

FILTRO DI KALMAN

1. INTRODUZIONE

Quest'ultimo capitolo del corso di Avionica rappresenta la sintesi delle varie condizioni che abbiamo affrontato tra la prima e seconda parte: abbiamo trovato diverse soluzioni per determinare lo Stato di Navigazione (i sensori inerziali, le radioassistenze terrestri e satellitari, radar doppler altimetro, sensore air data) e a bordo del velivolo abbiamo tutti questi sistemi, avendo molte informazioni ridondanti o che hanno un vincolo tra di loro (ad esempio, la Velocità rispetto all'aria o rispetto al suolo non sono la stessa grandezza fisica ma sono collegate), cioè ci sono legami funzionali, forti o meno forti, tra tutte le grandezze che vengono stimate fra questi sistemi. Quindi un problema è quello di presentare a chi governa il velivolo (un pilota o un auto-pilota) delle informazioni di sintesi che siano congruenti tra di loro (ad esempio, non si può presentare una velocità rispetto all'aria completamente scollegato al valore della velocità rispetto al suolo, è necessario che a monte sia effettuata una verifica di congruenza e nel momento in cui questa congruenza non sia verificata lo si deve segnalare al pilota in maniera tale da mettere in evidenza una probabile anomalia di uno dei due sistemi e comunque, anche se i sistemi si stanno comportando in maniera nominale, sia generata la migliore informazione di sintesi che dia il valore più probabile della Velocità rispetto al suolo e rispetto all'aria).

Come fatto da esempio per la velocità, possiamo riportare questa caratteristica praticamente per tutte le variabili dello Stato di Navigazione (Posizione, Velocità, Assetto): ad esempio la Posizione degli Inerziali ha un duale rispetto alla Posizione determinata dal GPS, però le caratteristiche di errore dei due sistemi sono completamente differenti, perché gli inerziali hanno un errore che va in deriva, ma, se impostiamo un valore molto accurato dell'istante iniziale, tipicamente per piccoli tempi l'errore dei sistemi inerziali si mantiene piccolo/contenuto; viceversa il GPS non è affetto da un *drift* dell'errore di Posizione, ma la Posizione viene determinata algebricamente dal GPS e, allora, in ogni istante la determinazione della Posizione è indipendente da quello che accadeva negli istanti precedenti e ciò comporta un errore costante, ma tipicamente abbastanza grande, soprattutto in *stand-alone* (fino a 10 m).

Viene così da chiedersi se in qualche modo è possibile trovare delle strategie per mettere insieme tutte queste info, cioè ciò che in inglese è detto:

SENSOR DATA FUSION



Mettere insieme tutte queste info per presentare informazioni di sintesi (cioè integrate tra di loro) e che siano quelle più probabili a partire proprio da quelle dei singoli sensori

Tale caratteristica è stata maggiormente sospinta dal momento in cui si è passato dai *cockpit tradizionali, basic T* dove ogni sistema era indipendente dagli altri e non ci stavano naturalmente delle linee di segnale che integravano i vari sistemi (era il pilota a leggere i vari strumenti e a formarsi un'idea di quella che era la condizione in base alla propria esperienza), ai sistemi LRU (*Logic Replaceable Unit*, cioè si collegano con un bus di dati di bordo) dove ci si collega ad unità centrali e non vanno direttamente al pilota che sono collegate ai display del glass cockpit (primario e secondario) in maniera tale da presentare agevolmente al pilota tutte le info di sintesi; di conseguenza l'architettura attuale dell'avionica di bordo è un'architettura che può facilmente implementare degli algoritmi o applicazioni di *processing* che mettono insieme le misure dalle singole fonti e vanno a ricavare la misura di sintesi più probabile. Da un lato abbiamo esigenza di mettere insieme queste info, che oramai sono tantissime (obiettivo è facilitare tale compito al pilota per governare il velivolo), e dall'altro abbiamo anche la capacità tecnologia, visto che i sistemi sono integrati in delle EFIS; quindi ci sta un pc di bordo con risorse di processing per poter implementare questi algoritmi di sintesi e allora l'unico elemento che ci manca è capire quali sono questi algoritmi di sintesi.

Qual è questa soluzione?

Quella che viene presentata è il FILTRO DI KALMAN, la soluzione più consolidata per effettuare sintesi di info che vengono da più sensori. Anche se non è l'unica soluzione e non è detto che sia la migliore, ma è quella che tradizionalmente più efficiente ad oggi disponibile, dove per efficienza intendiamo che, se abbiamo una migliore accuratezza, abbiamo una maggiore facilità di essere implementato. Allora tipicamente esistono soluzioni che sono più accurate del Filtro di Kalman, ma hanno una casistica implementativa minore e questo comporta che è più difficile sorvegliarne le uscite. Col Filtro di Kalman, invece, esistono tutta una serie di strumenti (matrice di Covarianza) che ci permettono di sorvegliare il livello di prestazioni del filtro, mentre con altri sistemi non abbiamo quantità tradizionalmente assestate che permettono di attuare ciò e di conseguenza, pur essendo potenzialmente più efficienti, sono in maniera applicativa meno affidabili. Inoltre il Filtro di Kalman già di per se stesso ha introdotto un problema computazionale notevole, per cui ad oggi è un algoritmo controllabile con i vari microcontrollori della serie ARM certificati per l'avionica ma già per i microprocessori presenti negli anni '80 e '90 questa cosa era complicata (utilizzo in tempo reale era complesso all'epoca), considerando che il Filtro di Kalman è stato sviluppato nel 1969. Ci sono sistemi più avanzati come i "Filtri a particelle" che sono più accurati, poiché rimuovono alcune delle Hp del Filtro di Kalman e di conseguenza applicabili al caso più generale, però cominciano ad essere computazionalmente più onerosi del Filtro di Kalman e già i microcontrollori attuali della serie ARM soffrono e bisogna usare quelli più avanzati per fare applicazioni di interesse ed è più difficile capire se stanno andando in convergenza.

Allora esiste una forma certificata e codificata per il Filtro di Kalman, mentre gli altri sistemi gli enti certificatori tendono per una certificazione ad hock, non esistendo un processo di certificazione standard.

Ultima osservazione: è un argomento che ha una certa complessità, però la sua base teorica viene dalla Teoria dei Sistemi Estesa (che comprende anche parte della Teoria dei Segnali e gli input aleatori) e, quindi, dietro questo tipo di sistema ci sta tutto un background teorico di tipo matematico e specifico del trattamento dei segnali che non si può curare nel corso di Avionica. Quindi dobbiamo avere un approccio da utilizzatori, non dobbiamo capire tutti i dettagli applicativi, ma avendo una buona base analitica matematica ci interessa capire il problema specifico e come utilizzarlo nelle nostre applicazioni.

Quindi la presentazione sarà "orientata" all'applicazione.

NOTA STORICA

La storia di Kalman è legata alla missione dell'uomo sulla Luna (Missione Apollo) e riguarda alcune problematiche della non possibilità di eseguire la missione in maniera sicura. Arrivati verso la fine degli anni '60 (la missione era del '69, quindi stiamo parlando del '66/'67) si iniziò a parlare di ciò che era pronto o di ciò che non era pronto per eseguire la missione in sicurezza, perché chiaramente un successo della missione sarebbe stato grandioso per l'immagine degli Stati Uniti, ma l'insuccesso clamoroso avrebbe avuto effetto opposto, quindi, se doveva andare male, non doveva avvenire in maniera clamorosa. Allora nell'ambito di queste revisioni ci stava il problema del recupero della capsula al rientro. Al rientro, infatti, la capsula rientra ad una velocità di 7 km/s e, a causa della perdita di qualsiasi link radio per la formazione dello scudo termico cioè l'aria sottoforma di plasma, unica via era di tracciare questa capsula con dei radar e dai punti dei radar andare a delineare l'area di splash down specifica. Bisognava trovare un'area abbastanza contenuta per il recupero degli astronauti (non esistendo rete di costellazioni di satelliti come oggi) e, quindi, trovare una tecnica che dai pochi punti Radar che si ricavano mentre la capsula scendeva con una dinamica complessissima (7 km/s) e da tale sequenza delimitare area di splash ad una zona coperta dalle risorse navali allora disponibili dalla marina americana. Quindi la criticità era questa: non era assicurato il recupero degli astronauti.

Si investì molto su tutti gli studi che aiutavano la NASA stessa a risolvere questa ed altre criticità, determinando il livello complessivo di confidenza della misura di sicurezza della missione abbastanza accettabile. La soluzione che venne presentata per questo tipo di problema fu sviluppata da Rudolph Kalman che all'epoca era un quasi precario della NASA, che tra l'altro nelle prime fasi, poiché vi erano soluzioni alternative proposte da personaggi più eminenti, la sua soluzione non era vista tra quelle possibili o considerate opportunamente. Questo, ed insieme ad altre criticità, produsse dei ritardi e come prima soluzione furono scelte altre ed una arrivò perfino alla sperimentazione con esito negativo (capsula non abitata persa). Scalando le possibili graduatorie di soluzioni, arrivarono alla soluzione proposta da Kalman, anche con una serie di dibattiti facendo a costo zero ulteriori approfondimenti in 2 mesi circa per rendere il progetto più maturo (in realtà vedremo che le equazioni non vengono direttamente da lui ma il problema era stato posto da un francese, di nome Bucy, e la soluzione che lui trovò è legata ad una risoluzione matematica trovata da un matematico italiano chiamato Riccati → la capacità di Kalman fu di mettere insieme questi risultati e di trovare la soluzione).

Il problema era: data una serie di punti come tracce radar e dato il modello dinamico del rientro della capsula, cercare di individuare il punto di splash down più probabile ed è anche quella che è l'area di dispersione dello splash down stesso.

Formalizzò il problema e fu così che passò all'applicazione e con successo.

Questa parentesi storica serve sempre per capire il concetto in gioco che va a rispondere ad una serie di problemi che non avevano una soluzione alternativa valida.

Come possiamo formalizzare questi problemi?

Abbiamo sempre studiato i sistemi detti lineari, per cui si ha un ingresso U , un sistema con un proprio stato X e un'uscita Y . Se questo sistema è lineare tempo continuo, possiamo scrivere questa relazione in forma canonica, come in *Figura 1*.

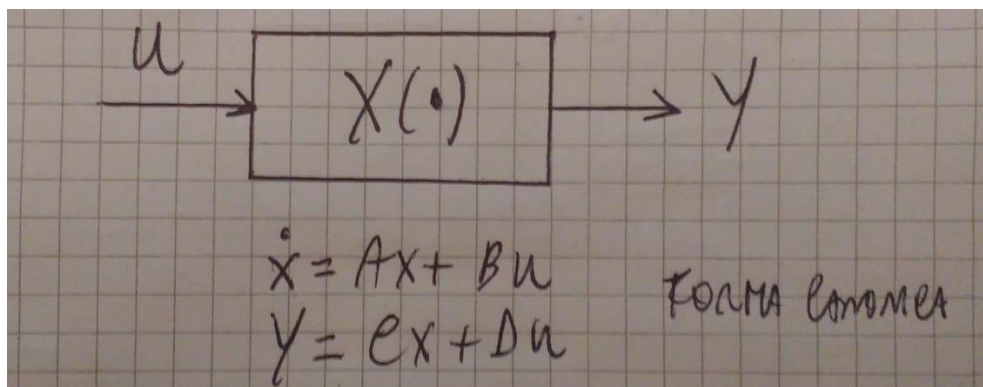


Figura 1

Il problema di Kalman è che oltre all'input deterministico (deterministico significa che possiamo descrivere l'ingresso nel tempo ed è noto) si fa entrare anche un input aleatorio v e teoricamente possiamo avere anche un rumore sull'uscita w . Queste quantità non sono termini deterministici ma v.a. che si distribuiscono secondo una certa funzione di Distribuzioni Aleatorie rispettivamente N e W , come in *Figura 2*. Questo comporta che, se facciamo entrare v come v.a., X e Y diventano anch'esse v.a. (somma di componenti deterministiche e aleatorie). Allora non possiamo più trovare la soluzione a questo problema con gli strumenti per risolvere il caso di *Figura 1*, perché la soluzione di questo nuovo problema richiede di trattare le variabili aleatorie.

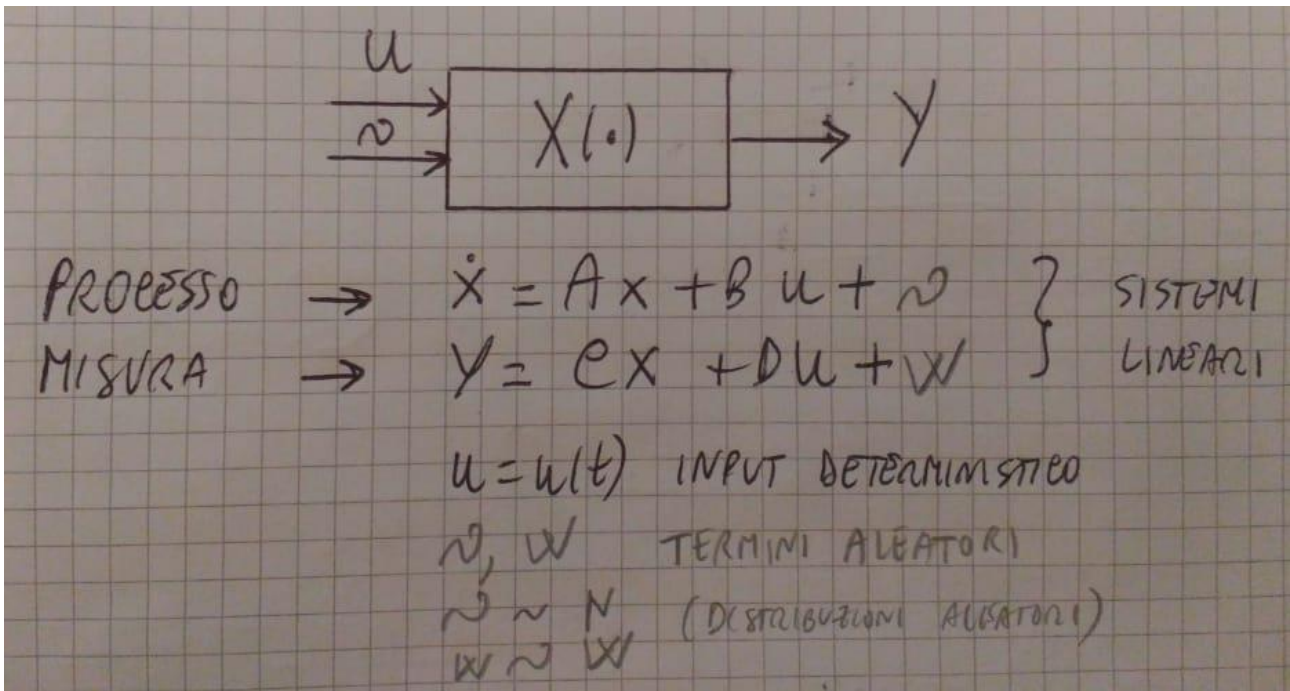


Figura 2

Quando si hanno v.a. non si può pretendere di conoscere il valore puntuale come accade nel caso deterministico, ma si devono considerare le variabili di interesse.

Innanzitutto dobbiamo fare delle IPOTESI su queste v.a. \rightarrow tipicamente le v.a., con cui si va a che fare nei problemi ingegneristici nel 90% dei casi, si modellano che siano variabili Gaussiane, cioè il modello aleatorio che si ha è quello di un sistema che ha un'uscita con una certa media (quindi nella maggioranza dei casi fornisce un valore prossimo a quella media) con valori più lontani dalla media diventano esponenzialmente molto poco probabili da determinarsi (escono con una probabilità che va decrescendo esponenzialmente "a poco a poco" che ci allontaniamo dalla media). In *Figura 3* abbiamo la classica "curva a campana", dove il valore si addensa in prossimità della media (in particolare se si tracciano le linee al 75% si ha una volta la *standard deviation* σ , cioè, se si ha il 75% dell'area, in quell'intervallo quella distanza è una volta la σ).

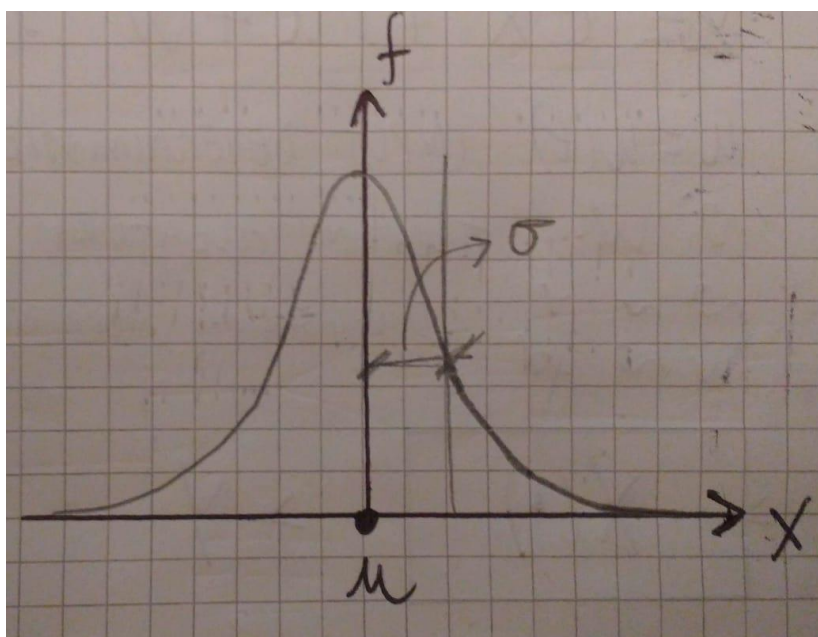


Figura 3

Se modelliamo le nostre v.a. come variabili Gaussiane a media μ e a *standard deviation* σ , abbiamo un modello abbastanza aderente a ciò che capita al 90% dei sistemi in tale ambito (in particolare esistono delle tecniche di aderenza per un'uscita del sistema ad un modello gaussiano, le famose tecniche di Test delle Ipotesi) e in quella condizione possiamo utilizzare una serie di teoremi che ci dicono che per un sistema di tal tipo, cioè un sistema che ha una rappresentazione lineare della propria dinamica e che ha un input gaussiano, dà in output un output di tipo gaussiano. Quindi X e Y sono anch'esse v.a. di tipo gaussiano. Dal punto di vista matematico il problema si semplifica notevolmente, perché non possiamo conoscere i valori di X e Y in ogni istante (essendo v.a.), però possiamo conoscere la distribuzione di probabilità di questi valori. Inoltre possiamo conoscere quest'ultima andando a fissare due parametri, la media μ e la deviazione standard σ , poiché la distribuzione di tipo Normale è una distribuzione a due parametri, riuscendo in tutto e per tutto a stimare questo tipo di distribuzioni.

Per questo tipo di problemi possiamo andare a cercare delle forme di rappresentazione della Dinamica e delle forme di rappresentazione dell'uscita che in qualche maniera aiutino a stimare anzitutto le medie dello Stato e dell'Uscita e, una volta stimate tali medie, a combinare opportunamente lo Stato che in tali applicazioni chiamiamo **PROCESSO** e l'Uscita che in tali applicazioni chiamiamo **MISURA** →

Combiniamo opportunamente queste info in maniera tale che, grazie alle info che sono nelle equazioni di MISURA, riusciamo a minimizzare l'errore che abbiamo sul PROCESSO

Espresso così il problema sembra puramente astratto, ma cerchiamo di darne un'applicazione e poi vediamo i dettagli implementativi: un'applicazione immediata è quella ai nostri sistemi di Navigazione. Quando si tratta di sistemi di Navigazione tipicamente il PROCESSO è costituito dai sensori inerziali, perché, quando abbiamo studiato i vari sensori, gli unici per i quali siamo riusciti ad individuare **un modello dinamico di tipo lineare sono stati proprio quelli inerziali**, in particolare il modello dinamico di tipo lineare è quello determinato dalle Equazioni dell'Errore della Navigazione Inerziale. Infatti quando le si studiano si pone proprio l'attenzione sul fatto che esse servono per 2 motivi: 1) per capire come evolve tale errore (in particolare l'evoluzione dell'errore di Quota si studia che va subito in *drift*) e 2) per il bisogno di avere un modello dinamico lineare (si vedrà che la famosa matrice (9×9) ϕ diventerà 15×15 e costituisce la matrice A del PROCESSO nell'ambito del modello del Filtro), quando si vanno combinare le info dei sensori inerziali per contenerne la deriva con le info provenienti da altri tipi di sensori (Radioassistenze terrestri, GPS, il Radar Altimetro, Magnetometri, Sensori Air Data). Le equazioni deterministiche tipicamente vengono dette di Stato, però se ci mettiamo questa componente aleatoria v vengono dette di PROCESSO e, se vogliamo averne un'idea o rappresentazione pratica, si ragiona sui sistemi inerziali, dove abbiamo un'evoluzione dinamica dell'errore data dall'Equazione dell'Errore della Navigazione Inerziale, ma abbiamo anche dei termini aleatori determinati dalle misure dei sensori inerziali stessi (i sensori inerziali hanno una componente RANDOM dell'errore, che è rappresentata in tal caso da v).

A questo punto viene facile capire chi costituisce la MISURA: in quest'ultima possiamo metterci tutto il resto, cioè Radioassistenze terrestri, Radioassistenze satellitari, Radar Doppler Altimetro, Air Data System, ILS, Magnetometri etc. Tipicamente questi sistemi hanno un'equazione dell'Errore di tipo algebrico, cioè l'errore sull'uscita dipende puntualmente dall'errore sull'ingresso e non anche dalla storia dell'errore sull'ingresso. Quindi questi sistemi possono essere chiamati sistemi di MISURA in tale applicazione nel momento in cui è presente la componente aleatoria w , che abbiamo visto essere presente in questi sistemi. Errori di tipo algebrico che danno un effetto immediato sull'Uscita almeno in prima approssimazione. Possono così costituire il modello della MISURA.

Come schema delle ultime cose dette consideriamo la *Figura 4* →

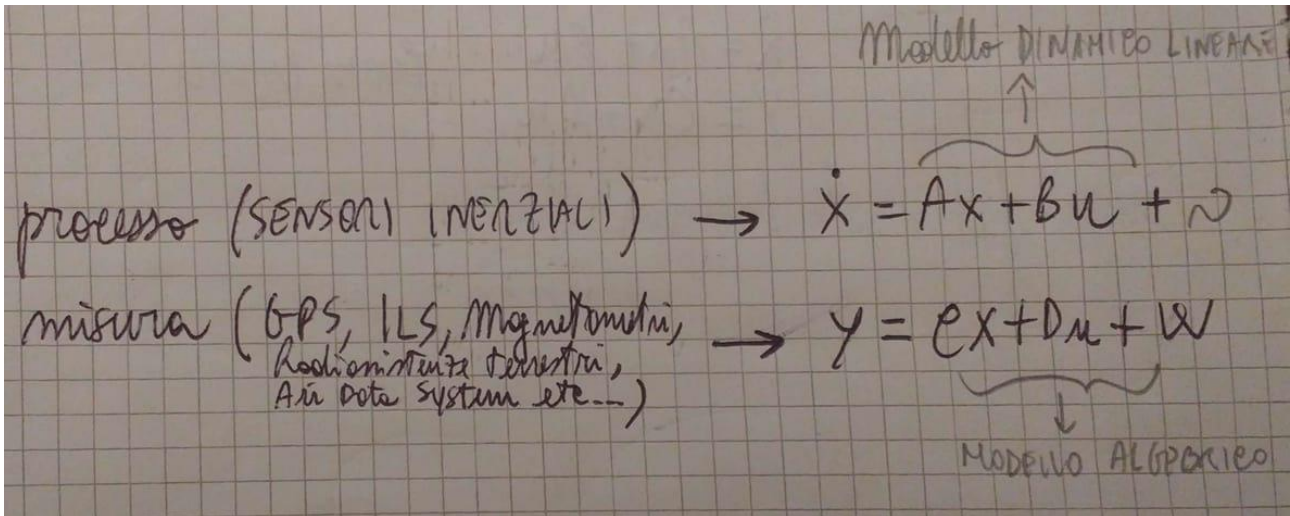


Figura 4

Il Problema di Kalman sta fondamentalmente nel fatto di cercare di capire come sfruttare al meglio le info dei sensori di MISURA per minimizzare e almeno contenere entro limiti accettabili l'Errore di PROCESSO, che dal nostro punto di vista significa come sfruttare al meglio le info che provengono dalle Radioassistenze terrestri, GPS, il Radar Altimetro, Magnetometri, Sensori Air Data etc., al fine di contenere il *drift* determinato dai sensori inerziali.

Prima di studiare la risposta a questo problema, consideriamo prima il concetto di Filtro →

2. Filtering, prediction, and smoothing

La risposta al precedente problema è l'uso di un Filtro, cioè riusciamo a trovare la maniera di minimizzare l'errore di PROCESSO andando a sfruttare le info dei sistemi di misura usando un Filtro.

In sintesi la formulazione della questione →

Problema: Come utilizzare al meglio le informazioni dei sistemi di misura per minimizzare (contenere entro limiti accettabili) l'errore di processo.

Soluzione: Utilizzo di un Filtro.

Prima vediamo il concetto di Filtro e poi studiamo il contenuto dinamico del Filtro di Kalman.

In linea teorica possiamo avere 3 applicazioni dei cosiddetti "Filtri Dinamici".

Tali Filtri Dinamici, cioè le soluzioni a questo tipo di problema, possono essere di 3 tipologie, in funzione del fatto di quando sono state realizzate le osservazioni di MISURA rispetto al tempo in cui vogliamo fare una STIMA del PROCESSO accurata. Se vogliamo effettuare una stima accurata, definiamo:

- t_{obs} : tempo della MISURA
- t_{est} : *time of estimate*

Ad esempio, abbiamo una misura dei sensori del GPS e vogliamo fare una stima quanto più accurata possibile delle uscite dei sensori di PROCESSO in un tempo t_{est} . Se questo t_{est} è successivo al tempo dell'osservazione ($t_{obs} < t_{est}$) i filtri vengono detti *Predittori*, come se volessimo estrapolare l'info e non vogliamo sapere ora dove andiamo ma fra qualche istante dove si va a finire (questa era l'applicazione di interesse di Kalman, perché voleva sapere la capsula dove andava a finire).

Nel momento in cui siamo interessati, oltre all'istante successivo, anche all'istante stesso in cui si fa l'osservazione, abbiamo i *Filtri* in senso proprio, che è qualcosa che ci dà lo Stato del PROCESSO, cioè la migliore stima del PROCESSO sia ad istanti futuri sia in quelli attuali (per attuale si intende l'istante in cui viene effettuata la MISURA) ($t_{obs} \leq t_{est}$).

NB: le equazioni riportate nell'introduzione sono tempo continue, quindi vediamo questi istanti come un'infinita continuità (fra due istanti ce ne sta un numero infinito di istanti intermedi nel quale possiamo determinare i valori di queste equazioni); ma nell'applicazione pratica non è così, perché usiamo tali equazioni sfruttando dei sistemi a micro-processore, dove si ha un *clock* che cadenza le operazioni e, di conseguenza, la rappresentazione più corretta che utilizzeremo è una rappresentazione di tipo tempo discreto, come in *Figura 5*.

$$X_{k+1} = \Phi_k X_k + B_k u_k + N_k$$

$$Y_k = C_k X_k + D_k u_k + W_k$$

$$\Phi_k = e^{-AT}, \text{ con } T = t_k - t_{k-1} \text{ tempo tra 2 istanti necessari}$$

Figura 5 Equazioni equivalenti tempo discrete (forma come Predittore).

La $\phi_k = e^{-AT}$ è un' esponenziale matriciale, che si risolve con la matrice di convoluzione .

Quando parliamo di istanti successivi tipicamente parliamo di istanti discreti successivi e non continui. Per questo la variazione ha importanza, perché se ragionassimo solo per sistemi continui non interesserebbe stimare proprio nell'istante, basterebbe infatti un microsecondo dopo, ad esempio, e la distinzione fra *Predittori* e *Filtri* dal punto di vista ingegneristico non ha senso. Viceversa, per sistemi discreti con quel T , che può essere un 1 s, la distinzione tra *Predittore* e *Filtro* diventa importante, perché tra i due ci sta 1 s e quindi capire se siamo interessati ad ora o all'uscita fra 1 s.

L'ultima forma di utilizzo dei filtri, cioè dei sistemi analitici che risolvono il **Problema** è quella come *Smoother*, cioè come interpolatori e il tempo di osservazione è successivo al tempo in cui vogliamo fare la stima ($t_{obs} > t_{est}$). Questo utilizzo è quello che si fa, ad esempio, da parte delle stazioni di controllo per le misure dei satelliti GPS, dove abbiamo una serie di misure di tracciamento delle orbite dei vari satelliti e andiamo a correggere anche le posizioni in istanti precedenti dei satelliti stessi perché queste permettono di stimare al meglio le Efemeridi, non essendo intenzionato a correggere solamente la posizione attuale del satellite ma anche a correggere le posizioni precedenti, perché conoscere accuratamente tutte queste posizioni permette di conoscere il Nodo Ascendente di un'orbita. In pratica andiamo a raffinare delle info che già si possiedono ma che vogliamo conoscere con un'accuratezza maggiore sfruttando le info di MISURA successive per incrementare la conoscenza sugli eventi passati.

In sintesi:

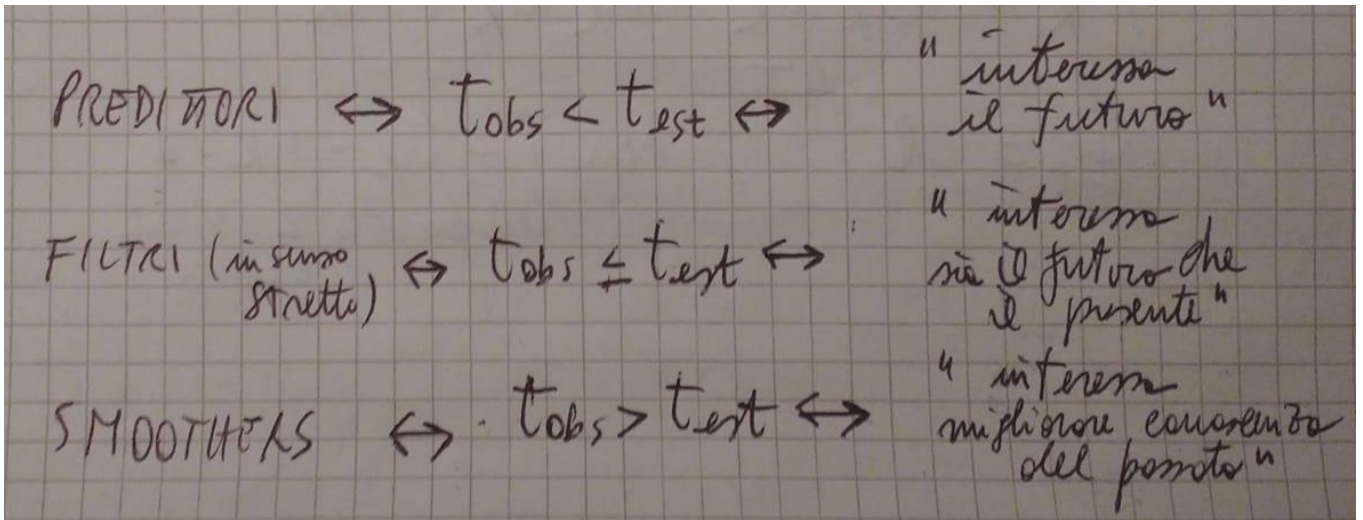


Figura 6 Tipologie di utilizzo dei filtri

Ora dobbiamo vedere come si applica il Filtro di Kalman, come la MISURA può minimizzare incertezza sul PROCESSO tramite la soluzione Filtro di Kalman.

3. Kalman Filter: State Estimation Problem Assessment

Impostiamo il problema in forma discreta, come già intravisto in *Figura 5* (attenzione solamente al fatto che ora abbiamo k e $k - 1$):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \Phi \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G} u_{k-1} + \omega_{k-1} \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{H} \mathbf{x}_k + \nu_k \end{aligned}$$

Figura 7

Così abbiamo la forma come Filtro in senso stretto, mentre in *Figura 5* come Predittore. Si può dire anche che la ϕ sia funzione di k , non è necessario che il sistema sia Tempo Invariante, ma possiamo avere pure sistemi in cui lo Stato varia nel tempo, importante che sappiamo come variano le varie matrici (questo è ciò che capita nelle matrici delle Equazioni della Navigazione Inerziale: se riportiamo la matrice dell'errore, essa contiene i termini di velocità, posizione e quest'ultimi variano nel tempo), allora le matrici ϕ , G e H variano ad ogni istante e a rigore dovevamo mettergli il pedice. u_{k-1} è l'input, ω_{k-1} è l'errore di Processo. Dopodichè abbiamo l'uscita, ovvero la MISURA, dove trascuriamo il legame con l'input; in realtà lo potremmo trascurare anche nello Stato perché, se abbiamo un input deterministico, essendo problemi separabili, possiamo conoscere la Risposta a questo input deterministico semplicemente andando a separare i problemi (PSE applicabile ai sistemi lineari). Questo input deterministico potrebbe essere, ad esempio, una media costante, un BIAS e lo si può modellare come un gradino, lo si inserisce nell'equazione ed essendo deterministico lo posso valutare separatamente. Per questo come v.a. usiamo v.a. Gaussiane, ma in particolare v.a. Normali, nel senso a Media nulla e a deviazione standard qualsiasi:

- $\mu = 0$ (la media in genere è un segnale deterministico)
- $\sigma = ?$ (deviazione standard qualsiasi)

Quindi il nostro problema è determinato dalla deviazione standard dell'input, perché la media la si può trattare andando a separare i problemi e le uscite di un sistema deterministico le sappiamo calcolare da Sistemi I. Ciò che è più complicato è riuscire a calcolare le uscite di sistemi ad input aleatorio.

Se vogliamo rappresentare secondo uno schema a blocchi il nostro sistema, esso può essere dato da questo modello di *Figura 8*, dove ciò che ci interessa per ora è il modello dinamico del nostro sistema (rettangolo di sx denominato come *Discrete-time Equivalent model*, mentre il rettangolo di dx denominato come *Computer* rappresenta il Filtro che vedremo dopo, cioè l'algoritmo che implementa il Filtro).

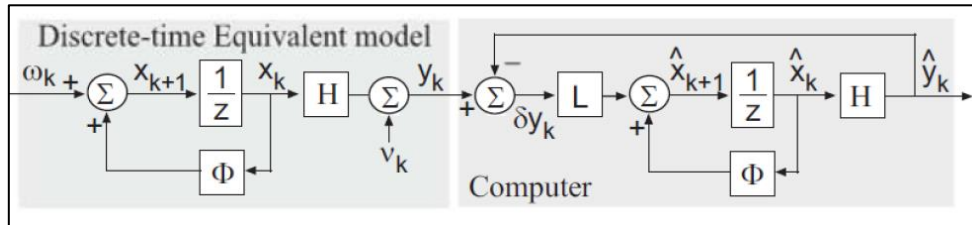


Figura 8

Che ipotesi faceva Kalman? Sono le ipotesi sul rumore: **MODELLO DI KALMAN**

Rumore PROCESSO/MISURA →

- 1) Gaussiano
- 2) Bianco: significa che le determinazioni della v.a. (cioè i parametri della v.a.) devono essere indipendenti dalla frequenza → $\mu \neq \mu(f)$
 $\sigma \neq \sigma(f)$

Purtroppo questo capita per pochi segnali, ma molto spesso se facciamo la distribuzione spettrale della media e della deviazione standard, soprattutto quest'ultima, cambiano da frequenza a frequenza. Anche in tal caso possiamo ragionare per approssimazioni successive, cioè, se abbiamo uno spettro della σ come in *Figura 9*, possiamo applicare il concetto di "Rumore Colorato", distinguendo due rumori discreti σ_1 e σ_2 , per cui tra la frequenza 0 (associata a σ_1) e la frequenza f_1 abbiamo il valore costante σ_1 , mentre da f_1 all'infinito abbiamo il valore σ_2 . Quindi trattiamo i due problemi a seconda del pacchetto di frequenze che usiamo e poi combiniamo insieme i risultati ("Rumore Colorato", proprio perché al variare della frequenza abbiamo diverse "tonalità", mentre la "luce bianca" è quella che contiene uniformemente tutte le frequenze).

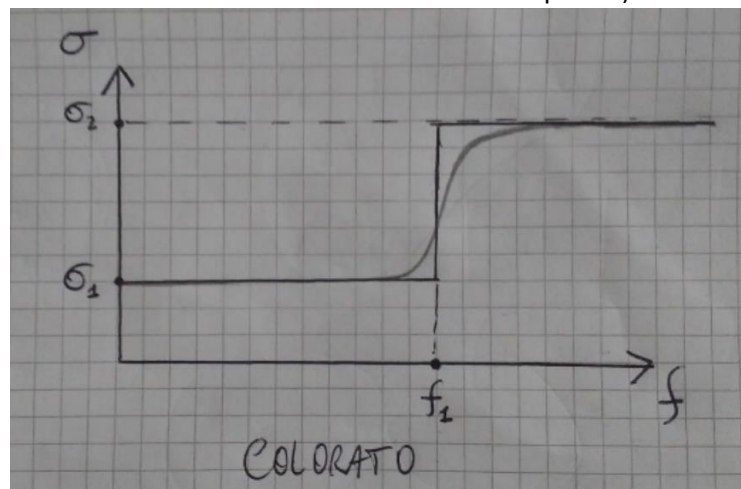


Figura 9

- 3) Media Nulla (per questo la σ è importante)
- 4) Autocorrelazione impulsiva

La 4) significa che la deviazione standard del segnale uscita in un singolo istante dal punto di vista statistico è completamente indipendente dalle uscite del rumore in un altro istante del nostro sistema. Ciò che dobbiamo ricordare per il Filtro di Kalman è che dobbiamo ritenere che siano valide queste ipotesi:

$$\text{var}(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l) = \mathbf{R}_k \delta_{kl}$$

$$\text{var}(\boldsymbol{\omega}_k, \boldsymbol{\omega}_l) = \mathbf{Q} \mathbf{d}_k \delta_{kl}$$

con \mathbf{R}_k matrice di autocorrelazione del rumore di misura e

con $\mathbf{Q} \mathbf{d}_k$ quella del rumore di processo

Quindi, il Filtro di Kalman ha una serie di ipotesi:

- Una prima Hp è la dinamica di PROCESSO sia lineare e che anche l'equazione di MISURA sia lineare.
- Una volta fatte queste ipotesi a monte, ci sono delle ulteriori ipotesi sui contenuti di queste equazioni e in particolare sul rumore, del tipo 1), 2), 3) e 4).

Da ciò che abbiamo appena detto, possiamo affermare che il Filtro di Kalman ha delle limitazioni, perché, se quello che ci capita non è esattamente così, chiaramente si avrà un errore aggiuntivo nella stima del sistema che è l'errore del modello, che in realtà, essendo il sistema aleatorio, molte volte è contenuto nelle equazioni, cioè possiamo modellare maggiorando l'incertezza in $\boldsymbol{\omega}_{k-1}$, perché si va a dire che il modello non è lineare e, quindi, ci mettiamo una deviazione standard più grande, che "mappa" la non-linearità. Per questo molte volte su questi filtri si fanno operazioni di tuning, cioè teoricamente tutto funziona secondo le ipotesi, però praticamente ci sta un'incertezza ulteriore, dovuta all'entropia in natura, che non si riesce a modellare e si ritiene di inserirlo "allargando" un po', cioè aumento l'incertezza del termine $\boldsymbol{\omega}_{k-1}$ di Figura 7. Per ciò vedremo che il Filtro si dirà Sub-Ottimo e non Ottimo, perché per avere il Filtro Ottimo dovremmo sapere quanto vale l'incertezza, ma in realtà non sappiamo trovare la soluzione migliore e ne troviamo una che arriva alla migliore con un certo margine.

Una maniera è questa per risolvere ciò, oppure usare altri Filtri, come il "Particle Filter" (tolgono sia linearità che ipotesi di rumore gaussiano) o che rimuovono le Hp, come quelli che rimuovono solo le hp di rumore Gaussiano (Filtro di Kalman Unscented) o che rimuovono solo le hp di linearità. Però, quest'ultimi non sono processi ben codificati, in fase di ricerca e sono molto onerosi computazionalmente.

Invece, col Filtro di Kalman abbiamo un processo ben codificato e con un onere computazionale che può essere gestito dagli attuali micro-processor anche ad elevatissima frequenza (1000 volte a secondo).

In sintesi le ipotesi fondamentali:

- La dinamica di PROCESSO è modellata da equazioni differenziali lineari.
- La misura è modellata da equazioni algebriche lineari.
- Il NOISE è un rumore gaussiano bianco sia per il PROCESSO che per la MISURA.
- Deve rispettare il fatto di avere media nulla e ad autocorrelazione impulsiva

Ora dobbiamo capire come funziona il Filtro, ovvero come dal modello di MISURA al modello del PROCESSO riusciamo a ricavare delle info utili a minimizzare l'errore su quest'ultimo.

4. Filtering

Possiamo introdurre delle equazioni approssimate, dove compare il solito simbolo " $\hat{\cdot}$ " che significa che si stima qualcosa a meno di termini che non riusciamo a valutare. Quindi possiamo dire che il PROCESSO evolve secondo una legge a meno dei termini di Noise. Per la stima a priori si metterà un apice " $-$ ", meno rispetto alla correzione di Kalman. La stima a priori del PROCESSO la possiamo determinare solo attraverso la l