CAPITOLO 0

Richiami di cinematica

1 Lo studio del moto

La **cinematica** è la parte della fisica che tratta i concetti necessari per descrivere il moto senza fare riferimento alle forze. La **dinamica** è la parte della fisica che studia gli effetti delle forze sul moto. La cinematica e la dinamica, insieme alla **statica**, che studia le condizioni che permettono agli oggetti di rimanere in equilibrio, costituiscono la parte della fisica chiamata **meccanica**.

Ripassiamo ora i concetti fondamentali della cinematica.

TRAIETTORIA

Si chiama **traiettoria** l'insieme dei punti attraverso i quali passa un corpo durante il suo moto (figura **1**).

Figura 1
A Un falco in volo percorre una traiettoria complessa.
B La punta di una lancetta di orologio descrive una traiettoria circolare.

■ **MOTO RETTILINEO**

Un corpo si muove di **moto rettilineo** quando la sua traiettoria è una porzione di retta.

Nello studio del moto, un corpo viene trattato come se fosse un **punto materiale**, cioè senza considerare le sue dimensioni, quando queste sono trascurabili rispetto alle dimensioni caratteristiche del problema analizzato.

In generale, per descrivere un moto rettilineo si utilizza un **sistema di riferimento** formato da:

- una retta sulla quale sono fissati un punto, detto origine, un verso positivo di percorrenza e un'unità di misura di lunghezza;
- un orologio per misurare il tempo.

Note le posizioni s_1 e s_2, di un corpo in moto, la **distanza** Δs (leggi «delta esse») percorsa fra gli istanti t_1 e t_2 è uguale alla differenza $s_2 - s_1$:

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

La distanza percorsa non dipende dal sistema di riferimento rispetto al quale sono indicate le posizioni.

2 La velocità

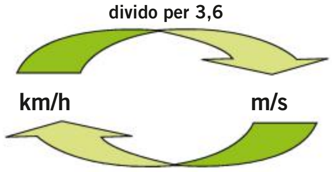
■ **VELOCITÀ MEDIA**

La **velocità media** è il rapporto tra la distanza percorsa e il tempo impiegato per percorrerla:

$$\text{velocità media} = \frac{\text{distanza percorsa}}{\text{tempo impiegato}}$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \qquad (1)$$

Unità di misura: metri al secondo (m/s).



Per convertire:

- in m/s una velocità indicata in km/h, bisogna dividere per 3,6;
- in km/h una velocità indicata in m/s, bisogna moltiplicare per 3,6.

■ **VELOCITÀ ISTANTANEA**

La **velocità istantanea** v è il valore a cui tende il rapporto $\Delta s/\Delta t$ quando Δt diventa infinitamente piccolo, ed è approssimativamente uguale alla velocità media $\bar{v}$ calcolata in un intervallo Δt sufficientemente piccolo contenente quell'istante. In simboli si scrive:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (2)$$

(La notazione si legge «limite, per Δt tendente a zero, di $\Delta s/\Delta t$».)

Un tipico strumento per la misura della velocità istantanea è il tachimetro, presente nel cruscotto di ogni automobile (figura 2).

Figura 2
Il tachimetro è lo strumento che indica la velocità istantanea di un'automobile.

ESEMPIO 1 L'automobile con motore a reazione più veloce del mondo

Nel 1997 il pilota inglese Andrew Green stabilì il record mondiale di velocità su terra con l'automobile *Thrust SSC* alimentata da due motori a reazione. Per stabilire questo record, l'automobile fece due volte lo stesso percorso lanciato di 1 miglio, una volta in un verso e un'altra volta nel verso opposto allo scopo di annullare gli effetti del vento. Come mostrano le figure **3A** e **3B**, l'automobile impiegò all'andata 4,740 s e al ritorno 4,695 s.

▶ Con quale velocità media l'automobile viaggiò in ciascuna delle due prove?

La soluzione

Fissiamo il sistema di riferimento indicato in figura, in cui il verso positivo è quello del viaggio d'andata. L'origine del sistema di riferimento coincide con una postazione di rilevamento cronometrico, mentre l'altra è a 1 miglio (= 1609 m) di distanza. Applicando l'equazione (1) troviamo che le velocità medie sono

andata $$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{1609\text{ m} - 0\text{ m}}{4{,}740\text{ s} - 0\text{ s}} = \frac{+1609\text{ m}}{4{,}740\text{ s}} = \boxed{+339{,}5\text{ m/s}}$$

ritorno $$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{0\text{ m} - 1609\text{ m}}{4{,}695\text{ s} - 0\text{ s}} = \frac{-1609\text{ m}}{4{,}695\text{ s}} = \boxed{-342{,}7\text{ m/s}}$$

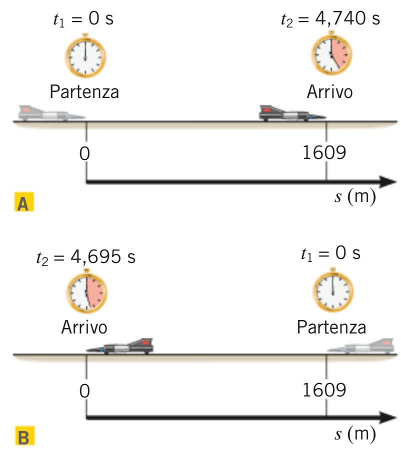


Figura 3
I due passaggi, in versi opposti, della *Thrust SSC*, l'automobile con cui Andrew Green ha stabilito il record mondiale di velocità sulla terra.

ESEMPIO 2 Un ostacolo in autostrada

Il limite di velocità nelle autostrade italiane è 130 km/h. Procedendo a questa velocità, un automobilista vede un ostacolo davanti a sé: prima che inizi a frenare passa circa 1 s, detto tempo di reazione.

▶ Quanti metri percorre l'auto prima che inizi la frenata?

La soluzione

Alla velocità di 130 km/h = 36 m/s l'auto si sposta di 36 metri ogni secondo: se l'ostacolo dista meno di 36 m dall'auto, l'automobilista non ha neppure il tempo per iniziare a frenare e l'auto urta contro l'ostacolo a 36 m/s, cioè a 130 km/h.

ESERCIZI

1 In picchiata, il falco pellegrino raggiunge i 300 km/h.

▶ Converti questa velocità in metri al secondo con due cifre significative.

2 In una gara di 1500 m piani, un atleta percorre i primi 1100 m in 2 min 46,0 s e i rimanenti 400 m in 59,0 s.

▶ Qual è stata la sua velocità media?

3 Quando tocchi una superficie calda con la punta delle dita, parte uno stimolo doloroso sotto forma di impulso nervoso che viaggia nei nervi a 110 m/s.

▶ Quanto tempo impiega per percorrere 85 cm e giungere al cervello?

3 Il moto rettilineo uniforme

MOTO RETTILINEO UNIFORME

Un corpo si muove di **moto rettilineo uniforme** quando percorre una traiettoria rettilinea con velocità costante.

Se un corpo si muove di moto rettilineo uniforme con velocità v, vale la relazione

$$\Delta s = v\Delta t \tag{3}$$

cioè la **distanza percorsa** Δs è direttamente proporzionale all'intervallo di tempo trascorso. La costante di proporzionalità è la velocità v.

Se un corpo si muove di moto rettilineo uniforme con velocità v e all'istante iniziale $t_0 = 0$ s occupa la posizione s_0, al generico istante t la sua posizione è data dalla formula

$$s = s_0 + vt \qquad (4)$$

detta **legge oraria** del moto rettilineo uniforme.

ESEMPIO 3 Quanto sono lunghi due minuti?

Un maratoneta percorre un rettilineo alla velocità costante di 5,5 m/s.

▶ Quale distanza copre in 2 min?

La soluzione

La velocità è costante, quindi la distanza percorsa è direttamente proporzionale al tempo trascorso. Convertendo i minuti in secondi e utilizzando l'equazione (3), si ottiene

$$\Delta s = v\Delta t = (5{,}5\ \text{m/s})(120\ \text{s}) = \boxed{660\ \text{m}}$$

ESEMPIO 4 Dov'è il treno?

Per indicare la posizione dei treni su una linea ferroviaria rettilinea, si introduce un sistema di riferimento che ha origine nella stazione A e come verso positivo quello che va dalla stazione A alla stazione C (figura 4). Un treno si sposta con velocità costante di 90 km/h. All'istante iniziale t_0 il treno passa per la stazione B, che dista 38 650 m da A, diretto verso la stazione C.

▶ Determina la posizione del treno all'istante $t = 3{,}5$ min.

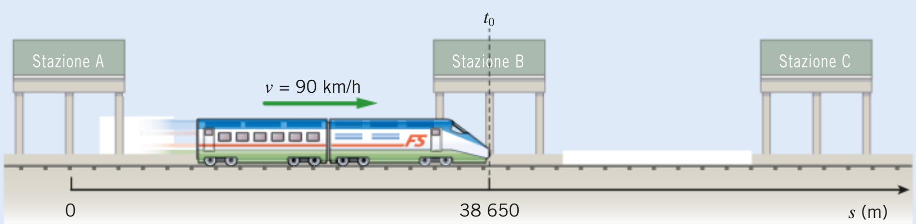


Figura 4
La posizione del treno in un istante $t > t_0$ può essere determiata, nel sistema di riferimento che ha origine nella stazione A, conoscendo la velocità v_0 del treno e lo spazio iniziale già percorso all'istante iniziale t_0 (stazione B).

La soluzione

Applicando l'equazione (4), dopo aver uniformato le unità di misura, si ottiene

$$s = 38\,650\ \text{m} + (25\ \text{m/s})(210\ \text{s}) = 38\,650\ \text{m} + 5250\ \text{m} = \boxed{43\,900\ \text{m}}$$

ESERCIZI

4 Uno *Space Shuttle* viaggia a una velocità di circa $7{,}6 \cdot 10^3$ m/s.

▶ Calcola quanti campi da calcio (lunghi 91,4 m) percorre durante un battito di palpebre di un astronauta, che dura circa 110 ms.

5 Due motociclisti transitano allo stesso istante di tempo in un incrocio. Il primo ha una velocità di 57 km/h e il secondo di 59 km/h. Ciascuno di essi mantiene costante la propria velocità.

▶ Dopo quanto tempo il loro distacco è 1500 m?

6 Due sciatori A e B stanno percorrendo una pista rettilinea di sci da fondo. Rispetto allo stesso sistema di riferimento, le loro leggi orarie sono $s_A = (4{,}5\ \text{m/s})\,t$ e $s_B = 350\ \text{m} - (2{,}5\ \text{m/s})\,t$.

▶ Qual è la distanza fra A e B all'istante $t = 0$ s?

▶ Dopo quanti secondi si incontrano?

▶ A quale distanza dal punto in cui è partito lo sciatore A?

4 Il grafico spazio-tempo del moto rettilineo uniforme

Il moto di un oggetto può essere descritto mediante una rappresentazione grafica, detta **grafico spazio-tempo**, che contiene molte informazioni sul moto di un oggetto.

Il rapporto $\Delta s/\Delta t$ è chiamato **pendenza** o **coefficiente angolare** della retta passante per A e B (figura 5):

$$\text{pendenza} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{+8\ \text{m}}{2\ \text{s}} = +4\ \text{m/s}$$

Secondo l'equazione (1), il rapporto $\Delta s/\Delta t$ è proprio la definizione di velocità media. Quindi in un certo intervallo di tempo la velocità media è uguale alla pendenza della retta che congiunge i due punti del grafico spazio-tempo corrispondenti agli estremi di quell'intervallo.

Non bisogna confondere traiettoria e diagramma spazio-tempo. La traiettoria è l'insieme dei punti attraverso i quali passa un corpo durante il suo moto, mentre il diagramma spazio-tempo è una rappresentazione grafica della legge oraria del moto di un corpo. La traiettoria è rettilinea se il corpo si sposta lungo una linea retta, mentre il diagramma spazio-tempo è rettilineo se il corpo si sposta con velocità costante.

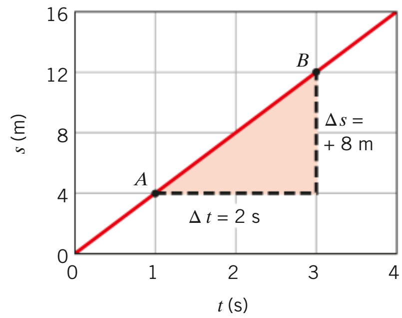


Figura 5
La pendenza della retta che collega due punti del grafico spazio-tempo rappresenta la velocità media di un ipotetico ciclista relativa al corrispondente intervallo di tempo.

ESEMPIO 5 Un viaggio in bicicletta

Un ciclista percorre un rettilineo con velocità costante all'andata, poi si ferma per un certo tempo e poi viaggia con velocità costante al ritorno. I grafici spazio-tempo per le tre parti in cui si può dividere il viaggio sono quelli rappresentati nella figura 6.

▶ Determina le velocità del ciclista in ciascuna parte del viaggio.

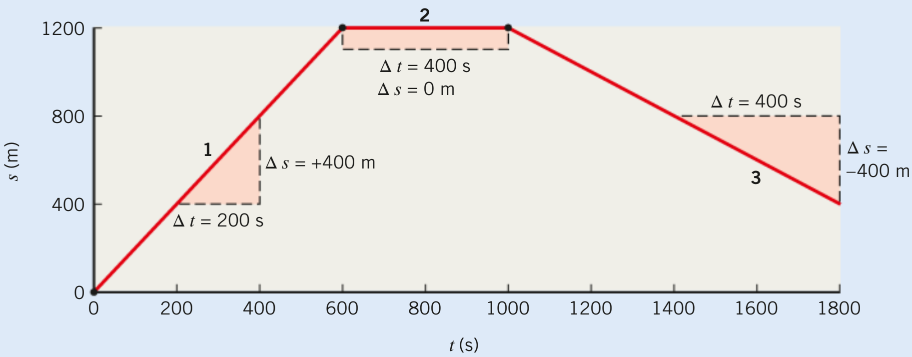


Figura 6
Il grafico spazio-tempo è formato da tre segmenti, ciascuno dei quali corrisponde a tre diversi valori costanti della velocità.

La soluzione

Le velocità medie nelle tre parti del viaggio sono:

prima parte
$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{800\ \text{m} - 400\ \text{m}}{400\ \text{s} - 200\ \text{s}} = \frac{+400\ \text{m}}{200\ \text{s}} = \boxed{+2\ \text{m/s}}$$

seconda parte
$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{1200\ \text{m} - 1200\ \text{m}}{1000\ \text{s} - 600\ \text{s}} = \frac{0\ \text{m}}{400\ \text{s}} = \boxed{0\ \text{m/s}}$$

terza parte
$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{400\ \text{m} - 800\ \text{m}}{1800\ \text{s} - 1400\ \text{s}} = \frac{-400\ \text{m}}{400\ \text{s}} = \boxed{-1\ \text{m/s}}$$

ESEMPIO 6 Un incontro galante

Andrea e Carla abitano agli estremi di una via rettilinea, lunga 1200 m (figura 7). Decidono di incontrarsi e partono con la moto nello stesso istante. Andrea si muove con una velocità costante di 20 m/s e Carla con una velocità costante di 10 m/s.

▶ Dopo quanto tempo si incontrano e a quale distanza dalla casa di Andrea?

Figura 7
Andrea e Carla partono in moto nello stesso istante per venirsi incontro. Dove si incontrano e dopo quanto tempo?

La soluzione

Fissiamo il sistema di riferimento in modo che la casa di Andrea sia nell'origine e che il verso positivo sia quello che va dalla casa di Andrea a quella di Carla. In conseguenza di questa scelta, la velocità di Andrea è $v_A = 20$ m/s, mentre quella di Carla è $v_C = -10$ m/s. Le due leggi orarie sono:

$$s_A = (20 \text{ m/s})\, t$$

$$s_C = 1200 \text{ m} - (10 \text{ m/s})\, t$$

Tracciamo i grafici spazio-tempo relativi ai moti di Andrea (in blu) e di Carla (in rosso) (figura 8).

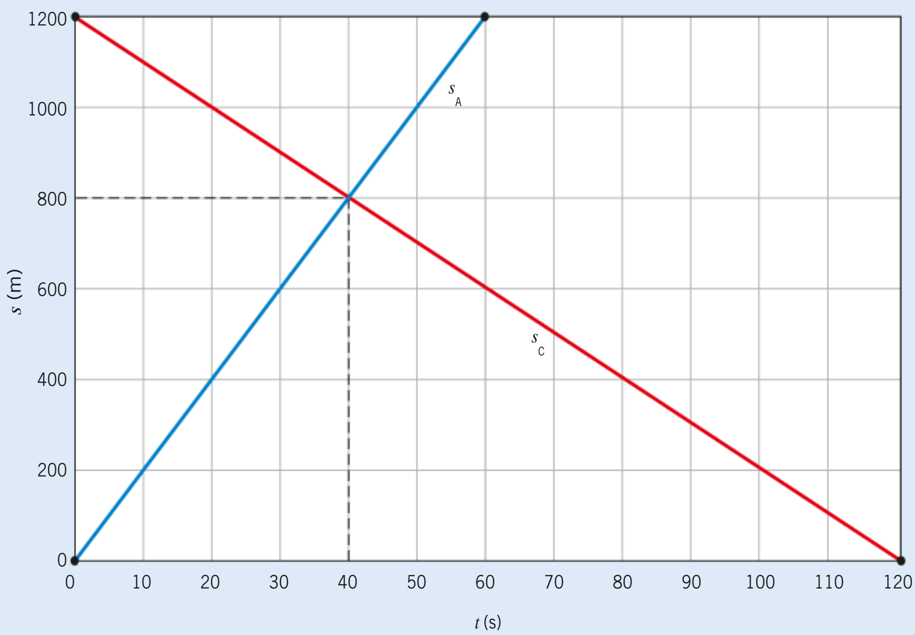


Figura 8
I grafici spazio-tempo di Andrea (s_A) e Carla (s_C): il punto in comune alle due rette corrisponde al momento dell'incontro, che avviene dopo 40 s dalla partenza e a 800 m dall'origine dello spostamento.

Le due rette hanno in comune il punto che corrisponde a $t = 40$ s e $s = 800$ m: questo significa che Andrea e Carla si incontrano, cioè hanno la stessa posizione $s_A = s_C = \boxed{800 \text{ m}}$, al tempo $t = \boxed{40 \text{ s}}$.

ESERCIZI

7 Il grafico spazio-tempo di un oggetto fra gli istanti $t_1 = 2$ s e $t_2 = 8$ s è quello riportato nella figura 9A alla pagina seguente.

▶ Calcola la velocità media fra t_1 e t_2.

8 I grafici spazio-tempo di figura **9B** sono relativi al moto di due cani A e B su un marciapiede.

- ▶ Scrivi la legge oraria del moto di ciascuno di essi.
- ▶ Determina dopo quanti secondi dall'istante iniziale la distanza fra i due cani è 6 m.

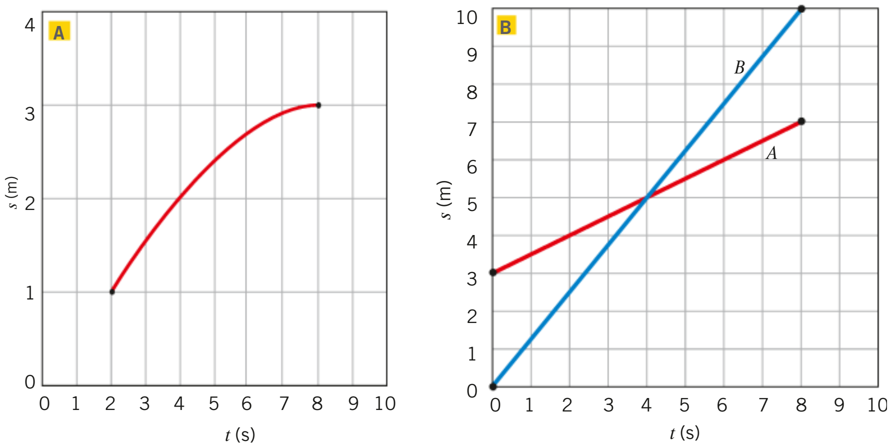


Figura 9
Grafici spazio-tempo relativi all'esercizio 7 (**A**) e all'esercizio 8 (**B**).

5 L'accelerazione

SIMULAZIONE
Velocità e accelerazione
(PhET, University of Colorado)

ACCELERAZIONE MEDIA

L'**accelerazione media** è il rapporto tra la variazione di velocità e l'intervallo di tempo in cui è avvenuta:

$$\text{accelerazione media} = \frac{\text{variazione di velocità}}{\text{tempo impiegato}}$$

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \qquad (5)$$

Unità di misura: metri al secondo quadrato (m/s^2).

ACCELERAZIONE ISTANTANEA

L'**accelerazione istantanea** è il valore a cui tende l'accelerazione media quando l'intervallo Δt in cui è misurata la variazione di velocità diventa così piccolo da essere praticamente nullo:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (6)$$

ESEMPIO 7 Accelerazione e diminuzione di velocità

Superata la linea del traguardo, il pilota di un dragster frena e fa aprire il paracadute posteriore (figura **10**). Incomincia a rallentare nell'istante $t_1 = 9{,}0$ s quando la velocità del mezzo è $v_1 = 28$ m/s. Nell'istante $t_2 = 12{,}0$ s la velocità è scesa a $v_2 = 13$ m/s.

- ▶ Qual è stata l'accelerazione media del dragster?

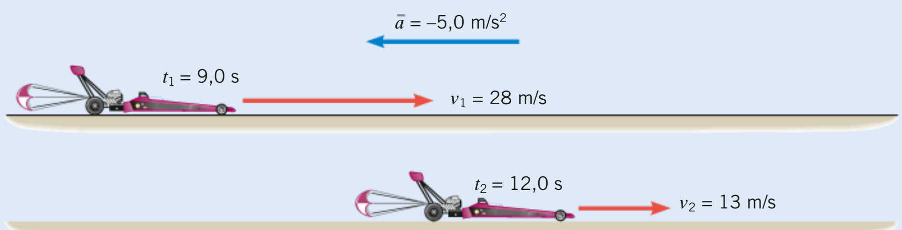


Figura 10
Nella frenata il dragster diminuisce la velocità.

La soluzione

La velocità finale è minore di quella iniziale, perciò la variazione di velocità è negativa e di conseguenza anche l'accelerazione media è negativa:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{13\ \text{m/s} - 28\ \text{m/s}}{12{,}0\ \text{s} - 9{,}0\ \text{s}} = \frac{-15\ \text{m/s}}{3{,}0\ \text{s}} = \boxed{-5{,}0\ \text{m/s}^2}$$

La velocità del dragster diminuisce di 5 m/s ogni secondo.

ESERCIZI

9 Un velocista scatta dai blocchi di partenza e mantiene un'accelerazione di 8,1 m/s^2 per 1,2 s. Poi completa la gara con accelerazione nulla.

▶ Calcola la sua velocità dopo 1,2 s e al termine della gara.

10 Un motociclista viaggia con un'accelerazione costante di 2,5 m/s^2 diretta nella stessa direzione della velocità.

▶ Quanto tempo impiega per passare da una velocità di 21 m/s a una velocità di 31 m/s e da una velocità di 51 m/s a una velocità di 61 m/s?

11 Un atleta parte da fermo e accelera per 1,5 s; poi, nei successivi 1,2 s, mantiene un'accelerazione di 1,1 m/s^2. Al termine, la sua velocità è 3,4 m/s.

▶ Qual è stata la sua accelerazione nei primi 1,5 s?

SIMULAZIONE
One-dimensional constant acceleration

6 Il moto rettilineo uniformemente accelerato

MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

Un corpo si muove di **moto rettilineo uniformemente accelerato** quando percorre una traiettoria rettilinea con accelerazione costante.

Indicando con v_0 la velocità iniziale, con v la velocità al generico istante t, si ha la formula

$$v = v_0 + at \qquad (7)$$

detta **legge velocità-tempo** del moto rettilineo uniformemente accelerato.

La **legge oraria** del moto rettilineo uniformemente accelerato permette di calcolare la posizione che un corpo occupa a un istante dato:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (8)$$

Nel moto uniformemente accelerato è possibile calcolare la distanza percorsa quando sono noti i valori di a, v e v_0. Utilizzando la **legge spazio-velocità**:

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \qquad (9)$$

La relazione precedente può essere posta in una forma molto utile nella risoluzione di esercizi:

$$v^2 = v_0^2 + 2as \qquad (10)$$

ESEMPIO 8 Barca a vela... e motore

Una barca a vela naviga a velocità costante di 2,5 m/s lungo una rotta rettilinea. Azionando i motori, lo skipper imprime per 25 s una accelerazione di 0,04 m/s^2.

▶ Qual è la velocità finale della barca?

La soluzione

Si tratta di un moto rettilineo uniformemente accelerato, con v_0 = 2,5 m/s, a = 0,04 m/s^2 e t = 25 s:

$$v = 2{,}5\ \text{m/s} + (0{,}04\ \text{m/s}^2)(25\ \text{s}) = 2{,}5\ \text{m/s} + 1{,}0\ \text{m/s} = \boxed{3{,}5\ \text{m/s}}$$

ESEMPIO 9 Un motoscafo da competizione

Il motoscafo illustrato nella figura **11A** si muove con un'accelerazione costante di 2,0 m/s^2.

- ▶ Sapendo che la sua velocità iniziale è 6,0 m/s, trova la distanza che percorre in 8,0 s (figura **11B**).

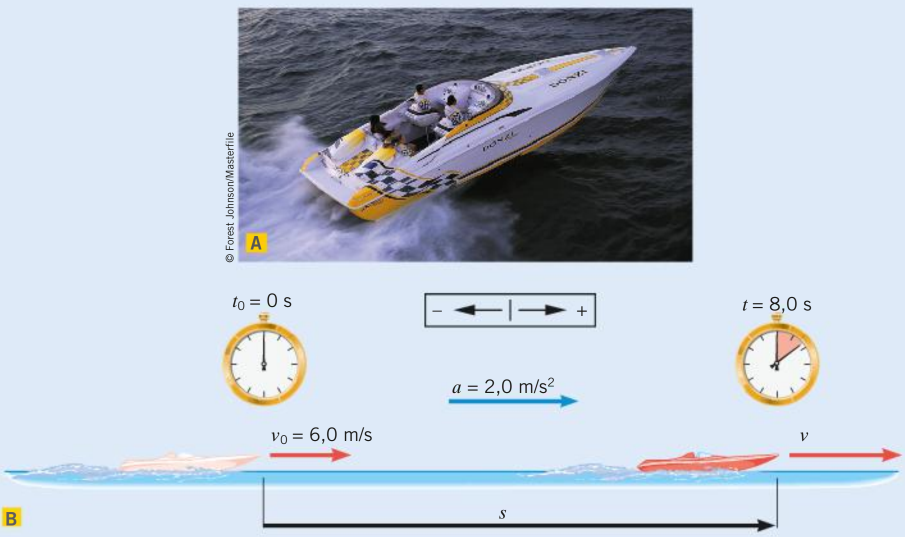


Figura 11
A Un motoscafo da competizione in fase di accelerazione.
B Lo spostamento s del motoscafo può essere determinato conoscendo l'accelerazione, la velocità iniziale e il tempo trascorso.

La soluzione

Se poniamo s_0 = 0 m all'istante iniziale, la distanza percorsa coincide con la posizione s all'istante t ed è data dall'equazione (8), con v_0 = 6,0 m/s, a = 2,0 m/s^2 e t = 8,0 s:

$$s = (6{,}0\ \text{m/s})(8{,}0\ \text{s}) + \frac{1}{2}(2{,}0\ \text{m/s}^2)(8{,}0\ \text{s})^2 = 48\ \text{m} + 64\ \text{m} = \boxed{112\ \text{m}}$$

Notiamo che il risultato deve essere approssimato a 110 m, perché i dati sono conosciuti con due sole cifre significative.

ESERCIZI

12 Un aereo a reazione atterra a una velocità di 60 m/s. Dopo aver percorso 750 m di pista, la sua velocità è 6,1 m/s.
- ▶ Determina l'accelerazione media dell'aereo durante l'atterraggio.

13 Un ghepardo parte da fermo quando una gazzella gli passa accanto a 9,0 m/s.
- ▶ Con quale accelerazione deve muoversi per raggiungere la gazzella in 3,0 s?

14 Un'automobile viaggia su un'autostrada a 33 m/s. Nell'istante in cui passa davanti a una rampa d'accesso un'altra automobile si immette sull'autostrada. La seconda automobile parte da ferma.
- ▶ Quale accelerazione costante deve mantenere per raggiungere la prima automobile dopo 2,5 km?

15 In una gara di 50 m piani un velocista accelera da fermo con un'accelerazione di 3,80 m/s^2. Dopo aver raggiunto la velocità massima continua a correre per il resto della gara senza variare la sua velocità. Il tempo totale impiegato è 7,88 s.
- ▶ Calcola la distanza percorsa durante la fase di accelerazione.

7 I grafici nel moto uniformemente accelerato

Il **grafico spazio-tempo** nel moto uniformemente accelerato è una curva chiamata **arco di parabola**.

La **velocità media** dell'oggetto tra gli istanti t_1 e $t_1 + \Delta t$ è data dalla pendenza della retta passante per A e per B (figura **12A**).

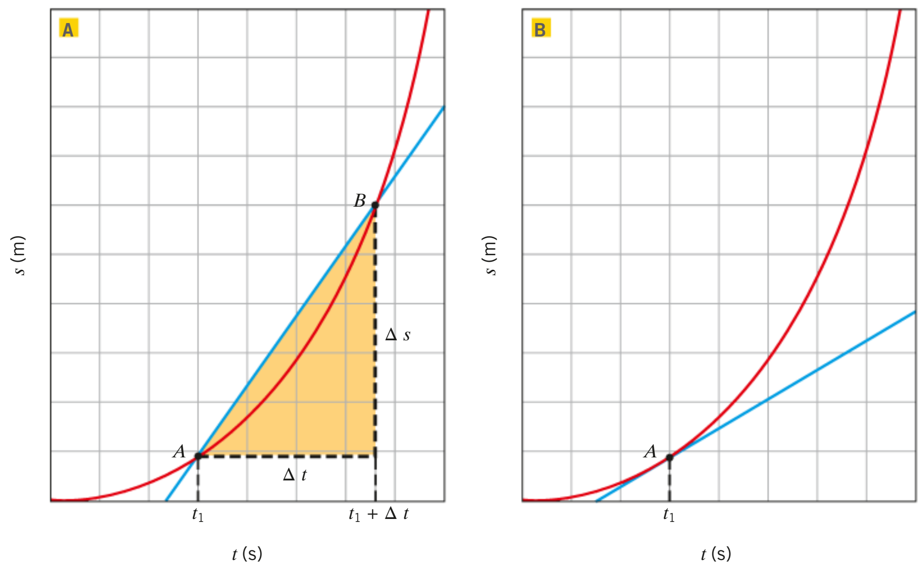


Figura 12
Nel moto uniformemente accelerato il grafico spazio-tempo è un arco di parabola.
A La velocità fra gli istanti t_1 e $t_1 + \Delta t$ è data dalla pendenza della retta passante per A e B.
B Quando $\Delta t \rightarrow 0$ la retta per AB diventa la tangente al punto A e la sua pendenza è uguale alla velocità istantanea nell'istante t_1.

SIMULAZIONE
Constant velocity versus constant acceleration

■ **VELOCITÀ ISTANTANEA E GRAFICO SPAZIO-TEMPO**

La **velocità istantanea** è la pendenza della tangente al grafico spazio-tempo in un determinato istante (figura **12B**).

■ **ACCELERAZIONE E GRAFICO VELOCITÀ-TEMPO**

Nel **grafico velocità-tempo** di un moto uniformemente accelerato, la pendenza della retta è uguale all'**accelerazione** (figura **13**).

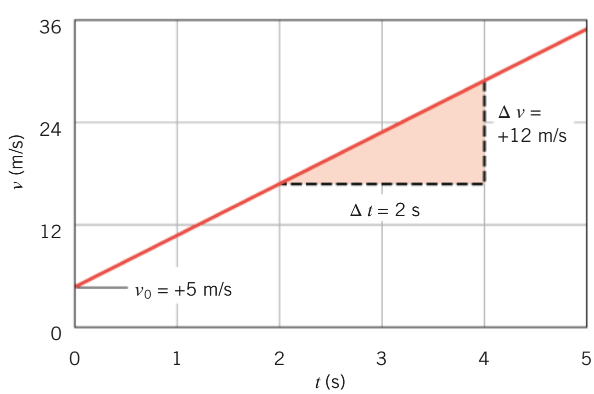
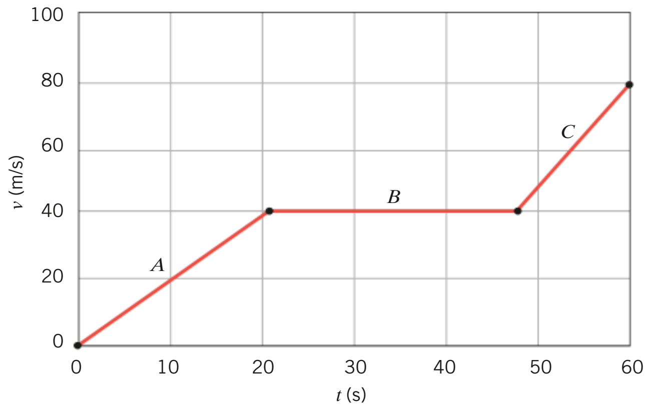


Figura 13
Il grafico velocità-tempo relativo a un oggetto che si muove con accelerazione $\Delta v/\Delta t = +6$ m/s^2. La velocità iniziale, all'istante $t = 0$ s, è $v_0 = +5$ m/s.

ESERCIZI

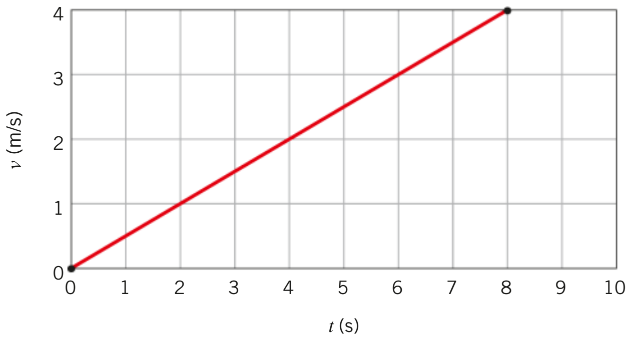
16 Il grafico velocità-tempo della figura in alto nella pagina seguente si riferisce al moto di una motoslitta.

▶ Qual è l'accelerazione media della motoslitta in ciascuno dei tre segmenti A, B e C del grafico?



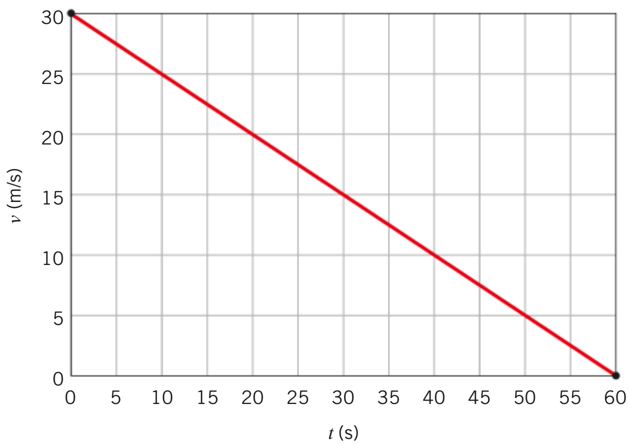
17 Il seguente è il grafico velocità-tempo di una moto che parte a un semaforo.

- Quale velocità raggiunge dopo 4 s?
- Quanti metri percorre nei primi 6 s?
- Quanti metri percorre fra gli istanti $t_1 = 2$ s e $t_2 = 8$ s?



18 Il seguente è il grafico velocità-tempo di un'automobile. All'istante $t = 0$ s la posizione dell'auto è $s_0 = 1550$ m.

- Scrivi la legge oraria dell'auto.



8 Il moto di caduta libera

SIMULAZIONE
Freefall

Gli oggetti, lasciati liberi, cadono verso il basso. Galileo dimostrò per primo che, se si trascura la resistenza dell'aria, tutti gli oggetti cadono con la stessa accelerazione, che rimane costante lungo la caduta. Questo tipo di moto è detto **moto di caduta libera**.

L'accelerazione di un oggetto in caduta libera è detta **accelerazione di gravità** ed è indicata con g. Vicino alla superficie terrestre il valore di g è approssimativamente

$$g = 9{,}80 \text{ m/s}^2$$

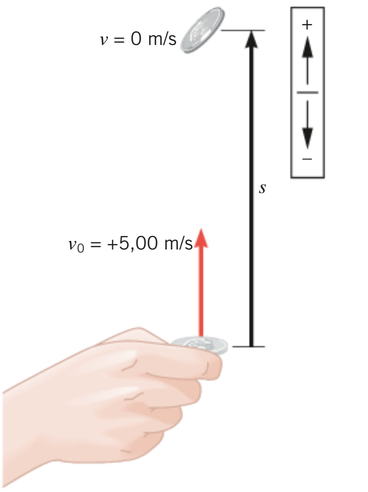


Figura 14
Per sorteggiare a chi spetta il calcio d'inizio, un arbitro lancia in alto una moneta con una velocità iniziale $v_0 = +5{,}00$ m/s. La velocità della moneta si annulla nell'istante in cui raggiunge la massima altezza.

In realtà il valore di g diminuisce con l'aumentare dell'altezza sul livello della superficie terrestre e varia leggermente anche al variare della latitudine.

L'espressione «in caduta libera» non significa necessariamente che un oggetto stia cadendo: l'espressione si riferisce a qualunque oggetto che si muova sottoposto alla sola accelerazione di gravità.

ESEMPIO 10 Fino a che altezza arriva?

Per stabilire a quale squadra spetta il calcio d'inizio, un arbitro lancia una moneta verso l'alto con una velocità iniziale di 5,00 m/s.

▶ Quale altezza raggiunge la moneta rispetto al punto da cui è stata lanciata?

La soluzione

Scegliamo come verso positivo quello indicato in figura 14. La velocità iniziale della moneta è positiva, perché la moneta si sposta nel verso scelto come positivo. Però la velocità della moneta diminuisce nei primi istanti di moto e quindi la sua accelerazione è negativa. Poniamo quindi $v_0 = +5{,}00$ m/s e $a = -g$, essendo $g = 9{,}80$ m/s^2 l'accelerazione di gravità. Nell'istante in cui la moneta raggiunge l'altezza massima, la sua velocità è nulla ($v = 0$ m/s). Applicando l'equazione (9) risulta

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2(-g)} = \frac{(0\ \text{m/s})^2 - (5{,}00\ \text{m/s})^2}{2(-9{,}80\ \text{m/s}^2)} = \boxed{1{,}28\ \text{m}}$$

ESERCIZI

19 Una moneta viene lasciata cadere da un ponte alto 135 m. La resistenza dell'aria è trascurabile.

▶ Calcola la velocità della moneta quando tocca il suolo.

20 Una ragazza lascia cadere un palloncino pieno d'acqua dalla finestra della sua camera da letto, che si trova a 6,0 m da terra.

▶ Se il palloncino parte da fermo, per quanto tempo resta in aria?

21 Un tuffatore si lancia verso l'alto da un trampolino alto 3,0 m. La sua velocità iniziale è 1,8 m/s.

▶ Trova la velocità del tuffatore quando tocca l'acqua. *Suggerimento*: scegliendo come posizione iniziale quella del tuffatore sul trampolino prima del tuffo e come verso negativo quello verso il basso, lo spostamento del tuffatore quando tocca l'acqua è $y = -3{,}0$ m.

▶ Qual è l'altezza massima al di sopra della superficie dell'acqua raggiunta dal tuffatore?

22 Un astronauta che si trova su un pianeta lontano vuole determinare l'accelerazione di gravità su quel pianeta. Per farlo lancia un sasso verso l'alto con una velocità di 15 m/s e misura un tempo di 20,0 s prima che il sasso torni nella sua mano.

▶ Qual è l'accelerazione di gravità sul pianeta?

23 Due fucili identici sparano nello stesso istante un proiettile dal bordo di un precipizio con una velocità di 30,0 m/s. Il fucile A è puntato verso l'alto, mentre il fucile B è puntato verso il basso.

▶ Trascurando la resistenza dell'aria, calcola quanto tempo passa fra gli arrivi a terra dei due proiettili.

24 Un sasso è lanciato con una fionda verso il basso dal bordo di una scogliera alta 15 m. Il sasso arriva in acqua con una velocità di 27 m/s.

▶ A quale altezza sopra il bordo della scogliera sarebbe arrivato il sasso se fosse stato lanciato verso l'alto?

9 Spostamento, velocità e accelerazione

Estendiamo i concetti usati per descrivere il moto rettilineo ai moti che avvengono lungo una traiettoria curva su un piano.

Sistema di riferimento

Per descrivere un moto che avviene in due dimensioni si utilizza un **sistema di riferimento** (figura 15) formato da:

- due assi orientati x e y perpendicolari fra loro e aventi un punto comune, detto **origine**;
- un orologio per misurare il tempo.

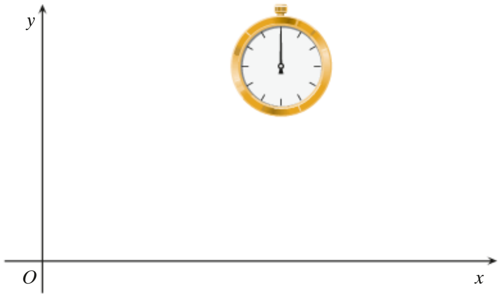


Figura 15
Un moto bidimensionale può essere descritto utilizzando un sistema di riferimento cartesiano Oxy per descrivere la traiettoria e un orologio per la misura del tempo.

Spostamento

Lo **spostamento** $\Delta\vec{s}$ è il vettore che va dalla posizione iniziale $\vec{s}_0$ nell'istante t_0 alla posizione finale $\vec{s}$ nell'istante t. Il modulo di $\Delta\vec{s}$ è uguale alla distanza tra la posizione iniziale e la posizione finale. Il vettore $\vec{s}$ è il vettore somma di $\vec{s}_0$ e $\Delta\vec{s}$, cioè $\vec{s} = \vec{s}_0 + \Delta\vec{s}$ (figura 16). Perciò si ha

$$\text{spostamento} = \Delta\vec{s} = \vec{s} - \vec{s}_0$$

In due dimensioni lo spostamento può avere una direzione qualunque nel piano.

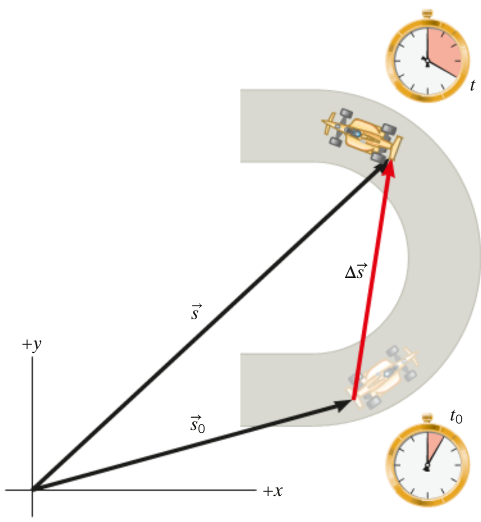


Figura 16
Lo spostamento $\Delta\vec{s}$ dell'automobile è rappresentato dal vettore che va dalla posizione iniziale dell'automobile nell'istante t_0 alla sua posizione finale nell'istante t. Il modulo di $\Delta\vec{s}$ è uguale alla distanza tra la posizione iniziale e la posizione finale.

Velocità

La velocità media $\vec{\bar{v}}$ è definita in maniera analoga a quella del moto rettilineo, cioè come rapporto tra lo spostamento $\Delta\vec{s} = \vec{s} - \vec{s}_0$ e l'intervallo di tempo $\Delta t = t - t_0$ in cui è stato compiuto:

$$\vec{\bar{v}} = \frac{\vec{s} - \vec{s}_0}{t - t_0} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} \qquad (11)$$

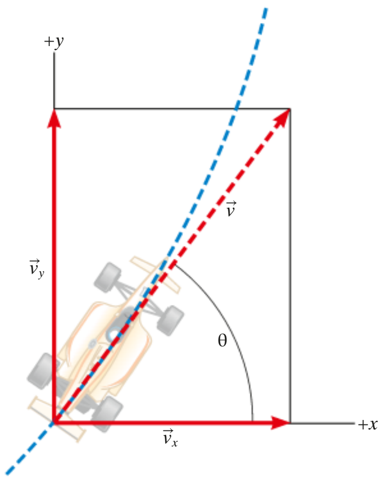


Figura 17
La velocità istantanea $\vec{v}$ e i suoi componenti vettoriali $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$ sugli assi x e y.

Il vettore velocità media ha la stessa direzione e lo stesso verso del vettore spostamento.

La velocità in un certo istante di tempo è la **velocità istantanea** $\vec{v}$. La velocità media diventa uguale alla velocità istantanea $\vec{v}$ quando l'intervallo di tempo Δt diventa infinitamente piccolo:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}$$

La figura 17 mostra che il vettore velocità istantanea è tangente alla traiettoria dell'automobile.

Accelerazione

Anche nel moto in due dimensioni, l'**accelerazione media** $\bar{\vec{a}}$ è definita come rapporto tra la variazione di velocità $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$ e l'intervallo di tempo Δt in cui è avvenuta:

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \qquad (12)$$

Il vettore accelerazione media ha la stessa direzione e lo stesso verso della variazione di velocità $\Delta\vec{v}$. Quando l'intervallo Δt in cui viene misurata la variazione di velocità diventa infinitamente piccolo, l'accelerazione media diventa uguale all'**accelerazione istantanea** $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

ESEMPIO 11 Elefante marino in immersione

Un elefante marino si immerge a una profondità di 750 m e contemporaneamente si sposta di 460 m verso est rispetto alla sua posizione iniziale.

▶ Qual è il modulo del suo spostamento totale?

La soluzione

Determinare il modulo dello spostamento totale equivale a calcolare la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha come cateti la profondità di immersione e lo spostamento verso est:

$$s = \sqrt{(460\ \text{m})^2 + (750\ \text{m})^2} = 879{,}83\ \text{m} \approx \boxed{8{,}8 \cdot 10^2\ \text{m}}$$

ESEMPIO 12 Moto di un aereo

Un aereo viaggia a 265 m/s. La componente verticale della sua velocità è 40,6 m/s.

▶ Determina la componente orizzontale della velocità dell'aereo.

La soluzione

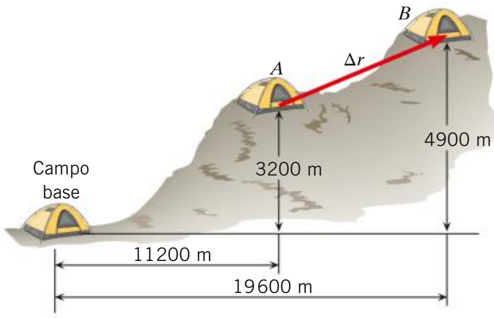
Determinare la componente orizzontale della velocità dell'aereo equivale a calcolare la lunghezza di un cateto di un triangolo rettangolo che ha come ipotenusa il modulo della velocità dell'aereo e come secondo cateto la componente verticale della velocità; per cui

$$v = \sqrt{(265\ \text{m/s})^2 - (40{,}6\ \text{m/s})^2} = 261{,}9\ \text{m/s} \approx \boxed{262\ \text{m/s}}$$

ESERCIZI

25 Un gruppo di alpinisti costruisce due accampamenti intermedi, indicati con A e B nella figura della pagina seguente, sopra la quota del campo base.

▶ Qual è il modulo dello spostamento tra l'accampamento A e l'accampamento B?



26 In una rimessa dal fondocampo, il pallone subisce per 0,050 s un'accelerazione media di 340 m/s^2. Il pallone è calciato in una direzione che forma un angolo di 45° con il campo di gioco.

▶ Calcola le componenti orizzontale e verticale della velocità iniziale del pallone.

27 Una ragazza su uno skateboard parte da ferma e scende con accelerazione costante per una rampa lunga 12,0 m. Quando arriva in fondo alla rampa il modulo della sua velocità è 7,70 m/s.

▶ Calcola il modulo dell'accelerazione della ragazza.

▶ Se la rampa è inclinata di 30,0° rispetto al suolo, qual è la componente dell'accelerazione parallela al suolo?

10 La composizione dei moti

PRINCIPIO DI COMPOSIZIONE DEI MOTI

Quando un corpo è soggetto a due movimenti contemporanei, lo **spostamento totale** è la somma vettoriale degli spostamenti dovuti a ogni singolo moto.

LEGGE DI COMPOSIZIONE DELLE VELOCITÀ

Quando un corpo è soggetto a due movimenti contemporanei con velocità rispettivamente $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, la **velocità totale** $\vec{v}$ è la somma vettoriale delle velocità di ogni singolo moto: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

ESEMPIO 13 Lo spostamento di un'astronave

Le componenti nella direzione x della velocità iniziale e dell'accelerazione dell'astronave della figura 18 sono $v_{0x} = +22$ m/s e $a_x = +24$ m/s^2. I corrispondenti valori nella direzione y sono $v_{0y} = +14$ m/s e $a_y = +12$ m/s^2.

▶ Calcola il modulo dello spostamento totale dell'astronave nell'istante $t = 7{,}0$ s.

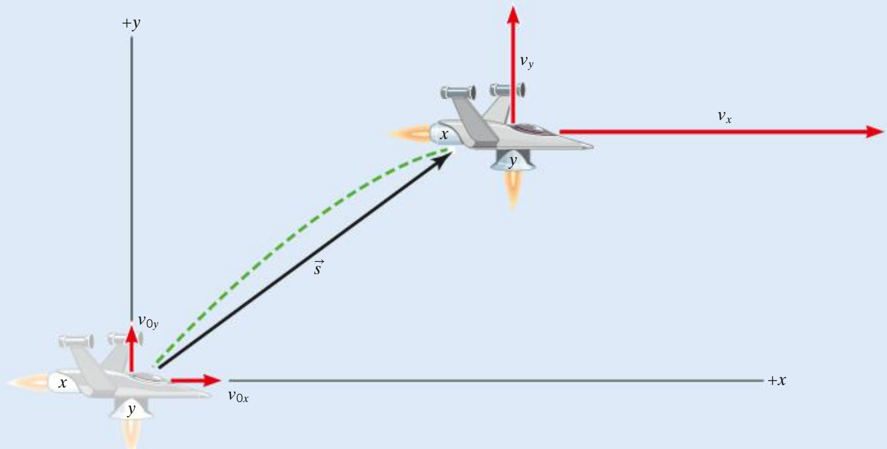


Figura 18
Il moto in due dimensioni della nave spaziale può essere descritto come composizione di due moti indipendenti nelle direzioni degli assi x e y.

La soluzione

Lo spostamento totale $\vec{s}$ è la somma vettoriale degli spostamenti $\vec{s}_x$ e $\vec{s}_y$. I moti nelle direzioni x e y possono essere studiati separatamente: ciò permette di determinare s_x e s_y come fossero moti in una sola dimensione. Gli spostamenti lungo le direzioni x e y hanno rispettivamente modulo

$$s_x = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = (22\ \text{m/s})(7{,}0\ \text{s}) + \frac{1}{2}(24\ \text{m/s}^2)(7{,}0\ \text{s})^2 = \boxed{+740\ \text{m}}$$

$$s_y = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = (14\ \text{m/s})(7{,}0\ \text{s}) + \frac{1}{2}(12\ \text{m/s}^2)(7{,}0\ \text{s})^2 = \boxed{+390\ \text{m}}$$

Quindi il modulo dello spostamento totale è

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{(740\ \text{m})^2 + (390\ \text{m})^2} = \boxed{+840\ \text{m}}$$

SIMULAZIONE
Relative velocities

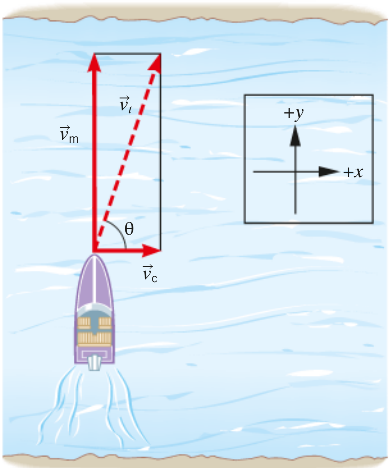


Figura 19
La velocità $\vec{v}_t$ del motoscafo relativa alle rive è la somma vettoriale della sua velocità $\vec{v}_m$ rispetto all'acqua e della velocità della corrente $\vec{v}_c$.

ESEMPIO 14 Un motoscafo nella corrente

Un motoscafo attraversa un fiume largo 280 m. La sua velocità $\vec{v}_m$ rispetto all'acqua ha modulo 4,0 m/s ed è diretta in direzione perpendicolare alle rive. La velocità $\vec{v}_c$ della corrente ha modulo 1,2 m/s ed è parallela alle rive (figura 19).

- Calcola la velocità $\vec{v}_t$ del motoscafo rispetto a un osservatore fermo su una riva.
- Calcola il tempo che impiega il motoscafo ad attraversare il fiume.

La soluzione

- Per la legge di composizione delle velocità $\vec{v}_t = \vec{v}_m + \vec{v}_c$. Noti v_m e v_c è possibile determinare il modulo e la direzione di $\vec{v}_t$. I vettori $\vec{v}_m$ e $\vec{v}_c$ sono perpendicolari, quindi il modulo di $\vec{v}_t$ si calcola con il teorema di Pitagora:

$$v_t = \sqrt{v_m^2 + v_c^2} = \sqrt{(4{,}0\ \text{m/s})^2 + (1{,}2\ \text{m/s})^2} = \boxed{4{,}2\ \text{m/s}}$$

La direzione di $\vec{v}_t$ forma con la riva un angolo

$$\theta = \text{tg}^{-1}\frac{v_m}{v_c} = \text{tg}^{-1}\frac{4{,}0\ \text{m/s}}{1{,}2\ \text{m/s}} = \boxed{73°}$$

- La durata dell'attraversamento dipende dalla componente della velocità totale in direzione perpendicolare alle rive, quindi solo da $\vec{v}_m$, in quanto $\vec{v}_c$ è parallela alle rive. L'attraversamento dura:

$$t = \frac{280\ \text{m}}{4{,}0\ \text{m/s}} = \boxed{70\ \text{s}}$$

ESERCIZI

28 Una nave da crociera si muove a 2,5 m/s parallelamente al molo. Sul ponte della nave, un passeggero si muove a 1,5 m/s in direzione perpendicolare al molo.

- Calcola il modulo della velocità del passeggero rispetto al molo.

29 Un nuotatore attraversa un fiume largo 20 m mantenendo una velocità costante di 0,50 m/s in direzione perpendicolare alle rive. La corrente del fiume ha una velocità di 0,80 m/s in direzione parallela alle rive.

- Calcola quanto tempo impiega ad attraversare il fiume.
- Calcola lo spostamento verso valle che ha subìto per effetto della corrente.
- Qual è il modulo della sua velocità rispetto alla riva?

30 Un pilota vuole dirigere il suo aereo verso est. La velocità dell'aereo rispetto all'aria è 245 m/s. Dalla torre di controllo comunicano che l'aereo si sta muovendo in una zona in cui il vento spira a 38,0 m/s in direzione sud.

- In quale verso, rispetto all'est, il pilota deve dirigere l'aereo?

11 Moto di un proiettile

L'equazione della traiettoria di un proiettile

Quando un proiettile non è lanciato in direzione verticale, la sua traiettoria è un arco di **parabola**. L'equazione della traiettoria nel sistema di riferimento rappresentato in figura 20 è

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 \qquad (13)$$

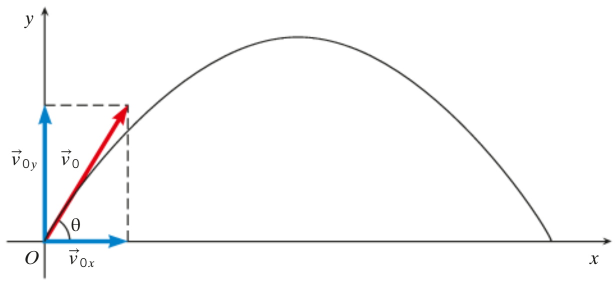


Figura 20
La traiettoria di un proiettile lanciato in direzione obliqua è una parabola.

La (13) è l'equazione di una **parabola** con asse verticale e passante per l'origine degli assi.

L'ascissa del punto in cui il proiettile tocca il suolo è la **gittata** G del lancio:

$$G = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$$

Fissati v_0 e g, si ha la **gittata massima** quando l'angolo di lancio è 45° e vale

$$G = \frac{v_0^2}{g}$$

Nel moto parabolico la componente verticale della velocità cambia, mentre la componente orizzontale mantiene il valore iniziale v_{0x} per tutta la durata del moto.

Una caratteristica importante del moto del proiettile è che la componente orizzontale dell'accelerazione del proiettile è sempre nulla.

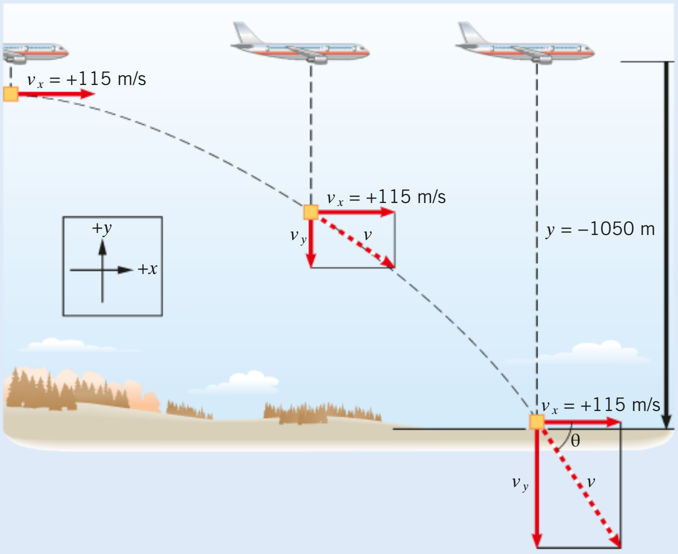
SIMULAZIONE
Projectile motion
The projectile ball

Fisica quotidiana
Tempo di volo di un pallone nella rimessa da fondo campo

ESEMPIO 15 La caduta di un pacco aiuti

La figura 21 mostra un aereo che vola in direzione orizzontale con una velocità costante di +115 m/s a un'altezza di 1050 m. Dall'aereo viene lanciato un pacco di aiuti umanitari che arriva al suolo seguendo una traiettoria curva.

- Quanto tempo impiega il pacco per arrivare al suolo?
- Quanto vale il modulo della velocità con cui il pacco arriva al suolo?



SIMULAZIONE
Falling velocity

Figura 21
La caduta del pacco aiuti è una esemplificazione di moto di un proiettile.

La soluzione

- Utilizziamo l'equazione

$$y = v_{0y}\,t + \frac{1}{2}a_y\,t^2$$

Ponendo $y = -1050$ m, $v_{0y} = 0$ m/s e $a_y = -9{,}80$ m/s^2 risulta

$$-1050\ \text{m} = \frac{1}{2}(-9{,}80\ \text{m/s}^2)\,t^2 \quad\Rightarrow\quad t = \sqrt{\frac{2\,(-1050\ \text{m})}{-9{,}80\ \text{m/s}^2}} = \boxed{14{,}6\ \text{s}}$$

- Inserendo nell'equazione $v_y = v_{0y} + a_y t$ i dati $a_y = -9{,}80$ m/s^2, $v_{0y} = 0$ m/s e $t = 14{,}6$ s otteniamo

$$v_y = v_{0y} + a_y t = 0\ \text{m/s} + (-9{,}80\ \text{m/s}^2)(14{,}6\ \text{s}) = -143\ \text{m/s}$$

Il modulo della velocità finale del pacco è dato da

$$v = \sqrt{(+115\ \text{m/s})^2 + (-143\ \text{m/s})^2} = \boxed{+184\ \text{m/s}}$$

ESERCIZI

31 Quando si allontana dalla racchetta, una pallina da tennis viaggia in direzione orizzontale con una velocità di modulo 28,0 m/s. La pallina cade sul campo a una distanza orizzontale dalla racchetta di 19,6 m.
- A quale altezza da terra si trovava la pallina quando ha lasciato la racchetta?

32 Una palla da pallavolo viene battuta in modo da avere una velocità iniziale di modulo 16 m/s e in una direzione che forma un angolo di 60° con la direzione orizzontale.
- Qual è la componente orizzontale della velocità della palla quando arriva al giocatore opposto nel campo avversario?

33 Un proiettile viene sparato a 670 m/s contro un bersaglio da un fucile mantenuto orizzontale. La canna del fucile è puntata direttamente verso il centro del bersaglio, ma il proiettile colpisce il bersaglio in un punto che è 2,5 cm sotto il centro.
- Qual è la distanza tra la bocca del fucile e il bersaglio?

34 Un giocatore di golf imprime a una pallina una velocità di 30,3 m/s a 45° rispetto alla direzione orizzontale. Il punto da cui la pallina viene lanciata e quello in cui arriva sono alla stessa quota.
- Per quanto tempo resta in aria la pallina?
- Qual è la gittata del colpo?

35 Un giocatore calcia un pallone verso la porta che si trova a 16,8 m di distanza. Il pallone si stacca dal suo piede con una velocità di modulo 16,0 m/s in una direzione che forma un angolo di 30,0° con il suolo.
- Calcola il modulo della velocità del pallone quando il portiere lo afferra subito prima che entri in porta.

12 Il moto circolare uniforme

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

Il **moto circolare uniforme** è il moto di un oggetto che si sposta lungo una traiettoria circolare con velocità di modulo costante.

Un esempio di moto circolare uniforme è rappresentato nella figura **22**. Poiché il modellino di aeroplano si muove su una traiettoria circolare con velocità di modulo costante, i vettori velocità istantanea $\vec{v}$ in vari punti della traiettoria hanno tutti la stessa lunghezza. La velocità istantanea è sempre tangente alla traiettoria: per questa ragione, la velocità $\vec{v}$ è anche detta **velocità tangenziale**.

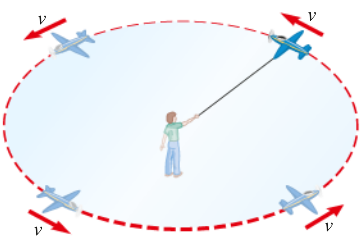


Figura 22
Il moto di un modellino di aereo che gira con velocità di modulo costante su una traiettoria circolare è un esempio di moto circolare uniforme.

Periodo e frequenza

PERIODO E FREQUENZA NEL MOTO CIRCOLARE UNIFORME

In un moto circolare uniforme

- il **periodo** T è l'intervallo di tempo impiegato per percorrere un giro completo;
- la **frequenza** f è il numero di giri compiuti in un secondo.

Unità di misura:

- *periodo*, secondi (s);
- *frequenza*, 1/secondi = hertz (s^{-1} = Hz).

La relazione tra periodo e frequenza è

$$f = \frac{1}{T} \tag{14}$$

Nel moto circolare uniforme il periodo e la frequenza sono legati al modulo della velocità:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \tag{15}$$

Ricordando la (14) si ottiene un'altra utile relazione:

$$v = 2\pi r f \tag{16}$$

SIMULAZIONE
Moto circolare
(PhET, University of Colorado)

Figura 23
La posizione del modellino di aereo può essere determinata dal raggio vettore.

Misura degli angoli in radianti

La posizione di un oggetto in moto circolare può essere individuata mediante il **raggio vettore**, cioè il vettore che ha la coda nel centro della traiettoria circolare e la punta nella posizione dell'oggetto (figura 23).

Per individuare il punto lungo la traiettoria basta fornire l'angolo che il suo raggio vettore forma con una direzione di riferimento fissata (figura 24).

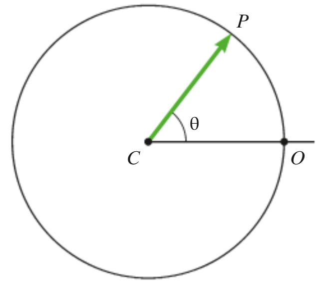


Figura 24
La posizione P sulla circonferenza è individuata dall'angolo θ che il suo raggio vettore forma con la direzione di riferimento fissata.

DEFINIZIONE DI RADIANTE

L'ampiezza dell'angolo θ, espressa in **radianti**, è il rapporto fra la lunghezza l dell'arco e il raggio r della circonferenza (figura 25):

$$\theta_r = \frac{l}{r}$$

Nel Sistema Internazionale, l'unità di misura degli angoli è il *radiante* (rad). Il radiante è un'unità adimensionale, in quanto rapporto tra due lunghezze.

Velocità angolare

VELOCITÀ ANGOLARE MEDIA

Si dice **velocità angolare media** ω il rapporto fra l'angolo al centro Δθ e l'intervallo di tempo Δt che il raggio vettore impiega a spazzare tale angolo

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{17}$$

Unità di misura: radianti al secondo (rad/s).

Se il moto di un oggetto è circolare uniforme, la sua velocità angolare è costante.

Nel moto circolare la relazione fra velocità angolare e periodo è

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{18}$$

e quella fra velocità angolare e velocità tangenziale è

$$v = \omega r \tag{19}$$

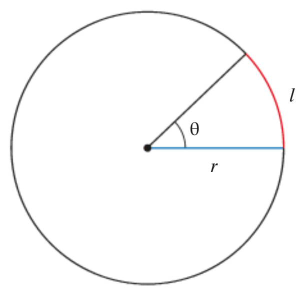


Figura 25
L'angolo θ è misurato in radianti se è espresso dal rapporto fra la lunghezza l dell'arco staccato dai lati dell'angolo su una circonferenza con centro nel vertice dell'angolo e il raggio r della circonferenza.

SIMULAZIONE
Velocity and acceleration

Accelerazione centripeta

ACCELERAZIONE CENTRIPETA: MODULO

Un corpo in moto circolare uniforme con velocità di modulo v su una circonferenza di raggio r è soggetto a un'**accelerazione centripeta** di modulo:

$$a_c = \frac{v^2}{r} \tag{20}$$

Il modulo dell'accelerazione centripeta può essere scritto in termini di velocità angolare:

$$a_c = \omega^2 r \tag{21}$$

Fisica quotidiana
Una pista da bob

ACCELERAZIONE CENTRIPETA: DIREZIONE

In un moto circolare uniforme il vettore accelerazione centripeta è sempre diretto verso il centro della traiettoria.

ESEMPIO 16 Una macchina per bilanciare i pneumatici

La ruota di un'automobile ha un raggio di 0,290 m ed è collocata su una macchina per bilanciare gli pneumatici che la mantiene in rotazione facendole compiere 840 giri al minuto.

▶ Qual è il modulo della velocità tangenziale (in m/s) del bordo esterno della ruota.

La soluzione

Prima esprimiamo la frequenza f in hertz: f = 840 giri/min = 840 giri/60 s = 14,0 Hz. Inserendo questo valore nell'equazione (16) otteniamo il modulo della velocità tangenziale:

$$v = 2\pi r f = 2\pi\,(0{,}290\ \text{m})(14{,}0\ \text{Hz}) = \boxed{25{,}5\ \text{m/s}}$$

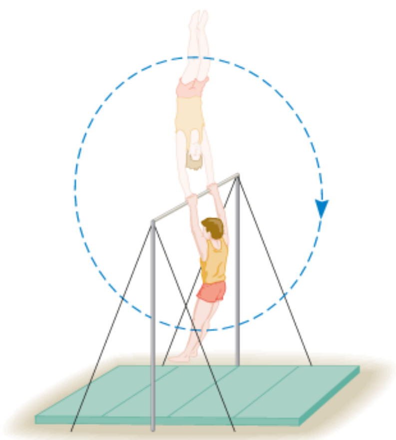


Figura 26
Un ginnasta alla sbarra.

ESEMPIO 17 Un ginnasta alla sbarra

Un ginnasta esegue due rotazioni complete alla sbarra in 2,4 s (figura **26**).

▶ Calcola la sua velocità angolare media.

La soluzione

In ogni rotazione completa il ginnasta compie un giro attorno alla sbarra, quindi ruota di 2π rad. La sua velocità angolare media è

$$\omega = 2\,\frac{2\pi\ \text{rad}}{2{,}4\ \text{s}} = \boxed{5{,}2\ \text{rad/s}}$$

ESERCIZI

36 Un CD-ROM è in rotazione; a 3,0 cm dal centro l'accelerazione centripeta è 120 m/s^2.

▶ Qual è l'accelerazione centripeta a 5,0 cm dal centro?

37 Un'automobile viaggia con una velocità di modulo costante lungo una pista circolare di raggio 2,6 km e impiega 360 s per fare una volta il giro completo della pista.

▶ Qual è il modulo dell'accelerazione centripeta dell'automobile?

38 Il motoscafo A compie una curva di 120 m di raggio, mentre il motoscafo B ne effettua una di raggio doppio. I due motoscafi subiscono la stessa accelerazione centripeta.

▶ Calcola il rapporto v_A/v_B delle loro velocità.

13 Il moto armonico

MOTO ARMONICO

Il **moto armonico** è il movimento della proiezione, su un diametro della traiettoria, di un punto che si muove di moto circolare uniforme.

SIMULAZIONE
Simple harmonic motion

Per definire le grandezze caratteristiche del moto armonico usiamo il modello (figura 27) costituito da una pallina attaccata al bordo di un disco che ruota a velocità di modulo costante sul piatto di un giradischi. La pallina si muove di moto circolare uniforme lungo una **circonferenza di riferimento**.

Mentre la pallina ruota, la sua ombra viene proiettata su una striscia di pellicola che si muove verso l'alto a velocità costante e su cui rimane impresso il tracciato del cammino percorso dall'ombra. Questo tracciato ha una forma caratteristica del moto armonico, chiamata **cosinusoide**.

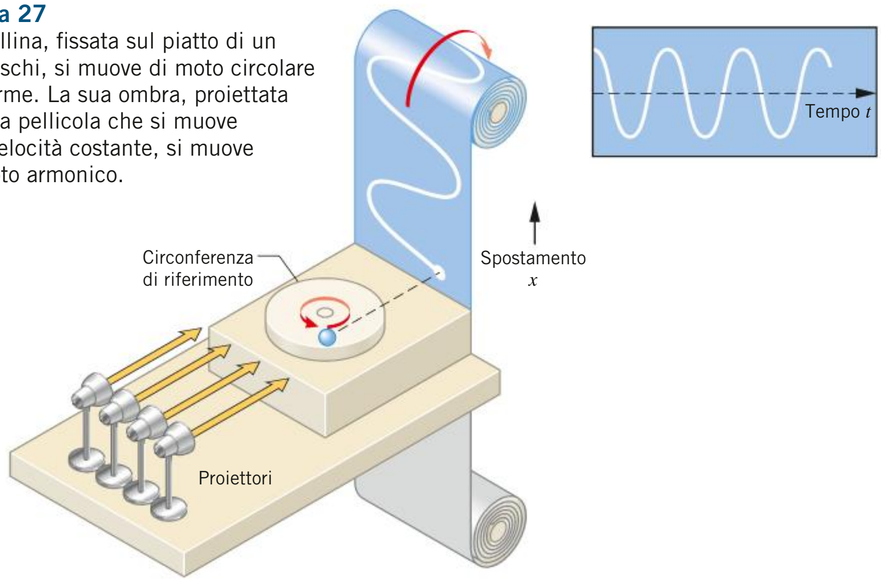


Figura 27
La pallina, fissata sul piatto di un giradischi, si muove di moto circolare uniforme. La sua ombra, proiettata su una pellicola che si muove con velocità costante, si muove di moto armonico.

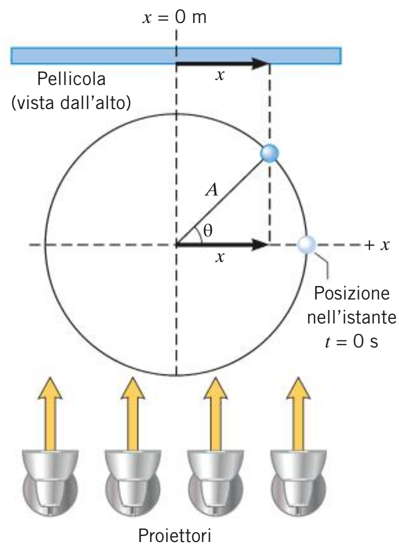


Figura 28
Vista dall'alto della pallina sul piatto del giradischi della figura precedente. Lo spostamento x dell'ombra della pallina dipende dall'angolo θ descritto dalla pallina sulla circonferenza di riferimento.

Spostamento

Lo **spostamento** o **elongazione** x dell'ombra della pallina è uguale alla proiezione del raggio A sull'asse x (figura 28):

$$x = A\cos\theta = A\cos\omega t$$

La figura 29 mostra un grafico della relazione precedente, cioè il **grafico spazio-tempo** del moto armonico dell'ombra della pallina. Col passare del tempo, la posizione della pallina oscilla tra il valore massimo $+A$ e il valore minimo $-A$.

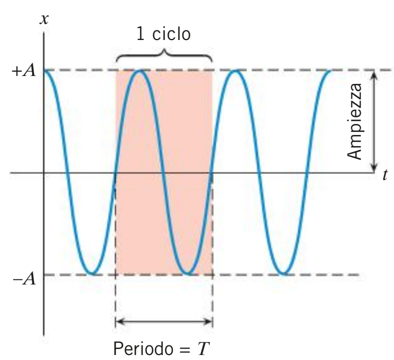


Figura 29
Il grafico spazio-tempo del moto armonico è una curva chiamata cosinusoide. Il periodo T è il tempo impiegato per compiere un ciclo completo.

MOTO ARMONICO: GRANDEZZE SIGNIFICATIVE

- L'**ampiezza** A è uguale al raggio della circonferenza di riferimento ed è la massima distanza dal centro di oscillazione.
- Il **periodo** T è uguale al periodo del moto circolare uniforme sulla circonferenza di riferimento e indica la durata di un ciclo.
- La **frequenza** f è uguale alla frequenza del moto circolare uniforme sulla circonferenza di riferimento ed è il numero di cicli al secondo.
- La **pulsazione** ω è la velocità angolare del moto circolare uniforme sulla circonferenza di riferimento.

Le grandezze del moto armonico hanno fra loro le stesse relazioni delle corrispondenti grandezze del moto circolare uniforme:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (\omega \text{ in rad/s}) \tag{22}$$

$$f = \frac{1}{T} \quad (\text{in Hz}) \tag{23}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (\omega \text{ in rad/s}) \tag{24}$$

L'equazione precedente mostra che la velocità angolare ω è direttamente proporzionale alla frequenza f: per questo motivo ω è chiamata anche **frequenza angolare**.

Velocità

La figura **30** mostra il vettore velocità tangenziale $\vec{v}_T$ della pallina che si muove sulla circonferenza di riferimento e il vettore velocità $\vec{v}$ della sua ombra. $\vec{v}$ è uguale alla componente di $\vec{v}_T$ nella direzione dell'asse x. Il modulo di v *non* è costante, ma varia al variare del tempo, passando ciclicamente da una valore massimo a un valore minimo e annullandosi negli istanti in cui l'ombra della pallina inverte il senso della sua oscillazione avanti e indietro. Il valore massimo del modulo della velocità è $A\omega$, che corrisponde alla posizione $x = 0$ dell'ombra della pallina:

$$v_{max} = A\omega \qquad (\omega \text{ in rad/s}) \tag{25}$$

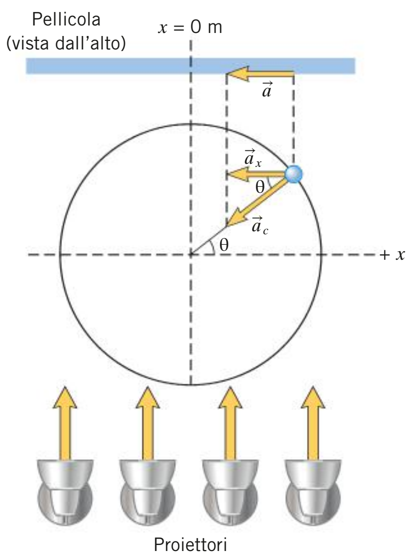


Figura 31
L'accelerazione $\vec{a}$ dell'ombra della pallina è uguale alla componente x dell'accelerazione centripeta $\vec{a}_c$ della pallina sulla circonferenza di riferimento.

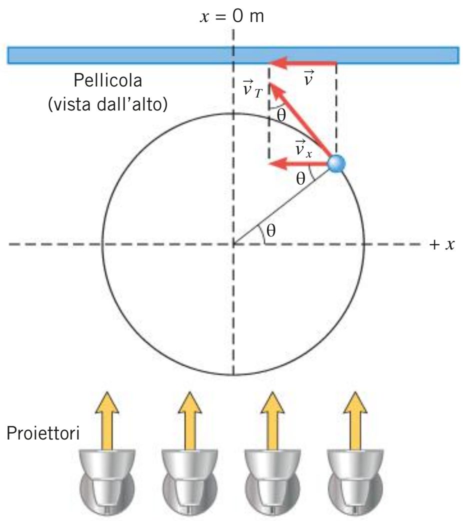


Figura 30
La velocità $\vec{v}$ dell'ombra della pallina è uguale alla componente x della velocità tangenziale $\vec{v}_T$ della pallina sulla circonferenza di riferimento.

Accelerazione

Nel moto armonico l'accelerazione è direttamente proporzionale allo spostamento e ha verso opposto a esso (figura **31**). Il suo modulo è espresso dalla relazione

$$a = -\omega^2 x \tag{26}$$

e assume il valore massimo nei punti di elongazione massima, cioè quando $x = -A$ o $x = A$.

Indicando lo spostamento con $\vec{s}$, la relazione (26) può essere posta in forma vettoriale:

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{s} \tag{27}$$

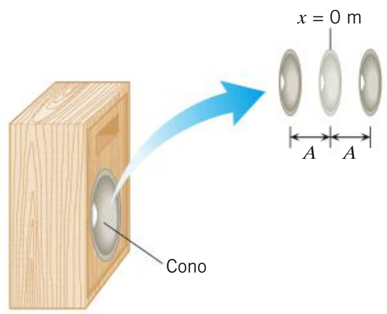


Figura 32
Il cono di un altoparlante genera il suono vibrando avanti e indietro in un moto armonico.

ESEMPIO 18 La velocità massima del cono di un altoparlante

Per generare il suono, il cono di un altoparlante oscilla avanti e indietro muovendosi di moto armonico (figura **32**). La frequenza delle oscillazioni è $f = 1{,}0$ kHz e la loro ampiezza è $A = 0{,}20$ mm.

▶ Qual è la massima velocità del cono?

La soluzione

La velocità massima vale

$$v_{max} = A\omega = A(2\pi f) = (0{,}20 \cdot 10^{-3}\ \text{m})(2\pi)(1{,}0 \cdot 10^3\ \text{Hz}) =$$
$$= \boxed{1{,}3\ \text{m/s}}$$

Fisica quotidiana
La membrana di un autoparlante

SIMULAZIONE
Particle oscillating in simple harmonic motion

ESEMPIO 19 L'accelerazione massima del cono di un altoparlante

Il cono dell'altoparlante dell'esempio precedente oscilla di moto armonico con una frequenza $f = 1{,}0$ kHz e un'ampiezza $A = 0{,}20$ mm.

▶ Qual è il valore massimo dell'accelerazione del cono?

La soluzione

L'accelerazione massima è

$$a_{max} = A\omega^2 = A(2\pi f)^2 = (0{,}20 \cdot 10^{-3}\ \text{m})[2\pi(1{,}0 \cdot 10^3\ \text{Hz})]^2 =$$
$$= \boxed{7{,}9 \cdot 10^3\ \text{m/s}^2}$$

Questa accelerazione è fortissima (è 800 volte maggiore dell'accelerazione di gravità): il cono dell'altoparlante deve essere costruito in modo da poter sostenere accelerazioni così elevate.

ESERCIZI

39 La membrana di un altoparlante genera un suono muovendosi avanti e indietro per 2 s in un moto armonico. La velocità angolare del moto è $7{,}54 \cdot 10^3$ rad/s.

▶ Quante volte la membrana si muove avanti e indietro?

40 Un punto percorre una circonferenza di raggio 0,25 m con la velocità di modulo costante 0,86 m/s. La sua ombra, proiettata su un diametro della circonferenza, si muove di moto armonico.

▶ Calcola l'ampiezza e la frequenza di tale moto armonico.

41 Un oggetto si muove di moto armonico con ampiezza 1,5 m e periodo 1,6 s.

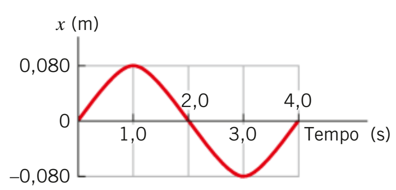
▶ Calcola la massima velocità che raggiunge.

42 Un oggetto si muove di moto armonico con ampiezza 0,70 m e periodo 1,1 s.

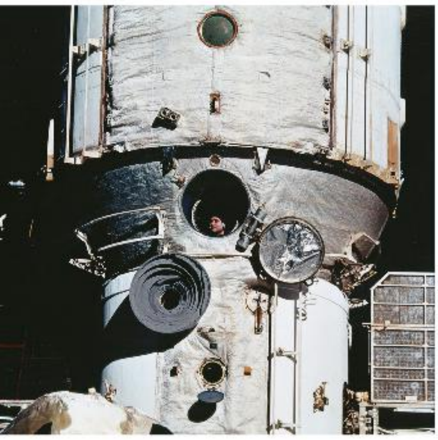
▶ Calcola la massima accelerazione a cui è sottoposto.

43 Un oggetto oscilla di moto armonico: il grafico mostra lo spostamento dell'oggetto in funzione del tempo.

▶ Determina l'ampiezza del moto, la frequenza angolare, la velocità e l'accelerazione dell'oggetto all'istante $t = 1{,}0$ s.



Formule in 3 minuti
La velocità
L'accelerazione



L'ordine di grandezza

Quanti anni impiegherebbe una sonda spaziale a raggiungere la stella più vicina al Sole?

Per calcolare quanti anni impiegherebbe una sonda spaziale ad arrivare in prossimità del sistema stellare più vicino al nostro, bisogna fare il rapporto tra la distanza che separa la Terra dalla stella più vicina al Sole e la velocità media della sonda.

Il modello

(anni impiegati da una sonda spaziale per raggiungere la stella più vicina al Sole) = (distanza Terra - stella più vicina al Sole) / (velocità media della sonda)

I numeri

▶ **Distanza Terra - stella più vicina al Sole** =
= distanza Terra - Proxima Centauri = 4,2 anni luce =
= 4,2 (velocità della luce) (numero di secondi in 1 anno) =
= 4,2 $(2{,}99 \cdot 10^8$ m/s$)$ $(365 \cdot 8{,}64 \cdot 10^4$ s$) \approx 4 \cdot 10^{16}$ m

▶ **Velocità media della sonda (*Voyager 1* è la sonda più veloce mai costruita dall'uomo)** =
= 3,6 UA/anno 5 3,6 (1 Unità Astronomica) / (anno) =
= 3,6 $(1{,}5 \cdot 10^{11}$ m$)$ / $(365 \cdot 8{,}64 \cdot 10^4$ s$) = 1{,}7 \cdot 10^4$ m/s =
= 61 200 km/h

Il risultato

anni impiegati da una sonda spaziale per raggiungere la stella più vicina al Sole =

$$= \frac{4 \cdot 10^{16}\ \text{m}}{1{,}7 \cdot 10^4\ \text{m/s}} = 2{,}4 \cdot 10^{12}\ \text{s} = \boxed{76\,000\ \text{anni}}$$

L'ordine di grandezza è: $\boxed{10^5\ \text{anni}}$

Una sonda spaziale impiegherebbe 76 mila anni a raggiungere la stella più vicina al Sole.
Prendendo come riferimento la velocità media del *Voyager 1*, l'oggetto più veloce mai costruito dall'uomo, una sonda che fosse partita alla volta di Proxima Centuari nel 2010 arriverebbe nei pressi della stella più vicina al Sole nell'anno 78 010.

Un paragone Per avere a che fare con tempi astronomici, non bisogna tuttavia parlare a ogni costo di viaggi interstellari. Basti pensare che la sonda *Voyager 1*, lanciata in orbita nel settembre 1977, ha raggiunto l'orbita di Plutone soltanto agli inizi del 1990 e per uscire completamente dal Sistema solare dovrà viaggiare ancora per altri 10 mila anni: contrariamente a quanto siamo abituati a pensare, infatti, lungi dal segnare il limite estremo del Sistema solare, Plutone si trova appena a un millesimo di quella distanza.

Le fonti

- **Distanza Terra-Proxima Centauri**: NASA (www.nasa.gov/topics/nasalife/features/worldbook.html)
- **Velocità media della sonda *Voyager 1***: NASA (www.nasa.gov/vision/universe/solarsystem/voyager_agu.html)

Stima l'ordine di grandezza

Quando nel 2020 la batteria del *Voyager 1* si esaurirà e la sonda invierà il suo ultimo segnale radio ai tecnici NASA, quanti kilometri la separeranno dal confine estremo del Sistema solare?

Il modello

(distanza del *Voyager 1* dal confine del Sistema solare nel 2020) = (raggio del Sistema solare) – (distanza del *Voyager 1* dal Sole nel 2020)

I numeri

Raggio del Sistema solare = $4 \cdot 10^4$ UA $\approx 6 \cdot 10^{15}$ m
Distanza del *Voyager 1* dal Sole nel 2020 = (distanza media della Terra dal Sole) + (distanza totale percorsa dal *Voyager 1* nel 2020) = (distanza media della Terra dal Sole) + (velocità media *Voyager 1*) (tempo di volo al 2020)
Distanza media della Terra dal Sole = 1 UA = $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m

I risultato

Distanza del *Voyager 1* dal confine del Sistema solare nel 2020 = ... km

Le fonti

- **Raggio del Sistema solare e distanza media della Terra dal Sole**: NASA (www.nasa.gov/topics/nasalife/features/worldbook.html)