

# CAPÍTULO 36

## LA LEY DE LA INDUCCIÓN DE FARADAY

A menudo podemos prever el resultado de un experimento al considerar cómo se relaciona éste por simetría con otros experimentos. Por ejemplo, una espira de corriente dentro de un campo magnético experimenta un momento de torsión (debido al campo) que hace girar a la espira. Consideremos una situación similar: una espira de alambre en la que no existe corriente se coloca dentro de un campo magnético, y un agente externo aplica un momento de torsión de tal forma que haga girar a la espira. ¡Hallamos que en la espira aparece una corriente! En una espira de alambre dentro de un campo magnético, una corriente produce un momento de torsión y un momento de torsión produce una corriente. Éste es un ejemplo de la simetría de la naturaleza.

La aparición de corriente en la espira es por ejemplo de la aplicación de la ley de la inducción de Faraday, que constituye el temo de estudio en este capítulo. La ley de Faraday, que es una de las cuatro ecuaciones de Maxwell, se dedujo a partir de una serie de experimentos sencillos y directos, que pueden llevarse a cabo fácilmente en el laboratorio y que sirven directamente para demostrar la ley de Faraday.

### 36-1 LOS EXPERIMENTOS DE FARADAY

La ley de la inducción de Faraday tiene su origen en los experimentos realizados por Michael Faraday en Inglaterra en 1831, y por Joseph Henry en Estados Unidos casi al mismo tiempo.\* Aunque Faraday publicó sus resultados primero, lo cual le da la prioridad del descubrimiento, a la unidad de inductancia en el SI (véase el capítulo 38) se le llama *henry* (abreviatura H). Por otra parte, la unidad de capacitancia en el SI recibe el nombre, como ya hemos visto, *defarad* (abreviatura F). En el capítulo 38, en donde estudiamos las oscilaciones en circuitos capacitivo-inductivos, veremos cuán apropiado es vincular los nombres de estos dos talentosos contemporáneos en un solo contexto.

La figura 1 muestra una bobina de alambre como parte de un circuito que contiene un amperímetro. Normalmente, cabría esperar que el amperímetro no mostrase corriente en el circuito porque parece que no

existe una fuerza electromotriz. Sin embargo, si desplazamos un imán de barra hacia la bobina, con su polo norte encarando

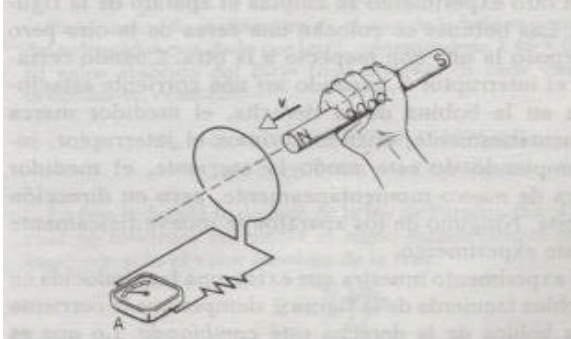


Figura 1 El amperímetro A marca cuando el imán se mueve con respecto a la bobina.

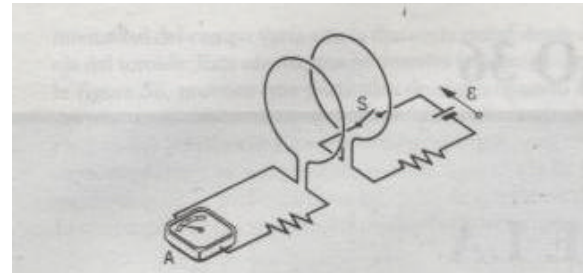


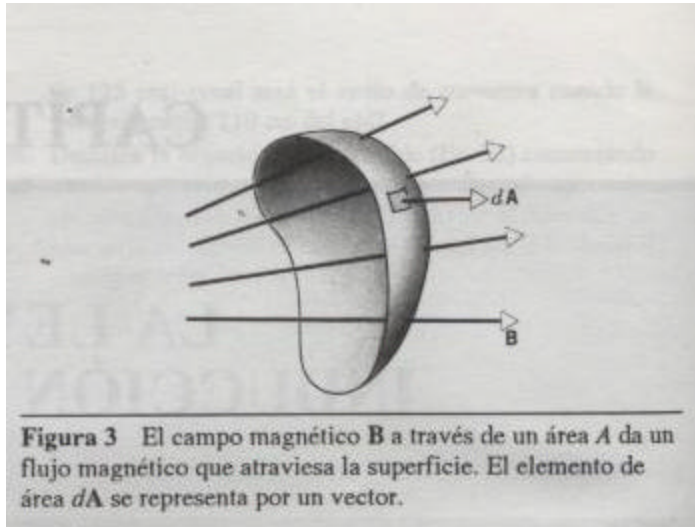
Figura 2 El amperímetro A marca momentáneamente cuando se cierra o se abre el interruptor S. No interviene ningún movimiento físico de las bobinas.

a la bobina, ocurre un fenómeno notable. *Al mover el imán*, el indicador del amperímetro se mueve, demostrando con ello que pasa corriente por la bobina. Si mantenemos al imán estacionario con respecto a la bobina, el amperímetro no marca. Si movemos el imán *alejándose* de la bobina, el medidor muestra de nuevo una desviación, pero ahora en dirección opuesta, lo cual significa que la corriente en la bobina circula en dirección opuesta. Si usamos el extremo del polo sur de un imán en lugar del extremo del polo norte, el experimento funciona como se ha descrito, pero la desviación se invierte. Cuanto más aprisa se mueve al imán, mayor será la lectura registrada en el medidor. Experimentos posteriores demuestran que *lo que importa es el movimiento relativo entre el imán y la bobina*. No existe ninguna diferencia en que movamos el imán hacia la bobina o la bobina hacia el imán.

La corriente que aparece en este experimento se llama *corriente inducida* y se dice que se origina por una fuerza *electromotriz inducida*. Nótese que no existen baterías en ninguna parte del circuito. Faraday dedujo, a partir de experimentos como éste, la ley que da la magnitud y dirección de las fem inducidas. Tales fem son muy importantes en la práctica. Es muy probable que las lámparas del salón donde usted está leyendo este libro funcionen por una fem inducida producida en un generador eléctrico comercial.

En otro experimento se emplea el aparato de la figura 2. Las bobinas se colocan una cerca de la otra pero en reposo la una con respecto a la otra. Cuando cerramos el interruptor S, creando así una corriente estacionaria en la bobina de la derecha, el medidor marca momentáneamente; cuando abrimos el interruptor, interrumpiendo de este modo la corriente, el medidor marca de nuevo momentáneamente, pero en dirección opuesta. Ninguno de los aparatos se mueve físicamente en este experimento.

El experimento muestra que existe una fem inducida en la bobina izquierda de la figura 2 siempre que la corriente de la bobina de la derecha esté *cambiando*. Lo que es significativo aquí es *la velocidad a la que cambia la corriente y no la intensidad de la corriente*.



La característica común de estos dos experimentos es el *movimiento o cambio*. La causa de las fem inducidas es el imán *en movimiento* o la corriente *cambiante*. En la sección siguiente damos la base matemática de estos efectos.

### 36-2 LA LEY DE INDUCCIÓN DE FARADAY

Imaginemos que existen líneas de un campo magnético provenientes del imán de barra de la figura 1 y de la espira de corriente de la derecha en la figura 2. Algunas de esas líneas del campo pasan a través de la bobina izquierda en ambas figuras. Cuando se mueve el imán en la situación de la figura 1, o cuando se abre o cierra el interruptor en la figura 2, el número de líneas del campo magnético que pasan a través de la bobina de la izquierda cambia. Como lo demostraron los experimentos de Faraday, y como la técnica de Faraday de las líneas de campo nos ayuda a percibir, *lo que induce la fem en el anillo es el cambio en el número de líneas de campo que pasan a través de un circuito cerrado*. Específicamente, lo que determina la fem inducida es la *velocidad de cambio* en el número de líneas de campo que pasan a través del anillo.

Para hacer a este enunciado cuantitativo, introduzcamos el *flujo magnético*  $\Phi_B$ . Al igual que el flujo eléctrico (véase la Sec. 29-2), puede considerarse que el flujo magnético es una medida del número de líneas de campo que pasan a través de una superficie. En analogía con el flujo eléctrico (véase la Ec. 7 del capítulo 29), el flujo magnético a través de *cualquier* superficie se define como

$$\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}. \quad (1)$$

Aquí  $dA$  es un elemento del área de la superficie (como se muestra en la Fig. 3), y la integración se lleva a cabo sobre toda la superficie a través de la cual deseamos calcular el flujo (por ejemplo, la superficie encerrada por el anillo de la izquierda en la Fig. 1). Si el campo magnético tiene una magnitud y dirección constantes en un área planar  $A$ , el flujo puede escribirse así:

$$\Phi_B = BA \cos \theta, \quad (2)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre la normal a la superficie y la dirección del campo.

La unidad del flujo magnético en el SI es el tesla metro<sup>2</sup>, al cual se le da el nombre de *weber* (abreviado Wb). Esto es,

$$1 \text{ weber} = 1 \text{ tesla} \cdot \text{metro}^2.$$

Al invertir esta relación, vemos que el tesla es equivalente al weber/metro<sup>2</sup>, el cual era la unidad usada para los campos magnéticos antes de que el tesla fuese adoptado como la unidad del SI.

En términos del flujo magnético, la fem inducida en un circuito está dada por la *ley de la inducción de Faraday*:

*La fem inducida en un circuito es igual al negativo de la velocidad con que cambia con el tiempo el flujo magnético a través del circuito.*

En términos matemáticos, la ley de Faraday es

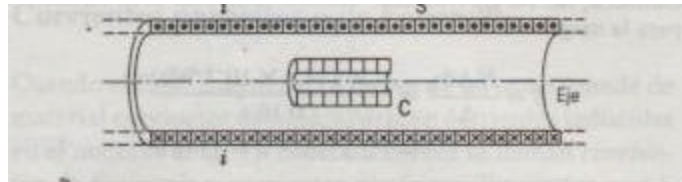
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (3)$$

donde  $\mathcal{E}$  es la fem inducida. Si la cantidad del cambio de flujo está en unidades de webers por segundo, la fem tiene unidades de volts. El signo menos de la ecuación 3 es muy importante, porque nos indica la dirección de la fem inducida. Consideraremos este signo en detalle en la sección siguiente.

Si la bobina consta de  $N$  vueltas, entonces aparece una fem inducida en cada vuelta, y la fem inducida total en el circuito es la suma de los valores individuales, del mismo modo que en el caso de las baterías conectadas en serie. Si la bobina está tan apretada que puede considerarse que cada vuelta ocupa la misma región del espacio y por lo tanto experimenta el mismo cambio de flujo, entonces la fem inducida total es

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (4)$$

Existen muchas maneras de cambiar el flujo a través de un anillo: al mover un imán en relación con el anillo (como en la Fig. 1), al variar la corriente en un circuito cercano (como en la Fig. 2 y también en un transformador), al desplazar el anillo dentro de un campo no uniforme, al girar el anillo dentro de un campo magnético fijo tal que el ángulo  $\theta$  de la ecuación 2 cambie (como en un generador), o al cambiar el tamaño o la forma del anillo o circuito. En cada uno de estos métodos, se induce una fem en el anillo.



**Figura 4** Problema muestra 1. Una bobina C está ubicada dentro de un solenoide S. El solenoide conduce una corriente que sale de la página en la parte superior y entra en la inferior, como se indica por medio de puntos y cruces. En la bobina aparece una fem inducida cuando la corriente en el solenoide está cambiando.

Por último, es preciso observar que, aun cuando la ecuación 3 se conoce como la ley de Faraday, no fue escrita en esa forma por Faraday, quien carecía de una formación matemática. De hecho, la obra en tres volúmenes que publicó Faraday sobre electromagnetismo, y que constituye un hito en el desarrollo de la física y de la química, ¡no contiene una sola ecuación!

#### Problema muestra 1

El solenoide largo S de la figura 4 tiene 220 vueltas/cm y conduce una corriente  $i = 1.5$  A; su diámetro  $d$  es de 3.2 cm. En su centro colocamos una bobina C de 130 vueltas bien apretadas de diámetro  $d_c = 2.1$  cm. La corriente en el solenoide aumenta de cero a 1.5 A con una velocidad constante por un periodo de 0.16 s. ¿Cuál es el valor absoluto (esto es, la magnitud sin tener en cuenta al signo) de la fem inducida que aparece en la bobina central cuando está cambiando la corriente en el solenoide?

#### Solución

El valor absoluto del flujo final a través de cada vuelta de esta bobina está dado por la ecuación 2 cuando  $\theta = 0$ .

$$\Phi_B = BA.$$

El campo magnético  $B$  en el centro del solenoide está dado por la ecuación 22 del capítulo 35, o sea

$$B = \mu_0 i n = (4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A})(1.5 \text{ A}) \times (220 \text{ vueltas/cm})(100 \text{ cm/m}) = 4.15 \times 10^{-2} \text{ T}.$$

En términos de su diámetro  $d_c$ , el área de la bobina central (no del solenoide) está dado por  $1/4\pi d_c^2$ , obteniéndose  $3.46 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ .

El valor absoluto del flujo final a través de cada vuelta de la bobina es, entonces,

$$\begin{aligned}\Phi_B &= (4.15 \times 10^{-2} \text{ T})(3.46 \times 10^{-4} \text{ m}^2) \\ &= 1.44 \times 10^{-5} \text{ Wb} = 14.4 \mu\text{Wb}.\end{aligned}$$

La fem inducida se deduce de la ley de Faraday (Ec. 4), en la cual no tomamos en cuenta el signo menos porque estamos buscando sólo el valor absoluto de la fem:

$$\mathcal{E} = \frac{N \Delta\Phi_B}{\Delta t}$$

donde  $N$  es el número de vueltas en la bobina interior  $C$ . El cambio  $\Delta\Phi_B$ , en el flujo en cada vuelta de la bobina central es, entonces, de  $14.4 \mu\text{Wb}$ . Este cambio ocurre en  $0.16 \text{ s}$ , dando para la magnitud de la fem inducida

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{N \Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{(130)(14.4 \times 10^{-6} \text{ Wb})}{0.16 \text{ s}} \\ &= 1.2 \times 10^{-2} \text{ V} = 12 \text{ mV}.\end{aligned}$$

En la siguiente sección explicaremos cómo hallar la *dirección* de la fem inducida. Por ahora, podemos predecir su dirección por medio del argumento siguiente. Supongamos que un aumento en el flujo de la bobina exterior causó una corriente en la bobina interior que produjo un campo magnético en la misma dirección que el campo original. Esto aumentaría a su vez el flujo a través del área encerrada por la bobina exterior, lo cual causaría similarmente que su corriente aumente y, por lo tanto, aumentando otra vez la corriente en la bobina interior, y así en lo sucesivo. ¿Es esto un resultado razonable?

### 36-3 LA LEY DE LENZ

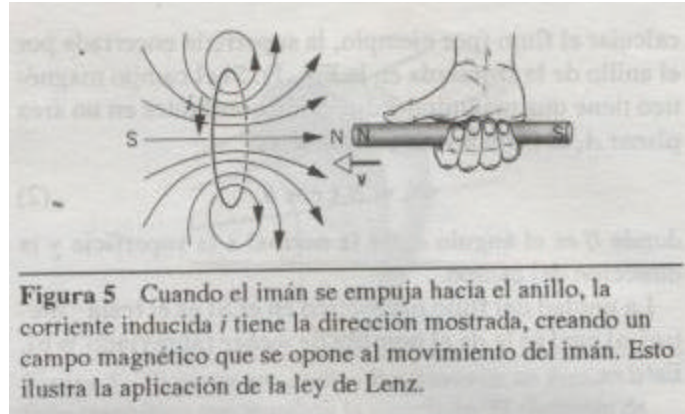
Hasta ahora no hemos especificado las direcciones de las fem inducidas. Si bien podemos hallar estas direcciones a partir de un análisis formal de la ley de Faraday, preferimos hallarlas a partir del principio de conservación de la energía. En mecánica, el principio de la energía nos permite a menudo sacar conclusiones con respecto a los sistemas mecánicos sin analizarlos en detalle. Usamos aquí el mismo enfoque. La regla para determinar la dirección de la corriente inducida fue propuesta en 1834 por Heinrich Friedrich Lenz (1804-1865) y se conoce como la *ley de Lenz*:

*En un circuito conductor cerrado, la corriente inducida aparece en una dirección tal que ésta se opone al cambio que la produce.*

El signo menos en la ley de Faraday indica esta oposición. La ley de Lenz se refiere a *corrientes* inducidas, lo cual significa que sólo se aplica a circuitos conductores cerrados. Si el circuito está abierto, por lo general podríamos pensar en términos de lo que sucedería si *estuviese* cerrado, y de esta manera determinar la dirección de la fem inducida.

Consideremos el primero de los experimentos de Faraday descritos en la sección 36-1. La figura 5 muestra el polo norte de un imán y una sección transversal de un anillo conductor cercano. Al empujar al imán hacia el anillo (o al anillo hacia el imán) se genera una corriente inducida en el anillo. ¿Cuál es su dirección? Una espira de corriente crea un campo magnético en puntos distantes como el de un dipolo

magnético, siendo una cara del anillo un polo norte y la cara opuesta un polo sur. El polo norte, como en las barras imantadas, es aquella cara a *partir de* la cual salen las líneas de B. Si como lo predice la ley de Lenz, el anillo en la figura 5 va

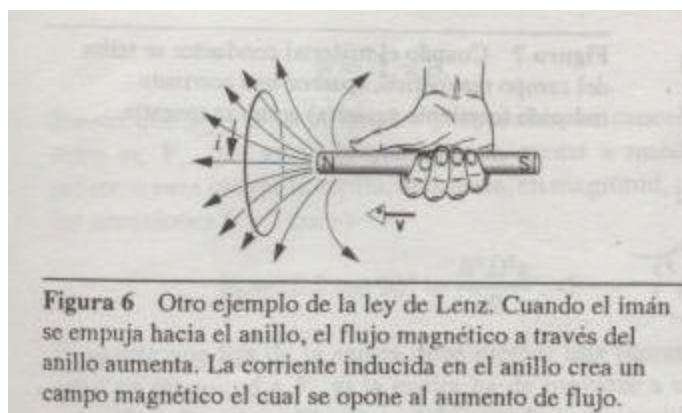


a oponerse al movimiento del imán hacia él, la cara del anillo *hacia* el imán debe resultar ser un polo norte. Los dos polos norte —uno de la espira de corriente y el otro del imán— se repelen entre sí. La regla de la mano derecha aplicada al anillo demuestra que para el campo magnético creado por el anillo al salir de la cara derecha de la espira, la corriente inducida debe ser como se muestra. La corriente va en sentido contrario a las manecillas del reloj cuando miramos a lo largo del imán hacia la espira.

Cuando empujamos el imán hacia el anillo (o al anillo hacia el imán), aparece una corriente inducida. En términos de la ley de Lenz esta acción de empujar es el "cambio" que produce la corriente inducida y, de acuerdo con esta ley, la corriente inducida se opone al "empuje". Si jalamos el imán alejándolo de la bobina, la corriente inducida se opone al "jalón" creando un polo *sur* en la cara derecha del anillo de la figura 5. Para hacer de la cara derecha un polo sur, la corriente debe ser opuesta a la mostrada en la figura 5. Ya sea que jalemos o empujemos el imán, su movimiento es automáticamente opuesto.

El agente que causa que el imán se mueva, ya sea hacia la bobina o alejándose de ella, experimenta siempre una fuerza de resistencia y, por lo tanto, debe realizar trabajo. Del principio de conservación de la energía, se concluye que este trabajo efectuado sobre el sistema debe ser exactamente igual a la energía interna (Joule) producida en la bobina, puesto que éstas son las únicas transferencias de energía que ocurren en el sistema. Si el imán se mueve más rápidamente, el agente efectúa un trabajo a una mayor velocidad y la velocidad de producción de la energía interna aumenta en consonancia. Si cortamos el anillo y luego realizamos el experimento, no existe una corriente inducida, ningún cambio en la energía interna, ninguna fuerza sobre el imán, y no se requiere ningún trabajo para moverlo. Todavía existe una fem en el anillo, pero, al igual que una batería conectada a un circuito abierto, no se genera una corriente.

Si, en la figura 5, la corriente estuviese en la dirección *opuesta* a la mostrada, al mover el imán hacia el anillo, la cara del anillo hacia el imán sería un polo sur, lo cual *jalaría* a la barra imantada hacia el anillo. Sólo necesitaríamos



empujar al imán ligeramente para comenzar el proceso y, por lo tanto, la acción sería autopropulsada. El imán aceleraría hacia el anillo, aumentando su energía cinética todo el tiempo. Al mismo tiempo, aparecería en el anillo una energía interna a una velocidad que iría aumentando con el tiempo. ¡Esto sería una situación en la que se obtendría algo a cambio de nada! No es necesario aclarar aquí que esto no ocurre.

Apliquemos la ley de Lenz a la figura 5 de manera diferente. La figura 6 muestra las líneas de  $\mathbf{B}$  para una barra imantada. Desde este punto de vista el "cambio" es el aumento en  $\Phi_B$  a través del anillo provocado al acercar el imán. La corriente inducida se opone a este cambio creando un campo que tiende a oponerse al aumento de flujo causado por el imán en movimiento. Así, el campo debido a la corriente inducida debe apuntar de izquierda a derecha en el plano de la bobina, de acuerdo con nuestra conclusión preliminar.

Aquí no es significativo el hecho de que el campo inducido se oponga al campo del imán sino más bien el hecho de que se oponga al cambio, que en este caso es el aumento en  $\Phi_B$  a través del anillo. Si retiramos el imán, reducimos  $\Phi_B$  a través del anillo. El campo inducido debe oponerse ahora a esta disminución en  $\Phi_B$  (esto es, al cambio) reforzando el campo magnético. En cada caso el campo inducido se opone al cambio que le da origen.

Ahora podemos obtener la dirección de la corriente en la bobina pequeña C del problema muestra 1. El campo del solenoide 5 apunta hacia la derecha en la figura 4 y es creciente. La corriente en C debe oponerse a este aumento del flujo a través de C y así debe crear un campo que se oponga al campo de 5. La corriente en C está, por lo tanto, en dirección opuesta a la de S. Si la corriente en 5 estuviese decreciendo en lugar de creciendo, un argumento similar demuestra que la corriente inducida en C tendría la misma dirección que la corriente en 5.

## Corrientes parásitas o de Foucault

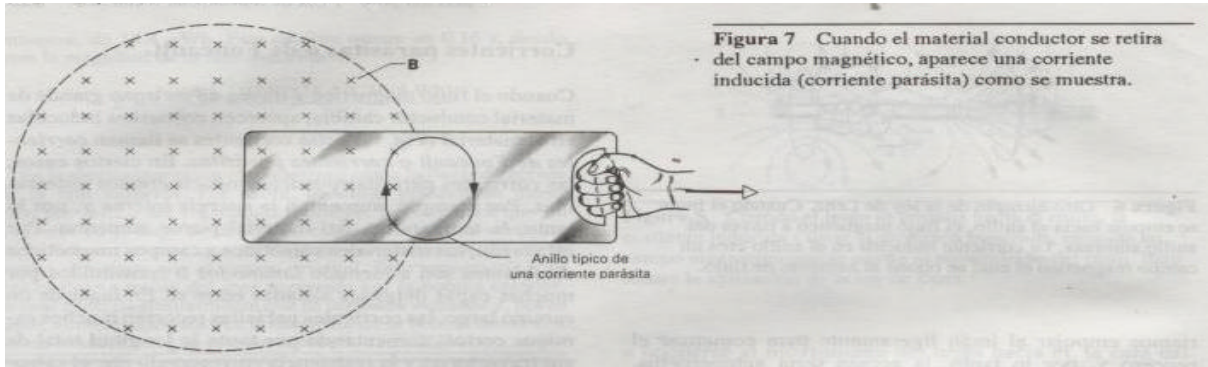


Cuando el flujo magnético a través de un trozo grande de material conductor cambia, aparecen corrientes inducidas en el material (Fig. 7). Estas corrientes se llaman *corrientes de Foucault* o *corrientes parásitas*. En ciertos casos, las corrientes parásitas pueden producir efectos indeseables. Por ejemplo, aumentan la energía interna y, por lo tanto, la temperatura del material puede aumentar. Por esta razón, los materiales sometidos a campos magnéticos cambiantes son a menudo *laminados* o constituidos por muchas capas delgadas aisladas entre sí. En lugar de un camino largo, las corrientes parásitas recorren muchos caminos cortos, aumentando por tanto la longitud total de sus trayectorias y la resistencia correspondiente; el calentamiento resistivo  $\epsilon^2/R$  es menor, y el aumento en la energía interna es menor. Por otra parte, el calentamiento por medio de corrientes parásitas puede utilizarse ventajosamente, como en un *horno de inducción*, en el cual una muestra de material puede calentarse usando un campo magnético que cambie rápidamente. Los hornos de inducción se emplean en los casos en los cuales no es posible conseguir un contacto térmico con el material que desea calentarse, como cuando éste está dentro de una cámara al vacío.

Las corrientes parásitas son corrientes reales y producen los mismos efectos que las corrientes reales. En particular, se ejerce una fuerza  $\mathbf{F} = i\mathbf{L} \times \mathbf{B}$  en la parte de la trayectoria de la corriente parásita de la figura 7 que pasa a través del campo. Esta fuerza se transmite al material, y puede emplearse la ley de Lenz para demostrar (véase la pregunta 26) que la fuerza se opone al movimiento del conductor. Esto da origen a una forma de *frenado magnético*, por el que los campos magnéticos aplicados a una rueda que esté girando o a una pista en movimiento producen fuerzas que desaceleran el movimiento. Un freno tal no tiene partes móviles o mecanismos de ninguna clase y no se halla sometido al desgaste por fricción de los frenos mecánicos ordinarios. Más aún, es más eficiente a altas velocidades (porque la fuerza magnética aumenta con la velocidad relativa), donde el desgaste sobre los frenos mecánicos sería mayor.

### 36-4 FEM DE MOVIMIENTO O CINÉTICA

El ejemplo de la figura 6, si bien fácil de comprender cualitativamente, no conduce por sí mismo a cálculos cuantitativos. Consideremos, pues, la figura 8, la cual muestra una espira rectangular de alambre de anchura  $D$ , IttiO de cuyos extremos está dentro de un campo uniforme  $\mathbf{B}$  que apunta en ángulo recto al plano de la espira. Este campo  $\mathbf{B}$  puede producirse, por ejemplo, en el entrehierro de un electroimán grande.



Las líneas de trazos muestran los límites supuestos del campo magnético. La espira es jalada hacia la derecha con una rapidez constante  $v$ .

La situación descrita por la figura 8 no difiere en ningún detalle esencial de aquella de la figura 6. En cada caso un anillo conductor y un imán están en movimiento relativo; en cada caso se causa el cambio con el tiempo del flujo del campo del imán a través del anillo o de la espira. La diferencia importante entre los dos arreglos es que la situación de la figura 8 permite cálculos más sencillos.

El agente externo (la mano en la Fig. 8) tira de la espira hacia la derecha con una rapidez constante  $v$  al ejercer una fuerza  $F$ . Deseamos calcular la potencia mecánica  $P = Fv$  gastada por el agente externo o, de modo equivalente, la cantidad de trabajo que se realiza sobre la espira, y comparar ese resultado con la cantidad de energía interna que produce la corriente inducida en la espira. El flujo  $\Phi_B$  encerrado por la espira en la figura 8 es

$$\Phi_B = BDx,$$

donde  $Dx$  es el área de esa parte de la espira en la que  $B$  no es cero.

Hallamos la fem  $\mathcal{E}$  partiendo de la ley de Faraday:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(BDx) = -BD \frac{dx}{dt} = BDv, \quad (5)$$

en donde hemos hecho que  $-dx/dt$  sea igual a la rapidez  $v$  con la que se jala la espira fuera del campo magnético, puesto que  $x$  es decreciente. Nótese que la única dimensión de la espira que interviene en la ecuación 5 es la longitud  $D$  del conductor de la izquierda. Como veremos más adelante, la fem inducida en la figura 8 puede considerarse como situada aquí. Una fem inducida como ésta, producida por el movimiento relativo de un conductor y la fuente de un campo magnético, se llama a veces una

*fem de movimiento o cinética.*

La fem  $BDv$  genera una corriente en la espira dada por

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{BDv}{R}, \quad (6)$$

donde  $R$  es la resistencia de la espira. De la ley de Lenz, esta corriente (y por lo tanto  $\mathcal{E}$ ) debe fluir siguiendo el movimiento de las manecillas del reloj en la figura 8; se opone al "cambio" (la disminución en  $\Phi_B$ ) al crear un campo que es paralelo al campo externo dentro de la espira. La corriente en la espira da lugar a las fuerzas magnéticas  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  que actúan sobre los tres conductores, de acuerdo con la ecuación 28 del capítulo 34,

$$\mathbf{F} = i\mathbf{L} \times \mathbf{B}. \quad (7)$$

Puesto que  $\mathbf{F}_2$  y  $\mathbf{F}_3$  son iguales y opuestas, se cancelan entre si;  $\mathbf{F}_1$ , que es la fuerza que se opone a nuestro esfuerzo para mover la espira, está dada, en magnitud, por las ecuaciones 6 y 7 como

$$F_1 = iDB \sin 90^\circ = \frac{B^2 D^2 v}{R}. \quad (8)$$

El agente que tira de la espira debe ejercer una fuerza  $F$  igual en magnitud a  $F_1$ , si la espira ha de moverse a una velocidad constante. El agente debe, por lo tanto, realizar un trabajo con una velocidad constante de

$$P = F_1 v = \frac{B^2 D^2 v^2}{R}. \quad (9)$$

Podemos también calcular la velocidad en la que la energía se disipa en la espira como resultado del calentamiento de Joule a causa de la corriente inducida. Esta velocidad está dada por

$$P = i^2 R = \left( \frac{BDv}{R} \right)^2 R = \frac{B^2 D^2 v^2}{R}, \quad (10)$$

lo cual concuerda precisamente con la ecuación 9 para la velocidad a la que el trabajo mecánico se efectúa sobre la espira. El trabajo realizado por el agente externo se disipa al final como un calentamiento de Joule de la espira.

La figura 9 muestra una vista lateral de la espira dentro del campo. En la figura 9a la espira está estacionaria; en la figura 9b la estamos moviendo hacia la derecha; en la figura 9c la estamos moviendo hacia la izquierda. Las líneas de  $\mathbf{B}$  en estas figuras representan el *campo resultante* como consecuencia de la suma vectorial del campo debido al imán y el campo debido a la corriente inducida, en caso de haber alguna, en la espira. De acuerdo con el punto de vista de Faraday, según el cual vemos a las líneas del campo magnético como bandas de hule estiradas (véase la Sec. 35-3), las líneas del campo magnético en la figura 9

sugieren convincentemente que el agente que mueve a la bobina o espira experimenta siempre una fuerza de oposición.

**Problema muestra 2**

La figura 10a muestra una espira rectangular de resistencia  $R$ , anchura  $D$  y longitud  $a$  atraída a una velocidad constante  $v$  a través de una región de espesor  $d$  en donde hay un campo magnético  $B$  creado por un imán. Como funciones de la posición  $x$  del extremo derecho de la espira, grafique (a) el flujo  $\Phi_B$  en la espira, (b) la fem inducida  $\mathcal{E}$  y (c) la velocidad  $P$  de generación de energía interna en la espira. Considere que  $D = 4\text{cm}$ ,  $a = 10\text{cm}$ ,  $d = 15\text{cm}$ ,  $R = 16\ \Omega$ ,  $B = 2.0\text{T}$  y  $v = 1.0\text{ m/s}$

**Solución (a)** El flujo  $\Phi_B$  es cero cuando la espira no está en el campo; es  $BDa$  cuando la espira está enteramente dentro del campo; es  $BDx$  cuando la espira está entrando al campo y  $BD[a - (x - d)]$  cuando la espira está saliendo del campo. Estas conclusiones, que el lector debe comprobar, se muestran gráficamente en la figura 10b.

(b) La fem inducida  $\mathcal{E}$  está dada por  $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$ , lo cual podemos escribir como

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dx} \frac{dx}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dx} v,$$

donde  $d\Phi_B/dx$  es la pendiente de la curva de la figura 10b. La fem  $\mathcal{E}$  está graficada como función de  $x$  en la figura 10c. Usando el mismo tipo de razonamiento que el empleado para la figura 8, deducimos de la ley de Lenz que, cuando la espira está entrando al campo, la fem  $\mathcal{E}$  actúa en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj vista desde arriba. Nótese que no existe una fem cuando la espira está por completo dentro del campo magnético porque el flujo  $\Phi_B$  a través de la espira no está cambiando con el tiempo, como lo muestra la figura 10b.

(c) La velocidad de producción de la energía interna está dada por  $P = \mathcal{E}^2/R$ . Puede calcularse al elevar al cuadrado la ordenada de la curva de la figura 10c y dividiendo entre  $R$ . El resultado se grafica en la figura 10d.

Si el efecto de borde del campo magnético, que no puede evitarse en la práctica (véase el problema 43 del capítulo 35), se toma en cuenta, los bordes angulares y las esquinas en la figura 10 serán reemplazados por curvas suaves. ¿Qué cambios ocurrirían en las curvas de la figura 10 si la espira fuese cortada de modo que ya no formase una trayectoria conductora cerrada?

**Problema muestra 3**

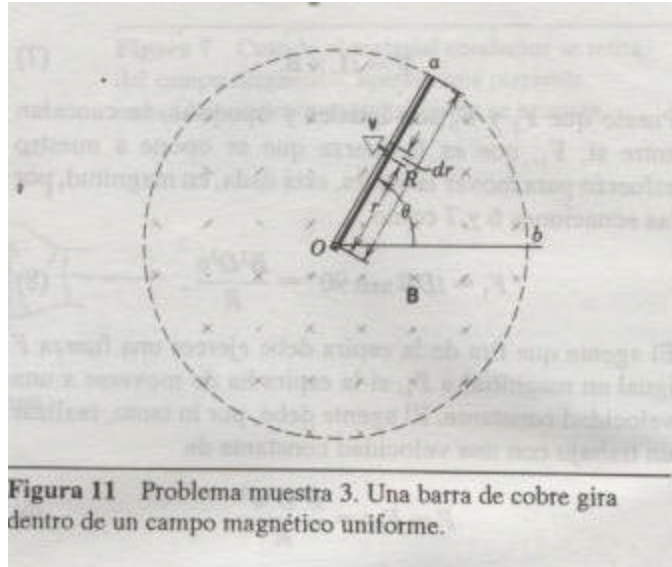
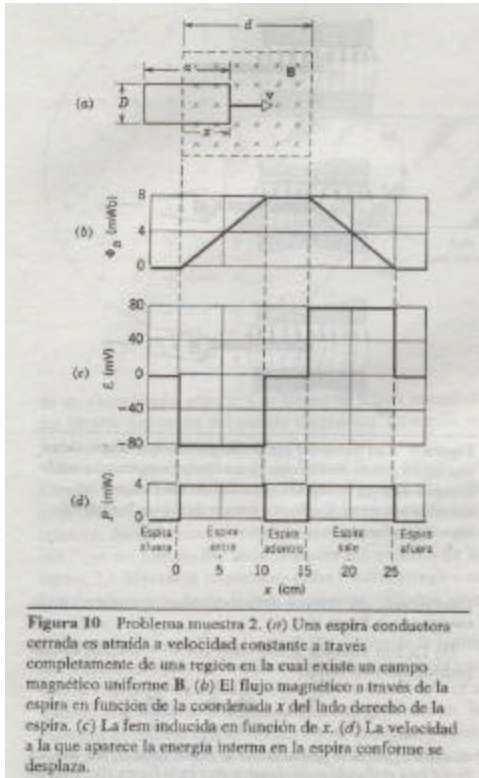
Una barra de cobre de longitud  $R$  gira con una frecuencia angular  $\omega$  dentro de un campo magnético uniforme

$B$  como se muestra en la figura 11. Halle la fem  $\mathcal{E}$  desarrollada entre los dos extremos de la barra. (Se puede medir esta fem situando un riel conductor a lo largo del círculo de trazos en la figura y conectando un voltímetro entre el riel y el punto O).

**Solución**

Si un alambre de longitud  $dr$  se mueve a una velocidad  $v$  en ángulo recto con un campo  $B$ , se desarrollará una fem impulsora  $d\mathcal{E}$  (véase la Ec. 5) dada por

$$d\mathcal{E} = Bv dr.$$



La barra de la figura 11 puede dividirse en elementos de longitud  $dr$ , siendo  $dr$  la velocidad lineal  $v$  de cada elemento. Cada elemento es perpendicular a  $\mathbf{B}$  y se mueve también en una dirección en ángulo recto con  $\mathbf{B}$  de modo que, puesto que las fem  $d\mathcal{E}$  de cada elemento están "en serie",

$$\mathcal{E} = \int d\mathcal{E} = \int_0^R Bv \, dr = \int_0^R B\omega r \, dr = \frac{1}{2}B\omega R^2.$$

Como un segundo enfoque, consideremos que, en cualquier instante, el flujo encerrado por el sector  $aOb$  en la figura 11 está dado por

$$\Phi_B = BA = B\left(\frac{1}{2}R^2\theta\right),$$

donde  $\frac{1}{2}R^2\theta$  es el área del sector. Al derivar se obtiene

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{1}{2}BR^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}B\omega R^2.$$

Según la ley de Faraday, ésta es precisamente la magnitud de  $\mathcal{E}$  y concuerda con el resultado previo.

### 36-5 CAMPOS ELÉCTRICOS INDUCIDOS

Supóngase que colocamos una espira de alambre conductor dentro de un campo magnético externo (como en la Fig. 12a). El campo, que suponemos tiene una intensidad uniforme sobre el área de la espira, puede crearse por un electroimán externo. Podemos variar la intensidad del campo magnético al variar la corriente en el electroimán.

Al variar  $\mathbf{B}$ , el flujo magnético a través de la espira varía con el tiempo y, según las leyes de Lenz y de Faraday, podemos calcular la magnitud y dirección de la fem inducida y de la corriente inducida en la espira. Antes de que el campo comenzase a cambiar, no existía una corriente en la espira; mientras que el campo está cambiando, fluyen cargas en la espira. Para que las cargas comiencen a moverse, deben ser aceleradas por un campo eléctrico. Este *campo eléctrico inducido* ocurre con un campo magnético cambiante, de acuerdo con la ley de Faraday.

El campo eléctrico inducido es tan real como cualquiera que pudiera crearse por cargas estáticas; por ejemplo, éste ejerce una fuerza  $q\mathbf{E}$  sobre una carga de prueba. Además, la presencia del campo eléctrico no tiene nada que ver con la presencia de la espira de alambre; si retiráramos la espira completamente, el campo eléctrico seguiría estando presente. Podríamos también llenar el espacio con un 'gas' de electrones o de átomos ionizados; estas partículas experimentarían el mismo campo eléctrico inducido  $\mathbf{E}$ .

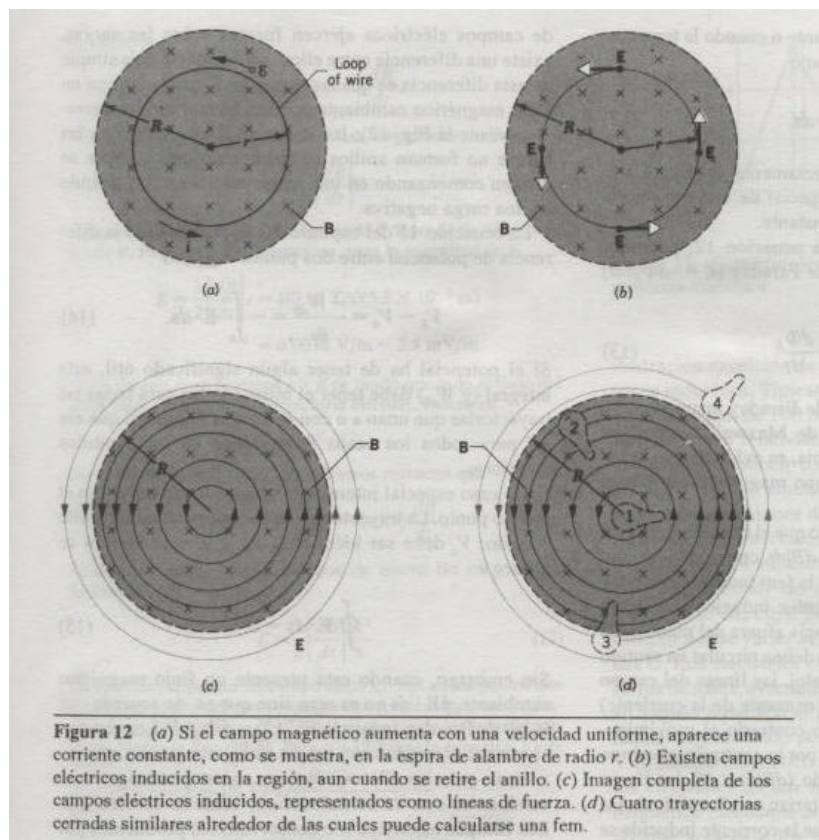


Figura 12 (a) Si el campo magnético aumenta con una velocidad uniforme, aparece una corriente constante, como se muestra, en la espira de alambre de radio  $r$ . (b) Existen campos eléctricos inducidos en la región, aun cuando se retire el anillo. (c) Imagen completa de los campos eléctricos inducidos, representados como líneas de fuerza. (d) Cuatro trayectorias cerradas similares alrededor de las cuales puede calcularse una fem.

Reemplacemos, por tanto, la espira de alambre con una trayectoria circular de radio arbitrario  $r$  (Fig. 12b). La trayectoria, a la que consideramos en un plano perpendicular a la dirección de  $B$ , encierra una región de espacio en la que el campo magnético está cambiando a razón de  $dB/dt$ . Suponemos que la cantidad  $dB/dt$  es la misma en todos los puntos del área encerrada por la trayectoria. La trayectoria circular encierra un flujo  $\sim$  que está cambiando a razón de  $d\Phi_B/dt$  debido a la variación del campo magnético. Alrededor de la trayectoria aparece una fem inducida, y por lo tanto, existe un campo eléctrico inducido en todos los puntos alrededor del círculo. De la simetría, concluimos que  $E$  debe tener la misma magnitud en todos los puntos alrededor del círculo, no existiendo una dirección preferida en este espacio. Además,  $E$  no puede tener una componente radial, conclusión que se deduce de la ley de Gauss: construyamos una superficie gaussiana cilíndrica imaginaria perpendicular al plano de la figura 12b. Si existiese una componente radial de  $E$ , existiría un flujo *eléctrico* neto dentro o fuera de la superficie, lo cual requeriría que la superficie encerrara una carga eléctrica neta. Puesto que no existe tal carga, el flujo eléctrico debe ser cero y la componente radial de  $E$  debe ser cero. Así, el campo eléctrico inducido es tangencial, y las líneas del campo eléctrico son círculos concéntricos, como en la figura 12c.

Consideremos una carga de prueba  $q_0$  que se mueva alrededor de la trayectoria circular en la figura 12b. El trabajo  $W$  efectuado sobre la carga por el campo eléctrico inducido en una revolución es  $\mathcal{E} q_0$ . En forma equivalente, podemos expresar el trabajo como la fuerza eléctrica  $q_0 E$  multiplicada por el desplazamiento  $2\pi r$  cubierto en una revolución. Al igualar entre sí estas dos expresiones para  $W$  y cancelando el factor  $q_0$ , obtenemos

$$\mathcal{E} = E(2\pi r). \quad (11)$$

El lado derecho de la ecuación 11 puede ser expresado como una integral de línea de  $E$  alrededor del círculo, lo cual puede escribirse para los casos más generales (por ejemplo, cuando  $E$  no sea constante o cuando la trayectoria elegida no sea un círculo) como

$$\mathcal{E} = \oint E \cdot ds. \quad (12)$$

Nótese que la ecuación 12 directamente se reduce a la ecuación 11 en nuestro caso especial de una trayectoria circular con un  $E$  tangencial constante.

Reemplazando la fem por la ecuación 12, podemos escribir la ley de la inducción de Faraday  $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$  como

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (13)$$

En esta forma es como la ley de Faraday aparece como una de las cuatro ecuaciones de Maxwell básicas del electromagnetismo. En esta forma, es evidente que la ley de Faraday implica que un campo magnético cambiante produce un campo eléctrico.

En la figura 12 hemos supuesto que el campo magnético está creciendo; esto es, tanto  $dB/dt$  como  $d\mathbf{F}_B/dt$  son positivos. Según la ley de Lenz, la fem inducida se opone a este cambio, y así las corrientes inducidas crean un campo magnético que apunta hacia afuera del plano de la figura. Puesto que las corrientes deben circular en sentido contrario a las manecillas del reloj, las líneas del campo eléctrico inducido  $\mathbf{E}$  (que es el causante de la corriente) deben estar también en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Si, por lo contrario, el campo magnético estuviese decreciendo ( $dB/dt < 0$ ), las líneas del campo eléctrico inducido estarían en el sentido de las manecillas del reloj, de modo que la corriente inducida se opone una vez más al cambio en  $\mathbf{F}_B$ .

Puede aplicarse la ley de Faraday en la forma de la ecuación 13 a trayectorias de cualquier geometría, no únicamente a la trayectoria circular especial que elegimos en la figura 12b. La figura 12d muestra cuatro de tales trayectorias, teniendo todas la misma forma y área pero estando ubicadas en posiciones diferentes dentro del campo cambiante. Para las trayectorias 1 y 2, la fem inducida es la misma porque estas trayectorias se encuentran por completo dentro del campo magnético cambiante y, por lo tanto, tiene el mismo valor de  $d\mathbf{F}_B/dt$ . Sin embargo, aunque la fem es la misma para estas dos trayectorias, la distribución de los vectores del campo eléctrico alrededor de las trayectorias es diferente, como lo indican las líneas del campo eléctrico. Para la trayectoria 3, la fem es menor porque tanto  $\mathbf{F}_B$  como  $d\mathbf{F}_B/dt$  son más pequeñas, y para la trayectoria 4 la fem inducida es cero, aunque el campo eléctrico no sea cero en ningún punto a lo largo de la trayectoria.

Los campos eléctricos inducidos que se crean por el proceso de inducción no están asociados con cargas sino con un flujo magnético cambiante. Si bien, ambas clases de campos eléctricos ejercen fuerzas sobre las cargas, existe una diferencia entre ellos. La evidencia más simple de esta diferencia es que las líneas de  $\mathbf{E}$  asociadas con un flujo magnético cambiante pueden formar anillos cerrados (véase la Fig. 12); las líneas de  $\mathbf{E}$  asociadas con las cargas no forman anillos cerrados sino que siempre se dirigen comenzando en una carga positiva y terminando en una carga negativa.

La ecuación 15 del capítulo 30, la cual definió la diferencia de potencial entre dos puntos  $a$  y  $b$ , es

$$V_b - V_a = \frac{-W_{ab}}{q_0} = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (14)$$



Si el potencial ha de tener algún significado útil, esta integral (y  $W_{ab}$ ) debe tener el mismo valor para todas las trayectorias que unan a  $a$  con  $b$ . Esto se demostró que era así para todos los casos examinados en los capítulos anteriores.

Un caso especial interesante surge cuando  $a$  y  $b$  son el mismo punto. La trayectoria que los une es ahora un anillo cerrado;  $V_a$ , debe ser idéntico a  $V_b$ , y la ecuación 14 se reduce a

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (15)$$

Sin embargo, cuando está presente un flujo magnético cambiante,  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$  no es cero sino que es, de acuerdo con la ley de Faraday (véase la Ec. 13),  $-\frac{d\Phi_B}{dt}$ . Los campos eléctricos asociados con cargas estacionarias son *conservativos*, pero aquéllos asociados con campos magnéticos cambiantes son *no conservativos*; véase la sección 8-2. Los campos eléctricos (no conservativos) producidos por la inducción no pueden describirse mediante un potencial eléctrico.

Un argumento similar puede expresarse en el caso de los campos magnéticos producidos por las corrientes en alambres. Las líneas de  $\mathbf{B}$  forman también anillos cerrados (véase la Fig. 9 del capítulo 35) y, como consecuencia, el potencial magnético no tiene ningún significado en tales casos.

Problema muestra 4 En la figura 12b, supongamos que  $R = 8.5$  cm y que  $dB/dt = 0.13$  T/s. (a) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico  $E$  cuando  $r = 5.2$  cm? (b) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico inducido cuando  $r = 12.5$  cm?

Solución (a) De la ley de Faraday (Ec. 13) tenemos

$$E(2\pi r) = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Notamos que  $r < R$ . El flujo  $\Phi_B$  a través de una trayectoria cerrada de radio  $r$  es, entonces,

$$\Phi_B = B(\pi r^2),$$

de modo que

$$E(2\pi r) = -(\pi r^2) \frac{dB}{dt}.$$

Al resolver para  $E$  y considerando las magnitudes, hallamos

$$E = \frac{1}{2} \left| \frac{dB}{dt} \right| r. \quad (16)$$

Nótese que el campo eléctrico inducido  $E$  depende de  $dB/dt$  pero no de  $B$ . Para  $r = 5.2$  cm, tenemos, para la magnitud de  $E$ ,

$$E = \frac{1}{2} \left| \frac{dB}{dt} \right| r = \frac{1}{2}(0.13 \text{ T/s})(5.2 \times 10^{-2} \text{ m}) \\ = 0.0034 \text{ V/m} = 3.4 \text{ mV/m}.$$

(b) En este caso tenemos  $r > R$  de modo que todo el flujo del imán pasa a través de la trayectoria circular. Entonces

$$\Phi_B = B(\pi R^2).$$

De la ley de Faraday (Ec. 13) hallamos entonces que

$$E(2\pi r) = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -(\pi R^2) \frac{dB}{dt}.$$

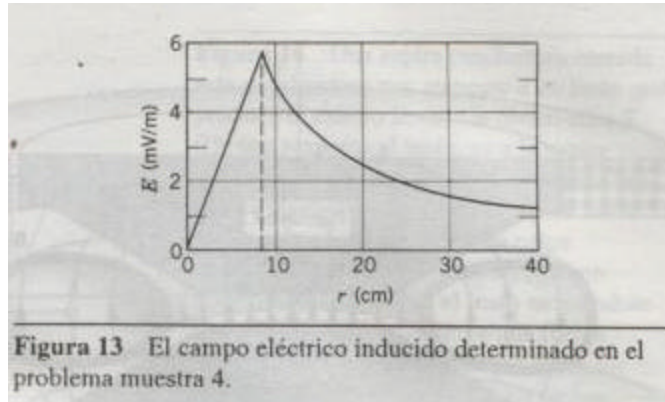
Si despejamos  $E$  y consideramos de nuevo las magnitudes, hallamos

$$E = \frac{1}{2} \left| \frac{dB}{dt} \right| \frac{R^2}{r}. \quad (17)$$

En este caso se induce un campo eléctrico aun en los puntos que están bien afuera del campo magnético (cambiante), un resultado importante que hace posible la existencia de los transformadores (véase la Sec. 39-5). Para  $r = 12.5$  cm, la ecuación 17 da

$$E = \frac{1}{2}(0.13 \text{ T/s}) \frac{(8.5 \times 10^{-2} \text{ m})^2}{12.5 \times 10^{-2} \text{ m}} \\ = 3.8 \times 10^{-3} \text{ V/m} = 3.8 \text{ mV/m}.$$

Las ecuaciones 16 y 17 dan el mismo resultado, como debe ser, cuando  $r = R$ . La figura 13 muestra una gráfica de  $E(r)$  basada en estas dos ecuaciones.

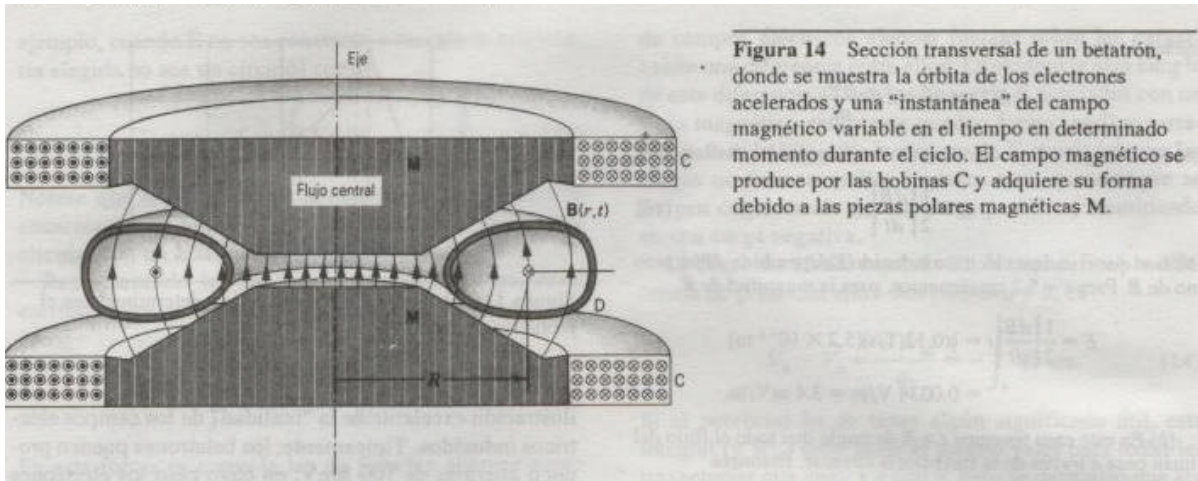


### 36-6 EL BETATRÓN

El betatrón es un aparato para acelerar electrones (conocidos también como partículas beta) a altas velocidades usando campos eléctricos inducidos producidos por campos magnéticos cambiantes. Tales electrones de alta energía pueden emplearse para investigación básica en física así como para producir rayos X en investigación aplicada en la industria y con fines médicos como en la terapia contra el cáncer. El betatrón proporciona una ilustración excelente de la "realidad" de los campos eléctricos inducidos. Típicamente, los betatrones pueden producir energías de 100 MeV, en cuyo caso los electrones son altamente relativistas ( $v = 0.999987c$ ). Los betatrones pueden producir corrientes enormes, en la gama de  $10^3$  a  $10^5$  A. Sin embargo, son máquinas pulsantes, que producen pulsaciones de una anchura típica  $\mu s$  o menos separados por intervalos de tiempo de entre 0.01 y 1 s.

La figura 14 muestra una sección transversal de la estructura interior de un betatrón. Consta de un gran electroimán M, cuyo campo (indicado por las líneas de campo) puede variar al cambiar la corriente en las bobinas C. Los electrones circulan en el tubo de cerámica en forma de rosca, evacuado, marcado como D. Su órbita está en ángulo recto con el plano de la figura, saliendo de la izquierda y entrando por la derecha. El campo magnético tiene varias funciones: (1) guía a los electrones en una trayectoria circular; (2) el campo magnético cambiante produce un campo eléctrico inducido que acelera a los electrones en su trayectoria; (3) mantiene un radio constante de la trayectoria de los electrones; (4) introduce electrones en la órbita y luego los retira de la órbita una vez que han alcanzado su energía plena; y (5) proporciona una fuerza restauradora que tiende a resistir cualquier tendencia de los electrones a salir de sus órbitas, ya sea verticalmente o radialmente. Es notable que el campo magnético sea capaz de llevar a cabo todas estas operaciones. Las bobinas portan una corriente alterna y producen el campo magnético mostrado en la figura 15. Para que los electrones circulen en la dirección mostrada en la figura 14 (en sentido contrario a las manecillas del reloj vistos desde arriba), el campo magnético debe

apuntar hacia arriba (considerado como positivo en la Fig. 15). Además, el campo cambiante debe tener una pendiente positiva ( $dB/dt > 0$  de modo que  $d\mathbf{F}_B/dt > 0$ ) si se quiere que los electrones se aceleren (en lugar de que se desaceleren) durante el ciclo. Así, sólo el primer cuarto de ciclo en la figura 15 es útil en la operación del betatrón; los electrones se inyectan en  $t = 0$  y se extraen  $t = T/4$ . El aparato no produce un haz en los tres cuartos de ciclo restantes.



#### Problema muestra 5

En un betatrón de 100 MeV, el radio  $R$  de la órbita es de 84 cm. El campo magnético en la región encerrada por la órbita se eleva periódicamente (60 veces por segundo) desde cero hasta un valor máximo promedio  $B_{avm} = 0.80$  T en un intervalo de aceleración de un cuarto de periodo, o sea 4.2 ms. (a) ¿Cuánta energía adquiere el electrón en un recorrido promedio alrededor de su órbita en este flujo cambiante? (b) ¿Cuál es la velocidad promedio de un electrón durante su ciclo de aceleración?

Solución

(a) El flujo central se eleva durante el intervalo de aceleración desde cero hasta un máximo de

$$\begin{aligned}\Phi_B &= (B_{av,m})(\pi R^2) \\ &= (0.80 \text{ T})(\pi)(0.84 \text{ m})^2 = 1.8 \text{ Wb.}\end{aligned}$$

El valor promedio de  $d\Phi/dt$  durante el intervalo de aceleración es, entonces

$$\left(\frac{d\Phi_B}{dt}\right)_{av} = \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{1.8 \text{ Wb}}{4.2 \times 10^{-3} \text{ s}} = 430 \text{ Wb/s.}$$

Según la ley de Faraday (Ec. 3) esto es también la fem promedio en volts. Entonces el electrón aumenta su energía según un promedio de 430 eV por revolución dentro de este flujo cambiante. Para alcanzar su energía final plena de 100 MeV, tiene que realizar unas 230,000 revoluciones en su órbita, una trayectoria de 1200 km de longitud total.

(b) La duración del ciclo de aceleración está dada como 4.2 ms, y la longitud de la trayectoria es de 1200 km, como se calculó en el inciso anterior. La velocidad promedio es, entonces,

$$\bar{v} = \frac{1200 \times 10^3 \text{ m}}{4.2 \times 10^{-3} \text{ s}} = 2.86 \times 10^8 \text{ m/s.}$$

Esto es el 95% de la velocidad de la luz. La velocidad real del electrón acelerado plenamente, cuando haya alcanzado su energía final de 100 Mev, es 99.9987% de la velocidad de la luz.

### 36-7 LA INDUCCION Y EL MOVIMIENTO RELATIVO (Opcional)

En la sección 35-7 explicábamos que la clasificación de los efectos electromagnéticos en puramente eléctricos o puramente magnéticos dependía del marco de referencia del observador. Esto es, lo que parece ser un campo magnético en un marco de referencia puede parecer una mezcla de campos eléctricos y magnéticos en otro marco de referencia. Puesto que la fem está determinada por la velocidad del objeto que se mueve a través del campo magnético, está claro que depende del marco de referencia del observador. Otros observadores en marcos inerciales diferentes medirán velocidades diferentes e intensidades del campo magnético diferentes. Por lo tanto, es esencial especificar el marco de referencia del observador al calcular las fem y las corrientes inducidas.

La figura 16a muestra una espira cerrada a la que un agente externo (no ilustrado) causa que se mueva a velocidad **y** con respecto a un imán que proporciona un campo uniforme **B** sobre una región. Un observador **S** está en reposo con respecto al imán empleado para crear el campo **B**. La fem inducida en este caso es una fuerza *electromotriz de movimiento o cinética* porque la espira de conducción se está moviendo con respecto a este observador.

Consideremos un portador de carga positiva en el centro del extremo izquierdo de la espira. Para el observador S, esta carga q está obligada a moverse a través del campo B a velocidad y hacia la derecha junto con la espira, y experimenta una fuerza magnética dada por  $F = qv \times B$  (no ilustrada en la Fig. 16a). Esta fuerza provoca que los portadores se muevan hacia arriba (en la dirección y) a lo largo del conductor; finalmente, llegan a adquirir la velocidad de arrastre  $V_d$  como se muestra en la figura 16a.

La velocidad de equilibrio de los portadores resultante es ahora V, la suma vectorial de v y  $v_d$ . En esta situación la fuerza magnética FR es

$$F_R = qV \times B \quad (18)$$

actuando (como siempre) en ángulo recto con la velocidad resultante V del portador, como se muestra en la figura 16a. Al actuar sola, FR tendería a empujar a los portadores a través de la pared izquierda del conductor. Ya que esto no sucede, la pared del conductor debe ejercer una fuerza normal N sobre los portadores (véase la Fig. 16a) de magnitud tal que  $N$  se encuentre paralela al eje del alambre; en otras palabras, N cancela exactamente a la componente horizontal de FR, dejando únicamente a la componente  $F_b \cos \theta$  que se encuentra a lo largo de la dirección del conductor. Esta última componente de la fuerza sobre el portador también se cancela, en este caso, por la fuerza

impulsora promedio  $F$ , asociada a las colisiones internas que experimenta el portador cuando se mueve a velocidad (constante)  $v_d$  por el alambre.

La energía cinética del portador de carga al moverse por el alambre permanece constante. Esto es consistente con el hecho de que la fuerza resultante que actúa sobre el portador de carga ( $= F_B + F_i + N$ ) es cero. El trabajo efectuado por  $F$  es cero porque las fuerzas magnéticas, que actúan en ángulo recto con la velocidad de una carga en movimiento, no pueden efectuar ningún trabajo sobre esa carga. Entonces, el trabajo (negativo) efectuado sobre el portador por la fuerza de colisión interna promedio  $F$  debe ser cancelado exactamente por el trabajo (positivo) efectuado sobre el portador por la fuerza  $N$ . Por último,  $N$  es suministrada por el agente que tira de la espira a través del campo magnético, y la energía mecánica gastada por este agente aparece como energía interna en la espira, como hemos visto en la sección 36-4. Calculemos entonces el trabajo  $dW$  efectuado sobre el portador en el tiempo  $dt$  por la fuerza  $N$ ; es

$$dW = N(v dt) \quad (19)$$

donde  $v dt$  es la distancia que la espira (y el portador) se ha movido hacia la derecha en la figura 16a en el tiempo  $dt$ . Podemos escribir para  $N$  (véase la Ec. 18 y la Fig. 16a)

$$N = F_B \sin \theta = (qVB)(v_d/V) = qBv_d \quad (20)$$

Al sustituir la ecuación 20 en la ecuación 19 nos da

$$\begin{aligned} dW &= (qBv_d)(v dt) \\ &= (qBv)(v_d dt) = qBv ds \end{aligned} \quad (21)$$

donde  $ds$  ( $v_d dt$ ) es la distancia que recorre el portador a lo largo del conductor en el tiempo  $dt$ .

El trabajo efectuado sobre el portador al completar un circuito de la espira se halla integrando la ecuación 21 alrededor de la espira y es

$$W = \oint dW = qBvD. \quad (22)$$

Esto se deduce porque las contribuciones de trabajo en las partes superior e inferior de las espiras son de signo opuesto y se cancelan, y no se efectúa ningún trabajo en aquellas porciones de la espira que se encuentran fuera del campo magnético.

Un agente que efectúe un trabajo sobre los portadores de carga, generando así una corriente en una espira conductora cerrada,

puede verse como una fem. Usando la ecuación 22, hallamos

$$\mathcal{E} = \frac{W}{q} = \frac{qBvD}{q} = BDv, \quad (23)$$

que es el mismo resultado que dedujimos a partir de la ley de la inducción de Faraday; véase la ecuación 5. Entonces una fem impulsora está íntimamente relacionada con la desviación lateral de una partícula cargada que se mueve a través de un campo magnético.

Consideremos ahora cómo vería la situación de la figura 16a un observador  $S'$  que esté *en reposo con respecto a la espira*. Para este observador, el imán se mueve hacia la izquierda en la figura 16b a velocidad  $-v_i$  y la carga  $q$  no se mueve en la dirección  $x'$  con la espira, sino que se mueve siguiendo el sentido de las manecillas del reloj alrededor de la espira.  $S'$  mide una fem  $\mathcal{E}'$  que se explica, al nivel microscópico, afirmando que se induce en la espira un campo eléctrico  $E'$  debido a la acción del imán en movimiento. La fem  $\mathcal{E}'$  está relacionada con  $E'$  según la ecuación 12,

$$\mathcal{E}' = \oint E' \cdot ds.$$

El campo inducido  $E'$ , que tiene el mismo origen que los campos inducidos que estudiaremos en la sección 36-5, ejerce una fuerza  $qE'$  sobre el portador de carga.

El campo inducido  $E'$  que produce la corriente existe únicamente en el costado izquierdo de la espira. (Cuando operamos la integral de la ecuación 12 alrededor de la espira, las contribuciones a la integral a partir de la componente  $x'$  de  $E'$  se cancelan en los extremos superior e inferior, mientras que no existe una contribución de las partes de la espira que no estén dentro del campo magnético.) Usando la ecuación 12 obtenemos, entonces

$$\mathcal{E}' = E'D. \quad (24)$$

Para un movimiento a velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, las fem dadas por las ecuaciones 23 y 24 deben ser idénticas, porque el movimiento relativo de la espira y del imán es idéntico en los dos casos mostrados en la figura 16. Al igualar estas relaciones nos da

$$E'D = BDv,$$

o sea

$$E' = vB. \quad (25)$$

En la figura 16b, el vector  $E'$  apunta hacia arriba a lo largo del eje del extremo izquierdo de la espira conductora porque ésta es la dirección en que se observa que se mueven las cargas positivas. Las direcciones de  $v$  y  $B$  se muestran claramente en esta figura. Vemos entonces que la ecuación 25 es consistente con la relación vectorial más general

$$E' = v \times B. \quad (26)$$

No hemos demostrado la ecuación 26 excepto para el caso especial de la figura 16; sin embargo, es aplicable en general, independiente de cuál sea el ángulo entre  $v$  y  $B$ .

Interpretamos la ecuación 26 de la siguiente manera. El observador  $S$  fijo con respecto al imán percibe únicamente un campo magnético. Para este observador, la fuerza surge del movimiento de las cargas a través de  $B$ . El observador  $S'$  fijo en el portador de carga advierte también un campo eléctrico  $E'$  y le atribuye al campo eléctrico la fuerza sobre la carga (inicialmente en reposo con respecto a  $S'$ ).  $S$  dice que la fuerza es de origen puramente magnético, mientras que  $S'$  dice que la fuerza

es de origen puramente eléctrico. Desde el punto de vista de  $S$ ,  
 (23) la fem inducida está dada por  $\sim (v \times B) \cdot ds$ . Desde el punto de vista de  $S'$ , la misma fem inducida está dada por  $\sim E' \cdot ds$ , en donde  $E'$  es el vector del campo eléctrico (inducido) que  $S'$  observa en los plintos a lo largo del circuito.

Para un tercer observador  $S''$ , en relación con el cual se mueven tanto el imán como la espira, la fuerza que tiende a mover a las cargas alrededor de la espira no es ni puramente eléctrica ni puramente magnética sino un poco de cada una. En resumen, en la ecuación

$$F/q = E + v \times B,$$

diferentes observadores se forman diferentes juicios de  $E$ ,  $B$  y  $v$  pero, cuando éstos están combinados, todos los observadores se forman el mismo juicio con respecto a  $F/q$ , y todos obtienen el mismo valor para la fem inducida en la espira (que depende únicamente del movimiento *relativo*). Esto es, la fuerza total (y, por tanto, la aceleración total) es la misma para todos los observadores, pero cada observador se forma una estimación diferente de las fuerzas eléctricas y magnéticas por separado que contribuyen a la misma fuerza total.

El punto esencial es que lo que le parece un campo magnético a un observador puede parecerle una combinación de campos eléctrico y magnético a un segundo observador en un marco de referencia inercial diferente. Sin embargo, ambos observadores concuerdan en el resultado mensurable total, en el caso de la figura 16, la corriente en la espira. Estamos forzados a concluir que los campos magnético y eléctrico *no* son independientes uno del otro y no tienen una existencia única por separado; dependen del marco inercial, como también concluimos en la sección 35-7.

Todos los resultados de esta sección suponen que la velocidad relativa entre  $S$  y  $S'$  es pequeña comparada con la velocidad

de la luz  $c$ . Si  $v$  es comparable a  $c$ , puede aplicarse el grupo apropiado de transformaciones relativistas. En este caso, hallaríamos que las fem inducidas medidas por  $S$  y  $S'$  ya no serían iguales, y que el campo eléctrico inducido no está dado por la ecuación 26. Sin embargo, si ponemos cuidado en definir todas las cantidades de la manera relativista apropiada, hallamos de nuevo que las leyes básicas del electromagnetismo, incluyendo a la ley de Faraday, se cumplen en todos los marcos de referencia inerciales.\* En efecto, tales consideraciones condujeron a Einstein a la teoría especial de la relatividad; en el

lenguaje de la relatividad especial, decimos que las ecuaciones de Maxwell son invariantes con respecto a la transformación de Lorentz.