Základy elektrických obvodů

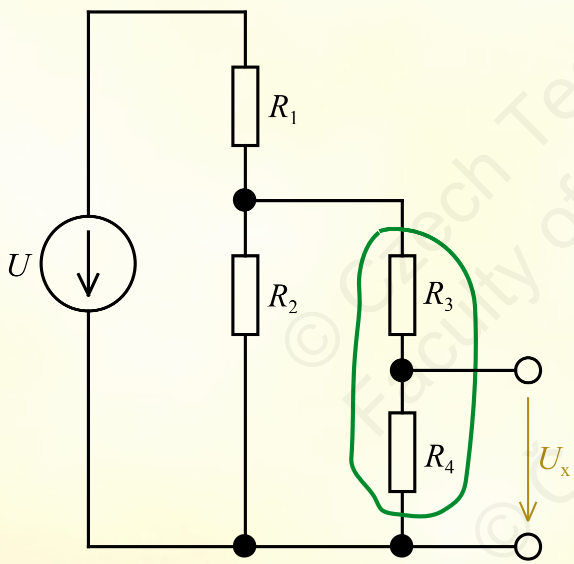
III

Základní metody analýzy

PRINCIP SUPERPOZICE. POSTUPY A METODY ANALÝZY ELEKTRICKÝCH OBVODŮ. ELEMENTÁRNÍ METODY ANALÝZY LINEÁRNÍCH ODPOROVÝCH OBVODŮ. OBVODY S JEDNÍM A S VÍCE NEZÁVISLÝMI ZDROJI

Metoda postupného zjednodušování

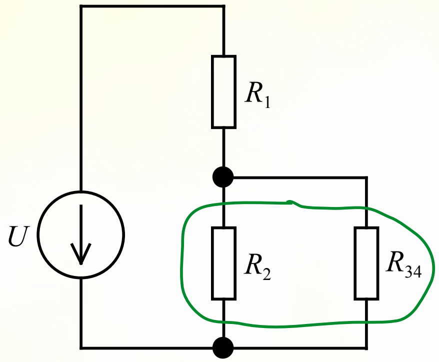
- *Intuitivně jsme tuto metodu použili již dříve*
- v obvodu hledám sériové a paralelní kombinace pasivních prvků, které mohu nahradit celkovým odporem (impedancí)
- postupuji od konce obvodu směrem ke zdroji; postupně tak dostávám ze složitějšího stále jednodušší obvod, až po elementární obvod, u kterého mohu pomocí elementárních metod (Ohmův zákon, dělič napětí / proudu) vypočítat napětí a proudy na zbývajících prvcích
- následně se vracím od elementárního obvodu zpět – vypočítané napětí (proudy) rozděluji mezi jednotlivé prvky obvodu, dokud se nevrátím k původnímu obvodu
- **Příklad:**



- Úkolem je vypočítat napětí U_x

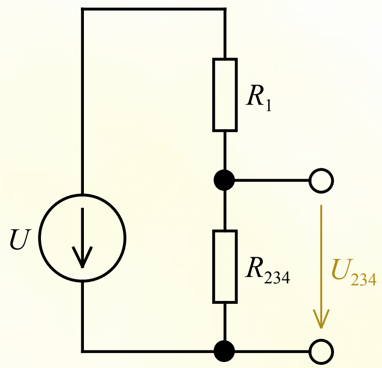
Krok 1: Sloučím rezistory R_3 a R_4, které jsou zapojeny sériově

$$R_{34} = R_3 + R_4$$



Krok 2: Sloučím rezistory R_2 a R_{34}, které jsou zapojeny paralelně

$$R_{234} = \frac{R_2 \cdot R_{34}}{R_2 + R_{34}}$$

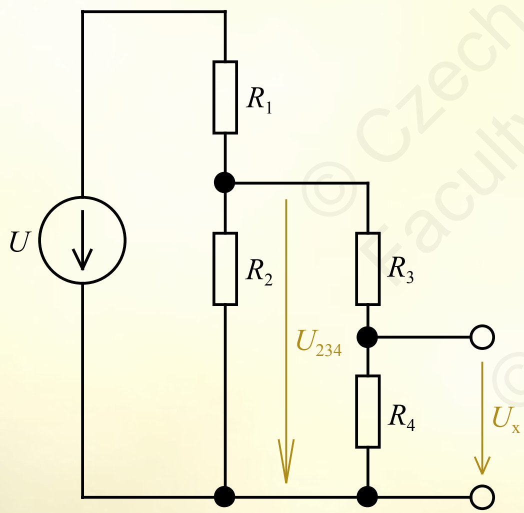


Krok 3: rezistory R_1 a R_{234}, jsou elementárním děličem napětí

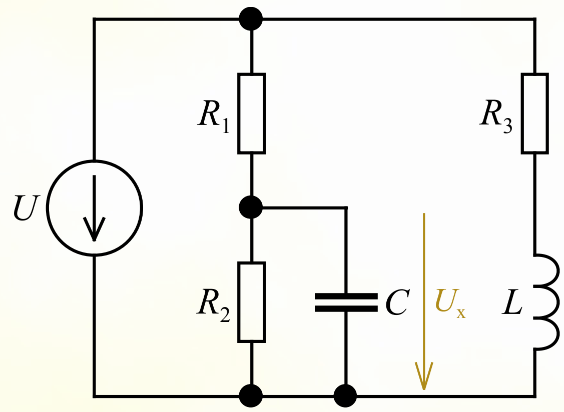
$$U_{234} = U_1 \frac{R_{234}}{R_1 + R_{234}}$$

Nyní se budu vracet zpět k původnímu obvodu – v našem případě stačí rozdělit napětí U_{234} mezi rezistory R_3 a R_4

$$U_x = U_{234} \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$



Příklad: obvod na obrázku je ve stacionárním ustáleném stavu. Vypočítejte napětí na rezistoru R_2, výkon dodávaný zdrojem a energii uloženou v obvodu.



$$R_1 = 2\,\mathrm{k\Omega},\quad R_2 = 4\,\mathrm{k\Omega},\quad R_3 = 3\,\mathrm{k\Omega}$$

$$L = 0.2\,\mathrm{H},\quad C = 10\,\mu\mathrm{F},\quad U = 12\,\mathrm{V}$$

- Napětí na rezistoru R_2:
  Stacionární ustálený stav: kapacitor i induktor je plně nabitý, vzhledem k tomu, že zdroj napětí je stejnosměrný, jsou všechny obvodové veličiny konstantní – kapacitor se chová jako rozpojený obvod, induktor jako zkrat

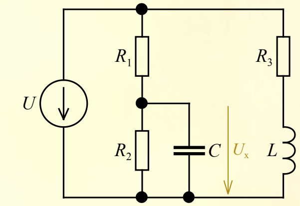
$$U_x = U\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 12 \cdot \frac{4000}{2000 + 4000} = 8\,\mathrm{V}$$

- Výkon dodávaný zdrojem:
  Kapacitor i induktor jsou plně nabity – neodebírají žádnou energii; výkon se omezuje pouze na teplo, rozptýlené rezistory

$$I_{12} = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{12}{2000 + 4000} = 2\,\mathrm{mA} \qquad I_3 = \frac{U}{R_3} = \frac{12}{3000} = 4\,\mathrm{mA}$$

$$P = R_1 I_{12}^2 + R_2 I_{12}^2 + R_3 I_3^2 = 6000 \cdot 0.002^2 + 3000 \cdot 0.004^2 = 72\,\mathrm{mW}$$

- Výkon uložený v obvodu:
  Kapacitor je paralelně připojen k rezistoru R_2, je na něm tedy napětí 8 V.



$$L = 0.2\,\mathrm{H},\ \ C = 10\,\mu\mathrm{F},\ \ U = 12\,\mathrm{V}$$

$$R_1 = 2\,\mathrm{k}\Omega,\ \ R_2 = 4\,\mathrm{k}\Omega,\ \ R_3 = 3\,\mathrm{k}\Omega$$

$$W_C = \frac{1}{2}CU_x^2 = \frac{1}{2}\cdot 10^{-5}\cdot 64 = 0.32\,\mathrm{mJ}$$

Cívkou protéká stejný proud, jako rezistorem R_3, tedy 4 mA

$$W_L = \frac{1}{2}LI_3^2 = \frac{1}{2}\cdot 0.2\cdot 0.004^2 = 1.6\,\mu\mathrm{J}$$

Příklad: stejnosměrná 400 kV přenosová soustava má parametry: R = 23.1 mΩ/km, L = 0.858 mH/km, C = 13.3 nF/km. Zátěž je modelována ekvivalentním rezistorem s odporem 183.5 **Ω**. Délka vedení je 600 km, vstupní výkon 800 MW. Jaké jsou ztráty ve vedení a akumulovaná energie?

Celkový odpor, indukčnost a kapacita vedení jsou:

$$R_l = R\cdot l = 0.0231\cdot 600 = 13.86\,\Omega$$
$$L_l = L\cdot l = 0.000858\cdot 600 = 0.5148\,\mathrm{H}$$
$$C_l = C\cdot l = 13.3\cdot 10^{-9}\cdot 600 = 7.98\,\mu\mathrm{F}$$

Ztrátový výkon ve vedení: $P = R_l\cdot I^2 = R_l\cdot\left(\frac{P_z}{I}\right)^2 = 13.86\cdot\left(\frac{8\cdot 10^8}{4\cdot 10^5}\right)^2 = 55.44\,\mathrm{MW}$

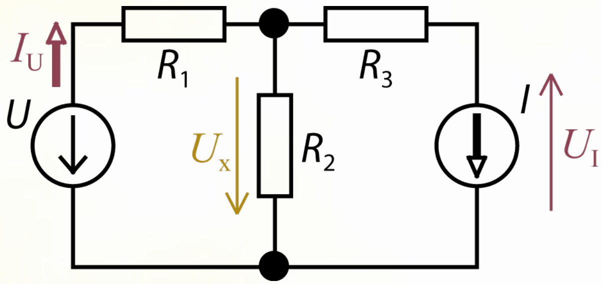
Napětí na konci: $U_2 = U\cdot\frac{R_z}{R_l + R_z} = 40000\cdot\frac{183.5}{13.86+183.5} = 371909\,\mathrm{V}$

Energie, akumulovaná ve vedení:

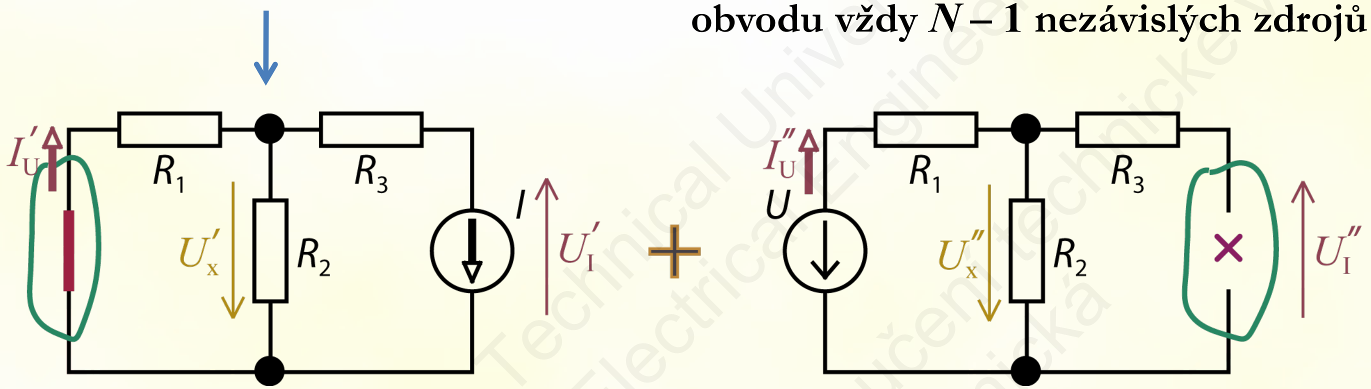
$$P_s = \frac{1}{2}L_lI^2 + \frac{1}{2}C_lU^2 = \frac{1}{2}0.5148\cdot 2000^2 + \frac{1}{2}7.98\cdot 10^{-6}\cdot 400000^2 = 1.668\,\mathrm{MJ}$$

Poznámka: *výpočet je hrubou aproximací celé problematiky (dlouhé vedení se ztrátami…)*

Princip superpozice



- V případě, že **lineární** obvod obsahuje více nezávislých zdrojů, je možné vypočítat jednotlivé obvodové veličiny superpozicí příspěvků od jednotlivých zdrojů
- Pokud obvod obsahuje N nezávislých zdrojů, rozdělíme analýzu obvodu na N nezávislých kroků – v každém z nich **vyjmeme z obvodu vždy N – 1 nezávislých zdrojů**

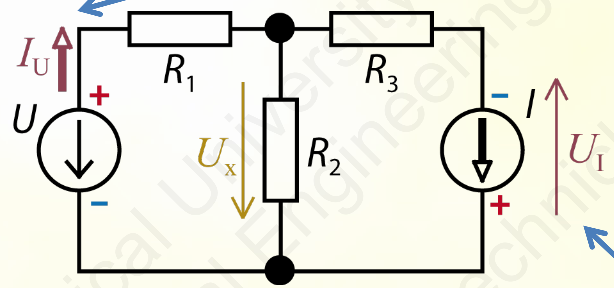


- V uvedeném příkladu obvod obsahuje dva nezávislé zdroje – řešení rozdělíme na dva kroky – v prvním z nich vyjmeme zdroj napětí, ve druhém zdroj proudu
- **Výpočet napětí na rezistoru R_2:** $U_x' = -I \cdot \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, $\quad U_x'' = U \cdot \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$, $\quad U_x = U_x' + U_x''$
- **Výkon na rezistoru R_2: pro výkony obecně princip superpozice neplatí, není to lineární veličina**

  proto $P \neq P' + P''$

  ale samozřejmě stále platí $P_{R_2} = R_2 \cdot I_{R_2}^2 = \dfrac{U_x^2}{R_2}$

- Výkony, dodané jednotlivými zdroji do obvodu, je opět nutné počítat superpozicí – každý zdroj v superpozici **dodává výkon** do obvodu, ale současně mohou **odebírat výkon** z ostatních zdrojů
- Výkony, dodané jednotlivými zdroji vypočítáme ze základního vztahu $P = UI$
- V případě zdroje napětí musíme vypočítat proud, vytékající z jeho kladné svorky



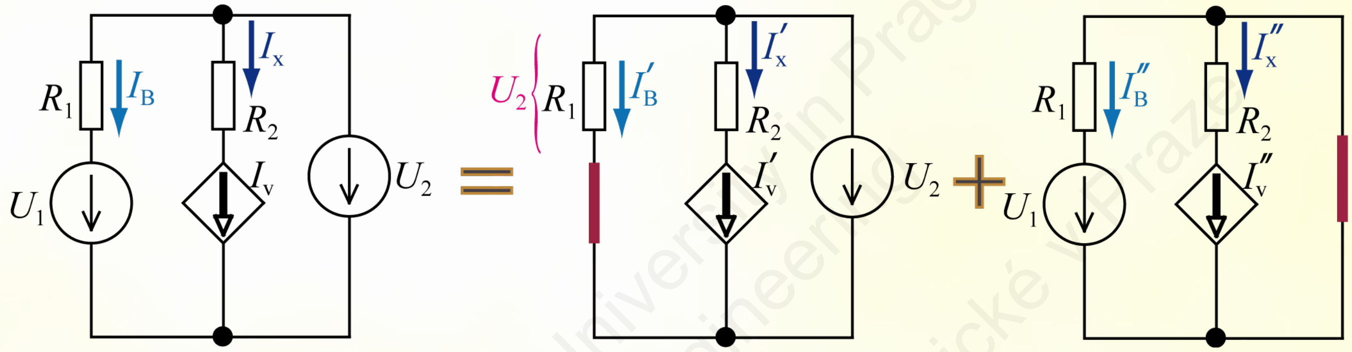
- V případě zdroje proudu musíme vypočítat napětí na jeho svorkách, orientované od svorky, ze které proud vytéká ke svorce, do které proud vtéká

$$I_U' = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \qquad I_U'' = \frac{U}{R_1 + R_2}, \qquad I_U = I_U' + I_U'', \qquad P_U = U \cdot I_U$$

$$U_I' = -U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \qquad U_I'' = I \cdot \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 \right), \qquad U_I = U_I' + U_I'', \qquad P_I = I \cdot U_I$$

Řízené zdroje není možné vyjmout

- **Příklad:** v obvodu podle obrázku máme vypočítat proud I_x



$$I_v = \beta I_B$$

1. Vyjmeme zdroj napětí U_1:
   Na rezistoru R_1 je napětí U_2, proud I_B je tak dán Ohmovým zákonem:

$$I_B' = \frac{U_2}{R_1} \quad \rightarrow \quad I_x' = I_v' = \beta I_B' = \frac{\beta U_2}{R_1}$$

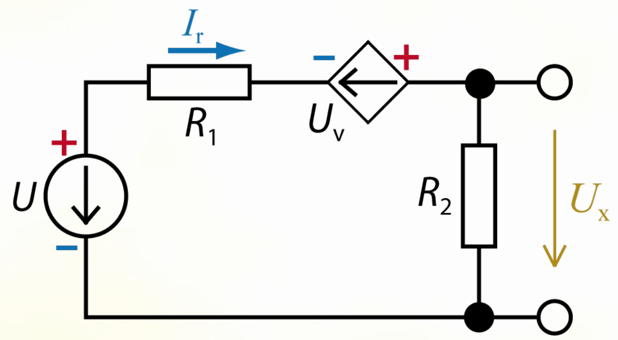
2. Vyjmeme zdroj napětí U_2:
   Na rezistoru R_1 je napětí U_1, proud I_B je tak opět dán Ohmovým zákonem (pozor na orientaci zdroje!):

$$I_B'' = \frac{-U_1}{R_1} \quad \rightarrow \quad I_x'' = I_v'' = \beta I_B'' = \frac{-\beta U_1}{R_1}$$

$$\downarrow$$

$$I_B = I_B' + I_B'' = \frac{\beta U_2}{R_1} - \frac{\beta U_1}{R_1}$$

- **Řízené zdroje není možné vyjmout**
  - **Příklad:** v obvodu podle obrázku máme vypočítat napětí U_x
  - **Obecně je při řešení obvodu je nutné použít Kirchhoffovy zákony (zde napěťový)**



$$U_v = RI_r$$

$$R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega},\quad R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega},\quad R = 1500,\quad U = 12\,\mathrm{V}$$

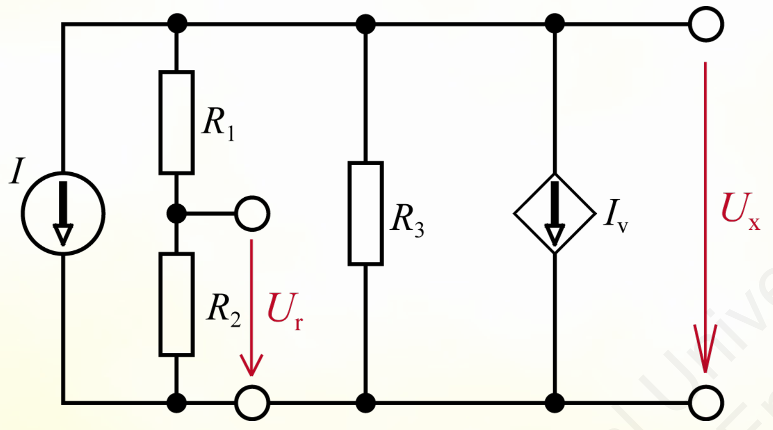
1. K řešení použijeme napěťový Kirchhoffův zákon:

$$-U+R_1I_r-U_v+R_2I_r = 0 \quad\rightarrow\quad -U+R_1I_r-RI_r+R_2I_r = 0 \quad\rightarrow\quad I_r(R_1+R_2-R) = U$$

$$I_r = \frac{U}{R_1+R_2-R} = \frac{12}{1000+2000-1500} = 8\,\mathrm{mA}$$

$$U_x = R_2I_x = 2000\cdot 0.008 = 16\,\mathrm{V}$$

- **Řízené zdroje není možné vyjmout**
  - **Příklad:** v obvodu podle obrázku máme vypočítat napětí U_x
  - **Obecně je při řešení obvodu je nutné použít Kirchhoffovy zákony (zde proudový)**



$$I_v = KU_r$$

$$R_1 = 2\,\mathrm{k\Omega},\quad R_2 = 4\,\mathrm{k\Omega},\quad R_3 = 3\,\mathrm{k\Omega}$$

$$K = 0.0045,\quad I = 20\,\mathrm{mA}$$

1. K řešení použijeme proudový Kirchhoffův zákon:

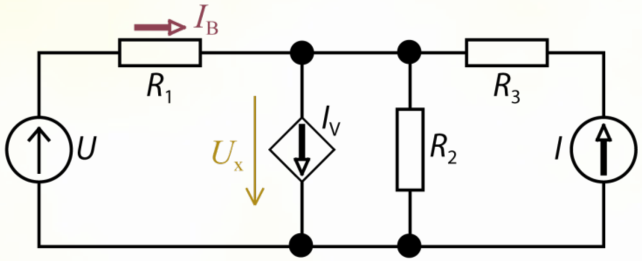
$$I + \frac{U_x}{R_1+R_2} + \frac{U_x}{R_3} + KU_r = 0 \quad \rightarrow \quad I + \frac{U_x}{R_1+R_2} + \frac{U_x}{R_3} + KR_2\frac{U_x}{R_1+R_2} = 0$$

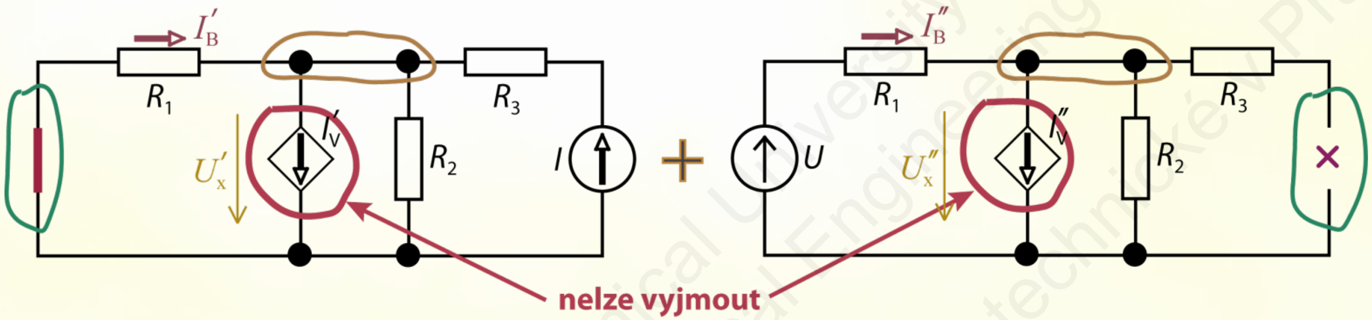
$$U_x\left(\frac{1+KR_2}{R_1+R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = -I \quad \rightarrow \quad U_x = -0.02\cdot\left(\frac{1+0.0045\cdot 2000}{2000+4000} + \frac{1}{3000}\right)^{-1}$$

$$U_x = -0.02\cdot\frac{6000}{12} = -10\,\mathrm{V}$$

- Řízené zdroje není možné vyjmout

  $\Rightarrow$ Při řešení obvodu je stále nutné použít Kirchhoffovy zákony





- Vyjmutí zdroje napětí – v horním uzlu vyjádříme proudový Kirchhoffův zákon

$$\underbrace{\frac{U'_x}{R_1}}_{-I'_B}+\frac{U'_x}{R_2}+\beta I'_B-I=0 \quad\rightarrow\quad U'_x\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}-\frac{\beta}{R_1}\right)=I \quad\rightarrow\quad U'_x=I\left(\frac{1-\beta}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)^{-1}$$

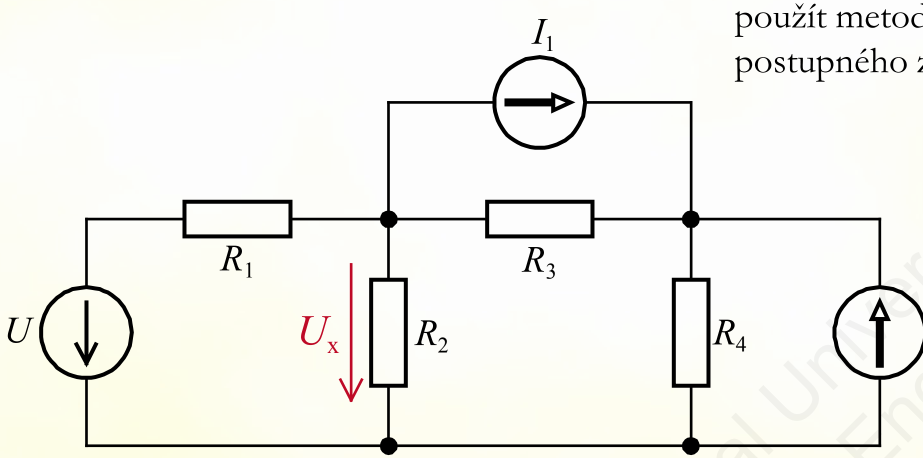
- Vyjmutí zdroje proudu – opět v horním uzlu vyjádříme proudový Kirchhoffův zákon

$$\underbrace{\frac{U''_x+U}{R_1}}_{-I''_B}+\frac{U''_x}{R_2}+\beta I''_B=0 \quad\rightarrow\quad \frac{U''_x+U}{R_1}(1-\beta)+\frac{U''_x}{R_2}=0 \quad\rightarrow\quad U''_x\left(\frac{1-\beta}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=\frac{-U(1-\beta)}{R_1}$$

$$U_x=U'_x+U''_x=I\left(\frac{1-\beta}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)^{-1}+\frac{-U(1-\beta)}{R_1}\left(\frac{1-\beta}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)^{-1}$$

Příklad: V obvodu podle obrázku máme určit napětí U_x

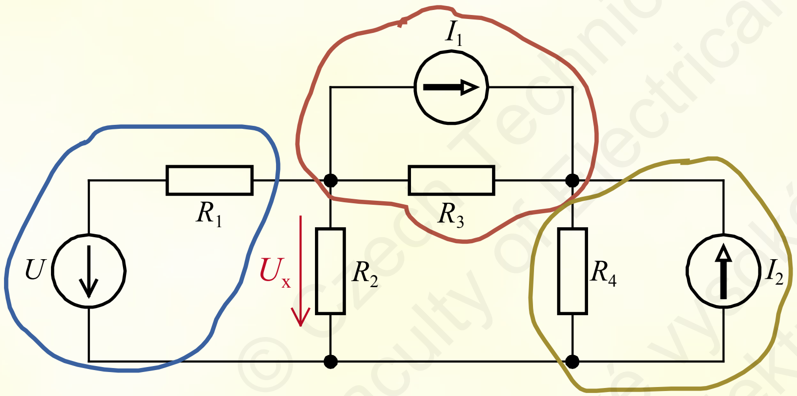
Z dosud studovaných metod analýzy elektrických obvodů můžeme použít metodu superpozice, nebo věty o ekvivalenci zdrojů; metoda postupného zjednodušování bude skrytě vždy přítomna…

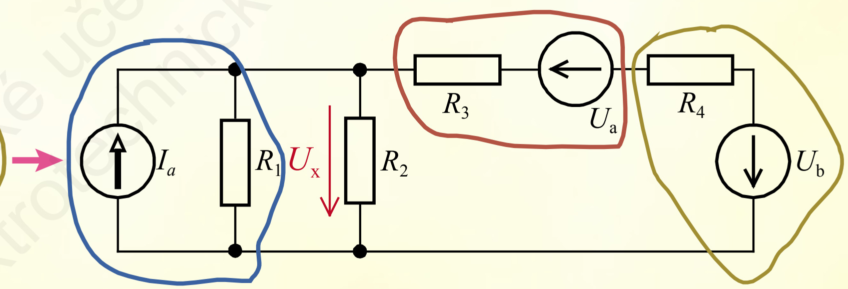


$$R_1 = 8\,\Omega,\ R_2 = 8\,\Omega,\ R_3 = 10\,\Omega,\ R_4 = 10\,\Omega$$

$$U = 40\,\mathrm{V},\ I_1 = 3\,\mathrm{A},\ I_2 = 2\,\mathrm{A}$$

Věty o ekvivalenci zdrojů



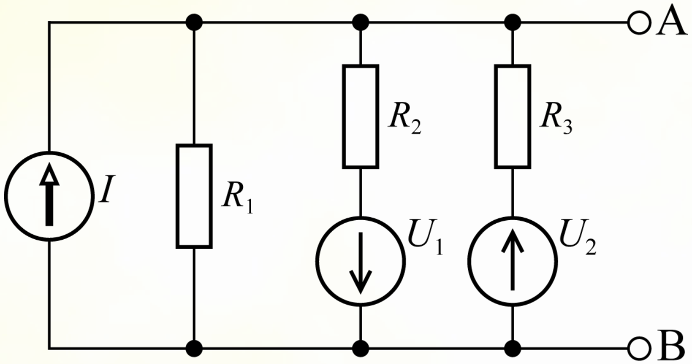


$$I_a = \frac{U}{R_1} = \frac{40}{8} = 5\,\mathrm{A} \qquad U_a = I_1 R_3 = 3 \cdot 10 = 30\,\mathrm{V} \qquad U_b = I_2 R_4 = 2 \cdot 10 = 20\,\mathrm{V}$$

$$I_b = \frac{U_b - U_a}{R_3 + R_4} = \frac{20 - 30}{20} = -0.5\,\mathrm{A} \qquad I = I_a + I_b = 4.5\,\mathrm{A} \qquad R = R_1 \parallel R_2 \parallel (R_3 + R_4) = 3.33\,\Omega$$

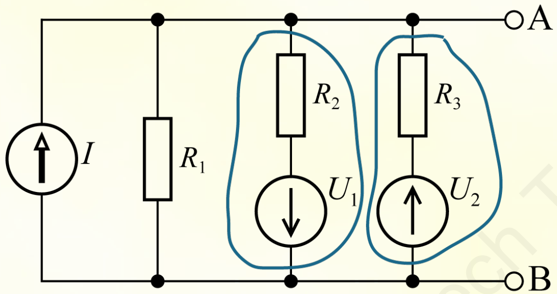
$$U_x = R \cdot I = 3.33 \cdot 4.5 = \underline{\underline{15\,\mathrm{V}}}$$

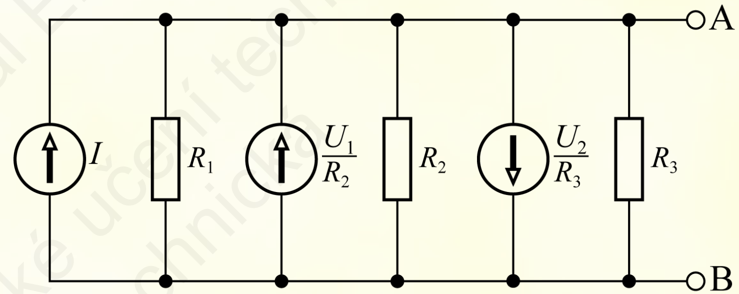
Příklad: obvod na obrázku z pohledu svorek A, B nahraďte Théveninovým náhradním obvodem

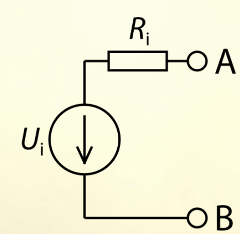


$$I = 2\,\mathrm{A} \qquad R_1 = 20\,\Omega$$
$$U_1 = 24\,\mathrm{V} \qquad R_2 = 4\,\Omega$$
$$U_2 = 20\,\mathrm{V} \qquad R_3 = 5\,\Omega$$

Řešení: s výhodou můžeme využít ekvivalenci zdrojů



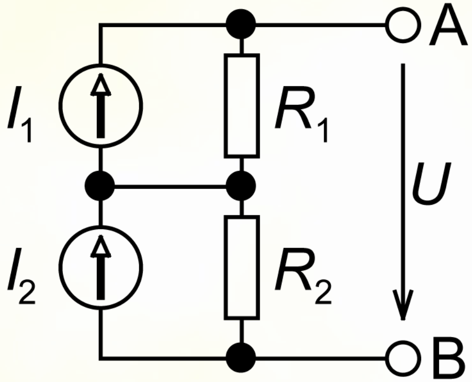




$$I_N = I + \frac{U_1}{R_2} - \frac{U_2}{R_3} = 2 + \frac{24}{4} - \frac{20}{5} = 2 + 6 - 4 = 4\,\mathrm{A}$$

$$R_i = \left(R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)^{-1} = \underline{\underline{2\,\Omega}} \qquad U_i = I_N \cdot R_i = 4 \cdot 2 = \underline{\underline{8\,\mathrm{V}}}$$

Příklad: obvod na obrázku z pohledu svorek A, B nahraďte Théveninovým náhradním obvodem



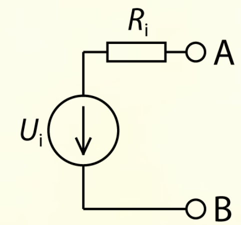
$$I_1 = 2\,\mathrm{A} \qquad R_1 = 30\,\Omega$$
$$I_2 = 3\,\mathrm{A} \qquad R_2 = 20\,\Omega$$

Řešení: s výhodou můžeme využít ekvivalenci zdrojů

☞ zdroje proudu nahradíme zdroji napětí

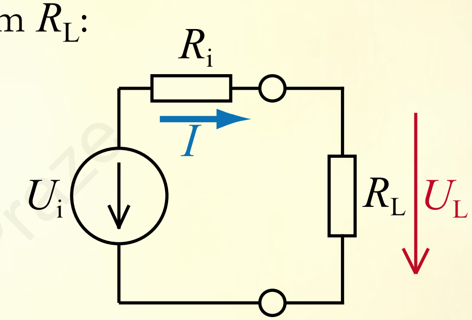
$$U_i = I_1 R_1 + I_2 R_2 = 2 \cdot 30 + 3 \cdot 20 = \underline{\underline{120\,\mathrm{V}}}$$

$$R_i = R_1 + R_2 = \underline{\underline{50\,\Omega}}$$



Zatěžovací přímka

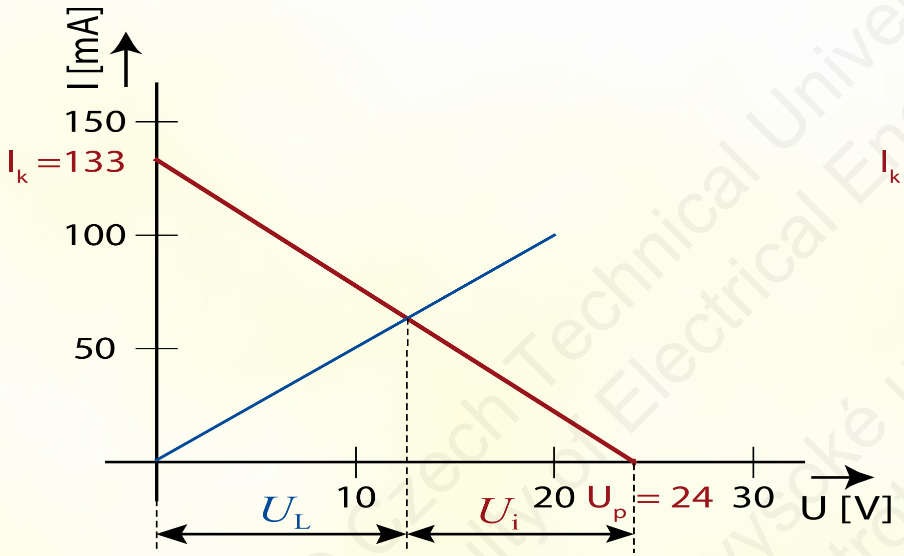
Ještě jednou se vrátíme k Théveninovu náhradnímu obvodu, zatíženém rezistorem R_L:



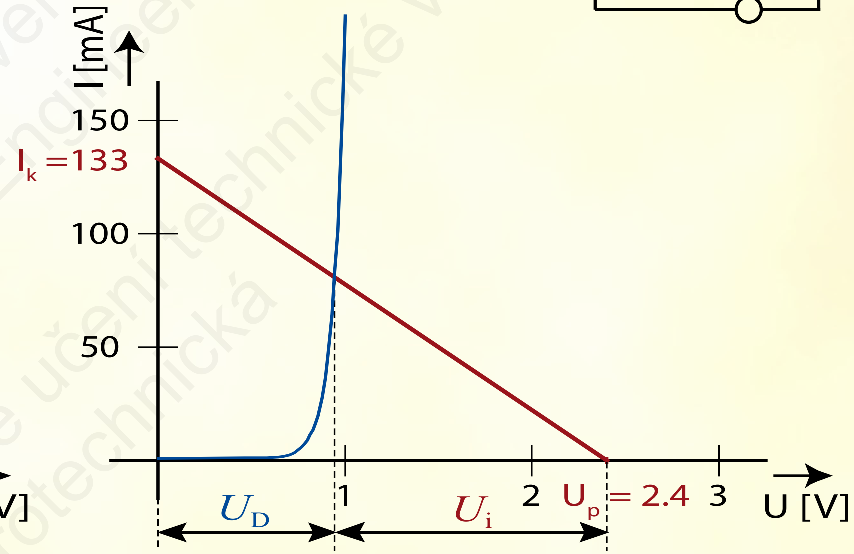
Napětí na zátěži je oproti napětí zdroje nižší o úbytek na vnitřním odporu zdroje vlivem protékajícího proudu:

$$U_L = U_i - R_i I$$

Tuto rovnici můžeme vyjádřit graficky:



Použití voltampérové charakteristiky k řešení obvodu se dvěma odpory



Použití voltampérové charakteristiky k řešení obvodu s jedním nelineárním prvkem

Ilustrační příklad: použití zatěžovací přímky