Universidad de La Matanza- Licenciatura en Matemática Aplicada
Chocobar Mirtha Estela

Funciones Elípticas

Taller de Tesis: Trabajo Final

Profesor: Lic. Miguel Calzón

Año 2010

Índice Pág.

Introducción

En este trabajo se trata de mostrar, de manera sencilla, un acercamiento a un tipo de funciones que llamamos *elípticas.* Tiene relación con la curiosidad de medir la longitud del arco de una elipse, mediante integrales. Las investigaciones sobre este tema son variadas y se trabajan en el campo de las funciones de variable compleja. Se demostrará como al calcular la longitud de curvas, como elipses, circunferencias, lemniscatas, obtenemos integrales elípticas, origen de estas funciones. Aunque no llegaremos a ver el tema en profundidad, nos bastará acercarnos al conocimiento y planteo de teoremas de sus descubridores, grandes matemáticos, como Jacob Bernoulli, Joseph Liouville, Karl Weierstrass, Carl Jacobi, Niels Henrik Abel, Leonhard Euler, Agustín Louis Cauchy y otros.

Funciones Elípticas

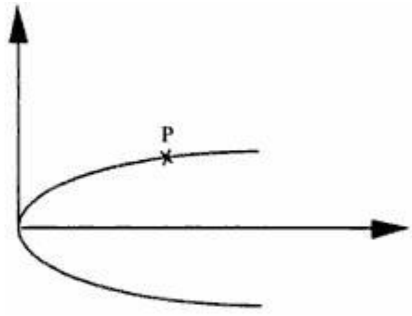
Al igual que muchos objetos matemáticos las funciones elípticas nacieron dos veces: la primera en el siglo XVIII y una segunda vez al comenzar el siglo XIX. Se dará una idea de su nacimiento y su renacimiento, para lo cual usaremos la *teoría de funciones de variable compleja*, y entre otras, la teoría de Weierstrass, los esenciales resultados de los teoremas de Liouville y el teorema de Abel.

Su origen: Las Integrales Elípticas

Cuando se hicieron conocidas las leyes de Kepler, que tratan la idea que todos los planetas giran alrededor del sol, describiendo órbitas elípticas, y estando el sol situado en uno de sus focos, surge el interés por medir dichas órbitas, utilizando el cálculo integral.

La medición del arco de elipse fue realizada por John Wallis en 1655 y su expansión en series por Newton y también Leonhard Euler. De manera general, la ecuación de la cónica

$$y^2 = 2px + (e^2 - 1)x^2, \qquad p \neq 0$$



Donde **e** es la excentricidad $(e = c/a)$ de esta cónica y $p = b^2/a$ es su parámetro tomando a **a** como el semieje mayor y **b** como el semieje menor, cuando ésta tiene centro.

Podemos parametrizar la cónica tomando $t = \frac{y}{x}$

y considerando a $\mathbf{x} = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{t}}$ $e\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{t}.\boldsymbol{x}$, tenemos que

$$(t.x)^2 = 2px + (e^2 - 1)\left(\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{t}}\right)^2$$

$$t^2.x^2 = 2p\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{t}} + (e^2 - 1)\frac{y^2}{t^2}$$

Tomando t^2, común denominador y operando, obtenemos:

$t^2.t^2x^2 = 2py.t + (e^2 - 1)y^2$ reemplazando y = t.x

$$t^2.t^2x^2 = 2p.t.x.t + (e^2 - 1)y^2$$

$$t^2.t^2x^2 = 2pxt^2 + (e^2 - 1)y^2$$

$t^2.t^2x^2 - 2pxt^2 = (e^2 - 1)x^2t^2$ factor común t^2y x, luego cancelando

$$t^2(t^2x^2 - 2px) = (e^2 - 1)x^2t^2$$

$$x(t^2x - 2p) = (e^2 - 1)x^2$$

$$(t^2x - 2p) = (e^2 - 1)x$$

$$t^2x - (e^2-1)x = 2p$$

$$x(t^2 - (e^2-1)) = 2p$$

y $\quad x = \frac{2p}{(t^2-(e^2-1)}$ equivalente a $x = \frac{2p}{t^2+(1-e^2)}$ reemplazando en $t.x = y$

obtengo $\quad y = t.\frac{2p}{(t^2-(e^2-1)} \longrightarrow y = \frac{2pt}{(t^2-(e^2-1)}$

Con $\quad x = \frac{2p}{t^2+(1-e^2)} \qquad\qquad y = \frac{2p\,t}{t^2+(1-e^2)}$

y $\quad \frac{dx}{dt} = -\frac{2p.2t}{(t^2+(1-e^2))^2} \qquad\qquad \frac{dy}{dt} = \frac{2p\,(t^2+(1-e^2)-2pt.2t)}{(t^2+(1-e^2))^2}$

Nombramos a:

$$\boldsymbol{D := D(t) = t^2+(1-e^2)}$$

Y teniendo en cuenta que la longitud de arco de la cónica esta dada por

$\boldsymbol{ds^2 = dx^2+dy^2}$, que en este caso es igual a:

$$\boldsymbol{ds^2 = (2p)^2\frac{[t^2+(1+e)^2][t^2+(1-e)^2]}{D^4}\,dt.}$$

Expresión que se obtiene elevando $(\frac{dx}{dt})^2$ y $(\frac{dy}{dt})^2$ y reemplazando en la ecuación.

Como $(\frac{dx}{dt})^2 = \frac{(-2p.2t)^2}{(D(t)^2)^2}$ y $(\frac{dy}{dt})^2 = \frac{(2p)^2(D(t)-2t^2)^2}{(D(t)^2)^2}$

Nos queda $(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 = \frac{(-2p.2t)^2}{(D(t)^2)^2} + \frac{(2p)^2(D(t)-2t^2)^2}{(D(t)^2)^2}$

Sacamos factor común $(\boldsymbol{2p})^2$ y el común denominador $(\boldsymbol{D(t)})^4$**, como constante**

Debemos obtener, para alcanzar la expresión anterior, que

$$(2t)^2+(D(t)-2t^2)^2 = \boldsymbol{[t^2+(1+e)^2][t^2+(1-e)^2]}$$

Desarrollando los cuadrados y efectuando operaciones

$$(2t)^2 + D^2 - 2.D.2t^2 + (2t^2)^2 = [\boldsymbol{t^2 + 1 + 2e + e^2}][\boldsymbol{t^2 + 1 - 2e + e^2}]$$

D (t) $^2 = (\boldsymbol{t^2} + (\boldsymbol{1 - e^2})^2 = (\boldsymbol{t^2} + (\boldsymbol{1 - e^2})(\boldsymbol{t^2} + (\boldsymbol{1 - e^2}) = t^4 + 2t^2 - 2t^2e^2 + 1 - 2e^2 + e^4$

Reemplazando

$4t^2 + t^4 + 2t^2 - 2t^2e^2 - 2e^2 + 1 + e^4 - 2.2t^2\,(t^2 + (1 - e^2) + 4t^4 = t^4 + 2t^2 + 2t^2e^2 + 1 - 2e^2 + e^4$

Agrupando términos y cancelando

$4\cancel{t^2} + \cancel{t^4} + 2\cancel{t^2} - 2t^2e^2 - 2e^2 + \cancel{1} + \cancel{e^4} - \cancel{2}.2t^4 - \cancel{4}t^2 + e^2 4t^2 + 4\cancel{t^4} = \cancel{t^4} + 2\cancel{t^2} + 2t^2e^2 \cancel{+1} + 2\cancel{e^2} - 2e^2 + \cancel{e^4}$

$$-2\cancel{t^2}e^2 - 2e^2 + \cancel{4}e^2t^2 = +2\cancel{t^2}e^2 - 2e^2$$

$$-2e^2 = -2e^2$$

Así demostramos que ambos numeradores son iguales

Realizando operaciones, tenemos que:

$$\widehat{\boldsymbol{op}} = \boldsymbol{2P} \int_{\boldsymbol{T(p)}}^{\infty} \frac{\sqrt{(\boldsymbol{t^2 + (1+e)^2})(\boldsymbol{t^2 + (1-e)^2})}}{\boldsymbol{D^2}}\, \boldsymbol{dt}. \qquad \textbf{(1)}$$

Esta es una **integral Abeliana** que corresponde a la curva de ecuación:

$$u^2 = [t^2 + (1+e)^2][t^2 + (1-e)^2] \qquad \textbf{(2)}$$

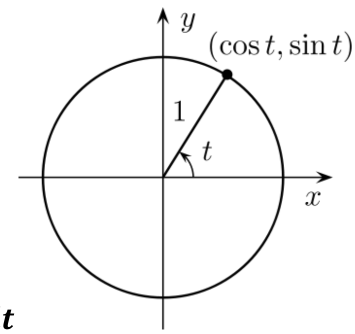
Definición: Una integral Abeliana se escribe $\int \boldsymbol{R(x,y)}$, R ϵ C(x, y) es una función racional de variables x e y, donde y = f(x), y existe una relación polinómica del tipo p(x, y) = 0, entonces una primitiva de la restricción $f_y(x) = R(x,y)$ es una integral Abeliana. En nuestro ejemplo, es $\int \boldsymbol{R(t,u)dt} = \int \boldsymbol{R(t, \sqrt{p(t)})dt}.$ Las integrales elípticas e hiperbólicas son casos particulares de integrales abelianas.

Consideremos la ecuación anterior, (2) teniendo en cuenta dos casos:

Si asumimos que $e \geq 0$, vemos que el segundo término de la ecuación de esta curva tiene doble raíz solo si $e \in \{0, 1\}$

Caso Especial:

(1) Si la excentricidad $e = 0$, la cónica es un círculo de radio $a = r$, en el gráfico r = 1 y hemos parametrizado como x = cos t e y = sen t, conforman cada punto de la curva.



$$\widehat{\boldsymbol{op}} = \boldsymbol{2P} \int_{\boldsymbol{T(p)}}^{\infty} \frac{\sqrt{(\boldsymbol{t^2} + (\boldsymbol{1}+\boldsymbol{0})^2)(\boldsymbol{t^2} + (\boldsymbol{1}-\boldsymbol{0})^2)}}{\boldsymbol{t^2} + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{0^2})^2}\, \boldsymbol{dt}$$

La ecuación de un arco de curva esta dado por:

$$\widehat{op} = 2r \int_{T(p)}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = 2r\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\frac{y}{x}\right)$$

Esta es una integral impropia, con su solución correspondiente, teniendo en cuenta que $\frac{y}{x}$ es = t

A la curva **(2)** se la puede descomponer en dos parábolas, nos queda:

$$u = \pm(t^2 + 1)$$

En el caso que la excentricidad $\boldsymbol{e = 1}$, la cónica tiene forma de parábola, y entonces tenemos que el arco es $\widehat{\mathrm{op}}$

$$\widehat{\boldsymbol{op}} = \boldsymbol{2P} \int_{\boldsymbol{T(p)}}^{\infty} \frac{\sqrt{(\boldsymbol{t^2} + (\boldsymbol{1}+\boldsymbol{1})^2)(\boldsymbol{t^2} + (\boldsymbol{1}-\boldsymbol{1})^2)}}{\left(\boldsymbol{t^2} + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{1^2})\right)^2}\, \boldsymbol{dt}.$$

$$\widehat{\boldsymbol{op}} = \boldsymbol{2P} \int_{\boldsymbol{T(p)}}^{\infty} \frac{\sqrt{(\boldsymbol{t^2} + (\boldsymbol{2})^2)(\boldsymbol{t^2})}}{(\boldsymbol{t^2})^2}\, \boldsymbol{dt}.$$

$$\widehat{op} = 2p \int_{T(p)}^{\infty} \frac{\sqrt{(t^2 + 4)}}{t^3}\, dt.$$

Esta integral puede ser calculada usando ***<u>funciones trascendentes elementales,</u>*** como a^x o log(x), dado que la curva 2) tiene un solo sentido dado por:

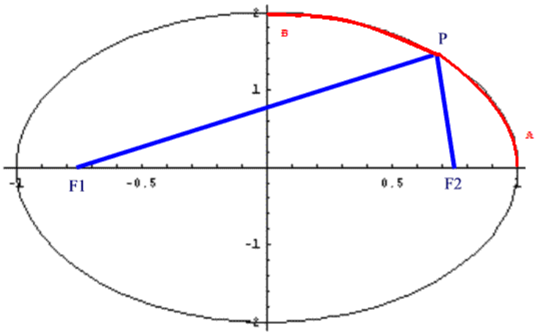
$$u^2 = t^2(t^2 + 4)$$

Comentario: Uno puede comprobar que si $e \notin \{0, 1\}$, el arco de la ***<u>cónica</u>*** no podría calcularse usando éstas funciones, y tampoco se verificaría que la curva tenga un solo sentido.

Ejemplo

Probemos calcular la longitud del arco de una elipse, centrada en el origen, como es simétrica respecto del eje x, y del eje y, su longitud es el cuádruplo de la curva que obtenemos al despejar "y", correspondiente el primer cuadrante, de la ecuación original,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad\qquad y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$



para ello parametrizamos la curva como: σ(t) = (a sen(t), b cos(t)), con b > a > 0.

Si t$\in \{0,2\pi\}$, la longitud de la curva está dada por

$$\mathrm{L(a,b)} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\,(\cos t)^2+b^2(sen\ t)^2}\ \mathrm{dt} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2(1-(sen\ t)^2+b^2(sen\ t)^2}\ \mathrm{dt}$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2(sen\ t)^2+b^2(sen\ t)^2}\ \mathrm{dt} = \ 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-\ (a^2-\ b^2)(sen\ t)^2}\ \mathrm{dt}$$

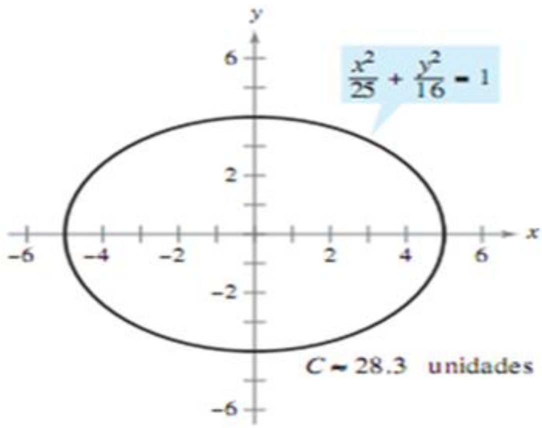
$$= 4\mathrm{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)(sen\ t)^2}\ \mathrm{dt}\ =\ 4\mathrm{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\ e^2(sen\ t)^2}\ \mathrm{dt},$$

Tomando a e $=\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)=1-\frac{b^2}{a^2}$, que es la excentricidad de la elipse.

A las integrales de este tipo, es decir, a las de la forma, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\ e^2(sen\ \theta)^2}\ \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$, se las denomina integrales elípticas de segundo tipo o especie.

Aproximación al perímetro de una elipse

Consideremos la elipse



$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

Como $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{(a^2-b^2)}{a^2}=\frac{9}{25}$

Aplicando la integral elíptica anterior

$$C= 4\ .\ 5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{9}{25}sen(\theta)^2}\,d\boldsymbol{\theta}$$

Como esta integral no puede ser calculada con funciones elementales, necesitaremos recurrir a algún método diferente, podemos utilizar series, o puede ser un método de integración como la Regla de Simpson, o el Método del Trapecio.

Regla de Simpson

Su fórmula es:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}\left[f(a)+4f\frac{(a+b)}{2}+f(b)\right]$$

En nuestro ejemplo, reemplazando $\boldsymbol{\theta}$

a = 0 f(a) = $\sqrt{1-\frac{9}{25}sen(0)^2}=\mathbf{1}$

Como n debe ser par para esta regla, es la cantidad de derivadas que consideramos, tomamos n = 6, esta b = $\frac{\pi}{2}$ f(b) = $\sqrt{1-\frac{9}{25}sen(\frac{\pi}{2})^2} = \frac{4}{5}$

$4f\,\frac{(a+b)}{2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}sen(\frac{\pi}{4})^2}$ = 4. 0,9055

Entonces, como tenemos que aproximar la longitud de la elipse, considerando los cuatro cuadrantes

$$C= 4.\ 5\int_a^b\sqrt{1-\ e^2 sen(\theta)^2}d\theta \cong \frac{\frac{\pi}{2}-0}{6}\left[1+4.0{,}9055+\frac{4}{5}\right] \approx 28{,}38 \text{ unidades}$$

Si lo calculamos por un segundo método llamado

Método del Trapecio

Cuya fórmula es:

$$\int_a^b f(x)dx \cong (b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]$$

Como antes, tenemos que

a = 0 f(a) = $\sqrt{1-\frac{9}{25}sen(0)^2} = \mathbf{1}$

b = $\frac{\pi}{2}$ f(b) = $\sqrt{1-\frac{9}{25}sen(\frac{\pi}{2})^2} = \frac{4}{5}$

y $\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{1+4/5}{2} = \frac{9}{10}$, donde 5 es el valor del semieje mayor de la elipse.

$$C= 4.5.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{9}{25}sen(\theta)^2}d\theta \cong \left(\frac{\pi}{2}-0\right)\left[\frac{1+4/5)}{2}\right] \cong 20.\frac{\pi}{2}.\frac{9}{10} \cong 28{,}27 \text{ u}$$

La diferencia o el error entre ambos métodos, es mínima, 0,11.

También encontramos este tipo de integrales si queremos calcular aproximadamente, la longitud de la gráfica de la función f(x) = sen (x), en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Tomando la fórmula $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + f'(x)^2}$ dx, que se obtiene de parametrizar la curva, como (x, f(x)) y calculando las derivadas, (1, f´(x)), es $\boldsymbol{ds^2} = \boldsymbol{dx^2} + \boldsymbol{dy^2}$ y reemplazando por la identidad trigonométrica; $(\cos x)^2 = 1 - (\operatorname{sen} x)^2$

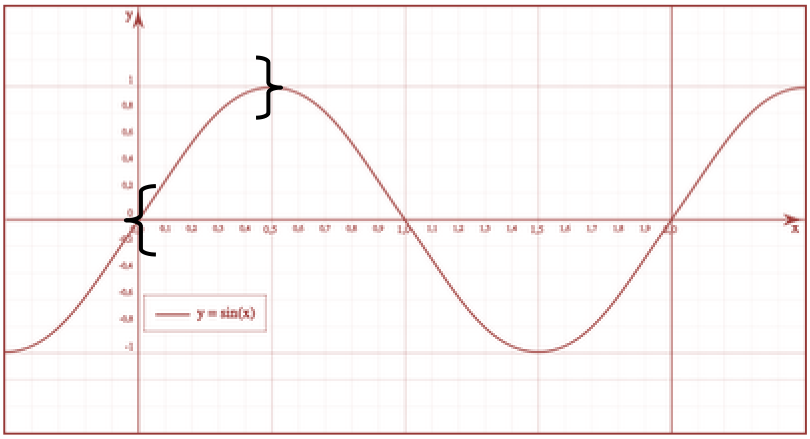
$$\mathrm{L(sen(x))};\ \left[0, \frac{\pi}{2}\right], = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + cos(x)^2}\mathrm{dx} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + (1 - \operatorname{sen} x^2)}\ \mathrm{dx}$$

Se transforma en

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 - sen(x)^2}\ \mathrm{dx} = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 sen(x)^2 \mathrm{dx}}$$

Operando y tomando $\sqrt{2}$, como constante.

f(x)=(sen(x)), calculada en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, es una integral de segunda especie con excentricidad $\mathrm{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



Podríamos aplicar los métodos ya vistos para calcular su longitud o utilizar desarrollo en serie binomial, con **m** = $\frac{1}{2}$, $\boldsymbol{n} = (-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \boldsymbol{sen(x)^2})$ y **e < 1**, que es otra forma de aproximación al cálculo de la longitud de la curva, nos queda:

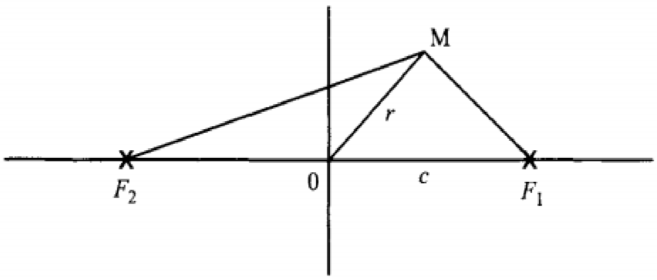
$$\mathrm{C} \cong \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 sen(x)^2}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 sen(x)^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{dx}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 sen(x)^2-\frac{1}{2}.\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 sen(x)^4-\frac{1}{2}\frac{3}{4.6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6 sen(x)^6+\cdots\right]dx$$

Realizando operaciones e integrando término a término, obtendríamos el valor aproximado de la curva.

El descubrimiento de la Función elíptica en 1718

La primera aparición es la del trabajo de Giulio Fagnano en 1718 sobre la rectificación de la lemniscata de Bernoulli, que la describió por primera vez en 1694 como la modificación de una elipse, esta curva, que se define como el lugar geométrico de los puntos tales, que la ***suma*** de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es una constante. En contraposición, la lemniscata es el lugar geométrico de los puntos del plano, tales que el ***producto*** de estas distancias es constante. Bernoulli la llamó *lemniscus*, que en Latín significa "cinta colgante".



Si tenemos $r_1 = MF_1$, $r_2 = MF_2$, $r = MO$

"Dados dos puntos F_1y F_2, del plano, a una distancia de 2c, uno del otro, por la definición anterior, el producto de los puntos M, tales que $MF_1 . MF_2 = c^2$.

El punto M descansa sobre la lemniscata si y solo si, $r_1^2 . r_2^2 = c^4$.

Por lo tanto,

$r_1^2 = r^2 - 2cx + c^2$

$r_2^2 = r^2 + 2cx + c^2$

porque $r_1 = F_1 - M$, cuyas coordenadas son

$r_1 = (c, 0) - (x, y) = (c - x, -y)$ y

$r_1^2 = (c - x)^2 + (-y)^2 = c^2 - 2cx + \underline{\mathbf{x^2 + y^2}}$

como $x^2 + y^2 = r^2$, queda $\mathbf{r_1^2 = r^2 - 2cx + c^2}$

y $r_2 = F_2 - M = (-c, 0) - (x, y) = (-c - x, -y)$ y

$r_2^2 = (-c - x)^2 + (-y)^2 = c^2 + 2cx + \mathbf{x^2 + y^2}$

como en el caso anterior

$$r_2^2 = r^2 + 2cx + c^2$$

y su producto es $\mathbf{r_1^2 . r_2^2 = c^4}$

$$(r^2 - 2cx + c^2)(r^2 + 2cx + c^2) = c^4$$

$$r^4 + \cancel{r^2 .2cx} + r^2c^2 - \cancel{r^2 .2cx} - 4x^2c^2 - 2\cancel{cx}c^2 + r^2c^2 + \cancel{c^2 2}cx + \cancel{c^4} = \cancel{c^4}$$

cancelando

$$r^4 + 2\, r^2c^2 - 4x^2c^2 = 0$$

Si tomamos de manera mas simple que $\mathbf{2c^2=1,}$ tenemos que

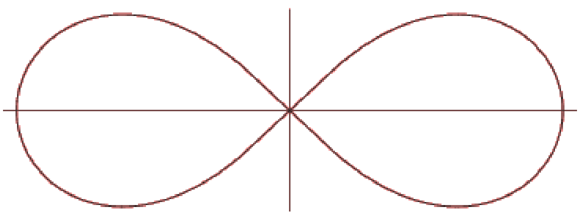
la ecuación de la Lemniscata se transforma en

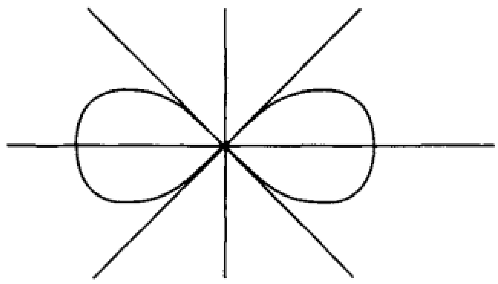
$$\boldsymbol{r^4 + r^2 + -2x^2 = 0}$$

En *coordenadas cartesianas homogéneas*, esta ecuación sería:

$$(x^2 + y^2)^2 + (y^2 - x^2)z^2 = 0$$

Notamos que la lemniscata es una ecuación circular elevada a la cuarta potencia, que pasa a través de puntos cíclicos, también podemos observar que es la inversa de una hipérbola equilátera, con respecto a su centro. Esta es su forma





Parametrizamos la curva usando **r,** de la ecuación anterior, despejando

$$2x^2 = r^2 + r^4 \text{ y reemplazando } x^2 = \frac{r^2+r^4}{2} \text{ y } r^2 = x^2 + y^2$$

$$[\, r^2]^2 + \left[y^2 - \left(\frac{r^2+r^4}{2}\right)\right] z^2 = 0 \text{ con } z = 1$$

$$r^4 + \left[\frac{2y^2 - r^2 - r^4}{2}\right] = \frac{2r^4 + 2y^2 - r^2 - r^4}{2} = 0 \text{ y } 2y^2 - r^2 + r^4 = 0$$

$$\mathbf{2y^2 = r^2 - r^4}$$

Como deseamos expresar la longitud de arco de curva, en términos de **r,** derivamos ambos miembros y obtenemos

$$2x\frac{dx}{dr} = r + 2r^3$$

$$2y\frac{dy}{dr} = r - 2r^3$$

Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{ds^2 = dx^2 + dy^2}$, y

$\mathbf{dx} = \frac{(\mathrm{r}+2\mathrm{r}3)}{2x}\mathbf{dr},$ $\mathbf{dy} = \frac{(\mathrm{r}-2\mathrm{r}3)}{2y}\mathbf{dr}$, elevando al cuadrado y operando, llegamos a

$\left(\frac{ds}{dr}\right)^2 = \frac{(\mathrm{r}+2\mathrm{r}3)^2}{(2x)^2} + \frac{(\mathrm{r}-2\mathrm{r}3)^2}{(2y)^2}$ reemplazando $(2x)^2 = 2.2x^2 = 2.(r^2 + r^4)$ y entonces

$$(2y)^2 = 2.2y^2 = 2.(r^2 - r^4)$$

$$\left(\frac{ds}{dr}\right)^2 = \frac{(\mathrm{r}+2\mathrm{r}3)^2}{2.(r^2+r^4)} + \frac{(\mathrm{r}-2\mathrm{r}3)^2}{2.(r^2-r^4)}$$

$$\left(\frac{ds}{dr}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{(\mathrm{r}+2\mathrm{r}3)^2}{(r^2+r^4)} + \frac{(\mathrm{r}-2\mathrm{r}3)^2}{(r^2-r^4)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(r^2+2.2r^3r^2+4r^6)(r^2-r^4)+(r^2-2.2r^3r^2+4r^6)(r^2+r^4)}{(r^2+r^4)(r^2-r^4)}\right]$$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{(r^4-r^6+4r^6-4r^8+4r^8+4r^{10})+(r^4+r^6-4r^6-4r^8+4r^8+4r^{10})}{(r^4-r^6+r^6-r^8)}\right]$ simplificando

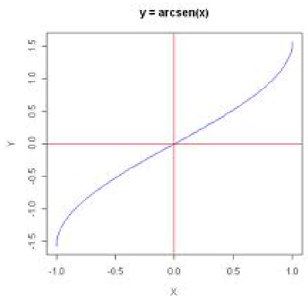
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(r^4+3r^6-4r^{10})+(r^4-3r^6+4r^{10})}{(r^4-r^8)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2r^4}{(r^4(1-r^4)}\right] \text{ cancelando}$$

$$\left(\frac{ds}{dr}\right)^2 = \frac{1}{1-r^4}$$

$$\text{Y} \qquad S(r) = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} \quad (4)$$

Comparemos la fórmula (4) con la clásica integral



$$\text{Arcsen (r)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}$$

Además, considerando la fórmula de la circunferencia:

$$1 - r^2 = \sigma^2$$

que se puede parametrizar como

$$r = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \sigma = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Así, para esta circunferencia tenemos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{2\sigma}{1+t^2}$$

Y, aplicando integrales

$$\int \frac{dr}{\sigma} = \int \frac{2t}{1+t^2}\,dt$$

En apariencia, Fagnano fue inspirado en este método cuando dispuso

$$r^2 = \frac{2t^2}{1+t^4} \qquad \text{y} \quad \sigma = \sqrt{1-r^4} = \frac{1-t^4}{1+t^4}$$

Nos queda derivando r:

$$\mathbf{r}\,\frac{dr}{dt} = \frac{2t(1-t^4)}{(1+t^4)^2} \quad \text{y}$$

teniendo en cuenta que r, pasa al segundo término dividiendo, Es $r = \frac{\sqrt{2}\,t}{\sqrt{1+t^4}}$ y nos queda $\frac{dr}{\sigma} = \frac{2t}{(1+t^4)} : \frac{\sqrt{2}\,t}{\sqrt{1+t^4}}$

realizando operaciones se obtiene:

$$\frac{dr}{\sigma} = \sqrt{2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

e integrando ambos miembros:

$$\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = \sqrt{2}\int_0^{t(r)} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

Si consideramos que la última integral, nos permite afirmar que

$$t^2 = \frac{2u^2}{1-u^4}, \quad s = \sqrt{1+t^4} = \frac{1+u^4}{1-u^4}$$

Y también que $t\ \frac{dt}{du} = \frac{2u(1+u^4)}{(1-u^4)^2}$, operando de forma similar al paso anterior

y $\frac{dt}{s} = \sqrt{2}\,\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$, por lo tanto

$$\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = \sqrt{2}\int_0^{t(r)} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = 2\int_0^{u(r)} \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$$

Nótese que **r** puede ser calculado desde **u** por la fórmula:

$$r^2 = \frac{4u^2(1-u^4)}{(1+u^4)^2}$$

De esta manera hemos obtenido, la fórmula que estableció Fagnano al duplicar el arco de una lemniscata, utilizando una construcción con regla y compás, que se asocia a la fórmula de una integral elíptica.

Veamos un ejemplo

Si quisiéramos calcular aproximadamente la longitud de la curva de la lemniscata

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2) \qquad \text{(en este caso, la constante a = 1)}$$

Parametrizando la curva en coordenadas polares como

$$x = r\cos\boldsymbol{\theta} \quad y = r\,\text{sen}\boldsymbol{\theta} \qquad \text{reemplazando en la ecuación}$$

$$((r\cos\theta)^2 + (r\,sen\theta)^2)^2 = (r\cos\theta)^2 - (r\,sen\theta)^2$$

$$(r^2(\cos\theta^2 + sen\theta^2)^2 = r^2(\cos\theta^2 - sen\theta^2)$$

$$(r^2)^2 = r^2\cos 2\boldsymbol{\theta}$$

llegamos a

$$r^2 = \cos 2\boldsymbol{\theta}$$

Verificando la ecuación anterior.

Derivamos ambos miembros con respecto a r y $\boldsymbol{\theta}$, respectivamente

$$2rdr = -2\,\text{sen}2\boldsymbol{\theta}\, d\boldsymbol{\theta},$$

Elevándolos al cuadrado y reemplazando r^2, en el denominador, por su equivalente cos2$\boldsymbol{\theta}$, obtenemos

$$(\mathrm{dr})^2 = \frac{(sen2\theta)^2}{\cos 2\theta} d\theta^2 \qquad \text{con } \boldsymbol{\theta} \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2, \text{ reemplazando}$$

$$ds^2 = \frac{(sen2\theta)^2}{\cos 2\theta} + \cos 2\boldsymbol{\theta} d\theta^2 = \frac{d\theta^2}{\cos 2\theta}$$

La longitud total de la lemniscata será 4 veces la integral correspondiente al arco comprendido entre 0 y $\frac{\pi}{4}$, situado en el primer cuadrante,

$$\mathrm{S} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-2(sen\,\theta)^2}} \qquad \text{Reemplazando}$$

Como en el caso anterior, esta integral no puede calcularse con funciones elementales, pero si con integrales elípticas, puesto que $\boldsymbol{\theta}$ varia entre 0 y $\frac{\pi}{4}$

sen $\boldsymbol{\theta}$ toma valores entre 0 y $\frac{\sqrt{2}}{2}$, y $\sqrt{2}$ sen$\boldsymbol{\theta}$, tomará valores entre 0 y1, hacemos la **sustitución**

senφ = $\sqrt{2}$ sen$\boldsymbol{\theta}$, con φ variando entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, resulta

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-2(sen\,\theta)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}(sen\,\varphi)^2}}$$

Teniendo en cuenta que k, dentro de la raíz está

Esta última conforma una integral elíptica de primera especie de módulo k= $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = sen $\boldsymbol{\varphi}$,

$\boldsymbol{\varphi}$ =45º

Realizando los cálculos, podríamos obtener una aproximación por la serie binomial anterior, con m = - $\frac{1}{2}$, es s ≅ 5,24

Contribución de Euler, en 1753

Leonhard Euler ahondó profundamente en el trabajo de Giulio Fagnano, en 1751 y estableció que esta fórmula, definida por

$$\int_0^{2u\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\int_0^{u} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

Que oculta una identidad trigonométrica, que se generaliza a

$$\left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\int_0^{r} \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = \int_0^{u} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} + \int_0^{v} \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} \\ cuando\ r = u\sqrt{1-v^2} + v\sqrt{1-u^2} \end{array} \right\}$$

¿Como podríamos elegir r? tal que

$$\int_0^{r} \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = \int_0^{u} \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} + \int_0^{v} \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}}\ ? \qquad (1)$$

Probamos con

$$r = u\sqrt{1-v^4} + v\sqrt{1-u^4}$$

Pero encontramos que para u = v, tenemos r =2u$\sqrt{1-u^4}$, mientras que

$$r = 2u\frac{\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}$$

de ese modo, hemos elegido correctamente r y probamos

$$r = \frac{u\sqrt{1-v^4}+v\sqrt{1-u^4}}{1+u^2v^2} \qquad (2)$$

En particular nos gustaría mostrar que la relación

$$\frac{du}{\sqrt{1-\ u^4}} = -\ \frac{dv}{\sqrt{1-\ v^4}}$$

Implica que r es una constante.

Fijamos U = $\sqrt{1-\ u^4}$ y V= $\sqrt{1-\ v^4}$

Y queremos mostrar que si $\frac{du}{U} + \frac{dv}{V} = 0, entonces\ dr = 0$

$$(Vdu + udV + Udv + vdU)(1 + u^2v^2) - (uV + vU)(2uv^2du + 2vu^2dv) = 0$$

Al obtener este resultado sustituimos

dV = - $\frac{2v^3}{V}dv,$ dU = - $\frac{2u^3}{U}$

ordenando los términos en du y dv, encontramos

$$\left[\left(V - \frac{2u^3v}{U}\right)(1 + u^2v^2) - (uV + vU)2uv^2\right]du$$

$$+ \left[\left(U - \frac{2v^3u}{V}\right)(1 + u^2v^2) - (uV + vU)2vu^2\right]dv =$$

$$=\left[(UV - 2u^3v)(1 + u^2v^2) - 2uv^2\big(uUV + u(1 - v^4)\big)\right]\frac{du}{U} +$$

$$+\left[(UV - 2v^3u)(1 + u^2v^2) - 2vu^2\big(vUV + u(1 - v^4)\big)\right]\frac{dv}{V}$$

Y los dos términos en los corchetes son iguales. Para concluir, notemos que, al menos para u y v cercanos a cero, dr = 0, es equivalente a $\frac{du}{U} + \frac{dv}{V} = 0$, así, si r es una constante, tenemos

$\int_0^u \frac{du}{U} + \int_0^v \frac{dv}{V} = 0$, en consecuencia s(u) + s(v) = s(r), cuando la ecuación (2) se satisface.

La equivalencia (2) →s(u) + s(v) = s(r), la cual se mantiene para u y v, suficientemente pequeños, es conocido como el ***teorema de la adición de la integral de la lemniscata***.

Funciones elípticas: Teoremas de estructura

La idea de invertir las integrales elípticas fue encontrada en algunas notas de Gauss, hacia 1796, que fueron publicadas solo después de su muerte. Abel redescubrió la idea alrededor de 1823, y la publicó en 1827, entonces, Carl Jacobi usó la idea inspirado en un artículo de Abel, en 1828. Dado que estas funciones son meromorfas y doblemente periódicas, solo la teoría de Cauchy intentó completar su estudio, que fue logrado por Joseph Liouville en 1844, y Eisenstein, en 1847.

Funciones en el plano complejo

Función entera

Una función que es analítica en cada parte del plano finito, es decir, en toda parte excepto en ∞, se llama función entera, como lo son e^z, sen z, cos z, puesto que tienen derivadas múltiples excepto en z = ∞.

Función Holomorfa

Si una función es uniforme y continua, y posee una derivada definida y continua en cualquier punto, entonces se dice que es holomorfa en el punto.

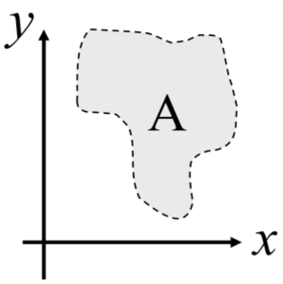
Función Meromorfa

Las funciones periódicas forman una clase especial muy amplia de funciones meromorfas. Se dice que una función meromorfa es periódica, si existe un numero w, distinto de cero, tal que

$$f(z + w) = f(z) \qquad (1)$$

para cualquier z, en particular, si una función tiene un polo en el punto z, entonces, también tiene que tener un polo en el punto (z + w). *El número w que posee esta propiedad, se llama periodo de f(z).*

Decimos que una función es meromorfa, si es analítica en una región A, excepto en los polos,



y, A está contenida en el dominio de la función. Si sustituimos z por z – w, de la fórmula (1), obtenemos f(z) = f(z - w), para cualquier z, por lo tanto, si w es un periodo de la función, también lo es – w, también, conforma un periodo de f(z). Si tomamos

$$f(z) = (z + w_1 + w_2),\ de\ donde\ se\ deduce\ que\ w_1 + w_2, es\ un\ periodo\ de\ f(z).$$

Otra forma de considerar a las funciones, es anulando el punto donde se encuentra el polo z_0, esto es, si f (z) es meromorfa, entonces:

$$(z - z_0)^n f(z) = A$$

cumple que es analítica en el punto z_0, y ***n*** es el orden del polo, llamamos polo de una función a un **z = z_0**, y a un entero positivo n, tal que:

$\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^n\ f(z) = A \neq 0$, entonces z = z_0 es llamado polo de orden *n*, en el caso que, n = 1, z_0 es llamado polo simple.

Se dice que una función es meromorfa en una región, o en todo el plano, si lo es para cada punto de la región o del mismo plano. Si f (z) es meromorfa en una región dada o en todo el plano, también lo es su inversa, $\frac{1}{F(z)}$; los polos de cada una, existen en los ceros de la otra, y son del mismo orden.

Los polos de una función meromorfa en cualquier región son un conjunto discreto, la distancia entre los polos tiene una cota inferior; y si f(z) es meromorfa en cualquier región finita, incluyendo su límite, f(z) sólo puede tener un número finito de polos en la región. Como $\frac{1}{f(z)}$ también es meromorfa, f(z) sólo puede tener un número finito de ceros en la región; y como f(z) - c es meromorfa (para cualquier constante c), f(z) sólo puede asumir un valor dado c, en un conjunto finito de puntos en la región.

Fórmula integral de Cauchy

Definición

Si f(z) es analítica dentro y sobre, una curva cerrada simple C, y z_0 es un punto dentro de C,

entonces $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \quad (1)$$

donde C se recorre en el sentido positivo.(contra las manecillas del reloj). También la n- ésima derivada de f(z), en z = z_0 esta dada por

$$f(z_0)^n = \frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz,\ \text{n} = 1,2,3\ldots \quad (2)$$

El resultado de (2) puede ser considerado un caso especial de (1) con n = 0, porque 0! =1. Estas fórmulas nos muestran que si una función f(z) se conoce sobre la curva C simple cerrada, entonces *los valores de la función y todas sus derivadas pueden ser encontradas en todos los puntos dentro de* C, en este caso si una función de variable compleja tiene una primera derivada, o sea, es analítica, en una región R simplemente conexa, todas sus derivadas superiores existen en R, esto no es necesariamente así para funciones de variable real.

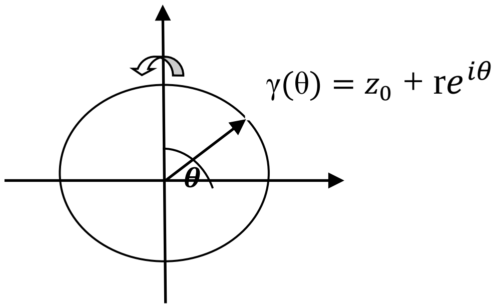
Ejemplos:

a) Si γ es un camino circular con centro en z_0, y radio r, orientado positivamente, podemos escribir $\boldsymbol{\gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi}$

La derivada $\gamma'(\boldsymbol{\theta}) = ire^{i\theta}$, donde $re^{i\theta} = \gamma(\boldsymbol{\theta}) - z_0$ reemplazando

$$\gamma'(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{i}(\gamma(\theta) - z_0)$$

$$\oint \frac{dw}{w-z} = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(\theta)}{(\gamma(\theta)-\ z_0)}\, d\boldsymbol{\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{i}(\gamma(\theta)-\ z_0)}{(\gamma(\theta)-\ z_0)}\, d\boldsymbol{\theta} = \int_0^{2\pi} i\ \ d\boldsymbol{\theta} = \mathbf{2\pi i}$$



b) Sea, en este caso, la curva “C”, el círculo positivamente orientado $|\boldsymbol{z}|$ **= 2.**

Y la función $\mathbf{f(z)} = \frac{\boldsymbol{z}}{(\mathbf{9}-\boldsymbol{z}^2)}$ es analítica en el interior y sobre C, y ya que el punto z = - i es interior a C, la fórmula (2) nos dice

$$\oint \frac{f(z)dz}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0)$$

Reemplazando

$$\oint \frac{zdz}{(9-z^2)(z+i)} = \oint \frac{\frac{z}{(9-z^2)}dz}{\big(z-(-i)\big)} = \ 2\pi i\left(\frac{-i}{10}\right) = \frac{\pi}{5}$$

Se concluye que como f es continua en z_0, a cada ε, por pequeño que sea, le corresponde un δ tal que

$$\left|f(z) - f(z_0)\right| < \varepsilon \text{ siempre que } |z - z_0| < \delta$$

Teorema de Liouville

Sea F una función holomorfa, C→ C, y una función entera y acotada, es decir existe M > 0, tal que $|f(z)| < M, \forall z\ \in C$, entonces, resulta f constante.

Prueba

Si suponemos que f(z) es entera y acotada por M, así en cualquier punto ζ en C, la estimación de Cauchy implica que $|f'(z)| \leq \frac{M}{r}$, pero r puede hacerse arbitrariamente grande, de manera que f´(z) = 0 en todo ζ de C. Por lo tanto f(z) es constante en C.

Teorema 2) *“Si una serie de funciones holomorfas converge uniformemente sobre un conjunto abierto, entonces el límite es holomorfo sobre este conjunto, por otra parte, el orden de diferenciación y la toma de límites puede ser intercambiado”.*

Sean w_1 w_2, dos números complejos linealmente independientes, y sea Λ, un retículo definido como

$\Lambda = Zw_1 + Zw_2 = Zw_1 \oplus Zw_2$, aplicando el concepto de *suma directa*

Que dice que un espacio vectorial V, es la ***suma directa*** *de sus subespacios U y W, denotado por*

$V = U \oplus W$, si todo vector $v \in V$, puede escribirse de una y solo una forma como $v = u+w$, con $u \in U$, y $w \in W$.

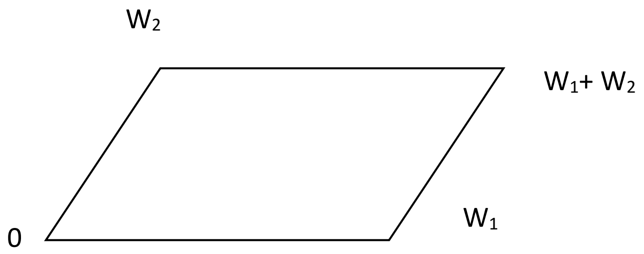
Definición: una función f: C→C U (∞) es llamada elíptica si f es meromorfa en C y si existe un retículo Λ, tal que

$$f(z + w) = f(z)$$

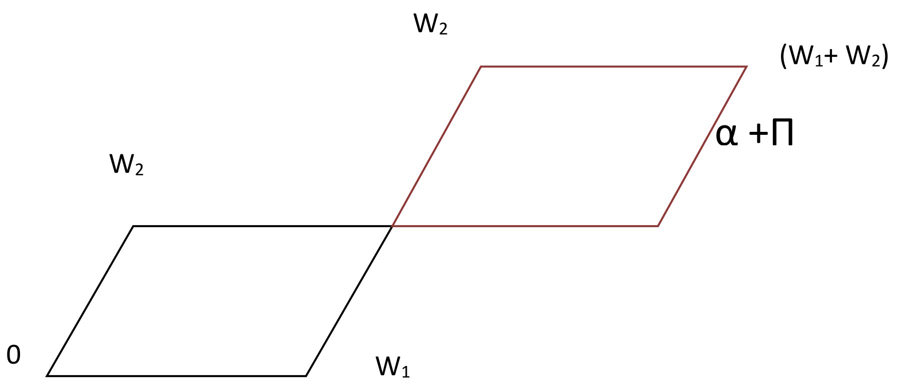
para todo $z \in C$ y todo $w \in \Lambda$.

Como ejemplo, decimos que toda función constante es una función elíptica. Es suficiente el hecho que f sea meromorfa, tal que $f(z + w_1) = f(z) = f(z + w_2)$, para cada $z \in C$.

Dados w_1 y w_2, el paralelogramo fundamental ⊓, w_1, w_2, es el paralelogramo $(0, w_1, w_1 + w_2, w_2)$.



Una traslación de ⊓: = ⊓, w_1, w_2, es un paralelogramo del tipo $\alpha + \sqcap$. Nótese que las funciones elípticas con un período dado, en un retículo Λ, forman un campo que contiene funciones constantes, por supuesto un subcampo isomórfico a C.



"Toda función elíptica entera es constante" (Teorema de Liouville 3)

Prueba

"*Sea f una función, que debe estar limitada sobre ⊓, compacto, así es limitado sobre todo C, de este modo, f es constante, por el teorema de Liouville.*

Corolario: S*i dos funciones elípticas del mismo retículo Λ, tienen* los *mismos polos e idénticas partes principales en ∏, entonces su diferencia, es una constante.*

Ahora, nótese que dada una función elíptica de un retículo Λ, que tiene solamente un número finito de polos en un dominio limitado de C, podemos elegir un α ∊ C, tal que no se admitan polos en una región de α +∏.

Aclaración:

Llamamos polo de una función f(z), a un tipo de singularidad:

<u>Clasificación de singularidades</u>

<u>Polos:</u>

Si f(z) tiene la forma $a_n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2\,(z - z_0)^2 + \ldots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots$ decimos que **z** = z_0 se llama polo de orden *n, expresando f(z) por serie de Laurent.*

- *<u>Singularidades evitables</u>*: si una función no esta definida en **z** = z_0, pero el limite existe, entonces **z** = z_0 es una singularidad evitable.
- *<u>Singularidad esencial</u>*: Si f(z) es unívoca, entonces cualquier singularidad que no sea, ni un polo ni una singularidad evitable, es singularidad esencial, por ejemplo en la función
  - f(z) = z^{-1} tiene un polo simple en z = 0
  - f(z) = $\frac{1}{(z-1)^3}$ tiene un polo de orden 3, en z =1

Un **polo de orden *n* de *f* (z)** es un punto *z*0, para el cual se cumple que el límite $\lim_{z\to z_0}\{(z-z_0)^n f(z)\}$, existe y es diferente de cero.

En este ejemplo: con $f(z) = \dfrac{2z^2+3}{z-2}$

el punto *z* = 2 es un **polo simple** o de orden 1 de la función, porque

$$\lim_{z\to 2}\{(z-2)f(z)\} = 0 \qquad\qquad \lim_{z\to 2}\{(2z^2+3)\} \neq 0$$

"Sea f una función elíptica de un retículo Λ, la cual no posee polos en el límite de α +∏, entonces la "suma de los restos o residuos de f", en α +∏, es cero. **Teorema de Liouville 4)**

Esta suma es igual a

$$\frac{1}{2i\pi}\oint f(z)dz$$

Donde C = α +∏.

Las integrales a lo largo de lados opuestos del retículo α +∏, se eliminan, dados los cambios de signo de los mismos, y que f(z) toma los mismos valores, esta es la razón por la que la integral es cero.

Corolario: "*Sea f una función elíptica no constante, del retículo Λ, entonces para un entorno α +∏, elegido como el anterior, podemos decir que f admite cualquier polo múltiple, en α +∏, o al menos dos polos simples de restos opuestos".*

Liouville 5) Sea la función *f, y un entorno α +∏ como el anterior. Llamamos m_a, respecto de n_b, al orden de ceros, respecto de los polos, de f en α +∏. Entonces tenemos que*

$$\Sigma\ \mathrm{ma} = \Sigma\ \mathrm{nb} \quad \text{y este número no depende de } \alpha.$$

Se debe observar que $\Sigma\ \mathrm{ma} - \Sigma\ \mathrm{nb} = \frac{1}{2i\pi}\oint \frac{f'(z)}{f(z)}$

Y nombrando $g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$, es elíptica, en el retículo Λ.

Definición: el número ***n*** de polos o ceros, de una función elíptica f de un retículo Λ, la cual descansa en un paralelogramo α +∏, se llama orden de f, si f no es constante, *este orden es mayor o igual a dos.*

Orden de una función elíptica

La suma de los órdenes de los polos en cualquier paralelogramo fundamental se llama orden de la función elíptica. La suma de los ***residuos*** de los polos en cualquier paralelogramo fundamental, es igual a cero, en particular, ninguna función elíptica puede tener ***orden uno***.

¿A qué llamamos residuos?

Teorema del residuo

Sea f(z) unívoca y analítica en todo su dominio, o sea, dentro y sobre la curva C, excepto en el punto **z =** $\boldsymbol{z_0}$, siendo éste, una singularidad aislada. Entonces la integral:

$$\oint f(z)dz$$

no será cero, (según el teorema de Liouville), sobre la trayectoria de C, cerrada, sin embargo, esta integral tendrá el mismo valor sobre todas las curvas C, que encierren a z = $\boldsymbol{z_0}$, **y ninguna otra singularidad de f.** Este valor, dividido por 2πi, se conoce como el residuo de f(z) en $\boldsymbol{z_0}$. Se denota por

$$\text{Res}[f(z), \boldsymbol{z_0}] = \frac{1}{2\pi i}\oint f(z)dz \qquad (\boldsymbol{z_0}, \textbf{finito})$$

donde la integral se toma sobre cualquier trayectoria C en el dominio, dentro del cual f(z) es analítica, excepto en $\boldsymbol{z_0}$. El residuo de f(z) en un punto $\boldsymbol{z_0}$ esta dado por la ecuación:

$$\text{Res}[f(z), \boldsymbol{z_0}] = a_{-1} \text{ donde}$$

f(z) se puede expresar como una **serie de Laurent** en torno a **z =** $\boldsymbol{z_0}$ dada por

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-\boldsymbol{z_0})^n$$

$$f(z) = \ldots + \frac{a_{-n}}{(z-\boldsymbol{z_0})^n} + \ldots\ldots + \frac{a_{-1}}{(z-\boldsymbol{z_0})^1} + a_0 + a_1(z-\boldsymbol{z_0}) + a_2(z-\boldsymbol{z_0})^2 \quad (1) \text{ donde}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint (z-\boldsymbol{z_0})^{n+1} f(z)dz, \qquad n = \pm1, \pm2, \pm 3\ldots \ (2)$$

Que en el caso especial **n = -1,** obtenemos

$$\oint f(z)dz = 2\pi i\, a_{-1} \quad (3)$$

Donde a_{-1}, es llamado resto o residuo. Este teorema permite la rápida evaluación de integrales sobre trayectorias cerradas, siempre que sea posible calcular el coeficiente a_{-1} del desarrollo de Laurent, en cada singularidad, dentro de la curva. Si una función tiene un número finito de puntos singulares interiores, en un contorno cerrado simple dado C, han de ser aislados. Si f es analítica sobre la curva C, y ésta se recorre en sentido positivo, el *valor de la integral de f a lo largo de C, es 2πi veces la suma de los residuos en esos puntos singulares*.

$$\int f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res f(z), \quad z = z_k$$

Ejemplo:

$$\text{Si } f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$$

entonces z = 1 y z = -1 son polos de primer y segundo orden respectivamente. Vamos a utilizar una fórmula simple para obtener el **residuo $\boldsymbol{a_{-1}}$.** Llamamos **n** al número de orden de los polos.

$$a_{-1} = \lim_{z\to \boldsymbol{z_0}} \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-\boldsymbol{z_0})^n f(z) \quad (4)$$

Observemos que si n =1, nos queda

$$a_{-1} = \lim_{z \to \boldsymbol{z_0}} (z - \boldsymbol{z_0})\, f(z) \qquad (5)$$

el hecho que n =1, significa que la función tiene un polo simple. Volviendo el ejemplo anterior, donde n = 2

Residuo en z =1 es:

$$z = 1\ es\ \lim_{z \to 1} (z-1) \left\{ \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right\} = \frac{1}{4}$$

Y

$$z = -1\ es\ \lim_{z \to -1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} (z+1)^2 \left\{ \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right\} = -\frac{1}{4}$$

Propiedades importantes

- El número de ceros, (contados con su multiplicidad) en cualquier paralelogramo fundamental es igual al orden de la función elíptica.
- La derivada de una función elíptica es otra función elíptica con los mismos períodos. El conjunto de todas las funciones elípticas con el mismo período fundamental, forman un cuerpo.

Liouville 6) Sea f y *α +∏, como en el teorema anterior, f elíptica de retículo Λ, sin polos en el límite de α +∏, y sea n el orden de f, Si* a_1, a_2, *respecto de* b_1, b_2, *denota el correspondiente número de ceros de f en* ***C = α +∏,*** *entonces*

$$\boldsymbol{a_1 + a_2 + \ldots \ldots a_n = b_1 + b_2 + \ldots . b_n \, mod \Lambda}$$

Probamos, teniendo que

$$\sum_{v=1}^{n} (a_v - b_v) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial C} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

Pero sobre dos lados opuestos de ∂C, *los valores de* $z \frac{f'(z)}{f(z)}$ *a puntos correspondientes, difieren por*

$w_j \frac{f'(z)}{f(z)}$, *con* $j \in \{1,2\}$, *por consiguiente tenemos*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial C} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2i\pi} \left[\int_0^1 -w_2 \frac{f'(\alpha + tw_1)}{f(\alpha + tw_1)} w_1 dt + \int_0^1 -w_1 \frac{f'(\alpha + tw_2)}{f(\alpha + tw_2)} w_2 dt \right]$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \left\{ -w_2 [\log f(z)]_{\alpha}^{\alpha + w_1} + -w_1 [\log f(z)]_{\alpha}^{\alpha + w_2} \right\}$$

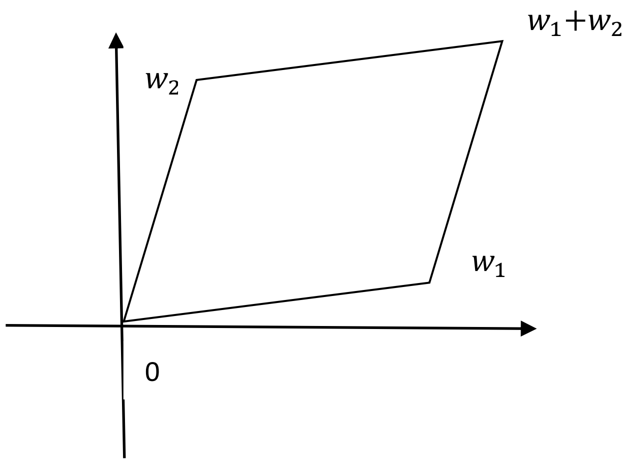
Como f(α) = f(α+w_j), para $j \epsilon \{1,2\}$, vemos que la variación de log(f(z)), corresponde a un número entero múltiplo de 2iπ, que es el resultado.

Corolario: *"Sea f y $C = \alpha + \Pi$, como en el caso anterior, y sea c ϵ C U {∞}, entonces:*

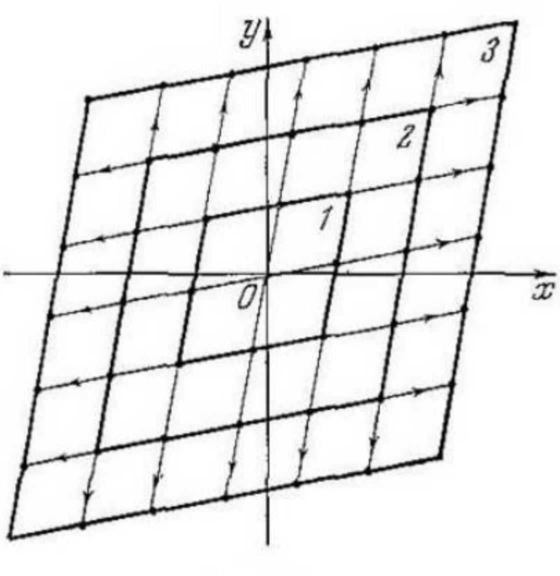
- *Si F(z) = c, tiene n soluciones $z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots z_n$, en $C = \alpha + \Pi$, o en una vecindad del paralelogramo fundamental".*
- *La suma de $\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}, \ldots\ldots\ldots \boldsymbol{z_n}$, considerada módulo Λ, no es dependiente de c ni de α. Se puede verificar que los polos de g, son los mismos que los de f.*

Funciones elípticas al estilo Weierstrass

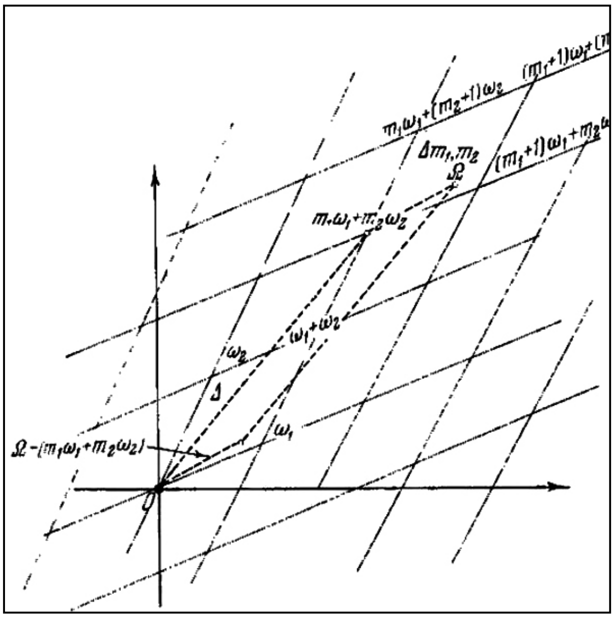
Consideremos el paralelogramo 0, w_1, w_2, w_3, donde w_3 es la suma de $w_1 + w_2$,



Que representa la celda unidad del ***retículo de paralelogramos***



Y podemos nombrar a $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{m_1}\, \boldsymbol{w_1} + \mathbf{m_2}\, \boldsymbol{w_2}$, con m_1 y m_2, enteros, de forma tal que cualquier periodo de f(z), se expresa como combinación lineal de w_1 y w_2.



Para este caso, la función meromorfa correspondiente f(z), es <u>*doblemente periódica o elíptica*</u>. Los periodos w_1 y w_2 son los periodos fundamentales, y el paralelogramo que constituyen, lo llamamos paralelogramo fundamental. Se observa que para una misma función doblemente periódica existe un conjunto infinito de paralelogramos, distintos entre si. Si f (z) y $\boldsymbol{\varphi}$ (z) son dos funciones elípticas y $2w_1, 2\, w_3,$ son sus periodos, entonces su suma, resta, producto y cociente, (con el divisor distinto de cero), son funciones meromorfas, con los mismos periodos, es decir funciones elípticas.

Para la construcción de funciones elípticas, necesitamos el siguiente ***<u>lema(2):</u>***

"Si el numero real s $>$ 2, la serie $\sum \frac{\mathbf{1}}{|\boldsymbol{\Omega}|^{s}}$ **es convergente, $(\Omega \in \Lambda \backslash 0)$" (A)**

Donde la sumatoria se extiende para todos los periodos $\Omega = 2m_1 w_1 + 2m_2 w_2$.

Del lema se desprende que

$$f(z) = \sum \frac{1}{(z-\Omega)^3} \qquad (1)$$

es uniformemente convergente en un retículo acotado del plano, por ser s = 3. Por consiguiente, esta es una función analítica en el círculo $|z| < R$, así, la función f(z) es analítica en cualquier circulo $|z| < R$, a excepción de los polos de tercer orden, en todos los periodos pertenecientes al círculo indicado. Además, esta es una función meromorfa en todo el plano finito. Demostremos que $2w_1$ y $2w_3$, son periodos fundamentales de la función f(z). En efecto,

$$(2)\ f(z + 2w_j) = \sum \frac{1}{[z-(\Omega-2w_j)]^3} \quad \text{y} \quad f(z + 2w_j) = f(z) \text{ con } j = 1, 3$$

pero $\Omega - 2w_j$ también es uno de los periodos dados: $\Omega' = \Omega - 2w_j$, cuando Ω recorre todos los periodos dados, Ω', los recorre también, porque la transformación $\Omega' = \Omega - 2w_j$, significa un desplazamiento del retículo de periodos. Por lo tanto, la serie (2) solamente se diferencia en el orden de los términos, es decir su suma es igual a f(z). Sea w un periodo cualquiera de esta función, como Ω es un polo de f(z), $\Omega + w$ tiene que ser también uno de sus polos, o sea

$\Omega + w = \Omega'$ y $w = \Omega' - \Omega = 2m_1 w_1 + 2m_2 w_2$ por consiguiente,

cualquier periodo de f(z) es combinación lineal de los periodos $2w_1$ ***y*** $2w_2$ ***con coeficientes enteros*** $m_{1,2}$, cada vértice del paralelogramo fundamental, 0, $2w_1$, $2w_2$, $2w_3$ es un polo de tercer orden para f(z), pero el que está en el origen se incluye al paralelogramo fundamental, el resto, a los paralelogramos vecinos. De esto, deducimos que f(z) es una función elíptica de tercer orden y es una función impar ya que

$$f(-z) = \sum \frac{1}{[-z-\Omega)]^3} = -\sum \frac{1}{[z-(-\Omega)]^3},$$

pero el conjunto de todos los números $-\Omega$, coincide con el de los Ω, por esta razón la serie $\sum \frac{1}{[z-(-\Omega)]^3}$ se diferencia de la serie (1) solamente en el orden de sus términos, y su suma es f(z). De aquí que f(- z) = f(z) es decir es una función par. Partiendo de esta función, e integrando, se puede obtener una función elíptica de segundo orden, (par). En efecto, sea z_0 un punto arbitrario del plano y distinto de los polos de la función f (z), integrando término a término, la serie (2), a lo largo de alguna curva rectificable, que no pase por los polos y que una a z_0 con otro punto z, también distinto de los polos de la función f (z), resulta:

$$\textbf{(z)} = \textbf{C} + \int_{z_0}^{z} f(z)dz = \textbf{C} - \frac{1}{2}\sum\left[\frac{1}{[z-\Omega)]^2} - \frac{1}{[z_0-\Omega)]^2}\right] \textbf{(3)}$$

Esta serie se ha obtenido al integrar la serie uniformemente convergente, (1), que también lo es en un recinto acotado, si se desprecia una cantidad finita de términos que tienen polos en ese recinto. Por consiguiente, es una función meromorfa, que tiene un polo de segundo orden, en cada punto Ω. Escribimos (z) en la forma:

$$\varphi\ \textbf{(z)} = \textbf{C} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z_0^2} - \frac{1}{2}\sum\left[\frac{1}{[z-\Omega)]^2} - \frac{1}{[z_0-\Omega)]^2}\right] \textbf{(4)}$$

Donde la suma se extiende a todos los puntos, Ω, distintos del origen de coordenadas. De esta última fórmula se deduce que $\boldsymbol{\varphi(z)} + \frac{1}{2z^2}$ es una función meromorfa, para la cual el origen de coordenadas es un punto regular. Su valor para z = 0 es igual a

$$\left[\varphi(z) + \frac{1}{2z^2}\right]_{z=0} = \textbf{C} + \frac{1}{2z_0^2} - \frac{1}{2}\sum\left[\frac{1}{[\Omega)]^2} - \frac{1}{[z_0-\Omega)]^2}\right],\ \textbf{(5)}$$

Si elegimos la constante de integración C = 0, restando término a término, (5) de (4), obtenemos:

$$\varphi\ \textbf{(z)} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{z^2} + \sum\left[\frac{1}{[z-\Omega)]^2} - \frac{1}{[\Omega]^2}\right]\right\}$$

La función meromorfa que figura entre corchetes, se diferencia de (z), solamente, en un factor constante, esta función introducida por Weierstrass, se representa por ℘(z), "pe de z" y el signo ℘, se llama signo de Weierstrass. Así, según la definición,

$$\wp\textbf{(z)} = \frac{1}{z^2} + \sum\left[\frac{1}{[z-\Omega)]^2} - \frac{1}{[\Omega]^2}\right]$$

esta es una función meromorfa, con polos de segundo orden, en cada uno de los puntos Ω, incluyendo el origen, la parte principal, tiene la forma $\frac{1}{[z-\Omega)]^2}$. La derivada ℘´(z) tiene la forma:

$$\wp'\textbf{(z)} = -\frac{2}{z^3} - \sum{}'\left[\frac{2}{[z-\Omega)]^3}\right] = -2\sum\left[\frac{2}{[z-\Omega)]^3}\right] = -2\ \textbf{f (z)}$$

Se diferencia solamente en un factor numérico de la función elíptica f (z) de periodos $2w_1$ y $2w_3$, considerada anteriormente. Por consiguiente,

$$\wp'(z + 2w_j) - \wp'(z) = 0 \qquad (j = 1,3)$$

De donde integrando:

$\wp\textbf{(z} + 2w_j\textbf{)} - \wp\textbf{(z)} = C_j$ poniendo aquí $\textbf{z} = -w_j$, resulta:

$$\wp(-w_j+2w_j) - \wp(-w_j) = C_j$$

$\boldsymbol{\wp(w_j) - \wp(-w_j) = C_j}$ o bien, como $\boldsymbol{\wp(z)}$ es par, $\boldsymbol{C_j = 0}$**, (j = 1,3)**

De aquí se deduce:

$$\boldsymbol{\wp(z+2w_j) = \wp(z)}$$

O sea, $\wp(z)$ es una función doblemente periódica, de periodos $2w_1$ y $2w_3$, como la función f(z) , vista anteriormente, y éstos, son sus periodos fundamentales. De aquí, que al paralelogramo fundamental, 0, $2w_1$, $2w_2$, $2w_3$ se le debe adjuntar solamente un polo doble en el origen de coordenadas, o sea, $\wp(z)$ es una función elíptica de segundo orden. En resumen,

- *$\wp$(z) es una función elíptica de segundo orden*
- *Sus periodos fundamentales son $2w_1$ y $2w_3$*
- *Con polos dobles en todos los puntos $\boldsymbol{\Omega = m_1 w_1 + m_2 w_2}$ y las partes principales correspondientes de la forma $\frac{\mathbf{1}}{[\boldsymbol{z-\Omega})]^{\mathbf{2}}}$*
- *De la ecuación se deduce que la diferencia $\wp(z) - \frac{1}{z^2}$ se anula para z = 0*

La derivada de la función $\boldsymbol{\wp(z)}$, $\boldsymbol{\wp(z)' = -2\sum\left[\frac{2}{[z-\Omega)]^3}\right]}$, es una función elíptica, impar de tercer orden, con los mismos periodos fundamentales, con polos triples en todos los puntos Ω, y con partes principales correspondientes de la forma $-\frac{\mathbf{2}}{[\boldsymbol{z-\Omega})]^{\mathbf{3}}}$

Como el orden de la función $\wp(z)'$ es igual a tres, podemos decir, que posee tres ceros en el paralelogramo de periodos, si z = ∞, estos tres puntos se confunden en uno, en un polo triple de la función $\wp(z)'$, y si z = 0, tenemos que obtener tres ceros de la función $\wp(z)'$:

De la relación $\boldsymbol{\wp'(-z) = -\wp'(z)}$ se deduce que

$\boldsymbol{\wp'(2w_j - z) = -\wp'(z)}$ **(j = 1,3)** de donde para $\boldsymbol{z = w_j}$

Resulta $\boldsymbol{\wp'(2w_j - w_j) = -\wp'(w_j)}$

$\boldsymbol{\wp'(w_j) = -\wp'(w_j)}$ como $\boldsymbol{w_j \neq \infty}$**,** se tiene

$$\boldsymbol{\wp'(w_j) = 0 \quad \text{con} \quad (j = 1, 2, 3)}$$

Hemos obtenido tres ceros que pertenecen al paralelogramo fundamental de periodos, con los vértices, 0, $2w_1$, $2w_2$, $2w_3$, uno de ellos w_2 esta situado en el centro del paralelogramo, y los otros dos en los puntos medios de los lados, es claro que cada uno de estos ceros es simple, de lo contrario, la cantidad de ceros de ℘´(z), seria mayor a tres, lo cual es imposible. Obsérvese que la suma de los ceros hallados es

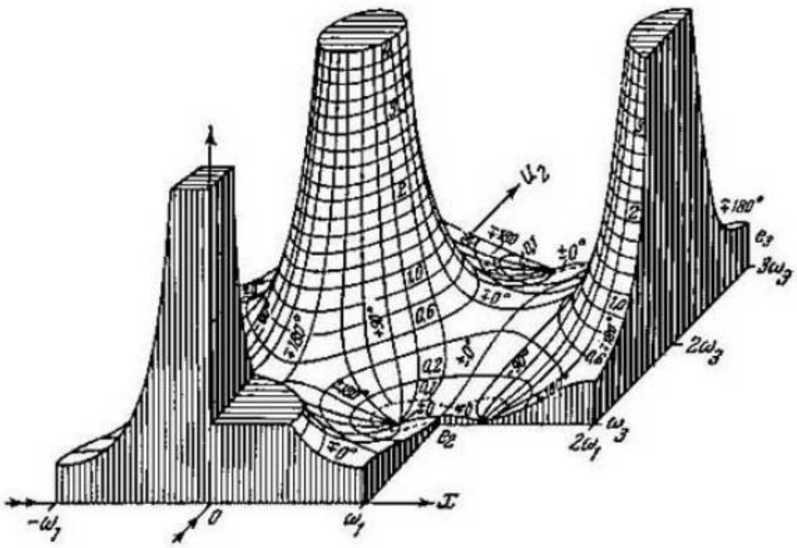
$$\mathbf{w_1 + w_2 + w_3 = w_1 + (w_1 + w_3) + w_3} = 2w_1 + 2w_3 \qquad \textbf{con } w_2 = w_1 + w_3$$

El orden de la función ℘(z) es igual a dos, señalemos la posición de cada par de puntos, en el paralelogramo de periodos. Como la función **℘(z)** es par y **℘(-z) = ℘(z)**

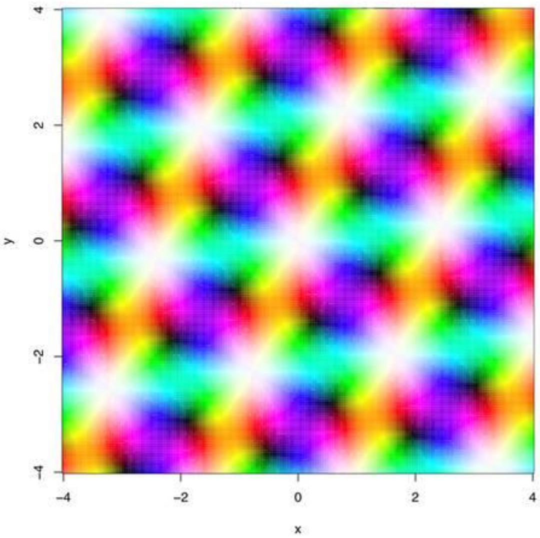
De donde se deduce que **℘(2w_j - z) = ℘(z) (j = 1, 2, 3)**

Es decir que **℘(z)** toma valores iguales en los puntos **z y $2w_j - z$.** y todos los valores complejos posibles de la función, están situados simétricamente respecto del centro del paralelogramo, en el interior de él, o respecto de los puntos medios de sus lados, como vimos en las gráficas de los paralelogramos anteriores.

En la siguiente figura, se muestra la superficie u = |℘(z)|, en relieve:

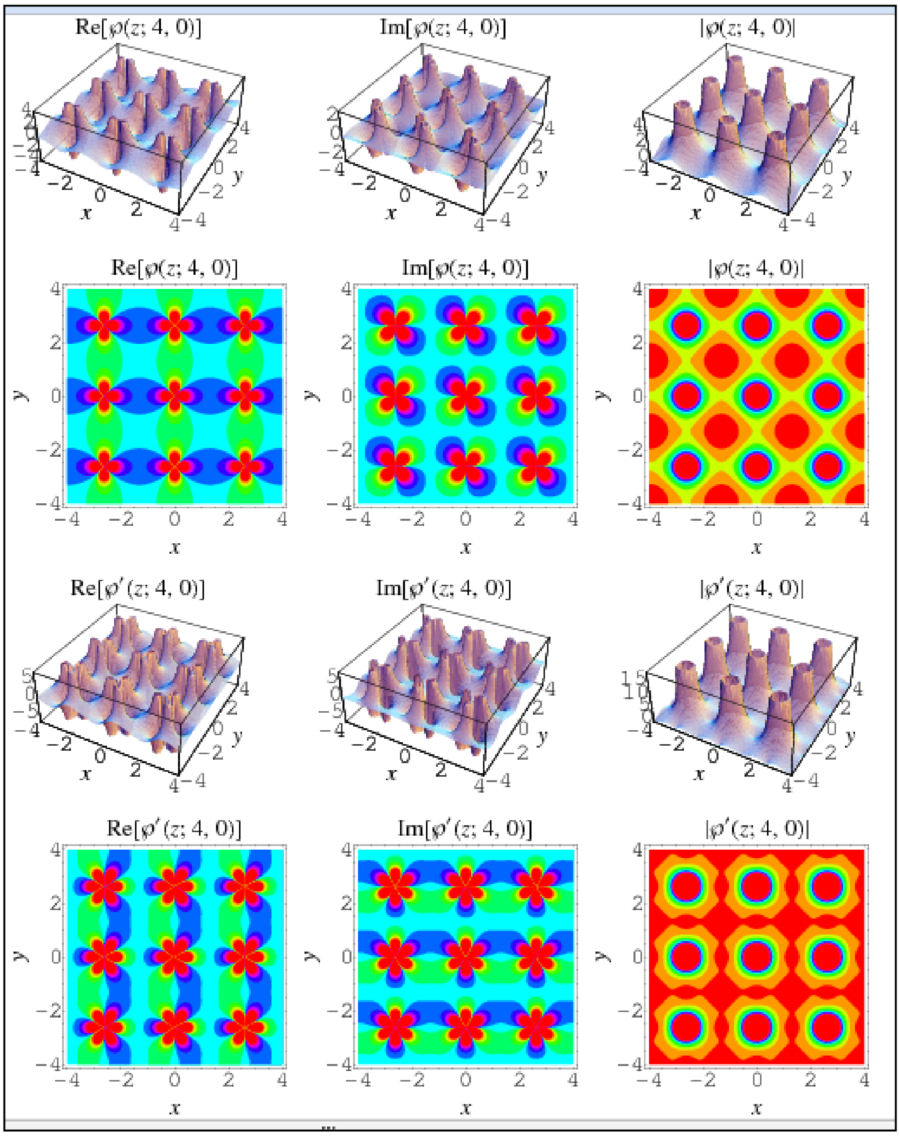


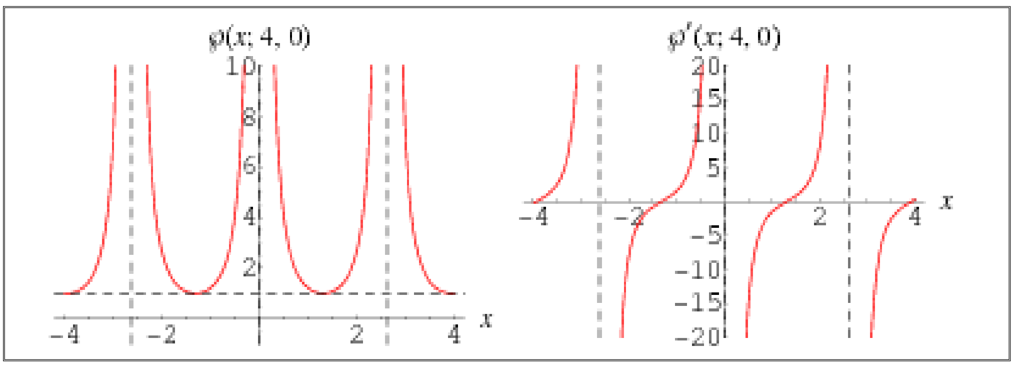
Estas dos funciones, ℘(z) y ℘(z)´ son fundamentales en la teoría de las funciones elípticas, reciben el nombre de ***funciones elípticas de Weierstrass***.



En esta imagen, mediante una técnica usual de visualización, en la cual el blanco corresponde a un polo, el negro a un cero y la máxima saturación, a $|f(z)| = |f(x+iy)| = 1$, notamos el retículo regular de los polos y dos retículos que se entrecruzan, de ceros

Otros ejemplos de su gráfica $\wp$ (x;4,0) y $\wp'$ (x;4,0)





Estas imágenes muestran la función $\wp$ y sus derivadas, para lo que se llama *invariante elíptica* $(g_1, g_2) = (4{,}0)$, que pueden ser definidas por la *serie de Eisenstein*.

Las funciones elípticas de Weierstrass, $\wp$ son el prototipo de función elíptica, y de hecho, el cuerpo de funciones elípticas para un retículo dado, se genera a partir de $\wp$ y su derivada $\wp'$.

Funciones elípticas de Jacobi

Otras funciones reconocidas, en el espacio de las funciones elípticas, son las de Karl Jacobi, que aparecen al evaluar, lo que llamamos anteriormente, integrales elípticas, existen integral elíptica de primera, de segunda o de tercera clase, definidas por

$$\int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-m^2(sen\ t)^2}} \qquad \int_0^{\varphi} \sqrt{1-m^2(sen\ t)^2} \qquad \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{(1-(sen\ t)^2(1-msen\ t^2)}}$$

Respectivamente. Si $\boldsymbol{\varphi} = \frac{\pi}{2}$**,** se llaman integrales **completas** de primera, segunda y tercera clase o especie. Cuando el parámetro m, toma el valor cero, las funciones elípticas coinciden con funciones circulares, cuando tiende a la unidad, coinciden con las funciones hiperbólicas. Las tres formas básicas de la funciones elípticas de Jacobi son: cn (u, k) dn (u,k) sn (u, k), donde k es lo que llamamos módulo elíptico. Provienen de la inversión de la integral elíptica de primera especie

$$u = F(\boldsymbol{\varphi}, k) = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2(sen\ t)^2}} \qquad (0 < k^2 < 1)$$

k= mod u, módulo elíptico

$\boldsymbol{\varphi}$ = amplitud (u, k) =am (u) y $\boldsymbol{\varphi} = F^{-1}(u, k)$ = am (u, k)

Sen $\boldsymbol{\varphi}$ = sen(am(u, k)) = sn (u, k)

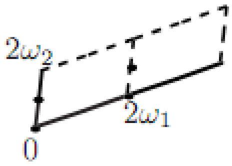
cos $\boldsymbol{\varphi}$ = cos(am(u, k)) = cn (u, k)

$$\sqrt{1-k^2(sen\ \varphi)^2} = \sqrt{1-k^2(sen\ \mathrm{am}(u,k))^2} = \mathrm{dn}\ (u,k)$$

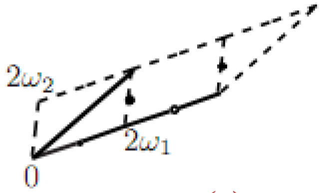
También, son doblemente periódicas y representan generalizaciones de las funciones trigonométricas, verificándose sus mismas propiedades. En el caso de trabajar con **z**, *variable compleja*, y utilizando una nueva notación, una función elíptica F_{pq}(z), es una función que posee un cero en el punto **z = p** y un polo en el punto **z = q**, donde p y q, son los puntos de una ***red rectangular infinita*** en el plano complejo, lo que antes llamamos, paralelogramo fundamental. En la construcción de esta red, partimos de una celda elemental constituida por un rectángulo cuyos vértices están en 0, K, K +iK´, e iK´, donde K y K´ son números reales definidos de la siguiente manera, en función del *parámetro real m, tal que*

$0 \leq m \leq 1$, donde **m** es ahora lo que llamamos *módulo elíptico*.

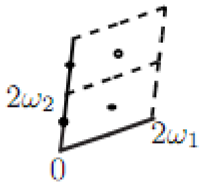
Paralelogramos fundamentales de sn(u) cn(u) y dn(u) Ceros y Polos



sn(u) es función impar



cn(u) es función par



dn(u) es función par

Jacobi representa los periodos de la forma 2K y 2K´i y existen las relaciones:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(u+2K) &= -\operatorname{sn} u & \operatorname{sn}(u+2K'i) &= \operatorname{sn} u \\ \operatorname{cn}(u+2K) &= -\operatorname{cn} u & \operatorname{cn}(u+2K'i) &= -\operatorname{cn} u \\ \operatorname{dn}(u+2K) &= \operatorname{dn} u & \operatorname{dn}(u+2K'i) &= -\operatorname{dn} u \end{aligned}$$

Donde

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-m(sen\ \theta)^2}}, \quad y \quad K´=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-(1-m)(sen\ \theta)^2}}$$

Se establece por K, a un cuarto de periodo real y por iK´, a un cuarto de periodo complejo de F_{pq}(z), estas funciones, usualmente se denotan de la forma pqz. Hay doce de estas funciones que son sc z, sd z, sn z, cs z, cd z, cn z, ds z, ns z, nc z, nd z, tres definidas anteriormente como básicas y las restantes como:

$$\mathbf{ns\ z} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sn\ z}} \qquad \mathbf{nc\ z} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cn\ z}} \qquad \mathbf{nd\ z} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{dn\ z}}$$

funciones recíprocas

$$\mathbf{sc\ z} = \frac{sn\ z}{cn\ z} \qquad \mathbf{sd\ z} = \frac{sn\ z}{dn\ z} \qquad \mathbf{cd\ z} = \frac{cn\ z}{dn\ z}$$

$$\mathbf{cs\ z} = \frac{cn\ z}{sn\ z} \qquad \mathbf{ds\ z} = \frac{dn\ z}{sn\ z} \qquad \mathbf{dc\ z} = \frac{dn\ z}{cn\ z}$$

funciones cocientes y sus respectivas funciones reciprocas

Las funciones elípticas de Jacobi, tienen solamente singularidades aisladas, un cero en p y un polo en q, y también, son periódicas. Entre p y q, hay un semiperiodo de la función pqz, siendo 2K, 2iK´, 2K + 2iK´, los periodos. Así, por ejemplo, las funciones copolares, o sea, que tienen polos comunes, en iK´, que son ***sn, cn, y dn***, tienen respectivamente los periodos 2iK´, 2K+2iK´, y 2K, o equivalentemente, los periodos 4K, 4K´ y 2K. Las funciones elípticas de Jacobi, pueden definirse también con respecto a z, con integrales, como:

z = $\int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-m^2 sent^2}}$, *donde el ángulo* $\boldsymbol{\varphi}$*, es llamado amplitud, y m, el parámetro.*

$\boldsymbol{\varphi}$ = ***am z****, entonces definimos las funciones*

- *sn z = sen* $\boldsymbol{\varphi}$
- *cn z = cos* $\boldsymbol{\varphi}$
- *dn z =* $\sqrt{1 - msen\,\varphi^2}$

como en el caso de u, el resto de las nueve funciones, las expresamos en relación de este trío copolar, ***sn, cn, dn****. Como son consideradas generalizaciones de las funciones trigonométricas e hiperbólicas, sus periodos son reales e imaginarios simultáneamente, por esta razón, doblemente periódicas, y combinan las propiedades de ambas funciones.*

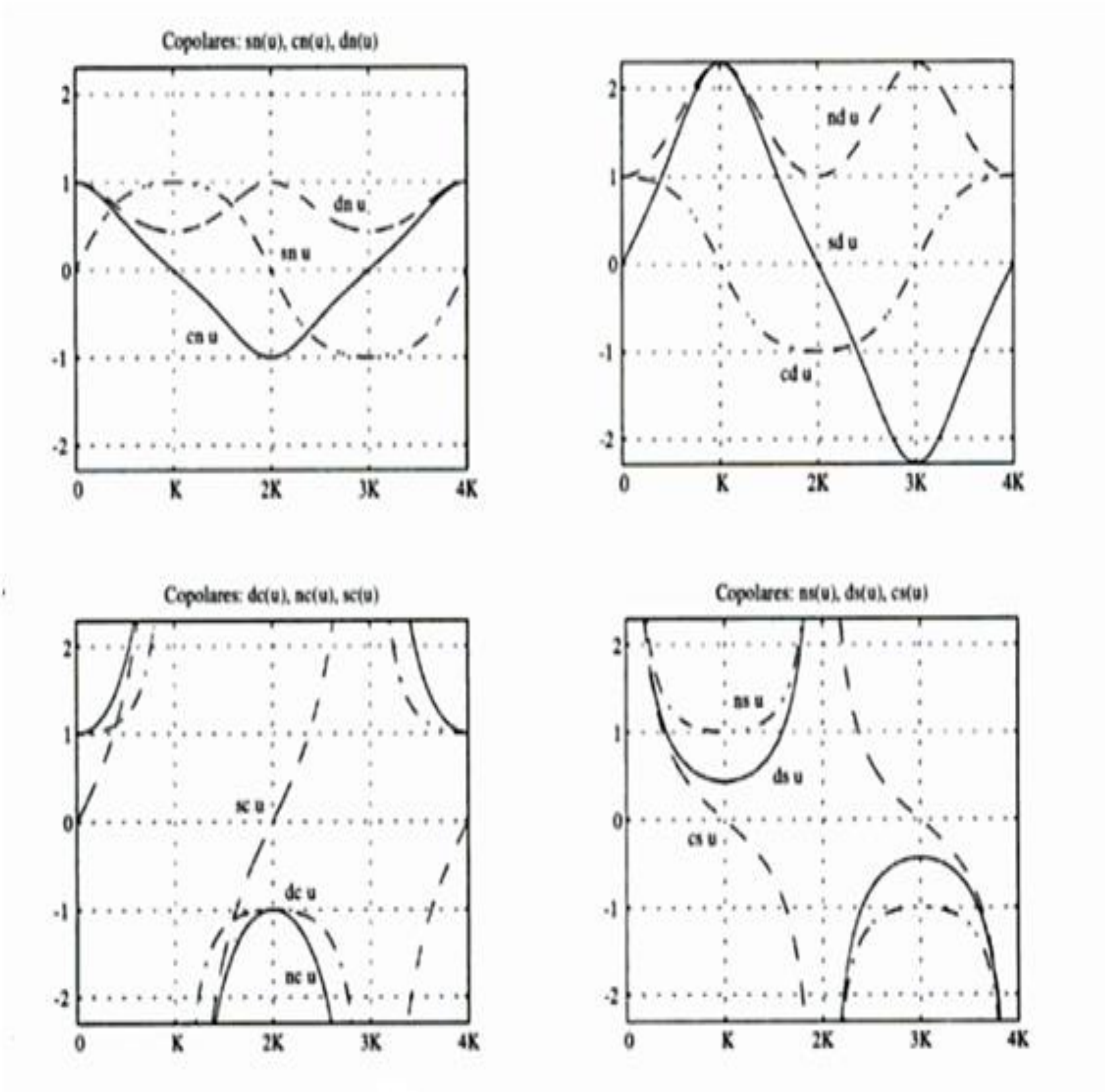
Veamos la siguiente clasificación, generalizando para ***z = u, y*** *el parámetro* ***m = k****,*

	Polo: jK'	Polo: K + jK'	Polo: K	Polo: 0
jK'	$sn(u) = Sen(\phi(u,k))$	$cd(u) = \frac{cn(u)}{dn(u)}$	$dc(u) = \frac{dn(u)}{cn(u)}$	$ns(u) = \frac{1}{sn(u)}$
K + jK'	$cn(u) = Cos(\phi(u,k))$	$sd(u) = \frac{sn(u)}{dn(u)}$	$nc(u) = \frac{1}{cn(u)}$	$ds(u) = \frac{dn(u)}{sn(u)}$
K	$dn(u) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(u)}$	$nd(u) = \frac{1}{dn(u)}$	$sc(u) = \frac{sn(u)}{cn(u)}$	$cs(u) = \frac{cn(u)}{sn(u)}$

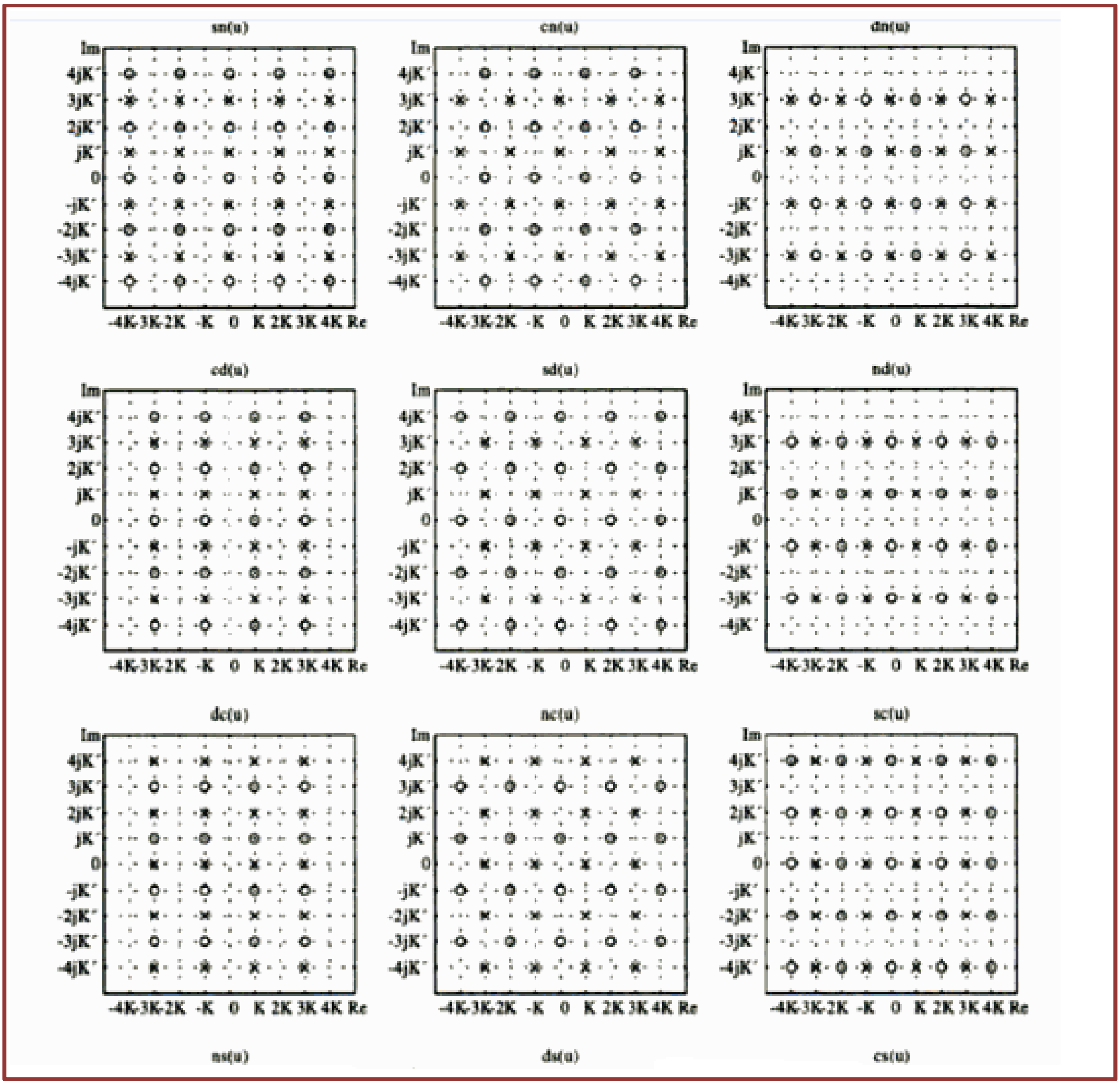
Las columnas representan las funciones con polos comunes, copolares y las que comparten medios periodos, representadas en las filas, son coperiódicas, en general, para cualquier p q r, siempre se cumple que

$$\text{pq (u)} = \frac{p_r(u)}{q_r(u)}$$

<u>*Gráficas de funciones elípticas de Jacobi*</u>



Mapas de ceros y polos



Al igual que para las funciones trigonométricas e hiperbólicas, existen identidades, reducciones funciones inversas, de las funciones elípticas, que cumplen con las mismas propiedades, que las anteriores.

Otra función que se utiliza es tn z = $\frac{sn\,z}{cn\,z}$.

Otras propiedades

sn(0) = 0 cn(0) = 1 dn(0) = 1 sn(-z) = - sn (z)

cumpliendo con las derivadas

$$\frac{d}{dz} sn\ z = cn\ dnz \qquad \frac{d}{dz} cn\ z = -sn\ dn\ z \qquad \frac{d}{dz} dn\ z = -k^2 sn\ cn\ z$$

Fórmulas de adición para funciones elípticas

- $\mathrm{sn}(z_{1+}z_2) = \frac{snz_1 cnz_2 dnz_2 - cnz_1 dnz_1 snz_2}{1-k^2 sn^2 z_1 sn^2 z_2}$

- $\mathrm{cn}(z_{1+}z_2) = \frac{cnz_1 cnz_2 - snz_1 snz_2 dnz_1 dnz_2}{1-k^2 sn^2 z_1 sn^2 z_2}$

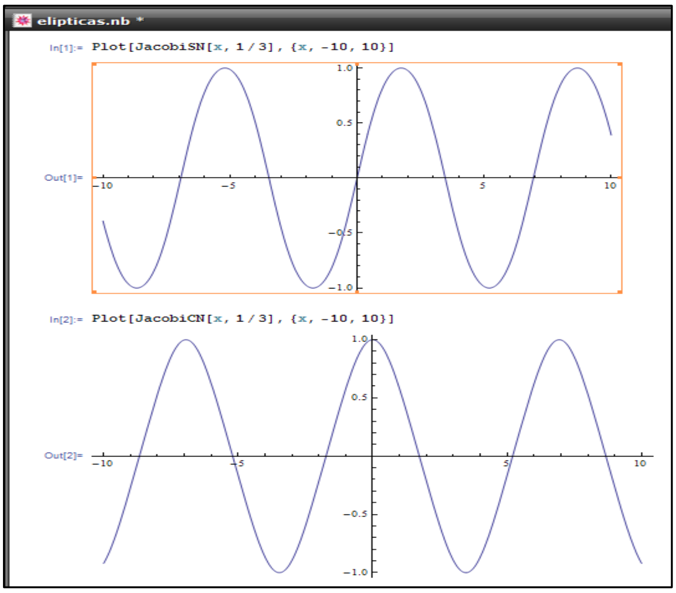
- $\mathrm{dn}(z_{1+}z_2) = \frac{dnz_1 dnz_2 - k^2 snz_1 snz_2 cnz_1 cnz_2}{1-k^2 sn^2 z_1 sn^2 z_2}$

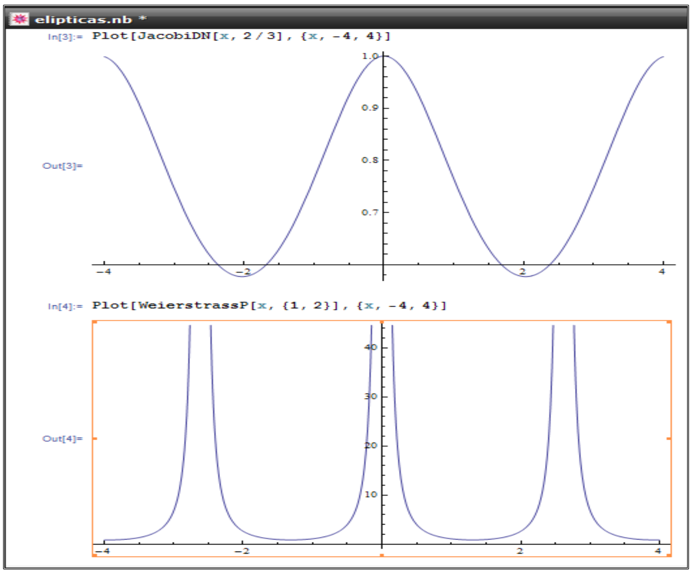
Las funciones elípticas representan una herramienta de gran utilidad, en la mecánica clásica, la dinámica de fluidos, la física, movimientos de oscilación del péndulo, y muchos otros problemas científicos, debido a la importancia de su aplicación, es que su enseñanza debe ser impartida en los diversos ámbitos, donde la ciencia matemática, es considerada base, de todo saber.

Sus gráficas

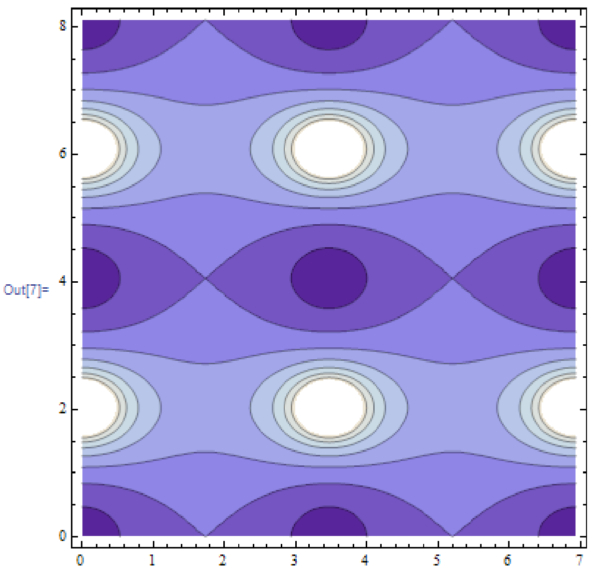
con

Mathematica






```
In[7]:= ContourPlot[Abs[JacobiSN[ux + I uy, 1 / 3]], {ux, 0, 4 EllipticK[1 / 3]}, {uy, 0, 4 EllipticK[2 / 3]}]
```



Aproximación histórica de la enseñanza de funciones elípticas

Al inicio de este trabajo, se intentó realizar un acercamiento al nacimiento de las funciones elípticas, para concluir, se dará una síntesis de lo que fue su inclusión en los currículos universitarios, por intermedio de sus descubridores y posteriores transmisores de este importante tema.

Karl Jacobi, fue el primero en explicar las funciones elípticas, en sus clases universitarias, fue profesor de la Universidad de Konigsberg, desde 1827 hasta 1844, después de publicar su trabajo, "*Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum*", en 1829. Esta publicación, junto con la de Abel, dio un gran impulso a su estudio. Más tarde, en la Universidad de Munster, Cristoph Gudermann, dictó un curso sobre funciones elípticas, en 1839, en el que asistió como alumno, Karl Weierstrass, quien en 1856, fue nombrado catedrático del Instituto Politécnico de Berlín. En 1847, en la Escuela Politécnica de París, Joseph Liouville, dictó un curso sobre funciones doblemente periódicas, donde las elípticas, son un caso particular. Otro exponente del trabajo con estas funciones, fue Adrien Legendre, quien realizó una labor fundamental incluyendo la clasificación de las integrales elípticas. Su estudio aparece en forma oficial, en 1875, en la Escuela Politécnica de París. También Pascal escribió una teoría sobre ellas.

En España, en el año 1885, en una Escuela especial para ingenieros de caminos, canales y puertos, las funciones elípticas son nombradas explícitamente. En 1902, Lauro Clariana Ricart, que fue un matemático e ingeniero industrial español, dio una serie de conferencias sobre funciones elípticas, en la Real Academia de Barcelona. Para continuar en el siglo XX, cuando decae el tema en los currículos docentes, se siguieron dando cursos y conferencias en distintos lugares del mundo. Jordan dedica varios epígrafes en sus libros, al estudio de funciones doblemente periódicas. Abel, en un manuscrito, que contenía su gran teorema, se refiere a la extensión del teorema de adición de Euler, para integrales elípticas, él, transforma radicalmente esta teoría de integrales elípticas, en la de funciones elípticas, mucho más fáciles de manipular, haciendo uso de las funciones inversas de estas integrales. Los teoremas de adición de funciones elípticas, representan por otra parte, aplicaciones especiales del teorema de Abel, sobre la suma de integrales de funciones algebraicas. En la actualidad, no son muchos los libros de matemática, que profundizan este tema, en nuestro idioma, se encuentran explicaciones en libros de Mecánica Clásica avanzada, o Física, o en breves reseñas de algunos profesores de Universidades, en los que tratan de desarrollar el tema, con pocas demostraciones, es un tema que, para nosotros los matemáticos, merece formar parte de nuestro conocimiento.

Bibliografía Consultada:

"Invitation to the Mathematics of Fermat _ Wiles"

Capitulo II: Funciones Elípticas

Autor: Yves Hellegouarch

Edición: Dunod, 2º - 2001

English Translation Copyright 2002 by Academic Press

"Calculo: una variable"

Autor: Thomas, George B.

Editorial: Pearson Educación

Edición 11ª - 2005

"Elementos de Cálculo diferencial e integral "

Autores: Sadosky, Manuel – Guber, Rebeca

Editorial: Alsina

Edición: 2º - 1993

“Variable Compleja y Aplicaciones”

Autores: Churchill, Ruel V. – Brown, James Ward

Editorial: Mc Graw Hill

Edición: 5º - 1991

“Variable Compleja”

Autor: Spiegel, Murray R.

Editorial: Mc Graw Hill

Edición: 1991

“Variable Compleja con Aplicaciones”

Autor: Derrick, William R.

Editorial: Grupo Editorial Iberoamericana

Edición: 1987

“Mecánica Clásica Avanzada”

Autor: Gómez, Jorge M

Editorial: Universidad de Antioquia

Edición: 1º - 2006

“Fluidos, (Aproximación y síntesis)”

Autor: Ulloa Rojas, Raúl A. (ingeniero)

Editorial: Universidad Iberoamericana

Edición: 1º - 2005

“Teoría de las funciones elípticas”

Autor: Markushevich, Aleksei Ivanovich

Traducción al español: Bernardo, Emiliano A.

Editorial: Mir, Moscú

Edición: 1970

“Calculo Avanzado”

Autor: Kaplan, Wilfred

Compañía Editorial Continental   Edición: 10º -1972

Paginas web:

http://mathworld.wolfram.com/

http://www.worldlingo.com/

Apuntes en formato pdf:

“Notas sobre integrales y funciones elípticas”

Fernández Gómora, Érica Edición 2006

“El teorema integral de Cauchy y algunas de sus consecuencias”

Universidad Politécnica de Madrid- Dpto de Matemática Aplicada

“Revista de Obras públicas”, Artículos sobre funciones elípticas

González Piedra, Juan Edición 1899 – 1929

“Métodos Numéricos para ingeniería”

Vázquez, Ricardo (ingeniero)

“Notas sobre integrales Abelianas”

Cukierman, Fernando

"**Aproximación Histórica a la enseñanza universitaria de funciones elípticas, desde mediados del siglo XIX a comienzos del siglo XX."**

Ortiz, Javier

"Método de la función elíptica de Jacobi"

Capitulo 5

"Variable Compleja"

González López, Artemio

Madrid, septiembre de 2003

"Variable Compleja"

Sánchez Hernández, José Darío

Colombia, Abril de 2005

"Geometría Algebraica"

Ivorra Castillo, Carlos