UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE QUÍMICA

P.E.L: INGENIERO QUÍMICO

U.A: CÁLCULO AVANZADO

Unidad II

Cálculo Diferencial de Funciones de Varias Variables

Material didáctico

Modalidad: Solo visión proyectable (diapositivas)

Responsable de la Elaboración:
DRA. SANDRA LUZ MARTÍNEZ VARGAS

Septiembre de 2015

“OBJETIVO DE LA UA DE CÁLCULO AVANZADO”

Aplicar elementos de funciones y de cálculo de diversas variables para describir modelos matemáticos, que permitan plantear, analizar y solucionar problemas matemáticos –en forma analítica y utilizar TIC y software especializado-, para el entendimiento posterior de modelos de ciencias, entre otros; caracterizando el trabajo en equipo bajo un marco de identidad profesional, propiciando la equidad de género y buenas prácticas en el desarrollo de proyectos y en la solución de problemas.

“GUÍA PARA LA UTILIZACIÓN DEL MATERIAL DE APOYO”

- Este paquete contiene 97 diapositivas que tienen como propósito que los estudiantes de la UA de Cálculo Avanzado, cuenten con un material de apoyo para la Unidad II Cálculo Diferencial de Funciones de Varias Variables, para facilitar la comprensión de los temas de dicha unidad.

- En este material se incluyen los temas que corresponde a lo propuesto en el programa de la UA, con la extensión que se solicita en éste. En cada tema se incluyen las definiciones correspondientes y se incluyen además los axiomas y ecuaciones correspondientes, favorecer el entendimiento de los temas.

- El material que se presenta constituye un apoyo para el docente que tenga la oportunidad de impartir la unidad de aprendizaje de Cálculo Avanzado.

Contenido

- Conceptos Básicos
    - Función de varias variables
    - Dominio y rango
    - Representación gráfica de una función de varias variables
    - Curva de nivel y superficie de nivel
- Límite y Continuidad
- Derivación
- Diferenciales
- Derivadas Direccionales
- Valores Extremos

Funciones de Varias Variables

Introducción

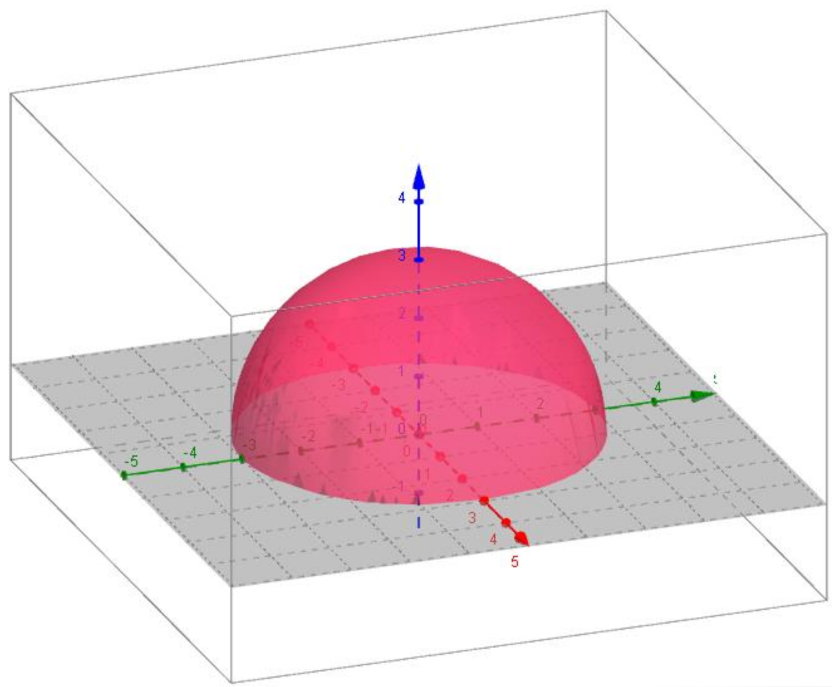
- En muchos problemas aparecen varias variables independientes en una función, estas funciones tienen muchas aplicaciones en la ingeniería química. Por ejemplo, la temperatura de un punto P en el espacio, esta depende de tres coordenadas rectangulares x,y,z del punto P; la transferencia de calor en un plano; el movimiento de un fluido; la velocidad de descarga de un fluido de un recipiente.

Funciones de Varias Variables

Función f de dos variables

Regla que asigna a cada par ordenado de números reales **(x,y)** de un conjunto **D** un número real único que se denota como **f(x,y).** El conjunto ***D*** es el dominio de **f** y su rango es el conjunto de valores que toma **f.**

$$\boldsymbol{f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}}$$



Funciones de más de una variable

Espacio numérico n-dimensional. Es el conjunto de todas las n-adas ordenadas de números reales y se denota por R^n.

Función de **n** variables es el conjunto de pares ordenadas de la forma **(P,w)** en el que dos pares ordenadas distintas cualesquiera NO TIENEN el mismo primer elemento **P.**

Si	$n = 1$	$P = x$
	$n = 2$	$P = (x,y)$
	$n = 3$	$P = (x, y, z)$

Dominio

Conjunto de valores de ***x*** y ***y*** [variables independientes] para los cuales existe la función.

Rango

Conjunto de valores que toma f(x,y) [variable dependiente]

Es decir, el conjunto de todos los puntos P admisibles recibe el nombre de dominio de la función y el conjunto de todos los valores resultantes de w se denomina contradominio de la función.

Ejemplo

Determinar y graficar el dominio de la función.

$$A)\ f(x,y) = \sqrt{2x - y}$$

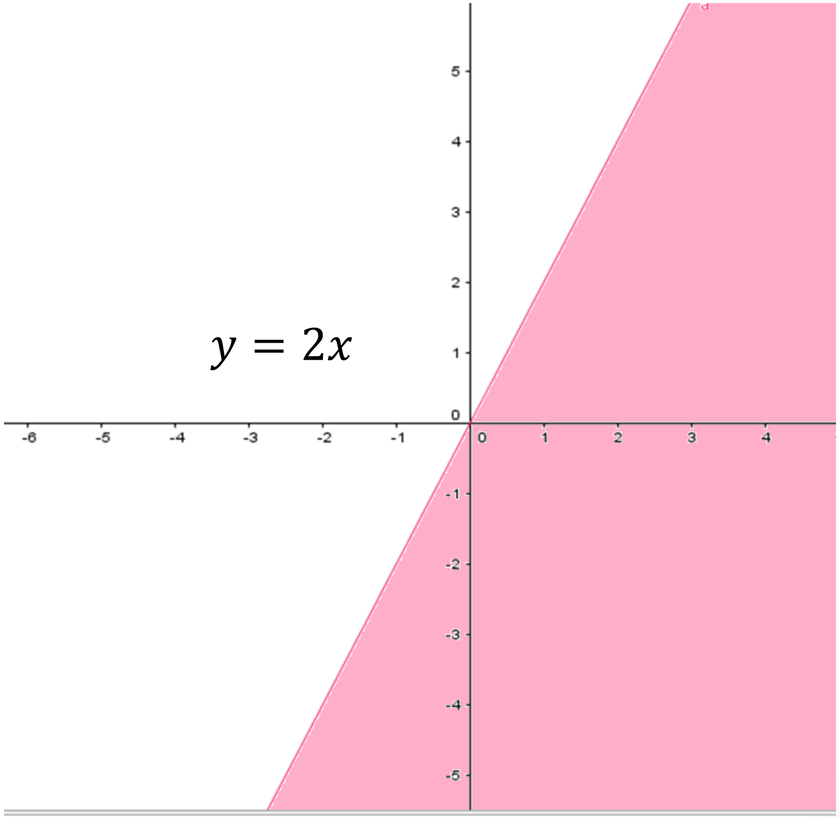
El dominio esta definido por:

$2x - y \geq 0$ o $y \leq 2x$

Entonces el Dominio de F es:

$\{(x,y) | y \leq 2x\}$

$y = 2x$



$B) f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

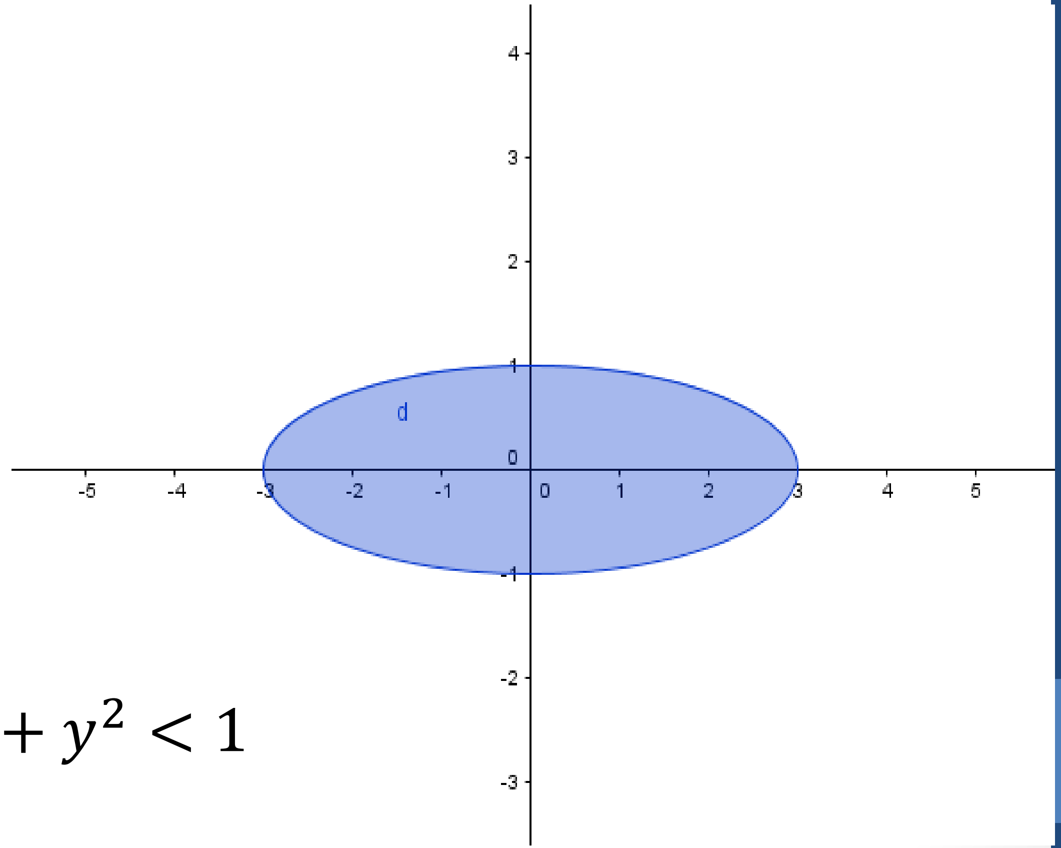
El dominio de la función está definido por:

$$9 - x^2 - 9y^2 > 0$$

$$\frac{1}{9}x^2 + y^2 < 1$$

Dominio:

$$\left\{(x, y) \middle| \frac{1}{9}x^2 + y^2 < 1\right\}$$



$$\frac{1}{9}x^2 + y^2 < 1$$

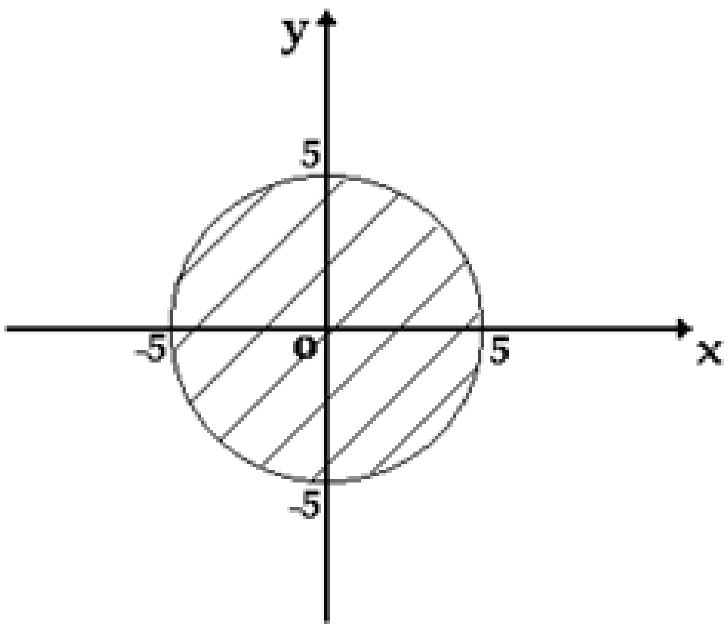
C) Sea la función f, de las dos variables x, y y, el conjunto de todos los pares ordenados de la forma (P,z) tales que

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

Determine dominio y contradominio

Dominio $(x^2 + y^2) \leq 25$

Contradominio $0 \leq \mathbf{z} \leq 5$



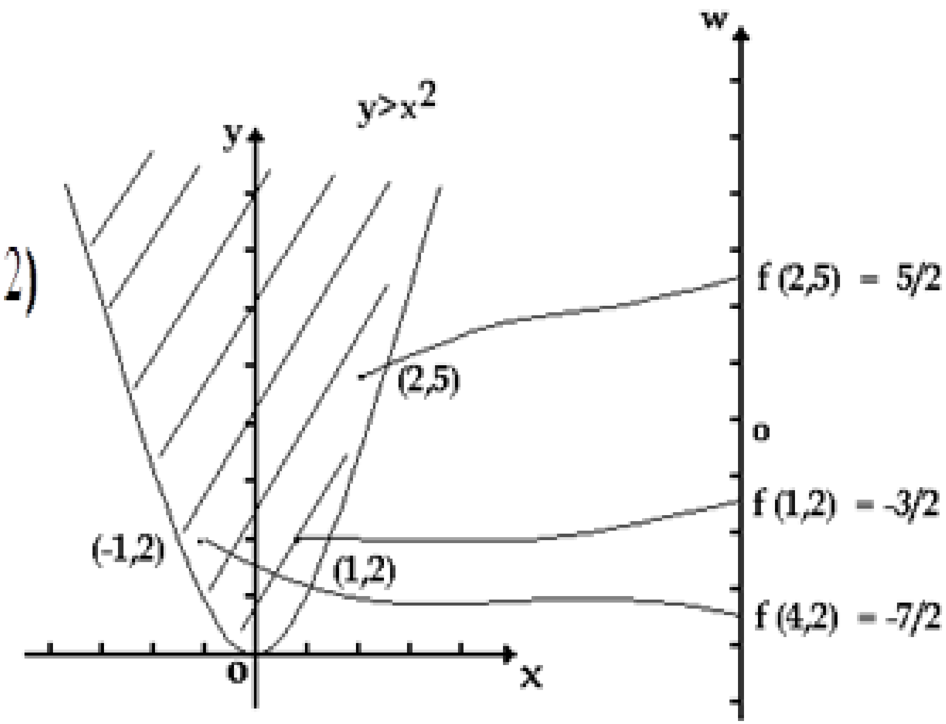
D) Sea
$$f(x,y)=\frac{xy-5}{2\sqrt{y-x^2}}$$

Encontrar el dominio D de f, esquematizar D y representar los números f(2,5), f(1,2) y f(-1.2) sobre un eje w.
Solución: El dominio D es el conjunto de todos los pares (x,y) tales que: $\mathbf{y - x^2 > 0}$

$$\mathbf{y > x^2}$$

$$z=(2,5)=\frac{(2)(5)-5}{2\sqrt{5-2^2}}=\frac{5}{2}$$

$(2,5,5/2)$



Ejercicios

Determina y grafiqua el dominio de la función y determina su contradominio

$$A)f(x,y) = \sqrt{2x - y}$$

$$B)f(x,y) = \sqrt{x + y}$$

$$C)f(x,y) = \sqrt{xy}$$

$$D)f(x,y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$$

$$E)f(x,y) = \frac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$$

Grado de una función polinomial

Una **función polinomial** de las variables **x** y **y** es una función **f** tal que **f(x,y)** es la suma de términos **$c\ x^n\ y^m$**

DONDE

c: número real

n y m: enteros no negativos.

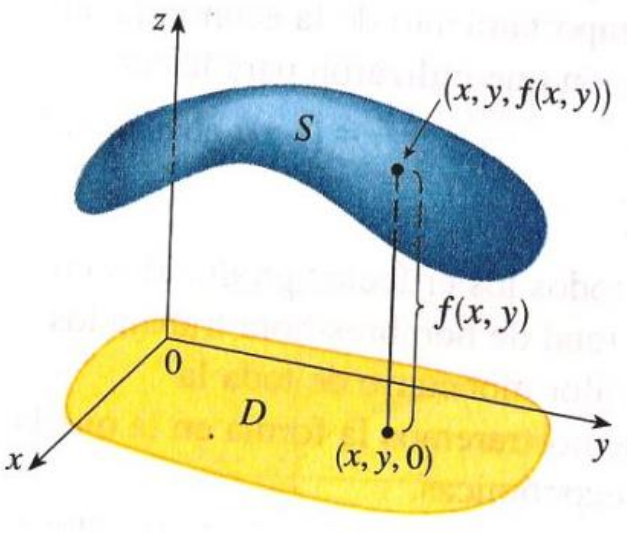
El grado de una función polinominal está determinado por la MAYOR SUMA de los exponentes de **x** y **y** que se tienen en los términos de la función.

$$f(x,y) = x^2 + y^3x + y + x^3 \qquad Grado\ cuatro$$

$$f(x,y) = x^3y^2 + y^3 + x^2 + y^4 \qquad Grado\ \ cinco$$

Representación gráfica de una función de dos variables

Si **f** es una función de DOS VARIABLES, la gráfica de **f** es el conjunto de todos los puntos **(x, y, z)** de R^3 para los cuales **(x,y)** es un punto del dominio de **f** y **z= f(x,y) y (x,y)** esta en D.



Ejemplo

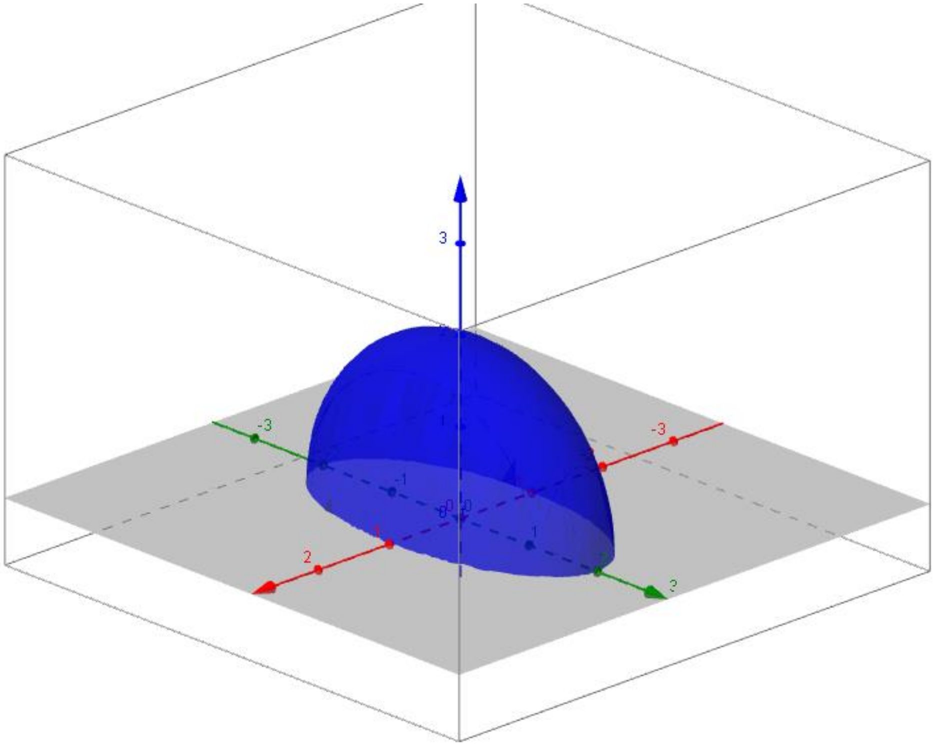
- Gráficar la siguiente función:

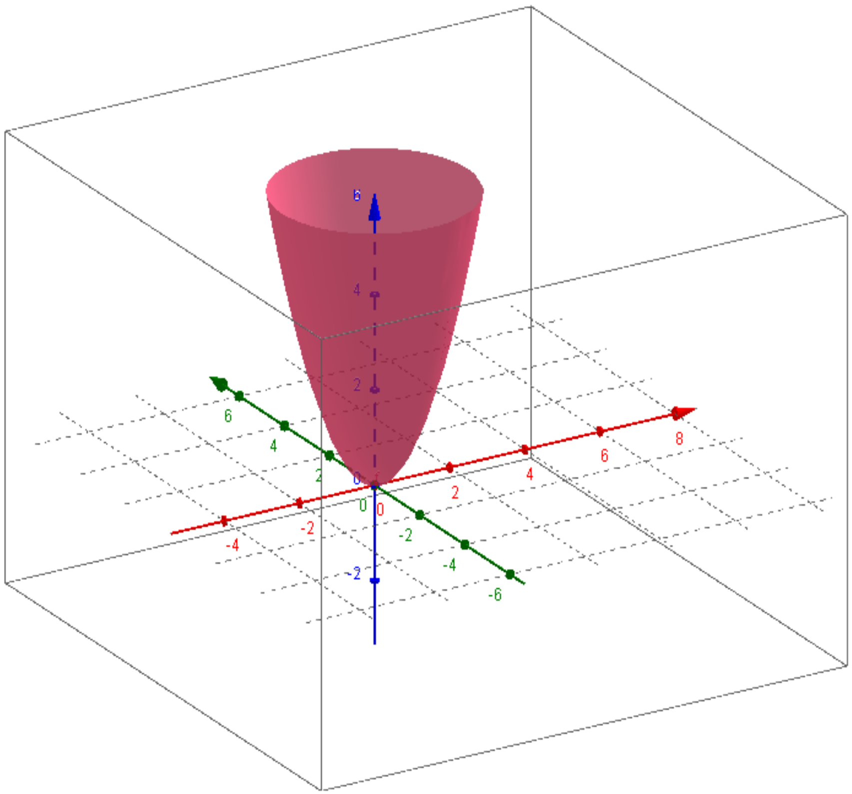
$$f(x,y) = \sqrt{4 - 4x^2 - y^2}$$

$$z^2 + 4x^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + \frac{z^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$$

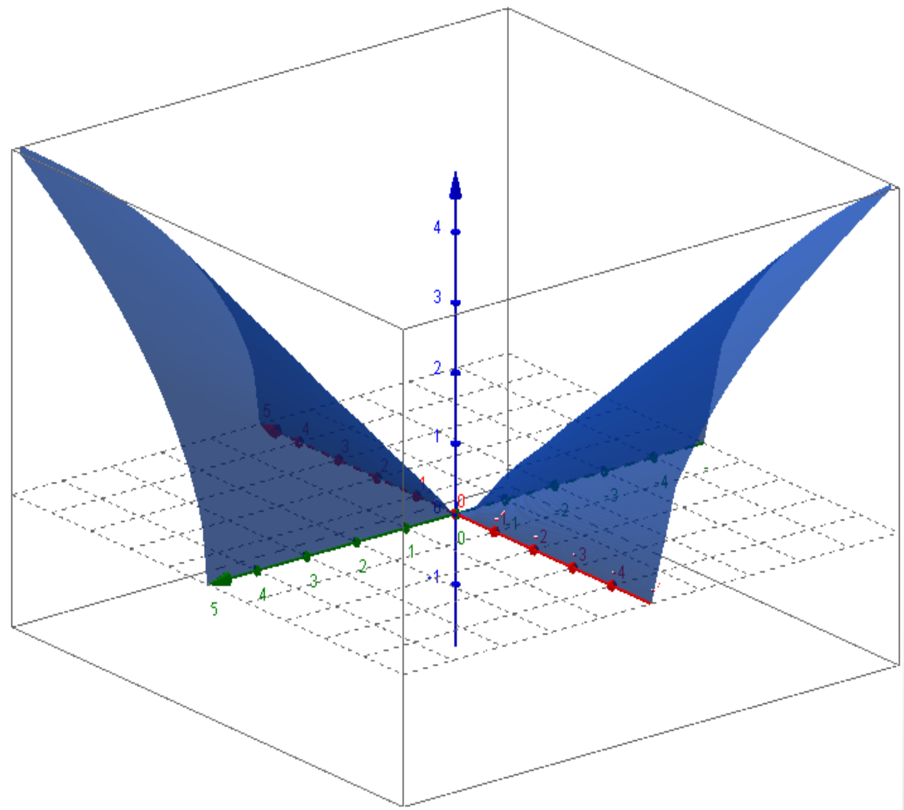
$$z \geq 0$$

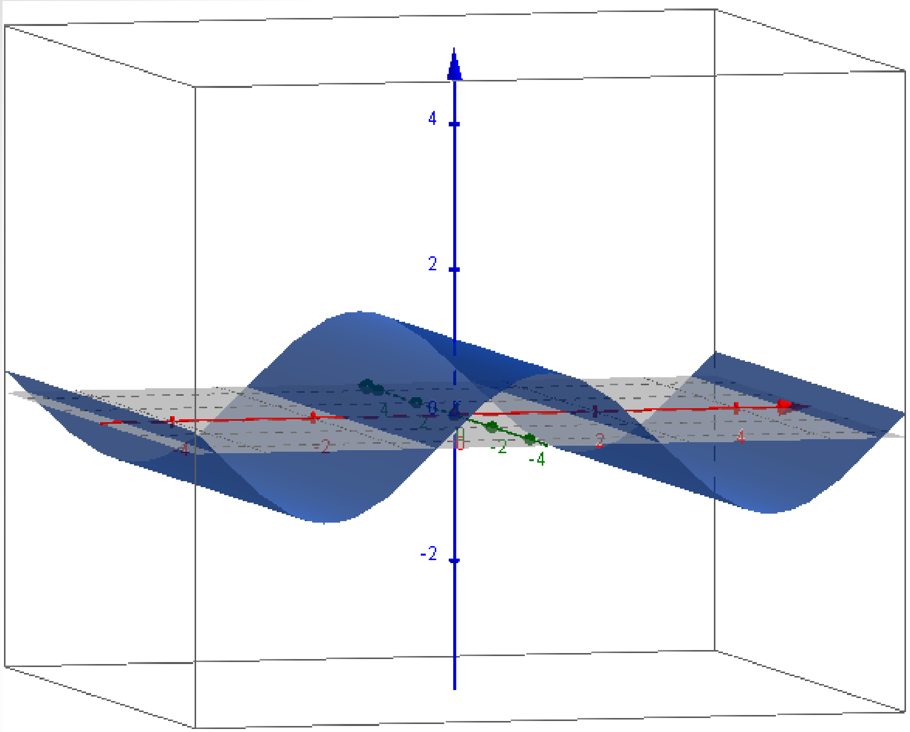




$$z = x^2 + y^2$$

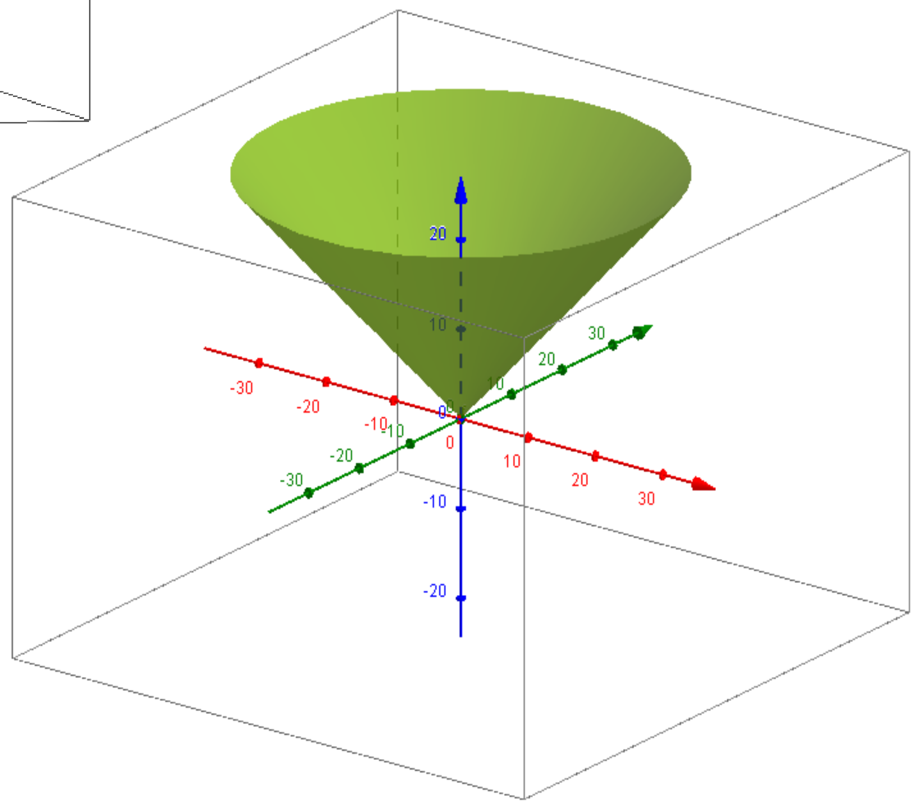
$$f(x, y) = \sqrt{xy}$$



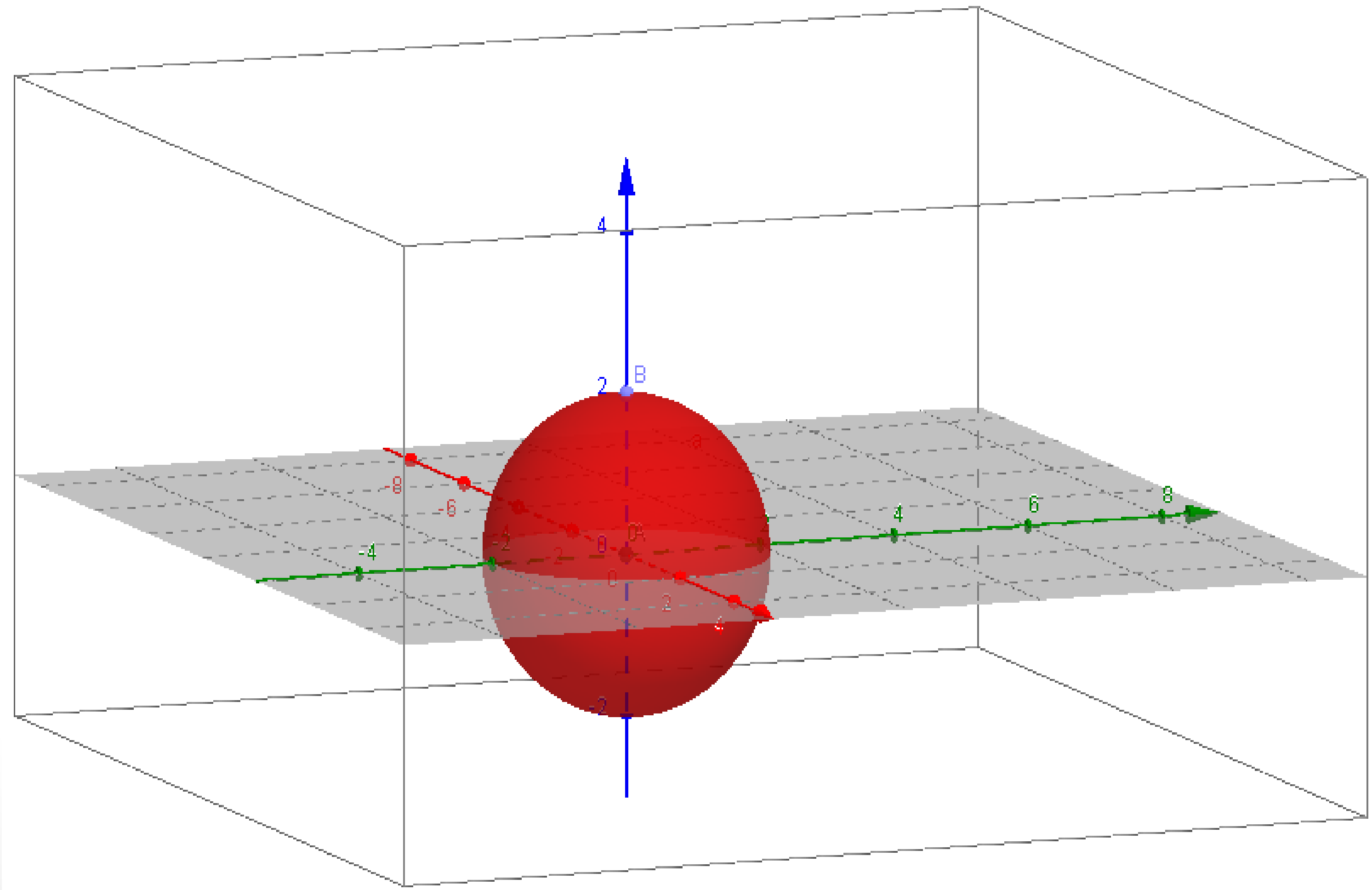


$$f(x,y) = Cos(x)$$

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$x^{2+}y^2 + z^2 = 4$$



Ejercicios

Trace la gráfica de la función

$A) f(x, y) = \ y^2 + 1$

$B) f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$

$C) f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 16x^2}$

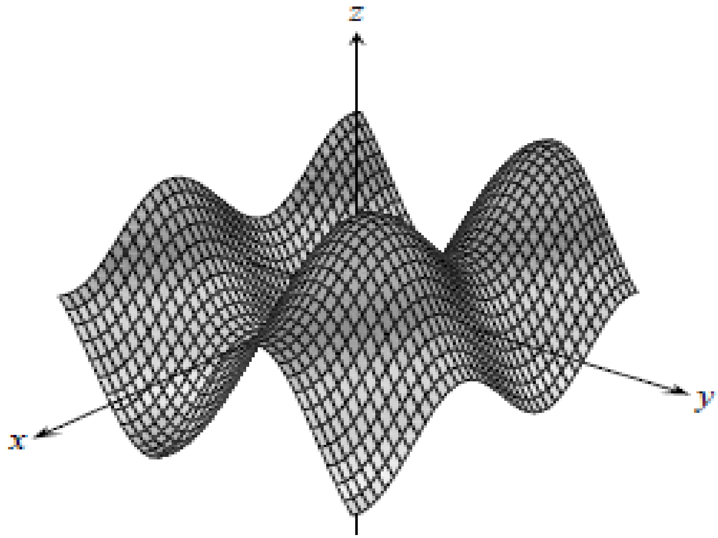
$D) f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$

$E) x + y^2 - 3z^2 = 1$

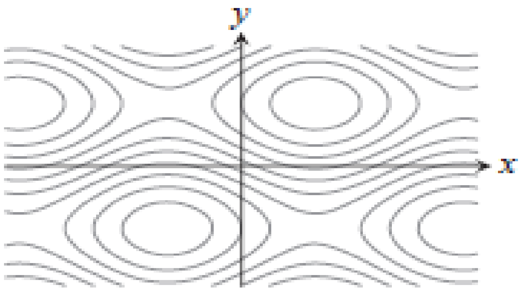
Curvas de Nivel

Son las curvas cuyas ecuaciones son ***f(x,y)=K*** donde **K** es una constante (en el rango de f).

Señala donde tiene una altura **k** la gráfica de **f**.

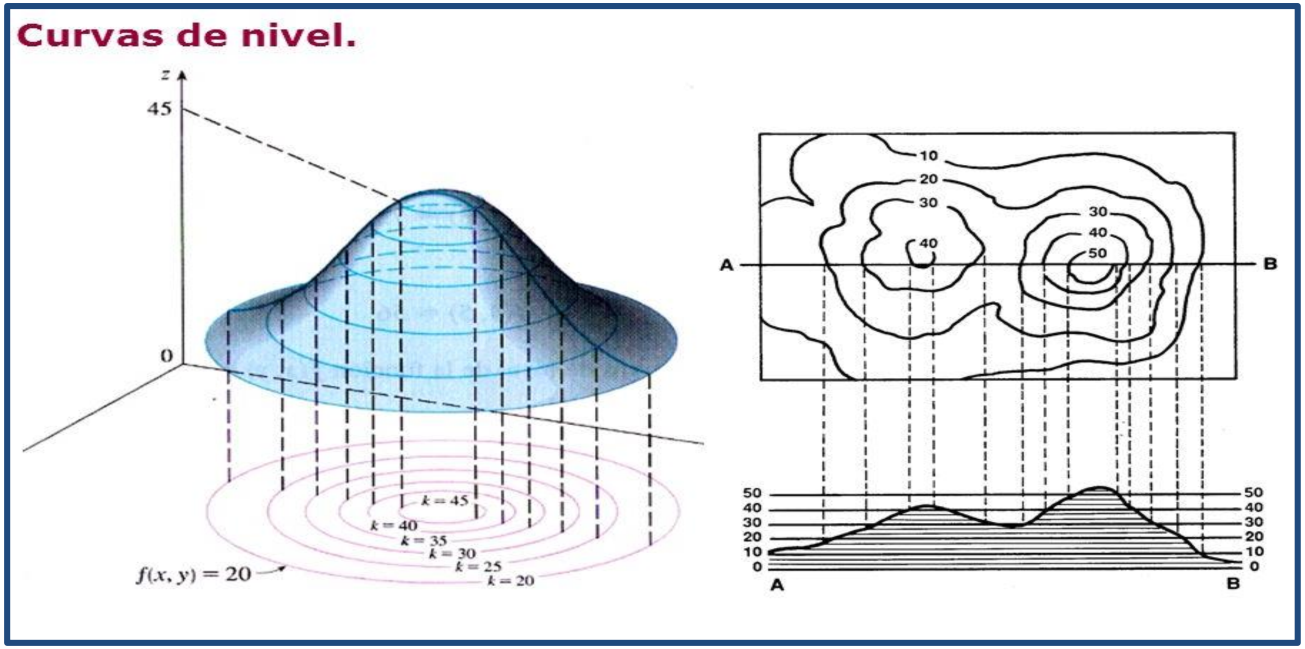


(b) $z = \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} y$

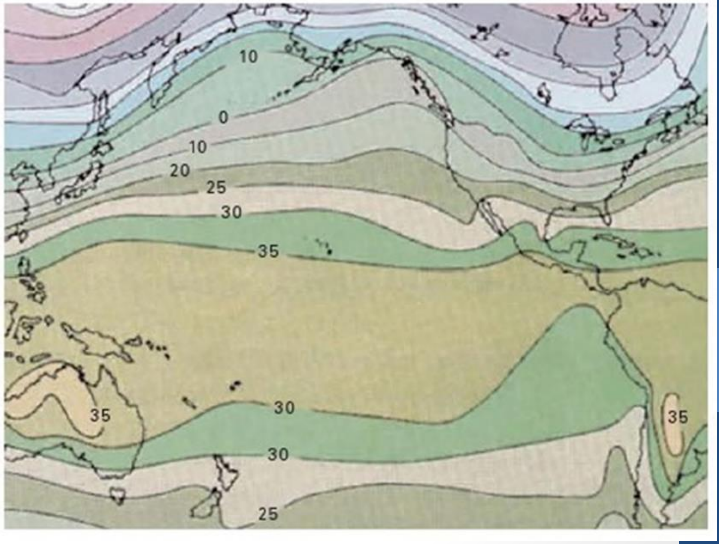


Superficies de nivel

- El conjunto de puntos **(x,y,z)** en el espacio donde una función de tres variables independientes tiene un valor constante **f(x,y,z)=c.**



En el estudio de la ingeniería química es frecuente el uso de curvas y superficies de nivel, en diseño de experimentos, isobaras, isotermas, etc.

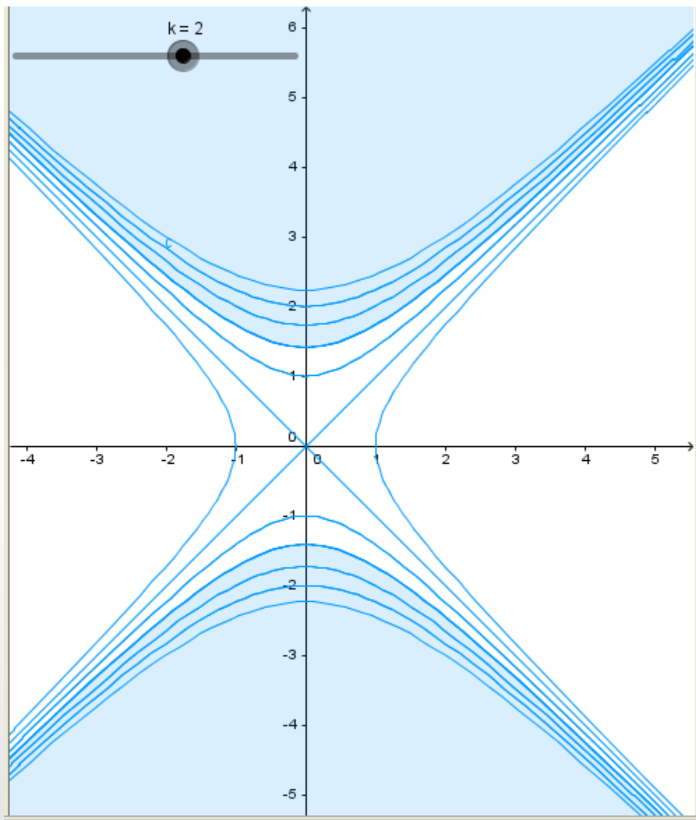


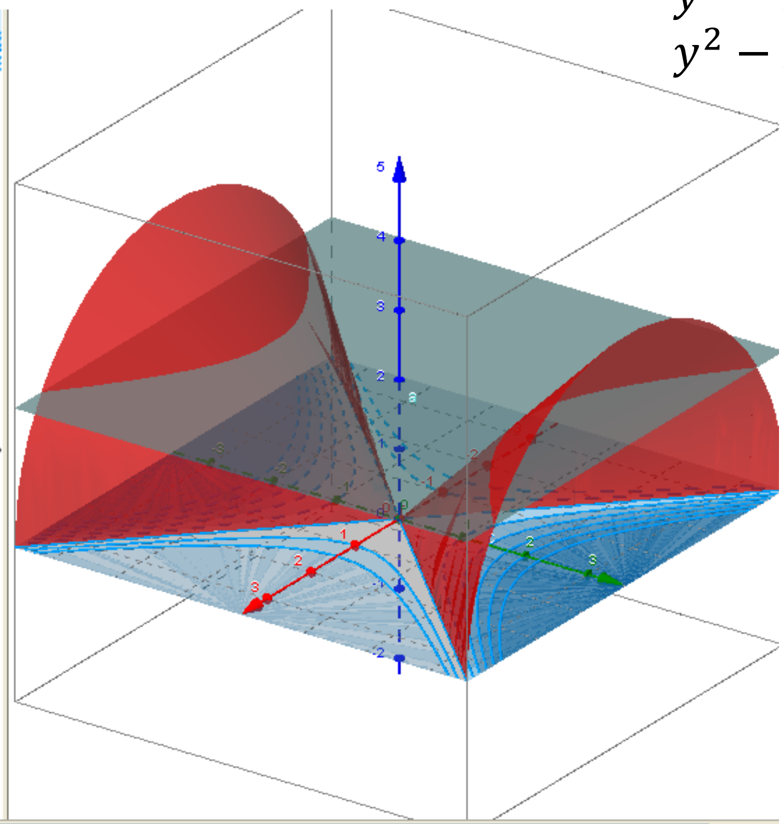
Por ejemplo, una Isoterma de adsorción describe el equilibrio de la adsorción de un material en una superficie a temperatura constante.

Ejemplo

Dibujar un mapa de curvas de nivel $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2}$

$$y^2 - x^2 = k^2$$
$$y^2 - x^2 = (1)^2$$
$$y^2 - x^2 = (2)^2$$
$$y^2 - x^2 = (3)^2$$





Ejercicios

Describa la superficie de nivel y dibuje un mapa de curvas de nivel

$A) f(x, y) = (y - 2x)^2$

$B) f(x, y) = \sqrt{y^2 + x^2}$

$C) f(x, y) = x^2 - y^2$

$D) f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$

$E) = f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

Función Compuesta de n Variables

Si f es función de una variable y g una función de n variables, entonces la función compuesta f o g es la función de n variables definida por

$$(fog)(x_1, x_2 \ldots \ldots . x_n) = f(g(x_1, x_2 \ldots \ldots . x_n))$$

Ejemplo

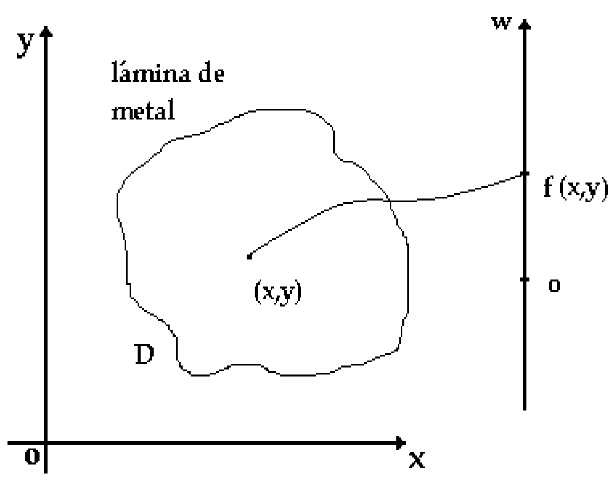
$$F(x) = Cos(x) \qquad G(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$F \quad o \quad G(x, y, z) = F(G(x, y, z)) = Coz(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Límite de una función de n variables

En el estudio de la ingeniería química es importante comprender el concepto de límite y de diferenciales, para el estudio de los fenómenos de transporte y de las reacciones químicas. Por ejemplo, si se considera una lámina de metal plana con forma de la región D y cada punto (x,y) que se mide con un termómetro, se representa en el eje w.

Entonces, cuando el punto (x,y) se mueve dentro de la lámina la temperatura aumenta, disminuye o permanece constante y (x,y) en el eje w se mueve a la parte positiva negativa o permanece constante



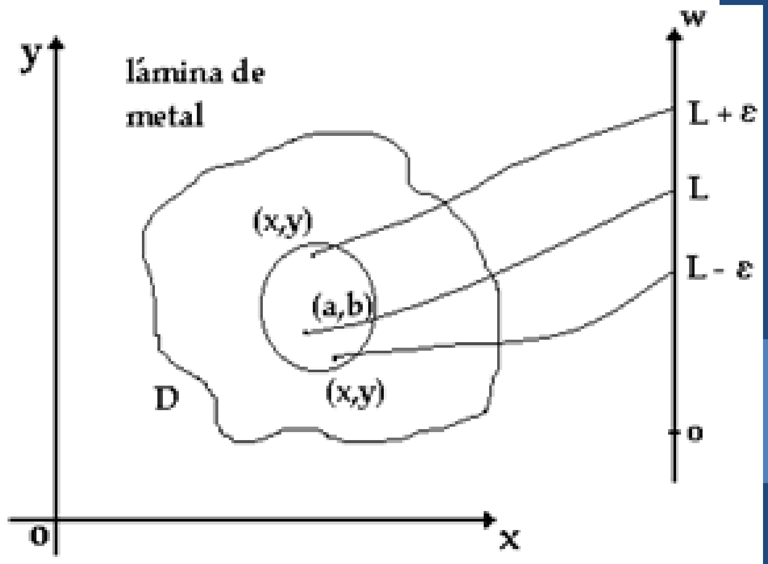
Límite de una función de n variables

Cuando la temperatura f(x,y) se acerca a un valor fijo L cuando (x,y) se aproxima cada vez más a un punto fijo (a,b), entonces, esto se denota como sigue:

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,b)} f(x,y) = 1$$

El límite de f(x,y) cuando (x,y) tiende a (α,b) es L.

Si
$$0 < \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-b)^2} < \delta$$
$$entonces \left| f(x,y) - L \right| < \varepsilon$$



Límite de una función de n variables

Definición de Límite: Bola abierta en R^n si A es un punto de R^n y r es un número positivo, entonces la bola abierta B(A;r) es el conjunto de todos los puntos P de R^n tales que

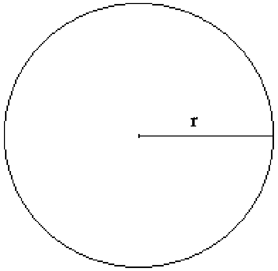
$$|P - A| < r$$

Bola cerrada en R^n si A es un punto de R^n y re es un número positivo, entonces la bola cerrada B(A;r) es el conjunto de todos los puntos P de R^n tales que

$$|P - A| \leq r$$

$$|x - a| = |x - a|$$

$$|(x, y) - (x_0, y_0)| = \sqrt{(x, x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$



P-A Distancia entre P Y A

$$|P\_A| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2}$$

Límite. Sea f una función de n variables definida en alguna bola abierta B(A:r), excepto posiblemente en el punto A. Entonces, el límite de f(P) conforme P tienda a A es L, lo cual se denota por:

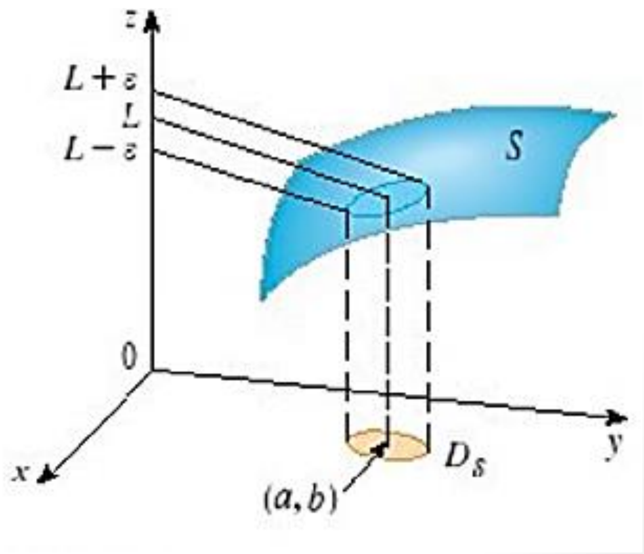
$$\lim_{p \to A} f(p) = L$$

Límite de una función de dos variables

Sea **f** una función de DOS VARIABLES con dominio **D** que contiene, entre otros puntos arbitrariamente cercanos a **(a,b)**.

El límite de **f(x,y)** cuando **(x,y)** tiende a **(a,b)** es **L** por lo que se escribe:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$



Si para cada número:
$\varepsilon > 0$ existe un número
$\delta > 0$ tal que

Si (x,y) $0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$

en este caso $|\, f(x,y) - L \,| < \varepsilon$

Teoremas de Límites

Los teoremas de límites del funciones con una variable se aplican para funciones con varias variables independientes

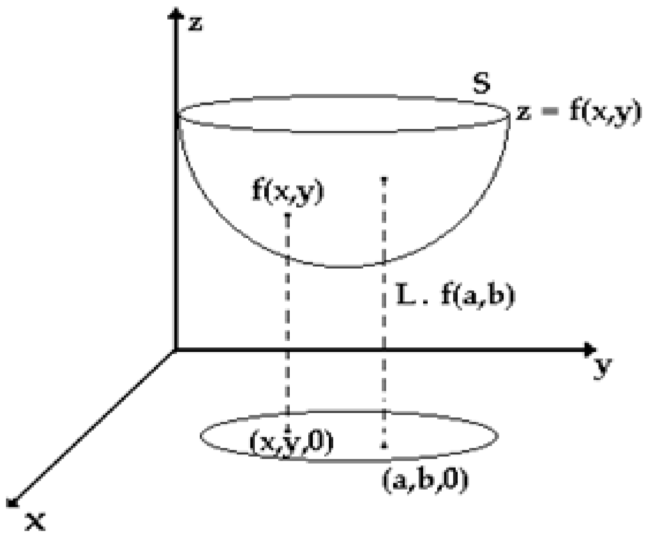
A) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y)+g(x,y)] = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$

B) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) \neq 0$

C) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \sqrt{f(x,y)} = \sqrt{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}$ si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) > 0$

Existencia de un límite

- Regla de dos trayectorias: Si dos trayectorias que llevan a un punto (a,b) producen dos valores límites diferentes para la función f, el límite no existe.



Ejemplo

- Evaluar los siguientes límites, si existen

$$c)\ \lim_{(x.y)\to(0,0)} \frac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}$$

$$f(x,0) = \frac{x^4}{x^2} = x^2$$

$$x \neq 0 \qquad f(x,0) \to 0$$

$$f(0,y) = \frac{-4y^2}{2y^2} = -2$$

$$f(x,y) \to -2$$

El límite no existe

$$D)\ \lim_{(x.y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+2y^2+1}-1}$$

$$\lim_{(x.y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}\right)$$

$$\lim_{(x.y)\to(0,0)} \left(\frac{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{x^2+y^2}\right)$$

$$\lim_{(x.y)\to(0,0)} \left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)=\mathbf{2}$$

Ejemplo:

Utilizar el último teorema para demostrar que el límite de f(x,y), cuando este tiende a (0,0) no existe, si la función está definida por:

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Solución: La función f(x,y) está definida para todos los puntos en $\mathbb{R}^2$ excepto en (0,0). Aplicando el teorema se puede establecer que:

Si (x,y) tiende a (0,0) a lo largo del eje x entonces la coordenada y siempre será cero y la función f(x,y) se reduce a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x\to o)} f(x,o)$$

$$= \lim_{x\to o} x^2 / x^2$$

$$= \lim_{x\to o} 1$$

$$= 1$$

Si f(x,y) tiende a (0,0) a lo largo del eje Y entonces la coordenada x siempre será cero y la función f(x,y) se reduce a:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(y\to o)} f(o,y) = \lim_{y\to o}(-1) = \lim_{y\to o} -y^2 / y^2 = -1$$

Como se obtienen dos valores diferentes por la Regla de dos Trayectorias, el límite no existe.

Ejercicios

Determine el límite si es que existe:

$A) \lim_{(x.y)\to(1,2)} (5x^2 - x^2y^2)$

$B) \lim_{(x.y)\to(1,2)} \frac{4 - xy}{x^2 + 3y^2}$

$C) \lim_{(x.y)\to(1,2)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$D) \lim_{(x.y,z)\to(1,2)} e^{-xy} sen(\pi z/2)$

E) $\lim_{(x.y)\to(1,2)} \frac{x^2ye^y}{x^4 + 4y^2}$

Continuidad de una función de dos variables

Una función de don variables es continua en **(a,b)** si:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

f es continua en **D** si f es continua en todos los puntos **(a,b)** de D

Se dice que f es continua en el punto A sí y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

1. $f(a)$ esta definida (*a* esta en el dominio de *f*)
2. $\boldsymbol{\lim_{\mathbf{x}\to a} f(x)}$ existe
3. $\boldsymbol{\lim_{\mathbf{x}\to a} f(x) = \mathbf{f}(\mathbf{a})}$

Ejemplo

- Determinar el conjunto de puntos en los que las siguientes funciones son continuas:

A)$\boldsymbol{G(x,y) = ln(x^2 + y^2 - 4)}$

$x^2 + y^2 = 4$ es continua en R^2

$\ln(t)$ es continua cuando $t > 0$

Dominio

$\{(x,y)|x^2 + y^2 - 4 > 0\}$=$\{(x,y)|x^2 + y^2 > 4\}$

$$\boldsymbol{B)f(x,y) = \frac{1 + x^2 + y^2}{1 - x^2 + y^2}}$$

$\{(x,y)| -x^2 - y^2 \neq 0\}$=$\{(x,y)|x^2 + y^2 \neq 1\}$

Ejercicios

$$A)f(x,y)=\frac{x-y}{1+x^2+y^2}$$

$$B)f(x,y)=\frac{Sen(xy)}{e^x-y^2}$$

$$C)f(x,y)=\arctan(x+\sqrt{y})$$

$$D)g(x,y)=\ln(x^2+y^2-4)$$

$$E)f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & si(x,y)\neq 0\\ 1 & si(x,y)=0\end{cases}$$

Derivación

Sea **f** una función de **n** variables **$x_1, x_2, \ldots, x_n$**. Entonces la derivada parcial de **f** con respecto a **x_k** es la función denotada por **$D_k f$**, tal que su valor de función en cualquier punto **P** del dominio de f está dado por

$$\lim_{\Delta X_k \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, y_k + \Delta x_k + \ldots, x_n) - f(x_1 x_2, \ldots, x_n)}{\Delta x_k}$$

$$D_k f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, x_2, \ldots, x$$

- Sea f una función de dos variables. Las primeras derivadas parciales de f con respecto a x y a y son las funciones f_x y f_y definidas por:

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

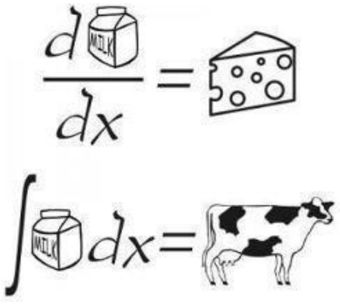
$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Derivadas de funciones de Varias variables

SI $\boldsymbol{f}$ es una función de dos variables sus derivadas parciales son las funciones $\boldsymbol{f_x}$ y $\boldsymbol{f_y}$.

$$\boldsymbol{z = f(x, y)}$$

- Para determinar f_x, conserva a y constante y deriva $f(x, y)$ con respecto a x.
- Para determinar f_y, conserva a x constante y deriva $f(x, y)$ con respecto a y.



Notación para derivadas parciales

$$Si\ z = f(x, y)$$

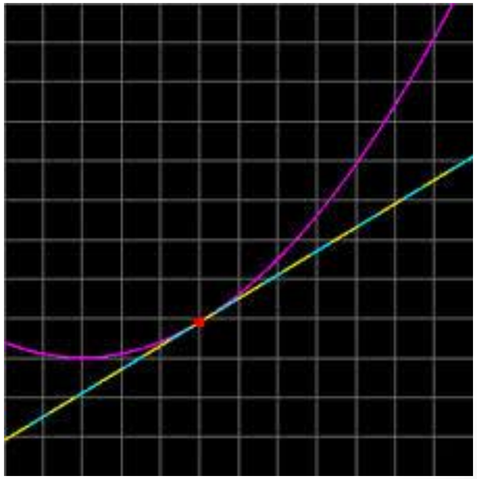
$$f_x(x,y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f$$
$$= D_x f$$

$$f_y(x,y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f$$
$$= D_y f$$

Derivadas parciales

Los teoremas de derivación de una función de una variable se pueden tomar como base para derivar una función de n variables.

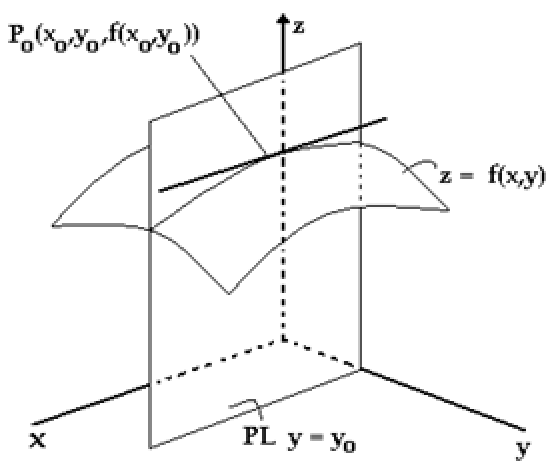
- Derivación de una suma
- Derivación de un producto
- Derivación de un cociente
- Regla de la cadena, etc

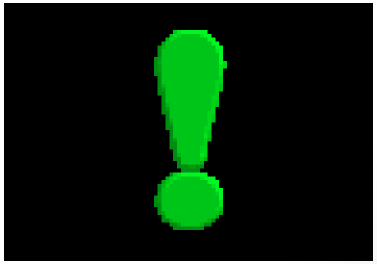


Derivadas parciales

La interpretación geométrica de una **derivada parcial** de una función de dos variables es semejante a la de una función de una variable. Si se considera a y constante:

$y = y_o$, la ecuación de la superficie es $z=f(x,y_o)$ y esta representa la ecuación de una traza de esta superficie en el Plano y_o. Ya que la curva es la intersección de estas dos superficies. Ahora $f_x(x,y)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva representada por ambas ecuaciones.





Por ejemplo, si u = f(x,y) y υ = g(x,y), entonces la Regla del Producto y la Regla del Cociente y la Regla de la Potencia, se definen como:

$$\frac{\partial}{dx}(u\upsilon) = u\frac{\partial \upsilon}{dx} + \upsilon\frac{\partial u}{dx}, \qquad \frac{\partial}{dx}\left(\frac{u}{\upsilon}\right) = \frac{\upsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - u\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)}{\upsilon^{2}}$$

$$\frac{\partial}{dx}(u^{\eta}) = \eta u^{\eta-1}\frac{\partial u}{\partial x}$$

Ejemplos

Calcular las primeras derivadas parciales

$$\boldsymbol{A)}\, \boldsymbol{f(x,y) = y^5 - 3xy}$$

$$f_x(x,y) = 0 - 3y$$

$$f_y(x,y) = 5y^4 - 3x$$

$$\mathbf{B)}\, \boldsymbol{f(x,y) = \frac{x}{y}} = xy^{-1}$$

$$f_x(x,y) = y^{-1} = \frac{1}{y}$$

$$f_y(x,y) = -xy^{-2} = -\frac{x}{y^2}$$

Ejemplos

Obtener $\frac{\partial w}{\partial y}\; para w = xy^2 e^{xy}$

Solución: $w=xy^2e^{xy} = (xy^2)\ (e^{xy})$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = (xy^2)\frac{\partial}{dy}(e^{xy}) + (e^{xy})\frac{\partial}{\partial y}(xy^2)$$

$=(xy^2)\ (xe^{xy}) + (e^{xy})\ (2xy)$

$= xye^{xy}\ (xy + 2)$

Ejercicios

- Calcule las derivadas parciales de las siguientes funciones:

$A)\ z = (2x + 3y)^{10}$

$B) f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$

$C) w = sen(a)\cos(b)$

$D) f(r, s) = r\ ln(r^2 + s^2)$

$E) u = te^{w/t}$

Ejemplo

Determine la diferencia de la función

$$A)z = x^3 \ln(y^2)$$

$$B)m = p^5 q^3$$

$$C)R = aB^2\, Cos\, \gamma$$

$$D)T = \frac{v}{1 + uvw}$$

$$C)w = xye^{xz}$$

Segundas Derivadas Parciales

$$(f_x)_{\ x} = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_{\ y} = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_{\ x} = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_{\ y} = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y}$$

Ejemplo

Determine las segundas derivadas parciales

$$\boldsymbol{f(x,y) = x^3y^5 + 2x^4y}$$

$$f_x(x,y) = 3x^2y^5 + 8x^3y$$
$$f_y(x,y) = 5x^3y^4 + 2x^4$$

$$f_{xx}(x,y) = 6xy^5 + 24x^2y$$
$$f_{xy}(x,y) = 15x^2y^4 + 8x^3$$
$$f_{yx}(x,y) = 15x^2y^4 + 8x^3$$
$$f_{yy}(x,y) = 20x^3y^3$$

Ejemplo

Encuentre la derivada $\dfrac{\partial^3 w}{\partial z \partial y \partial x}$ y $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}$ de la función:

$$w = \frac{x}{y+2z} = x(y+2z)^{-1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = (y+2z)^{-1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = x(-1)(y+2z)^{-2}(1) = -x(y+2z)^{-2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = -(y+2z)^{-2}(1) = -(y+2z)^{-2}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y \partial x} = -(-29(y+2z)^{-3}(2) = 4(y+2z)^{-3}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = (y+2z)^{-2} \qquad \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

Ejercicios

Determine las segundas derivadas parciales

$A) f(x, y) = x^3y^5 + 2x^4y$

$B) w = \sqrt{u^2 + v^2}$

$C) z = arctan\frac{x + y}{1 - xy}$

Encuentra las derivada parcial indicada

$D) f(x, y) = 3xy^4 + x^3y^2$ $\quad f_{xxy} \quad f_{yyy}$

Y compruebe que f_{xy}=f_{yx}

$E) f(x, t) = x^2e^{-ct}$ $\quad f_{ttt} \quad f_{txx}$

Regla de la cadena

Suponga que n es una función diferenciable de n variables $x_1, x_{2,} \dots \dots x_n$ y cada x_j es una función diferenciable de las m variables $t_1, t_{2,} \dots t_m$. Entonces u es una función de $t_1, t_{2,} \dots t_m$ y

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

Para cada i=1,2,….,m

Si $z = f(x, y)$ en una función de **x** y **y** diferenciable, donde $x = g(t)$ y $y = h(t)$ son funciones de t diferenciables. Entonces z es una función de t diferenciable y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Ejemplo

Aplicar la regla de la cadena para hallar $\frac{dz}{dt}$

$\mathbf{z = \sqrt{1 + x^2 + y^2} \quad x = \ln(t) \quad y = \cos(t)}$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{1}{2}(1 + x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\ (2x)\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2}(1 + x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\,(2y)\big(-Sin(t)\big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}\left(\frac{x}{t} - ysin(t)\right)$$

Si $z = f(x, y)$ en una función diferenciable de **x** y **y** donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ son funciones diferenciables de s y t, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Ejemplo

Calcular $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$

$$z = x^2 y^3 \qquad x = 5\cos(t) \qquad y = 5\sin(t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = 2xy^3 cost + 3x^2y^2\sin(t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 2xy^3\big(-sSin(t)\big) + (3x^2y^2)\big(sCos(t)\big)$$

$$= -2sxy^3\sin(t) + 3sx^2y^2Cos(t)$$

Ejercicios

- Aplicar la regla de la cadena para hallar $\frac{dz}{dt}$ y $\frac{dw}{dt}$

$A)\ z = x^2 + y^2 + xy \qquad x = Sen(t) \qquad y = e^t$

$B) z = \sqrt{1 + x^2 + y^2} \qquad x = \ln(t) \qquad y = Cos(t)$

- Mediante la regla de la cadena encontrar $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$

$C) z = x^2 y^3 \qquad x = s\ Cos(t) \qquad y = s\ Sen\ (t)$

$D)\ z = Sen(\theta)Cos(\emptyset) \qquad \theta = st^2 \qquad \emptyset = s^2 t$

$E) z = e^r\ Cos(\theta) \qquad r = st \qquad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}$

Derivación implícita

Una ecuación de la forma F(x,y)=0 define a y de forma implícita como una función diferenciable de x.

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

$\frac{dx}{dx} = 1$ de este modo si $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ se determina $\frac{dy}{dx}$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = -\frac{F_x}{F_y}}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}}$$

Ejemplo

- **Calcular $\frac{dy}{dx}$ de $\boldsymbol{yCox(x) = x^2 + y^2}$**

$$F(x,y) = yCos(x) - x^2 - y^2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{-ySin(x) - 2x}{Cos(x) - 2y} = \frac{2x + ySin(x)}{Cos(x) - 2y}$$

- **Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ de $\boldsymbol{x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0}$**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x}{6z} = \frac{x}{3z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{4y}{6z} = -\frac{2y}{3z}$$

Ejercicios

- Mediante derivación implícita determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$

$A)x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$

$B)z - x = \arctan(yz)$

$C)yz = \ln(x + z)$

$D)sen(xyz) = x + 2y + 3z$

$E)e^z = xyz$

Diferencial Total de una función de n variables

Si **f** es una función de las n variables $\mathbf{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n}$ y **f** es diferenciable en **P**, entonces la diferencia total de **f** es la función df que tiene valores de función determinados por:

$$df = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Ejercicio

Determinar la diferencial de la función

$$z = e^{-2x} Cos2\pi\mathrm{t}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial t}dt$$

$$= e^{-2x}(-2)Cos2\pi t\ dx + e^{-2x}(-Sin2\pi t)(2\pi)dt$$

$$= -2e^{-2x}\mathrm{Cos2\pi}tdx - 2\pi e^{-2x}Sin2\pi t\ dt$$

Ejercicio

Sea $\omega = 4x^2 - 5xy + y^2$.

Encuentre dw y úsela para calcular aproximadamente el cambio en w cuando (x,y) varia de (2,2) a (2.01, 1.98).

Solución:

$$d\omega = \frac{\partial \omega}{dx} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy$$

$$= (8x - 5y)\, dx + (-5x + 2y) dy$$

Sustituyendo $x = 2$, $y = 2$, $dx = \Delta x = 0.01$,

$dy = \Delta y = -\,0.02$

Ejercicio

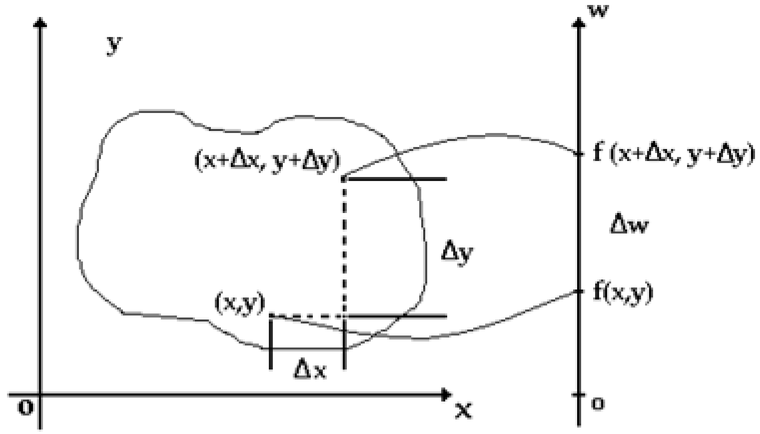
Continua Solución:

$$d\omega = (16-10)(0.01) + (-10+4)(-0.02)$$

$$d\omega = (6)(0.01) + (-6)(-0.02)$$

$$d\omega = 0.06$$

Gráficamente $d\omega$ representa un cambio o incremento en el contradominio de la función ω



Derivada Direccional

Permite calcular la razón de cambio de una función de dos o mas variables en cualquier dirección.

Si f es una función diferenciable de x y de y, entonces f tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $u =< a, b >$, o bien

$$U = \cos\theta i + \operatorname{sen}\theta j$$

Definiendo a la derivada direccional como:

$$\boldsymbol{D_u f(x,y) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b}$$

Ejemplo

- Calcular la derivada direccional de la función en el punto dado en la dirección del vector.

$$\boldsymbol{A})\boldsymbol{f(x,y) = e^x Sin(y)} \qquad \left(\mathbf{0}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\right) \qquad \boldsymbol{v} = \langle \mathbf{-6}, \mathbf{8} \rangle$$

$$\nabla f(x,y) = \langle e^x Sin(y), e^x Cos(y) \rangle$$

$$\nabla f\left(0, \frac{\pi}{3}\right) = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{(-6)^2 + (8)^2}} \langle -6,8 \rangle = \frac{1}{10}(-6,8) = \left\langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$$

$$D_u f\left(0, \frac{\pi}{3}\right) = \nabla f\left(0, \frac{\pi}{3}\right)(u) = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left\langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$$

$$\boldsymbol{B})\mathbf{g}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \boldsymbol{p^4 - p^2q^3} \qquad (\mathbf{2},\mathbf{1}) \qquad \boldsymbol{v = i + 3j}$$

$$\nabla g(p,q) = (4p^3 - 2pq^3) + (-3p^2q^2)j$$

$$\nabla g(2,1) = 28i - 12j$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{(1)^2 + (3)^2}}(i + 3j) = \frac{1}{\sqrt{10}}(i + 3j)$$

$$D_u g(2,1\ ) = \nabla g(2,1)u = (28i - 12j)\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)(i + 3j)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}(28 - 36) = -\frac{8}{\sqrt{10}}$$

Ejercicios

- Calcule la derivada direccional de la función en el punto dado en la dirección del vector v

$A) f(x, y) = 1 + 2x\sqrt{y} \qquad (3,4) \qquad v = \langle 4, -3 \rangle$

$B) f(x, y) = ln(x^2 + y^2) \qquad (2,1) \qquad v = \langle -1,2 \rangle$

$C) f(x, y) = p^4 - p^2 q^3 \qquad (2,1) \qquad v = i + 3j$

$D) f(x, y) = 2x^2 + y^2 \qquad (-1,1) \qquad v = 3i - 4j$

$E) f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2 \qquad (1,1,1) \qquad v = i + j + k$

Vector Gradiente

Producto punto de dos vectores

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b$$
$$= \langle f_x(x,y) + f_y(x,y)b \rangle * \langle a, b \rangle$$
$$= \langle f_x(x,y) + f_y(x,y)b \rangle * \mathrm{u}$$

Si f es una función de dos variables **x** y **y** entonces la gradiente de f es la función vectorial ∇f definida por

$$\boldsymbol{\nabla f(x,y)} = \langle \boldsymbol{f_x(x,y) + f_y(x,y)b} \rangle = \frac{\boldsymbol{\partial f}}{\boldsymbol{\partial x}}\boldsymbol{i} + \frac{\boldsymbol{\partial f}}{\boldsymbol{\partial y}}\boldsymbol{j}$$
$$D_u f(x,y) = \boldsymbol{\nabla f(x,y)u}$$

Vector Gradiente para tres variables

$$\boldsymbol{\nabla f} = \langle \boldsymbol{f_x}, \boldsymbol{f_y}, \boldsymbol{f_z} \rangle = \frac{\boldsymbol{\partial f}}{\boldsymbol{\partial x}}\boldsymbol{i} + \frac{\boldsymbol{\partial f}}{\boldsymbol{\partial y}}\boldsymbol{j} + \frac{\boldsymbol{\partial f}}{\boldsymbol{\partial z}}\boldsymbol{k}$$

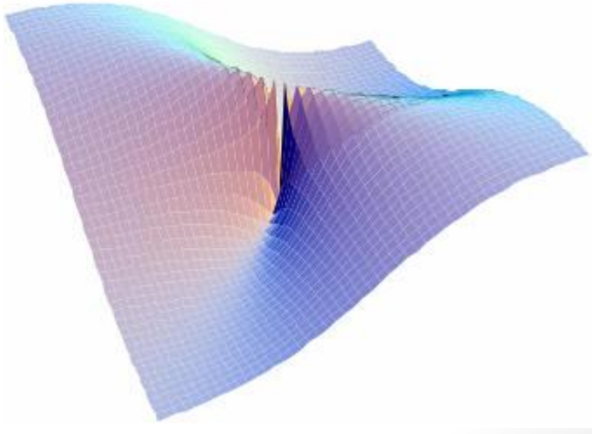
La derivada direccional para tres variables se expresa:

$$D_u f(x, y, z) = \boldsymbol{\nabla f(x, y, z)} * \boldsymbol{u}$$

Maximización de la derivada direccional

Suponga que f es una función diferenciable de dos o tres variables.

El valor máximo de la derivada direccional $\boldsymbol{D_u f(x)}$ **es** $|\boldsymbol{\nabla f(x)}|$ y se representa cuando **u** tiene la misma dirección que el vector gradiente $\boldsymbol{\nabla f(x)}$.



Ejemplo

$$f(x,y) = sen(2x+3y) \qquad P(-6{,}4) \qquad u = \frac{1}{2}(\sqrt{3i - j})$$

A)Determine el gradiente de f

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j = [\mathrm{Cos}(2x+3y) * 2]i + = [\mathrm{Cos}(2x+3y) * 3]j$$

$$= 2\,\mathrm{Cos}(2x+3y)\, i + 3\mathrm{Cos}(2x+3y)\, j$$

B)Evalué el gradiente en el punto P

$$\nabla f(-6{,}4) = (2Cos(0)i) + (3Cos(0)j) = 2i + 3j$$

C) Encuentre la razón de cambio de f en P en la dirección del vector P.

$$D_u f(-6{,}4) = \nabla f(-6{,}4)u = (2i+3j) * \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}i - j\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{3} - 3\right) = \sqrt{3} - \frac{3}{2}$$

Ejemplo

- Determina la máxima razón de cambio de la función f en el punto dado y la dirección en la cual se presenta.

$$f(x,y) = 4y\sqrt{x} \qquad\qquad (4,1)$$

$$\nabla f(x,y) = \left\langle 4y\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right), 4\sqrt{x}\right\rangle = \left\langle \frac{2y}{\sqrt{x}}, 4\sqrt{x}\right\rangle$$

Dirección de la máxima razón de cambio:

$$\nabla f(4,1) = \langle 1,8\rangle$$

La máxima razón de cambio:

$$|\nabla f(4,1)| = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$$

Ejercicios

A) Determine el gradiente de f. B) Evalué el gradiente en el punto P. C) Encuentre la razón de cambio de f en P en la dirección del vector P.

$A)f(x,y)=\dfrac{y^2}{x}$ $\quad P(1,2)$ $\quad u=\dfrac{1}{3}\left(2i+\sqrt{5}j\right)$

$B)f(x,y,z)=xe^{2yz}$ $\quad P(3,0,2)$ $\quad u=\left\langle\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right\rangle$

$C)f(x,y,z)=\sqrt{x+yz}$ $\quad P(1,3,1)$ $\quad u=\left\langle\dfrac{2}{7},\dfrac{3}{7},\dfrac{6}{7}\right\rangle$

$D)f(x,y,z)=x^2yz-xyz^3$ $\quad P(2,-1,1)$ $\quad u=\left\langle 0,\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right\rangle$

$E)f(x,y,z)=y^2e^{xyz}$ $\quad P(0,1,-1)$ $\quad u=\left\langle\dfrac{3}{13},\dfrac{4}{13},\dfrac{12}{13}\right\rangle$

Ejercicios

- Determine la máxima razón de cambio de función dada en el punto señalado y la dirección en la cual se presenta.

$$A)f(x,y)=\frac{y^2}{x} \qquad (2,4)$$

$$B)f(p,q)=qe^{-p}+pe^{-q} \qquad (0,0)$$

$$C)f(x,y)=Sen(xy) \qquad (1,0)$$

$$D)f(x,y,z)=\frac{(x+y)}{z} \qquad (1,1,-1)$$

$$E)f(x,y,z)=\tan(x+2y+3z) \qquad (-5,1,1)$$

Plano tangente y vector normal a una superficie

Vector normal

- Un vector ortogonal a un vector tangente de toda curva C que pase por un punto Po de una superficie S, se denomina vector normal a S en el punto Po.

- Si una ecuación de una superficie S es $F(x,y,z) = 0$ y si F es diferenciable y F_x, F_y y F_z no son todas cero en el punto $P_o(x_o,y_o,z_o)$ es un vector normal a S en P_o.

Plano tangente

- Si una ecuación de una superficie S es $F(x,y,z) = 0$ y F satisface la hipótesis anterior entonces el plano tangente de S en el punto $P_o(x_o,y_o,z_o)$ es el plano que pasa por P_o y tiene $\nabla f\,(x_o,y_o,z_o)$ como un vector normal.

Plano tangente y vector normal a una superficie

Una ecuación del plano tangente de la ecuación anterior es

$$F_x(x_o,y_o,z_o)\ (x-x_o) + F_y(x_o,y_o,z_o)\ (y-y_o) + F_z(x_o,y_o,z_o)\ (z.z_o) = 0$$

o bien,

$$\nabla f\ (x_o,y_o,z_o) \bullet [(x-x_o)\ i + (y-y_o)j + (z-z_o)k\ ] = 0$$

La ecuación anterior puede reescribirse como:

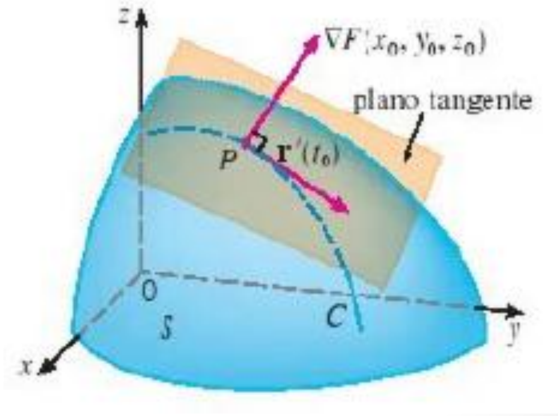
$$Z - Zo = f_x\ (x_o,y_o)(x-x_o) + f_y(x_o,y_o)(y-y_o)$$

considerando que $Z = f(x,y)$ en el punto (x_o,y_o,z_o) de una superficie S es $F(x,y,z) = 0$

Plano Tangente y vector normal a una superficie

Es decir, si una ecuación de una superficie **S** es **F(x,y,z) = 0** y **F** satisface la hipótesis anterior entonces el plano tangente de **S** en el punto $\mathbf{P_o(x_o,y_o,z_o)}$ es el plano que pasa por $\mathbf{P_o}$ y tiene $\mathbf{\nabla f\ (x_o,y_o,z_o)}$ como un vector normal.

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$



Vector normal

Además, un vector ortogonal a un vector tangente de toda curva **C** que pase por un punto $\mathbf{P_o}$ de una superficie S se denomina vector normal a **S** en $\mathbf{P_o}$.

Si una ecuación de una superficie **S** es **F(x,y,z) = 0** y si **F** es diferenciable y $\mathbf{F_x}$, $\mathbf{F_y}$ **y** $\mathbf{F_z}$ no son todas cero en el punto $\mathbf{P_o(x_o,y_o,z_o)}$ es un vector normal a **S** en $\mathbf{P_o}$.

Ecuaciones Simétricas

$$\frac{(x-x_0)}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{(y-y_0)}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{(z-z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

Ejemplo

$$xyz^2 = 6 \qquad\qquad (3,2,1)$$

A) Determinar la ecuación del plano tangente

$$\nabla f(x,y,z) = \langle yz^2, xz^2, 2xyz\rangle$$

Es un vector normal para el plano de la tangente a (3,2,1)

$$\nabla f(3,2,1) = \langle 2,3,12\rangle$$

La ecuación del plano tangente es:

$$2(x-3) + 3(y-2) + 12(z-1) = 0$$
$$2x + 3y + 12z = 24$$

B) Determinar la ecuación de la recta normal de la superficie en el punto dado

La normal $\langle 2,3,12\rangle$ cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x = 3 + 2t \qquad y = 2 + 3t \qquad z = 1 + 12t$$

Ecuación Simétrica

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{12}$$

Ejercicios

A) Determine la ecuación del plano tangente. B) Determine la ecuación de la recta normal de la superficie en el punto dado

$A) 2(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=10 \qquad (3,3,5)$

$B) y = x^2 - z^2 \qquad (4,7,3)$

$C) yz = \ln(x+z) \qquad (0,0,1)$

$D) x^2 - 2y^2 + z^2 + yz = 2 \qquad (2,1,-1)$

$E) x - z = 4\arctan(yz) \qquad (1+\pi,1,1)$

Valores Extremos: Máximos y Mínimos

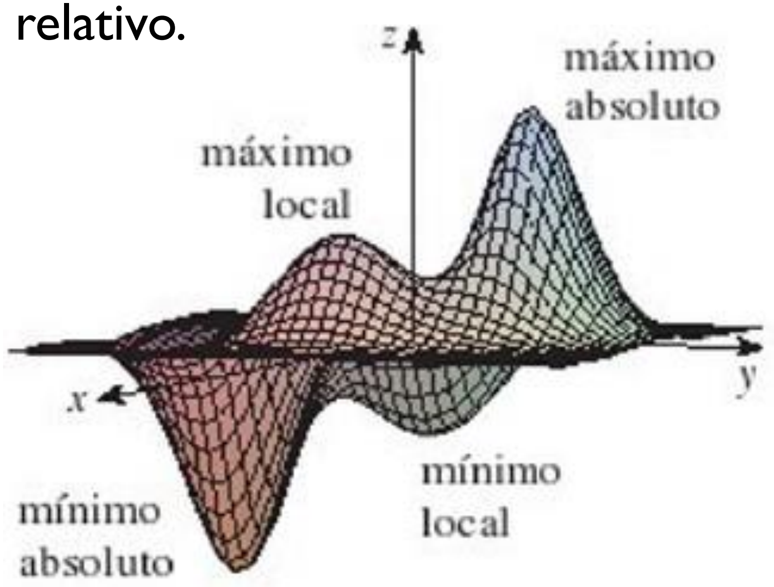
Una función de dos variables tiene un máximo relativo en (a, b)

- **Si** $\boldsymbol{f(x, y) \leq f(a, b)}$ **cuando** $\boldsymbol{(x, y)}$ **esta cerca de** $\boldsymbol{(a, b)}$

  El numero $\boldsymbol{f(a, b)}$ **recibe el nombre de valor máximo relativo**
- Si $f(x, y) \geq f(a, b)$ cuando (x, y) esta cerca de (a, b), entonces $f(a, b)$ es un **mínimo relativo** en (a, b)

El número de $\boldsymbol{f(a, b)}$ es un valor mínimo relativo.

Si las desigualdades de la definición 1se cumplen para todos los puntos $\boldsymbol{(x, y)}$ en el dominio de ***f*,** entonces ***f*** tiene un máximo absoluto o un mínimo absoluto en $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$**.**



Prueba de la segunda derivada

$$D = D(a,b) = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - [f_{xy}(a,b)]^{2}$$

a) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a,b) > 0$, entonces $f(a,b)$ es un mínimo relativo
b) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a,b) < 0$, entonces $f(a,b)$ es un máximo relativo
c) Si $D < 0$, *entonces* $f(a,b)$ [(a,b) se llama PUNTO SILLA] no es ni un máximo relativo ni un mínimo relativo.
d) Si $D = 0$ la prueba no proporciona información: f podría tener un máximo relativo o un mínimo relativo en (a,b) o bien (a,b) podría ser un punto silla de f

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

Ejemplo

Calcular los máximos y mínimos locales y el punto o puntos de silla de la función.

$\boldsymbol{f(x,y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2}$

$f_x = 6xy - 12x$

$f_y = 3y^2 + 3x^2 - 12y$

$f_{xx} = 6y - 12$

$f_{xy} = 6x$

$f_{yy} = 6y - 12$

Si $f_x = 0$

$(6xy - 12x = 0)\left(\frac{1}{6}\right)$

$x(y-2) = 0$ $\qquad y = 2 \quad x = 0$

Si $f_y = 0$

$$(3y^2 + 3x^2 - 12y = 0)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$x^2 + y(y - 4) = 0$$

OBTENER PUNTOS CRÍTICOS

Si X=0

$$(0)^2 + y(y - 4) = 0 \qquad \rightarrow \qquad y(y - 4) = 0$$

$$y = 4 \qquad\qquad y = 0$$

$$Setiene\ un\ punto\ crítico\ en\ (0,0)\ y\ (0,4)$$

SI Y=2

$$x^2 + 2(2 - 4) = 0 \qquad \rightarrow x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

$$Setiene\ un\ punto\ crítico\ en\ (\pm 2,2)$$

$D(0,0) = 144 > 0$ $f_{xx}(0,0) = -12 < 0$ $f(0,0) = 2$	**Máximo local**
$D(0,4) = 144 > 0$ $f_{xx}(0,4) = 12 > 0$ $f(0,4) = -30$	**Mínimo Local**
$D(\pm 2,2) = (0)(0) - (\pm 12)^2 = -144 < 0$	**Puntos Silla**

Ejercicios

Calcule los máximos y mínimos relativos y el punto o puntos de silla de la función.

$A)f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

$B)f(x,y) = e^{4y-x^2y^2}$

$C)fx,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

$D)f(x,y) = e^x Cos(y)$

$E) = f(x,y) = y^2 - 2yCos(x) \quad\quad 1 \leq x \leq 7$

Valores máximos y mínimos absolutos

Para calcular los valores absolutos máximos y mínimos de una función continua **f** en un conjunto cerrado y acotado **D**:

I Se calculan los valores de **f** en los puntos críticos de **f** en **D**.

II Se determinan los valores extremos de **f** en el limite de **D**

El más grande de los valores de los pasos I y II es el valor máximo absoluto; el más pequeño de estos valores es el valor mínimo absoluto.

Ejemplo

Determinar el valor máximo y mínimo absoluto de f en el conjunto D

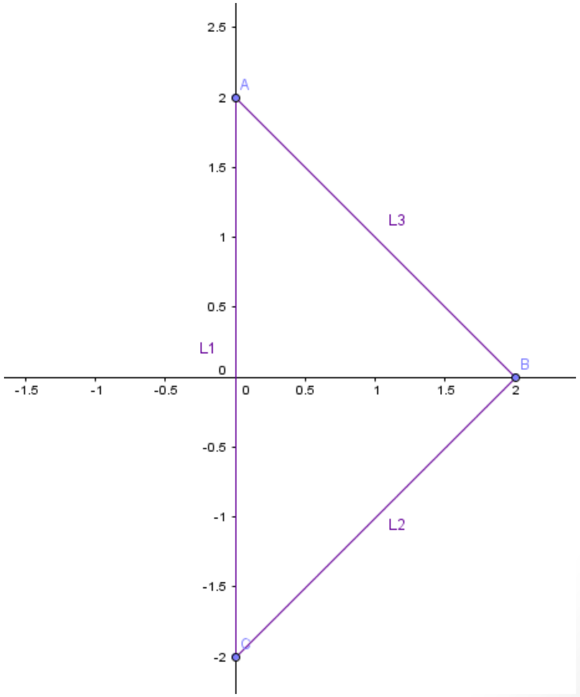
$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$, D es la región triangular $(2{,}0)(0{,}2)y\ (0,-2)$

$$f_x = 2x - 2$$
$$f_y = 2y$$

Para f_x
$2x - 2 = 0$
$x = 1$

Para f_y
$2y = 0$
$y = 0$

Punto crítico $(1{,}0)$
$f(1{,}0) = -1$



- **En L1 x=0**

$f(0,y) = y^2 \; para \; -2 \leq y \leq 2$

Tiene un mínimo en y=0

DONDE $f(0{,}0) = 0$ y este es un máximo en $y \pm 2$. Donde $f(0, \pm 2) = 4$

- **En L2 $\boldsymbol{y = x - 2}$**

Para $0 \leq x \leq 2$ y $f(x, x-2) = 2x^2 - 6x + 4 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$ que tiene su mínimo en $x = \frac{3}{2}$ DONDE $f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)$ donde $f(0, -2) = 4$

- **En L3 x=0**

$y = 2 - x \qquad 0 \leq x \leq 2$

$f(x, 2-x) = 2x^2 - 6x + 4 = 2(x - \dfrac{3}{2})^2 - \dfrac{1}{2}$

Alcanza un mínimo en $x = \frac{3}{2}$

Donde $f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ y este es un máximo en $x = 0$ Donde $f(0{,}2) = 4$

El máximo absoluto de f en D es $\boldsymbol{f(0, \pm 2) = 4}$ y el mínimo absoluto es $\boldsymbol{f(1, 0) = -1}$

Ejercicios

Determine el valor máximo y mínimo absoluto de f en el conjunto D

$A) f(x, y) = 1 + 4x - 5y$, D es la región triangular cerrada con vértices $(0,0)$ $(2,0)$ y $(0,3)$

$B) f(x, y) = 3 + xy - x - 2y$, D es la región triangular cerrada $(1,0)$ $(5,0)$ y $(0,3)$

$C) f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2 y + 4$

$$D = \{(x, y)|x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

$D) f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$

$$D = \{(x, y)|0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$$

$E) f(x, y) = 2x^3 + y^4$

$$D = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Método de los Multiplicadores de Lagrange

Para determinar los valores máximos y mínimos de **f(x,y,z)** sujeta a la restricción **g(x,y,z)=k**

[Suponiendo que estos valores existan **y** que $\boldsymbol{\nabla g} \neq \mathbf{0}$ se encuentra la superficie **g(x,y,z)=k**]

I- Determine todos los valores de **x, y, z** y $\boldsymbol{\lambda}$ tal que:

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$$
$$g(x,y,z) = k$$

II- Evalué **f** en todos los puntos **(x,y,z)** que resulten del paso (I). El más grande de estos valores es el valor máximo de **f**; el más pequeño es el valor mínimo de **f.**

Ejemplo

Encontrar los valores de **f** sujetos a ambas restricciones.

$$f(x, y, z) = x + 2y \qquad x + y + z = 1 \qquad y^2 + z^2 = 4$$

$f(x, y, z) = x + 2y$
$g(x, y, z) = x + y + z = 1$
$h(x, y, z) = y^2 + z^2 = 4$

$$\nabla f = \langle 1,2,0 \rangle \qquad \lambda \nabla g = \langle \lambda, \lambda, \lambda \rangle \qquad \mu \nabla h = \langle 0.2\mu y, 2\mu z \rangle$$

Entonces

$$1 = \lambda \to 2 = \lambda + 2\mu y \to 0 = \lambda + 2\mu z \to \mu y = \frac{1}{2} = -\mu y$$

$y = \frac{1}{2\mu} \to \mathrm{z} = -\frac{1}{2\mu}$

$$x + y + z = 1$$

$$x = 1 \to y^2 + z^2 = 4 \to \mu = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Los posibles puntos son:

$$\left(1 \pm \sqrt{2}, \pm\sqrt{2}\right)$$

El valor máximo es

$$f\left(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = 1 + 2\sqrt{2}$$

El valor mínimo es

$$f\left(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = 1 - 2\sqrt{2}$$

Dos restricciones

Si desea calcular los valores máximos y mínimos de una función $f(x, y, z)$ sujeta a dos restricciones (condiciones colaterales) de la forma $g(x, y, z) = k$ y $h(x, y, z) = k$.

Esto quiere decir que esta buscando los valores extremos de la función f cuando (x, y, z) esta restringida a quedar en la curva de intersección C de las superficies de nivel $g(x, y, z) = k$ y $h(x, y, z) = k$.

$$\nabla f(x_o, y_o, z_o) = \lambda \nabla g(x_o, y_o, z_o) + \mu \nabla h(x_o, y_o, z_o)$$

Ejemplo

$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad\qquad xy = 1$

$\nabla f = \lambda \nabla g$

$\langle 2x, 2y\rangle = \langle \lambda y, \lambda x\rangle$

$2x = \lambda y \rightarrow 2y = \lambda x \rightarrow xy = 1$

$x \neq 0 \quad y \quad y \neq 0$

$2x = \lambda y \qquad \lambda = \frac{2x}{y}$

Sustituyendo

$2x = \left(\frac{2x}{y}\right) x \rightarrow y^2 = x^2 \rightarrow y \mp x$

Como $xy = 1 \;\rightarrow\; x = y = \mp 1$

Los posibles puntos de los valores extremos de **f** son $(1,1) \quad y\,(-1,-1)$

$xy = 1$

$f(x,y) = x^2 + y^2$ puede ser arbitrariamente grande.

Valor mínimo es $f(1,1) = f(-1,-1) = 2$

Ejercicios

- Mediante multiplicadores de Lagrange encuentre los valores máximos y mínimos de la función sujetas a las restricciones dadas.

$A) f(x, y) = x^2 y \qquad xy = 1$

$B) f(x, y, z) = 2x + 6y + 10z \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 35$

$C) f(x, y, z) = xyz \qquad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$

$D) f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad x^4 + y^4 + z^4 = 1$

$E) f(x, y, z, t) = x + 2y \qquad x + y + z = 1 \qquad y^2 + z^2 = 4$

Bibliografía

- James Stewart, L. Calculo Trascendentes tempranas, Ed. Cengage Learning. 2008
- Thomas, L. Calculo Varias Variables, Ed. PEARSON, 2005.
- Swokowsky, Earl W. Calculo con Geometría Analítica, Ed. Iberoamericana, 2008.
- Leithold, L., El Cálculo, Ed. Oxford University Press, 2012.
- Zill D. G. Calculo de varias variables, Ed. McGraw-Hill, 2011
- Smith, R. T. Cálculo Tomo 2; McGraw-Hill; Colombia; 2001
- Dominio y rango de una función: Disponible en: http://jvcontrerasj.com/documents/DOMINIOYRANGODEUNAFUNCION.pdf [En línea] 31/Agosto/2015
- http://www.geogebra.org/ [En línea] 31/Agosto/2015
- MacKichan Software, 2009, Scientific WorkPlace, v 5.5, [software de computadora]