

Born-Infeld Theory:



Oleg V. Pavlovsky
(ITPM MSU & ITEP Moscow)

- Born-Infeld Theory: general

The theory that restricts its own field strength!



By analogy with relativistic particle action

$$L = C \sqrt{1 - (X_t)^2 / C^2}$$



It could be something like this

$$L = \beta \sqrt{1 - F_{str} / \beta^2}$$

- Born-Infeld Theory: Electrodynamics (1934!!)

Let us consider non-linear lagrangian $L = b^{-2} (1 - \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} - bF_{\mu\nu})})$

In 4dim it could be rewritten as

$$L = b^{-2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{2} b^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{16} b^4 (F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu})^2} \right)$$

If **b** tends to **0** we have Maxwell electrodynamics

If field strength \sim **b** we have nonlinear regime

- Born-Infeld Electrodynamics: self-duality

Canonically conjugate variables

$$\vec{H} = -\frac{\partial L}{\partial \vec{B}} \quad \vec{D} = \frac{\partial L}{\partial \vec{E}}$$

Duality transformation

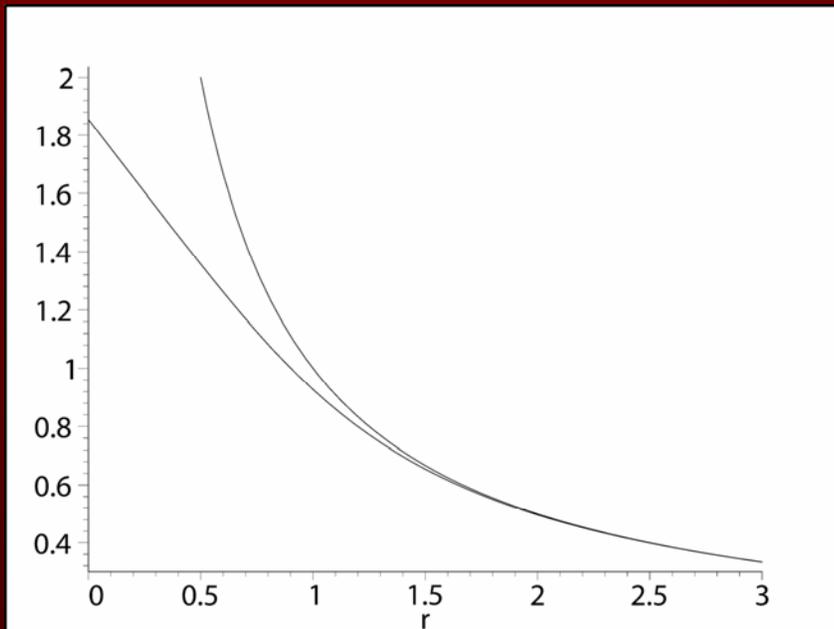
$$\vec{D} + i\vec{B} \rightarrow e^{i\theta} (\vec{D} + i\vec{B}) \quad \vec{E} + i\vec{H} \rightarrow e^{i\theta} (\vec{E} + i\vec{H})$$

Leads to highly non-trivial and non-linear constraint

$$\vec{D}\vec{H} = \vec{E}\vec{B}$$

Electrodynamics (photonic) solitons = BI-ons

$$\text{If } \mathbf{B}=0, \quad L = b^{-2} \left(1 - \sqrt{1 - b^2 \vec{E}^2} \right)$$



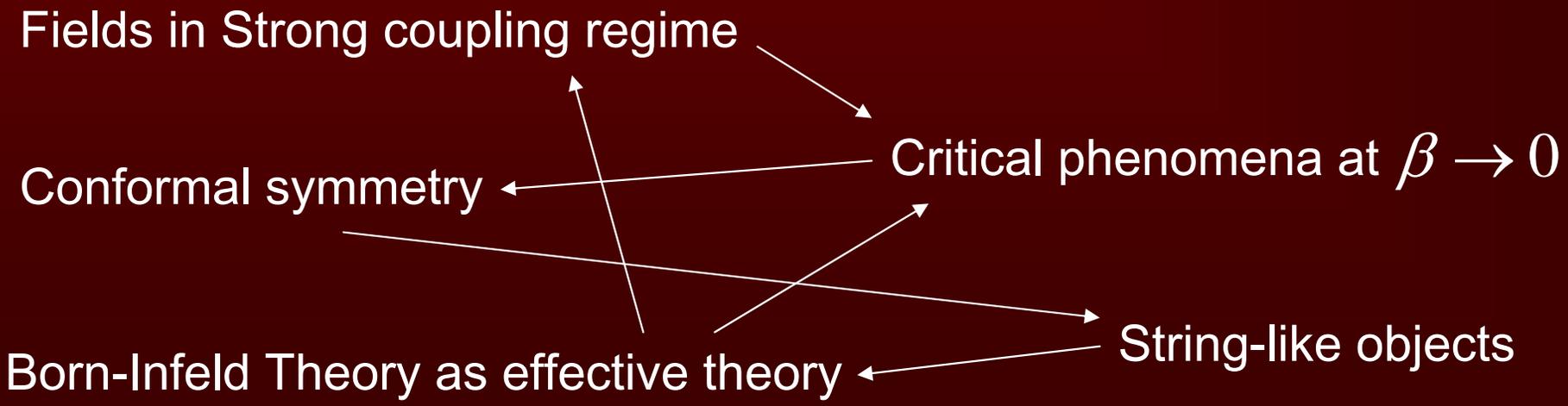
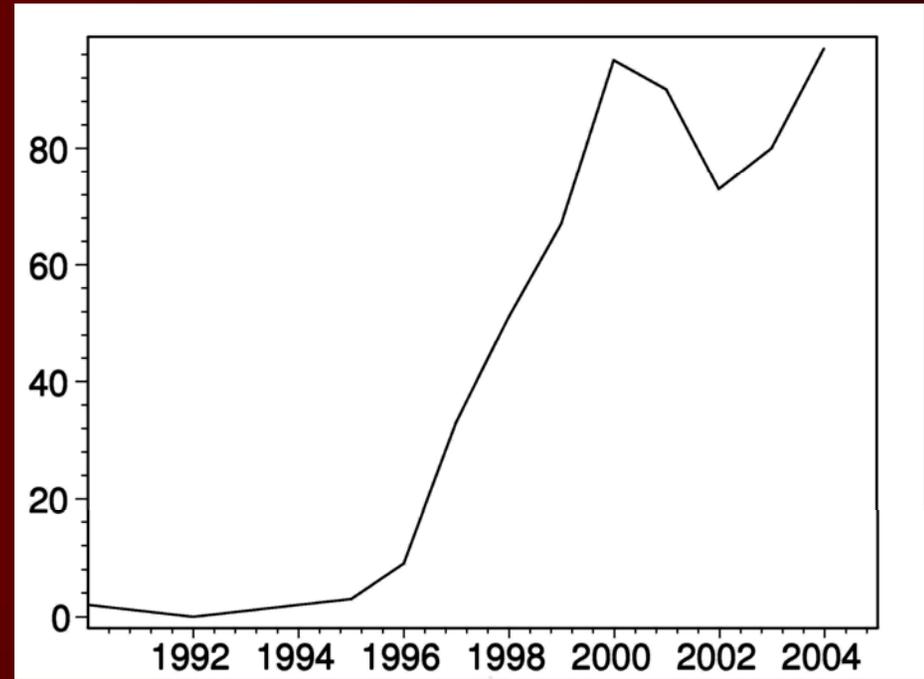
The existence of a limiting field strength now finds dynamical (physical) justification in the increasing pairs production from vacuum
Bachas&Porrotti
PLB(1992)

Photonic solitons are very important for nonlinear optics. They pass through one another **WITHOUT** scattering!!!

Born-Infeld Theory and String Theory



Activity in
Born-Infeld
Field



Scalar Born-Infeld theory in 0+1 dim: integrability, “hidden” conformal symmetry and String Theory

1) Scalar BI theory in 1+1 dim = Theory of Bosonic String

$$L = 1 - \sqrt{1 - (\dot{\varphi}_t^2 - \dot{\varphi}_x^2)}$$

\longrightarrow

$$X^\mu = \begin{pmatrix} t(\tau, \sigma) \\ x(\tau, \sigma) \\ y = \varphi(t(\tau, \sigma), x(\tau, \sigma)) \end{pmatrix}$$

\longleftarrow

$$L = -\sqrt{(\dot{X}X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}$$

2) Weyl invariance (conformal symmetry) in the String language leads to the integral of motion in the BI theory

Conformal group symmetry of BI fields

$$u_{00} - u_{11} + u_0^2 u_{11} + u_1^2 u_{00} - 2u_0 u_1 u_{01} = 0,$$

$$u = u(x), \quad x = (x_0, x_1), \quad u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}, \quad u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1,$$

$$\begin{aligned} P_0 &= i \frac{\partial}{\partial x_0}, & P_1 &= -i \frac{\partial}{\partial x_1}, & J_{01} &= x_0 P_1 - x_1 P_0, \\ D &= x_\nu P^\nu - i, & Q &= \frac{\partial}{\partial u}, & x_\nu P^\nu &= x_0 P_0 - x_1 P_1. \end{aligned}$$

“Quasi-elastic” scattering of BI solitons

$$(1 - \varphi_t^2) \varphi_{xx} + 2\varphi_t \varphi_x \varphi_{tx} - (1 + \varphi_x^2) \varphi_{tt} = 0$$

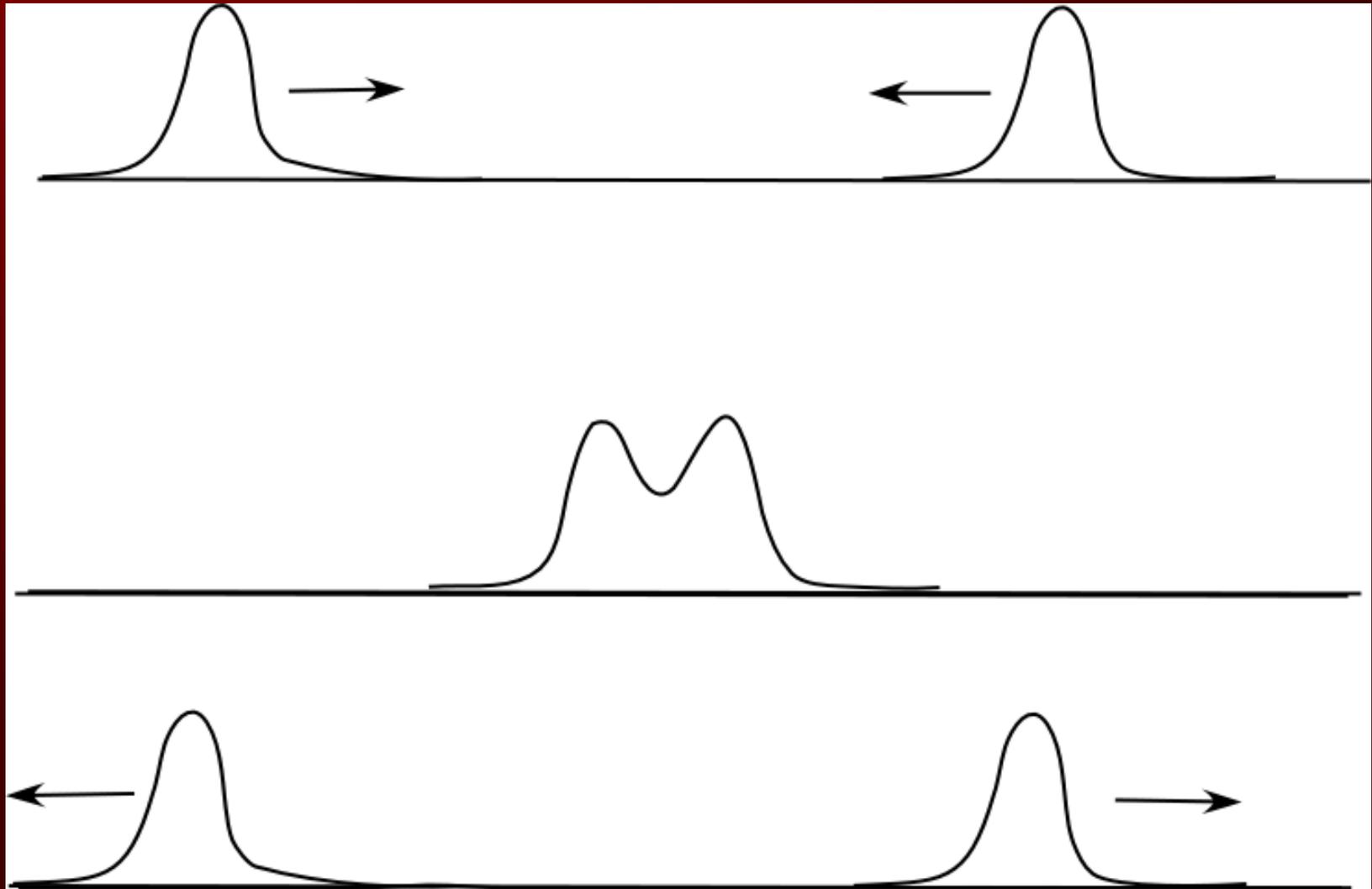
Two type of solitons:

$$\varphi = \Phi(x + t)$$

$$\varphi = \Phi(x - t)$$

“Quasi-elastic” scattering:

$$1 - (\varphi_t^2 - \varphi_x^2) > 0$$



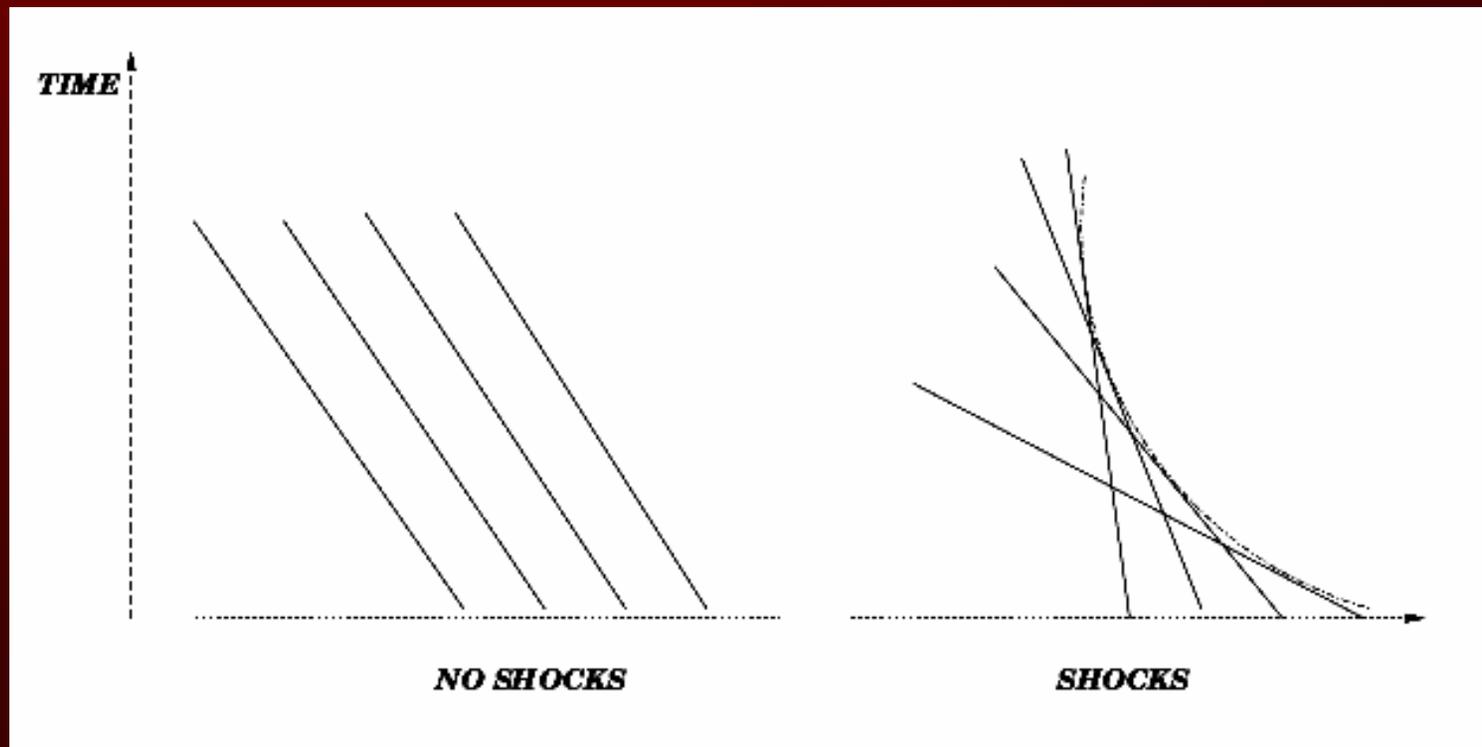
Shock-free wave propagation in scalar BI theory

Evaluation of “wave-fronts” by method of characteristics

J. McCarthy & O. Sarioglu

If characteristics are crossing each other = generation of shock-wave.

If not = smooth initial condition leads to smoothness of global solution!



Scalar BI Theory – non-linear theory with no-shock wave propagation

$$L = L(\partial_{\mu}\varphi)$$

$$L' L''' - 3(L'')^2 = 0$$

$$L_{free} = (\partial_{\mu}\varphi)^2$$

$$L_{BI} = 1 - \sqrt{1 - (\partial_{\mu}\varphi)^2}$$

Singular solutions of BI Theory

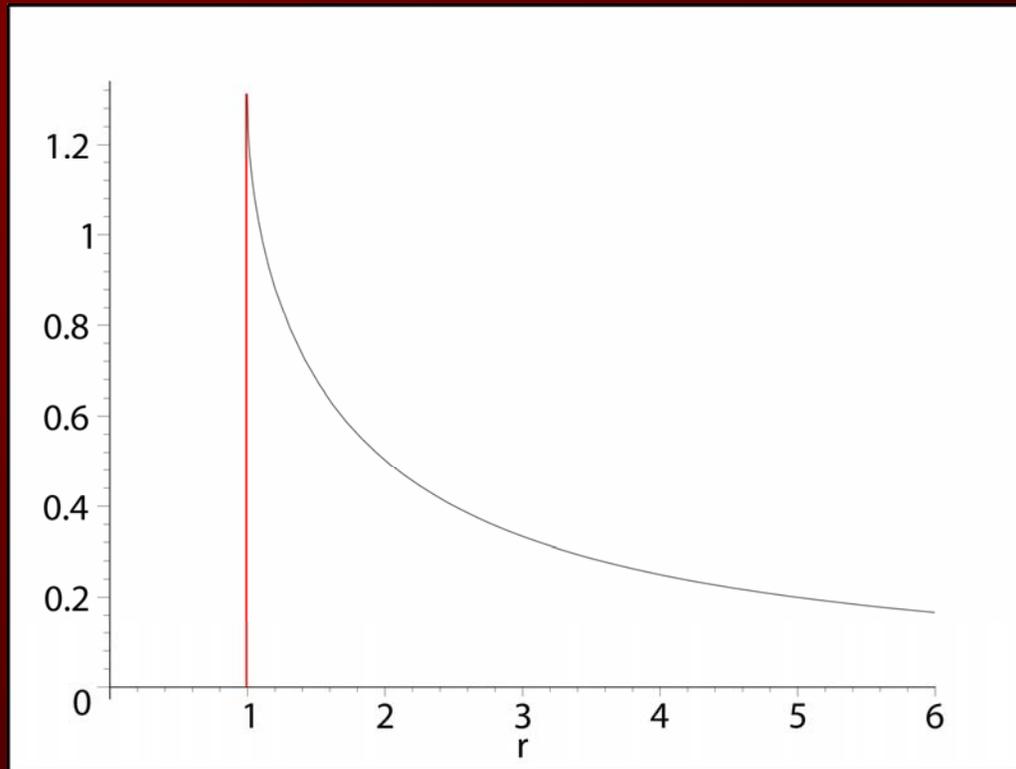
In BI theory singular solutions have **finite energy!**

Typical example: “Catenoid” solution of scalar BI Theory in 4dim

Catenoid is static spherically symmetrical solution, it looks like BI-on solution, but with singularity in its derivative at finite radius (so called “horizon” surface).

$$\phi_{BI-on}(r) = C \int_r^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + C^2}} \quad \phi_{catenoid}(r) = C \int_r^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4 - C^2}}$$

Catenoid: prototype of “real” BI shock-waves

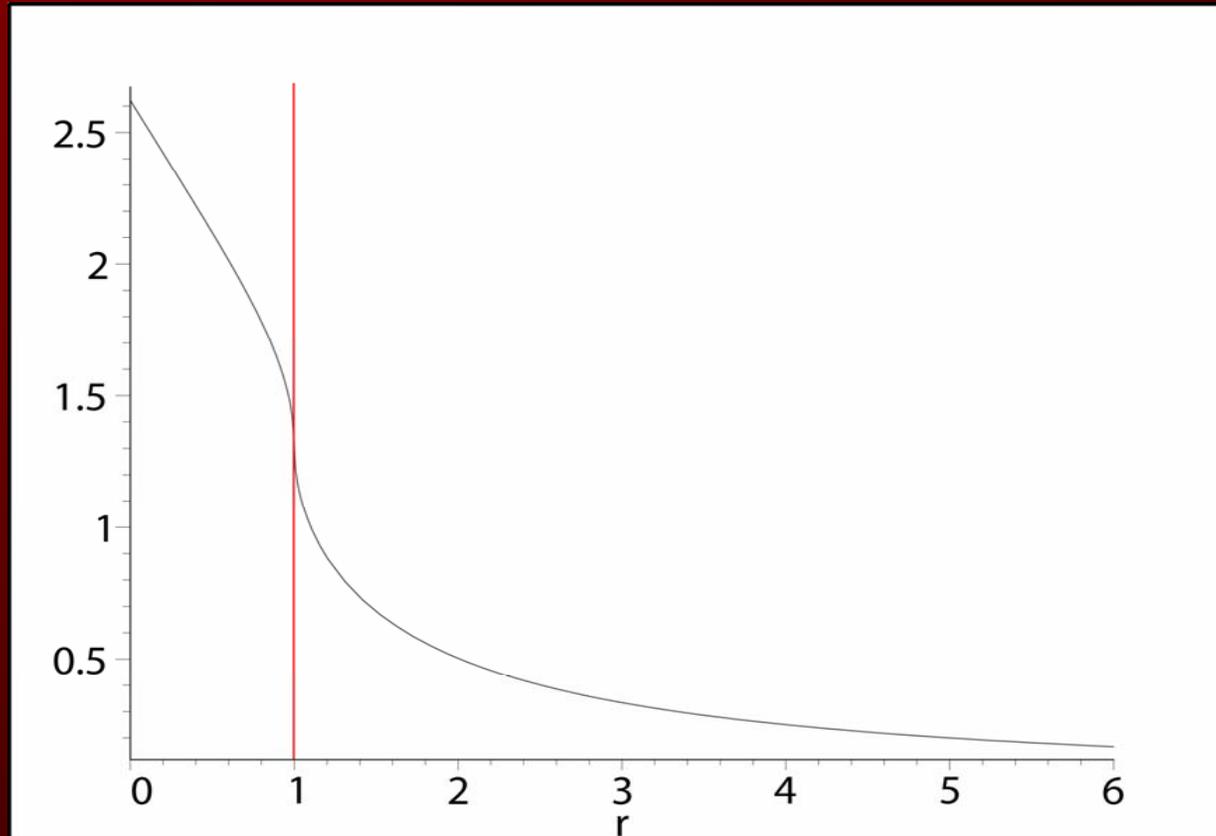


But how to extend into forbidden region?

Analyticity

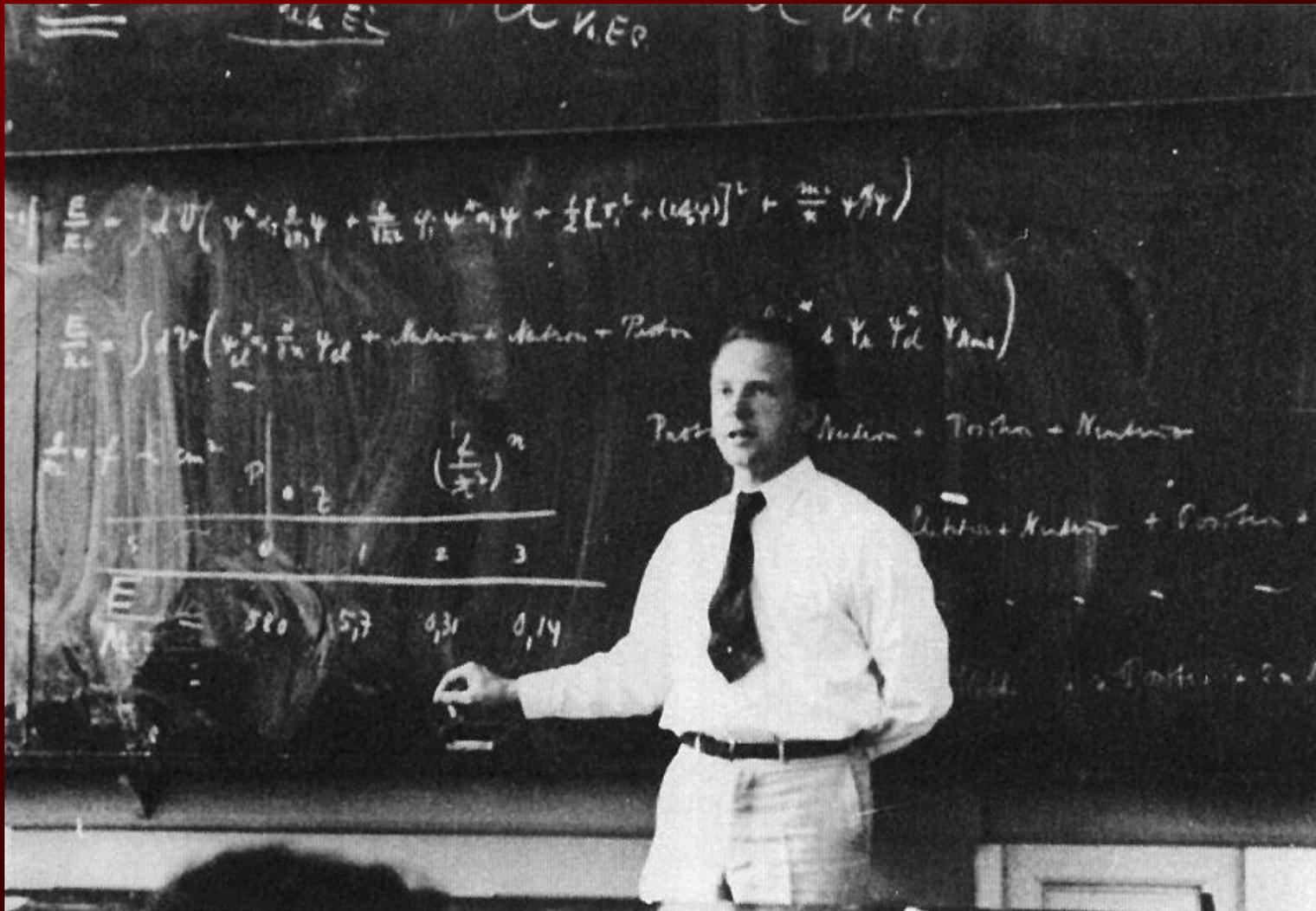
Physical considerations

Extension by Analyticity



Physical considerations: Heisenberg model of pion fireball production

$$L_{H-BI} = 1 - \sqrt{1 + b^2 (\partial_\mu \varphi)^2 + m_\pi^2 \varphi^2}$$



Heisenberg picture of the HE hadronic scattering (1952!!!)

Mesonenerzeugung als Stoßwellenproblem.

Von

W. HEISENBERG.

Mit 6 Figuren im Text.

(Eingegangen am 5. Mai 1952.)

Die Erzeugung vieler Mesonen beim Zusammenstoß zweier Nukleonen wird als ein Stoßwellenvorgang beschrieben, der von einer nichtlinearen Wellengleichung dargestellt wird. Die quantentheoretischen Züge des Vorgangs können dabei näherungsweise nach dem Korrespondenzprinzip berücksichtigt werden, da es sich um einen „Vorgang hoher Quantenzahl“ handelt. Aus der Diskussion der Lösungen der nichtlinearen Wellengleichung ergeben sich Aussagen über die Energie- und Winkelverteilung der verschiedenen Mesonensorten.

Die in den letzten Jahren gewonnenen experimentellen Erfahrungen über die Entstehung der π -Mesonen haben es sehr wahrscheinlich gemacht, daß beim Stoß zweier Nukleonen hoher Energie häufig viele Mesonen mit einem Schlag erzeugt werden. Daß eine starke Wechselwirkung der Nukleonen mit den Mesonen, und insbesondere der Mesonen untereinander zu einer solchen Vielfacherzeugung führen kann, ist schon vor längerer Zeit festgestellt worden [4]. Zu einer quantitativen Abschätzung kann man die Energiedissipation im Mesonenfeld mit der Turbulenz in Strömungsfeldern vergleichen [5], oder man kann, wie FERMI [3] es getan hat, an ein im Moment des Zusammenstoßes sich einstellendes Temperaturgleichgewicht denken, aus dem dann die energetische Verteilung der Mesonen zu berechnen ist.

Die folgenden Betrachtungen sollen jedoch das Problem von dem Standpunkt aus wieder aufgreifen, der vom Verfasser im Zusammenhang mit der YUKAWASchen Theorie im Jahre 1939 dargelegt worden ist [4]. Die Mesonenenerzeugung soll als ein Stoßwellenvorgang aufgefaßt werden, der durch eine nichtlineare Wellengleichung beschrieben wird, und es soll gezeigt werden, daß man bei einer solchen Behandlung zu quantitativen Ergebnissen für die spektrale und die räumliche Verteilung der verschiedenen Mesonensorten kommen kann.

1. Anschauliche Beschreibung der Stoßwelle.

Im folgenden soll die Mesonenenerzeugung stets im Schwerpunktsystem beschrieben werden. Die Transformation ins Laborsystem kann nachträglich ohne Schwierigkeiten vorgenommen werden und ist schon in früheren Arbeiten durchgeführt worden, sie braucht also hier nicht erörtert zu werden [5].

a) Im Schwerpunktsystem bewegen sich die beiden Nukleonen von entgegengesetzter Richtung kommend aufeinander zu (Fig. 1), bis sie in einem gewissen (in Fig. 1 schraffierten) Gebiet überlappen, in dem eine starke Wechselwirkung einsetzt. Die Nukleonen sind als flache Scheiben gezeichnet, deren Dicke wegen der LORENTZ-Kontraktion um den Faktor $\sqrt{1-\beta^2}$ (β = Schwerpunktschwindigkeit) kleiner ist als



Fig. 1.

ihre Durchmesser, den man von der Größenordnung der COMPTON-Wellenlänge des Mesons, d.h. von der Ordnung $1,4 \cdot 10^{-13}$ cm annehmen kann. Im Moment des Zusammenstoßes

verändert sich die Geschwindigkeit der Nukleonen, so daß in ihrem gesamten Gebiet Energie ans Mesonenfeld übertragen wird. Im ersten Augenblick der Stoßwelle ist also die ganze Energie des Mesonenfeldes in der dünnen ebenen Schicht konzentriert, die im Moment des Stoßes von den beiden Nukleonen erfüllt war.

b) Wenn man von der Wechselwirkung der Mesonen absehen könnte, so würden sie sich von diesem ersten Augenblick ab nach der Wellengleichung

$$\square \varphi - \kappa^2 \varphi = 0 \quad (1)$$

ausbreiten (oder nach einer komplizierteren linearen Wellengleichung, die die verschiedenen Mesonensorten enthält). Die spektrale und die Winkelverteilung der Mesonenwelle würde sich dann im Verlauf der Wellenausbreitung nicht mehr ändern, sie könnte also durch eine FOURIER-Entwicklung der Welle im ersten Moment bestimmt werden. Man findet, daß die zwischen den Frequenzen k_0 und $k_0 + dk_0$ enthaltene Energie der Mesonenwelle (k_0 entspricht also der Energie des einzelnen Mesons) von k_0 nahezu unabhängig wäre bis zu Frequenzen, deren zugehörige Wellenlänge von der Größenordnung der Dicke der Schicht, in der der Stoß stattfindet, d.h. von der Ordnung $\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\kappa}$ (κ Mesonenmasse) ist; für $k_0 > k_{0m} = \frac{\kappa}{\sqrt{1-\beta^2}}$ wird die Intensität als Funktion von k_0 rasch abnehmen.

$$d\varepsilon = \text{const} \cdot dk_0 \quad \text{für} \quad k_0 \leq k_{0m}. \quad (2)$$

Für die Anzahl der Mesonen im Intervall dk_0 erhält man entsprechend

$$dn = \text{const} \frac{dk_0}{k_0} \quad \text{für} \quad k_0 \leq k_{0m}. \quad (3)$$

In Fig. 2 ist der Verlauf von φ auf der Achse senkrecht zur Emissions-ebene (kurz nach dem Emissionsakt), ferner $d\varepsilon/dk_0$ und dn/dk_0 unter

Heisenberg picture of the HE hadronic scattering (1952!!!)

Die Lösung der nichtlinearen Wellengleichung kann, wenn man sich zunächst nur für die spektrale und nicht für die Richtungsverteilung interessiert, durch einige Vereinfachungen erleichtert werden: Man denkt sich die Ebene, in der die Emission stattfindet, unendlich ausgedehnt, die Schicht unendlich dünn. Dann kann, wegen der LORENTZ-Invarianz der Wellengleichung, φ nur von $s = t^2 - x^2$ abhängen; die partielle Differentialgleichung geht also in eine gewöhnliche Differentialgleichung über, deren Lösung man leichter diskutieren kann.

Als Beispiele sollen zwei nichtlineare Wellentheorien behandelt werden:

1. Die von SCHIFF [10] und THIRRING [12] im Zusammenhang mit den Kernkräften erörterte Gleichung:

$$\square \varphi - \kappa^2 \varphi - \eta \varphi^3 = 0. \quad (4)$$

2. Eine Wellengleichung, die nach dem Vorbild früherer Arbeiten BORNs [1] aus der LAGRANGE-Funktion

$$L = l^{-4} \sqrt{1 + l^4 \left[\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \right)^2 + \kappa^2 \varphi^2 \right]} \quad (5)$$

hervorgeht. BORN hat schon vor langer Zeit darauf hingewiesen, daß nichtlineare Theorien dieses Typus in geringerem Grad singuläre Lösungen als die linearen haben. Das wurde damals für die Selbstenergie der Elektronen ausgenutzt, trifft aber auch für die Mesonenerzeugung zu. Die LAGRANGE-Funktion (5) ist schon den früheren Untersuchungen über die Mesonenerzeugung zugrunde gelegt worden [4].

Zu 1. Die erste dieser beiden Gleichungen geht für $\varphi = \varphi(s)$ über in:

$$4 \frac{d}{ds} \left(s \frac{d\varphi}{ds} \right) + \kappa^2 \varphi + \eta \varphi^3 = 0. \quad (4a)$$

Für $\eta = 0$ kommt man zur linearen Wellengleichung (1) zurück und die Lösung lautet dann

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= a J_0(\kappa \sqrt{s}) & \text{für } s > 0, \\ \varphi &= 0 & \text{für } s < 0, \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

a ist eine Integrationskonstante; vgl. dazu auch Fig. 2. Für $\eta \neq 0$ kann man eine Potenzreihenentwicklung bei $s = 0$ angeben:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= a \left[1 - (\kappa^2 + \eta a^2) s + \frac{1}{4} (\kappa^2 + 3\eta a^2) (\kappa^2 + \eta a^2) s^2 - + \dots \right] & \text{für } s > 0 \\ &= 0 & \text{für } s < 0. \end{aligned} \right\} \quad (6b)$$

Man erkennt unmittelbar, daß es sich bei (4) um eine „schwache“ Wechselwirkung handelt, die an der Unstetigkeit der Wellenfunktion an der Stoßwellenfront nichts ändert. Dies hängt damit zusammen,

Aus (30) folgt:

$$\sigma = \frac{\pi}{\kappa^2} \lg^2 \gamma_{\min} \quad (31)$$

und

$$\bar{\gamma} = \frac{2}{\lg^2 \gamma_{\min}} (1 - \gamma_{\min} + \gamma_{\min} \lg \gamma_{\min}). \quad (32)$$

Es muß betont werden, daß die in den Gl. (28) bis (32) enthaltene Abschätzung für die Häufigkeitsverteilung der γ -Werte von den vorhergehenden Betrachtungen über die Stoßwellenausbreitung unabhängig ist und als weniger zuverlässig anzusehen ist. Bisher liegt auch noch nicht genügend viel Beobachtungsmaterial vor, um die Häufigkeitsverteilung von γ experimentell zu bestimmen.

Die folgende Tabelle 1 gibt den totalen Wirkungsquerschnitt, die Erwartungswerte von γ , n_π und n_κ (Anzahl der π - bzw. κ -Mesonen),

Tabelle 1.

E	10	10^2	10^3	10^4	BeV
σ	0,18	0,49	0,85	1,3	10^{-24} cm^2
$\bar{\gamma}$	0,34	0,19	0,13	0,09	
\bar{n}_π	$3,6 \pm 0,7$	$4,2 \pm 0,8$	$5,2 \pm 0,8$	$8,0 \pm 1$	
\bar{n}_κ	—	$0,9 \pm 0,2$	$2,0 \pm 0,4$	$3,4 \pm 0,6$	
$\bar{k}_{0,\pi}$	$0,25 \pm 0,04$	$0,36 \pm 0,04$	$0,50 \pm 0,05$	$0,67 \pm 0,06$	BeV
$\bar{k}_{0,\kappa}$	—	$1,0 \pm 0,2$	$1,4 \pm 0,15$	$2,0 \pm 0,18$	BeV
$\gamma = 1$ $\left\{ \begin{array}{l} \bar{n}_\pi \\ \bar{n}_\kappa \end{array} \right.$	$10,7 \pm 2$	$22,1 \pm 4$	$40,3 \pm 6$	89 ± 12	
	—	$4,7 \pm 1$	15 ± 6	38 ± 6	

deren mittlere Energie und schließlich die Mesonenzahlen im Grenzfall $\gamma = 1$ als Funktion der Primärenergie E (im Laboratoriumssystem). Andere Mesonenarten als π - und κ -Mesonen sind nicht berücksichtigt; ferner ist willkürlich $g_\kappa = 2g_\pi$, d.h. $g_\pi = \frac{1}{3}$, $g_\kappa = \frac{2}{3}$ gesetzt, um der nach den neueren Messungen in Bristol gefundenen relativ großen Häufigkeit der κ -Mesonen Rechnung zu tragen. Diese Zahlen müssen später auf Grund genauere Messungen revidiert werden. Für die Masse des κ -Mesons ist 0,61 BeV eingesetzt. Um die Ungenauigkeit der theoretischen Abschätzung zum Ausdruck zu bringen, wird jeweils (mit Ausnahme der ersten beiden Zeilen) aus den mit Hilfe von (16), (17) oder (18) bis (20) gewonnenen Werten das Mittel genommen und die halbe Differenz als Fehler angeführt.

d) Die Winkelverteilung der emittierten Mesonen ergibt sich aus den anschaulichen Überlegungen in I. Zwar werden die Einzelheiten der Winkelverteilung noch von der Stoßwellengleichung abhängen. Aber ganz allgemein wird der Impuls der Mesonen senkrecht zur Primärrichtung die Größe κ nur selten erheblich überschreiten können. Mesonen der Energie k_0 werden in der Regel in einem Winkelbereich der Ordnung

der Voraussetzung (1) graphisch dargestellt. Das Spektrum (3) entspricht dem bekannten Röntgenbremsspektrum der Elektronen und führt auch dann, wenn ein erheblicher Teil der Nukleonenenergie auf das Mesonenfeld übertragen würde, niemals zu einer größeren Anzahl emittierter Mesonen, da die Energie des einzelnen Mesons im Mittel $\approx \frac{1}{2} k_{0m}$ wäre.

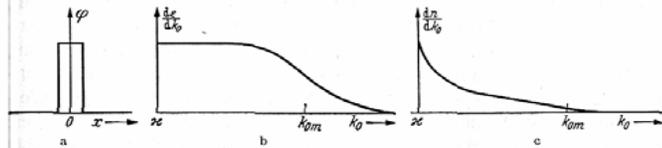


Fig. 2a-c.

c) In Wirklichkeit darf aber von der Wechselwirkung der Mesonen nicht abgesehen werden; die Ausbreitung der Welle erfolgt nach einer nichtlinearen Wellengleichung, die nur im Grenzfall geringer Intensität

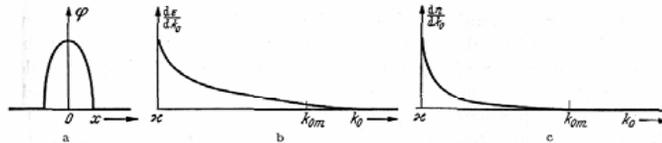


Fig. 3a-c.

näherungsweise in die lineare übergeht. Die Nichtlinearität hat zur Folge, wie später noch nachgerechnet werden wird, daß die Singularität am Kopf der Welle etwas abgerundet wird; infolgedessen wird noch

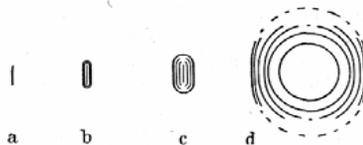


Fig. 4 a-d.

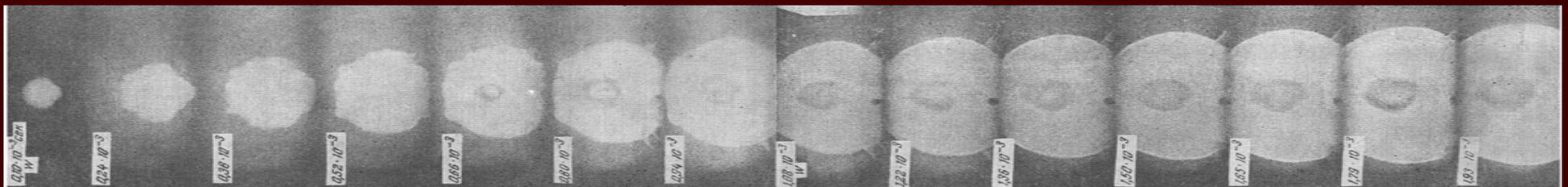
während des Ausbreitungsvorgangs Energie von den kurzen in die langen Wellen übergeführt und die spektrale Verteilung am Ende des Ausbreitungsvorgangs fällt steiler ab als bei der Gültigkeit von (1). Man erhält also qualitativ die in Fig. 3 dargestellten Verhältnisse.

Die räumliche Ausbreitung wird in den Fig. 4a-d geschildert.

Im Stoßmoment ist die ganze Energie in der Scheibe der beiden Nukleonen konzentriert (a). Dann entfernen sich nach rechts und links

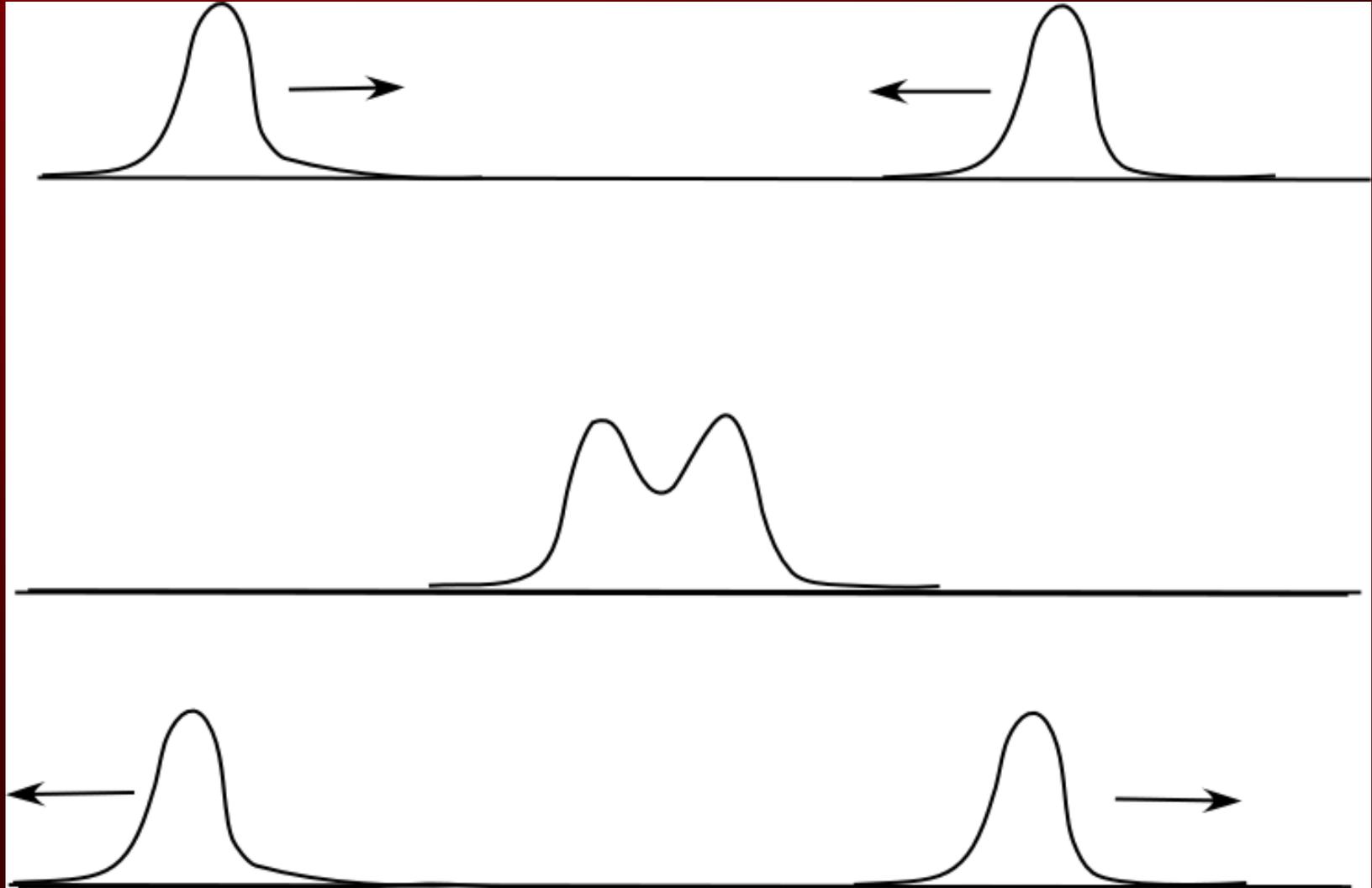
5*

Fireball: analogy with atom-bomb explosion

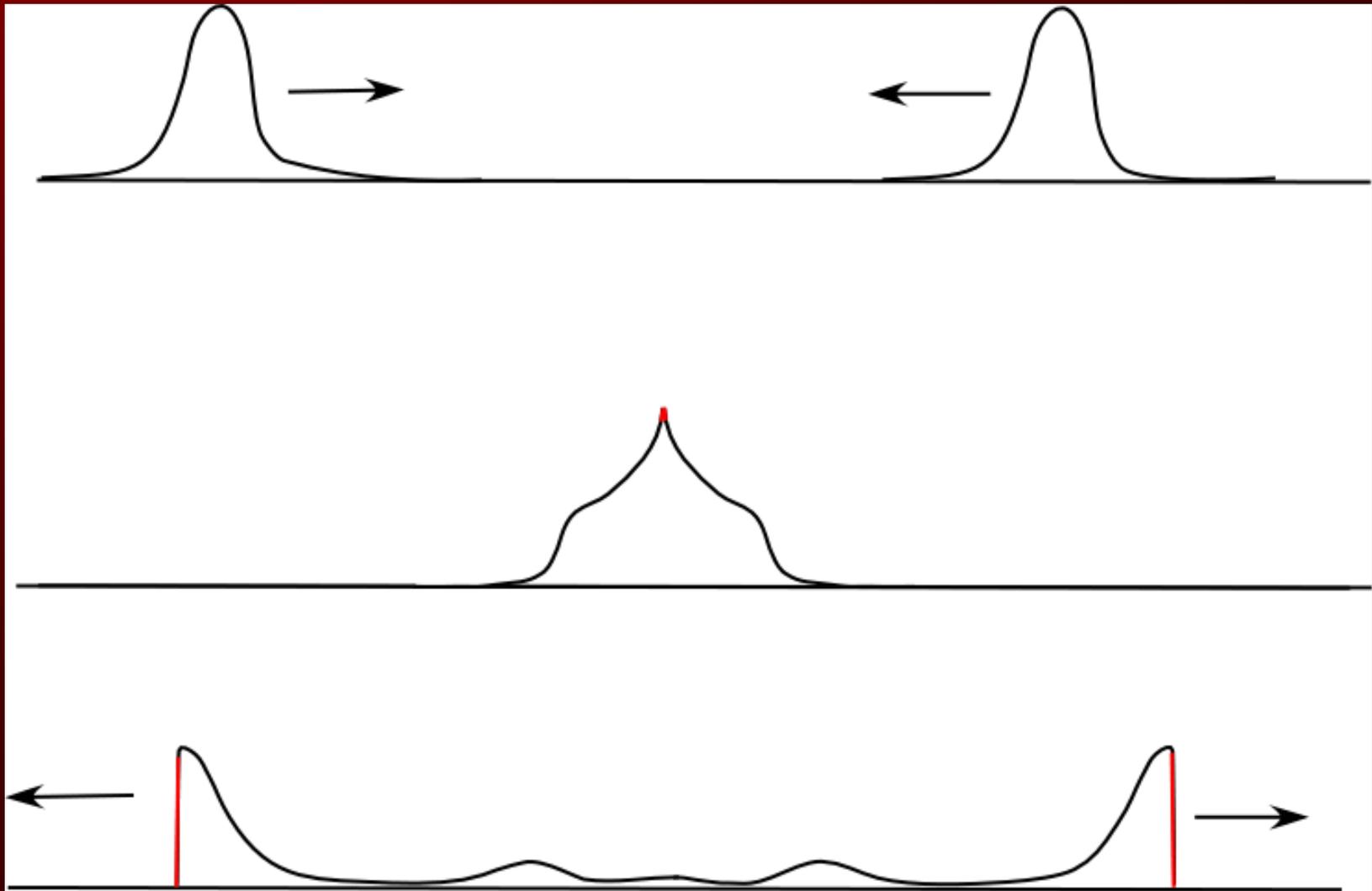


Born-Infeld Theory for Mesons in 1+1 dim.
Two scenarios of the HE scattering: “quasi-elastic”
and “inelastic” (decreasing and increasing)

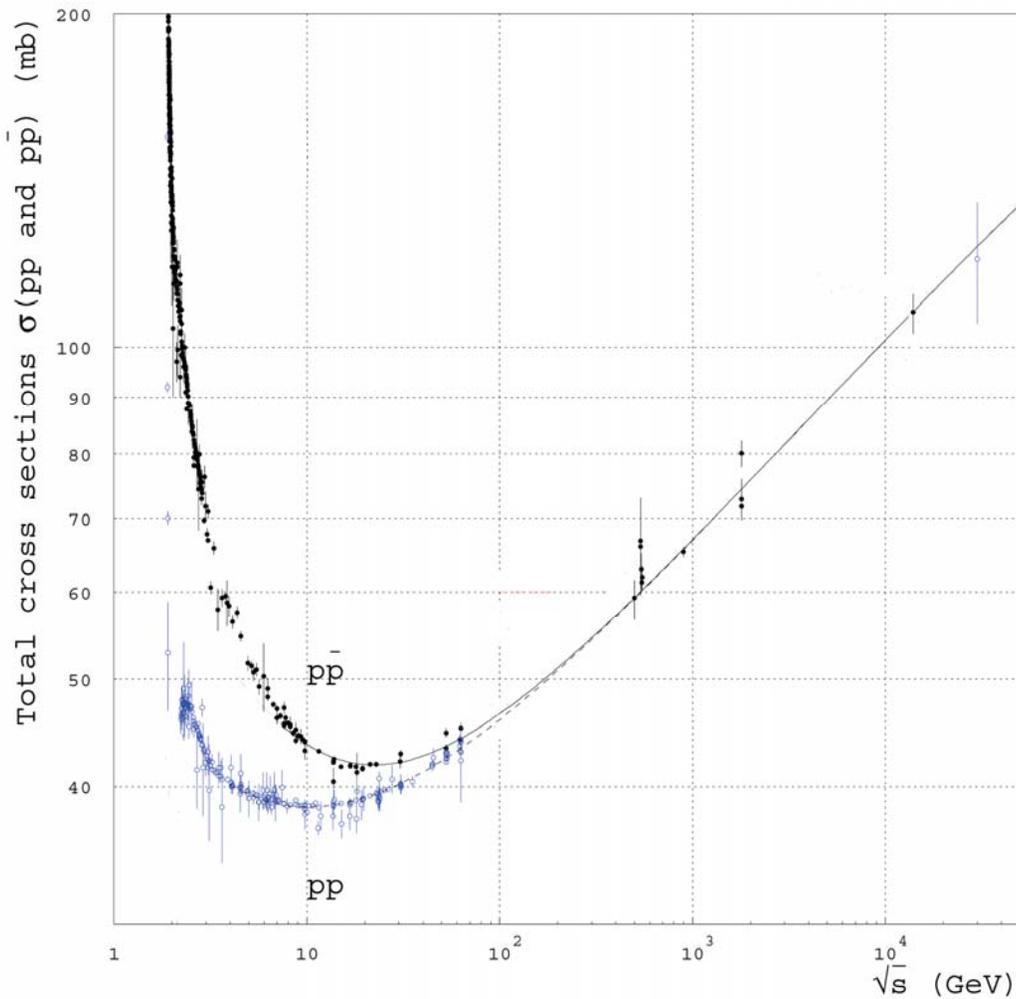
“Quasi-elastic” scenario:



“Inelastic” scenario:



“Expected” decreasing and “unexpected” increasing



Unitarity in scattering
at large S:

$$\sigma_{s \rightarrow \infty} \sim \text{Log}^2 s$$

Froissart ' 1962

Born-Infeld Theory and cosmology

Motivation:

Many candidates for dark energy have been proposed so far to fit the current observations.

The major difference among these models are that they predict different equation-of-state parameter w of the dark energy and thus different cosmology.

Recent observations suggest a value w even less than -1 !

Indeed, they can lie in the range $-1.38 < w < -0.82$.

Results from SN-Ia alone are suggesting $w < -1$ at 1 sigma!

Phantom fields and Born-Infeld fields

Phantom fields are the fields with negative kinetic term.

A matter with $w < -1$ has some strange physical properties: energy density might increase with time, might lead to the existence of astrophysical or cosmological wormhole and so on.

We need appropriate and physically motivated model for phantoms!



Tachyon fields of String Theory: Natural candidate on the role of phantoms!

Qualitative dynamics of string theory depends of the models, but generally it must be Born-Infeld Theory with some potential

$$L_{effective} = V(T) \sqrt{1 - \partial_{\mu} T \partial^{\mu} T}$$

Born-Infeld Cosmology

Felder, Kofman, Starobinsky (2002)
J. G. Hao and X. Z. Li, (2003)

$$S = \int \frac{R}{16\pi G} \sqrt{-g} d^4 x + \int \frac{1}{b} (1 - \sqrt{1 - b \partial_\mu T \partial^\mu T} - V(T)) d^4 x$$

In Robertson-Walker there are only two degrees of freedom would be interesting for us: the scale factor $a(t)$ and scalar tachyon field $T(t)$.

$$S = \int \frac{3\pi}{4G} a(1 - \dot{a}^2) dt + \int 2\pi^2 a^3 \frac{1}{b} (1 - \sqrt{1 - b\dot{T}^2} - V(T)) dt$$

Born-Infeld W

Our aim is to calculate energy density and pressure of tachyon fields T

$$\rho_T = T_0^0 = \frac{1}{b\sqrt{1-bT_t^2}} - \frac{1}{b} + V \qquad P_T = T_i^i = \frac{1}{b} - \frac{\sqrt{1-bT_t^2}}{b} - V$$

$$W_T = \frac{P_T}{\rho_T} = -1 - \frac{bT_t^2}{1 + (bV(T) - 1)\sqrt{1-bT_t^2}}$$

For any suitable choice of potential V(T) state parameter less than -1!!!

Typically people used String motivated potential $V(T) = V_0 \left(1 + \frac{T}{T_0}\right) e^{-\frac{T}{T_0}}$

Conclusions:

Born-Infeld Theory is a very interesting object of Modern Mathematical Physics.

It has absolutely unique properties that make this theory very attractive for various applications in different branches of physics.

BI is used in: non-linear optics, condense matter physics, nuclear physics, high-energy physics, string theory and recently in Cosmology!

BI cosmology is a hot-point now, a lot of interesting results waits!