i b^i,$$

la cual es una función C^∞ en U. Como U fue tomado arbitrario, la función $\omega(X)$ es C^∞ en M.

($\Leftarrow$) Sea ω una 1−forma diferenciable sobre M. Dado $p \in M$, se escoje una carta coordenada $(U, x^1, \ldots, x^n)$ de p y en esta carta $\omega = \sum a_i dx^i$ con a_i siendo funciones reales definidas en U.

Se toma un entero j en el conjunto $\{1, \ldots, n\}$, se considera el campo vectorial $X = \partial/\partial x^j$, el cual es C^∞ en U. Existe un entorno $V_j \subseteq U$ de p y un campo vectorial $\overline{X}$ sobre M que coincide con X en V_j. En el entorno V_j

$$\omega(\overline{X}) = \left(\sum a_i dx^i\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = a_j,$$

de donde a_j es una función C^∞ en V_j, ya que $\omega(\overline{X})$ es C^∞. Como consecuencia, en la intersección $V := \cap_j V_j$ todas las funciones a_j son C^∞, lo cual implica que la $1-$forma diferencial ω es C^∞ en V_p y por tanto en M. □

Ejemplo 20. *Sean x, y las coordenadas estándar en $\mathbb{R}^2$ y sean*

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \qquad y \qquad Y = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

dos campos vectoriales sobre $\mathbb{R}^2$. La una $1-$forma ω sobre $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ tal que $\omega(X) = 1$ y $\omega(Y) = 0$ se encuentra de la siguiente manera.

se escribe ω en la forma $\omega = a_1dx + a_2dy$, donde a_1, a_2 son funciones de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ en $\mathbb{R}$, se tiene que $\omega(X)$ y $\omega(Y)$ están dados por

$$\begin{aligned}
\omega(X) &= (a_1dx + a_2dy)\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) = -a_1y + a_2x \\
\omega(Y) &= (a_1dx + a_2dy)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) = a_1x + a_2y.
\end{aligned}$$

Las condiciones $\omega(X) = 1$ y $\omega(Y) = 0$ conducen al siguiente sistema 2×2

$$\begin{cases} -ya_1 + xa_2 = 1 \\ xa_1 + ya_2 = 0, \end{cases}$$

cuya solución viene dada por $a_1 = \frac{-y}{x^2+y^2}$ y $a_2 = \frac{x}{x^2+y^2}$. Por lo tanto se ha encontrado que

$$\omega(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

satisface las condiciones pedidas.

Pullback de $1-$formas

Sean M, N variedades diferenciales y $F : N \to M$ una función C^∞. Dado un punto $p \in N$, la diferencial de F en p,

$$F_{*,p} : T_pN \to T_{F(p)}M,$$

es una función lineal que envía vectores de T_pN en vectores de $T_{F(p)}M$. La codiferencial de F en p, denotada por $(F_{*,p})^\vee$, se define como la aplicación lineal

$$(F_{*,p})^\vee : T^*_{F(p)}M \to T^*_pN,$$

dada por

$$(F_{*,p})^\vee(\omega_{F(p)})(X_p) = \omega_{F(p)}(F_{*,p}(X_p)).$$

Así, la codiferencial de F, la cual se considera como una aplicación dual a la diferencial, devuelve covectores en $F(p)$ de M a N. De ahora en adelante es utilizado la notación F^*

para la codiferencial, en lugar de $(F_{*,p})^{\vee}$. Con esta notación, si ω es una $1-$forma en M, su pullback $F^*\omega$ es la $1-$forma en N dada por

$$(F^*\omega)_p(X_p) := F^*(\omega_{F(p)})(X_p) = \omega_{F(p)}(F_*(X_p)).$$

Se llama $F^*(\omega_{F(p)})$ al pullback del covector $\omega_{F(p)}$ mediante F.

También es definido el pullback para funciones de la siguiente manera. Si F es una función C^∞ de N a M y $g \in C^\infty(M)$, el pullback de g bajo F se define por $F^*g = g \circ F \in C^\infty(N)$.

A continuación, se presentan algunas propiedades del pullback de $1-$formas.

Proposición 10 (Conmuntatividad del pullback con la diferencial)**.** *Con la notación anterior,*

$$F^*(dh) = d(F^*h),$$

para cualquier función $h \in C^\infty(M)$.

Demostración. Dado $p \in N$ y $X_p \in T_pN$, por definición de codiferencial,

$$(F^*dh)_p(X_p) = (dh)_{F(p)}(F_{*,p}(X_p)) = d(h \circ F)_p(X_p),$$

de donde se sigue la tesis. □

Observar que $(F^*dh)_p(X_p) = X_p(h \circ F)$, para todo $p \in N$ y $X_p \in T_pN$.

Proposición 11 (Pullback de una suma y un producto)**.** *Con la notación anterior, si $\omega, \tau \in \Omega^1(M)$ y $g \in C^\infty(M)$, entonces*

i) $F^*(\omega + \tau) = F^*\omega + F^*\tau$;

ii) $F^*(g\omega) = (F^*g)(F^*\omega)$.

Demostración. i) Sea $X_p \in T_pN$, entonces

$$\begin{aligned}(F^*(\omega + \tau))_p(X_p) &= (\omega + \tau)_{F(p)}(F_*(X_p)) \\ &= \omega_{F(p)}(F_*(X_p)) + \tau_{F(p)}(F_*(X_p)) \\ &= (F^*\omega)_p(X_p) + (F^*\tau)_p(X_p).\end{aligned}$$

ii) Sea $X_p \in T_pN$, entonces

$$\begin{aligned}(F^*(g\omega))_p(X_p) &= (g\omega)_{F(p)}(F_*(X_p)) \\ &= g(F(p))\omega_{F(p)}(F_*(X_p)) \\ &= (g \circ F)(p)\omega_{F(p)}(F_*(X_p)) \\ &= (F^*g)_p(F^*\omega)_p(X_p).\end{aligned}$$

□

Proposición 12 (Suavidad del pullback de una 1−forma suave)**.** *Si ω es una $1-$forma C^∞ en M y $F : N \to M$ es suave, entonces el pullback $F^*\omega$ es una $1-$forma C^∞ en N.*

Demostración. Dado $p \in N$, sea $(V, \psi) = (V, y^1, \ldots, y^n)$ una carta de $F(p) \in M$. Existe una carta $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ de $p \in N$ tal que $F(U) \subset V$. Luego, en V, $\omega = \sum a_i dy^i$ para algunos $a_i \in C^\infty(V)$ y por lo tanto, por la proposición anterior, en U se tiene

$$\begin{aligned} F^*\omega &= \sum (F^*a_i) F^*(dy^i) \\ &= \sum (F^*a_i) d(F^*y^i) \\ &= \sum (a_i \circ F) d(y^i \circ F) \\ &= \sum_{i,j} (a_i \circ F) \frac{\partial F^i}{\partial x^j} dx^j. \end{aligned}$$

Ya que los coeficientes $(a_i \circ F) \frac{\partial F^i}{\partial x^j}$ son todos C^∞, se sigue que la $1-$forma $F^*\omega$ es C^∞ en U y por consiguiente en p. Como p es arbitrario en N, el pullback $F^*\omega$ es C^∞ en N. □

3.2.2. k-Formas diferenciales

En esta sección se extenderá a variedades diferenciales lo descrito en la Sección 2.2, donde fue desarrollado la teoría de formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$. Como en esa sección, se hace uso de los conceptos desarrollados en el primer capítulo de este trabajo. Se hace necesario recordar que dado un espacio vectorial V, $A_k(V)$ denota el espacio de $k-$tensores alternantes sobre V.

Sea M una variedad diferenciable. Un campo $k-$covector en M es una función ω que a cada punto $p \in M$ le asigna un $k-$covector $\omega_p \in A_k(T_pM)$. Un campo $k-$covector es también llamado una $k-$forma diferencial sobre M. Se denota $\Omega^k(M)$ a el espacio de $k-$formas diferenciales sobre M.

Como en el caso de 1-formas, una $k-$forma diferencial ω sobre M y campos vectoriales $X_1, \ldots, X_k$ sobre M, inducen la función real $\omega(X_1, \ldots, X_k)$, definida en M por la fórmula

$$(\omega(X_1, \ldots, X_k))(p) = \omega_p((X_1)_p, \ldots, (X_k)_p),$$

$p \in M$.

Proposición 13. *Sea ω una $k-$forma diferencial sobre una variedad M. Para cualesquiera campos vectoriales $X_1, \ldots, X_k$ y cualquier función $h : M \to \mathbb{R}$,*

$$\omega(X_1, \ldots, hX_i, \ldots, X_k) = h\omega(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_k).$$

Demostración. Sea $p \in M$

$$\begin{aligned} \omega(X_1, \ldots, hX_i, \ldots, X_k)(p) &= \omega_p((X_1)_p, \ldots, h(p)(X_i)_p, \ldots, (X_k)_p) \\ &= h(p)\omega_p((X_1)_p, \ldots, (X_i)_p, \ldots, (X_k)_p). \end{aligned}$$

Esto es posible ya que $\omega(X_1, \ldots, X_k)$ está definida puntualmente y además ω_p es $\mathbb{R}-$lineal en cada argumento. □

Observación 18. *Sea $(U, x^1, \ldots, x^n)$ una carta coordenada de una variedad diferenciable M. Para todo $p \in U$, $\{(dx^1)_p, \ldots, (dx^n)_p\}$ es la base dual del espacio cotangente $T_p^*U = T_p^*M$, correspondiente a la base $\{\partial_1|_p, \ldots, \partial_n|_p\}$ de $T_pU = T_pM$. Por lo tanto, por la Proposición 4, una base para el espacio de $k-$covectores $A_k(T_pM)$ viene dada por*

$$\left\{(dx^{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx^{i_k})_p \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\right\}.$$

De aquí, si $\omega \in \Omega^k(M)$, entonces para cada $p \in M$, ω_p puede expresarse en la forma

$$\omega_p = \sum a_{i_1 \ldots i_k}(p)(dx^{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx^{i_k})_p,$$

donde la suma se hace sobre todos los multiíndices de longitud k estrictamente ascendentes $I = (i_1, \ldots, i_k)$, con $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$. De manera más general, al omitir el punto p, se escribe

$$\omega = \sum a_{i_1 \ldots i_k}(dx^{i_1}) \wedge \cdots \wedge (dx^{i_k})$$

o bien, de forma más compacta,

$$\omega = \sum a_I dx^I \quad \text{donde} \quad dx^I = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \quad y \quad a_I = a_{i_1 \ldots i_k}.$$

Así, similarmente al caso de 1-formas, puede ser probado que una $k-$forma diferencial ω es suave si y sólo si, en cada carta $(U, x^1, \ldots, x^n)$, las funciones componentes a_I son suaves, lo cual es equivalente a que para cualesquiera campos vectoriales $X_1, \ldots, X_k$ sobre M, la función $\omega(X_1, \ldots, X_k)$ es suave en M, ver [1].

Ahora se mostrará una expresión local para un tipo especial de $k-$formas diferenciales. Seguidamente se prueba que una forma diferencial definida en un entorno de una variedad puede ser extendida a toda la variedad. Por comodidad, en adelante $\jmath_{k,n}$ denota el conjunto de multiíndices de longitud k estrictamente ascendentes $I = (i_1, \ldots, i_k)$, con $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.

Proposición 14. *Sea $(U, x^1, \ldots, x^n)$ carta de una variedad M y sean $f^1, \ldots, f^k$ funciones suaves en U. Entonces*

$$df^1 \wedge \cdots \wedge df^k = \sum_{I \in \jmath_{k,n}} \frac{\partial(f^1, \ldots, f^k)}{\partial(x^{i_1}, \ldots, x^{i_k})}(dx^{i_1}) \wedge \cdots \wedge (dx^{i_k}).$$

En particular, $df^1 \wedge \cdots \wedge df^n = det\,[\partial f^i / \partial x^j]\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$.

Demostración. Se ha visto que la $k-$forma diferencial $df^1 \wedge \cdots \wedge df^k$ puede expresarse en la forma

$$df^1 \wedge \cdots \wedge df^k = \sum_{J \in \jmath_{k,n}} c_J dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k},$$

para algunas funciones $c_J : U \to \mathbb{R}$. Ahora, por (1.1),

$$(df^1 \wedge \cdots \wedge df^k)(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_k}) = det\left[\frac{\partial f^i}{\partial x^{i_j}}\right]$$

y por (1.2),

$$\sum_J c_J dx^J(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_k}) = \sum_J c_J \delta_I^J = c_I.$$

Por lo tanto $c_I = \partial(f^1, \ldots, f^k)/\partial(x^{i_1}, \ldots, x^{i_k})$. □

Proposición 15. *Sea M una variedad diferenciable y ω una forma diferencial suave, la cual está definida en un entorno U de $p \in M$. Entonces, existe una forma diferencial $\tilde{\omega}$ suave en M que coincide con ω en un entorno $V \subseteq U$ de p.*

Demostración. Existe una función $\rho : M \to \mathbb{R}$ con soporte compacto contenido en U, la cual es identicamente 1 en un entorno $V \subseteq U$ de p. Se define $\widetilde{\omega}$ como sigue:

$$\widetilde{\omega}_q = \begin{cases} \rho(q)\omega_q & \text{para} \quad q \in U \\ 0 & \text{para} \quad q \notin U. \end{cases}$$

Si $q \notin U$ entonces $q \notin Supp\, \rho$, así que hay un conjunto abierto que contiene a q en el cual $\widetilde{\omega}$ es 0, ya que $supp \rho$ es cerrado. Por lo tanto $\widetilde{\omega}$ es C^∞ en cada punto $q \notin U$. Como en el abierto U $\widetilde{\omega}$ es el producto de dos funciones suaves, entonces $\widetilde{\omega}$ es también suave en U. Finalmente, ya que $\rho \equiv 1$ en V, $\widetilde{\omega}$ coincide con ω en V. □

Pullback de $k-$forma diferenciales

Sea $F : N \to M$ una función suave entre variedades diferenciables. Se ha definido el pullback de una $0-$forma (funciones suaves sobre M con valores en $\mathbb{R}$) y de $1-$formas sobre M, ahora se define el pullback de $k-$formas.

Dados dos espacios vectoriales V, W y $L : V \to W$ una aplicación lineal, el pullback de $k-$ covectores bajo L se define a través de la aplicación lineal

$$L^* : A_k(W) \to A_k(V)$$

dado por

$$L^*(\alpha)(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(L(v_1), \ldots, L(v_k)).$$

De esta manera, como $F_{*,p}$ es una aplicación lineal de T_pN en $T_{F(p)}M$, ella induce una aplicación pullback de $k-$formas sobre cada espacio tangente

$$F^* := (F_{*,p})^* : A_k(T_{F(p)}M) \longrightarrow A_k(T_pN),$$

la cual está definida por

$$(F^*\omega)_p(v_1, \ldots, v_k) := F^*(\omega_{F(p)})(v_1, \ldots, v_k) = \omega_{F(p)}(F_{*,p}\, v_1, \ldots, F_{*,p}\, v_k), \tag{3.4}$$

para todo $p \in N$ y $v_i \in T_pN$.

De manera análoga a la prueba de la Proposición 11, se puede concluir las siguientes propiedades del pullback de $k-$formas.

Proposición 16. *Sea $F : N \to M$ una función C^∞ entre variedades. Dados $\omega, \tau \in \Omega^k(M)$ y $\varphi : M \to \mathbb{R}$ una función suave, entonces*

i) $F^*(\omega + \tau) = F^*\omega + F^*\tau$;

ii) $F^*(\varphi\omega) = (\varphi \circ F)F^*\omega$.

Producto exterior para $k-$formas diferenciales

Con lo desarrollado en los preliminares del presente trabajo, con respecto a producto exterior, esta noción es extendida a formas diferenciales sobre una variedad, siendo definido como sigue: dada una $k-$forma ω y una $l-$forma τ sobre M, el producto exterior $\omega \wedge \tau$ es la $(k+l)-$forma en M tal que

$$(\omega \wedge \tau)_p = \omega_p \wedge \tau_p \qquad \text{para todo} \quad p \in M.$$

Observación 19. *En una carta $(U, x^1, \ldots, x^n)$ de M, ω y τ tienen expresiones $\omega = \sum a_I dx^I$ y $\tau = \sum b_J dx^J$, con componentes a_I, b_J funciones en U. Luego, si ω y τ son suaves, entonces las componentes de $\omega \wedge \tau$ en la carta U, son producto de funciones suaves en U. Por lo tanto $\omega \wedge \tau$ es suave si ω y τ lo son.*

Proposición 17. *Si $F : N \to M$ es una función C^∞ entre variedades, ω y τ son formas diferenciales en M, entonces*

$$F^*(\omega \wedge \tau) = F^*\omega \wedge F^*\tau.$$

Demostración. Sean $p \in N$ y $v_1, \ldots, v_{k+l} \in T_pN$. Por (3.4) y definición de producto exterior para $k-$formas tenemos

$$\begin{aligned}
&(F^*(\omega \wedge \tau))_p(v_1, \ldots, v_{k+l}) \\
&= (\omega_{F(p)} \wedge \tau_{F(p)})(F_{*,p}\, v_1, \ldots, F_{*,p}\, v_{k+l}) \\
&= \frac{1}{k!l!} A(\omega_{F(p)} \otimes \tau_{F(p)})(F_{*,p}\, v_1, \ldots, F_{*,p}\, v_{k+l}) \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sgn(\sigma)(\omega_{F(p)})(F_{*,p}\, v_{\sigma(1)}, \ldots, F_{*,p}\, v_{\sigma(k)})(\tau_{F(p)})(F_{*,p}\, v_{\sigma(k+1)}, \ldots, F_{*,p}\, v_{\sigma(k+l)}) \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sgn(\sigma)(F^*\omega)_p(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}(F^*\tau)_p(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}) \\
&= \frac{1}{k!l!} A((F^*\omega)_p \otimes (F^*\tau)_p)(v_1, \ldots, v_{k+l}) \\
&= ((F^*\omega) \wedge (F^*\tau))_p(v_1, \ldots, v_{k+l}).
\end{aligned}$$

□

3.2.3. Derivada exterior de $k-$formas

Dada una función diferenciable sobre una variedad M (una 0-forma sobre M), se define la derivada exterior de f como su diferencial df. Así, la derivada exterior de una 0-forma es una 1-forma.

En general, en un entorno coordenado $(U, x^1, \ldots, x^n)$ de $p \in M$, dada una $k-$forma $\omega \in \Omega^k(M)$, puede expresarse en la forma $\omega = \sum a_I dx^I$, siguiendo la misma idea de la definición dada para derivada exterior de $k-$formas en $\mathbb{R}^n$, la derivada exterior de ω es la $(k+1)-$forma $d\omega$, escrita en la carta $(U, x^1, \ldots, x^n)$, en la forma

$$d\omega = \sum (da_I) \wedge dx^I = \sum (da_I) \wedge dx^I.$$

Puede ser probado que $d\omega$ está bien definido, independiente de la carta, ver [1, Sección 19]. Como en el caso $\mathbb{R}^n$, se demuestran propiedades análogas a las dadas en la Proposición 6, las cuales son resumidos por conveniencia. Sean ω y η formas diferenciales en M, entonces

i) Si ω y η son $k-$formas, $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$;

ii) si ω es una $k-$forma y η una $l-$forma, entonces

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta;$$

iii) $d^2\omega = 0$.

Como en el caso de $1-$formas, en formas diferenciales de grado superior, será probado que el pullback conmuta con la derivada exterior.

Proposición 18. *Sea $F : N \to M$ una función suave entre variedades. Si $\omega \in \Omega^k(M)$, entonces $d(F^*\omega) = F^*(d\omega)$.*

Demostración. En la Proposición 10 es probado el caso $k = 0$. Para el caso $k \geq 1$, sean $p \in N$ y $(V, y^1, \ldots, y^m)$ una carta en M de $F(p)$. En V

$$\omega = \sum a_I dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k},$$

para algunas funciones a_I que son C^∞ en V. Luego

$$\begin{aligned} F^*\omega &= \sum (F^*a_I) F^*dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge F^*dy^{i_k} \\ &= \sum (a_I \circ F) dF^{i_1} \wedge \cdots \wedge dF^{i_k}, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$d(F^*\omega) = \sum d(a_I \circ F) \wedge dF^{i_1} \wedge \cdots \wedge dF^{i_k}. \tag{3.5}$$

Por otro lado, el pullback de $d\omega$ es dado por

$$\begin{aligned} F^*d\omega &= F^*\left(\sum da_I \wedge dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}\right) \\ &= \sum F^*da_I \wedge F^*dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge F^*dy^{i_k} \\ &= \sum d(F^*a_I) \wedge dF^{i_1} \wedge \cdots \wedge dF^{i_k} \\ &= \sum d(a_I \circ F) \wedge dF^{i_1} \wedge \cdots \wedge dF^{i_k}. \end{aligned}$$

De aquí y (3.5) se concluye que $dF^*\omega = F^*d\omega$. $\square$

Ejemplo 21. *Dado U el conjunto abierto $(0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ en $\mathbb{R}^3$. Sea $F : U \to \mathbb{R}^3$ la función dada por $F(\rho, \phi, \theta) = (\rho \sin\phi \cos\theta,\ \rho \sin\phi \sin\theta,\ \rho\cos\phi)$. Si x, y, z son las coordenadas estándar en $\mathbb{R}^3$, se prueba que*

$$F^*(dx \wedge dy \wedge dz) = \rho^2 \sin\phi \, d\rho \wedge d\phi \wedge d\theta.$$

Como el producto wedge conmuta con la diferencial se tiene que

$$\begin{aligned} F^*dx = dF^*x &= d(x \circ F) \\ &= d(\rho \sin\phi \cos\theta) \\ &= \sin\phi\cos\theta\, d\rho + \rho\cos\phi\cos\theta\, d\phi - \rho\sin\phi\sin\theta\, d\theta. \end{aligned}$$

De manera similar

$$\begin{aligned} F^*dy &= \sin\phi\sin\theta\, d\rho + \rho\cos\phi\sin\theta\, d\phi + \rho\sin\phi\cos\theta\, d\theta; \\ F^*dz &= \cos\phi\, d\rho - \rho\sin\phi\, d\phi. \end{aligned}$$

Por la Proposición 17,

$$\begin{aligned} F^*(dx \wedge dy \wedge dz) &= F^*dx \wedge F^*dy \wedge F^*dz \\ &= (\sin\phi\cos\theta\, d\rho + \rho\cos\phi\cos\theta\, d\phi - \rho\sin\phi\sin\theta\, d\theta) \\ &\quad \wedge (\sin\phi\sin\theta\, d\rho + \rho\cos\phi\sin\theta\, d\phi + \rho\sin\phi\cos\theta\, d\theta) \\ &\quad \wedge (\cos\phi\, d\rho - \rho\sin\phi\, d\phi) \\ &= -\rho^2\sin^3\phi\cos^2\theta\, d\rho\wedge d\theta\wedge d\phi \;+\; \rho^2\sin\phi\cos^2\phi\cos^2\theta\, d\phi\wedge d\theta\wedge d\rho \\ &\quad +\; \rho^2\sin^3\phi\sin^2\theta\, d\theta\wedge d\rho\wedge d\phi \;-\; \rho^2\sin\phi\cos^2\phi\sin^2\theta\, d\theta\wedge d\phi\wedge d\rho. \end{aligned}$$

Cálculos adicionales conducen a

$$F^*(dx \wedge dy \wedge dz) = \rho^2 \sin\phi\, d\rho \wedge d\phi \wedge d\theta.$$

Observación 20. *Sean $F : N \to M$ una función suave entre variedades y $\omega \in \Omega^k(M)$, una $k-$forma suave. Dado $p \in N$ y $(V, y^1, \dots, y^m)$ una carta en M de $F(p)$, existe una carta $(U, x^1, \dots, x^n)$ en N de p tal que $F(U) \subset V$. Por la Proposición 12 y propiedades del pullback bajo el producto exterior, se puede deducir que para $\omega = \sum_I a_I dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}$,*

$$\begin{aligned} F^*\omega &= \sum (F^*a_I) F^*dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge F^*dy^{i_k} \\ &= \sum_{I,J} (a_I \circ F) \frac{\partial(F^{i_1} \dots F^{i_k})}{\partial(x^{j_1} \dots x^{j_k})} dx^J. \end{aligned}$$

De esto se sigue que $F^*\omega$ es una $k-$forma suave en U, ya que las funciones componentes lo son. En consecuencia, $F^*\omega$ es una $k-$forma suave en N.

Capítulo 4

Integración en variedades diferenciables

Para definir integración de $n-$formas diferenciales sobre variedades diferenciables $n-$dimensionales, es necesario abordar primero el concepto de orientación en una variedad y sus diversas caracterizaciones. Para formas en $\mathbb{R}^n$, la integral de una $n-$forma se define en términos de la integral de Riemann de cierta función; sobre un entorno coordenado de una variedad, la integral de una $n-$forma sobre este entorno es definida como una cierta integral en $\mathbb{R}^n$, mediante el pullback de la $n-$forma y es extendida a toda la variedad con ayuda del concepto de particiones de la unidad. Finalmente, en el capítulo se formula y demuestra el Teorema de Stokes, para lo cual es necesario introducir variedades con frontera y conceptos relacionados a ellas.

4.1. Orientaciones

Es importante recordar que en el cálculo vectorial las integrales de linea y de superficie dependen de la orientación de la curva o superficie sobre la que tiene lugar la integración. En el contexto de variedades también es esencial tener una noción de orientación para poder definir la integral; este es contenido de la primera sección de este capítulo.

4.1.1. Espacios vectoriales y orientaciones

Una orientación en un espacio vectorial $n-$dimensional V es una clase de equivalencia entre bases ordenadas; dos bases ordenadas son equivalentes si su matriz cambio de base tiene determinante positivo. Es claro que esto define una relación de equivalencia en el conjunto de bases ordenadas de V y que existen exactamente dos de tales clases, a cada una de estas clases se les denomina una orientación de V. En el caso que dos bases ordenadas sean equivalentes, ellas tendrán la misma orientación. Al fijar arbitrariamente una orientación μ, la otra clase de equivalencia se denomina orientación opuesta de μ y es denotada por $-\mu$.

Ya que el espacio $A_n(V)$ es unidimensional, se puede utilizar $n-$covectores de V para especificar una orientación en V.

Lema 3. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n, $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \in V$ y se afirma que $j = 1, \ldots, n$*

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} v_i a_j^i.$$

Si $A = [a_j^i]$ y β es un $n-$covector, entonces

$$\beta(u_1, \ldots, u_n) = (detA)\beta(v_1, \ldots, v_n).$$

Demostración. Como β es lineal en cada uno de sus $n-$argumentos, entonces

$$\beta(u_1, \ldots, u_n) = \beta\left(\sum v_{i_1} a_1^{i_1}, \ldots, \sum v_{i_n} a_n^{i_n}\right) = \sum a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n} \beta(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}).$$

Ahora, ya que β es alternante, se sabe que β se anula en aquellas $n-$uplas $(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n})$ para las que existen s, l con $i_s = i_l$. Por lo tanto se puede considerar que la suma anterior se realiza sobre todos los multiíndices $I = (i_1, \ldots, i_n)$, con $i_s \neq i_l$ si $s \neq l$. Así, I es una permutación σ_I de $\{1, \ldots, n\}$, donde $\sigma_I(j) = i_j$. De lo anterior, y

$$\beta(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}) = (sgn\sigma_I)\beta(v_1, \ldots, v_n),$$

se concluye que

$$\begin{aligned}\beta(u_1, \ldots, u_n) &= \sum_{\sigma_I \in S_n} (sgn\sigma_I) a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n} \beta(v_1, \ldots, v_n) \\ &= (detA)\beta(v_1, \ldots, v_n).\end{aligned}$$

□

Observación 21. *Es posible relacionar orientaciones en V con el espacio vectorial $A_n(V)$.*

i) Sean β un $n-$covector en V y $\{u_1, \ldots, u_n\}$, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ bases ordenadas de V. Si $\beta(u_1, \ldots, u_n)$ y $\beta(v_1, \ldots, v_n)$ tienen el mismo signo, entonces por el lema anterior, se deduce que $\det A > 0$ y por lo tanto las bases ordenadas $\{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ son equivalentes.

ii) De lo anterior, un $n-$covector β determina la orientación de la base ordenada $(v_1, \ldots, v_n)$, si $\beta(v_1, \ldots, v_n) > 0$.

iii) Dos $n-$covectores β y β' en V determinan la misma orientación si y sólo si $\beta = a\beta'$ para algún número positivo a. De aquí,

$$\beta \sim \beta' \Leftrightarrow \beta = a\beta' \quad \textit{para algún} \quad a > 0$$

define una relación de equivalencia en el conjunto de $n-$covectores no nulos en V.

iv) Como conclusión, una orientación en V puede determinarse mediante una clase de equivalencia de bases ordenadas o por clases de equivalencia de $n-$covectores no nulos en V.

Ejemplo 22. *Sea $\{e_1, e_2\}$ la base estándar para $\mathbb{R}^2$ y $\{\alpha^1, \alpha^2\}$ la base dual correspondiente. Entonces, el $2-$covector $\alpha^1 \wedge \alpha^2$ determina una orientación para $\mathbb{R}^2$, ya que*

$$(\alpha^1 \wedge \alpha^2)(e_1, e_2) = 1 > 0,$$

es considerada la orientación estándar para $\mathbb{R}^2$.

4.1.2. Espacio tangente y orientaciones

Sea M una variedad diferenciable. Para definir una orientación en M, se aplica lo desarrollado en la sección anterior en cada espacio tangente de M.

Un marco en un subconjunto abierto $U \subseteq M$ es una $n-$upla $(X_1, \ldots, X_n)$ de campos vectoriales (posiblemente discontiunuos) definidos en U, tal que en cada punto $p \in U$ la $n-$upla $(X_1(p), \ldots, X_n(p))$ de vectores es una base ordenada de T_pM. Un marco global es un marco definido sobre toda la variedad, mientras que un marco local en p es un marco definido sobre un entorno de p.

Observación 22. *Se define una relación de equivalencia entre marcos en U de la siguiente forma:*

$$(X_1, \ldots, X_n) \sim (Y_1, \ldots, Y_n) \Leftrightarrow (X_1(p), \ldots, X_n(p)) \sim (Y_1(p), \ldots, Y_n(p))$$

para todo $p \in U$. De acuerdo a lo desarrollado en la sección anterior, si se escribe $Y_j = \sum_i a_j^i X_i$ para cada j, entonces los marcos $(X_1, \ldots, X_n)$ y $(Y_1, \ldots, Y_n)$ son equivalentes si y sólo si la matriz cambio de base $A = [a_j^i]$ tiene determinante positivo en cada punto en U.

Definición 17. *Una orientación puntual en una variedad M es una función que asigna a cada punto $p \in M$ una orientación μ_p en T_pM.*

Para relacionar estos conceptos, se dirá que una orientación puntual en M es simplemente una clase de equivalencia entre marcos (posiblemente discontinuos) en M.

Definición 18. *Una orientación puntual μ en M, se dice continua en $p \in M$ si existe un entorno U en el cual μ está representado por un marco continuo, es decir, existen campos vectoriales continuos $(Y_1, \ldots, Y_n)$ en U tal que $\mu_q = [(Y_1(q), \ldots, Y_n(q))]$ para todo $q \in U$.*

La orientación puntual μ es continua en M, si es continua en cada punto $p \in M$.

Una orientación puntual continua en M es llamada una orientación en M. La variedad M será orientable si tiene una orientación.

Ejemplo 23. *El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es orientable con orientación dada por el marco global continuo $(\partial/\partial r^1, \ldots, \partial/\partial r^n)$, donde $(r^1, \ldots, r^n)$ denotan las coordenadas estándar en $\mathbb{R}^n$. En general, una variedad con una sola carta $(U, x^1, \ldots, x^n)$ es orientable, ya que $(\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n)$ es un marco global continuo de M.*

Observación 23. *Es importante mencionar que existen variedades diferenciables no orientadas, es decir, en ellas no es posible definir una orientación puntual continua. Algunos ejemplos de variedades no orientadas son la banda de Mobius y su prueba es desarrollada en [1, Página 240].*

4.1.3. Formas diferenciales y orientaciones

Ahora se muestra una forma equivalente de definir variedad orientable a través de formas diferenciales. Más precisamente, se prueba que una variedad es orientable si y sólo si existe una $n-$forma que no se anula, es decir una $n-$formas distinta a la $n-$forma nula ($\omega_p \neq 0$). El siguiente lema auxiliar, es útil para demostrar el Teorema.

Lema 4. *Una orientación puntual $[(X_1, \ldots, X_n)]$ en una variedad diferenciable M es continua si y sólo si para cada punto $p \in M$ hay un entorno coordenado $(U, x^1, \ldots, x^n)$ tal que la función*

$$(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(X_1, \ldots, X_n)$$

es positiva en todo punto de U.

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $\mu = [(X_1, \ldots, X_n)]$ es una orientación puntual continua. Entonces para cada $p \in M$ hay un entorno W en el que μ es representado por un marco continuo $(Y_1, \ldots, Y_n)$ de campos vectoriales definidos en W. Se escoje un entorno coordenado conexo $(U, x^1, \ldots, x^n)$ de p con $U \subseteq W$ y sea $\partial_i = \partial/\partial x^i$. Luego, en U, Y_j puede expresarse en la forma

$$Y_j = \sum_i b^i_j \partial_i, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

de donde la función matricial $[b^i_j] : U \to GL(n, \mathbb{R})$, que en cada punto es la matriz cambio de base entre los marcos, es continua. Por Lema 3,

$$(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(Y_1, \ldots, Y_n) = (det[b^i_j])(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(\partial_1, \ldots, \partial_n) = det[b^i_j] \neq 0$$

en todo punto de U, ya que $[b^i_j]$ es una matriz cambio de base y por tanto no singular. De aquí, por ser U conexo, la función de valor real $(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(Y_1, \ldots, Y_n)$ es positiva en todas partes o es negativa en todas partes de U. Sin pérdida de generalidad la función es positiva en U, ya que en caso contrario se considera la carta $(U, \tilde{x}^1, x^2, \ldots, x^n)$, donde $\tilde{x}^1 = -x^1$.

En U, se tiene $\mu = [(X_1, \ldots, X_n)] = [(Y_1, \ldots, Y_n)]$, entonces la matriz cambio de base $C = [c^i_j]$ con $X_j = \sum_i c^i_j Y_i$ tiene determinante positivo. Nuevamente, por el Lema 3, en U

$$(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(X_1, \ldots, X_n) = (det\, C)(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(Y_1, \ldots, Y_n) > 0.$$

($\Leftarrow$) Sea $(U, x^1, \ldots, x^n)$ una carta de p en la cual se cumple que $(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(X_1, \ldots, X_n) > 0$. Así, si $X_j = \sum_i a^i_j \partial_i$, entonces

$$(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(X_1, \ldots, X_n) = (det[a^i_j])(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(\partial_1, \ldots, \partial_n) = det[a^i_j] > 0.$$

Se sigue que $[(X_1, \ldots, X_n)] = [(\partial_1, \ldots, \partial_n)]$, lo cual prueba que μ es una orientación puntual continua en p. Por lo tanto, como p es arbitrario se concluye que μ es continua en M. □

Particiones de la unidad

Una colección $\{A_\alpha\}$ de subconjuntos de un espacio topológico S se dice localmente finito si cada punto $q \in S$ tiene un entorno W que intersecta a solo un número finito de conjuntos A_α.

Definición 19. *Una partición C^∞ de la unidad en una variedad es una colección de funciones C^∞ no negativas $\{\rho_\alpha : M \to \mathbb{R}\}_{\alpha\in A}$ tal que:*

i) La colección de soportes $\{Supp\, \rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es localmente finita.

ii) $\sum \rho_\alpha = 1$.

Dado un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de M, la partición de la unidad $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es subordinada al cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}$ si $Supp\, \rho_\alpha \subset U_\alpha$ para cada $\alpha \in A$.

En cada punto $q \in M$ residen solamente un número finito de conjuntos $Supp\, \rho_\alpha$, aquí $\rho_\alpha(q) \neq 0$ solamente para un número finito de α, de ello se desprende que la suma sea finita para cada punto.

Teorema 2. *Una variedad $n-$dimensional M es orientable si y sólo si existe una $n-$forma que no se anula en ningún punto de M.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Sea $\mu = [(X_1, \ldots, X_n)]$ es una orientación puntual en M. Por el Lema 4, para cada punto p existe un entorno coordenado $(U, x^1, \ldots, x^n)$ de p, en el que se cumple

$$(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(X_1, \ldots, X_n) > 0. \tag{4.1}$$

Dada $\{(U_\alpha, x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha)\}$ una colección de cartas que cubren a M satisfaciendo la condición anterior y sea $\{\rho_\alpha\}$ una partición C^∞ de la unidad subordinada al cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}$. Luego, la $n-$forma $\omega = \sum_\alpha \rho_\alpha dx^1_\alpha \wedge \cdots \wedge dx^n_\alpha$ está bien definida, es C^∞ en M y además, por (4.1), dado $p \in M$ fijo,

$$\omega_p(X_1(p), \ldots, X_n(p)) = \sum_\alpha \rho_\alpha(p)(dx^1_\alpha \wedge \cdots \wedge dx^n_\alpha)_p(X_1(p), \ldots, X_n(p)) > 0.$$

Por lo tanto, ω es una $n-$forma que no se anula en ninguna parte de M.
$(\Leftarrow)$ Sea ω es una $n-$forma que no se anula en M. Para cada punto $p \in M$ por conveniencia se escoje una base ordenada $(X_1(p), \ldots, X_n(p))$ de T_pM tal que

$$\omega_p(X_1(p), \ldots, X_n(p)) > 0.$$

Fijado $p \in M$ y $(U, x^1, \ldots, x^n)$ un entorno coordenado conexo de p. En coordenadas, ω tiene la forma $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, donde f es una función C^∞ que no se anula en U. Por ser f continua y U conexo, la función f es positiva en todas partes o es negativa en todas partes.

i) Si $f > 0$, entonces en la carta $(U, x^1, \ldots, x^n)$, se cumple

$$(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(X_1, \ldots, X^n) > 0.$$

ii) Si $f < 0$, entonces en el entorno $(U, -x^1, x^2, \ldots, x^n)$ se cumple

$$(d(-x^1) \wedge \cdots \wedge dx^n)(X_1, \ldots, X_n) > 0.$$

Así, por el Lema 4, $\mu = [(X_1, \ldots, X_n)]$ es una orientación puntual continua en M. □

Observación 24. *Es importante notar que sobre una variedad $n-$dimensional, si dos $n-$formas ω y ω' no se anulan, entonces $\omega = f\omega'$ para alguna función $f : M \to \mathbb{R}$ que no se anula en M.*

i) Sobre una variedad conexa M, si una función continua f no se anula, entonces f es positiva en toda parte o negativa en toda parte en M. Luego, en el espacio de $n-$formas C^∞ que no se anulan, se define una relación de equivalencia de la siguiente manera:

$$\omega \sim \omega' \quad \Leftrightarrow \quad \omega = f\omega' \quad \textit{para alguna} \quad f > 0 \quad \textit{en} \quad M.$$

ii) Una orientación $\mu = [(X_1, \ldots, X_n)]$ sobre una variedad orientable conexa M se le asocia la clase de equivalencia ω de $n-$formas que no se anulan en M tal que $\omega(X_1, \ldots, X_n) > 0$. Luego a $\mu \mapsto \omega$ y $-\mu \mapsto -\omega$ Así, ω determina la orientacion $[(X_1, \ldots, X_n)]$ y reciprocamente también se cumple, ya que está correspondecia es biúnivica.

iii) ω es llamada forma orientada en M y en este caso, se escribe $[\omega]$ para denotar la orientación determinada por ω. Por ejemplo, $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ es una forma orientada en $\mathbb{R}^n$.

4.1.4. Atlas y orientaciones

Se finaliza esta sección con un resultado que establece una condición necesaria y suficiente en términos de las características de un cierto atlas de la variedad.

Sea $F : (N, [\omega_N]) \to (M, [\omega_M])$ un difeomorfismo entre variedades orientadas. F preserva orientación si $[F^*\omega_M] = [\omega_N]$ y F invierte orientación si $[F^*\omega_M] = [-\omega_N]$.

Proposición 19. *Sean U y V conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ con orientación estándar heredada de $\mathbb{R}^n$. Un difeomorfismo $F : U \to V$ preserva orientación si y sólo si el determinante jacobiano $det[\partial F^i/\partial x^j]$ es positivo en todo U.*

Demostración. Sean $x^1, \ldots, x^n$ y $y_1, \ldots, y^n$ las coordenadas estándar de $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^n$ respectivamente. Entonces, por propiedades del pullback tenemos que

$$\begin{aligned} F^*(dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n) &= d(F^*y^1) \wedge \cdots \wedge d(F^*y^n) \\ &= d(y^1 \circ F) \wedge \cdots \wedge d(y^n \circ F) \\ &= dF^1 \wedge \cdots \wedge dF^n \\ &= det \left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right] dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

Se sigue que F preserva orientación si, y sólo si $det[\partial F^i/\partial x^j]$ es positivo en todo punto de U. □

Ejemplo 24. *Sean $U = (0,\infty) \times (0,2\pi) \subset \mathbb{R}^2$ con coordenadas (r,θ) y $F : U \to \mathbb{R}^2$ la función dada por $F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, F preserva orientación, puesto que*

$$det \begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial r} & \frac{\partial F^1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial F^2}{\partial r} & \frac{\partial F^2}{\partial \theta} \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r > 0.$$

De lo anterior, F es un difeomorfismo en su imagen que preserva orientación.

Definición 20. *Un atlas de una variedad diferenciable M se dice orientado, si para cualquier par de cartas $(U, x^1, \ldots, x^n)$ y $(V, y^1, \ldots, y^n)$ con intersección no vacía, el determinante jacobiano $det[\partial y^i/\partial x^j]$ es positivo en todo punto de $U \cap V$.*

Teorema 3. *Una variedad diferenciable M es orientable si y sólo si tiene un atlas orientado.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $\mu = [(X^1, \ldots, X^n)]$ es una orientación de M. Por Lema 4, para cada punto $p \in M$ hay un entorno coordenado $(U, x^1, \ldots, x^n)$ en el cual

$$(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(X^1, \ldots, X^n) > 0.$$

Se afirma que $\{(U, x^1, \ldots, x^n)\}$ es un atlas orientado para M. En efecto, si $(U, x^1, \ldots, x^n)$ y $(V, y^1, \ldots, y^n)$ dos cartas que se interceptan, en $U \cap V$

$$(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(X^1, \ldots, X^n) > 0 \qquad \text{y} \qquad (dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n)(X^1, \ldots, X^n) > 0.$$

De aquí, ya que $(dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n) = det[\partial y^i/\partial x^j](dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)$, se sigue que $det[\partial y^i/\partial x^j] > 0$ y se concluye que $\{(U, x^1, \ldots, x^n)\}$ es un atlas orientado.

($\Leftarrow$) Para la otra implicación, se supone que $\{(U, x^1, \ldots, x^n)\}$ es un atlas orientado de M y sean $p \in U$ y μ_p el representante de la clase de equivalencia de la base ordenada $(\partial/\partial x^1|_p, \ldots, \partial/\partial x^n|_p)$ de T_pM. Por la Definición 20, si $(V, y^1, \ldots, y^n)$ es otra carta de M tal que $p \in V$, entonces $det\,[\partial y^i/\partial x^j] > 0$. De aquí, las bases $(\partial/\partial x^1|_p, \ldots, \partial/\partial x^n|_p)$ y $(\partial/\partial y^1|_p, \ldots, \partial/\partial y^n|_p)$ están relacionadas, es decir, μ_p es una orientación puntual bien definida. Es continua, ya que para cada punto p hay un entorno coordenado $(U, x^1, \ldots, x^n)$ en el cual $\mu = [(\partial/\partial x^1|_p, \ldots, \partial/\partial x^n|_p)]$ es un marco continuo. □

Observación 25. *Dos atlas orientados $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ y $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ sobre una variedad M se dicen equivalentes si las funciones de transición entre los atlas*

$$\phi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \cap V_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta),$$

tienen determinante jacobiano positivo para todo α, β. Es claro que esto define una relación de equivalencia en la familia de atlas orientados de M.

4.2. Variedades con frontera

La manera más clara de construir el concepto de variedad con frontera es usar como ejemplo $\mathcal{H}^n$, el semiespacio superior cerrado de $\mathbb{R}^n$. Es decir,

$$\mathcal{H}^n = \left\{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n \geq 0\right\},$$

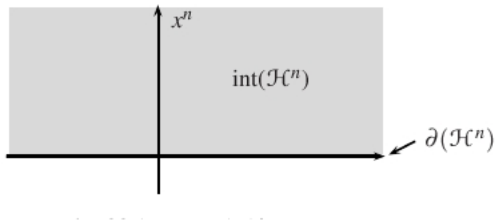

Figura 4.1: Representación de $\mathcal{H}^n$

dotada con la topología del subespacio heredada de $\mathbb{R}^n$. En este conjunto se puede distinguir claramente dos tipos de puntos y dos tipos de conjuntos abiertos dependiendo si interseptan o no a la frontera de $\mathcal{H}^n$. Más precisamente, se presentan los siguientes casos:

i) El interior de $\mathcal{H}^n$, denotado por $(\mathcal{H}^n)^\circ$, es el conjunto de puntos de $\mathcal{H}^n$ con $x^n > 0$.

ii) La frontera de $\mathcal{H}^n$, denotada por $\partial\mathcal{H}^n$, son aquellos puntos de $\mathcal{H}^n$ con $x^n = 0$.

iii) Se distinguen dos tipos importantes de bolas abiertas: aquellas centradas en puntos del interior de $\mathcal{H}^n$ y aquellas con centro en puntos de la frontera de $\mathcal{H}^n$. Claramente, todo subconjunto abierto de $\mathcal{H}^n$ puede ser escrito como unión de esta clase de bolas abiertas.

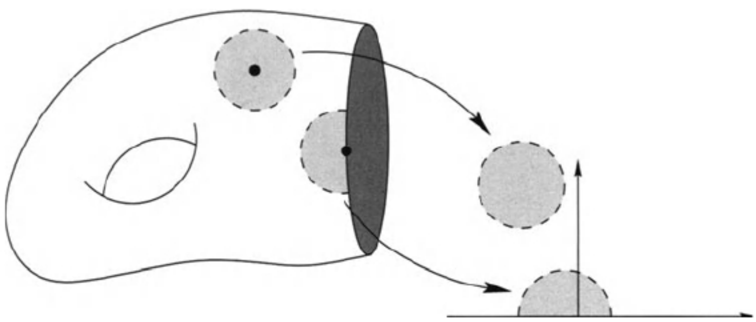

Figura 4.2: Abiertos en $\mathcal{H}^n$

Con lo anterior, se pretende extender los conceptos asociados a una variedad al caso de variedades con frontera. Un espacio topológico M es localmente $\mathcal{H}^n$, si para cada punto

$p \in M$, existe un entorno U de p homeomorfo a un subconjunto abierto de $\mathcal{H}^n$. Así, una variedad topológica con frontera es espacio topológico segundo contable, Haudorff y localmente $\mathcal{H}^n$.

Para $n \geq 2$ una carta en una variedad $n-$dimensional es definida como antes, teniendo en cuenta que también son válidos entornos de puntos de la variedad homeomorfos a conjuntos abiertos de $\mathcal{H}^n$. Cuando $n = 1$ se admiten dos modelos locales; uno de ellos $\mathcal{H}^1 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$ y el otro $\mathcal{L}^1 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 0\}$, luego, una carta en una variedad unidimensional es una pareja (U, ϕ) donde U es homeomorfo a un subconjunto abierto de $\mathcal{H}^1$ o $\mathcal{L}^1$. Un atlas C^∞ es una colección de cartas $\{(U, \phi)\}$ que cubre a M y en cualquier par de cartas (U, ϕ) y $(V\psi)$ la función de transición $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ es un difeomorfismo. Con esto una variedad diferenciable o C^∞ con frontera es una variedad topológica junto con un atlas C^∞ máximal.

Definición 21. *Un punto $p \in M$ es llamado punto interior(o frontera) si en alguna carta (U, ϕ) el punto $\phi(p)$ es un punto interior(o frontera) en $\mathcal{H}^n$.*

Note que los conceptos de punto interior y frontera están bien definidos con total independencia de las cartas, ya que si (V, ψ) es otra carta, entonces por [1, Proposición 22.4], el difeomorfismo $\psi \circ \phi^{-1}$ envía el punto $\phi(p)$ a $\psi(p)$ en tal forma que ambos son puntos interiores o ambos son puntos frontera. Como es habitual, la frontera de la variedad M se denotará por ∂M.

Observación 26. *Puede ser probado que el interior de una variedad diferenciable con frontera es una variedad diferenciable $n-$dimensional sin frontera. Veremos enseguida que la frontera de una variedad diferenciable es una variedad diferenciable $(n-1)-$dimensional sin frontera. De manera particular, las variedades unidimensionales con frontera tienen como frontera conjuntos discretos y las variedades cero dimensionales tienen frontera vacía.*

Dada M una variedad diferenciable con frontera, $p \in \partial M$ y (U, ϕ) una carta en M de p. Sea $\phi' = \phi|_{U \cap \partial M}$ la restricción de la función ϕ a la frontera. Ya que ϕ es un difeomorfismo que envía puntos frontera en puntos frontera, entonces

$$\phi' : U \cap \partial M \to \partial \mathcal{H}^n \equiv \mathbb{R}^{n-1}$$

es un homeomorfismo con su imagen. De otro lado, si (U, ϕ) y (V, ψ) son dos cartas en M de p, entonces

$$\psi' \circ (\phi')^{-1} : \phi'(U \cap V \cap \partial M) \to \psi(U \cap V \cap \partial M),$$

es C^∞ (en $\mathbb{R}^{n-1}$).

Así, un atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ suave de M induce un atlas $\{(U_\alpha \cap \partial M, \phi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial M})\}$ suave de ∂M.

4.2.1. Espacio tangente, formas y orientaciones

Tal y como en el caso de variedades, los conceptos de espacio tangente, espacio cotangente, formas diferenciales y orientaciones, pueden ser definidos en variedades con frontera. Por ejemplo, el espacio tangente T_pM es el espacio vectorial de todas las derivaciones que actúan sobre el álgebra $C^\infty(M)$. De manera particular, dado p en la frontera del semiplano superior $\mathcal{H}^2$, es sabido que $\partial/\partial x|_p$ y $\partial/\partial y|_p$ son derivaciones en $C^\infty(\mathcal{H}^2)$. Así, el espacio tangente $T_p\mathcal{H}^2$ es el espacio vectorial $2-$dimensional con origen en p; sin embargo, aunque $\partial/\partial y|_p$ es un vector tangente en p y su opuesto $-\partial/\partial y|_p$ también lo es, no existe una curva a través de p en $\mathcal{H}^2$ con vector velocidad $-\partial/\partial y|_p$. Este ejemplo muestra que en variedades con frontera, no es posible en general definir los vectores tangentes como velocidades de curvas en la variedad, lo cual no excluye que algunos si se puedan ver como velocidades de curvas.

Habiendo definido plano tangente en cada punto de una variedad con frontera, la definición de orientación en este contexto es la misma que la definición de orientación dada en la Definición17 para el caso de variedades diferenciables. Como en ese caso, es posible establecer las mismas equivalencias para que una variedad con frontera sea orientable en términos de la existencia de $n-$formas que no se anulan en M y de la existencia de atlas orientado.

4.2.2. Campos vectoriales que apuntan hacia afuera

Definición 22. *Sean M una variedad con frontera y $p \in \partial M$. El vector tangente $X_p \in T_pM$ apunta hacia adentro si $X_p \notin T_p(\partial M)$ y existen $\epsilon > 0$ y una curva suave $c : [0, \epsilon) \to M$ que satisface $c(0) = p$, $c((0, \epsilon)) \subset M^\circ$ y $c'(0) = X_p$. De acuerdo a lo anterior, un vector tangente $X_p \in T_pM$ apunta hacia afuera si $-X_p$ apunta hacia dentro.*

Ejemplo 25. *En $\mathcal{H}^2$ el vector $\partial/\partial y|_p$ apunta hacia adentro, mientras que $-\partial/\partial y|_p$ apunta hacia afuera en un punto p que se encuentre sobre el eje horizontal. En este caso, el vector tangente $\partial/\partial y|_p$ está determinado, por ejemplo, por la curva $c(t) = p + te_2$, $t \geq 0$.*

Definición 23. *Un campo vectorial a lo largo de ∂M es una función X que asigna a cada punto $p \in \partial M$ un vector $X_p \in T_pM$ (en lugar de $T_p\partial M$).*

En un entorno coordenado $(U, x^1, \ldots, x^n)$ de p en M, el campo vectorial X puede expresarse en la forma

$$X_q = \sum_i a^i(q) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_q, \qquad q \in \partial M.$$

De igual manera a como se ha dicho antes, X es suave a lo largo de ∂M si, y sólo si las funciones $a^i : \partial M \to \mathbb{R}$ lo son. Es claro que en coordenadas, un vector X_p apunta hacia afuera si, y sólo si $a^n(p) < 0$.

Proposición 20. *Sobre una variedad M con frontera ∂M existe un campo vectorial suave que apunta hacia afuera a lo largo de ∂M.*

Demostración. Sea $(U_\alpha, x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha)$ una colección de entornos coordenados que cubren a la frontera ∂M y sobre cada U_α se define el campo vectorial suave $X_\alpha = -\partial/\partial x^n_\alpha$, el cual apunta hacía afuera a lo largo de $U_\alpha \cap \partial M$. En ∂M, sea $\{\rho_\alpha\}$, C^∞ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento abierto $\{U_\alpha \cap \partial M\}$ de ∂M. Luego, $X = \sum \rho_\alpha X_\alpha$ es un campo vectorial suave que apunta hacia afuera a lo largo de ∂M, puesto que,

i) X Es suave porque sus funciones coeficientes son suaves en ∂M;

ii) X apunta hacia afuera ya que para p en la frontera, $a_n(p) = -\sum \rho_\alpha(p) < 0$.

□

A continuación, se caracteriza la definición de orientación en la frontera, utilizando $n-$formas que no se anulan, teniendo en cuenta la teoría desarrollada en [1, Sección 20.4].

4.2.3. Orientaciones sobre la frontera

Definición 24. *Sean X un campo vectorial suave sobre una variedad diferenciable M y ω una $n-$forma diferenciable. Dado $p \in M$, es definido la $(n-1)-$forma diferenciable $\tau_X \omega$ por*

$$(\tau_X \omega)_p (X_2, \ldots, X_n)_p = \omega_p (X, X_2, \ldots, X_n)_p,$$

donde $X_2, \ldots, X_n$ son campos vectoriales en M. $\tau_X \omega$ es llamada multiplicación interior o contracción de ω. Para $1-$formas ω en M, se tiene que $\tau_X \omega = \omega(X)$ y para $0-$formas diferenciables (funciones) f en M se tiene $\tau_X f = 0$.

Proposición 21. *Sea M una variedad $n-$dimensional orientada con frontera. Si ω es una $n-$forma orientada en M y X es un campo vectorial suave que apunta hacia afuera en ∂M, entonces $\tau_X \omega$ es suave y es una $(n-1)-$forma que no se anula en ∂M. De aquí, la frontera de una variedad orientable, es orientable.*

Demostración. La suavidad de la contracción $\tau_X \omega$ es inmediata de la definición, lo siguiente es probar que $\tau_X \omega$ no se anula en ∂M, puesto que, si $\tau_X \omega$ se anula en algún $p \in \partial M$. Entonces, $(\tau_X \omega)_p (v_2, \ldots, v_n) = 0$ para $v_2, \ldots, v_n \in T_p(\partial M)$, en particular si $\{e_2, \ldots, e_n\}$ es una base para $T_p(\partial M)$, se tiene que $(\tau_X \omega)_p (e_2, \ldots, e_n)_p = 0$. Dado que X_p no pertenece al generado por $\{e_2, \ldots, e_n\}$, se sigue que $\{X_p, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base para T_pM y por lo tanto

$$\omega_p (X_p, e_2, \ldots, e_n) = (\tau_X \omega)_p (e_2, \ldots, e_n) = 0.$$

Se sigue que ω_p se anula en ∂M, lo cual es una contradicción. □

La siguiente proposición proporciona una forma de obtener una orientación de una variedad M a partir de una orientación de su frontera y recíprocamente.

Proposición 22. *Sea M una variedad orientada $n-$dimensional con frontera. Sean $p \in \partial M$ y X_p un vector que apunta hacia afuera en T_pM. La base ordenada $(v_2, \ldots, v_n)$ de $T_p \partial M$ representa una orientación de ∂M en p si y sólo si la base ordenada $(X_p, v_2, \ldots, v_n)$ para T_pM representa una orientación de M en p.*

Demostración. Sea ω una $n-$forma orientada en M.

($\Rightarrow$) Por la Definición 24, si $(v_2, \ldots, v_n)$ representa a la orientación en $p \in \partial M$, entonces

$$0 < (\tau_{X_p}\omega_p)(v_2, \ldots, v_n) = \omega_p(X_p, v_2, \ldots, v_n).$$

Así, $(X_p, v_2, \ldots, v_n)$ representa la orientación de $p \in M$. De forma similar, se prueba la otra implicación. □

Ejemplo 26. *La proposición anterior, permite encontrar una orientación de la frontera de $\mathcal{H}^n$. Sean $\omega = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ la orientación estándar de $\mathcal{H}^n$ y el campo vectorial suave $-\partial/\partial x^n$ que apunta hacia afuera en $\partial\mathcal{H}^n$. Entonces,*

$$\begin{aligned}
\tau_{-\partial/\partial x^n}(\omega) &= -\tau_{\partial/\partial x^n}(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) \\
&= -\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} dx^i(\partial/\partial x^n)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n\right) \\
&= (-1)^n dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1},
\end{aligned}$$

donde el símbolo $\widehat{}$ sobre dx^i significa que dx^i es omitido en el producto wedge. A continuación, algunos ejemplos:

i) la orientación de $\partial\mathcal{H}^1 = \{0\}$ viene dada por -1;

ii) la orientación de $\partial\mathcal{H}^2$ es dx^1, la cual coincide con la orientación en la recta real;

iii) por ultimo, la orientación de $\partial\mathcal{H}^3$ está dada por $-dx^1 \wedge dx^2$, la cual determina una orientación en el plano (en el sentido de las manecillas del reloj).

4.3. Integración

Para introducir el concepto de integración de formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$ será de importancia teoría clásica de integración de Riemann, la cual puede ser consultada en [1].

4.3.1. Integración de formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$

Sean $x^1, \ldots, x^n$ las coordenadas estándar en $\mathbb{R}^n$, cada $n-$forma en $\mathbb{R}^n$ es posible identificarla con una función, ya que, si ω es una $n-$forma en $\mathbb{R}^n$, existe una única función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Recíprocamente, cada función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ determina una única $n-$forma $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$.

Definición 25. *Sea $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ una $n-$forma C^∞ en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ con coordenadas estándar $x^1, \ldots, x^n$. La integral de ω sobre un subconjunto $A \subset U$ es definida como la integral de Riemann de f sobre A. Esto es,*

$$\int_A \omega = \int_A f(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n := \int_A f(x) dx^1 \cdots dx^n,$$

si la integral existe.

Es importante resaltar que en la anterior definición se debe tener en cuenta el orden de los covectores dx^i. Por ejemplo si $\eta = f(x)dx^2 \wedge dx^1$ es una 2-forma sobre $A \subset \mathbb{R}^2$, entonces

$$\int_A \eta = \int_A -f(x)dx^1 \wedge dx^2 = -\int_A f(x)dx^1 \wedge dx^2 = -\int_A f(x)dx^1 dx^2.$$

Comportamiento de la integral frente a un cambio de variables

Se puede observar que la integral de una $n-$forma $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ se transforma bajo un cambio de variables determinado por un difeomorfismo $T : V \subset \mathbb{R}^n \to U \subset \mathbb{R}^n$. Como antes, sean $x^1, \ldots, x^n$ las coordenadas estándar en U y $y^1, \ldots, y^n$ las coordenadas estándar en V. En este sistema, la $i-$ésima componente de T viene dada por $T^i = x^i \circ T = T^*(x^i)$. Si $J(T)$ denota la matriz jacobiana de T, por Proposición 14, tenemos que

$$dT^1 \wedge \cdots \wedge dT^n = det[J(T)]dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n.$$

Ahora, teniendo en cuenta las propiedades del pullback sobre formas diferenciales y la conmutatividad del pullback con la derivada exterior, se obtiene que

$$\begin{aligned}\int_V T^*\omega &= \int_V T^*(f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) \\ &= \int_V (f \circ T)(dT^*x^1 \wedge \cdots \wedge dT^*x^n) \\ &= \int_V (f \circ T)(dT^1 \wedge \cdots \wedge dT^n) \\ &= \int_V (f \circ T)det[J(T)]dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n.\end{aligned} \tag{4.2}$$

De otro lado, por la fórmula de cambio de variables para la integral de Riemann,

$$\int_U \omega = \int_U f dx^1 \cdots dx^n = \int_V (f \circ T)|det[J(T)]|dy^1 \cdots dy^n.$$

De aquí y (4.2), se sigue que

$$\int_V T^*\omega = \pm \int_U \omega,$$

donde el signo se escoge dependiendo del signo del determinante. Lo anterior muestra que la integral de una $n-$forma no es un invariante bajo difeomorfismos de V en U. Sin embargo, es claro que si el difeomorfismo preserva orientación,

$$\int_V T^*\omega = \int_U \omega. \tag{4.3}$$

4.3.2. Integración de formas diferenciales en variedades

La definición de integral de formas sobre una variedad diferenciable $n-$dimensional, presenta algunas características distintivas, tales como

i) la variedad M debe ser orientable;

ii) como en el caso de $\mathbb{R}^n$, solo podremos integrar $n-$formas;

iii) las $n-$formas "admisibles"deben tener soporte compacto.

Sea M una variedad orientada $n-$dimesional con un atlas orientado $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, el cual determina una orientación de M, y sea $\Omega_c^k(M)$ el espacio vectorial de $k-$formas C^∞ con soporte compacto en M.

Si (U, ϕ) es una carta en el atlas orientado y $\omega \in \Omega_c^n(U)$, entonces, como $\phi : U \to \phi(U)$ es un difeomorfismo, se tiene que $(\phi^{-1})^*\omega$ es una $n-$forma con soporte compacto en el subconjunto abierto $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Se define la integral de ω sobre U por

$$\int_U \omega := \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*\omega.$$

La definición anterior es independiente de la elección de ϕ. En efecto, si (U, ψ) es otra carta, entonces por la Definición 20, $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U) \to \phi(U)$ es un difeomorfismo que preserva orientación. Luego, por (4.3), se tiene que

$$\int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*\omega = \int_{\psi(U)} (\phi \circ \psi^{-1})^*(\phi^{-1})^*\omega = \int_{\psi(U)} (\psi^{-1})^*\omega.$$

A continuación se extendiende el concepto de integración a $n-$formas sobre toda la variedad. Para ello es importante las siguientes observaciones:

i) Sean $\omega \in \Omega_c^n(M)$ y $\{\rho_\alpha\}$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}$. Ya que la colección de soportes de ρ_α es una familia localmente finita (cada punto de la variedad pertenece a máximo un número finito de soportes), entonces para cada $x \in M$, $(\rho_\alpha\omega)(x)$ es cero excepto para un número finito de indices α. Luego, ω puede escribirse en la forma $\omega = \sum \rho_\alpha\omega$. Más aún, como ω tiene soporte compacto, las funciones $\rho_\alpha\omega$ son idénticamente cero en M excepto posiblemente para un número finito de índices α.

ii) Como el soporte de una función es cerrado y $supp(\rho_\alpha\omega) \subset supp\,\rho_\alpha \cap supp\,\omega$, entonces $supp(\rho_\alpha\omega)$ es compacto, por ser un subconjunto cerrado de un compacto.

De las observaciones anteriores, dado un índice α, $\rho_\alpha\omega$ es una $n-$forma con soporte compacto contenido en U_α y por lo tanto la integral $\int_{U_\alpha} \rho_\alpha\omega$ está bien definida. Además, existe máximo un número finito de tales integrales que no son cero. Con esto, definimos la integral de ω sobre M como la suma finita

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha\omega.$$

La definición anterior es independiente del atlas orientado y de la partición de la unidad subordinada a este cubrimiento. Sean $\{V_\beta\}$ otro atlas orientado de M que determina la misma orientación del atlas $\{U_\alpha\}$ y $\{\gamma_\beta\}$ una partición de la unidad subordinada a este cubrimiento. Por lo tanto, $\big\{(U_\alpha \cap V_\beta, \phi_\alpha|_{U_\alpha \cap V_\beta})\big\}$ y $\big\{(U_\alpha \cap V_\beta, \tau_\beta|_{U_\alpha \cap V_\beta})\big\}$ son también atlas de M, los cuales determinan la misma orientación. Así, ya que ω puede expresarse como $\omega = \sum_\beta \gamma_\beta \omega$, se tiene que

$$\sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \sum_\beta \gamma_\beta \omega = \sum_\alpha \sum_\beta \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \gamma_\beta \omega = \sum_\alpha \sum_\beta \int_{U_\alpha \cap V_\beta} \rho_\alpha \gamma_\beta \omega,$$

ya que el soporte de la función $\rho_\alpha \gamma_\beta$ está contenido en $U_\alpha \cap V_\beta$. Por simetría se obtiene que

$$\sum_\beta \int_{V_\beta} \gamma_\beta \omega = \sum_\alpha \sum_\beta \int_{U_\alpha \cap V_\beta} \rho_\alpha \gamma_\beta \omega.$$

De aquí, la integral de una $n-$forma con soporte compacto sobre una variedad orientable M está bien definida.

Proposición 23. *Sea ω una $n-$forma con soporte compacto en una variedad orientada M. Si $-M$ denota la misma variedad M, pero con orientación opuesta, entonces*

$$\int_{-M} \omega = -\int_M \omega.$$

Demostración. Por la definición de integral en variedades, es suficiente mostrar la prueba en una carta $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ de un atlas orientado de M y para $\tau \in \Omega_c^n(U)$. Es decir, es suficiente probar que si $(U, \tilde{\phi}) = (U, -x^1, x^2, \ldots, x^n)$ es una carta con orientación opuesta a (U, ϕ), entonces

$$\int_{\tilde{\phi}(U)} (\tilde{\phi}^{-1})^* \tau = -\int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* \tau.$$

Dadas $r^1, \ldots, r^n$ las coordenadas estándar en $\mathbb{R}^n$, se sabe que $r^i = x^i \circ \phi^{-1}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. En el caso de la función $\tilde{\phi}$, se tiene la misma equivalencia, excepto para $i = 1$, caso en el cual tenemos $r^1 = -x^1 \circ \tilde{\phi}^{-1}$. Como en la carta (U, ϕ), τ puede expresarse en la forma $\tau = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, para alguna función diferenciable f, entonces

$$\begin{aligned}(\tilde{\phi}^{-1})^* \tau &= (\tilde{\phi}^{-1})^* (f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) \\ &= (f \circ \tilde{\phi}^{-1}) d(x^1 \circ \tilde{\phi}^{-1}) \wedge d(x^2 \circ \tilde{\phi}^{-1}) \wedge \cdots \wedge d(x^n \circ \tilde{\phi}^{-1}) \\ &= -(f \circ \tilde{\phi}^{-1}) dr^1 \wedge dr^2 \wedge \cdots \wedge dr^n.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Similarmente, se obtiene

$$(\phi^{-1})^* \tau = (f \circ \phi^{-1}) dr^1 \wedge \cdots \wedge dr^n.$$

Por otro lado, ya que $\phi \circ \tilde{\phi}^{-1} : \tilde{\phi}(U) \to \phi(U)$ es un difeomorfismo con determinante jacobiano $|J(\phi \circ \tilde{\phi}^{-1})| = |-1| = 1$, se sigue de (4.4) que,

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{\phi}(U)} (\tilde{\phi}^{-1})^* \tau &= - \int_{\tilde{\phi}(U)} (f \circ \tilde{\phi}^{-1}) dr^1 \cdots dr^n \\
&= - \int_{\tilde{\phi}(U)} (f \circ \phi^{-1})(\phi \circ \tilde{\phi}^{-1}) |J(\phi \circ \tilde{\phi}^{-1})| dr^1 \cdots dr^n \\
&= - \int_{\phi(U)} (f \circ \phi^{-1}) dr^1 \cdots dr^n \\
&= - \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* \tau.
\end{aligned}$$

□

Observación 27. *La integral de $n-$formas sobre variedades diferenciables con frontera se define de manera similar.*

De la definición de integral de $n-$formas, se hace en general difícil realizar el cálculo de una integral, dado que se necesita conocer una partición de la unidad subordinada a un atlas, lo cual no es fácil determinar. Por tal razón, se hace necesario introducir el concepto de integral sobre un conjunto parametrizado.

Definición 26. *Un conjunto parametrizado en una variedad orientada $n-$dimensional M es un subconjunto $A \subseteq M$ junto con una función suave $F : D \to M$, donde $D \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio de integración compacto, tal que $A = F(D)$ y F restringido a $int(D)$ es un difeomorfismo que preserva orientación. La función F es llamada una parametrización de A.*

Observación 28. *Sean A un conjunto parametrizado sobre una variedad diferenciable $n-$dimensional orientada M y $F : D \to M$, $G : \widetilde{D} \to M$ dos parametrizaciones de A. Si ω es una $n-$forma, no necesariamente con soporte compacto, puede ser probado [6, Página 356] que*

$$\int_D F^* \omega = \int_{\widetilde{D}} G^* \omega.$$

Así, tiene sentido definir la integral de ω sobre A por

$$\int_A \omega = \int_D F^* \omega,$$

donde $F : D \to M$ es cualquier parametrización de $A \subseteq M$. Esta definición coincide con la dada anteriormente en el caso en que A es una variedad, ver [6]. De esta manera, la integral de una $n-$forma sobre una variedad orientable M se puede calcular de forma mas sencilla, si M se escribe apropiadamente como unión disyunta de conjuntos parametrizados.

Se ilustra la observación anterior al calcular la integral de una $2-$forma sobre la esfera S^2.

Ejemplo 27. *Sea ω la 2-forma en la esfera unitaria $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ dada por*

$$\omega = x\,dy \wedge dz - y\,dx \wedge dz + z\,dx \wedge dy.$$

Calcular $\int_{S^2} \omega$. Una parametrización en coordenadas esféricas de la esfera S^2 viene dada por

$$F(\varphi, \theta) = (\sin\varphi\cos\theta,\ \sin\varphi\sin\theta,\ \cos\varphi),$$

donde $D = \{(\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2 | \quad 0 \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le \theta \le 2\pi\}$. Ya que

$$F^*x = \sin\varphi\cos\theta, \qquad F^*y = \sin\varphi\sin\theta \qquad y \qquad F^*z = \cos\varphi,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} F^*dx &= \cos\varphi\cos\theta\,d\varphi - \sin\varphi\sin\theta\,d\theta; \\ F^*dy &= \cos\varphi\sin\theta\,d\varphi + \sin\varphi\cos\theta\,d\theta; \\ F^*dz &= -\sin\varphi\,d\varphi. \end{aligned}$$

De aquí, por propiedades del pullback, se sigue que

$$\begin{aligned} F^*\omega &= F^*(x\,dy \wedge dz - y\,dx \wedge dz + z\,dx \wedge dy) \\ &= F^*x(F^*dy \wedge F^*dz) - F^*y(F^*dx \wedge F^*dz) + F^*z(F^*dx \wedge F^*dy) \\ &= (\sin\varphi\cos\theta)[(\cos\varphi\sin\theta\,d\varphi + \sin\varphi\cos\theta\,d\theta) \wedge (-\sin\varphi\,d\varphi)] \\ &\quad - (\sin\varphi\sin\theta)[(\cos\varphi\cos\theta\,d\varphi - \sin\varphi\sin\theta\,d\theta) \wedge (-\sin\varphi\,d\varphi)] \\ &\quad + (cos\varphi)[(\cos\varphi\cos\theta\,d\varphi - \sin\varphi\sin\theta\,d\theta) \wedge (\cos\varphi\sin\theta\,d\varphi + \sin\varphi\cos\theta\,d\theta)] \\ &= -\sin^3\varphi\cos^2\theta\,d\theta \wedge d\varphi - \sin^3\varphi\sin^2\theta\,d\theta \wedge d\varphi \\ &\quad - \cos^2\varphi\sin\varphi\sin^2\theta\,d\theta \wedge d\varphi + \cos^2\varphi\sin\varphi\cos^2\theta\,d\varphi \wedge d\theta \\ &= \sin^3\varphi\,d\varphi \wedge d\theta + \cos^2\theta\sin\varphi\,d\varphi \wedge d\theta. \end{aligned}$$

De aquí, $F^*\omega = \sin\varphi\,d\varphi \wedge d\theta$ en D. Así,

$$\int_{S^2} \omega = \int_D F^*\omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi d\theta = 4\pi.$$

4.3.3. Teorema de Stokes

Para la prueba del Teorema de Stokes en variedades, se asume que en $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{H}^n$ el teorema se cumple. Para ilustrar, se hace la prueba en el caso $n = 2$, el caso general sigue la misma técnica, ver [6].

Sean x, y las coordenadas estándar en $\mathcal{H}^2$ y la orientación determinada por la 2-forma $dx \wedge dy$, la cual determina la orientación estándar en la frontera, dada por $\tau_{-\partial/\partial y}(dx \wedge dy) = dx$, donde τ denota la contracción definida en la Definición 24. Sea

$$\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy$$

una $1-$forma suave, donde f, g tienen soporte compacto en $\mathcal{H}^2$. Existe $a > 0$ tal que los soportes de f y g están contenidos en el rectángulo $[-a, a] \times [0, a]$, lo cual implica que el soporte de las derivadas parciales de f, g también están contenidos en $[-a, a] \times [0, a]$. Entonces, como se ha visto antes, $d\omega$ está dada por

$$d\omega = (g_x - f_y)dx \wedge dy,$$

de lo cual se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{H}^2} d\omega &= \int_{\mathcal{H}^2} g_x \, dxdy - \int_{\mathcal{H}^2} f_y \, dxdy \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty g_x \, dxdy - \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty f_y \, dydx \\ &= \int_0^a \int_{-a}^a g_x \, dxdy - \int_{-a}^a \int_0^a f_y \, dydx. \end{aligned} \tag{4.5}$$

De aquí, como

$$\int_{-a}^a g_x(x,y)\, dx = g(x,y)\Big|_{-a}^a = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_0^a f_y(x,y)\, dy = f(x,y)\Big|_0^a = -f(x,0),$$

entonces

$$\int_{\mathcal{H}^2} d\omega = \int_{-a}^a f(x,0)\, dx.$$

Por otro lado, como la frontera de $\mathcal{H}^2$ es el eje x y dy es cero en la frontera, se tiene que $\omega = f(x,0)\, dx$ en la frontera. Por lo tanto

$$\int_{\partial\mathcal{H}^2} \omega = \int_{-a}^a f(x,0)\, dx,$$

lo cual prueba el teorema de Stokes en $\mathcal{H}^2$. La demostración del teorema de Stokes en $\mathbb{R}^2$ sigue el mismo argumento.

Ahora están las condiciones para probar el teorema principal de esta sección. Por convención, dada M una variedad $n-$dimensional orientada con frontera ∂M y ω una $(n-1)-$forma sobre M, se expresa la integral $\int_{\partial M} \imath^*\omega$ por $\int_{\partial M} \omega$, donde $\imath : \partial M \hookrightarrow M$ es la función inclusión.

Teorema 4 (Teorema de Stokes en variedades)**.** *Sea ω una $(n-1)-$forma con soporte compacto sobre una variedad orientada $n-$dimensional con frontera M. Entonces*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \tag{4.6}$$

Demostración. Se supone que ω tiene soporte compacto en una carta (U, ϕ). Entonces por la definición de integral, conmutatividad del pullback con la derivada exterior y como $(\phi^{-1})^*\omega$ tiene soporte compacto en $\phi(U) \subset \mathcal{H}^n$, se tiene que

$$\int_M d\omega = \int_{\mathcal{H}^n} (\phi^{-1})^* d\omega = \int_{\mathcal{H}^n} d\left((\phi^{-1})^*\omega\right).$$

Como el Teorema de Stokes es válido en $\mathcal{H}^n$, entonces se cumple que

$$\int_{\mathcal{H}^n} d\left((\phi^{-1})^*\omega\right) = \int_{\partial\mathcal{H}^n} (\phi^{-1})^*\omega.$$

De aquí, por ser $\phi|_{U\cap\partial M} : U \cap \partial M \to \phi(U) \cap \partial\mathcal{H}^n$ un difeomorfismo que preserva orientación, se sigue que

$$\int_{\partial\mathcal{H}^n} (\phi^{-1})^*\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

de donde se concluye (4.6) en el caso que ω tenga soporte compacto en una carta.

Para probar el caso general, sea $\{\rho_\alpha\}$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}$. Entonces, para todo α, la función $\rho_\alpha\omega$ es una $(n-1)-$forma con soporte compacto contenido en U_α. Además, como fue mencionado anteriormente, $\rho_\alpha\omega$ es idénticamente cero, salvo posiblemente un número finito de índices α. Así,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} \omega &= \sum_\alpha \int_{\partial M} \rho_\alpha\omega \\
&= \sum_\alpha \int_M d(\rho_\alpha\omega) \\
&= \sum_\alpha \left(\int_M d\rho_\alpha \wedge \omega + \int_M \rho_\alpha \wedge d\omega \right) \\
&= \int_M d\left(\sum_\alpha \rho_\alpha\right) \wedge \omega + \int_M \left(\sum_\alpha \rho_\alpha\right) d\omega.
\end{aligned}$$

Como $\sum_\alpha \rho_\alpha = 1$, se obtiene (4.6). □

Ejemplo 28. *Una importante aplicación del Teorema de Stokes es el resultado clásico del Teorema de Green, el cual en* $\mathbb{R}^2$ *se obtiene como sigue. Sean* D *un dominio regular en el plano con frontera* ∂D *y* ω *la 1-forma* $P\,dx + Q\,dy$ *en* D*, donde* P *y* Q *son funciones reales suaves en* D*. Entonces,*

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

la cual es la fórmula clásica del Teorema de Green estudiada en cálculo en varias variables.

Ejemplo 29. *Sea* M *una variedad diferenciable con frontera. Si* ω *es una forma cerrada en* M*, entonces la integral de* ω *sobre* ∂M *es cero. En efecto,*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega = 0,$$

ya que $d\omega = 0$ *en* M*.*

Capítulo 5

Breve introducción a la forma de volumen

Las formas diferenciales tienen aplicaciones a diversas áreas de la matemática y en especial son muy útiles en geometría diferencial. Una de las tantas aplicaciones de lo desarrollado en este documento es en análisis geométrico, en el cual es esencial la integración sobre variedades Riemannianas. Vale la pena resaltar que la definición de integral es presentada para $n-$formas en variedades $n-$dimensionales y no así, para funciones de valor real que si pueden ser integradas en variedades Riemannianas mediante una forma diferencial particular que depende de la métrica, la cual es llamada forma de volumen Riemanniano. Se finaliza la presente monografía con una introducción a algunos conceptos asociados a esta temática.

5.1. Variedades Riemannianas y la forma de volumen

Sea M una variedad diferenciable. Una métrica Riemanniana en M es un 2-campo tensorial simétrico, suave y definido positivo en cada punto de M. La variedad M junto con una métrica Riemanniana g, se denomina una variedad Riemanniana, la cual será denotada por (M, g). De la definición es claro que si g es una métrica Riemanniana sobre M, entonces para cada $p \in M$, g_p es un producto interno en T_pM, tal y como es mencionado en [2].

En coordenadas locales $(U, x^1, \ldots, x^n)$, una métrica Riemanniana se expresa en la forma

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j = g_{ij} dx^i \, dx^j,$$

donde $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g_{ji}$.

Observación 29. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana y $p \in M$. Dado un entorno coordenado $(U, x^1, \ldots, x^n)$ de p, el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt aplicado al marco coordenado $[(\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n)]$ nos permite garantizar la existencia de un marco ortonormal $[(X_1, \ldots, X_n)]$ en cada punto $q \in U$.*

Proposición 24. *Sea (M, g) es una variedad Riemanniana orientada $n-$dimensional. Existe una única $n-$forma orientada ω en M tal que*

$$\omega(X^1, \dots, X^n) = 1, \tag{5.1}$$

para cada marco ortonormal local orientado de M.

Demostración. Dado que M es orientable, existe al menos una $n-$forma que no se anula en M. Para construir una de tal $n-$formas que satisfaga (5.1), se asume su existencia, denotada por ω y veamos que características debe cumplir. En particular, debe estar definida localmente.

Se toma un marco ortonormal local orientado $[(X_1, \dots, X_n)]$ y sea $(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ el marco dual correspondiente. Luego, en este entorno local, ω se expresa en la forma

$$\omega = f\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^n.$$

Por lo tanto, por (5.1) y (1.1), se obtiene que $f = 1$, de donde ω presenta la expresión local

$$\omega = \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^n. \tag{5.2}$$

Esto muestra que ω está determinada de manera única.

La existencia se prueba a continuación. Sea $[(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_n)]$ otro marco ortonormal local orientado y $(\widetilde{\alpha}^1, \dots, \widetilde{\alpha}^n)$ el marco dual correspondiente. Se define la $n-$forma

$$\widetilde{\omega} = \widetilde{\alpha}^1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{\alpha}^n$$

y sea $\widetilde{X}_i = \sum_j a^i_j X_j$. Ya que los marcos son ortonormales y ambos determinan la misma orientación en M, se tiene que la matriz cambio de base $A = [a^i_j]$ satisface $det[A] = 1$. De aquí,

$$\omega(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_n) = det[\alpha^j(\widetilde{X}_i)] = det[A] = 1 = \widetilde{\omega}(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_n),$$

de lo cual se concluye que $\omega = \widetilde{\omega}$. De esta manera se puede definir la $n-$forma ω en un entorno de cualquier punto $p \in M$ por (5.2), con respecto a cualquier marco ortonormal local orientado. Claramente esta $n-$forma satisface (5.1). $\square$

La $n-$forma anterior es llamada forma de volumen Riemanniano, la cual es denotada por dV_g. La siguiente proposición muestra como se expresa dV_g en un entorno coordenado.

Proposición 25. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana orientada. Dado $(U, x^1, \dots, x^n)$ un entorno coordenado, la forma de volumen Riemanniano se expresa en la forma*

$$dV_g = \sqrt{det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

donde g_{ij} son las componentes de g en éstas coordenadas.

Demostración. Sea $(U, x^1, \ldots, x^n)$ un entorno coordenado de p, entonces en éstas coordenadas $dV_g = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ para alguna función suave $f > 0$; encontremos f. Dado $[(X_1, \ldots, X_n)]$ un marco ortonormal local orientado en un entorno de p y $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ su marco dual asociado, entonces

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_j a_i^j X_j,$$

para algunas funciones a_i^j. Luego,

$$\begin{aligned} f = dV_g\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) &= \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^n \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) \\ &= det\left[\alpha^j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right] \\ &= det[a_i^j]. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= g\left(\sum_k a_i^k\, X_k,\, \sum_l a_j^l\, X_l\right) \\ &= \sum_{k,l} a_i^k a_j^l\, g\left(X_k,\, X_l\right) \\ &= \sum_k a_i^k a_j^k, \end{aligned}$$

lo cual es la componente i, j de la matriz producto AA^T, donde $A = [a_i^j]$. Así,

$$det[g_{i,j}] = det[AA^T] = (det[A])^2\,,$$

de donde se sigue que $f = det[A] = \pm\sqrt{det[g_{ij}]}$. Como se ha supuesto que los marcos determinan la misma orientación, se obtiene $f = \sqrt{det[g_{ij}]}$, lo cual completa la prueba. □

Observación 30. *Sea M una variedad diferenciable $n-$dimensional. Es importante recordar que solo es posible integrar $n-$formas, sin embargo, si se está interesado en integrar funciones de valor real con soporte compacto y M es una variedad Riemanniana orientable, tiene sentido definir la integral de f sobre M como la integral de la $n-$forma $f dV_g$, la cual tiene soporte compacto en M. Cuando M es compacta, se define el volumen de M por $Vol(M) = \int_M dV_g$.*

Conclusiones

En el presente documento se desarrolló la teoría básica de formas en variedades diferenciables, extendiendo los conceptos de diferenciación e integración de funciones en $\mathbb{R}^n$ al contexto de variedades; el lenguaje de formas diferenciales es el mas adecuado para este fin, además de ser importante para la extensión de otros conceptos de interés, tanto en matemáticas como en otras áreas, a variedades diferenciales. Destacamos los conceptos de electricidad y magnetismo.

A continuación se muestran resultados relevantes del documento:

- Detalladamente se describe el espacio de $k-$formas diferenciales $\Omega^k(M)$ sobre una variedad diferenciable M; se demuestra que es un espacio vectorial y se presenta de manera explícita una base para este espacio.

- Tal como se desarrolló en $\mathbb{R}^n$, los conceptos de producto exterior, derivada exterior y pullback de formas diferenciales, se extendieron a variedades diferenciables.

- Se estudian diferentes caracterizaciones de orientacion de variedades diferenciables con o sin frontera, las cuales son usadas posteriormente para definir integración en variedades.

- Se presenta de manera clara la integral para $n-$formas diferenciales con soporte compacto sobre variedades diferenciables $n-$dimensionales orientadas y compactas.

- El Teorema de Stokes en variedades es formulado y probado, abordando todos los conceptos necesarios para este resultado.

- Se hace una muy breve introducción a variedades Rimannianas con el fin de mostrar la integración de funciones de valor real con soporte compacto, con respecto a la $n-$forma de volumen. Esta temática es de gran interés para futuros trabajos de investigación.

Bibliografía

[1] L. W. Tu, An Introduction to Manifolds, second edition, 2007, Springer-Verlag.

[2] W. Kuhnel, Differential Geometric: Curves-Surfaces-Manifolds, second edition, 2003, American Mathematical Society.

[3] Z. A. Fernando, Una introducción al gradiente, la divergencia y el operador laplaciano sobre variedades Riemannias, 2011, Universidad del Cauca.

[4] N. Herstein, Álgebra Moderna, primera edición, 1970 Editorial Trillas, S.A.

[5] J. B. Fraleigh, Álgebra Abstracta, tercera edición, 1988, Addison-Wesley Iberoamericana, S.A.

[6] J. M. Lee, Introduction to Smooth Manifolds, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 218, 2003, Springer-Verlag, New York.

[7] M. P. Do Carmo, Riemannian Geometric, Instituto de Matematica Pura e Aplicada second edition, 1993, Rio de Janeiro.