

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA**

---

**Fakulta strojní**

**katedra hydromechaniky a hydraulických zařízení**

**HYDRODYNAMIKA**  
**A HYDRODYNAMICKÉ STROJE**

**Jaroslav Janalík**

---

**Ostrava 2008**

**Obsah**

	strana
1. Úvod .....	3
2. Základní pojmy a fyzikální vlastnosti tekutin .....	4
2.1. Tekutina .....	4
2.2. Fyzikální vlastnosti tekutin .....	5
3. Tlakové poměry v kapalině za klidu .....	9
3.1. Tlak a jeho působení .....	9
3.2. Eulerova rovnice hydrostatiky .....	10
3.3. Hladinové plochy .....	12
3.4. Hydrostatický tlak .....	14
3.5. Pascalův zákon .....	15
4. Tlakové síly .....	16
4.1. Vodorovné rovinné plochy .....	16
4.2. Šikmé rovinné plochy .....	16
4.3. Tlakové síly na křivé plochy .....	17
4.4. Archimedův zákon .....	19
5. Relativní pohyb kapaliny .....	20
5.1. Pohyb přímočarý, rovnoměrně zrychlený .....	20
5.2. Pohyb rovnoměrný, kruhový .....	21
<b>Hydrodynamika</b> .....	<b>24</b>
6. Klasifikace proudění a základní pojmy .....	24
6.1. Základní pojmy .....	24
6.2. Rozdělení proudění .....	25
6.3. Druhy proudění skutečných tekutin .....	26
7. Proudění ideální tekutiny .....	29
7.1. Rovnice kontinuity – spojitosti .....	29
7.2. Eulerova rovnice hydrodynamiky .....	33
7.3. Bernoulliho rovnice pro dokonalou tekutinu .....	35
7.4. Bernoulliho rovnice pro stlačitelný plyn .....	38
7.5. Věta o změně hybnosti .....	39
8. Proudění vazké tekutiny .....	41
8.1. Navierova-Stokesova rovnice .....	41
8.2. Bernoulliho rovnice pro skutečnou kapalinu .....	42
9. Laminární proudění .....	44
9.1. Laminární proudění v kruhovém potrubí .....	44
9.2. Stékání po svislé stěně .....	46
10. Laminární proudění newtonských kapalin .....	48
10.1. Mocninová rovnice toku .....	51
10.2. Rovnice Binghamova .....	55
10.3. Měření viskozity .....	59
11. Turbulentní proudění .....	66
11.1. Vznik turbulence .....	67
11.2. Přejít z laminárního na turbulentní proudění .....	68
11.3. Charakteristiky turbulentního proudění .....	70
11.4. Turbulence a její vliv na přenosové jevy .....	77
11.5. Reynoldsova pravidla pro počítání s náhodnými veličinami .....	78
11.6. Reynoldsova rovnice .....	78
11.7. Rovnice spojitosti pro turbulentní proudění .....	79
11.8. Kinetická energie turbulentního proudění .....	80
11.9. Směšovací délka .....	80
11.10. Logaritmický rychlostní profil v kruhovém potrubí .....	81
11.11. Mocninový rychlostní profil .....	83
11.12. Parametry turbulence v kruhovém potrubí .....	84
11.13. Matematický popis turbulentního proudění .....	86
11.14. Model turbulence $k - \varepsilon$ .....	88

<b>12. Hydraulické odpory - ztráty</b> .....	90
12.1. Třecí ztráty v kruhovém potrubí při laminárním proudění.....	90
12.2. Třecí ztráty v kruhovém potrubí pro turbulentní proudění .....	91
12.3. Třecí ztráty v potrubí nekruhového průřezu .....	94
12.4. Místní odpory (ztráty) .....	95
<b>13. Výtok tekutiny otvory</b> .....	104
13.1. Výtok malým otvorem.....	104
13.2. Výtok velkým otvorem v boční stěně .....	105
13.3. Výtok ponořeným otvorem.....	106
13.4. Výtok při současném přítoku .....	106
13.5. Vyprazdňování nádob .....	107
13.6. Přepady.....	108
13.7. Výtok plynu dýzou .....	108
<b>14. Čerpadla</b> .....	112
14.1. Čerpadla objemová – hydrostatická.....	112
14.2. Čerpadla odstředivá – hydrodynamická.....	115
14.2.1. Bernoulliho rovnice pro rotující kanál.....	115
14.2.2. Pracovní rovnice čerpadla – Eulerova rovnice.....	116
14.2.3. Účinnost a příkon čerpadla.....	119
14.2.4. Charakteristiky čerpadla .....	121
14.2.5. Měrné otáčky.....	123
14.2.6. Regulace průtoku u čerpadel.....	126
14.2.7. Řazení čerpadel .....	127
14.2.8. Sací schopnost a kavitace v čerpadlech.....	128
14.2.9. Provozní stav čerpacího systému .....	131
14.2.10. Vybrané konstrukční části čerpadla .....	134
14.2.11. Zkoušení čerpadel.....	136
14.2.12. Aplikace čerpadel.....	138
<b>15. Neustálené proudění</b> .....	140
15.1. Bernoulliho rovnice pro neustálené proudění.....	140
15.2. Hydraulický ráz.....	141
<b>16. Obtékání a odpor těles</b> .....	144
16.1. Mezní vrstva.....	144
16.2. Odpor těles.....	146
16.3. Obtékání koule .....	148
16.4. Obtékání válce .....	150
16.5. Odpor vybraných těles.....	152
<b>17. Usazování</b> .....	153
17.1. Sedimentační rychlost .....	153
17.2. Sedimentace nekulové částice .....	155
17.3. Omezené usazování .....	156
<b>18. Proudění porézní vrstvou, fluidace, míchání</b> .....	161
18.1. Filtrační proudění – Proudění porézní vrstvou .....	161
18.2. Fluidace .....	166
18.3. Míchání .....	170
<b>19. Fyzikální podobnost a teorie modelování</b> .....	173
19.1. Hydrodynamická podobnost při proudění tekutin .....	173
19.2. Podobnost v termomechanice .....	181
19.3. Podobnost při přenosu hmoty.....	182
19.4. Dimenzionální analýza ( $\pi$ -teorém).....	185
<b>Přehled použitých označení</b> .....	186
<b>Literatura</b> .....	189

## 1. Úvod

Mechanika kapalin a plynů je součástí obecné mechaniky je, zabývá se rovnováhou sil za klidu i pohybu tekutin. Vlastní mechanika tekutin využívá některých experimentálních a statistických hodnot výsledků kinetické teorie. Ekvivalentem k pojmu „hmotný bod“ užívaný v mechanice, vystupuje v úlohách hydromechaniky pojem „elementární objem“. Tento objem kapaliny nebo plynu je objem velmi malý proti rozměrům proudu kapaliny, ale dostatečně velký vzhledem k délce volné dráhy molekuly. Počet molekul obsažených v tomto objemu je tak velký, že platí statistické střední hodnoty kinetické teorie plynů. Pro tento objem se odvozují tzv. bilanční rovnice umožňující definovat základní zákony zachování hmoty resp. energie. K určení základních rovnic rovnováhy za klidu i pohybu tekutin jsou postačující dvě vlastnosti, a to spojitost a stejnorodost (izotropie).

Základním rozdílem mezi tekutinou a tuhým tělesem je pohyblivost molekul plynů i kapalin. Kapaliny a plyny tečou v proudu omezeném pevnými stěnami nebo tvoří rozhraní tekutin. Tuhé těleso naproti tomu se pohybuje jako tuhý celek hmotných bodů, nepřihlížíme-li k nepatrným deformacím. Kapalina podléhá značně větším volným deformacím. Při vyšetřování pohybu tekutin se používá mnoha poznatků a zákonitostí z mechaniky tuhých těles. Nepřihlíží se při tom k „mikrostruktuře“ pohybu skutečné tekutiny, tj. k pohybu jejích molekul, který je předmětem kinetické teorie kapalin a plynů.

Hydromechanika řeší většinu svých úkolů na elementárních objemech tekutiny, pro něž sestavuje rovnice rovnováhy. Tyto základní diferenciální rovnice integruje a použitím okrajových, případně počátečních podmínek získává řešení. Takto získaný matematický model se pak řeší buď exaktně, v posledních letech velmi často numericky. Pokud exaktní nebo numerické řešení bylo z hlediska složitosti rovnic nedostupné a též z potřeby verifikace numerického řešení se přistupuje k experimentu, ze kterého vyplývají empirická či poloempirická řešení. Aplikace experimentálních metod v mechanice tekutin je v současné době velmi časté, měření se hlavně z ekonomických důvodů provádějí na modelech a s využitím teorie podobnosti se výsledky získané na modelech přepočítají na skutečná zařízení.

Vedle tradičních úloh mechaniky tekutin jsou skripta doplněna kapitolami zabývajícími se prouděním neneutonských kapalin v potrubí, sedimentací, filtračním prouděním, stručně je také popsána fluidace a míchání. Čerpadlům a dopravě kapalin je ve skriptech věnována nejrozsáhlejší kapitola.

Recenzent: Doc.RNDr. Milada Kozubková, CSc.



## 2. Základní pojmy a fyzikální vlastnosti tekutin

### 2.1. Tekutina

Při řešení úloh v hydromechanice se vychází z představy tekutiny jako spojitého, stejnorodého prostředí (kontinua). Stejnorodostí neboli izotropií rozumíme stejné vlastnosti všech částí tekutiny nezávislé na jejich poloze a směru působení sil. Tento předpoklad umožňuje výhodně řešit úlohy mechaniky kapalin na zvoleném, velmi malém objemu tekutiny a odvozené zákonitosti rozšířit na celý objem.

Tekutina, např. plyn je tvořena molekulami, které se nacházejí pouze v diskrétních bodech, molekuly plynu vykonávají náhodný tepelný pohyb. Důsledkem tohoto pohybu jsou vzájemné srážky molekul a nárazy molekul na stěnu nádoby, což vnímáme jako tlak plynu. Protože ve sledovaném objemu plynu je velký počet molekul, proto při jejich náhodném pohybu vnímáme jen střední pohyby.

V hydromechanice je zaveden pojem ideální neboli dokonalé tekutiny, která nemá vnitřní tření není tedy vazká a je nestlačitelná. Tento pojem, ač nevystihuje skutečnost, dovoluje odvodit jednodušeji některé zákonitosti. Dokonalá tekutina může být namáhána jen tlakem, zatímco vazká (skutečná) tekutina může být vedle toho namáhána jistou smykovou silou (za pohybu).

Tekutina je látka, která se na rozdíl od tuhých těles vždy nevratně deformuje. Nemá vlastní tvar a za působení nepatrných tečných sil se částice tekutiny snadno uvedou do pohybu (výjimkou jsou některé anomální – neneutonské kapaliny).

Tekutiny se dělí na:

**nestlačitelné**, které působením tlaku, normálních sil, jen nepatrně mění svůj objem – zde patří kapaliny. Malé objemy kapalin tvoří kapky. Kapaliny zaujímají tvar nádoby, vyplňují její spodní část a vytvářejí volnou hladinu

**stlačitelné**, tedy i rozpínavé, které vyplňují vždy celý objem nádoby. Podle toho zda jejich stav je blízko či daleko bodu zkapaření jsou to buď páry nebo plyny. Společný název je také vzdušiny. Stav tekutiny nacházející se v rovnováze může být určen tlakem, hustotou a teplotou.

**Měrný tlak  $p$**  - (v praxi zpravidla označován jen tlak) je roven poměru elementární tlakové síly  $dF$  působící kolmo na elementární plošku  $dS$

$$p = \frac{dF}{dS} \quad (2.1)$$

Absolutní tlak se odečítá od nulové hodnoty tlaku, přetlak a podtlak se odečítají od barometrického tlaku – obr. 2.1.

**Hustota  $\rho$**  - (měrná hmotnost) je rovna poměru hmotnosti elementární částice tekutiny  $dm$  k jejímu elementárnímu objemu  $dV$ , obklopujícímu bod, v němž hustotu určujeme

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad (2.2)$$

Převratná hodnota hustoty je měrný objem

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{dV}{dm} \quad (2.3)$$

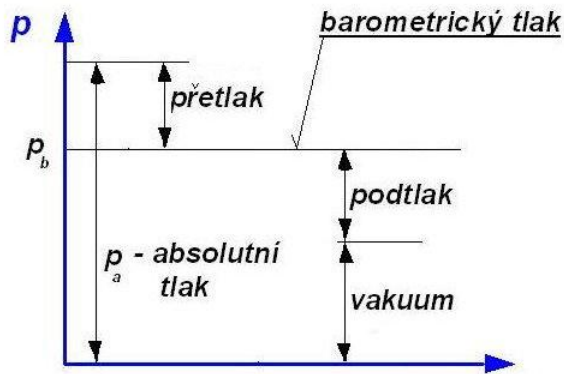
Hustota plynů se mění s tlakem a teplotou, u kapalin naopak hustota se mění jen nepatrně a v mnoha praktických úlohách ji můžeme považovat za konstantní -  $\rho = \text{konst}$ . Hustota se stanovuje měřením, výsledky uvádí odborná literatura.

**Teplota  $T$  ( $^{\circ}\text{C}$ ,  $\text{K}$ )** - v našem případě se proudění bude považovat vždy za izotermní  $T = \text{konst}$ . Údaj teploty bude sloužit jen pro přesné určení parametrů tekutiny jako je hustota a viskozita.

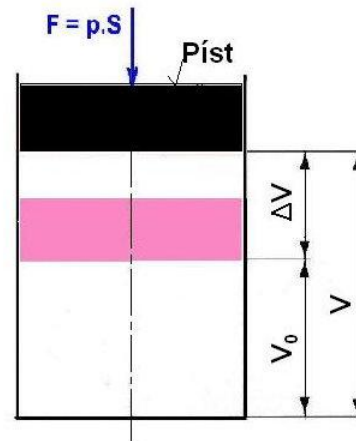
Korelaci mezi tlakem, hustotou a teplotou tekutiny určuje rovnice stavová

$$p \cdot v = \frac{p}{\rho} = r \cdot T, \quad (2.4)$$

kde  $r$  ( $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ) je měrná plynová konstanta, jejíž velikost závisí na druhu plynu.



Obr. 2.1 Tlak absolutní a přetlak



Obr. 2.2 Objemová stlačitelnost tekutin

## 2.2. Fyzikální vlastnosti tekutin

Kvantitativní vztahy v hydromechanice se vyjadřují rovnicemi, grafy, diagramy apod. Veličiny a jejich měrové jednotky jsou určeny Mezinárodní měrovou soustavou SI (Système International d'Unités), kterou uvádí ČSN 01 1300, ČSN 01 1301 a další. Základními veličinami jsou délka, hmotnost, čas, elektrický proud, termodynamická teplota, látkové množství, svítivost a doplňkové veličiny rovinný úhel a prostorový úhel. Základními jednotkami jsou (ČSN 01 1300) metr, kilogram, sekunda, ampér, kelvin, mol, kandela a doplňkové jednotky radián a steradián. V mechanice, a tím i hydromechanice, se vystačí při formulaci poznatků s těmito základními veličinami: délka  $L$  [m], hmotnost  $m$  [kg], čas  $t$  [s]. Ostatní veličiny jsou odvozené veličiny na základě definičních rovnic (ČSN 01 1310). Základní a odvozené veličiny založené na soustavě definičních rovnic tvoří soustavu veličin. Veličiny, které určují fyzikální vlastnosti kapalin a s nimiž se v hydromechanice nejčastěji počítá jsou tyto:

**Objemová stlačitelnost** je vlastnost tekutin a těles zmenšovat svůj objem při zvyšování tlaku – obr 2.2. Změna objemu podle tohoto obrázku se vypočítá z polynomu prvního stupně (lineární závislost)

$$V_0 = \left(1 - \frac{\Delta p}{K}\right), \quad (2.5)$$

kde  $K$  je modul objemové stlačitelnosti tekutiny, tento je definován vztahem

$$K = \rho \frac{dp}{d\rho}. \quad (2.6)$$

Při stlačování kapaliny se její hmotnost nemění, proto lze psát  $m = \rho V = \text{konst.}$  Diferencováním se dostane  $\rho \cdot dV + V \cdot d\rho = 0$ , z čehož pro měrnou objemovou změnu vyplývá

$$\frac{dV}{V} + \frac{d\rho}{\rho} = 0. \quad (2.7)$$

Rozměr modulu objemové stlačitelnosti kapalin připomíná modul pružnosti v tahu tuhých látek, (analogie Hookeova zákona). Pro vodu je modul objemové stlačitelnosti  $K \cong 2,1 \cdot 10^9$  Pa. Stlačitelnost lze rovněž charakterizovat rychlostí zvuku, což je rychlostí, kterou se ve stlačitelném prostředí šíří malé změny tlaku. Za předpokladu izoentropické (adiabatické) stavové změny pro rychlost zvuku platí

$$a = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\kappa \frac{\rho}{\rho}} = \sqrt{\kappa \cdot r \cdot T}. \quad (2.8)$$

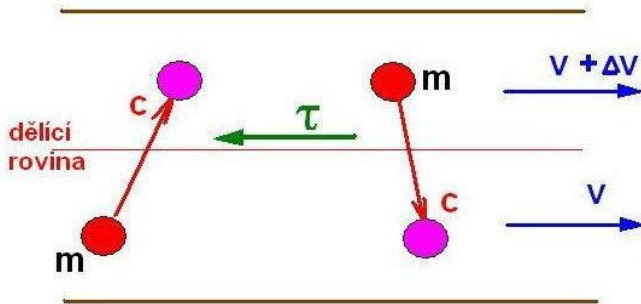
**Teplotní roztažnost** tekutin charakterizuje změnu objemu a hustoty tekutin v závislosti na změně teploty. Změnu objemu je možné určit z polynomu prvního stupně

$$V_0 = V(1 + \beta \cdot t), \quad (2.9)$$

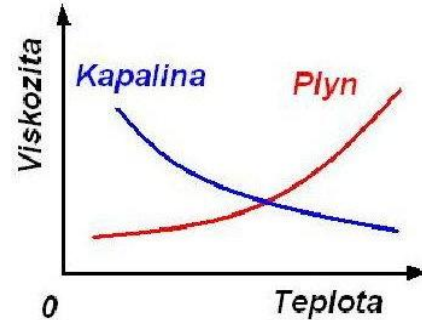
kde součinitel objemové roztažnosti je určen vztahem

$$\beta = \frac{1}{V} \left( \frac{\Delta V}{\Delta t} \right)_{p=\text{konst.}} \quad (2.10)$$

**Viskozita tekutin** se projevuje při proudění skutečných kapalin. Pohybují-li se sousední vrstvy kapaliny různými rychlostmi, vzniká na jejich rozhraní smykové tření, které brání pohybu. Pomalejší vrstva je zrychlována a naopak zase rychlejší zbrzdována. Zmenšení rychlosti je způsobeno tečnou silou, která je vyvolána vnitřním třením nebo viskozitou či vazkostí kapaliny.



Obr. 2.3 Vzniku viskozity u tekutin



Obr. 2.4 Závislost viskozity na teplotě

Viskozitu lze vysvětlit pomocí kinetické teorie tekutin. Předpokládejme podle obr. 2.3, že v proudící tekutině (plynu) vytkneme vrstvu tekutiny, kterou myšlenou rovinnou rozdělíme na dvě poloviny, při čemž horní vrstva se bude pohybovat rychleji než vrstva spodní, rozdíl rychlostí obou vrstev nechť je  $\Delta v$ . Molekuly proudícího plynu o hmotnosti „m“ se pohybují náhodným tepelným pohybem rychlostí „c“, tato rychlost je závislá na teplotě tekutiny a její velikost je při pokojové teplotě několik stovek metrů za sekundu. Sledujme tepelný pohyb molekuly plynu ve spodní vrstvě. Je pravděpodobné, že sledovaná molekula v důsledku tepelného pohybu rychlostí „c“ přejde ze spodní do horní rychlejší vrstvy. V horní vrstvě, která je v průměru rychlejší je pomalá molekula urychlena a je jí předána hybnost

$$\Delta H = m \Delta v.$$

Podobně molekula tekutiny z horní rychlejší vrstvy přejde do pomalejší vrstvy spodní a předá svoji hybnost pomalejším molekulám ve spodní vrstvě, její velikost je stejná jako v předcházejícím případě

$$\Delta H = m \Delta v.$$

Při tomto procesu dochází k přenosu hybnosti přes myšlenou dělicí rovnu, toto se projeví vznikem smykového napětí  $\tau$  v této myšlené dělicí rovině. Na základě této představy je možné vyslovit tvrzení, že příčinou viskozity u plynů je tepelný pohyb molekul. U kapalin je viskozita způsobena mezimolekulárními silami.

U plynů, jejichž tepelný pohyb molekul převládá nad silami mezimolekulárními, vzrůstá zvýšením teploty rychlost tepelného pohybu molekul a tím vzroste i viskozita plynu. Tento poznatek je ve shodě se skutečností. U kapalin je tomu obráceně. U nich jsou dominantní mezimolekulární síly proti tepelnému pohybu molekul, proto u kapalin klesá vazkost s rostoucí teplotou – obr. 2.4.

Smykové (tečné) napětí od vazkosti nebo zkráceně vazké napětí je určeno klasickou formulí podle Newtona, která byla získána experimentálně

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy}, \quad (2.11)$$

kde  $\eta$  je dynamická vazkost, jejíž rozměr je Pa.s

$\frac{dv}{dy}$  je gradient rychlosti ve směru kolmém na směr pohybu

Ve výpočtech se velmi často vyskytuje výraz  $\eta/\rho$ , který je označován jako kinematická viskozita

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} . \quad (2.12)$$

Rozměr kinematické viskozity je  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , obsahuje tedy pouze kinematické veličiny (neobsahuje jednotky hmotnosti nebo síly), odtud plyne její název. Rozměr dynamické vazkosti obsahuje jednotku síly, proto byla tato vazkost označena jako dynamická, neboť v dynamice se vyšetřují příčiny pohybu, tj. síly.

Dynamická a kinematická vazkost závisí na druhu tekutiny. Jejich hodnoty jsou pro většinu tekutin tabelovány. Vazkost každé tekutiny závisí na teplotě a tlaku, tedy na stavových veličinách. Tyto jsou uváděny v odborné literatuře ve formě tabulek, grafů nebo jsou dány poloempirickými rovnicemi.

Viskozita kapalin se měří viskozimetry, z nichž nejběžnější jsou kapilární, výtokové, průtokové, rotační, tělískové a jiné. Jako výtokový viskozimetr se v Evropě používá viskozimetr Englerův., tento se vyznačuje vysokou přesností a jednoduchostí měření. Měřítkem vazkosti jsou Englerovy stupně E, tyto se určí jako poměr výtoku  $\tau$  zkoumané kapaliny o objemu  $200 \text{ cm}^3$  při určité teplotě  $t$  k výtokové době  $\tau_v$  vody při  $20^\circ\text{C}$  z téhož viskozimetru

$$E = \frac{\tau}{\tau_v} . \quad (2.13)$$

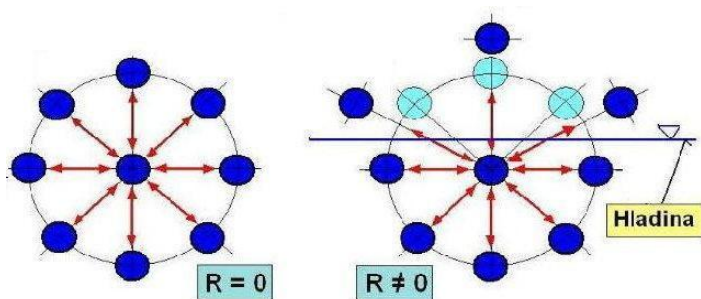
Výtoková doba vody musí být v rozmezí (50 až 52)s, velikost a tvar Englerova viskozimetru jsou dány normou. Pro přepočítání Englerových stupňů slouží empirické vzorce, např.

$$\nu = \left( 7,31 \cdot E - \frac{6,31}{E} \right) \cdot 10^{-6} \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right] . \quad (2.14)$$

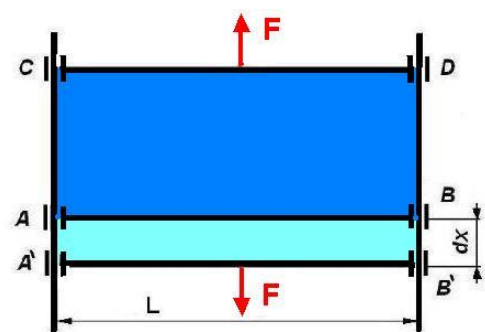
**Povrchové napětí.** Kapalina na rozhraní se vyznačuje odlišnými vlastnostmi, příznačnými pro ostatní objem kapaliny. Rozhraní kapaliny se jeví jako potažené velmi tenkou a napjatou vrstvou. Příčinou povrchového napětí jsou síly působící mezi molekulami kapaliny. Uvnitř kapaliny je každá molekula obklopena ostatními ze všech stran, takže se jejich přitažlivé síly vyrovnávají – obr. 2.5A. U rozhraní jsou molekuly obklopeny jen z jedné strany, jejich síly se nevyrovnávají z druhé strany, a proto na molekulu působí síla  $R$  směřující dovnitř kapaliny – obr. 2.5B. Poněvadž působení jednotlivých molekul je omezeno na velmi malou oblast, projevuje se tato nerovnováha mezimolekulárních sil jen v nepatrné vrstvě kapaliny na hladině. Při přemístění částice kapaliny na rozhraní, se vykoná silou  $R$  práce. Molekuly na rozhraní mají vyšší potenciální energii proti molekulám uvnitř kapaliny. Povrchové napětí je poměr povrchové energie k ploše rozhraní.

$$\sigma = \frac{E_a}{S} . \quad (2.15)$$

Povrchové napětí se definuje též jako síla, která působí na jednotku délky rozhraní, a to kolmo k této délce, a v rovině povrchu.



Obr. 2.5 Síly uvnitř kapaliny a poblíž rozhraní



Obr. 2.6 K definici povrchového napětí

Síla, kterou je např. mydlíková blána roztahována v rámečku s posuvnými tyčkami AB a CD (každá délky  $L$ ), je dána výrazem

$$F = \sigma \cdot L,$$

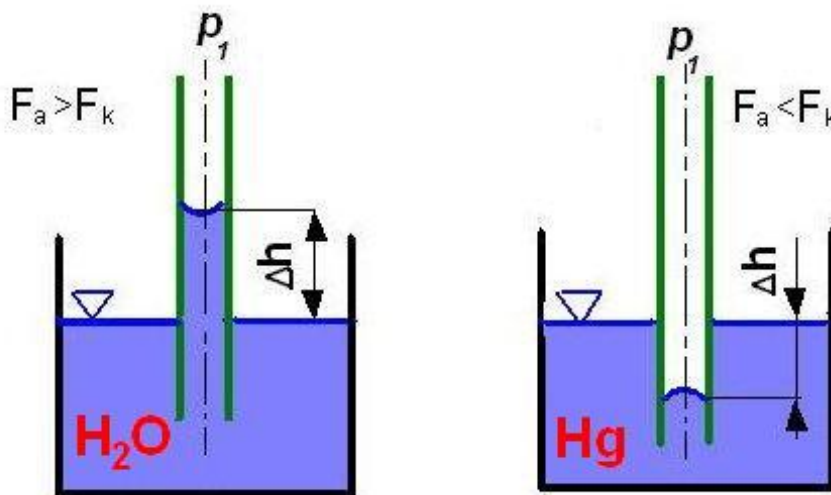
neboť délka namáhaného povrchu je  $L$  a povrchové napětí je  $\sigma$ . Zvětší-li se povrch blány roztažením o délku  $dx$ , vykoná se práce  $dA = F \cdot dx = \sigma \cdot L \cdot dx$ . Touto prací se zvětší povrchová energie kapaliny. Na jednotku délky rozhraní připadá tedy síla

$$\frac{F}{L} = \frac{dA}{L \cdot dx} = \frac{\sigma \cdot L \cdot dx}{L \cdot dx} = \sigma. \quad (2.16)$$

Povrchové napětí určité kapaliny závisí na druhu látek, které tvoří rozhraní. Kapalina se může stýkat s pevnou látkou, kapalinou nebo plynem. Vznik povrchového napětí byl vysvětlen nerovnováhou molekulárních sil za předpokladu, že kapalina s ničím nesousedí. Ve skutečnosti je vždy obklopena jinou látkou, ať pevnou, kapalnou, či plynnou, a proto mezimolekulární síly od vlastní kapaliny se budou vyrovnávat s kvalitativně stejnými silami sousedního prostředí. Výsledné povrchové napětí bude dáno vektorovým součtem obou složek.

Kapilarita se vyskytuje u trubiček velmi malého průměru – kapilár, nebo v porézním prostředí. Když adhezní síly jsou větší než kohezní, vystupuje kapalina v kapiláře do výšky  $h$ . V opačném případě, kdy kohezní síly jsou větší než adhezní, zůstává kapalina v kapiláře o výšce  $h$  níže než je hladina okolní kapaliny. Příslušné výšky  $h$  se dají spočítat z podmínky rovnováhy mezi gravitačními silami a povrchovými silami podle obr. 2.7

$$\pi \cdot d \cdot \sigma = \frac{\pi}{4} d^2 h \cdot \rho \cdot g \Rightarrow h = \frac{4 \cdot \sigma}{\rho \cdot g \cdot h}. \quad (2.17)$$



Obr. 2.7 Kapilární elevace a deprese

Poslední vztah se dá použít též k určení povrchového napětí  $\sigma$ . Povrchové napětí vody je  $\sigma = 0,072 \text{ N m}^{-1} = 0,072 \text{ kg s}^{-2}$ .

**Tlak nasycených par** je hodnota tlaku par nad hladinou kapaliny, přičemž nastává rovnováha mezi počtem molekul opouštějících kapalinu a vracejících se zpět. U jednosložkových kapalin závisí pouze na teplotě a roste s teplotou. Čím je tlak nasycených par kapaliny při dané teplotě vyšší, tím je kapalina těkavější. Tlak nad hladinou kapaliny musí být vyšší, než je tlak nasycených par, jinak by mohlo dojít k prudkému odpaření (varu). Klesne-li tlak uvnitř kapaliny pod hodnotu tlaku nasycených par, dochází ke vzniku kavitace. Parametry vody a vodní páry včetně tlaku nasycených par je možné stanovit podle dokumentů „Mezinárodní asociace pro vlastnosti vody a vodní páry - IAPWS – IF 97“, nebo se dá odečíst z parných tabulek.

### 3. Tlakové poměry v kapalině za klidu

#### 3.1. Tlak a jeho působení

Hydrostatika se zabývá rovnováhou sil působících na kapalinu za klidu. Rovnováha kapaliny za klidu nastane tehdy, když její částice se vůči sobě nepohybují, to znamená, že tvar objemu kapaliny se nemění. V tom případě je u skutečné kapaliny smykové napětí od vazkosti nulové a všechny rovnice platí i pro skutečnou kapalinu. Do hydrostatiky patří i případy relativního klidu, kdy kapalina vůči stěnám je v klidu, ale celá soustava (nádrž + kapalina) konají pohyb. Síly, které mohou působit na kapalinu lze rozdělit obecně do dvou skupin, a to síly plošné a hmotnostní (neboli objemové).

**Plošné síly** (též povrchové) působí na povrch uvažovaného objemu kapaliny, proto jejich velikost závisí na velikosti ploch

$$F_p = p \cdot S.$$

Plošné síly jsou např. tlak kapaliny, tření od vazkosti pohybující se kapaliny, apod.

**Objemové síly** (též hmotnostní) jsou úměrné hmotnosti, která je úměrná objemu kapaliny

$$F_0 = a \cdot m = a \cdot \rho \cdot V. \quad (3.1)$$

Jsou to např. tíha kapaliny, setrvačná síla, odstředivá síla apod.

**Tlak kapaliny** je tlaková síla, působící na jednotku plochy. Je-li tlak rovnoměrně rozložen, je dán poměrem

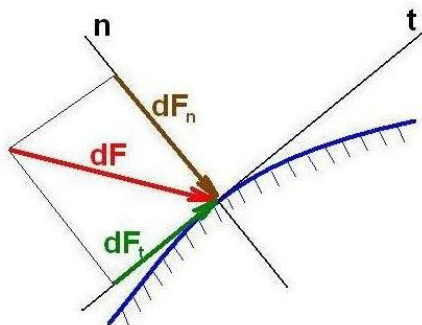
$$p = \frac{F}{S}.$$

Při nerovnoměrném rozložení tlaku je dán obecně

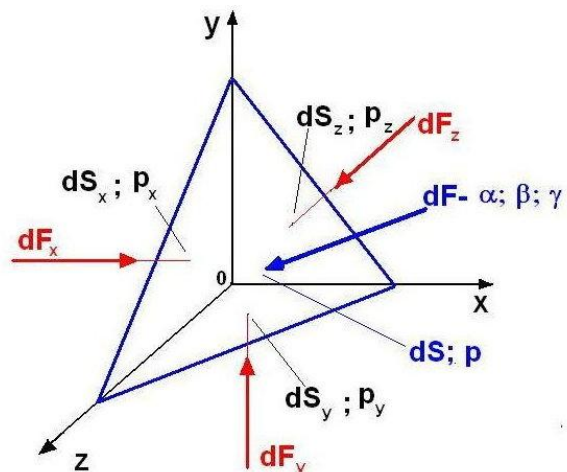
$$p = \frac{dF}{dS}. \quad (3.2)$$

Tlak působí vždy kolmo na plochu a v určitém místě je ve všech směrech stejný, nezávisí tedy na sklonu plošky, na kterou působí. Toto tvrzení si nyní dokážeme. Kdyby působila na plošku síla  $dF$  nikoliv ve směru normály, dala by se rozložit na složku normálovou a tečnou. Tečná složka tlakové síly by si vynutila pohyb částic kapaliny, které nekladou vzájemnému posunutí odpor. Protože tekutina je v klidu, musí tlaková síla působit kolmo na plochu – obr. 3.1.

Z toho plyne, že na tekutinu nacházející se ve stavu rovnovážném mohou působit jen síly normálové, resp. normálová napětí. V technické praxi se bude jednat vždy o tlak, neboť jen dokonale čisté a odvzdušněné kapaliny mohou odolávat tahu. Pevnost v tahu speciálně neupravených kapalin je přibližně rovna nule a ve výpočtech předpokládáme, že k porušení kontinuity kapaliny dojde v místech, kde tlak klesne pod hodnotu tlaku nasycených par a dojde zde k varu – změně fáze. Velikost tlaku v určitém místě uvnitř kapaliny, nezávisí na směru a je tedy skalární veličinou.



Obr.3.1 Působení tlakových sil na stěnu



Obr.3.2 Zákona o šíření tlaku



Při odvozování tohoto tvrzení se předpokládá, že tlak na stěnách čtyřstěnu ( obr. 3.2) je různý ( $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$ ). Na šikmou stěnu působí tlak  $p$  a tudíž tlaková síla  $dF = p dS$ . Tento tlak působí ve směru normály plochy  $dS$ , jež svírá s osami  $x$ ,  $y$ ,  $z$  úhly  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Poněvadž tekutina je v klidu, musí být splněny statické podmínky rovnováhy sil:

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum F_z = 0; \quad \sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0.$$

Protože tlaky na plochu čtyřstěnu jsou konstantní, působí výsledné tlakové síly v těžištích trojúhelníků. Plochy trojúhelníků  $dS_x$ ,  $dS_y$  a  $dS_z$  jsou průměty plochy  $dS$ , což platí i o jejich těžištích. Také výsledné tlakové síly se protínají v jednom bodě a momentové podmínky rovnováhy jsou splněny. Stačí tedy uvažovat jen zbývající podmínky rovnováhy sil.

Ve směru osy  $x$  působí tlaková síla  $dF_x$  a složka tlakové síly  $dF$  do směru osy  $x$ , tj.  $dF \cos \alpha$ . Ostatní síly jsou kolmé na osu  $x$ , a proto jejich složky jsou nulové.

První podmínka statické rovnováhy sil je dána v našem případě rovnicí

$$dF_x - dF \cos \alpha = 0.$$

Po dosažení dříve uvedených výrazů dostaneme

$$p_x \cdot dS_x - p \cdot dS \cdot \cos \alpha = 0.$$

O plochách  $dS$  a  $dS_x$  bylo uvedeno, že  $dS_x$  je průmětem plochy  $dS$ , pro který platí  $dS_x = dS \cos \alpha$ . Podmínka rovnováhy sil se upraví pomocí poslední rovnice a dostane se pro směr osy  $x$

$$p = p_x.$$

Podobně pro směr  $y$  a  $z$  jsou podmínky rovnováhy sil dány rovnicemi

$$p = p_y; \quad p = p_z.$$

Vyplývá tedy z podmínek statické rovnováhy sil rovnost tlaků na plochách čtyřstěnu

$$p = p_x = p_y = p_z. \quad (3.3)$$

Šikmá plocha  $dS$  byla zvolena libovolně. Výsledek lze zevšeobecnit: Tlak působí v daném místě kapaliny všemi směry stejně a nezávisí na sklonu plochy, tzn., že tlak je skalární veličina. Tento zákon platí obecně. Je třeba poznamenat, že v jiném místě kapaliny bude hodnota tlaku obecně jiná, matematicky vyjádřeno

$$p = f(x, y, z).$$

### 3.2. Eulerova rovnice hydrostatiky

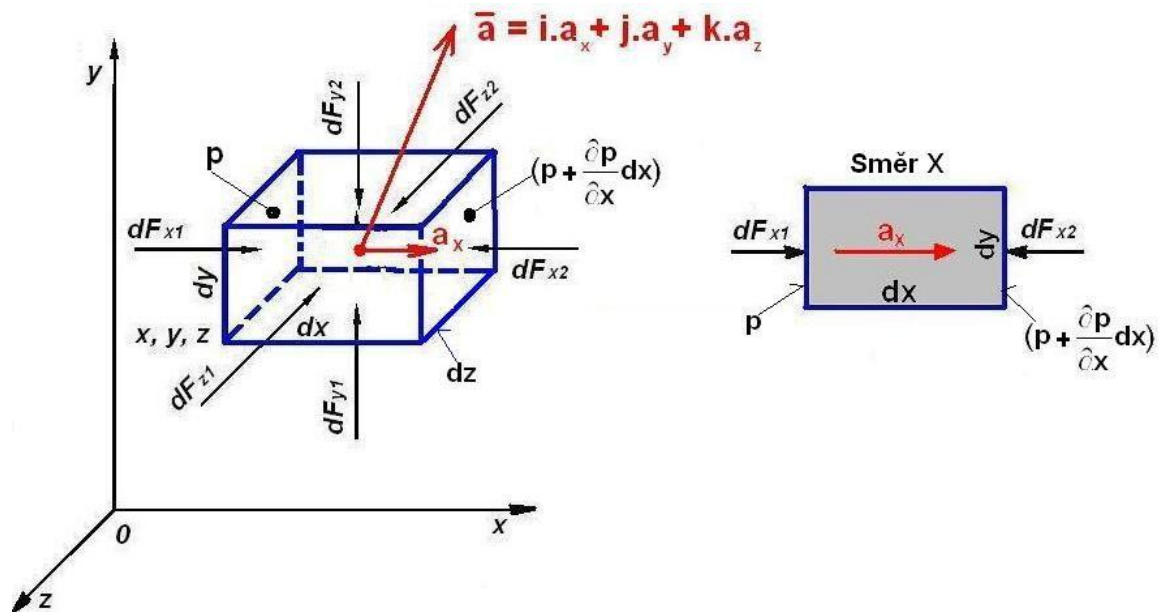
Eulerova rovnice hydrostatiky je obecná podmínka rovnováhy sil působících na kapalinu v klidu. Na kapalinu nechť působí obecně objemová síla  $F_o$  a výslednice tlakových sil  $F_p$ . Rovnováha sil je vyjádřena rovnicí

$$\mathbf{F}_o + \mathbf{F}_p = 0.$$

Na jednotku hmotnosti kapaliny působí z vnějšku síla  $\frac{\mathbf{F}_o}{m} = \mathbf{a}$ , což je zrychlení, které se dá

rozepsat pomocí složek  $\mathbf{a} = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z$ . Zvolí se elementární objem kapaliny ve tvaru hranolku o stranách  $dx$ ,  $dy$  a  $dz$  rovnoběžných se zvolenými osami  $x$ ,  $y$ ,  $z$  - obr. 3.3

Tlakové síly  $F_o$  působí na povrchu hranolku, a to ve třech kolmých směrech. Protože plošky jsou nekonečně malé, je možné považovat tlak za konstantní. Na plošku  $dydz$  působí tlaková síla ve směru osy  $x$ , a proto je označena  $dF_x$ . Podobně v ostatních směrech působí tlakové síly  $dF_y$  na plošku  $dx dy$  a tlaková síla  $dF_z$  na plošku  $dx dz$ . Podmínka rovnováhy vyplývá opět z obecných podmínek statické rovnováhy sil. Protože všechny síly působící na hranolek procházejí jedním bodem (těžištěm hranolku), jsou splněny momentové podmínky. Ve směru osy  $x$  působí na zvolený hranolek plošné síly  $dF_{x1}$  a  $dF_{x2}$  na dvě plošky  $dydz$ , jejichž normály jsou rovnoběžné s osou  $x$ .



Obr. 3.3 Elementární objem tekutin - odvození Eulerovy rovnice hydrostatiky

Tlaková síla na levou plošku  $dx dz$  kde je tlak  $p$ , má velikost  $dF_{x1} = p dy dz$ . Na pravou plošku  $dy dz$ , která je vzdálena od levé plošky o délku  $dx$ , působí tlak

$$\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right),$$

neboť obecně je tlak kapaliny funkcí polohy  $p = p(x, y, z)$ , a tlaková síla je určena vztahem

$$dF_{x2} = \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dx dy.$$

Obdobným způsobem se dají vyjádřit i síly ve směru osy  $y$  a  $z$ .

Kromě plošných sil (tlakových) působí na zvolený hranolek kapaliny hmotnostní síla. Její složka ve směru osy  $x$  bude dána vztahem  $dF_{ox} = dm a_x$ , kde  $dm$  je hmotnost hranolku kapaliny a  $a_x$  je složka zrychlení (hmotnostní síla na jednotku hmoty) ve směru osy  $x$ . Hmotnost  $dm$  se dá vyjádřit pomocí objemu hranolku  $dm = \rho dV = \rho dx dy dz$ , takže objemová síla  $dF_{ox} = \rho a_x dx dy dz$ . Pro rovnováhu sil ve směru osy  $x$  musí tedy platit

$$p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\right) dy dz + \rho a_x dx dy dz = 0,$$

a po úpravě

$$a_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

což je hledaná obecná podmínka rovnováhy sil ve směru osy  $x$ . Pro složky ve směru os  $y$  a  $z$  lze psát zcela analogicky rovnice

$$a_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad a_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Poslední tři rovnice vyjadřující podmínky rovnováhy sil v tekutině za klidu ve směru osy  $x, y, z$ . Vynásobme poslední rovnice jednotkovými vektory  $i, j, k$

$$a_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad / i$$

$$a_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad / j$$

$$a_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad / k,$$

(3.4)



jestliže poslední tři rovnice sečteme, dostaneme jednu Eulerovu rovnici hydrostatiky zapsanou ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{a} - \frac{1}{\rho} \text{grad}p = 0, \quad (3.5)$$

kde  $\mathbf{a}$  je výsledné zrychlení vnějšího silového pole

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z,$$

a gradient tlaku je určený vztahem

$$\text{grad}p = \mathbf{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Eulerova rovnice hydrostatiky je základní rovnicí k určení tlaků v poli tlakových sil. Z Eulerovy rovnice vyplývá, že tlak v kapalině závisí na objemových silách.

Vynásobme postupně rovnováhu sil pro jednotlivé směry přírůstkem dráhy  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$

$$\begin{aligned} a_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \quad / dx \\ a_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \quad / dy \\ a_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \quad / dz, \end{aligned} \quad (3.6)$$

rovnice sečteme a dostaneme

$$\rho(a_x dx + a_y dy + a_z dz) = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz.$$

Výraz na pravé straně rovnice je totální diferenciál

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz,$$

potom hledaná obecná diferenciální rovnice pro tlak je dána vztahem

$$dp = \rho(a_x dx + a_y dy + a_z dz). \quad (3.7)$$

Toto je obecná diferenciální rovnice tlakové funkce  $p(x, y, z)$ .

Členy v závorce jsou součiny hmotnostních sil a příslušných posunutí ve stejném směru, takže jejich fyzikální význam je práce připadající na jednotku hmotnosti. Integrací poslední diferenciální rovnice se určí tlakové funkce

$$p = \int \rho(a_x dx + a_y dy + a_z dz) = p(x, y, z). \quad (3.8)$$

### 3.3. Hladinové plochy

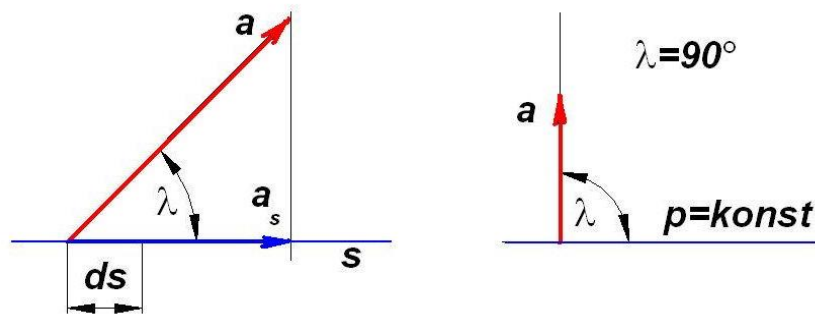
Hladinové plochy jsou místa s konstantním tlakem -  $p = \text{konst}$ . Přírůstek tlaku mezi dvěma body ležícími na stejné hladině musí být roven nule, což platí i pro soumězné body,  $dp = 0$ . Dosazením do rov. (3.7) dostaneme obecnou rovnici hladinových ploch v diferenciálním tvaru

$$a_x dx + a_y dy + a_z dz = 0. \quad (3.9)$$

Práce vnějších objemových sil při posunutí po hladinové ploše  $ds$  musí být rovna nule, proto podle obr. 2.6 platí

$$dA = \rho \cdot a \cdot \cos \lambda \cdot ds = 0,$$

odkud vyplývá, že  $\cos.\lambda = 0$ , a tedy  $\lambda = \frac{\pi}{2}$ , protože  $\rho$  a  $ds$  jsou od nuly rozdílné. Tím je dokázáno, že hladinové plochy jsou kolmé na výsledné zrychlení, tedy na výslednou hmotnostní sílu – obr. 3.4. Funkci „U“ nazýváme potenciálem intenzity objemových sil (resp. potenciálem relativního zrychlení).



Obr. 3.4 Řez soumeznými hladinovými plochami

Hladinové plochy mají v úlohách hydrostatiky velký význam, především však hladinová plocha rozhraní mezi okolním ovzduším a kapalinou.

Předpokládejme, že objemová síla  $\mathbf{a}_0$  se dá vyjádřit pomocí silového potenciálu  $U$  rovnicí

$$\mathbf{a}_0 = \text{grad}U,$$

Po rozepsání vektorů v této rovnici do složek

$$i\mathbf{a}_x + j\mathbf{a}_y + k\mathbf{a}_z = i \frac{\partial U}{\partial x} + j \frac{\partial U}{\partial y} + k \frac{\partial U}{\partial z},$$

s využitím pravidla, že dva vektory se sobě rovnají, rovnají-li se složky, potom platí

$$a_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad a_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad a_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (3.10)$$

Dosažením těchto výrazů do rovnice (3.7) dostaneme

$$dp = \rho(a_x dx + a_y dy + a_z dz) = \rho \left( \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = \rho \cdot dU,$$

z této rovnice plyne důležitý vztah

$$dU = \frac{dp}{\rho} = (a_x dx + a_y dy + a_z dz). \quad (3.11)$$

Protože  $dp = 0$ , potom na hladinové ploše je  $dU = 0 \rightarrow U = \text{konst.}$  Ze stavové rovnice dále vyplývá, že  $\rho = \text{konst.}$  a  $T = \text{konst.}$

Chceme-li stanovit tlak v bodě B, při známém tlaku v bodě A, pak integrujeme Eulerovu rovnici hydrostatiky podle křivky spojující body A a B: Je-li dána potenciální funkce  $U = U(x, y, z)$ , pak lze přírůstek tlaku stanovit snadno jako přírůstek potenciálů násobený hustotou, aniž bychom museli řešit křivkový integrál, neboť

$$\int_{p_A}^{p_B} dp = p_B - p_A = \rho \int_{U_A}^{U_B} dU = \rho(U_B - U_A).$$

Jsou-li dány složky vektoru intenzity hmotových sil

$$a_x = a_x(x, y, z), \quad a_y = a_y(x, y, z), \quad a_z = a_z(x, y, z),$$

ptáme se, zda v tomto případě existuje potenciál  $U(x, y, z)$ . Je-li  $dU$  úplným diferenciálem, pak pro smíšené derivace platí rovnice

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}.$$

Vezmeme-li v úvahu rov. ( 3.10) dostáváme pro existenci potenciálu i relativní rovnováhy tyto tři podmínky:

$$\frac{\partial a_x}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial a_y}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial y}; \quad \frac{\partial a_z}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial z}. \quad (3.12)$$

### 3.4. Hydrostatický tlak

Na kapalinu v nádobě působí z hmotnostních sil jen tíže zemská. V libovolném místě kapaliny bude tlak  $p(x, y, z)$  určen diferenciální rovnicí ( 3.7) odvozenou v předchozích odstavcích

$$dp = \rho(a_x dx + a_y dy + a_z dz).$$

Za působení jen tíže zemské je  $a_y = -g$ ,  $a_x = a_z = 0$ . Zrychlení tíže zemské je nutno dosadit se záporným znaménkem, poněvadž tíže působí opačným smyslem než je zvolený smysl osy  $y$ . Diferenciální rovnice se tedy zjednoduší

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dy,$$

a integrál je

$$p = -\rho \cdot g \cdot y + konst.$$

Integrační konstanta se určí z okrajové podmínky. Na rozhraní kapaliny je tlak ovzduší. Pro tuto hladinu platí  $y = h_0$ ,  $p = p_0$ . Dosazením do poslední rovnice se vypočte integrační konstanta:

$$p_0 = -\rho \cdot g \cdot h_0 + konst,$$

z čehož

$$konst = p_0 + \rho \cdot g \cdot h_0,$$

a hledaná závislost tlaku je

$$p = -\rho \cdot g \cdot y + p_0 + \rho \cdot g \cdot h_0 = p_0 + \rho \cdot g \cdot (h_0 - y),$$

a dosazením  $h = y_0 - y$  se dostane

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h, \quad (3.13)$$

kde  $h$  je svislá vzdálenost uvažovaného místa v kapalině od hladiny tlaku ovzduší.

Jestliže uvažovaný bod leží pod hladinou, je  $h > 0$  (kladné); když je bod výše než hladina tlaku ovzduší je  $h < 0$  (záporné). Uvedený vztah platí pro kapaliny, na něž působí tíže zemská, a to nestlačitelné, neboť při integraci byla měrná hmotnost považována za konstantu – obr. 3.5.

Tlakové hladiny v kapalině za působení tíže zemské jsou vodorovné roviny. Při odvození rovnic tlakových hladin se předpokládá, že nádoba s tekutinou není rozlehlá tak, aby bylo nutné přihlížet k zakřivení povrchu zemského. Pro nádoby s malými plochami vzhledem k zemskému povrchu se tedy předpokládá, že gravitace působí svisle dolů, a to ve všech místech nádoby. Za tohoto předpokladu je rovnice tlakových hladin

$$-g \cdot dy = 0,$$

což vyplývá z obecné diferenciální rovnice pro tlakové hladiny po dosazení hmotnostních sil uvažovaného případu  $a_y = -g$ ,  $a_x = a_z = 0$ . Integrací se dostane rovnice tlakových hladin  $g_y = konst$ , což jsou rovnice vodorovných ploch:  $y = konst$ .

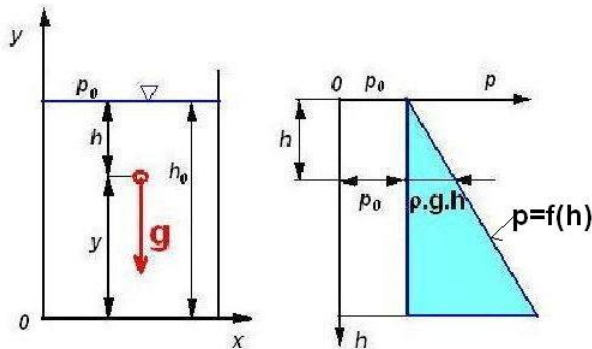
Tlak se dá vyjádřit absolutní nebo relativní hodnotou. Absolutní tlak je vztažen k absolutní nule, tj. k vakuu, zatímco relativní tlak je vztažen od smluvené hodnoty tlaku, kterým je tlak ovzduší. Platí tedy

$$p_a = p_0 + p_r,$$

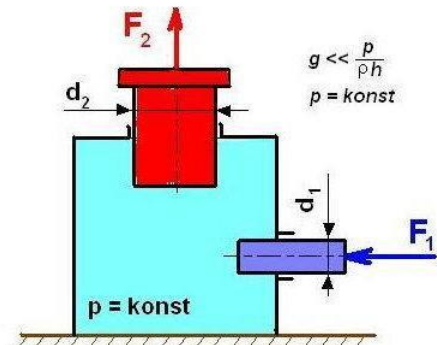
kde  $p_a$  je absolutní tlak,  $p_r$  je relativní tlak,  $p_0$  je tlak ovzduší.

Porovnáním s odvozeným výrazem  $p = p_0 + \rho gh$ , vyplývá, že je to absolutní tlak. Relativní tlak vyvolaný účinkem sloupce kapaliny je dán výrazem  $p = \rho gh$ . K označení absolutní a relativní hodnoty tlaku se nepoužívá indexů  $a$  a  $r$ , avšak je třeba údaj doplnit, o který tlak jde. Např. pro  $p = 8105$  kPa abs.;  $p = 7105$  kPa přetlak. Poněvadž tlak kapaliny závisí na výšce sloupce kapaliny a její měrné hmotnosti:  $p = \rho gh$ , lze tlak vyjádřit výškou kapalinového sloupce, tj. stanovit tlakovou výšku.

$$h = \frac{p}{\rho \cdot g} \quad (3.14)$$



Obr. 3.5 Kapalina při působení síly tíže



Obr. 3.6 Princip hydraulického lisu

### 3.5. Pascalův zákon

Beztížný stav je charakterizován hodnotou  $a = 0$ . Z rovnice (3.5) potom  $\text{grad} p = 0$  a po integraci vyplývá, že

$$p = \text{konst} \quad (3.15)$$

tj. tlak uvnitř kapaliny je všude stejný. U kapalinových kapiček to neplatí přesně, neboť se uplatní povrchové napětí.

Zvýšíme-li v určitém místě tlak, třeba na rozhraní kapaliny s jinou fází zvýší se i v celém objemu kapaliny, což je obsahem Pascalova zákona: tlak v kapalině se šíří rovnoměrně všemi směry. Tlak v celém objemu kapalin je konstantní, obecně však  $p = p(x, y, z)$ .

Toho se využívá např. u hydraulických mechanismů, zvedáků, lisů a rovněž u hydraulických servomechanismů jako je ABS u automobilů, nebo při řízení letadel, lodí raket a pod..

U hydraulického lisu malý píst vyvodí silou  $F_1$ , velký pístu pak sílu  $F_2 > F_1$ . Současně musí platit rovnováha energie, tzn., že práce vykonaná malým pístem se rovná vykonané práci velkým pístem. Malý píst vykoná dráhu  $s_1$ , velký píst pak dráhu  $s_2$ , při čemž platí, že  $s_1 > s_2$ . Pro hydraulický lis – obr. 3.6 můžeme psát

$$F_1 = p \cdot S_1 \quad ; \quad F_2 = p \cdot S_2 \quad \Rightarrow \quad F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1};$$

současně platí

$$s_1 \cdot S_1 = s_2 \cdot S_2.$$

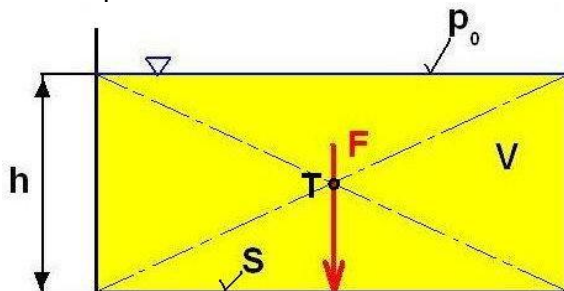
## 4. Tlakové síly

### 4.1. Vodorovné rovinné plochy

Tlak v každém bodě vodorovného dna nádoby je stejný  $p = \rho g h$  – obr. 4.1 Je tedy rovnoměrně rozložen po celé ploše a výsledná tlaková síla je rovna

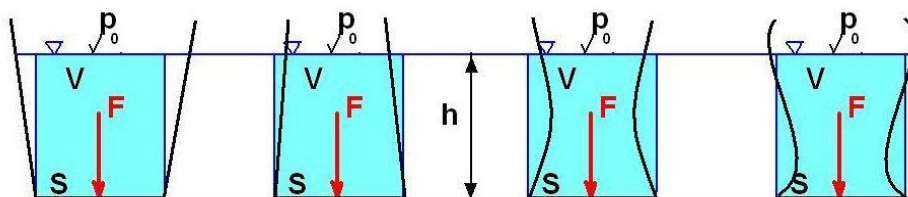
$$F = p \cdot S = \rho \cdot g \cdot h \cdot S = \rho \cdot g \cdot V \quad (4.1)$$

Tlaková síla působí kolmo na plochu.



Obr.4.1 Síla na dno vodorovné nádoby

Jestliže nádoba má boční stěny jiné než svislé – obr. 4.2, je výsledná tlaková síla na dno dána stejným výrazem, neboť svislá vzdálenost  $h$  plochy od hladiny je konstantní, a tudíž tlak na dno je  $p = \rho g h = \text{konst.}$  Podobně objem zatěžovacího obrazce uvedené definice bude

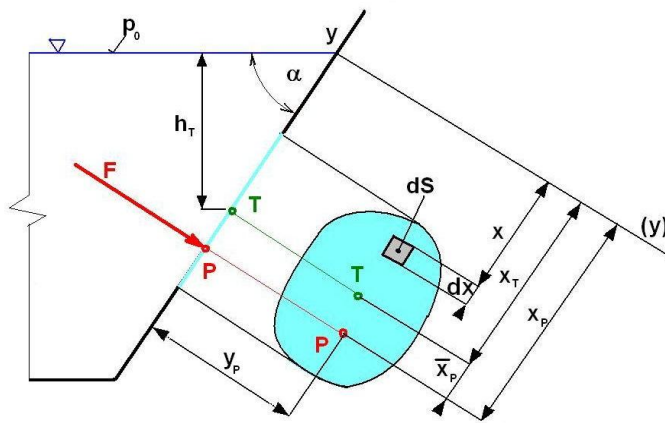


Obr.4.2 Hydrostatické paradoxon a zatěžovací obrazec

ve všech případech stejný, takže výsledná tlaková síla je rovněž stejná. Nezávisí na tvaru bočních stěn nádoby, což je hydrostatické paradoxon.

### 4.2. Šikmé rovinné plochy

Na rozdíl od vodorovných ploch je na šikmé rovinné stěně nádoby tlak proměnný – obr. 4.3. Výslednice tlakových sil se určí integrací elementární tlakové síly na plošce  $dS$ . Na zvolenou plošku  $dS$  působí tlaková síla  $dF = \rho g h dS$ .



Obr.4.3 Síla na šikmou rovinnou plochu

Pro úsečky  $h$  a  $x$  platí na celé ploše  $S$  vztah  $x = h \cdot \sin \alpha$  a po dosazení do rovnice pro tlakovou sílu je

Výslednice je pak dána integrálem

$$F = \rho \cdot g \int_S h \cdot dS = \rho \cdot g \cdot \sin \alpha \int_S x \cdot dS = \rho \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot M_y,$$

kde

$$M_y = \int_S x \cdot dS = x_T \cdot S,$$

je statický moment plochy, takže výraz pro tlakovou sílu se upraví

$$F = \rho \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot x_T \cdot S.$$

Výsledná tlaková síla na šikmou rovinnou plochu je dána vztahem

$$F = \rho \cdot g \cdot h_T \cdot S = p_T \cdot S = \rho \cdot g \cdot V. \quad (4.2)$$

V poslední rovnici je  $h_T$  svislá vzdálenost těžiště plochy  $S$  od tlakové hladiny tlaku ovzduší; podobně  $p_T$  je tlak v těžišti plochy. Tlak  $p_T$  představuje střední hodnotu tlaku na ploše  $S$ . Objem  $V$  je tzv. zatěžovací objem. Směr výslednice tlakové síly  $F$  je kolmý na plochu  $S$ , to znamená, že je totožný se směrem normály k ploše  $S$ .

Působíště  $P$  tlakové síly se dá určit početně z rovnováhy momentů. Moment elementárních tlakových sil k ose  $y$  je dán rovnicí  $dM_y = x \cdot dF$ . Výsledný moment těchto elementárních tlakových sil musí být stejný jako moment výslednice tlakové síly. Platí tedy

$$M_y = F \cdot x_p = \int_S dM_y = \int_S x \cdot dF = \rho \cdot g \cdot \sin \alpha \int_S x^2 \cdot dS = \rho \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot J_y,$$

z čehož

$$x_p = \frac{\rho \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot J_y}{F} = \frac{\rho \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot J_y}{\rho \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot M_y} = \frac{J_y}{M_y} = \frac{J_y}{x_T \cdot S}, \quad (4.3)$$

kde  $J_y$  - moment setrvačnosti plochy  $S$  k ose  $y$

$M_y$  - statický moment plochy  $S$  k ose  $y$

Podle Steinerovy věty je

$$J_y = J_T + S \cdot x_T^2,$$

takže

$$x_p = \frac{J_T + x_T^2 \cdot S}{M_y} = \frac{J_T}{x_T \cdot S} + \frac{x_T^2 \cdot S}{x_T \cdot S} = x_T + \frac{J_T}{M_y}. \quad (4.4)$$

Vzdálenost působíště  $P$  tlakové síly od těžiště  $T$  plochy je

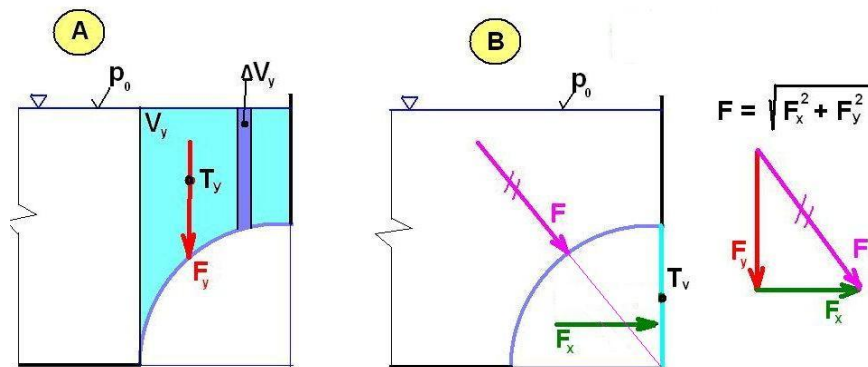
$$\bar{x}_T = x_p - x_T = \frac{J_T}{x_T \cdot S}. \quad (4.5)$$

Protože pravá strana této rovnice je vždy kladná, potom působíště  $P$  tlakové síly na šikmou rovinnou plochu leží vždy pod těžištěm plochy  $T$ .

Podobně se určí druhá souřadnice působíště tlakových sil z momentů k ose  $x$ . U praktických úloh se ve většině případů jedná o plochy symetrické, leží působíště síly na ose symetrie.

### 4.3. Tlakové síly na křivé plochy

Na křivé ploše je tlak kapaliny v libovolném místě určen výrazem  $p = \rho g h$ . Na zvolený plošný prvek působí tlaková síla  $dF = \rho \cdot g \cdot h \cdot dS$  ve směru kolmém na  $dS$ . Vektorovým součtem těchto elementárních tlakových sil po celé křivé ploše se dostane výslednice tlakové síly na křivou plochu. K integraci je zapotřebí analytického vyjádření ploch a rovněž závislost pro výšku, což vede zpravidla ke zdoluhavým výpočtům. Při výpočtu tlakových sil na křivé plochy se používají dvě metody, a to složková a metoda náhradních ploch.



Obr. 4.4 Složková metoda určení zatěžovacího obrazce

**Složková metoda** - obr. 4.4 spočívá v tom, že se určí nejdříve složky ve zvolených směrech, zpravidla svislá a vodorovná. Výsledná svislá složka tlakové síly  $F_y$  se dostane integrací – obr. 4.4A

$$F_y = \rho \cdot g \int_S dV_y = \rho \cdot g \cdot V_y. \quad (4.6)$$

Svislá složka  $F_y$  je určena tíhou zatěžovacího obrazce  $V_y$ , tento objem je vyznačen na obr. 4.4A. Působíště svislé složky tlakové síly na křivou plochu je v těžišti objemu  $V_y$  zatěžovacího obrazce.

Vodorovnou složku – obr. 4.4B tlakové síly  $F_x$  nebo  $F_z$  určíme jako síla na svislou plochu, která se dostala jako průmět křivé plochy do svislé roviny. pro výpočet těchto sil se použije metoda popsaná v předcházejícím odstavci.

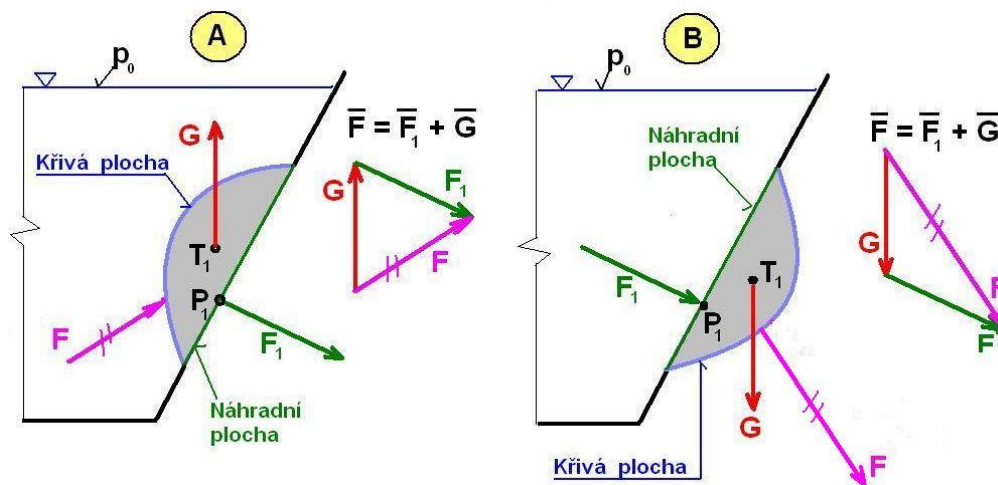
Výslednice tlakové síly může být stanovena graficky vektorový součet sil – obr. 4.4B, nebo výpočtem. Poněvadž jsou složky na sobě kolmé, platí v prostoru rovnice

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \text{ případně pro rovinnou úlohu } F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (4.7)$$

Směr výslednice tlakových sil je dán vztahem

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_y}{F_x}.$$

**Metoda náhradních ploch** – obr. 4.5 spočívá v tom, že se křivá plocha nahradí jednou nebo více rovinnými plochami, a to tak, aby s křivou plochou uzavíraly objem  $V$ . Vypočítá se tlaková síla na náhradní plochu  $F_1$ . Nahrazením křivé plochy rovinnými plochami se přidal objem kapaliny  $V$ , takže tíhový účinek tohoto objemu kapaliny je zahrnut v tlakové síle na náhradní plochu.



Obr. 4.5 Metoda náhradních ploch

Ve skutečnosti tíha kapaliny  $G = \rho g V$  nepůsobí na křivou plochu, a proto je třeba ji odečíst od výsledné tlakové síly na náhradní plochu – obr. 4.5A. V opačném případě, kdy se náhradní plochou ubral od zatěžujícího obrazce objem kapaliny  $V$ , jehož tíha působí na křivou plochu, je nutno k výslednici tlakové síly na náhradní plochu přičíst tíhový účinek kapaliny  $G$  – obr. 4.5B. Výslednice tlakové síly je dána vektorovým součtem tlakové síly na náhradní plochu  $F_1$  a tíhy  $G$  v objemu  $V$

$$F = F_1 + G. \quad (4.8)$$

Náhradní plochy je možno volit libovolné, jednu nebo více. Volí se tak, aby výpočet složek náhradních tlakových sil byl co nejjednodušší.

#### 4.4. Archimedův zákon

Na těleso ponořené do kapaliny působí obecně síly ve třech na sobě kolmých směrech, tj. např. ve svislém směru a ve dvou směrech vodorovných na sebe kolmých. Vodorovné složky tlakové síly na těleso se navzájem vyruší, pro další výpočet má význam pouze složka svislá – obr. 4.6.

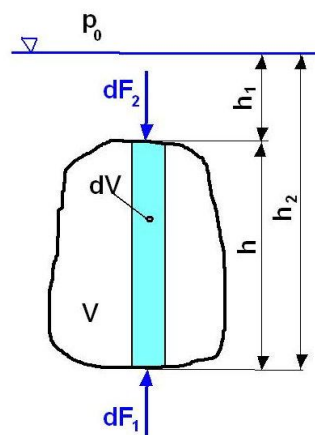
Tlaková síla kapaliny ve svislém směru na prvek tělesa o objemu  $dV$  se rovná tíze kapaliny, která je tímto elementem vytlačena.

$$dF_v = \rho \cdot g \cdot dV$$

Výsledná tlaková síla na celé těleso se dostane integrací

$$F = \int_V dF_v = \rho \cdot g \cdot V. \quad (4.9)$$

Výsledek je známý Archimedův zákon. Na těleso ponořené do kapaliny působí vztlaková síla rovná tíze kapaliny tělesem vytlačené.



Obr. 4.6 Vztlak tělesa

Na těleso ponořené do kapaliny působí dvě síly, a to vztlaková síla  $F_v$  v těžišti objemu vytlačené kapaliny, a vlastní tíha tělesa  $G$ , působící v těžišti tělesa.

Podle výslednice  $F = F_v - G$ , která působí na těleso ponořené v kapalině, mohou nastat obecně tři případy:

$G > F_v$  – tíha tělesa je větší než vztlaková síla, takže výslednice působí ve směru svislém dolů a těleso klesá ke dnu.

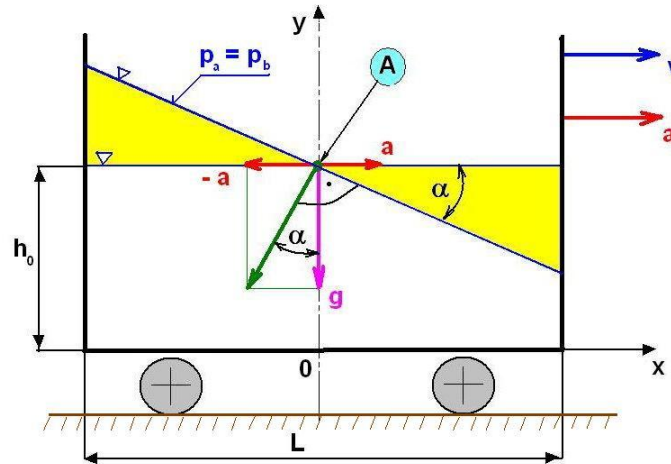
$G = F_v$  – tíha tělesa je v rovnováze se vztlakovou silou, výslednice je nulová a těleso setrvává v libovolné poloze – vznáší se v kapalině.

$G < F_v$  – vlastní tíha tělesa je menší než vztlaková síla, takže výslednice působí svisle nahoru a těleso vznáší k hladině. Vynořením tělesa se zmenší vztlaková síla až nastane rovnováha s vlastní tíhou tělesa, které plave.



## 5. Relativní pohyb kapaliny

Při pohybu nádoby s kapalinou mohou nastat případy, kdy kapalina je vůči stěnám nádoby v klidu. Na kapalinu působí další objemové síly, a to setrvačná od vlastního pohybu nádoby s kapalinou, které je nutno zahrnovat do podmínek hydrostatické rovnováhy. V dalším jsou probrány dva jednoduché příklady relativního klidu kapaliny.



Obr.5.1 Kapalina v relativním klidu, přímočarý, rovnoměrně zrychlený pohyb

### 5.1. Pohyb přímočarý, rovnoměrně zrychlený

Nádoba se s kapalinou pohybuje přímočaře rovnoměrně zrychleně ve vodorovné rovině – obr. 5.1. Na každou částku kapaliny v nádobě působí ve svislém směru tíže zemská  $a_y = -g$  a ve vodorovném směru setrvačné zrychlení  $a_x = -a$ . Zvolíme v nádobě bod, pro jednoduchost ležící zvolený bod na ose symetrie v průsečíku hladiny původní a nově vytvořené. V tomto bodě vyznačíme zrychlení, která na kapalinu působí. Diferenciální rovnice hladinových ploch je v tomto případě

$$-a \cdot dx - g \cdot dy,$$

a její integrál

$$a \cdot x + g \cdot y = konst.$$

Hladinové plochy jsou roviny skloněné, svírající s vodorovnou rovinou (kladná poloosa) úhel  $\alpha$ . Z podobnosti trojúhelníků pro úhel  $\alpha$  plyne

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g}. \quad (5.1)$$

Z posledního výrazu rovněž vyplývá, že hladinové plochy jsou kolmé na výslednici hmotnostních sil působících na kapalinu. Pro stanovení tlaku v kapalině je třeba znát aspoň v jednom místě (tj. alespoň na jedné hladinové ploše) velikost tlaku. Zpravidla jím bývá rozhraní kapaliny s ovzduším  $p = p_a = p_b = konst.$ , jehož poloha je závislá na objemu kapaliny v nádobě. Skloněním hladiny v jedné části (pravé) nádoby ubude kapalina, ve druhé (levé) zase přibude. Celková změna objemu kapaliny musí být nulová, proto úbytek a přírůstek objemu musí být stejně velký. V případech, kdy nádoba je válcová nebo má tvar hranolu se základnou symetrickou k ose kolmé na směr pohybu, protíná se rozhraní kapaliny s ovzduším v polovině délky nádoby. Poloha hladinové plochy tlaku ovzduší se tedy určí z podmínky, že objem kapaliny v nádobě je konstantní

V případě, kdy zrychlení je velké, vystoupí rozhraní kapaliny s ovzduším ( $p_a = konst$ ) nad okraj nádoby a část kapaliny vyteče z nádoby. To vyvolá klesání hladiny. Pokles hladiny ustane až hladina bude procházet hranou, přes níž kapalina začala vytékat. Hladinová plocha tlaku ovzduší prochází tedy v tomto případě místem, přes které kapalina začala vytékat.

Tlak kapaliny v libovolném místě se vypočte z diferenciální rovnice tlaková funkce, do níž se dosadí dříve uvedené podmínky  $a_x = -a$  ;  $a_y = -g$

$$dp = \rho(-a dx - g dy) \Rightarrow p = \rho(-a \cdot x - g \cdot y) + konst$$

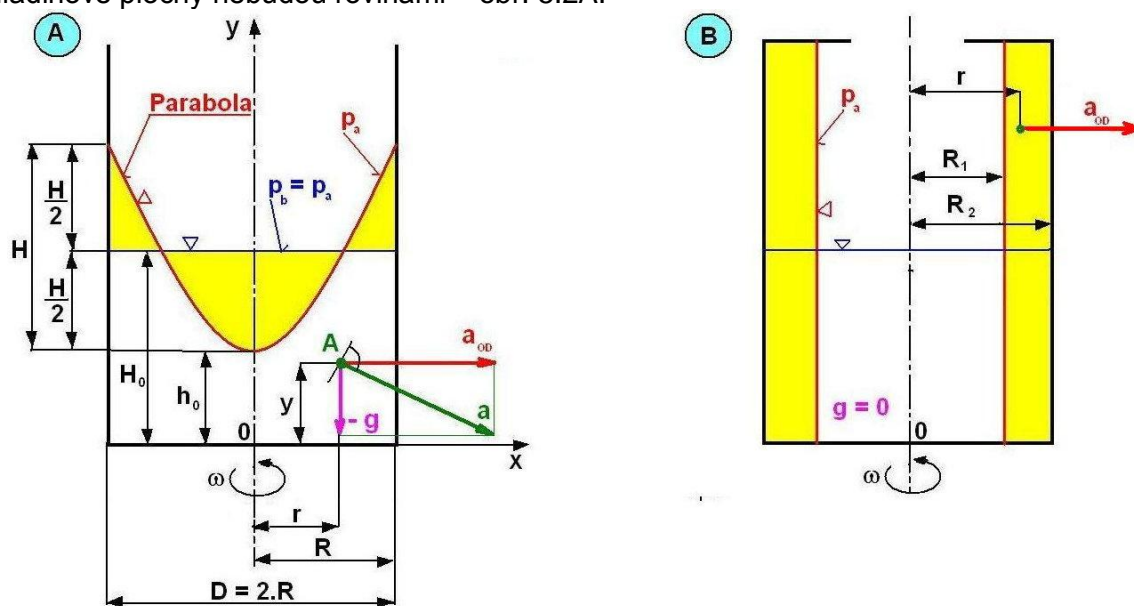
Pro zvolený počátek souřadnic (uprostřed dna nádoby) je integrační konstanta dána touto okrajovou podmínkou: v místě  $y = h_0$  ;  $x \neq 0$ , je relativní tlak  $p = 0$ ; je tedy  $konst = \rho g h_0$  a tlak v libovolném místě nádoby je určen tlakovou funkcí

$$p = \rho \cdot g \left( h_0 - y - \frac{a}{g} x \right). \quad (5.2)$$

Tento výraz je formálně shodný s tlakem v kapalině, na niž působí jen tíže zemská. Avšak veličina  $h$  je svislá vzdálenost uvažovaného bodu od hladiny tlaku ovzduší, což je skloněná rovina. Tento poznatek se dá zobecnit. Vyšetřením hladiny tlaku ovzduší (rozhraní kapaliny a ovzduší) stává se relativní klid kapaliny případem hydrostatickým, a lze proto použít všechny dříve odvozené poznatky o výpočtu tlaku, tlakové síle na plochy apod.

## 5.2. Pohyb rovnoměrný, kruhový

Válcová nádoba naplněná zčásti kapalinou se otáčí rovnoměrně kolem svislé osy. Předpokládá se, že všechny částičky kapaliny se pohybují unášivou rychlostí odpovídající poloměru, na kterém se nachází. Při otáčivém pohybu působí na každou částičku kromě tíže zemské odstředivé zrychlení ( $u = r \cdot \omega$ ). I když jde o prostorový pohyb, lze řešit tento relativní klid kapaliny v rovině, protože je stejný ve všech rovinách, které procházejí osou rotace. Odstředivé zrychlení působící na částičku kapaliny na poloměru  $r$  je  $a_{od} = r \cdot \omega^2$ . Jeho velikost se mění s poloměrem, a proto výslednice zrychlení bude na různých válcových plochách různá jak co do velikosti, tak i směru. Je snadné odhadnout, že v tomto případě hladinové plochy nebudou rovinami – obr. 5.2A.



Obr. 5.2 Relativní klid, rovnoměrné otáčení kol osy nádoby

Protože zrychlení jsou

$$a_{od} = r \cdot \omega^2; \quad a_y = -g$$

je diferenciální rovnice hladinových ploch

$$r \cdot \omega^2 \cdot dr - g \cdot dy = 0,$$

její integrál je

$$\frac{r^2 \cdot \omega^2}{2} - g \cdot y = konst.$$

K určení integrační konstanty je okrajová podmínka  $r = 0$ ,  $y = h_0$ , čili  $konst. = -gh_0$  a rovnice hladinových ploch pro zvolený počátek souřadnic je

$$\frac{r^2 \cdot \omega^2}{2} - g(y - h_0) = 0,$$

což je rovnice paraboly. Hladinové plochy jsou rotační paraboloidy. Výška paraboloidu  $H$  měřená na plášti válcové nádoby, tj. na poloměru  $r = R$  se určí z poslední rovnice

$$H = \frac{R^2 \omega^2}{2g} = \frac{u^2}{2g}. \quad (5.3)$$

Z téže rovnice se dostane výška paraboloidu  $h$  na libovolném poloměru  $r$ .

$$h = y - h_0 = \frac{r^2 \omega^2}{2g}. \quad (5.4)$$

Výška rotačního paraboloidu na určitém poloměru je rovna rychlostní výšce na tomtéž poloměru. Hladinová plocha tlaku ovzduší se určí stejně jako v předcházejícím případě. Jestliže z nádoby nemůže kapalina vytékat, musí být objem kapaliny před pohybem a za pohybu stejný. Před pohybem je v nádobě objem kapaliny  $V = SH_0$ . Za pohybu je objem  $V = S(h_0 + H) - V_p$ , kde  $V_p$  značí objem rotačního paraboloidu, který se rovná polovičnímu objemu opsaného válce,

$$V_p = \frac{1}{2} S \cdot H.$$

Z posledních rovnic vyplývá při rovnosti objemů

$$S \cdot H_0 = S(h_0 + H) - \frac{1}{2} S \cdot H \Rightarrow H_0 - h_0 = \frac{1}{2} H.$$

To znamená, že původní hladina tlaku ovzduší za klidu půl výšku paraboloidu  $H$ , představujícího novou hladinu tlaku ovzduší.

Tlak v kapalině se určí z diferenciální rovnice tlakové funkce

$$dp = \rho(r \cdot \omega^2 dr - g \cdot dy), \quad (5.5)$$

po integraci je tlaková funkce

$$p = \rho \cdot y \left( \frac{r^2 \omega^2}{2g} - y + konst \right).$$

Okrajová podmínka, která se stanoví po určení nové hladinové plochy tlaku ovzduší, pro  $r = 0$ ,  $y = h_0$  je  $p = 0$ , čili integrační konstanta je  $konst. = h_0$ . Tlaková funkce je tedy

$$p = \rho \cdot g \left( h_0 - y \frac{r^2 \omega^2}{2g} \right). \quad (5.6)$$

Může-li kapalina během pohybu zčásti vytéci z nádoby, nalezne se poloha hladinové plochy tlaku ovzduší stejně jak bylo určeno dříve: musí procházet místem, kde kapalina začala přetékat, tj. horním okrajem nádoby.

Při konstrukci odstředivek se volí otáčky odstředivky takové, aby platilo že  $a_{od} \gg g$ , potom podle obr. 5.2B hladinová plocha atmosférického tlaku z rotačního paraboloidu přejde v plochu válcovou. Aby kapalina z nádoby nevytekla, musí být v horní části opatřena límcem, který má ve středu otvor pro snadnější manipulaci s kapalinou.

Při výpočtu velikosti tlaku na válcové ploše o obecném poloměru „ $r$ “ – obr. 5.2B vyjdeme z diferenciální rovnice tlakové funkce (5.5), kde zanedbáme tíhové zrychlení  $g$

$$dp = \rho(r \cdot \omega^2 dr),$$

po integraci je tlaková funkce

$$\rho - \frac{1}{2} \rho \cdot r^2 \cdot \omega^2 dr = konst.$$

Pro okrajovou podmínku  $r = R_1 \rightarrow p = p_a$ , potom integrační konstanta má velikost

$$konst = p_a - \frac{1}{2} \rho \cdot R_1^2 \cdot \omega^2,$$

po jejím dosazení do původní rovnice pro tlakovou funkci dostaneme

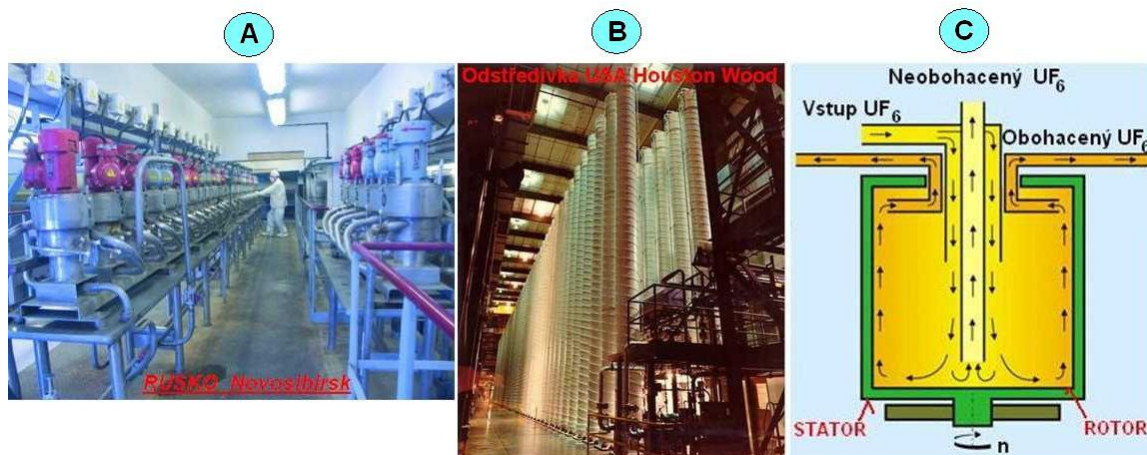
$$p = p_a + \frac{1}{2} \rho \cdot \omega^2 (r^2 - R_1^2). \quad (5.7)$$

Pro stanovení velikosti tlaku na plášti bubnu vyjdeme z podmínky, že  $r = R_2$ , po dosazení do předcházející rovnice je tlak určen vztahem

$$p = p_a + \frac{1}{2} \rho \cdot \omega^2 (R_2^2 - R_1^2). \quad (5.8)$$

V technických aplikacích je odstředivka často používané zařízení, může mít plný nebo perforovaný plášť. V odstředivkách s plnou stěnou bubnu se mohou rozdělovat usazováním suspenze nebo emulze v poli odstředivé síly. Fáze s větší hustotou vytvoří usazenu u stěny bubnu, fáze s menší hustotou vytvoří vrstvu u hladiny. Usazovací odstředivky se používají na dělení emulzí, k čištění kapalin s malým množstvím tuhých příměsí.

U filtrační odstředivky s perforovanou stěnou bubnu se suspenze dělí filtrací v poli odstředivých sil. Na vnitřním povrchu bubnu je filtrační plachetka nebo síto, tuhá fáze tvoří koláč, kapalná fáze protéká koláčem mimo prsto bubnu, odkud se odvádí. Odstředivky mohou pracovat s kontinuálním nebo přerušovaným provozem.



Obr. 5.3 Odstředivka pro obohacování uranu

Užití odstředivek je vedle v průmyslových aplikacích, užíváno v laboratořích, v medicíně a pod. Odstředivky se využívají také pro obohacování uranu, v tomto případě se uran obohacuje nepřímo přes plyn  $UF_6$ . Aby obohacování bylo efektivní a výkonné, řadí se odstředivky do kaskády, u reálných zařízení na obohacování uranu je počet odstředivek i několik desítek tisíc. Následující obrázek – obr.5.3A ukazuje sadu odstředivek pro obohacování uranu v Novosibirsku, obr. 5.3B v USA a obr. 5.3C pak ukazuje schéma kontinuálně pracující plynové odstředivky.

## Hydrodynamika

Hydrodynamika se zabývá pohybem kapalin neboli prouděním. Hydrodynamika v užším smyslu slova řeší teoreticky proudění kapalin matematickými metodami. Aplikovaná hydrodynamika přihlíží více na skutečné poměry, opírá se o výsledky experimentálních prací a využívá teoretické poznatky a je nazývána též hydraulikou.

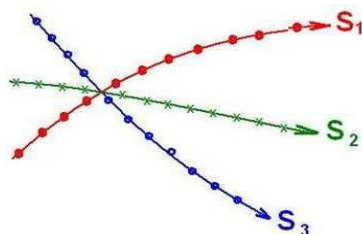
### 6. Klasifikace proudění a základní pojmy

#### 6.1. Základní pojmy

Proudění se vyšetřuje v prostoru, rovině nebo po křivce buď sledováním pohybu určité částice kapaliny jako hmotného bodu, nebo se sleduje celý proud v určitém časovém okamžiku.

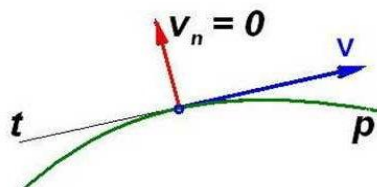
Dráha neboli trajektorie je obecně čarou, kterou probíhá částice tekutiny. Za ustáleného proudění se dráhy částic nemění s časem, zatím co u neustáleného proudění mohou být v každém časovém okamžiku odlišné – obr.6.1.

**A** Dráha částice pro neustálené proudění



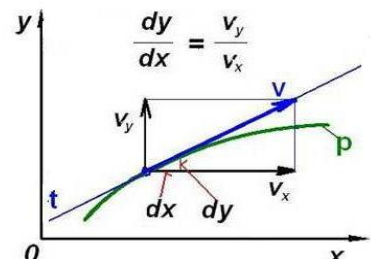
Obr. 6.1 Dráha částice

**B** Proudnice



Obr. 6.2 Proudnice

**C** Proudnice a složky rychlosti

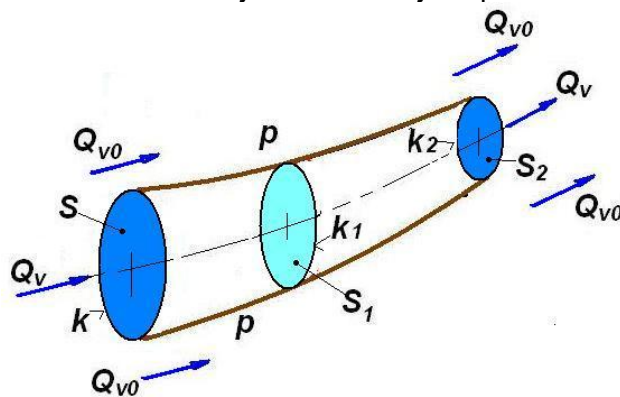


Obr. 6.3 Složky rychlosti

Proudnice p obr. 6.2 jsou obálkou vektorů rychlostí a jejich tečny udávají směr vektoru rychlosti. U neustáleného proudění vytvářejí proudnice různé částice a nejsou totožné s drahami částic. U ustáleného proudění se nemění rychlosti s časem, a proto mají proudnice stále stejný tvar a jsou totožné s drahami částic. Matematické vyšetření proudnice je možné řešením diferenciální rovnice, která vyplývá z podobnosti trojúhelníků složek rychlosti a elementárních drah ve směru příslušných os obr. 6.3

$$dx : dy : dz = v_x : v_y : v_z. \quad (6.1)$$

Proudová trubice je tvořena svazkem proudnic, které procházejí zvolenou uzavřenou křivkou k. Plášť proudové trubice má stejné vlastnosti jako proudnice – obr. 6.4.



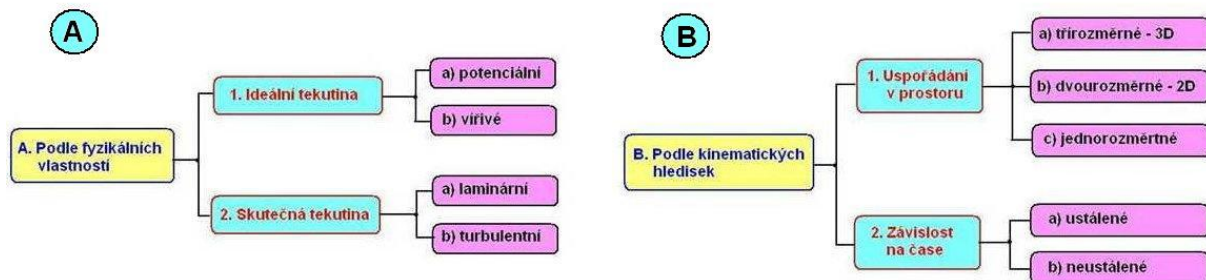
Obr.6.4 Proudová trubice



Protože směr rychlosti je dán tečnami k proudnicím, je v každém bodě pláště proudové trubice normálová složka rychlosti nulová  $v_n=0$ . Nemůže tedy žádná částice projít proudovou trubicí. Proudová trubice rozděluje prostorové proudové pole na dvě části. Jednu tvoří vnitřek proudové trubice. Částice tekutiny nemohou přetékat z jedné části proudového pole do druhého, a proto platí, že všechny částice protékající průřezem  $S$  proudové trubice, musí protékat libovolnými průřezy  $S_1$ ,  $S_2$ , též proudové trubice. Jestliže průřez proudové trubice  $S \rightarrow 0$ , dostane se proudové vlákno. Proudová trubice představuje pomyslné potrubí.

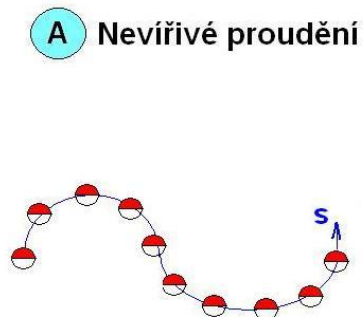
## 6.2. Rozdělení proudění

Proudění kapalin je možno rozdělit podle několika hledisek – obr. 6.5

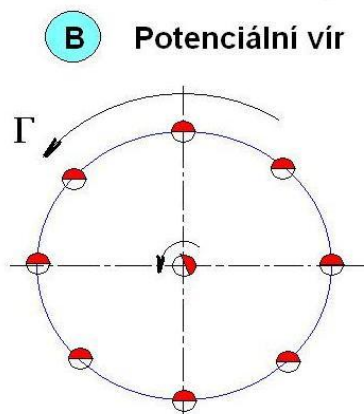


Obr. 6.5 Rozdělení proudění

Schématicky je potenciální proudění (nevířivé) uvedeno na – obr. 6.6A – částice se pohybují přímočaře nebo křivočaře po dráhách tak, že vůči pozorovateli se neotáčejí kolem vlastní osy. Natočení částice na křivé dráze je kompenzováno stejně velkým natočením částice kolem vlastní osy, ale v opačném smyslu. Mezi potenciální proudění patří rovněž potenciální vír, u něhož částice krouží kolem vírového vlákna potenciálně s výjimkou částice, která tvoří vlákno - obr. 6.6B. Vířivé proudění – částice se vůči pozorovateli natáčejí kolem vlastních os – obr. 6.7

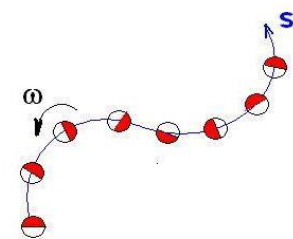


Obr.6.6 Potenciální proudění



Obr.6.6 Potenciální proudění

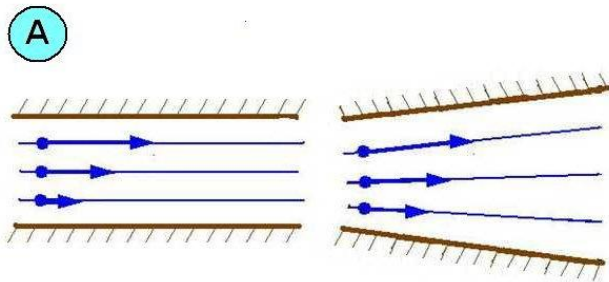
### Vířivé proudění



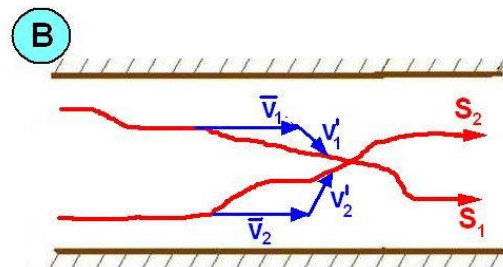
Obr.6.7 Vířivé proudění

Při laminárním proudění – se částice pohybují ve vrstvách (deskách), aniž se přemísťují po průřezu – obr. 6.8. U turbulentního proudění, kde částice mají kromě postupné rychlosti turbulentní (flukтуаční) rychlost, již se přemísťují po průřezu.- obr. 6.9.

Proudění ustálené (stacionární), které je nezávislé na čase  $v \neq v(t)$ ;  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ , naopak neustálené proudění (nestacionární), u něhož veličiny jsou závislé na čase –  $v = v(x,y,z,t)$ ;  $v = v(s,t)$ ;  $v = v(t)$ .



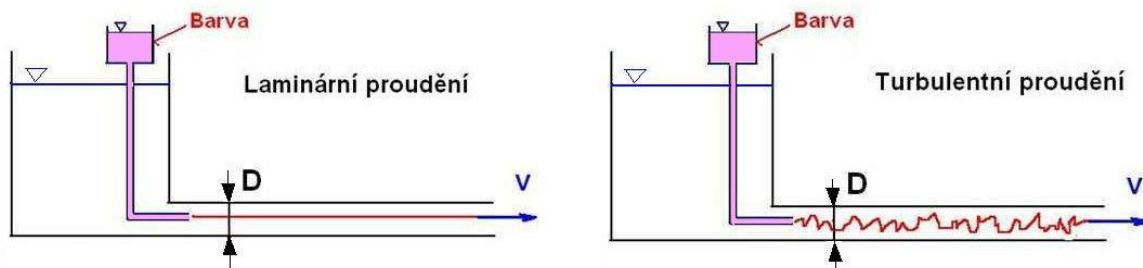
Obr.6.8 Laminární proudění



Obr.6.9 Turbulentní proudění

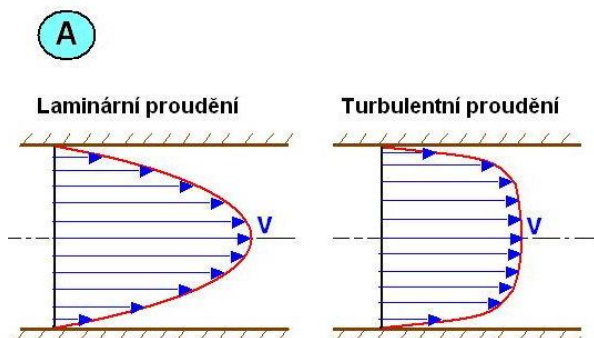
### 6.3. Druhy proudění skutečných tekutin

Jak již bylo uvedeno dříve, skutečná tekutina může proudit buď laminárně nebo turbulentně. Existenci obou proudění názorně ukazuje Reynoldsův pokus – obr. 6.10. Do proudící tekutiny v kruhovém potrubí se přivádí tenkou trubičkou obarvená tekutina. Při malých rychlostech proudu zůstane barevné vlákno neporušeno, z čehož vyplývá, že pohyb se děje ve vrstvách a částice tekutiny se nepromíchávají.

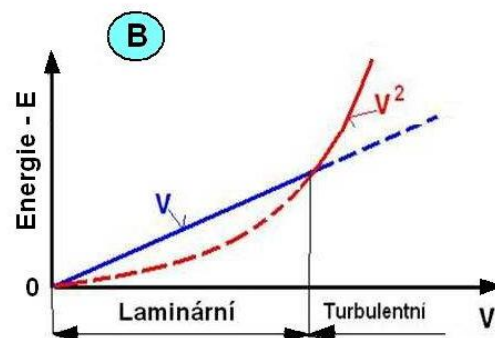


Obr. 6.10. Reynoldsův pokus

Zvětší-li se rychlost nad její kritickou hodnotu, dochází k intenzivnímu míšení částic následkem jejich podružných (turbulentních) pohybů ve všech směrech. Částice tekutiny neustále přecházejí z jedné vrstvy do druhé, přičemž dochází k výměně kinetické energie a jejich rychlosti po průřezu se značně vyrovnávají. Takové proudění je turbulentní. Protože při přemístění částic dochází též ke změně hybnosti, což se projevuje brzdícím účinkem, bude výsledný odpor proti pohybu větší než odpovídá smykovému napětí od vazkosti při laminárním proudění.



Obr. 6.11 Rychlostní profil v potrubí

Obr. 6.12 Závislost  $E = f(v)$ 

Oba druhy proudění se liší jak rychlostním profilem tak i velikostí hydraulických ztrát. U laminárního proudění v potrubí je rychlostní profil rotační paraboloid. U turbulentního proudění se rychlosti částic vyrovnávají intenzivním přemístěním spojeným s výměnou

kinetické energie. Rychlostní profil turbulentního proudu v potrubí se proto více podobá obdélníku, a to tím více, čím větší je turbulence, tj. čím větší je Re číslo – obr. 6.11.

U laminárního proudění je hydraulický odpor proti pohybu lineárně závislý na rychlosti, u turbulentního proudění je závislý na druhé mocnině rychlosti – obr. 6.12.

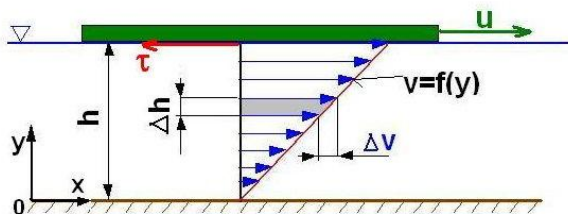
Poměry, při níž dochází ke kvalitativním změnám rychlostního profilu a závislosti odporu, tj. při přechodu laminárního proudění v turbulentní, jsou pro určité potrubí a tekutiny dány kritickou rychlostí. Z pokusů i teorie podobnosti vyplývá, že přechod laminárního proudění v turbulentní je určeno Reynoldsovým kritickým číslem. Reynoldsovo číslo jak bude odvozeno v kap. 18 je definováno vztahem  $Re = \frac{vd}{\nu}$ , kde  $v$  je střední rychlost tekutiny,  $d$  je

charakteristický rozměr (např. při proudění v potrubí jeho průměr),  $\nu$  je kinematická vazkost proudící tekutiny. Pro proudění v kruhovém potrubí kritická hodnota Reynoldsova čísla je  $Re = 2320$ .

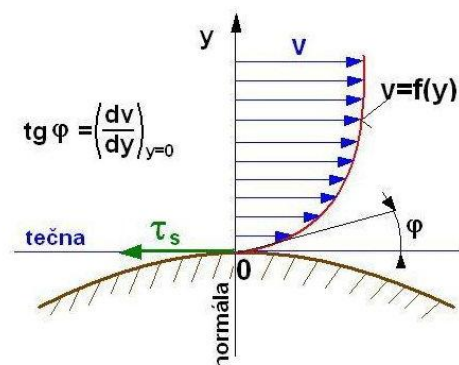
Při proudění skutečné tekutiny mezi dvěma rovinnými deskami (obr. 6.13) z nichž jedna se pohybuje rychlostí  $u$  a druhá stojí, mají částice lpící na povrchu desek jejich rychlosti. To znamená, že na pohybující se desce má částice kapaliny rychlost  $u$ , zatímco na stojící je rychlost částice nulová. Pro ostatní částice kapaliny, které proudí v mezeře mezi deskami, jsou rychlosti rozloženy lineárně. Pohybující se částice strhává sousední částice do pohybu v důsledku vazkého tření. Rychlost částice ve vzdálenosti  $y$  od stojící desky bude  $v = u \frac{y}{h}$ .

Smykové napětí od vazkosti je podle Newtona vyjádřeno vztahem

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy} = \eta \frac{u}{h} \quad (6.2)$$



Obr. 6.13 Rozložení rychlosti při laminárním proudění mezi dvěma deskami



Obr. 6.14 Rychlostní profil a tečné napětí

Třecí síla  $F_t$ , kterou působí vazká kapalina na desku o ploše  $S$ , a kterou je nutno při pohybu desky překonat, je určena vztahem  $F_t = S \cdot \tau_s$ . V obecném případě je rychlost tekutiny určena funkcí  $v = v(y)$ , a smykové napětí v libovolné vzdálenosti od stěny Newtonovým výrazem. Grafické znázornění průběhu rychlosti  $v = v(y)$  je rychlostním profilem - obr. 6.13.

Účinek vazké kapaliny na obtékané plochy je závislý na velikosti smykového napětí na obtékané stěně, jeho velikost je dána vztahem

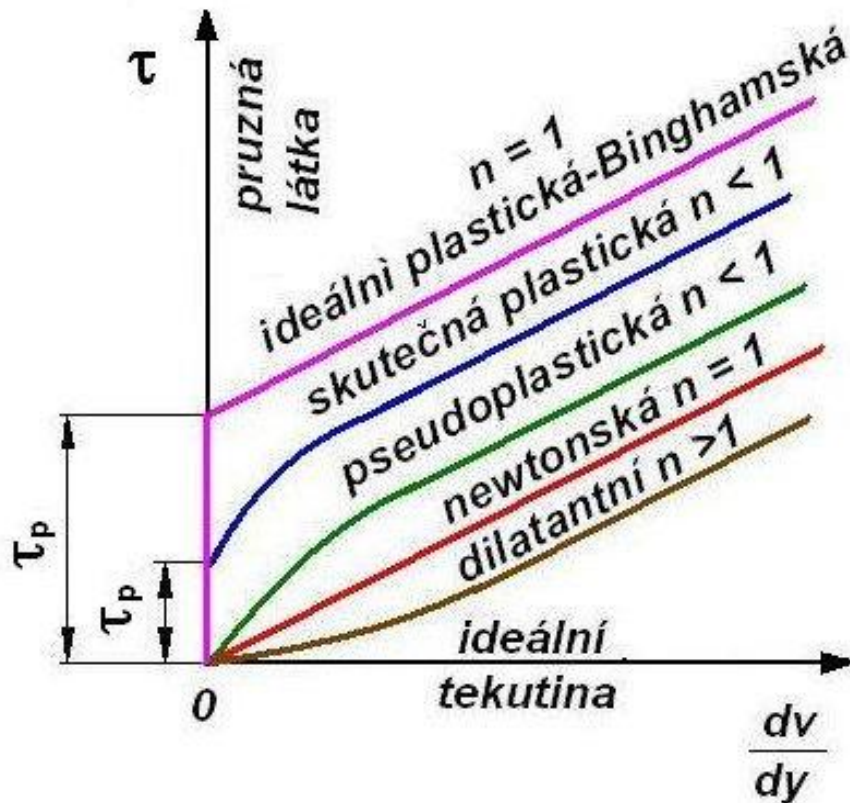
$$\tau_s = \eta \left( \frac{dv}{dy} \right)_{y=0}$$

Derivace, nazývaná také gradient rychlosti

$$\left( \frac{dv}{dy} \right)_{y=0}$$



je směrnici tečny k rychlostnímu profilu na obtékaném povrchu – obr. 6.14. Při tomto proudění se předpokládá, že nekonečně tenké vrstvy kapaliny klouzají jedna po druhé, takže se pohybují ve vrstvách – laminárně (lamina-vrstva).



Obr.6.15. Reologické vlastnosti kapalin

Závislost smykového napětí  $\tau$  v závislosti na gradientu rychlosti v kolmém směru na pohyb je vyjádřena v grafu  $\tau = f\left(\frac{dv}{dy}\right)$  - obr. 6.15. Sklon udává dynamickou viskozitu tekutiny.

Všechny tekutiny, které vyhovují Newtonovu zákonu viskozity, se nazývají newtonské. V technické praxi se dosti často vyskytují látky, jejichž závislost smykového napětí na gradientu rychlosti se nedá vyjádřit Newtonovým vztahem. Říká se jim nenewtonské kapaliny či anomální a jejich reologické vlastnosti jsou vyjádřeny grafem nebo jsou popsány matematickými modely.

## 7. Proudění ideální tekutiny

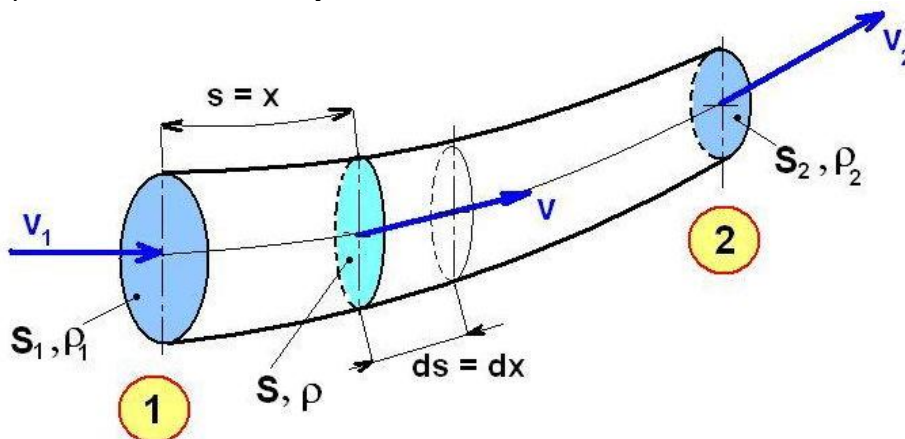
Mechanika tekutin stejně jako klasická mechanika hmotného bodu vychází ze tří základních principů a to zákona zachování hmoty (rovnice spojitosti), hybnosti (Eulerova rovnice hydrostatika a hydrodynamiky) a energie (Bernoulliho rovnice). Proto se často v literatuře tyto rovnice označují jako zákony zachování. Tyto rovnice jsou ještě doplněny hybnostní větou.

### 7.1. Rovnice kontinuity – spojitosti

Rovnice kontinuity, často nazývaná také rovnice spojitosti, vyjadřuje obecný fyzikální zákon o zachování hmotnosti. Pro kontrolní objem, kterým proudí kapalina, musí být hmotnost tekutiny konstantní, a tedy její celková změna nulová. U kontrolního objemu mohou vzniknout dvě změny hmotnosti, a to lokální v kontrolním objemu samém (tekutina se stlačuje nebo rozpíná) a konvektivní změna hmotnosti, způsobená rozdílem v přitéklé a vyteklé hmotnosti z kontrolního objemu. Obě změny musí dávat nulovou změnu hmotnosti, což je možné jen tehdy, když jsou obě dílčí změny stejně velké, ale opačného znaménka, tj. jedna znamená zvětšení a druhá zmenšení hmotnosti. Rovnici kontinuity je možné definovat také tak, že rozdíl vstupující hmotnosti do kontrolního objemu a vystupující hmotnosti z kontrolního objemu je roven hmotnosti, která se v tomto kontrolním objemu akumuluje. V technické praxi se nejčastěji vyskytují případy jednorozměrného proudění, méně časté je pak proudění rovinné či prostorové.

#### Rovnice kontinuity pro jednorozměrné proudění

Uvažuje se jednorozměrné neustálené proudění stlačitelné tekutiny proudovou trubicí s proměnným průřezem - obr.7.1. Na ní vyznačíme elementární část ohraničenou vstupním průřezem  $S_1$  a elementární délkou  $ds$ . Elementární kontrolní objem tvoří váleček, jehož základnami protéká tekutina. Plášť kontrolního objemu je tvořen proudnicemi, a proto tok touto částí kontrolní plochy je nulový, neboť platí  $v_n = 0$  na celém plášti. Rozložení rychlosti po průřezu proudové trubice uvažujeme rovnoměrné.



Obr. 7.1 Průtočný průřez a rychlost

Při nerovnoměrném rozložení rychlosti po průřezu uvažujeme její střední rychlost. Na dráze  $ds$  se původní rychlost  $v$  změnila na velikost  $(v + \frac{\partial v}{\partial s} ds)$ , podobně se změnila i hustota  $(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial s} ds)$  a průřez proudové trubice  $(S + \frac{\partial S}{\partial s} ds)$ . Hmotnost kapaliny, která přiteče do kontrolního objemu za čas  $dt$ , je určena vztahem

$$dm_{s1} = \rho \cdot S \cdot v \cdot dt.$$

Hmotnost kapaliny, která vyteče z kontrolního objemu za čas  $dt$  druhou základnou válečku, tj. ve vzdálenosti  $ds$ , je

$$dm_{s2} = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial s} ds\right) \left(S + \frac{\partial S}{\partial s} ds\right) \left(v + \frac{\partial v}{\partial s} ds\right) dt = \rho S v dt + \frac{\partial}{\partial s} (\rho S v dt) ds.$$

Rozdíl přitéklé a odtéklé hmotnosti z elementárního objemu je konvektivní změna hmotnosti v čase  $dt$ , která je určena vztahem

$$\Delta(dm_s) = dm_{s2} - dm_{s1} = \frac{\partial}{\partial s} (\rho S v dt) ds.$$

Při odvození tohoto výrazu byly zanedbány součiny diferenciálů vyšších řádů a bylo uplatněno pravidlo pro derivování součinu.

Na počátku sledovaných změn hmotnosti je v kontrolním objemu hmotnost

$$dm_{t1} = \rho S ds.$$

Tato hmotnost tekutiny v kontrolním objemu za čas  $dt$  se změní. Protože se jedná o lokální změnu, pro její velikost platí vztah

$$\Delta(dm_t) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho S v) dt.$$

Pro splnění zákona o zachování hmotnosti ( $m = konst.$ ) musí být celková změna hmotnosti  $dm$  nulová, proto platí

$$\Delta(dm) = \Delta(dm_s) + \Delta(dm_t) = \frac{\partial}{\partial s} (\rho S v dt) ds + \frac{\partial}{\partial t} (\rho S ds) dt = 0.$$

V obecném případě jednorozměrného proudění tekutiny se předpokládá stlačitelná tekutina  $\rho = \rho(s, t)$ , proměnný průřez proudové trubice  $S = S(s, t)$  (např. pružná trubice, proudění v kanálech apod.) a neustálené proudění  $v = v(s, t)$ .

Protože časová změna  $dt$  a posunutí  $ds$  nejsou na sobě závislé ( $s, t$  jsou nezávisle proměnné), upraví se poslední rovnice takto

$$\frac{\partial}{\partial s} (\rho S v) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho S) = 0. \quad (7.1)$$

Toto je obecná rovnice kontinuity pro jednorozměrné proudění. Pro tuhé potrubí platí  $S = S(s)$  a rovnice (7.1) se dále upraví

$$\frac{\partial}{\partial s} (\rho S v) + S \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (7.2)$$

Další zjednodušení rovnice je pro ustálené proudění, kdy platí  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ . V tomto případě je hustota, průřez a rychlost jen funkcí souřadnice „ $s$ “ a rovnice kontinuity se zjednoduší

$$\frac{\partial}{\partial s} (\rho S v) = \frac{d}{ds} (\rho S v) = 0.$$

Po integraci platí pro jednu a tutéž proudovou trubici

$$Q_{m1} = \rho S v = konst \Rightarrow \rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2. \quad (7.3)$$

Veličina  $Q_m$  je hmotnostní průtok, udává hmotnost tekutiny proteklou za jednotku času –  $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Pro nestlačitelné kapaliny je hustota konstantní ( $\rho = \text{konst}$ ), takže rovnice se zjednoduší na známý tvar

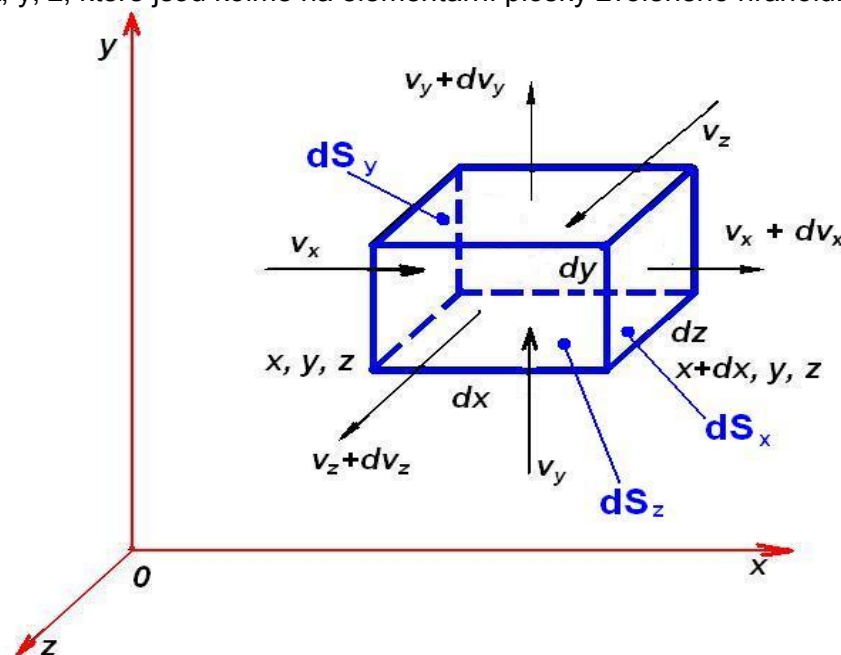
$$Q_v = S \cdot v = \text{konst} \Rightarrow S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 \quad (7.4)$$

Veličina  $Q_v$  je objemový průtok, tj. objem kapaliny proteklý za jednotku času –  $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . Při nerovnoměrném rozložení rychlosti po průřezu se dosazují do rovnice kontinuity střední rychlosti podle průtoku, určené vztahem

$$v_s = \frac{1}{S} \int_S v dS.$$

### Rovnice kontinuity pro prostorové proudění

Při odvození rovnice kontinuity pro prostorové proudění se vytkne v proudovém poli tekutiny kontrolní oblast ve tvaru hranolku o stranách  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , jehož objem je  $dV = dx dy dz$  obr.7.2. Tímto hranolem protéká tekutina rychlostí, jež má složky ve směru tří souřadných os  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , které jsou kolmé na elementární plošky zvoleného hranolu.



Obr.7.2 Elementární kontrolní objem

Změny hmotnosti při průchodu elementárním kontrolním objemem se vyšetří postupně ve směrech os  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Plochy hranolku jimiž protéká kapalina ve směru osy  $x$ , jsou stejné, a to  $dS_x = dy dz$ . Tekutina o hustotě  $\rho$  vtéká do hranolku z levé strany rychlostí  $v_x$  a

vytéká z něho na pravé straně o hustotě  $\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx\right)$  a rychlostí  $\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx\right)$ .

Přiteče tedy do hranolku za čas  $dt$  ve směru osy  $x$  hmotnost tekutiny

$$dm_{sx1} = \rho v_x dS_x dt,$$

a vyteče

$$dm_{sx2} = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx\right) \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx\right) dS_x dt = \rho v_x dS_x dt + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x dS_x dt) dx.$$

Rozdíl přiteklé a vyteklé hmotnosti kapaliny z hranolu ve směru osy  $x$  je

$$\Delta(dm_{sx}) = dm_{sx2} - dm_{sx1} = \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x dS_x dt) dx = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dV dt,$$

což platí za předpokladu, že průřez  $dS_x$  nezávisí na souřadnici  $x$ . Při odvozování tohoto výrazu byly zanedbány diferenciály vyšších řádů a bylo užití pravidlo pro derivování součinu. Obdobné výrazy se dostanou pro průtok tekutiny ve směru os  $y$ ,  $z$ :

$$\Delta(dm_{sy}) = \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dV dt ; \quad \Delta(dm_{sz}) = \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} dV dt,$$

takže rozdíl přiteklé a vyteklé hmotnosti tekutiny všemi plochami kontrolního hranolku je dán součtem

$$\Delta(dm_s) = \Delta(dm_{sx}) + \Delta(dm_{sy}) + \Delta(dm_{sz}) = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dV dt + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dV dt + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} dV dt$$

Je-li hmotnost tekutiny v elementárním objemu (hranolu)  $dm_t = \rho \cdot dV$ , potom za čas  $dt$  se tato hmotnost změní a tato změna je

$$\Delta(dm_t) = \frac{\partial(dm)}{\partial t} dt = \frac{\partial(\rho)}{\partial t} dV dt.$$

Jak již bylo řečeno, musí být celková změna hmotnosti v kontrolním objemu rovna nule

$$\Delta(dm) = \Delta(dm_s) + \Delta(dm_t) = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dV dt + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dV dt + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} dV dt + \frac{\partial(\rho)}{\partial t} dV dt = 0.$$

Po krácení výrazem  $dV \cdot dt$  se dostane rovnice

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho)}{\partial t} = 0. \quad (7.5)$$

To je obecná rovnice kontinuity pro neustálené prostorové proudění stlačitelné tekutiny. Protože platí

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i},$$

dá se rovnice kontinuity přepsat na vektorový tvar

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (7.6)$$

Stejná rovnice zapsaná ve složkovém - tenzorovém zápisu má tvar

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (7.7)$$

Takto vyjádřená rovnice kontinuity platí v pevném kontrolním objemu, který se vzhledem ke zvolenému pravoúhlému souřadnému systému  $x$ ,  $y$ ,  $z$  nepohybuje. Při ustáleném proudění se nemění veličiny v čase, proto musí být  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  a uvedená rovnice spojitosti se zjednoduší

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (7.8)$$

Tato rovnice platí pro proudění stlačitelné tekutiny v prostoru.

Další zjednodušení se dostane u nestlačitelných kapalin ( $\rho = \text{konst.}$ ). Rovnice kontinuity je pak vyjádřena vztahem

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (7.9)$$

Stejná rovnice zapsaná ve složkovém - tenzorovém zápisu má tvar

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (7.10)$$

Rovnice kontinuity se upravuje i do jiného tvaru. Za tím účelem rozepíšeme derivace ve výrazu pro divergenci a dostaneme

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z + \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} .$$

Dále napíšeme substancionální derivaci hustoty podle času

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z .$$

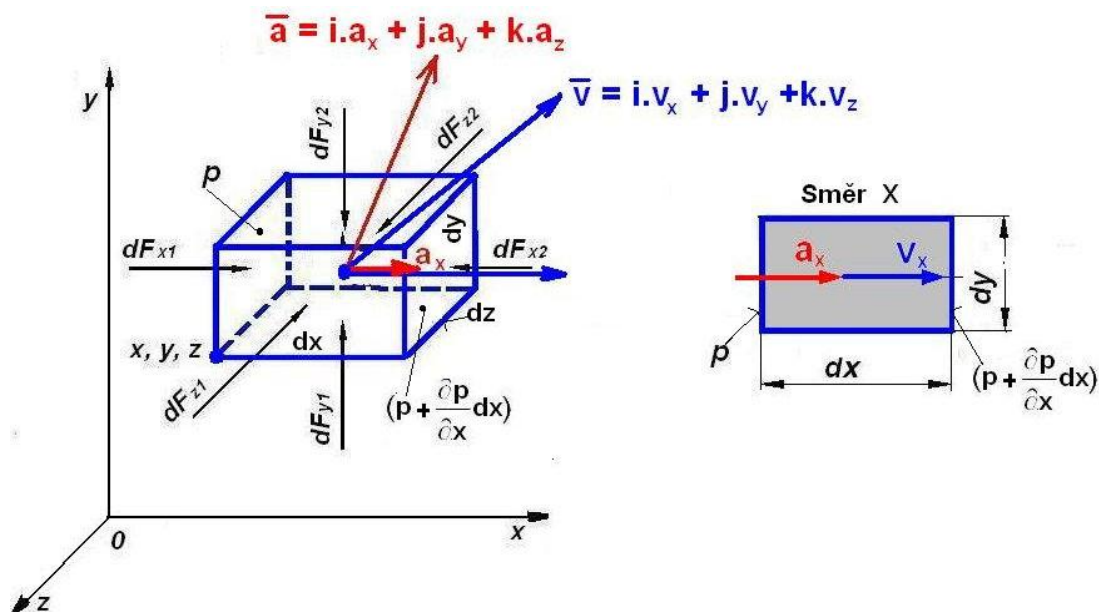
Rovnice kontinuity (7.6) s využitím posledních dvou výrazů se dále upraví

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 . \quad (7.11)$$

Toto je druhý tvar rovnice spojitosti pro neustálené prostorové proudění stlačitelné tekutiny, tedy případ, kdy se kontrolní objem vzhledem ke zvolenému souřadnému systému  $x, y, z$  pohybuje.

## 7.2. Eulerova rovnice hydrodynamiky

Eulerova rovnice hydrodynamiky vyjadřuje rovnováhu sil hmotnostních (objemových), které působí na tekutinu z vnějšku, tlakových (působících v tekutině) a setrvačných od vlastního pohybu částic dokonalé tekutiny.



Obr. 7.3 Elementární hranolky k odvození Eulerovy rovnice hydrodynamiky

V proudící skutečné tekutině vznikají vedle normálových napětí, tj. tlaků, i tečná napětí, a to všude tam, kde se tekutina nepohybuje jako tuhé těleso a dochází tedy k deformaci částic tekutiny, tj. částice se vůči sobě posouvají. Zanedbáme-li tato tečná napětí vzhledem k tlakům, hovoříme pak o proudění dokonalé (ideální) tekutiny (tj. model tekutiny s nulovou viskozitou).

V proudu dokonalé tekutiny zvolíme elementární objem  $dV$  ve tvaru hranolku – obr. 7.3 o stranách  $dx, dy, dz$ . Na tento objem tekutiny působí stejně jako v hydrostatice tlaková díla  $dF_p$  a vnější objemová síla  $dF_o$ . Podle Newtonova zákona výslednice těchto sil se rovná setrvačné síle

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{F}_o + \mathbf{F}_p . \quad (7.12)$$

V kapitole 3 pro sílu tlakovou a hmotnostní pro 1 kg hmotnosti byly odvozeny tyto výrazy:

$$\mathbf{F}_p = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p .$$

$$\mathbf{F}_o = \mathbf{a}_0$$

Setrvačná síla pohybující se částice pro 1 kg tekutiny je

$$\mathbf{F}_s = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} .$$

Dosadíme-li výše uvedené výrazy pro síly do rovnice (7.23), bude rovnováha sil

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{a}_0 - \frac{1}{\rho} \text{grad } p . \quad (7.13)$$

Substanciální derivaci  $D\mathbf{v}/Dt$  je možné upravit takto:

Rychlost  $\mathbf{v}$  je obecně funkcí polohy částice a času, tedy  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ . Její diferenciál je

$$D\mathbf{v} \equiv d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} dz + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt ,$$

dělíme-li tuto rovnici diferenciálem času  $dt$  dostaneme rovnici pro zrychlení částice tekutiny

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \frac{dt}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} v_z + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} .$$

První tři členy představují konvektivní zrychlení a je možno je vyjádřit pomocí gradientu jako skalární součin rychlosti  $\mathbf{v}$  a jejího gradientu, neboť platí

$$\mathbf{v} \text{grad } \mathbf{v} = (\mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y + \mathbf{k}v_z) \left( \mathbf{i} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} v_z .$$

Člen  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  představuje lokální (místní) zrychlení.

Eulerova rovnice hydrodynamiky má pak tvar

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \text{grad } \mathbf{v} = \mathbf{a}_0 - \frac{1}{\rho} \text{grad } p . \quad (7.14)$$

Stejná rovnice uvedená v tenzorovém zápise je

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = a_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} . \quad (7.15)$$

Tuto pohybovou rovnici dokonalých tekutin odvodil poprvé Leonard Euler v r. 1755.

Rozepsáním poslední rovnice pro složky ve směru os  $x$ ,  $y$  a  $z$  se dostanou tyto rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z &= a_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z &= a_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} . \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z &= a_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (7.16)$$

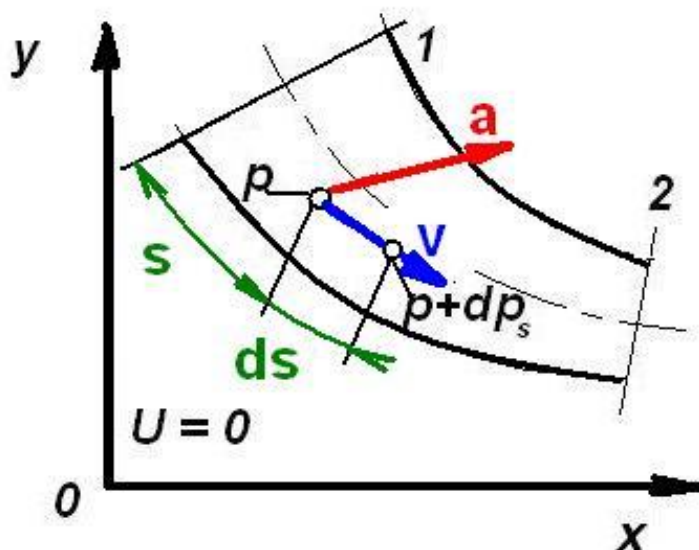
V rozepsaných Eulerových rovnicích hydrodynamiky je celkem pět neznámých, a to složky rychlosti  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ , hustota  $\rho$  a tlak  $p$ . K určení pěti neznámých je třeba pěti rovnic, z nichž tři

jsou Eulerovy rovnice (pro tři směry os) a dalšími rovnicemi jsou rovnice kontinuity a stavová rovnice  $\rho = f(p)$  u stlačitelné tekutiny, popřípadě u nestlačitelné tekutiny je  $\rho = \text{konst.}$  Všech pět uvedených veličin závisí na poloze proudící částice tekutiny a na čase. Pro určení soustavy rovnic je třeba zadat okrajové a počáteční podmínky.

Eulerova rovnice hydrodynamiky je nelineární parciální diferenciální rovnice 1. řádu, její integrace je obtížná i časově náročná, v současné době se řeší numericky. Eulerova rovnice hydrodynamiky slouží např. k odvození Bernoulliho rovnice.

### 7.3. Bernoulliho rovnice pro dokonalou tekutinu

Při proudění dokonalé tekutiny působí na její částice síly, které při posunutí po elementární dráze  $ds$  konají elementární práci (obr. 7.4). Sečtením těchto elementárních prací na konečné délce po proudnici, tj. integrací, získá se vztah prací neboli energií proudící tekutiny. Aby bylo možno provést integraci, předpokládá se, že vnější hmotnostní síla na jednotku hmotnosti (neboli vnější zrychlení), které působí na proudící tekutinu, je potenciální.



Obr. 7.4 Elementární práce při proudění dokonalé tekutiny

Protože vnější objemové zrychlení „ $a_0$ “ a potenciál  $U$  jsou vázány vztahem

$$\mathbf{a}_0 = \text{grad}U ,$$

potom po rozepsání vektorů v předcházející rovnici dostaneme

$$\mathbf{a}_0 = \text{grad}U = i a_x + j a_y + k a_z = \mathbf{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial U}{\partial z} ,$$

odkud pro složky vektoru objemového zrychlení „ $a_0$ “ platí

$$a_x = \frac{\partial U}{\partial x} , \quad a_y = \frac{\partial U}{\partial y} , \quad a_z = \frac{\partial U}{\partial z} ,$$

kde  $U$  je potenciál vnějších sil (na jednotku hmotnosti).

Z předcházející rovnice plyne, že vnější objemové zrychlení je funkcí polohy a není funkcí času. Vynásobíme-li dále Eulerovu rovnice hydrodynamiky (7.14) skalárně vektorem dráhy (posunutí)

$$ds = i dx + j dy + k dz ,$$

dostane se rovnice pro elementární práci ve tvaru



$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\mathbf{s} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \mathbf{v} d\mathbf{s} = \operatorname{grad} U d\mathbf{s} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p d\mathbf{s}. \quad (7.17)$$

Pro další úpravu této rovnice odvodíme velikost skalárního součinu gradientu potenciálu  $U$  a diferenciálu dráhy  $d\mathbf{s}$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} U d\mathbf{s} &= \left( \mathbf{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz) = \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU \end{aligned}$$

Podobně pro ostatní veličiny platí

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p d\mathbf{s} = \frac{dp}{\rho}; \quad \mathbf{v} \operatorname{grad} \mathbf{v} d\mathbf{s} = \mathbf{v} dv.$$

Dosazením výše uvedených výrazů do rov. (7.17) a po integraci

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\mathbf{s} + \int_1^2 \mathbf{v} dv = \int_1^2 dU - \int_1^2 \frac{dp}{\rho},$$

pro libovolný průřez proudové trubice je

$$\frac{v^2}{2} + P - U + \int_1^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\mathbf{s} = \text{konst}. \quad (7.18)$$

Tato rovnice platí pro neustálené proudění, a to pro určitý časový okamžik. Konstanta má obecně v každém čase jinou hodnotu.

Pro ustálené proudění se poslední rovnice zjednoduší, protože  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$ . Integrál Eulerovy rovnice hydrodynamiky po celé délce proudnice má v tomto případě tvar

$$\frac{v^2}{2} + P - U = \text{konst}, \quad (7.19)$$

což je základní Bernoulliho rovnice pro dokonalou tekutinu.

Veličina  $P$  je tlaková funkce, kterou určíme integrací výrazu  $\int \frac{dp}{\rho}$ , když známe stavovou změnu a její rovnici  $\rho = f(p)$ . Pro nestlačitelnou kapalinu je  $\rho = \text{konst.}$  a tlaková funkce

$$P = \frac{p}{\rho} + \text{konst.}$$

Působí-li na tekutinu jen tíhové zrychlení, je vnější zrychlení  $a_y = -g$ . Znaménko záporné je uvedeno proto, že kladný smysl zvolené osy je opačný než smysl působení tíhového zrychlení. Příslušný potenciál silového pole (pro tíhové zrychlení) je tedy

$$a_y = \frac{\partial U}{\partial y} = -g.$$

Potenciál tíhové síly je funkcí jen jedné proměnné  $U = U(y)$ , pak platí

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{dU}{dy}, \quad \text{neboli} \quad dU = -g dy.$$

Integrací se určí potenciální funkce

$$U = -g \cdot y + konst = -g \cdot h + konst .$$

Pro nestlačitelnou kapalinu za působení tíhového zrychlení a pro ustálené proudění po dosazení předcházejícího vztahu do rov. (7.19) je Bernoulliho rovnice vyjádřena vztahem

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh = konst. \quad (7.20)$$

Tato rovnice představuje zákon zachování energie:

první člen  $\frac{v^2}{2}$  je měrná kinetická energie ,

druhý člen  $\frac{p}{\rho}$  odpovídá měrné tlakové energii,

třetí člen  $g \cdot h$  je roven polohové energii hmotnostní jednotky kapaliny.

Součet kinetické, tlakové, a polohové energie představuje celkovou mechanickou energii proudící tekutiny. Energie vztažené na jednotku hmotnosti se nazývají měrné energie

$$e = \frac{E}{m} .$$

Jestliže se rovnice (7.20) dělí tíhovým zrychlením  $g$ , dostane se další často používaný tvar Bernoulliho rovnice, kde každý člen má rozměr metr

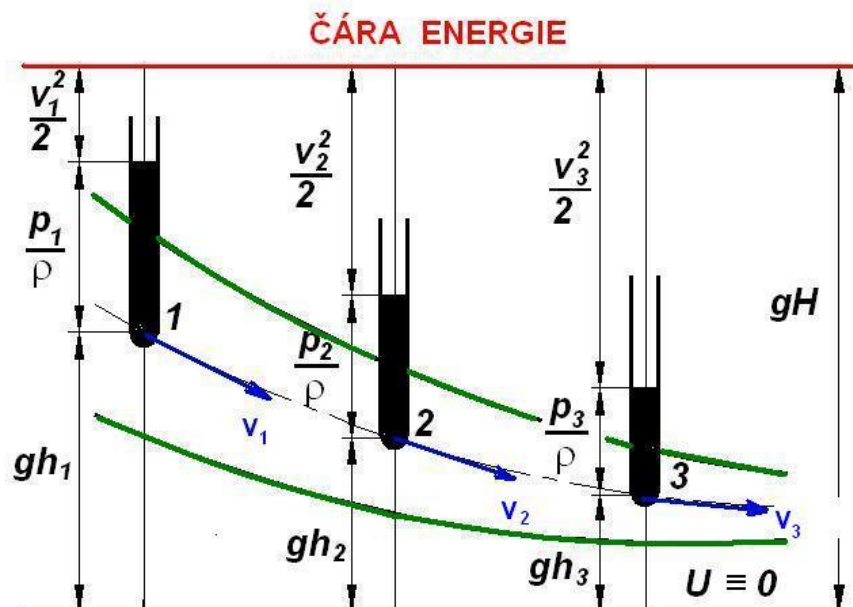
$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + h = konst . \quad (7.21)$$

Tuto rovnici uvedl poprvé v roce 1738 Daniel Bernoulli. Každý člen rovnice (7.34) představuje energii vztaženou na tíhovou jednotku tekutiny a formálně má rozměr výšky. První člen je znám jako rychlostní výška, druhý člen je tlaková výška a třetí určuje polohovou (potenciální) výšku.

Vynásobí-li se rovnice (7.20) součinem  $\rho g$ , dostane se

$$\rho \frac{v^2}{2} + p + \rho gh = konst, \quad (7.22)$$

kde každý člen rovnice představuje tlak (kinetický, statický a polohový).



Obr. 7.5 Grafické znázornění Bernoulliho rovnice

Součet všech energií, tj. kinetické, tlakové a polohové je celková mechanická energie kapaliny, která podle Bernoulliho rovnice je v každém průřezu jedné a téže trubice konstantní. Bernoulliho rovnice vyjadřuje zákon o zachování energie při proudění dokonalé tekutiny za působení tíhového zrychlení - obr. 7.5.

Jednotlivé členy rovnice je možno znázornit jako úsečky. Součet výšek od libovolně zvolené vodorovné roviny určuje v diagramu čáru mechanické energie a je roven konstantě v Bernoulliho rovnici (7.20).

Bernoulliho rovnici je možné zapsat pro dva průřezy na proudové trubici

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gh_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gh_2 = gH = Y = konst. \quad (7.23)$$

kde  $Y$  je celková měrná energie proudící tekutiny.

Bernoulliho rovnice platí pro proudovou trubici, v jejích průřezech je rychlost rovnoměrně rozložena. Při nerovnoměrném rozložení rychlosti je nutno volit proudovou trubici velmi malých průřezů, aby rozdíl rychlostí po průřezu proudové trubice byl zanedbatelný. Jinak je nutno přihlížet k nerovnoměrnému průběhu rychlosti, což vyjadřuje střední rychlost podle kinetické energie.

Do Bernoulliho rovnic je možno dosadit absolutní tlaky nebo relativní tlaky, avšak na obě strany rovnice shodně. Budiž znovu zdůrazněno, že rovnice (7.20) až (7.23) platí pro dokonalou kapalinu, tedy bez vnitřního tření a nestlačitelnou. Bernoulliho rovnice pro dokonalou kapalinu psaná pro dva průřezy jedné a téže proudové trubice obsahuje šest veličin:  $p_1, v_1, h_1, p_2, v_2, h_2$ . Hustota kapaliny  $\rho$  se považuje za známou. Aby se pomocí Bernoulliho rovnice určily parametry proudění, musí být počet neznámých a počet rovnic stejný. Při řešení nejjednoduššího případu lze tedy z Bernoulliho rovnice vypočítat jednu neznámou. Ostatní veličiny musí být známé. To je důležité pro praktické použití Bernoulliho rovnice, neboť v proudové trubici se musí nalézt jeden průřez, v němž jsou všechny veličiny ( $p_1, v_1, h_1$ ) známé. Druhý průřez je nutno volit v téže proudové trubici tam, kde je hledaná veličina (např. rychlost  $v_2$ ) a ostatní veličiny ( $p_2, h_2$ ) jsou známé. Při této volbě průřezů proudové trubice lze vypočítat neznámou veličinu. Bude-li více neznámých veličin, je nutno použít rovnici kontinuity, popřípadě další Bernoulliho rovnici pro jiný úsek proudové trubice.

Polohová (potenciální) energie proudu kapaliny se určuje k libovolně zvolené vodorovné rovině. Zpravidla se volí ekvipotenciální plocha nulového potenciálu ( $U = 0$ ) tak, aby procházela níže položeným průřezem. Jeho výška je pak nulová. Pro body nad rovinou  $U = 0$  je polohová výška kladná (pro body pod rovinou  $U = 0$  je záporná).

Pro praktické použití Bernoulliho rovnice pro dokonalou kapalinu je možno shrnout postup do těchto tří pravidel:

1. V proudové trubici se zvolí dva průřezy. V jednom průřezu je nutno znát všechny veličiny ( $p_1, v_1, h_1$ ). Druhý průřez se volí v proudové trubici v místě, kde je hledaná veličina, přičemž ostatní dvě veličiny jsou známé.
2. Rozhodne se o způsobu dosazování tlaků, a to jejich absolutní nebo relativní hodnoty, avšak do jedné a téže rovnice se dosazují oba tlaky shodně.
3. Zvolí se libovolná vodorovná rovina, která se považuje za ekvipotenciální plochu nulového potenciálu. Zpravidla se volí tak, aby procházela jedním z vybraných průřezů, a to nejčastěji níže položeným. Polohové výšky se určí ke zvolené vodorovné rovině.

Nyní se napíše Bernoulliho rovnice a vypočte neznámá veličina.

#### 7.4. Bernoulliho rovnice pro stlačitelný plyn

Pro plyny, které mají v porovnání s kapalinami malou hustotu, převládá tlaková a kinetická energie, polohová energie se dá vůči nim zanedbat. U plynů je nutno určit tlakovou energii s přihlédnutím ke stlačitelnosti tekutiny. Pro rychlé děje je nejbližší adiabatická změna, při níž nedochází k výměně tepla tekutiny s okolím.

Stavová rovnice adiabatické změny

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \text{konst} = C; \quad p = C\rho^\kappa, \quad (7.24)$$

se diferencuje

$$dp = \kappa \cdot C\rho^{\kappa-1} d\rho,$$

a dosadí do tlakové funkce

$$P = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \kappa C \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^{\kappa-1} d\rho = \frac{\kappa}{\kappa-1} C\rho^{\kappa-1} \Big|_1^2 = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} \Big|_1^2.$$

Bernoulliho rovnice pro adiabatické proudění dokonalého plynu po integraci a jednoduché úpravě pak je

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_2}{\rho_2} = \text{konst} \quad (7.25)$$

Pomocí stavové rovnice  $\frac{p}{\rho} = rT$  se předcházející rovnice upraví na tvar

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} rT_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} rT_2, \quad \text{nebo} \quad \frac{v_1^2}{2} + i_1 = \frac{v_2^2}{2} + i_2 \quad (7.26)$$

Zavede-li se dále rychlost zvuku

$$a^2 = \kappa \cdot r \cdot T,$$

potom Bernoulliho rovnice nabývá další tvar

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{\kappa-1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{a_2^2}{\kappa-1} = \text{konst} \quad (7.27)$$

## 7.5. Věta o změně hybnosti

Vedle bilance hmotnosti, to je rovnice kontinuity a bilance energie pro 1 kg proudící kapaliny – Bernoulliho rovnice, lze určit ještě impulsovou větu – větu o změně hybnosti. V inženýrské praxi se s výhodou používá všude tam, kde se sleduje jen výsledný silový účinek tekutiny na stěnu pevného tělesa. Její aplikace na celou řadu případů bude uvedena dále.

Odvození impulsové věty je následující.

Změna hybnosti  $\int_{v_2}^{v_1} m dv$  je rovna impulsu síly  $\int_{t_2}^{t_1} F dt$ , což je známo z mechaniky

$$\int_0^t F dt = \int_{v_1}^{v_2} m dv. \quad (7.28)$$

Pro konstantní sílu ( $F = \text{konst.}$ ) a hmotnost ( $m = \text{konst.}$ ) se dostane po integraci

$$F \cdot t = m(v_2 - v_1) = m \Delta v.$$

Úpravou této rovnice (dělením  $t$ ) se získá rovnice

$$F = \frac{m}{t} \Delta v = Q_m \Delta v = Q_m (v_2 - v_1) = H_2 - H_1 = \Delta H, \quad (7.29)$$

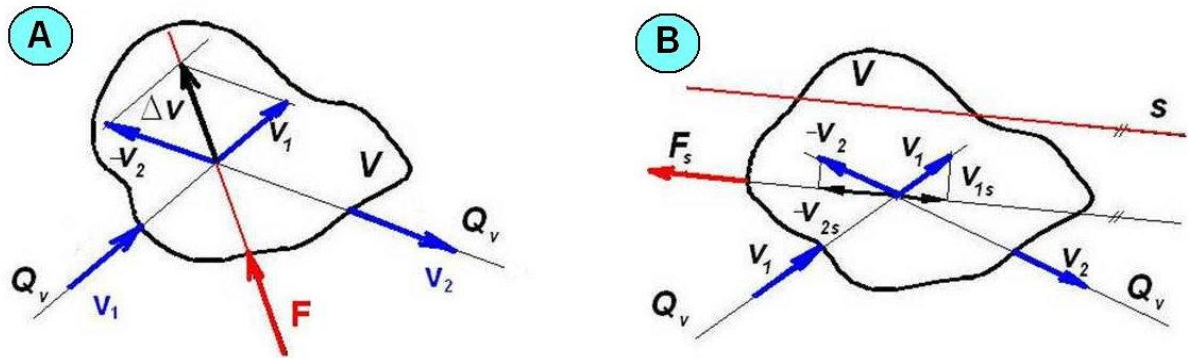
kteřá slouží k výpočtu sil (reakce), kterými působí obtékané plochy na proud kapaliny. Součin  $H = Q_m \cdot v$  je průtoková hybnost. Síla  $F$  vyvolaná proudící kapalinou (akce) je rovna změně průtokové hybnosti  $H_2 - H_1$ .

Kapalina, která vtéká do kontrolního objemu  $V$  rychlostí  $v_1$  a vytéká z něho rychlostí  $v_2$  vyvolá při průtoku  $Q$  sílu  $F$  - obr. 7.6A.

Pro výpočet složky síly ve směru  $s$  platí hybnostní věta – obr. 7.6B

$$F = Q_m \Delta v_s = Q_m (v_{1s} - v_{2s}) = \Delta H_s, \quad (7.30)$$

kde  $v_{1s}, v_{2s}$  jsou složky rychlostí  $v_1, v_2$  do směru  $s$



Obr. 7.6 Věta o změně hybnosti při interakci proudů kapaliny s tělesem

Hybnostní věta v hydromechanice slouží k výpočtu sil, které by bylo nutno určit integrací z Eulerových rovnic hydrodynamiky. Pro určení silové rovnováhy proudu tekutiny je v obecnějším případě tlakovou sílu zapotřebí stanovit integrací přes celou hranici kontrolní oblasti

$$F_p = \int_S p dS,$$

kde  $p$  je tlak působící na hranici kontrolní oblasti

Do celkové silové rovnováhy je v obecném případě zapotřebí zahrnout i tíhu tekutiny nebo i tíhu zařízení (potrubí) a pod. Příkladem aplikace hybností v hydrodynamice je výpočet silových účinků paprsků kapalin na desky a tělesa.

## 8. Proudění vazké tekutiny

### 8.1. Navierova-Stokesova rovnice

Rovnováha sil při proudění skutečné tekutiny je vyjádřena Navierovými-Stokesovými rovnicemi. Kromě sil vnějších, tlakových a setrvačných spojených s vlastním pohybem částic tekutiny, přistupují u skutečné tekutiny třecí síly, které jsou způsobeny viskozitou tekutiny. Pro matematické vyjádření třecích sil se použije Newtonův vztah

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy}. \quad (8.1)$$

Rovnováha sil při proudění skutečné tekutiny lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_t. \quad (8.2)$$

Při vzájemném pohybu částic vznikají ve skutečné tekutině tečná napětí, která způsobují úhlovou deformaci částic. Na elementární objem skutečné tekutiny v podobě hranolku o stranách  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  působí na jeho plochách smyková i normálová napětí – obr. 8.1.

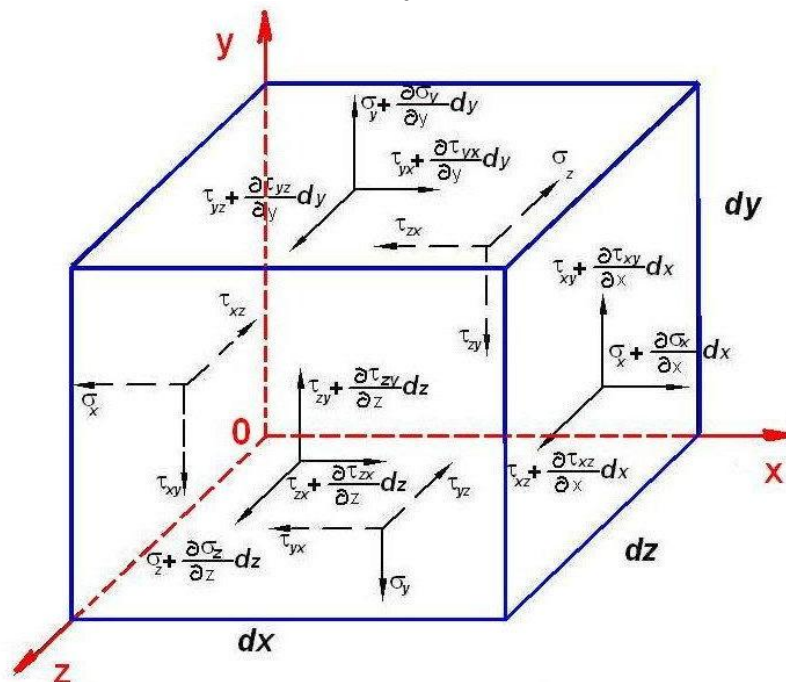
Stanoví-li se rovnováha všech sil působících na elementární objem, dostane se Navierova-Stokesova rovnice, která ve vektorovém zápise pro nestlačitelnou tekutinu v pravouhlém souřadném systému má tvar

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v} = \mathbf{a}_0 - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (8.3)$$

V této rovnici je výraz  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  tzv. lokální (místní) derivace, která není závislá na přemísťování

tekutiny. Výraz  $\mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v}$  je tzv. konvektivní člen (konvektivní derivace), závisí na tom, jak rychle se částice tekutiny přemísťují. Výše uvedený výraz má také tu vlastnost, že je nelineární, což přináší potíže při integraci Navierovy-Stokesovy rovnice. Poslední výraz  $\nu \Delta \mathbf{v}$  je tzv. vazký člen, který představuje třecí sílu, která v tekutině při proudění vzniká v důsledku viskozity tekutiny.

Při řešení proudového pole se zpravidla určuje rozložení rychlostí a tlaků. Vedle pohybové rovnice (8.3) se uplatní i rovnice spjitosti.



Obr. 8.1 Napětí na elementárním objemu tekutiny

Rovnice Navierova-Stokesova spolu s rovnicí spjitosti tvoří uzavřenou soustavu parciálních diferenciálních rovnic ve kterých jsou čtyři neznámé veličiny, tj. tři složky rychlosti

$v_x, v_y, v_z$  a tlak  $p$ . Pro řešení těchto rovnic musí být známy vnější zrychlení  $\mathbf{a}_0$ , hustota tekutiny  $\rho$ , okrajové a počáteční podmínky.

Navierovy-Stokesovy rovnice patří mezi nelineární parciální diferenciální rovnice a nejsou proto obecně řešitelné. Pro stacionární proudění má rovnice eliptický charakter, pro nestacionární proudění vzhledem k času má charakter parabolický. Existuje jen několik málo jednoduchých případů, kdy lze Navierovy-Stokesovy rovnice řešit exaktně. Analytické řešení je dostupné jen pro jednodušší případy laminárního proudění, např. Poiseuillovo proudění v kruhovém potrubí, nebo Couettovo proudění v mezeře mezi pevnou a pohybující se stěnou. V obou případech se jedná o takové proudění, kdy se z nějakého důvodu zanedbá nelineární konvektivní člen. Řešení Navierovy-Stokesovy rovnice pro malé Reynoldsova čísla  $Re$  vede na Stokesovo nebo Oseenovo proudění, do této kategorie patří také již zmíněné Poiseuillovo nebo Couettovo proudění. Pro velká Reynoldsova čísla zavedl Prandtl při řešení Navierovy-Stokesovy rovnice pojem mezní vrstva, tato přiléhá k obtékanému povrchu a uplatňuje se v ní vliv viskozity, naopak za mezní vrstvou vliv viskozity je již malý a proudění je možno považovat za potenciální.

Když v Navierově-Stokesově rovnici zanedbáme vazký člen  $\nu \Delta \mathbf{v}$ , potom dostaneme tzv. Eulerovu rovnici hydrodynamiky, která v případě že zanedbáme setrvačnou sílu přejde dále v Eulerovu rovnici hydrostatiky.

V současné době i složité případy laminárního proudění jsou řešitelné numerickými metodami např. metodou konečných objemů (metoda sítí).

## 8.2. Bernoulliho rovnice pro skutečnou kapalinu

Rovnováha sil při proudění skutečných kapalin je vyjádřena Navierovou-Stokesovou rovnicí

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \mathbf{v} = \mathbf{a}_0 - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (8.4)$$

Vynásobíme-li tuto rovnici skalárně vektorem dráhy  $d\mathbf{s} = i dx + j dy + k dz$  a za předpokladu že  $\mathbf{a}_0 = \operatorname{grad} U$ , rovnice energie má tvar

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\mathbf{s} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{a}_0 \cdot d\mathbf{s} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \cdot d\mathbf{s} + \nu \Delta \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}.$$

Její integraci obdržíme pro ustálené proudění, kdy  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$  Bernoulliho rovnici pro skutečnou tekutinu

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U + \int_1^2 \nu \cdot \Delta \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \text{konst} \quad (8.5)$$

Výraz

$$\int_1^2 \nu \cdot \Delta \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = e_z$$

představuje práci třecích sil na jednotku hmotnosti proudící tekutiny, což je tzv. rozptýlená (disipovaná) měrná energie, nebo též měrná ztrátová energie spotřebovaná na překonání hydraulických odporů na úseku 1 – 2 proudové trubice. Tato měrná ztrátová energie zmenšuje mechanickou energii (tlakovou + kinetickou + polohovou) kapaliny a mění se v teplo, což představuje tzv. disipaci.

Bernoulliho rovnice pro proudění skutečné kapaliny, na kterou působí pouze tíhové zrychlení -  $U = -g \cdot h$  má tedy tvar

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2 + e_z. \quad (8.6)$$

Měrná ztrátová energie  $e_z$  se může vyjádřit jako násobek energie kinetické, tlakové nebo polohové (potenciální)

$$e_z = \zeta \frac{v^2}{2} = \frac{p_z}{\rho} = g \cdot h_z. \quad (8.7)$$

Srovnáním uvedených vztahů se dostane

$$p_z = \rho g h_z = \zeta \frac{v^2}{2} \rho. \quad (8.8)$$

Poslední rovnice vyjadřuje hydraulický odpor tlakovým rozdílem  $p_z$  kterému se tradičně říká tlaková ztráta. Podobně veličina  $h_z$ , je označena jako ztrátová výška i když nejde o ztrátu, ale nežádanou přeměnu mechanické energie v tepelnou ( tzv. disipaci). Obě veličiny  $h_z$ , a  $p_z$  jsou mírou rozptýlené (ztrátové) energie. Součinitel  $\zeta$  je ztrátový součinitel a závisí na druhu hydraulického odporu či ztráty.

Bernoulliho rovnice pro skutečnou kapalinu psaná pro průřezy 1 a 2 proudové trubice (obr.8.2) pomocí měrné ztrátové energie  $e_z = g h_z$  je

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g h_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g h_2 + g h_z. \quad (8.9)$$

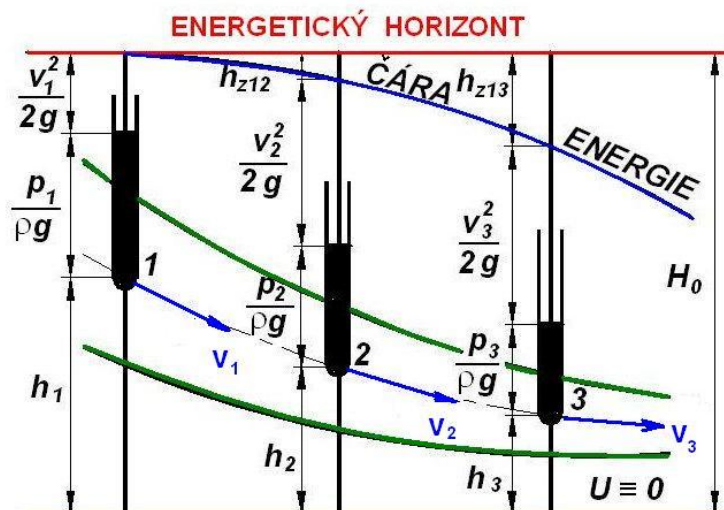
Tato rovnice po dělení gravitačním zrychlením nabude často používaný tvar

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + h_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + h_2 + h_z, \quad (8.10)$$

každý člen této rovnice má rozměr délky- m.

Kapalina proudí od průřezu 1 k průřezu 2. Ztrátová výška  $h_z$  zahrnuje všechny hydraulické ztráty na úseku mezi průřezy 1-2.

Podobně jako při proudění dokonalé tekutiny je možné znázornit graficky také Bernoulliho rovnici- rov. (8.10) pro skutečnou tekutinu. Odečtením ztrátové energie pro jednotlivé průřezy od konstanty Bernoulliho rovnice  $H_0$  se určí mechanická energie kapaliny, tj. součet tlakové, kinetické a polohové energie v uvažovaných průřezích, která je znázorněna v obr. 8.2 příslušnou úsečkou. Rozdíl mezi čarou celkové energie (energetický horizont) a čarou mechanické energie představuje rozptýlenou (ztrátovou) energii. V tepelně izolované proudové trubici se veškerá rozptýlená energie jako tepelná předává tekutině, čímž vzrůstá její vnitřní energie a stoupá teplota tekutiny.



Obr. 8.2 Bernoulliho rovnice pro skutečnou tekutinu

Člen se ztrátovou výškou v rovnici (8.9) narušuje symetrii rovnice. Pro správné napsání Bernoulliho rovnice pro skutečnou kapalinu je třeba se řídit rovněž třemi pravidly (kap. 7.3), k nimž přibývá další:

4. měrná ztrátová energie  $e_z = g \cdot h_z$  zahrnuje součet všech hydraulických ztrát na úseku mezi průřezy 1 až 2, pro něž se píše Bernoulliho rovnice, a přičte se na té straně rovnice, která platí pro průřez proudové trubice ve směru proudění vzdálenější.



## 9. Laminární proudění

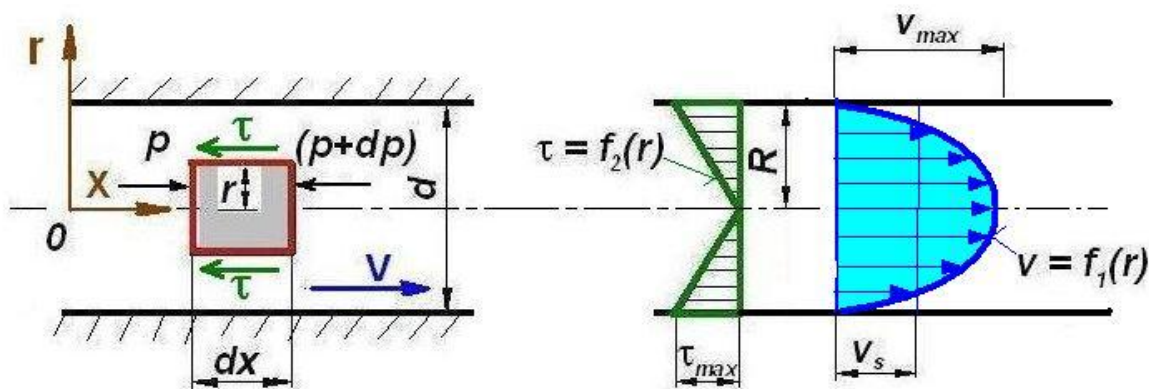
Laminární proudění je podstatně jednodušší než turbulentní, v technické praxi se vyskytuje tam, kde jsou malé průtočné kanály, větší viskozita kapaliny a menší průtokové rychlosti. Laminární proudění lze řešit integrací Navierových-Stokesových rovnic, složitější případy proudění se řeší numerickými metodami. Jednodušší případy proudění se dají řešit exaktně a některé úlohy jsou probrány v dalších kapitolách. Při řešení laminárního proudění se uplatňuje Newtonův vztah, který odpovídá skutečnosti, a proto se dosahuje dobrá shoda s experimentálními výsledky. Newton formuloval zákon, podle něhož je tangenciální napětí v kapalině při laminárním proudění úměrné dynamické vazkosti a gradientu rychlosti

$$\tau = \eta \frac{dv}{dr} = \eta j. \quad (9.1)$$

Kapaliny, které se řídí tímto zákonem se nazývají newtonské. Kapaliny, pro něž se závislost  $\tau = f(j)$  nedá vyjádřit rovnicí (3.1) se nazývají neneutonské. Toto srovnání platí pouze v laminární oblasti proudění, neboť při turbulentním proudění roste odpor a tedy i tečnité napětí rychleji v důsledku fluktuálních rychlostí.

### 9.1. Laminární proudění v kruhovém potrubí

Ve vodorovném kruhovém potrubí zvolíme elementární objem ve tvaru souosého válečku, viz obr. 9.1. Na takto zvolený objem kapaliny působí síly plošné a to třecí a tlakové. Objemové síly se neuplatní, protože potrubí je vodorovné a proudění je ustálené. Na čelní plochu zvoleného válečku působí tlak  $p$ , který na dráze  $dx$  se změní na  $(p+dp)$ .



Obr. 9.1 Laminární proudění v potrubí

Těmto tlakům odpovídá tlaková síla

$$F_{p1} = p \cdot \pi \cdot r^2 \quad \text{a} \quad F_{p2} = (p + dp) \pi \cdot r^2.$$

Na plášti válečku působí třecí síla  $F_t = \tau \cdot 2\pi \cdot r \cdot dx$ . Všechny uvedené síly musí být za ustáleného proudění v rovnováze, neboť setrvačná síla je nulová. Pro rovnováhu sil platí

$$F_{p1} - F_{p2} - F_t = 0.$$

Dosažením výrazů za jednotlivé síly dostaneme

$$p \cdot \pi \cdot r^2 - (p + dp) \pi r^2 - 2\pi \tau \cdot r \cdot dx = 0,$$

z čehož

$$\tau = -\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} r = -\frac{1}{2} \frac{p_z}{L} r. \quad (9.2)$$

Předpokládá se, že platí  $\frac{dp}{dx} = \frac{p_z}{L}$ . Z poslední rovnice je zřejmé, že smykové napětí je u laminárního proudění rozloženo lineárně - obr.9.1. Dosažením Newtonova vztahu pro

smykové napětí  $\tau = \eta \frac{dv}{dr}$  do předcházející rovnice obdržíme diferenciální rovnici rychlostního profilu

$$dv = \frac{\rho_z}{L} \frac{r \cdot dr}{2\eta},$$

a po integraci dostaneme rovnici pro rychlost

$$v = -\frac{1}{4\eta} \frac{\rho_z}{L} r^2 + K.$$

Integrační konstanta se určí z okrajových podmínek na stěně trubice, kde rychlost částic kapaliny je nulová. Pro  $r = \frac{d}{2}$  je  $v = 0$ , z čehož integrační konstanta

$$K = \frac{1}{16\eta} \frac{\rho_z}{L} d^2.$$

Po dosazení do obecného řešení je rychlostní profil laminárního proudění v kruhové trubici vyjádřen vztahem

$$v = \frac{1}{4\eta} \frac{\rho_z}{L} \left[ \left( \frac{d}{2} \right)^2 - r^2 \right]. \quad (9.3)$$

Grafické znázornění rovnice rychlostního profilu v rovině řezu procházejícího osou trubice je kvadratická parabola. V prostotu představuje rychlostní profil rotační paraboloid. – obr. 9.1. Maximální rychlost je v ose potrubí ( $r = 0$ ) a to

$$v_{\max} = \frac{1}{16\eta} \frac{\rho_z}{L} d^2. \quad (9.4)$$

Průtok trubící se určí integrací elementárního průtoku kapaliny  $dQ_v = 2\pi r v dr$ , který protéká elementárním mezikružím na poloměru  $r$  o šířce  $dr$  tlakovým rozdílem  $p_z$  na délce trubice  $L$

$$Q_v = \int_S v \cdot dS = \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi r \cdot v \cdot dr = \frac{\pi}{2\eta} \frac{\rho_z}{L} \int_0^{\frac{d}{2}} \left[ \left( \frac{d}{2} \right)^2 - r^2 \right] r \cdot dr = \frac{\pi}{128} \frac{\rho_z d^4}{\eta L}. \quad (9.5)$$

Tuto rovnici odvodil v roce 1840-1841 Poiseuille, francouzský lékař, který studoval proudění krve v žilách. Uvedený výraz platí přesně pro laminární proudění. Experimentálně ověřil tento zákon prouděním vody ve skleněných kapilárách. Nezávisle na něm odvodil uvedený výraz též Němec Hagen v roce 1839. Proto se označuje tato rovnice dosti často jako Hagen-Poiseuilleova.

Střední rychlost podle průtoku se vypočítá ze vztahu (9.5)

$$Q_v = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot v_s = \frac{\pi}{128} \frac{\rho_z d^4}{\eta L},$$

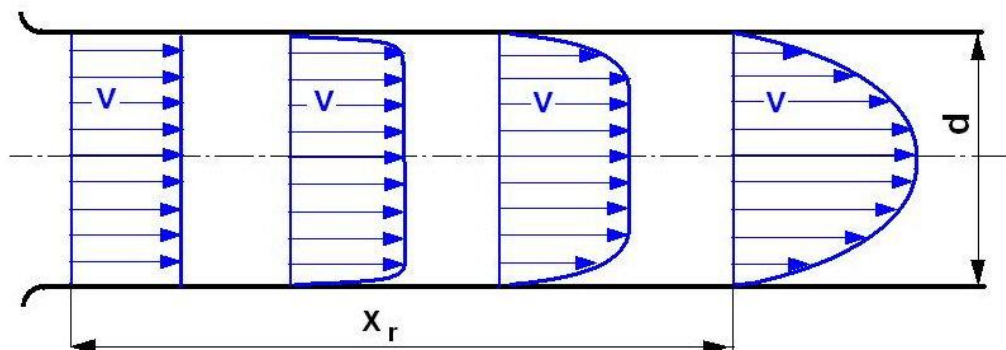
z čehož

$$v_s = \frac{\rho_z d^2}{32\eta L}. \quad (9.6)$$

Porovnáním střední rychlosti (9.6) a maximální (9.4) vyplývá vztah

$$\frac{v_s}{v_{\max}} = \frac{1}{2}.$$

Je třeba připomenout, že laminární proudění v potrubí nastane při  $Re < Re_{\text{krit}} = 2320$ , což je současně podmínkou platnosti Hagen-Poiseuilleova zákona. Zákon Poiseuilleův platí jen pro ustálené laminární proudění, kdy rychlostní profil v jednotlivých průřezích je stejný, což nastává po určité dráze od počátku trubice - obr.3.2.



Obr. 9.2 Rozběhová dráha laminárního profilu

Tekutina po vstupu do trubice má rychlostní profil odpovídající dokonalé tekutině. V prvním okamžiku mají částice kapaliny u stěny rychlost stejnou jako v ostatním proudu kapaliny. Teprve stykem kapaliny se stěnou jsou částice zbrzděny, čímž vznikají rozdíly v rychlostech částic a vznikají tečná napětí od vazkosti mezi jednotlivými vrstvami proudu. Tak jsou postupně zbrzdovány další částice, v jádru proudu jsou částice naopak urychlovány. Dráha na niž se vyvíjí rychlostní profil, se nazývá rozběhovou dráhou laminárního proudu. Pro rozběhovou dráhu uvádí Boussinesq výraz

$$\frac{x_r}{d} \geq 0,065 Re,$$

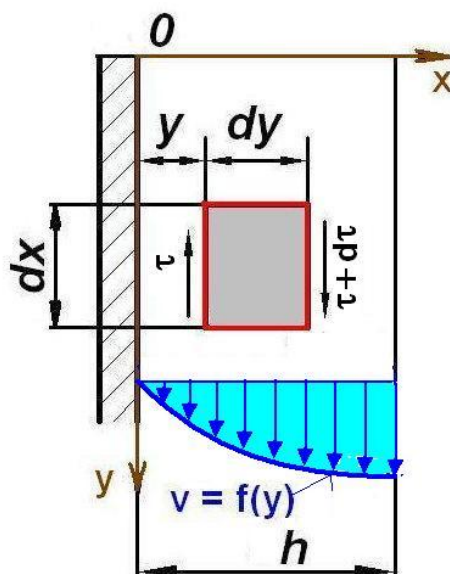
Schiller pak výraz

$$\frac{x_r}{d} \geq 0,025 Re.$$

Je zřejmé, že k ustálení rychlostního profilu dojde dosti daleko od vstupního průřezu, takže v krátkých trubkách se laminární rychlostní profil nevyvine, a proto u nich zákon Hagen-Poiseuilleův neplatí.

## 9.2. Stékání po svislé stěně

Viskózní kapalina, která ulpívá na svislé stěně, stéká po ní vlivem tíhového zrychlení - obr. 9.3. Předpokládá se izotermické proudění ( $t = \text{konst.}$ ), které je také izoviskózní ( $\eta = \text{konst.}$ ).



Obr. 9.3 Stékání po svislé stěně

Na elementární částici kapaliny o šířce  $b$  a rozměrech  $dx \cdot dy$  působí tíhové a třecí síly ve směru osy  $y$ . Předpokládá se ustálené rovnoměrné proudění. Výslednice sil ve směrech os  $x, z$  jsou nulové. Na rozhraní stékající vrstvy kapaliny o tloušťce  $h$  s ovzduším je tlak ovzduší  $p_0$ . Tlak ve stékající vrstvě je konstantní. Rovnováha sil na zvolený elementární hranolek je vyjádřena rovnicí

$$-\rho g b dx dy + \tau b dy - (\tau + d\tau) b dy = 0,$$

po úpravě se dostane diferenciální rovnice

$$\frac{d\tau}{dx} = -\rho g,$$

jejíž řešení je

$$\tau = -\rho g x + K_0.$$

Tečné napětí na rozhraní kapaliny s ovzduším je téměř nulové, proto pro  $x = h$  je  $\tau = 0$ , čili  $K_0 = \rho g h$ .

Průběh smykového napětí ve stékající vrstvě je dán rovnicí

$$\tau = \rho g (h - x). \quad (9.7)$$

Tečné napětí se vyjádří Newtonovým vztahem  $\tau = \eta \frac{dv}{dx}$  a integrací se určí rychlostní profil

$$v = \frac{g}{\nu} \left( h - \frac{x}{2} \right) x + K_1.$$

Na stěně je rychlost nulová, pak pro  $x = 0$  je  $v = 0$  a integrační konstanta  $K_1 = 0$ .

Rychlostní profil stékající vrstvy kapaliny po stěně je určen rovnicí

$$v = \frac{g}{\nu} \left( h - \frac{x}{2} \right) x. \quad (9.8)$$

Průběh rychlosti ve vrstvě je parabolický. Maximální rychlost je na rozhraní vrstvy s ovzduším a vypočte se z podmínky pro  $x = h$  je  $v = v_{\max}$ , čili

$$v_{\max} = \frac{gh^2}{2\nu}.$$

Průtok vrstvou kapaliny o šířce „ $b$ “ se určí integrací elementárního průtoku ploškou  $dS = b dx$  rychlostí  $v$  dle rovnice (9.8)

$$Q_v = b \int_0^h v dx = \frac{gb}{\nu} \int_0^h \left( h - \frac{x}{2} \right) x dx = \frac{gbh^3}{3\nu}. \quad (9.9)$$

Pro daný průtok  $Q_v$  se určí z této rovnice tloušťka vrstvy – „ $h$ “

$$h = \sqrt[3]{\frac{3Q_v \nu}{gb}}. \quad (9.10)$$

Střední rychlost ve vrstvě je

$$v_s = \frac{Q_v}{bh} = \frac{gh^2}{3\nu}. \quad (9.11)$$

Porovnáním střední rychlosti s maximální rychlostí vyplývá vztah

$$v_s = \frac{2}{3} v_{\max}. \quad (9.12)$$

## 10. Laminární proudění neneutronových kapalin

Newton formuloval zákon, podle něhož je tangenciální napětí v kapalině při laminárním proudění úměrné dynamické vazkosti a gradientu rychlosti

$$\tau = \mu \frac{du}{dr} = \mu j. \quad (10.1)$$

Kapaliny, které se řídí tímto zákonem se nazývají newtonovské. Kapaliny, pro něž se závislost  $\tau = f(j)$  nedá vyjádřit rovnicí (10.1) se nazývají neneutronovské. Toto srovnání platí pouze v laminární oblasti proudění, neboť při turbulentním proudění roste odpor a tedy i tečné napětí rychleji v důsledku flukтуаčních rychlostí.

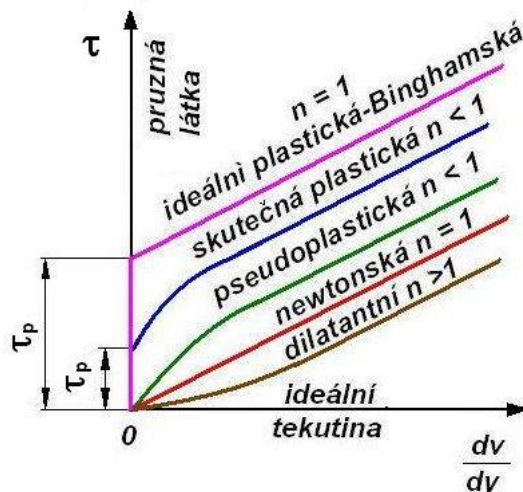
Zatímco poměr tečného napětí newtonovských kapalin ve smykové rychlosti je konstantním látkovým parametrem, charakterizujícím danou kapalinu, je tentýž poměr pro neneutronovské kapaliny veličinou proměnnou. Jeho okamžitá hodnota se mění podle použitého napětí a nemůže tudíž v žádném případě sloužit pro fyzikální hodnocení konsistence neneutronovských kapalin. Pro tento poměr se používá názvu zdánlivá viskozita

$$\mu_a = \frac{\tau}{\frac{du}{dr}} = \frac{\tau}{j}. \quad (10.2)$$

Vedle zdánlivé viskozity se používá pro hodnocení neneutronovské kapaliny při určitém smykovém napětí tzv. diferenciální viskozita daná rovnicí

$$\mu_{\Delta} = \frac{d\tau}{dj}. \quad (10.3)$$

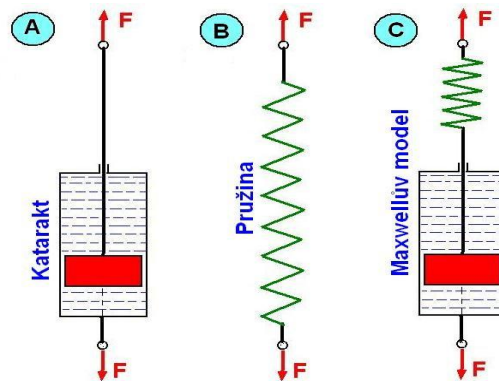
Protože ani zdánlivá ani diferenciální viskozita nejsou pro neneutronovskou kapalinu konstantní, je třeba pro fyzikální ohodnocení těchto kapalin udávat jejich závislost na smykovém napětí. Taková grafická znázornění se nazývají tokové křivky nebo reogramy. Nejobvyklejšími souřadnicemi pro kreslení těchto reogramů jsou  $\tau$  vůči  $j$  anebo logaritmy těchto proměnných. Reogramy nejčastěji se vyskytující neneutronovských kapalin a závislost viskozity jsou uvedeny na obr. 10.1.



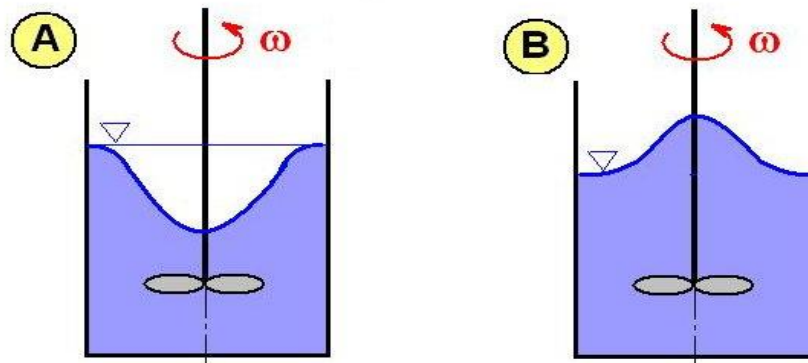
Obr. 10.1 Reogramy vybraných neneutronových kapalin

Čistě viskozni kapaliny jsou látky, které při nulové rychlosti deformace vykazují vždy nulové tečné napětí. Látky čistě elastické vykazují při nulovém napětí vždy nulovou deformaci a po skončení napětí se tyto látky vracejí do původního nezatíženého stavu. U čistě elastických látek závisí napětí v každém okamžiku pouze na velikosti deformace, naopak u látek čistě viskozni závisí napětí na rychlosti deformace. U viskoelastických kapalin nezávisí napětí ani pouze na velikosti deformace, ani pouze na rychlosti deformace, ale závisí na celém předchozím průběhu deformace. U těchto látek po skončení toku nenabude napětí okamžitě nulové hodnoty, ale bude k nulové hodnotě klesat postupně.

Příklady mechanických modelů těchto látek uvádí obr. 10.2. Chování kapalin při míchání rotujícím míchadlem uvádí obr. 10.3, nenewtonské kapaliny vykazují anomální chování, když kapalina stoupá nahoru po hřídeli míchadla.



Obr. 10.2 Mechanické modely reologického chování látek  
a) čistě viskozni kapalina, b) elastická látka, c) viskoelastická látka-Maxwellův model



Obr. 10.3 Chování kapalin při míchání rotujícím tělesem  
a) viskozni kapaliny, b) viskoelastické kapaliny

Tok je nevratná deformace probíhající v čase. Mez toku pozorovatelná u binghamských látek je určena počátečním napětím  $\tau_p$ , při jehož překročení začíná soustava, která se do té doby chovala jako pružné těleso téci, tj. dochází k jejímu toku. Elasticita je vlastnost materiálu, projevující se jeho snahou obnovit po deformaci při poklesu napětí původní tvar nebo velikost, případně obojí. Relaxace napětí je postupné zmenšování napětí při konstantní deformaci. Deformace je změna vzájemných vzdáleností různých bodů v dané látce proti původnímu stavu, způsobena změnou tvaru nebo objemu, případně obou.

Kapaliny, které jsou charakterizovány poklesem zdánlivé viskozity při rostoucím smykovém se nazývají pseudoplastické (řidnouce tekutiny). Mezi pseudoplastické tekutiny patří např. suspenze nesouměrných částic, některé koloidní roztoky, kaly, pasty, taveniny a roztoky polymetrů, celulózové deriváty, kaučuky, latexy, barvy, mazadla, suspenze papíru apod.

S rostoucím rychlostním gradientem se nesouměrné částice nebo molekuly postupně vyrovnávají. V klidovém stavu jsou částice náhodně promíchány, zatím co při pohybu se postupně orientují hlavními osami do směru pohybu. Zdánlivě vazkost stále klesá s rostoucím rychlostním gradientem až k určité hodnotě, při níž již není možné dokonalejší uspořádání částic. Od této hodnoty je již vztah pro  $\tau$  lineární.

Hypotéza pseudoplastického chování předpokládá, že změna struktury, tj. orientace částice nastane okamžitě jakmile začne působit smykové napětí, nebo v době tak krátké, že použitím běžných viskometrických metod není možné časový úsek zjistit. Jestliže změna struktury nenastane okamžitě a k jejímu vytvoření je potřeba určité doby, takové kapaliny se nazývají tixotropní. Reciprokým jevem k pseudoplasticitě je dilatace charakterizovaná růstem zdánlivé viskozity se vzrůstajícím tečným napětím (houstnouce tekutiny). Jsou to např.

rozpuštědla barev, některé nátěrové a tiskařské barvy, vodní suspenze železité červeně, kysličníku zinečnatého, některých pigmentů, kobaltové modři, škrobové mazy, beton, arabská guma a některé polymerové roztoky, med aj.

Vysvětlení dilatace podle Reynoldse je následující :

Za klidu je objem dutin mezi částicemi minimální a tekutina právě dostačuje k vyplnění těchto mezer. Jakmile se začne taková suspenze pohybovat s malým rychlostním gradientem, kapalina působí jako mazivo mezi částicemi a napětí jsou malá. Při vyšších rychlostních gradientech se těsné uložení částic změní ve vrstevnitě, suspenze se mírně roztáhne - dilatuje - a mezerovitost (objem dutin) vzroste. V tomto případě nastane nedostatek „mazací kapaliny“ a tangenciální napětí musí být tedy větší. Dilatace suspenze způsobuje rychlý vzrůst zdánlivé vazkosti s rostoucím rychlostním gradientem. V technické praxi je výskyt dilatantních tekutin velmi malý. Bude-li nastávat tento jev s časovým zpožděním, bude se nazývat reopexie.

Binghamova tekutina je charakterizována tím, že v klidu má tekutina trojrozměrnou strukturu, která má tuhost, schopnou vzdorovat libovolnému napětí menšímu než napětí na mezi deformace  $\tau_p$ . Po dosažení tohoto napětí se struktura rozpadne a hmota se chová jako newtonovská tekutina. Po opětovém poklesu napětí pod tuto kritickou hodnotu se vnitřní struktura hmoty opět obnoví. Do této kategorie patří hlavně koncentrované kašovitě a zrnité suspenze, průmyslové, odpadní, vrtné a stokové kaly, bahno, řídké kaše, pasty, plastické gely, olejové barvy, některá mazadla apod. Ideální Binghamovy tekutiny charakterizuje přímkový vztah mezi tečným napětím a rychlostním gradientem. Přímka vychází z bodu na ose tečného napětí určeného napětím na mezi trvalé deformace  $\tau_p$ . Velmi často při nízkých rychlostních gradientech neplatí přímková závislost, protože skutečná hodnota  $\tau_p$  je menší než u ideální Binghamovy tekutiny. Tento typ neneutronovské tekutiny se nazývá nebinghamovská.

Při studiu neneutronovských kapalin byla velká pozornost věnována určení závislosti tečného napětí na rychlostním gradientu, tzn. reologických modelů. Bylo sestaveno několik rovnic, ve většině případů empirických, které uvedenou závislost popisují.

Pro popis reogramů bez inflexních bodů se obvykle vystačí s jednoduššími rovnicemi, tzn. reologický model obsahuje pouze dva parametry, tj. rovnice dvouparametrové. Reogramy s inflexním bodem se obvykle řeší pomocí rovnic tříparametrových. V tabulce 8 je pro názornost uvedeno několik nejčastěji používaných reologických modelů.

V další části této kapitoly bude uvedeno řešení s použitím mocninové a Binghamovy rovnice toku.

Tabulka 10.1 Přehled nejpoužívanějších časově nezávislých reologických modelů

Číslo	Autor	Vzorec	Poznámka
1	Newton	$\tau = \eta \frac{du}{dr} = \eta j$	$\eta$ - dynamická viskozita
2	Ostwald - de Waele	$\tau = K \left( \frac{du}{dr} \right)^n = K j^n$	K - koeficient konzistence n - index toku
3	Bingham	$\tau = \tau_p + \mu_B j$	$\tau_p$ - počáteční tečné napětí $\mu_B$ - Binghamova viskozita
4	Bulkley - Herschel	$\tau = \tau_p + K j^n$	$\tau_p$ - počáteční tečné napětí K - koeficient konzistence
5	Vočadlo	$\tau = \tau_p^n + K j^n$	n - index toku $\tau_p$ - počáteční tečné napětí
6	Eyring	$\tau = \frac{1}{a} \operatorname{arcsinh}(bj)$	$\frac{1}{a}$ - vnitřní tečné napětí $\frac{1}{b}$ - vnitřní smykové napětí



### 10.1. Mocninová rovnice toku

Nejstarším analytickým vyjádřením závislosti smykové rychlosti na tečném napětí neneutronovských kapalin jsou mocninové funkce. Nejčastěji se používá formulace Ostwalda a de Waelea

$$\tau = K \left( \frac{du}{dr} \right)^n = K \cdot j^n, \quad (10.4)$$

kde  $K$  - součinitel konsistence

$n$  - index toku, jehož hodnota pro pseudoplastické tekutiny je menší než 1, zatímco pro newtonovské tekutiny je rovna jedné a pro dilatantní tekutiny je větší než jedna.

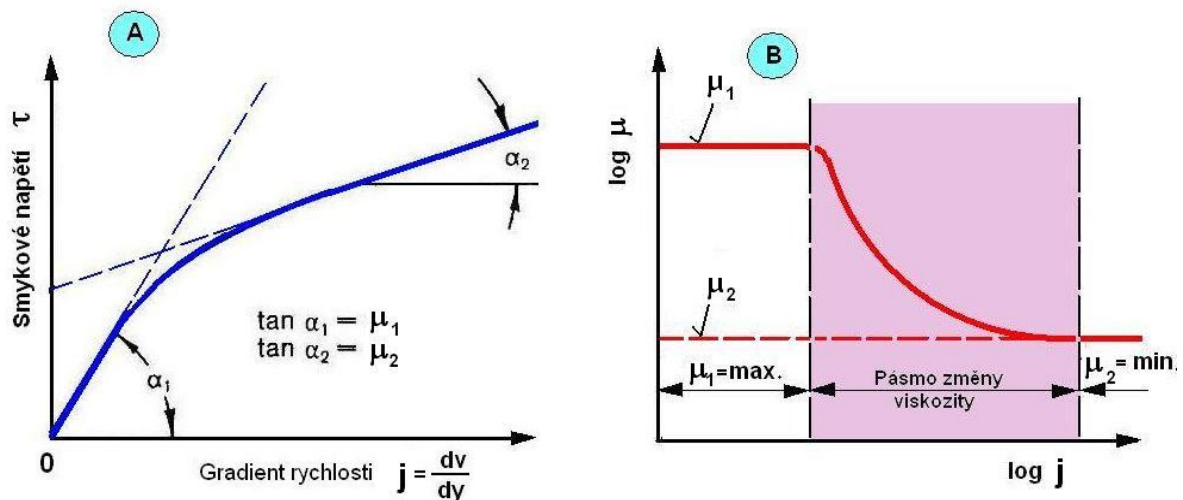
Podle definice (10.2) pro zdánlivou viskozitu platí

$$\mu_a = \frac{\tau}{j} = K j^{n-1}, \quad (10.5)$$

a podle rovnice (4.3) pro diferenciální viskozitu

$$\mu_{\Delta} = \frac{d\tau}{dj} = n K j^{n-1}. \quad (10.6)$$

Nejsou tedy  $\mu_a$  ani  $\mu_{\Delta}$  látkovými parametry, protože jejich hodnota závisí na rychlostním gradientu  $j$ . Na obr. 10.4A je reogram pseudoplastické kapaliny, která má pro nulový gradient rychlosti max. diferenciální viskozitu, od jisté velikosti gradientu rychlosti je viskozita konstantní a současně je i minimální – obr. 10.4B.



Obr. 10.4 Závislost  $\tau = f(j)$  a  $\mu = f(\dot{\gamma})$  pro pseudoplastickou látku

Mocninové funkce jsou pouze interpolačními rovnicemi a nebyly odvozeny na základě fyzikálního modelu vnitřní struktury kapalin. Z tohoto důvodu bylo jejich používání podroběno kritice, avšak mocninové funkce přes tento nedostatek vystihují při poměrné jednoduchosti většinu skutečných tokových křivek velmi dobře a selhávají jen pro kapaliny, jejichž reogramy mají inflexní body. V těchto případech je však možno použít mocninových funkcí s dostatečnou přesností pro část tokové křivky.

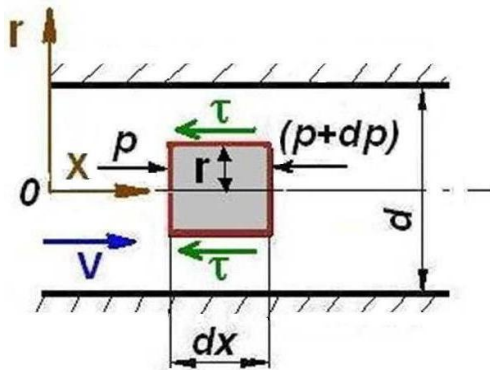
Abychom našli vztah pro rychlostní profil a tlakový spád při proudění v potrubí kruhového průřezu, vyjdeme z rovnováhy, která musí platit pro vytčený elementární objem ve tvaru souosého válce - obr. 10.5 Z rovnováhy sil třecích a tlakových

$$\rho \pi r^2 - (\rho + d\rho) \pi r^2 - \tau 2\pi r dx = 0,$$

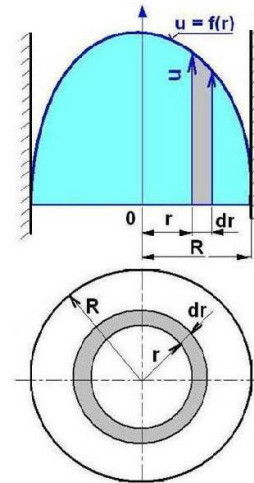
určíme velikost smykového napětí

$$\tau = -\frac{dp}{2dx} r = -\frac{\rho_z}{2L} r = -\frac{\rho g j}{2} r, \quad (10.7)$$





Obr. 10.5 Rovnováha sil při proudění v potrubí



Obr. 10.6 Schéma rychlostního profilu

za předpokladu, že platí

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\rho_z}{L} p_z = \rho g h_z i = \frac{h_z}{L}.$$

Po dosazení za smykové napětí z rovnice (10.4)

$$K \left( \frac{du}{dr} \right)^n = - \frac{\rho_z}{2L} r,$$

a separaci proměnných a po integraci dostaneme rovnici pro rychlost

$$du = - \left( \frac{\rho_z}{2LK} \right)^{\frac{1}{n}} r^{\frac{1}{n}} dr; \quad u = - \left( \frac{\rho_z}{2LK} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} r^{1+\frac{1}{n}} + k. \quad (10.8)$$

Integrační konstantu určíme z okrajových podmínek. Pro  $r = R \rightarrow u = 0$ , pak pro integrační konstantu platí vztah

$$K = \left( \frac{\rho_z}{2LK} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} R^{1+\frac{1}{n}},$$

a po dosazení do rovnice (10.8) pro rychlost dostaneme

$$u = \left( \frac{\rho_z}{2LK} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} \left[ R^{1+\frac{1}{n}} - r^{1+\frac{1}{n}} \right] = \frac{n}{n+1} \left( \frac{\rho_z R}{2LK} \right)^{\frac{1}{n}} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{1+\frac{1}{n}} \right] R. \quad (10.9)$$

Podle rovnice (10.8) na stěně potrubí pro  $r = R$  je hodnota smykového napětí

$$\tau_s = \frac{\rho_z R}{2L}, \quad (10.10)$$

a po dosazení do rovnice (10.9) se tato upraví

$$u = \frac{n}{n+1} \left( \frac{\tau_s}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{1+\frac{1}{n}} \right] R. \quad (10.11)$$

Dosadíme-li do rovnice (10.9) za  $n = 1$ , přijde tato ve známou Hagen-Poiseuilleovu rovnici pro laminární proudění newtonovských tekutin.

$$u = \frac{\rho_z R^2}{4L\mu} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad (10.12)$$

Maximální rychlost je v ose potrubí a z rovnice (10.9) s podmínkou  $r = 0$  pro  $u_{\max}$  dostaneme

$$u_{\max} = \frac{n}{n+1} \left( \frac{\rho_z R}{2LK} \right)^{\frac{1}{n}} R. \quad (10.13)$$

Pro objemový průtok dle obr. 10.6 s použitím rovnice (10.9) platí

$$Q = 2\pi \int_0^R u r dr = 2\pi \int_0^R \frac{n}{n+1} \left( \frac{\rho_z R}{2LK} \right)^{\frac{1}{n}} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{1+\frac{1}{n}} \right] R r dr,$$

odkud po integraci

$$Q = \frac{\pi \cdot n}{3n+1} \left( \frac{\rho_z R}{2LK} \right)^{\frac{1}{n}} R^3 = \frac{\pi \cdot n}{8(3n+1)} \left( \frac{\rho_z D}{4LK} \right)^{\frac{1}{n}} D^3. \quad (10.14)$$

Z této rovnice můžeme vypočítat střední rychlost

$$v_{stř} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{n}{3n+1} \left( \frac{\rho_z R}{2LK} \right)^{\frac{1}{n}} R = v_{\max} \frac{n+1}{3n+1}, \quad (10.15)$$

odkud pro poměr střední a maximální rychlosti platí

$$\frac{v_{stř}}{v_{\max}} = \frac{n+1}{3n+1}. \quad (10.16)$$

Dosazením do rovnice (10.14) za  $n = 1$ , tj. pro newtonovskou kapalinu, pro kterou současně platí  $\mu = K$ , dostaneme

$$Q = \frac{\pi}{8} \frac{\rho_z R^4}{L\mu}, \quad (10.17)$$

což je Hagen-Poiseuillova rovnice pro výpočet objemového průtoku. Rovnici (10.17) můžeme dále upravit na

$$\frac{\rho_z R}{2L} = \mu \frac{4Q}{\pi R^3}.$$

Výraz na levé straně je tečné napětí na stěně trubky, jak vyplývá srovnáním s rovnicí (10.10)

$$\tau_s = \mu \frac{4Q}{\pi R^3}. \quad (10.18)$$

Srovnáním rovnice (10.18) s rovnicí (10.1) pro gradient rychlosti na stěně potrubí dostaneme

$$j_s = \frac{4Q}{\pi R^3}. \quad (10.19)$$

Při výpočtu tlakové ztráty je výhodné tuto počítat z rovnice Darcy-Weisbachovy

$$i = \frac{h_z}{L} = \frac{\rho_z}{\rho \cdot g \cdot L} = \frac{\lambda \cdot v^2}{D \cdot 2 \cdot g}, \quad (10.20)$$

kde třecí součinitel  $\lambda$  při proudění neneutronovských kapalin je funkcí následujících osmi proměnných

$$\lambda = f(v, D, k, g, n, K, \rho, \tau).$$

Z těchto osmi proměnných veličin jsou tři základní veličiny, proto celkový počet bezrozměrných parametrů  $\pi = 8 - 3 = 5$ . Jsou to následující bezrozměrné parametry

$$\pi_1 = \frac{8 \cdot \rho \cdot D^n \cdot v^{2-n}}{K \left( \frac{6n+2}{n} \right)} = \text{Re}_n; \quad \pi_2 = \frac{k}{D} = \varepsilon; \quad \pi_3 = n; \quad (10.21)$$

$$\pi_4 = \frac{v}{\sqrt{gD}} = \text{Fr}; \quad \pi_5 = \frac{2 \cdot \tau}{\rho \cdot v^2}$$

Obecná bezrozměrová rovnice pro třecí součinitel bude

$$\lambda = f\left(\text{Re}_n, Fr, n, \frac{k}{D}\right).$$

Tuto rovnici je možno zjednodušit za předpokladu, že zanedbáme tíhovou sílu a budeme uvažovat proudění v hydraulicky hladkém potrubí, tím se předcházející rovnice zjednoduší na tvar

$$\lambda = f(\text{Re}_n, n). \quad (10.22)$$

Pro stanovení závislosti třecího součinitele  $\lambda$  vyjdeme z rovnice (10.15)

$$v = \frac{n}{3n+1} \left(\frac{\rho_z R}{2LK}\right)^{\frac{1}{n}} R = \frac{n}{2(3n+1)} \left(\frac{\rho_z D}{4LK}\right)^{\frac{1}{n}} D,$$

kterou nejdříve umocníme na  $n$

$$v^n = \frac{1}{2^n} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n \frac{\rho_z \rho v^2 D^n D}{\rho v^2 4K L}.$$

Z této rovnice pro tlakovou ztrátu  $p_z$  po jednoduchých úpravách dostaneme

$$p_z = 4 \left(\frac{6n+1}{n}\right)^n \frac{K}{D^n v^{2-n} \rho} \frac{L}{D} v^2 \rho = K \left(\frac{6n+2}{n}\right)^n \frac{64}{8\rho D^n v^{2-n}} \frac{L v^2}{D 2} \rho = \frac{64}{\text{Re}_n} \frac{L v^2}{D 2} \rho \quad (10.23)$$

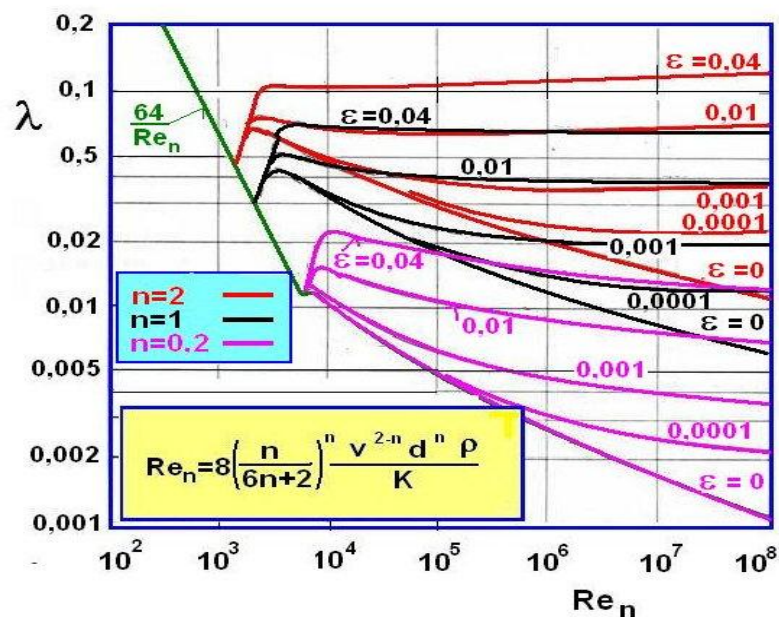
kde modifikované Reynoldsovo číslo je definováno vztahem

$$\text{Re}_B = \frac{8\rho D^n v^{2-n}}{K} \left(\frac{6n+2}{n}\right)^n. \quad (10.24)$$

Modifikované Reynoldsovo číslo  $\text{Re}_n$  umožňuje zobecnění základního vztahu pro odporového součinitele při pohybu newtonovské tekutiny i pro nenewtonovské tekutiny řídící se mocninovým zákonem, tzn. že platí

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}_n}. \quad (10.25)$$

K výpočtu  $\lambda$  je tedy možno použít známého vztahu za předpokladu, že pro výpočet použijeme tzv. modifikované Reynoldsovo číslo dané rovnicí (10.24).



Obr. 10.7 Závislost  $\lambda = f(\text{Re}, n, \varepsilon)$

Výpočet třecího součinitele se zjednoduší zavedením aproximativní implicitní rovnice podobného typu jako je rovnice Churchillova .

$$\lambda = 8 \left[ \left( \frac{8}{\text{Re}_n} \right)^{12} + \frac{1}{(a+b)^{1,5}} \right]^{\frac{1}{12}}, \quad (10.26)$$

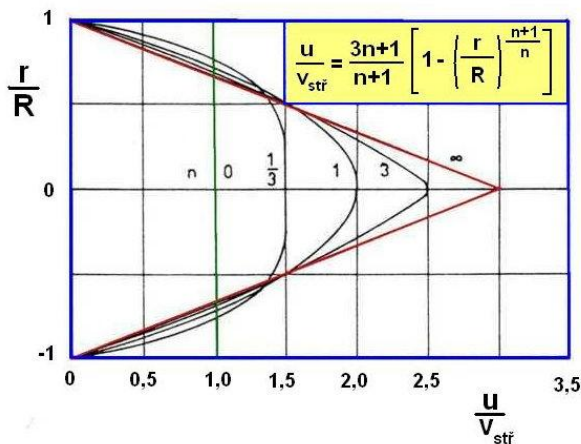
kde

$$a = \left[ -\frac{2,457}{c} \ln \left( \left( \frac{7}{\text{Re}_n} \right)^{0,9} + 0,27\varepsilon \right) \right]^{16}; \quad b = \left( \frac{37530}{n^{0,91} \cdot \text{Re}_n} \right)^{16};$$

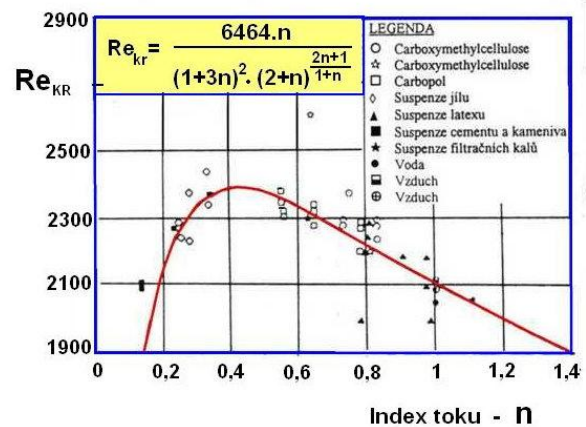
$$c = \sqrt{n} + (0,404 \cdot y + 3,167) \frac{y}{x} - (0,065 \cdot y + 0,167)y; \quad x = |\ln \text{Re}_n| + 10^{-3}; \quad y = 1 - n$$

Grafické znázornění této rovnice je na obr. 10.7. Dělením rovnice (10.9) rovnicí (10.13) dostaneme

$$\frac{u}{v_{\text{stř}}} = \frac{3n+1}{n+1} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{1+\frac{1}{n}} \right]. \quad (10.27)$$



Obr. 10.8 Závislost  $\text{Re}_{kr} = f(n)$



Obr. 10.9 Závislost  $\text{Re}_{kr} = f(n)$

Tato rovnice je graficky znázorněna na obr. 10.8, odkud je velmi dobře vidět vliv exponentu  $n$  na tvar rychlostního profilu.

Pro  $n = 1$  dostaneme rychlostní profil ve tvaru paraboly druhého stupně, pro který platí  $v_{\text{max}} = 2 \cdot v_{\text{stř}}$ , je-li  $n < 1$ , tj. pro pseudoplastické kapaliny je rychlostní profil oproti newtonovské kapalině zploštělejší, naopak je-li  $n > 1$ , tj. pro dilatantní kapaliny je rychlostní profil protáhlejší.

Kritická hodnota Reynoldsova čísla, při kterém se laminární proudění mění v turbulentní je v prvním přiblížení stejná jako u newtonovských kapalin -  $\text{Re}_{kr} = 2320$ . Kritickou hodnotu Reynoldsova čísla je možné vypočítat podle následující empirické rovnice

$$\text{Re}_{kr} = \frac{6464n}{(1+3n)^2 (2+n)^{\frac{2n+1}{1+n}}}, \quad (10.28)$$

která je znázorněna na obr. 10.9

## 10.2. Rovnice Binghamova

Velikost smykového napětí pro binghamské tekutiny je dáno rovnicí

$$\tau = \tau_p + \mu_B \frac{du}{dr} = \tau_p + \mu_B j, \quad (10.29)$$

kde  $\tau_p$  - je počáteční smykové napětí

$\mu_B$  - je plastická (nebo též Binghamova) viskozita

Z rovnice (10.37) pro zdánlivou viskozitu dostaneme

$$\mu_a = \frac{\tau}{j} = \frac{\tau_p}{j} + \mu_B, \quad (10.30)$$

a pro diferenciální viskozitu

$$\mu_\Delta = \frac{d\tau}{dj} = \mu_B. \quad (10.31)$$

Pro výpočet rychlostního profilu v potrubí kruhového průřezu vyjdeme z rovnice rovnováhy sil a rovnice (10.29). Po dosazení dostaneme

$$\tau - \tau_p = -\frac{\rho_z r}{2\ell},$$

odkud pro  $\tau$  platí

$$\tau = -\frac{\rho_z r}{2L} + \tau_p.$$

Po dosazení z Newtonovy rovnice (10.1)

$$\frac{du}{dr} = -\frac{\rho_z}{2\ell\mu_B} r + \frac{\tau_p}{\mu_B}. \quad (10.32)$$

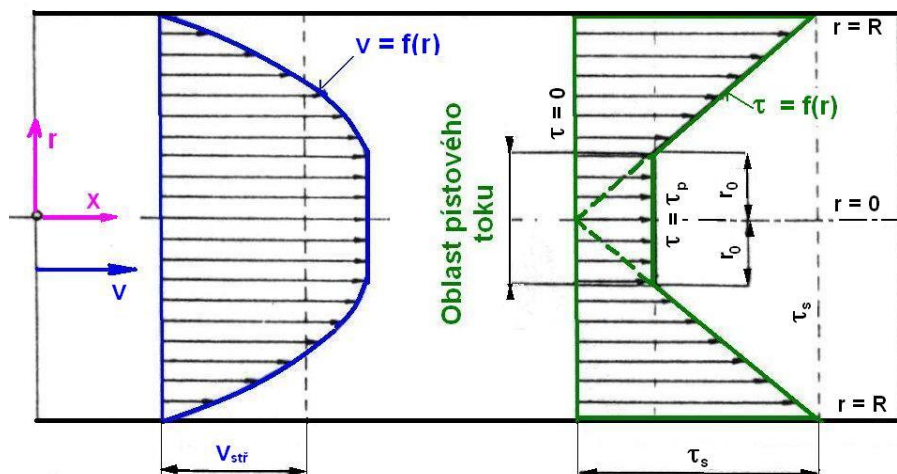
Tečné napětí  $\tau$  klesá od minimální hodnoty na stěně potrubí  $\tau_s$  směrem k ose potrubí, až pro určité  $r = r_0$  dosáhne hodnoty  $\tau = \tau_p$  - obr. 10.10. Pak podle rovnice (10.30) bude

$$\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=r_0} = 0,$$

což dosazeno do rovnice (4.32) dá hodnotu počátečního smykového napětí

$$\tau_p = \frac{\rho_z r_0}{2L}, \quad (10.33)$$

takže pro všechna  $\tau \leq \tau_p$  nebo  $r \leq r_0$  je rychlost konstantní  $u = u_0$ . Tato vnitřní část toku má tedy plochý rychlostní profil a nazývá se částí pístovou.



Obr. 10. 10 Průběh tečného napětí a tvar rychlostního profilu pro Binghamovu kapalinu

Rovnici (10.32) můžeme tedy integrovat pro všechna  $r \geq r_0$ , takže pro tuto okrajovou část bude rychlostní profil

$$u = -\frac{\rho_z}{4L\mu_B} r^2 + \frac{\tau_p}{\mu_B} r + konst.$$

Integrační konstantu určíme z okrajové podmínky na stěně potrubí, kde  $r = R \Rightarrow u = 0$

$$konst = -\frac{\rho_z}{4L\mu_B} R^2 - \frac{\tau_p}{\mu_B} R.$$

Dosažením do původní rovnice a po malé úpravě pro rovnici rychlostního profilu pro  $r > r_0$  platí

$$u = \frac{p_z}{4L\mu_B} (R^2 - r^2) - \frac{\tau_p}{\mu_B} (R - r) = \frac{1}{\mu_B} \left[ \frac{p_z}{4L} (R^2 - r^2) - \tau_p (R - r) \right]. \quad (10.34)$$

Poněvadž tato rovnice musí platit i pro  $r = r_0$ , dostaneme dosažením za  $\tau_p$  z (10.33) do rovnice (10.34) pro rychlost píستové části toku

$$u_0 = \frac{p_z}{4L\mu_B} (R^2 - r_0^2) - \frac{p_z r_0}{2L\mu_B} (R - r_0) = \frac{p_z}{4\ell\mu_B} (R - r_0)^2. \quad (10.35)$$

Rychlostní profil proudění Binghamovy tekutiny je znázorněn na obr. 10.10.

Objemový průtok v okrajové části proudění ( $r > r_0$ ) stanovíme integrací s použitím rovnice (10.33) a (10.34)

$$\begin{aligned} Q_1 &= 2\pi \int_{r_0}^R r u dr = \frac{\pi p_z}{2L\mu_B} \int_{r_0}^R [(R^2 - r^2)r - 2r_0(R - r)] dr = \\ &= \frac{\pi p_z R^4}{8L\mu_B} \left[ 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{r_0}{R} \right) - 2 \left( \frac{r_0}{R} \right)^2 - 4 \left( \frac{r_0}{R} \right)^3 - \frac{5}{3} \left( \frac{r_0}{R} \right)^4 \right]. \end{aligned} \quad (10.36)$$

Pro píستovou část ( $r < r_0$ ) s použitím rovnice (10.35) pro objemový průtok platí

$$Q_2 = \pi r_0^2 v_0 = \frac{\pi p_z R^4}{8L\mu_B} \left[ 2 \left( \frac{r_0}{R} \right)^2 - 4 \left( \frac{r_0}{R} \right)^3 + 2 \left( \frac{r_0}{R} \right)^4 \right]. \quad (10.37)$$

Celkový objemový průtok je dán součtem předcházejících dvou rovnic

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{\pi p_z R^4}{8\ell L\mu_B} \left[ 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{r_0}{R} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{r_0}{R} \right)^4 \right]. \quad (10.38)$$

Z této rovnice můžeme dále vypočítat střední rychlost

$$v_s = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{p_z R^2}{8L\mu_B} \left[ 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{r_0}{R} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{r_0}{R} \right)^4 \right]. \quad (10.39)$$

Počítáme-li ztrátovou výšku podle rovnice Darcy-Weisbachovy

$$j = \frac{h_z}{L} = \frac{p_z}{\rho g L} = \frac{\lambda v^2}{D 2g},$$

pak třecí součinitel  $\lambda$  je funkcí následujících proměnných

$$\lambda = f(v, D, \mu_B, \rho, \tau_p, \tau, L).$$

Rozměry těchto sedmi proměnných veličin jsou odvozeny ze tří veličin základních, proto počet bezrozměrných čísel  $\pi = 7 - 3 = 4$ . Jsou to následující bezrozměrná čísla.

$$\pi_1 = \frac{p_z}{\rho v^2} = Eu; \quad \pi_3 = \frac{v D \rho}{\mu_B} = Re_B; \quad \pi_2 = \frac{L}{D}; \quad \pi_4 = \frac{\tau_p D^2 \rho}{\mu_B^2} = He. \quad (10.40)$$

Hedströmovo čísla se zapisuje i ve tvaru

$$He_1 = \frac{\tau_0}{\rho \cdot v^2} = \frac{He}{Re_B^2}; \quad He_2 = \frac{D \cdot \tau_0}{\mu_b \cdot v} = \frac{He}{Re_B}. \quad (10.41)$$

Potom obecná rovnice pro třecí součinitel bude

$$\lambda = f\left(\frac{L}{D}, Re_B, Eu, He\right)$$

Pro určení této závislosti vyjdeme z rovnice pro objemový průtok



$$Q = \pi R^2 v = \frac{\pi p_z R^4}{8L\mu_B} \left[ 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{r_o}{R} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{r_o}{R} \right)^4 \right].$$

Z této rovnice pro střední rychlost pro  $D = 2R$  platí

$$v = \frac{p_z D^2}{32L\mu_B} \left[ 1 - \frac{8}{3} \left( \frac{r_o}{D} \right) + \frac{16}{3} \left( \frac{r_o}{D} \right)^4 \right],$$

další úpravou obdržíme

$$\frac{\mu_B}{D \cdot v \cdot \rho} = \frac{p_z}{v^2 \rho} \frac{D}{32 \cdot L} \left[ 1 - \frac{8}{3} \left( \frac{r_o}{D} \right) + \frac{16}{3} \left( \frac{r_o}{D} \right)^4 \right].$$

S použitím podobnostních čísel podle rovnice (10.40) a (10.33) pro  $r_o$

$$r_o = \frac{2L \cdot \tau_p}{\rho_z}, \quad (10.42)$$

dostaneme

$$\frac{1}{\text{Re}_B} = \frac{Eu D}{32 L} - \frac{He_1}{6} + \frac{8 He_1^4}{3 Eu^3} \left( \frac{L}{D} \right)^3. \quad (10.43)$$

Je-li třecí součinitel určen rovnicí

$$\lambda = \frac{2p_z D}{\rho v^2 L} = Eu \frac{2D}{L},$$

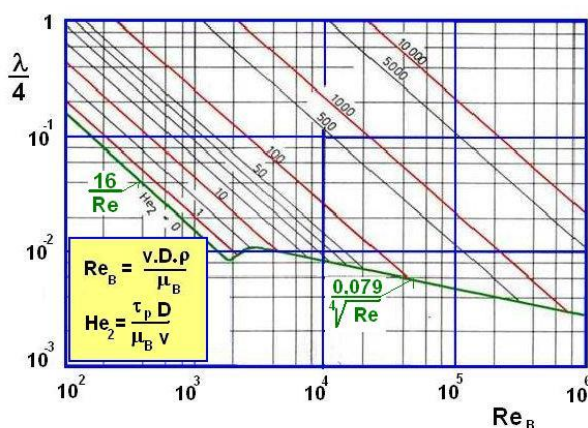
potom můžeme rovnici (10.43) upravit na tvar

$$\frac{1}{\text{Re}_B} = \frac{\lambda}{64} - \frac{1}{6} He_1 + \frac{64}{3 \lambda^3} He_1^4. \quad (10.44)$$

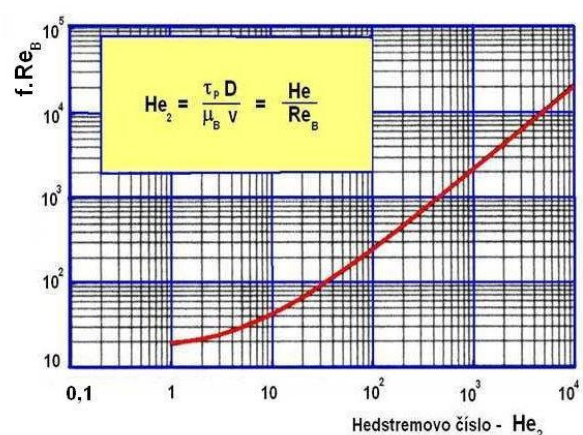
Z této rovnice můžeme implicitně vyjádřit třecí součinitel

$$\lambda = 64 \left( \frac{1}{\text{Re}_B} + \frac{He_1}{6} - \frac{64}{3 \lambda^3} He_1^4 \right). \quad (10.45)$$

Výpočet  $\lambda$  z této rovnice není jednoduchý, jedná se o rovnici čtvrtého stupně, řešením dostáváme 4 kořeny, z nichž pouze jeden má fyzikální význam.



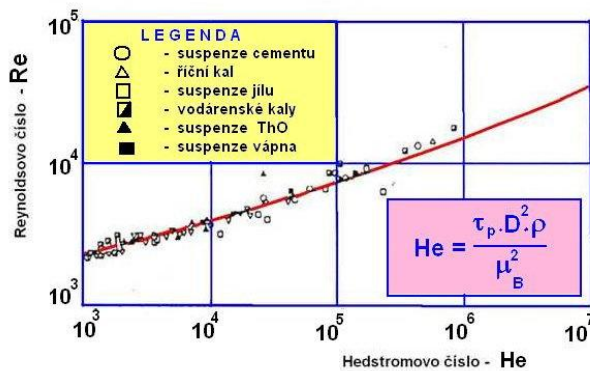
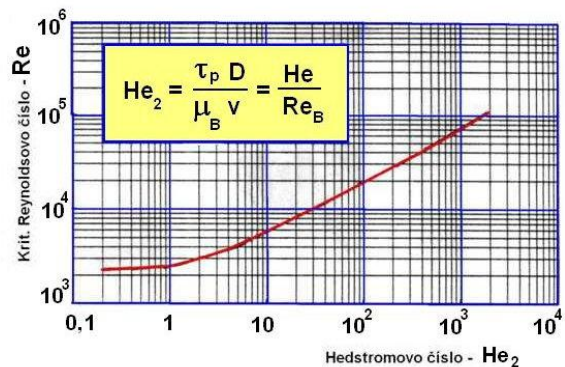
Obr. 10.11 Závislost  $\lambda = f(\text{Re}_B, \text{He}_2)$



Obr. 10.12 Závislost  $f \cdot \text{Re} = f(\text{He}_2)$

Protože z této rovnice nelze explicitně vyjádřit třecí součinitel  $\lambda$ , je tato rovnice pomocí bezrozměrných kriterií zpracována graficky na obr. 10.11, odkud je vidět, že hodnoty Hedströмова čísla významně ovlivňují rozsah laminární oblasti proudění. Podle experimentálních měření přechod laminárního proudění v turbulentní nastává v místech, kde

se křivky  $He_2 = \text{konst.}$  protínají s křivkou  $\lambda = f(Re_B)$ . Třecí součinitel můžeme také pohodlně určit dle obr. 10.12, kde  $\lambda = 4.f.$

Obr. 10.13 Závislost  $Re_{kr}=f(He)$ Obr. 10.14 Závislost  $Re_{kr}=f(He_2)$ 

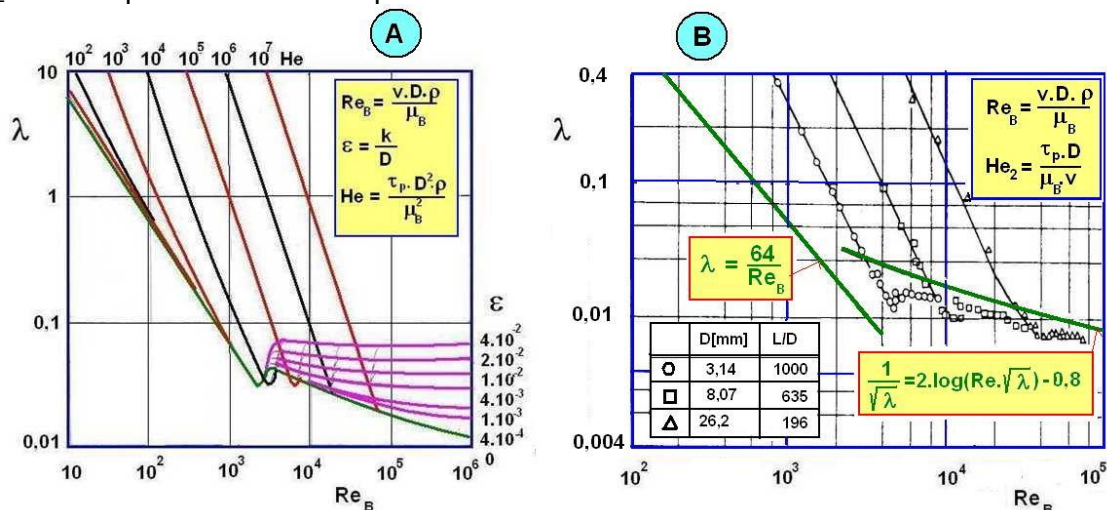
Kritickou hodnotu Reynoldsova čísla, při kterém se laminární proudění mění v turbulentní můžeme určit dle experimentálních výsledků uvedených na obr. 10.13 a 10.14. Protože explicitní vyjádření třecího součinitele podle rovnice (10.45) je obtížné, s vysokou přesností je možné použít následující rovnice pro výpočet  $\lambda$ , které byly získány metodou nelineární regrese z Churchillovy rovnice

$$\lambda = 8 \left[ \left( \frac{8c}{Re_B} \right)^{12} + (a + b)^{-1,5} \right]^{-\frac{1}{12}}, \quad (10.46)$$

kde

$$a = \left\{ -2,457 \ln \left[ \left( \frac{7}{Re_B} \right)^{0,9} + 0,27 \varepsilon \right] \right\}^{16}; \quad b = \left[ \frac{37530c}{Re_B} \right]^{16}; \quad c = \left[ 1 + 0,105 \left( \frac{He}{Re_B} \right)^{1,01} \right]^{-0,9}.$$

Graficky je tato rovnice znázorněna na obr. 10.15A, kde je také uvedena turbulentní oblast proudění, která je převzata z proudění Newtonské kapaliny. Přechod laminárního proudění v turbulentní pro Binghamovu kapalinu podle výsledků měření nastává v okamžiku, kdy čára  $He_2 = \text{konst.}$  protíná Blasiusovu přímku – obr. 10.15B.

Obr. 10.15 Závislost  $\lambda = f(Re_B, He, \varepsilon)$ 

### 10.3. Měření viskozity

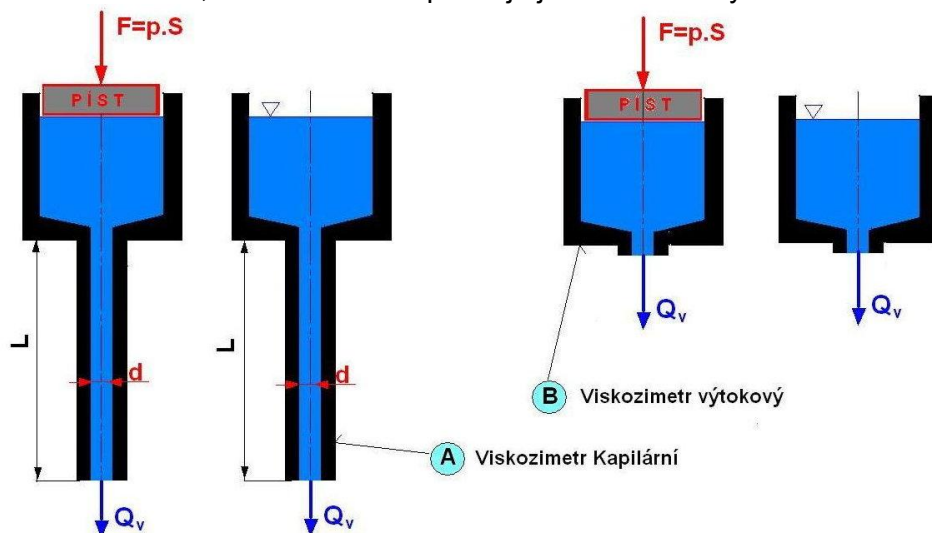
Zjišťování tokových křivek neneutronovských kapalin je úloha značně obtížná, hlavně u suspenzí. Viskozita se prakticky nedá měřit u suspenzí nestabilních, tj. u takových, kde dochází během krátké doby k rozvrstvení.



Pro měření viskozity a tokových křivek se používá viskozimetrů. Z mnoha známých a vyráběných přístrojů se pro neneutronovské kapaliny hodí pouze takové přístroje, u kterých je geometrie toku jednoznačně definována a u nichž můžeme určit hodnotu gradientu rychlosti  $j=du/dr$  a jemu odpovídající hodnotu tečného napětí. Nebudou vhodné takové přístroje, kde není měřeno laminární proudění, kde není definována geometrie toku a kde není možno přímo odečítat hodnoty tečného napětí a jemu odpovídající rychlost smykové deformace.

Těmto podmínkám vyhovují pouze viskozimetry kapilární – obr. 10.16A, kde proudění kapaliny se řídí Poiseuillovým zákonem, viskozimetry rotační, pro které platí Couettovo proudění v mezikruží dvou souosých, navzájem se otáčejících válců a viskozimetry kuželové, pro které platí rovněž Couettovo proudění jako zvláštní případ proudění ve štěrbině mezi deskou a rotujícím kuželem.

Do skupiny nevhodných přístrojů patří také, kde se viskozita měří podle délky doby vytékání kapaliny otvorem nebo krátkou kapilárou – obr. 10.16B, např. viskozimetr Englerův. Mezi nevhodné přístroje je třeba zařadit i ty, které jsou založeny na Stokesově zákonu, tj. přístroje s padajícím tělískem (kulička, váleček). Sem patří velmi rozšířený Höpplerův, který používá padající koule. Rychlost smykové deformace i velikost tečného napětí není na obtékané kouli konstantní, kromě toho se uplatňuje ještě i vliv stěny na obtékání koule.



Obr. 10.16 Schéma kapilárních viskozimetrů

Viskozimetry kapilární a rotační, které jsou jedině vhodné pro zjišťování tokových křivek neneutronovských kapalin, vykazují v případě měření suspenzí jisté potíže. Především se nedají použít pro nestabilní suspenze.

Další problém je nehomogenita měřeného vzorku, jejíž příčina je sedimentace pevných částic, která se škodlivě uplatňuje u obou typů viskozimetrů. Tento vliv se obvykle odstraňuje mícháním suspenze v zásobníku kapilárního viskozimetru a nahrazením rotačního válce vhodným míchadlem u viskozimetrů rotačních. Další komplikací, která se projevuje pouze u rotačních viskozimetrů, je odstředování částic suspenze. Měření, při nichž dochází k tomuto jevu se ovšem musí považovat za neplatná. U suspenzí dochází v některých případech k odpuzování mezi stěnou přístroje a částicemi, což může mít příčinu v silách elektrických nebo povrchových. V takových případech vznikne těsně u stěny film čisté kapaliny, bez dispergovaných částic, takže těsně u stěny se částice nezúčastní přenosu tečného napětí, což přirozeně značně zkresluje výsledky. Tuto nesnáz, která se nazývá skluzem u stěny, lze někdy odstranit změnou materiálu měřícího elementu. Někdy postačí úprava povrchu, tj. odmaštění, vychlazení nebo naopak zdrsňení stěn, které se suspenzí přichází do styku.

Při použití kapilárních viskozimetrů, jak již bylo uvedeno, je nejdůležitější dodržet laminární proudění v kapiláře, nedoporučuje se však pracovat až po kritickou hodnotu  $Re = 2300$  a měření provádět do hodnoty  $Re = 1000$ , jinak vzniká nebezpečí vzniku rušivých vírů. U kapilárních viskozimetrů můžeme obvykle měřit objemový průtok a tlakový spád

vzniklý na kapiláře. Za předpokladu, že známe parametry kapiláry, tj. průměr a délku, můžeme z rovnice (10.10) a (10.29) vypočítat smykové napětí na stěně  $j_s$  a gradient rychlosti na stěně

$$\tau_s = \frac{\rho_z R}{2L}, \quad (10.10)$$

$$j_s = \frac{4Q_v}{\pi R^3} = \frac{4Q_v}{SR} = \frac{4v}{R}, \quad (10.19)$$

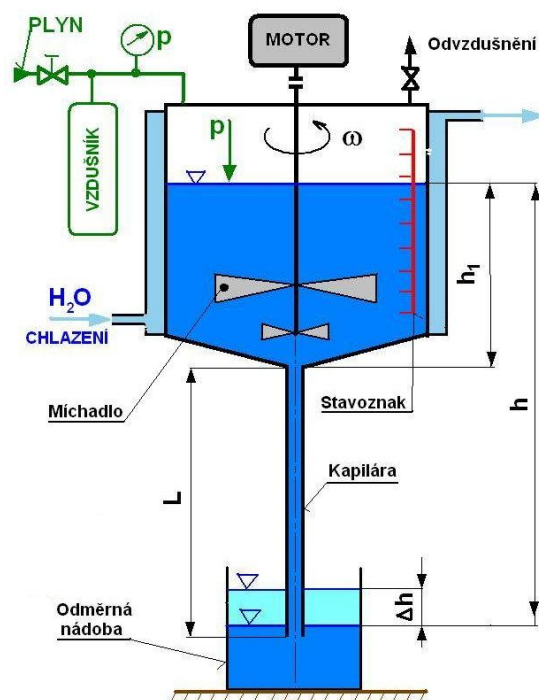
respektive zdánlivou viskozitu

$$\mu_a = \frac{\tau_s}{j_s}. \quad (10.2)$$

U kapilárních viskozimetrů se nejčastěji používá provedení s konstantním tlakovým spádem a měří se objemový průtok kapaliny. Tlakový spád se v tomto případě vytváří buď sloupcem měřené kapaliny, jehož výška se mění v několika polohách, nebo tlakem inertního plynu na hladinu, a to buď prostřednictvím pístu (tzv. výtlačné viskozimetry) – obr.10.16A. Výtok z kapiláry může být proveden tak, že kapalina vytéká do prostředí vyplněného kapalinou tzv. provedení Ostwaldovo, nebo ve druhém případě kapalina vytéká do volného prostoru, který je zvláštním otvorem spojen s atmosférou, tzv. provedení Ubbelohdeovo.

Nejdůležitějším a nejchoulostivějším místem kapilárních viskozimetrů je právě kapilára a její vestavění do přístroje. Pravidlem bývá možnost výměny několika měrných kapilár o různých průměrech a o různých délkách. U kapiláry je nutné znát vedle délky i její průměr a pro přesná měření je vhodné se přesvědčit o ovalitě a kuželovosti kapiláry.

Jedno z možných řešení kapilárního viskozimetru, který je proveden jako přetlakový, je uveden na obr. 10.17. Kapilára je např. pomocí převlečné matice připojena do kuželového víka s uzávěrem. Nádoba viskozimetru je opatřena vnějším pláštěm, čímž je umožněno temperování vzorku pomocí proudící vody udržované na konstantní teplotě termostatem. Plyn se přivádí do nádoby viskozimetru přes redukční ventil, max. tlak může dosahovat hodnoty několik MPa. K omezení pulsací tlaku je do přívodního potrubí plynu zapojen vzdušník. Nádoba viskozimetru je opatřena míchadlem, poháněné elektrickým motorem, nálevným otvorem a měřítkem výšky hladiny. Objemový průtok se obvykle měří buď pomocí stopek a odměrné nádoby, nebo vážením, což je přesnější.



Obr. 10.17 Přetlakový kapilární viskozimetr

Celkový tlakový spád se skládá z tlaku plynu na hladině a hydrostatického tlaku. Není-li kolísání hladiny ve viskozimetru během jednoho měření velké, může se zanedbat a do výpočtu je možné zahrnout průměrnou výšku při jednotlivých měřeních. Tlakový spád je nutné zmenšit o korekci koncových efektů, stanovenou podle rovnice

$$\rho_k = \frac{\alpha \rho Q^2}{\pi R^2}, \quad (10.47)$$

kde součinitel  $\alpha$  má obvykle hodnotu blízkou 1.

Přímým výsledkem měření na kapilárním viskozimetru je soustava údajů tlakového spádu a k němu příslušného průtoku. Jako první se nejdříve určí  $\tau_s$  a  $j_s$  a nakreslí se reogram, který se pokusíme interpretovat některou rovnicí toku, nejčastěji pomocí mocninové rovnice Oswald-de Waeleovy.

Rovnici (10.14)

$$Q = \pi \frac{n}{3n+1} \left( \frac{\rho_z R}{2LK} \right)^{\frac{1}{n}} R^3 = \pi \frac{n}{3n+1} \left( \frac{\tau_s}{K} \right)^{\frac{1}{n}} R^3, \quad (10.14)$$

s použitím rovnice (10.19) -  $j_s = 4 \cdot Q / \pi \cdot R^3$  upravíme na

$$j_s = \frac{4n}{3n+1} \left( \frac{\tau_s}{K} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (10.48)$$

odkud pro  $\tau_s$  platí

$$\tau_s = K \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^n j_s^n. \quad (10.49)$$

Logaritmováním této rovnice dostaneme

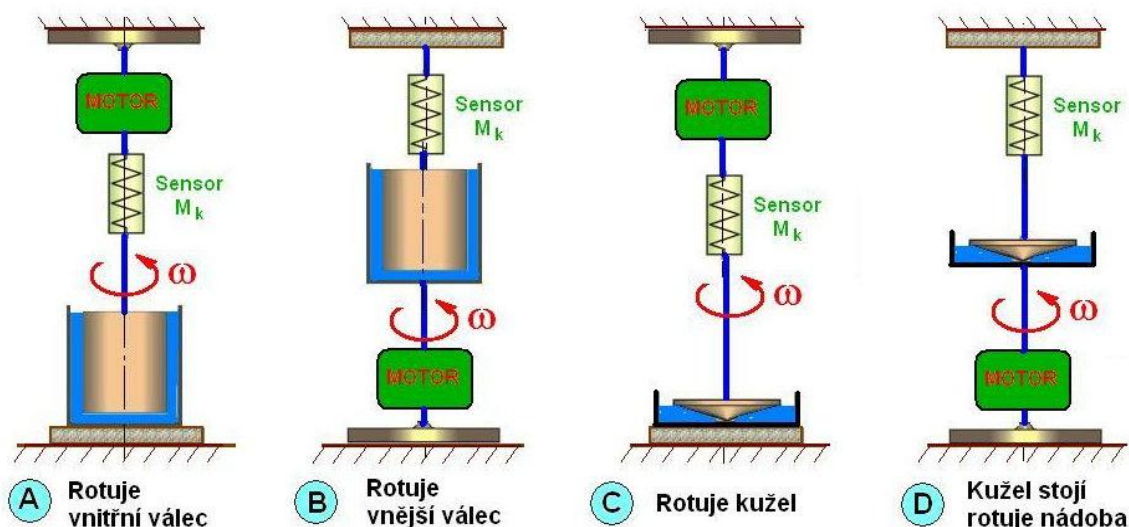
$$\log \tau_s = \log K + n \cdot \log \frac{3n+1}{4n} + n \cdot \log j_s, \quad (10.50)$$

což je v souřadnicích  $\tau_s$  a  $j_s$  přímka.

Její směrnici je přímo index toku  $n$  měřeného vzorku a z úseku na ose pořadnic pro hodnotu  $j_s = 1$  najdeme hodnotu výrazu

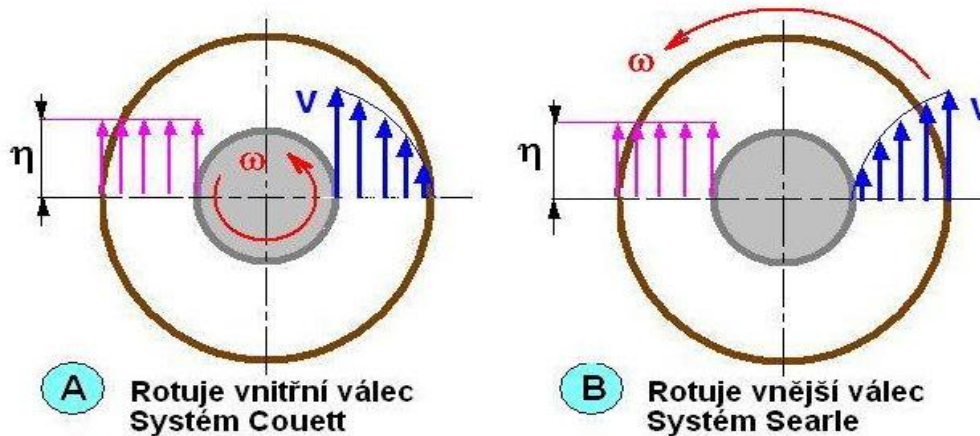
$$K \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^n,$$

a z toho pomocí známé hodnoty indexu toku  $n$  vypočteme velikost koeficientu konsistence  $K$ . Obdobně se postupuje při vyhodnocování i v případě použití ostatních rovnic toku.



Obr. 10.18 Schématické znázornění rotačních viskozimetrů

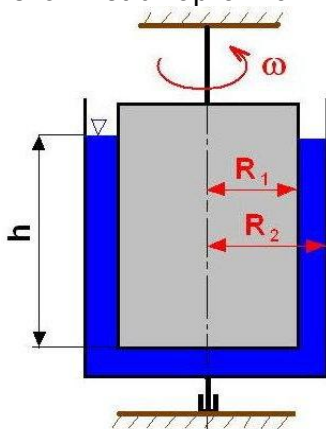
Přiblížení k pomyslnému pokusu o stanovení viskozity mezi dvěma nekonečnými rovnoběžnými plochami se dá dosáhnout přechodem na soustavu dvou sousých válců, otáčejících se navzájem kolem společné osy. Na tomto principu jsou založeny rotační viskozimetry. Přímo měřitelnými veličinami u rotačních viskozimetrů je úhlová rychlost  $\omega$  nebo počet otáček za čas ustáleného pohybu jednoho z válců a dále údaje o odporu kapaliny proti smykovému namáhání v důsledku vzniku gradientu rychlosti. Tento odpor se projevuje jako kroučící moment, kterým se jeden z válců přístroje brání proti pohybu přenášeného kapalinou z druhého válce. Rotační viskozimetry se používají ve dvou provedeních a sice dva sousé válce nebo kužel – deska – obr. 10.18. U systému s rotujícím sousým válcem



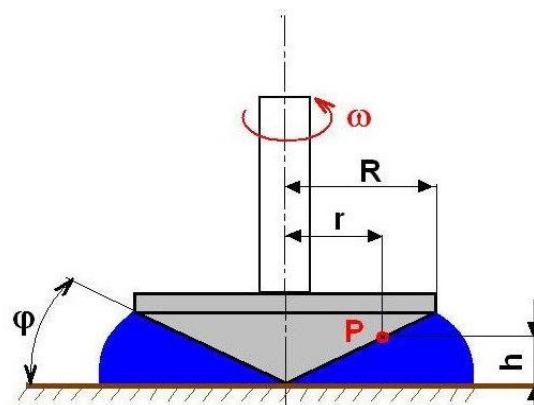
Obr. 10.19 Rychlostní profil mezi rotujícími válci

mohou nastat dva případy a sice, že se otáčí vnitřní válec, potom se jedná o Couettovo proudění – obr. 10. 19A, nebo rotuje vnější válec a jedná se o systém Searle – obr. 10.19B. V podstatě nezáleží u těchto viskozimetrů na tom, který z obou válců se otáčí, neboť pro vlastní výpočet stačí uvažovat jen relativní rychlost obou válců. Na základě praktických zkušeností je obvykle doporučováno uspořádání s otáčivým vnitřním válcem.

V současné době existuje celá řada různých konstrukcí rotačních viskozimetrů, které se hlavně liší provedením pohonu otáčejícího se válce a způsobem měření kroučícího momentu. Na obr. 10.20 je uvedeno schéma viskozimetru s označením potřebných veličin. Převod základních dat, tj. kroučícího momentu  $M$  úhlové rychlosti  $\omega$  nebo otáček  $n$  na základní veličině, tj. smykové napětí  $\tau$  a rychlost smykové deformace  $j_s$  je obtížnější než u viskozimetrů kapilárních



Obr. 10.20 Schéma rotačního viskozimetru



Obr. 10.21 Viskozimetr kužel-deska

Tak např. pro mocninovou rovnici toku se dá pro rotační viskozimetr odvodit rovnice



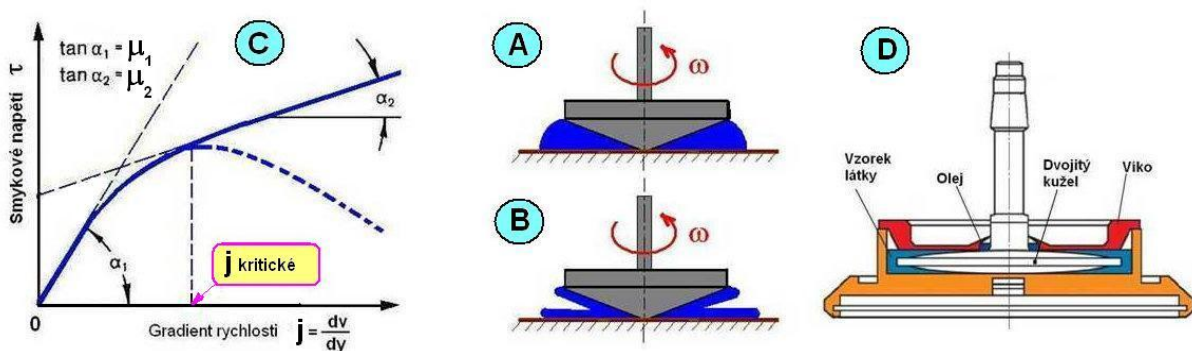
$$\omega = \frac{nM^{\frac{1}{n}}}{2K^{\frac{1}{n}}(2\pi h)^{\frac{1}{n}}} \left[ \left( \frac{1}{R_1^2} \right)^{\frac{1}{n}} - \left( \frac{1}{R_2^2} \right)^{\frac{1}{n}} \right]. \quad (10.51)$$

Logaritmováním přejde rovnice (10.70) v souřadnicích  $\omega = f(M)$  v přímku, jejíž směrnice je index toku  $n$  a z úseku na ose pořadnic pro  $M = 1$  určíme hodnotu  $K$ .

Viskozimetr typu kužel-deska je velmi vhodný přístroj pro měření viskozity neneutronovských kapalin, hlavně pro jednoduchost výpočtových rovnic (konstantní gradient rychlosti v mezeře). Může být v provedení, že rotuje kužel – obr.10.18C proti stojící desce, nebo kužel stojí a rotuje deska s měřenou kapalinou – obr.10.18D. Schéma tohoto přístroje je na obr. 10.21. Pro velikost tečného napětí lze z Navier-Stokesových rovnic odvodit vztah

$$\tau = \frac{3M}{2\pi R^3}. \quad (10.52)$$

Rychlost smykové deformace lze odvodit následující úvahou: v libovolně zvoleném bodě  $P$  na poloměru  $r$  je rychlost  $r\omega$ , přičemž jeho vzdálenost od nepohyblivé desky je  $h = r \cdot \text{tg } \varphi$ .



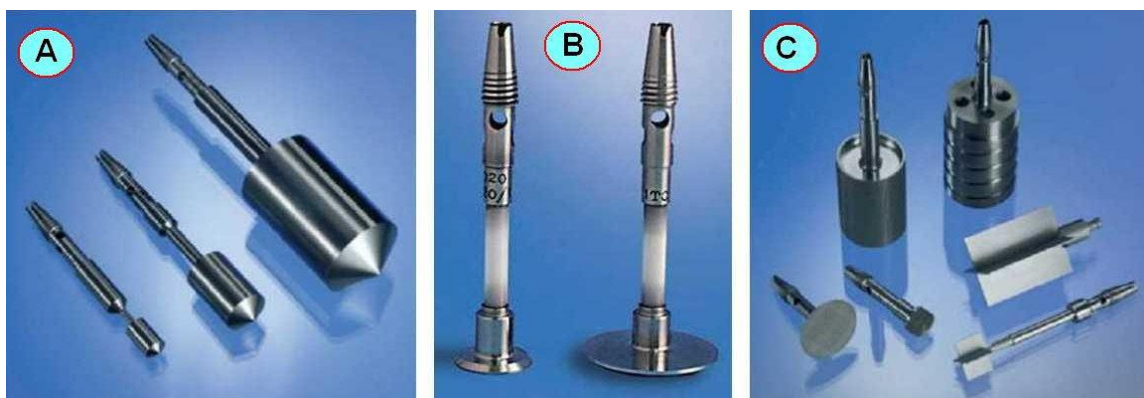
Obr. 10.22 Viskozimetr kužel - deska

Gradient rychlosti je tedy v prvním přiblížení

$$j_s = \frac{r\omega}{h} = \frac{\omega}{\text{tg } \varphi} = \frac{\omega}{\varphi}, \quad (10.53)$$

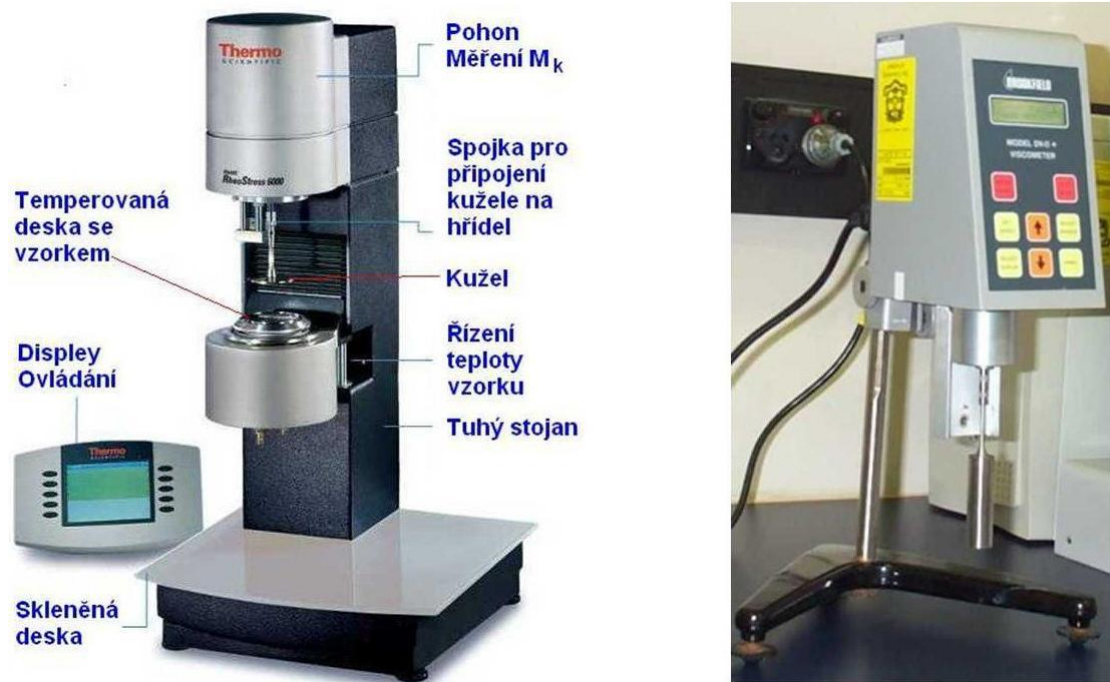
pro  $\varphi$  v radiánech. Jak vyplývá z rovnice (10.53), je gradient rychlosti rovnoměrný v celém vzorku. Rovnice (10.52) a (10.53) platí s dostatečnou přesností i pro neneutronovské kapaliny a jednoduchost těchto rovnic je hlavním důvodem použití tohoto typu viskozimetru.

Viskozimetr kužel deska má z hlediska velikosti otáček jisté omezení – obr. 10.22, poněvadž kapalina za jistých kritických otáček se dostane do stavu dle obr. 10.22B a měřená velikost viskozity podle obr. 10.22C pak neodpovídá skutečnosti. Viskozimetr kužel deska se také provádí s oboustranným kuželem - obr. 10.22D.



Obr. 10.23 Ukázka válců a kuželů rotačních viskozimetrů

Na obr.10.22A je uvedeno jedno z možných provedení rotujících válců, obr. 10.22B uvádí rotující disk, který se rovněž pro měření viskozity používá, obr. 10.22C uvádí vnitřní válec, který má na povrchu vytvořenou spirálu, toto provedení se používá při měření viskozity suspenzí. Na obr. 10.22C jsou uvedeny i jiné elementy, které se u rotačních viskozimetrů pro měření viskozity používají



Obr. 10.24 Ukázka dvou rotačních viskozimetrů

Praktické provedení rotačních viskozimetrů od dvou různých výrobců je na obr.10.24, ke standartnímu vybavení patří sada válců nebo kuželů s různou geometrií, viskozimetry jsou vybaveny zařízením pro ohřev vzorku, zpracování naměřených výsledků zajišťuje PC.

## 11. Turbulentní proudění

Molekula plynu podle kinetické teorie se pohybuje náhodnou rychlostí v čase i prostoru, molekuly plynu se navzájem srážejí, nebo narážejí na stěnu nádoby, což se projevuje jako statický tlak. Pro ideální plyn při tlaku  $1,013 \cdot 10^5$  Pa a teplotu  $0^\circ$  C je střední volná dráha molekul  $l = 0,06 \mu\text{m}$ , čas mezi jednotlivými nárazy molekul  $\Delta t = 1,3 \cdot 10^{-10}$  s, nejpravděpodobnější velikost rychlosti molekul pak činí  $c = 485$  m/s. Pro srovnání molekulárního a turbulentního přenosu hybnosti je uvedeno Avogadrovo číslo ideálního plynu –  $A = 6,02 \cdot 10^{23}$  molekul/mol, tomu odpovídá objem ideálního plynu  $24,414$  dm<sup>3</sup>/mol. Důsledkem tohoto náhodného pohybu je vznik vnitřního tření v proudící tekutině. U laminárního proudění se částice tekutiny pohybují uspořádaně, částice tekutiny se však skládají z molekul a tyto se pohybují náhodným neuspořádaným pohybem. Pohyb těchto molekul můžeme považovat za složený z uspořádaného makroskopického pohybu a náhodných fluktuací. Vlivem fluktuací se může dostat molekula z oblasti větší makroskopické rychlosti do oblasti menší makroskopické rychlosti a při nárazu na jinou molekulu se zpomalí, přičemž molekulu, na níž narazila se zrychlí a odevzdá jí část své hybnosti. Opačně je tomu, přechází-li molekula z oblasti menší rychlosti do oblasti větší rychlosti, kdy se její hybnost při nárazu zvětší. Tak dochází ke sdílení hybnosti mezi oblastmi tekutiny s rozličnou rychlostí, což se projevuje jako vnitřní tření tekutiny.

Turbulentní proudění si můžeme představit jako náhodný pohyb částic tekutiny, tedy objemů obsahujících velké množství molekul, přičemž pohyb částic se skládá z uspořádaného středního pohybu a z náhodných fluktuací, z čehož vyplývá analogie mezi chováním molekuly a chováním částice tekutiny. Je nutné však připomenout, že turbulentní pohyb je pohyb kontinua, naopak u molekul se jedná o pohyb diskrétních částic, jejichž volná dráha je menší než střední měřítko turbulentního pohybu. U turbulentního proudění vzniká tečné napětí, které není určeno pouze vnitřním třením v tekutině a rychlostním gradientem jako u laminárního proudění, ale změnou hybnosti makroskopických částic následkem jejich pronikání mezi sousední vrstvy. Tento neuspořádaný pohyb vyvolá tzv. přídavná turbulentní napětí, také nazývaná napětí Reynoldsova.

Pro tečné napětí při turbulentním proudění tekutiny  $\tau_T$  lze použít tzv. Boussinesqovu hypotézu. Tato hypotéza předpokládá, že podobně jako při laminárním proudění, kdy platí ve zjednodušeném dvourozměrném proudění pro smykové napětí Newtonův vztah

$$\tau_l = \eta_l \frac{du}{dy},$$

jsou turbulentní napětí a turbulentní toky úměrné gradientu střední rychlosti

$$\tau_t = \eta_t \frac{du}{dy}.$$

Obecně pro 3D proudění

$$\tau_t = -\rho \overline{u'_i u'_j} = \eta_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}$$

kde je  $k = \frac{1}{2} \overline{u'_j u'_j}$  turbulentní kinetická energie

$\eta_t$  turbulentní viskozita

$\frac{du}{dy}$  gradient střední rychlosti turbulentního proudu

$\delta_{ij}$  jednotkový tenzor – Kronekerovo delta

Turbulentní viskozita není fyzikální konstantou jako u proudění laminárního, nýbrž je složitou funkcí závislou na stavu proudící tekutiny, poloze uvažovaného bodu a tvaru rychlostního pole. V obecném případě je výsledné tečné napětí  $\tau$  dáno součtem napětí laminárního a turbulentního



$$\tau = \tau_l + \tau_t = \eta_l \frac{du}{dy} + \eta_t \frac{du}{dy} .$$

Jestliže je proudění tekutiny v celém rozsahu laminární a u turbulentního proudění v těsné blízkosti u stěny (oblast laminární podvrstvy), kde sdílení hybnosti fluktuacemi je zanedbatelné, platí

$$\tau = \tau_l = \eta_l \frac{du}{dy} .$$

V přechodné vrstvě je podíl obou způsobů sdílení hybnosti zhruba stejný.

V turbulentní vrstvě je podíl obou způsobů sdílení hybnosti pohybem molekul zanedbatelný proti sdílení hybnosti fluktuacemi a platí

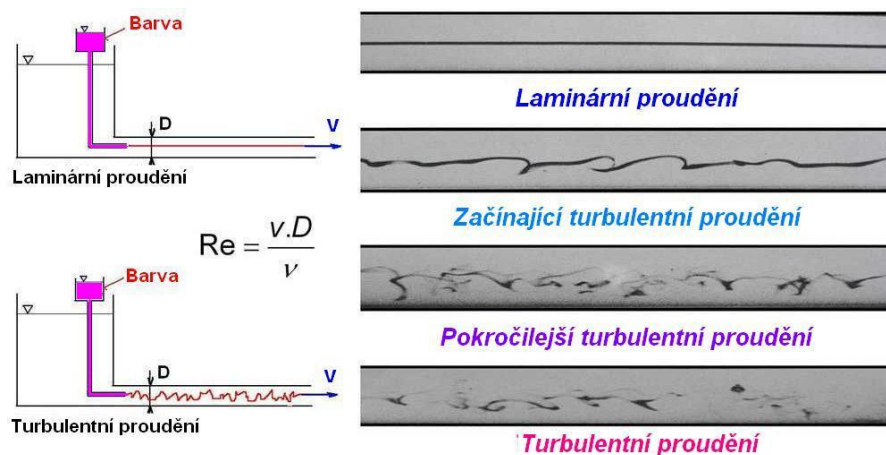
$$\tau = \tau_t = \eta_t \frac{du}{dy}$$

Jednoduchý vztah pro tečné napětí při laminárním proudění umožňuje poměrně snadno určit rychlostní profil nebo součinitel tření. Složitější jsou však poměry u proudění turbulentního, kde vyjádření tečného napětí není možné tak jednoduchým vztahem.

### 11.1. Vznik turbulence

Turbulentní proudění tekutin patří k nejvýznamnějším a nejrozšířenějším pohybům hmoty v přírodě i technické praxi, jako např. proudění atmosféry, proudy pod povrchem oceánů, úplavy za přírodními překážkami, za stavbami, loděmi, vozidly, letadly, proudění v potrubích, kanálech, paprscích, apod. Důležitost zkoumání turbulence je známa od druhé poloviny 19. století a vyplývá z toho, že zákonitosti turbulentního proudění se výrazně uplatňují při přenosových jevech, tj. určují velikost ztrát při proudění, velikost přestupu tepla a výrazně se uplatňují i v procesech difuze. Za více jak 100 let výzkumu turbulence se dosáhlo značného pokroku v poznání jevů a procesů v turbulentním proudění. Přesto dosud neexistuje obecný přístup k řešení turbulence a stále jsme daleko od pochopení a exaktního popisu tohoto složitého přírodního jevu. Vznik a existence turbulentního proudění jsou možné pouze u skutečných, tj. vazkých tekutinách, ve kterých působí vnitřní tření.

Na konci 19. století Reynolds zjistil a formuloval, že se tekutina může pohybovat dvěma kvalitativně zcela odlišnými typy proudění, které pak byly nazvány laminární a turbulentní. Rozhraní mezi oběma druhy proudění nám udává Reynoldsovo kritické číslo. Jeho hodnota je závislá na řadě parametrů např. na geometrii proudu, tlakovém spádu, atd. Pro potrubí kruhového průřezu je spodní mez asi 2 000. Pro ustálené laminární proudění je charakteristické, že se částice tekutiny pohybují po paralelních drahách, jednotlivé vrstvy se navzájem nemísí (neuvažujeme molekulární difúzi). Laminární proud vytékající z vodovodu má hladký povrch jako skleněná tyč. Pro turbulentní proudění jsou typické pulsace všech veličin včetně rychlosti. Trajektorie částic tekutiny jsou nepravidelné, dochází k intenzivnímu



Obr. 11.1 Reynoldsův pokus

promíchávání celého objemu proudící tekutiny. Tak např. povrch turbulentního proudu vody vytékajícího z vodovodu je proto nepravidelný, "drsňý" a proud je neprůhledný.

Existenci laminárního proudění v potrubí kruhového průřezu názorně ukazuje Reynoldsův pokus – obr. 11.1. Do potrubí se přivádí tenkou trubičkou obarvená tekutina. Při malých rychlostech proudu zůstane barevné vlákno neporušeno, jeví se v potrubí jako přímka, barvivo zůstává v proudnici do které bylo zavedeno, z čehož vyplývá, že pohyb se děje ve vrstvách a částice proudící tekutiny se nepromíchávají. Při postupném zvyšování rychlosti proudění od velmi malé hodnoty se zpočátku pozoruje jen nepatrné rozšiřování vláknů barvy, neboť ta difunduje do okolí pouze molekulárními pohyby, proudění je laminární. Zvětší-li se rychlost nad její kritickou hodnotu, dochází k intenzivnímu míšení částic tekutiny, následkem jejich podružných (turbulentních fluktuací) pohybů ve všech směrech. Částice tekutiny vedle postupného pohybu ve směru osy trubky se začínají neuspořádaně pohybovat a neustále přecházejí z jedné vrstvy do druhé, přičemž dochází k výměně kinetické energie a jejich rychlosti se po průřezu značně vyrovnávají. Nastává přechod do turbulentního proudění, při kterém je difuze barviva zprostředkována nejen molekulovými pohyby, ale zejména náhodnými pohyby turbulentních vírů, jejichž rozměry jsou zhruba o čtyři řády větší než je střední volná dráha molekul. Při postupném zvyšování Reynoldsova čísla, např. zvyšováním rychlosti proudění v potrubí, nedochází zpravidla ke změně proudění náhle – skokem, nýbrž v určitém, i když relativně malém intervalu Reynoldsových čísel - v potrubí kruhového průřezu asi od 2 000 do 4 000.

Slovo turbulence znamená nahodilost, nepravidelnost, divokost, bouřlivost, neukázněnost, nepokoj, zmatek. Zatím není jednotná definice turbulentního proudění, v jednotlivých definicích se zdůrazňují zpravidla jen některé znaky. Turbulentní proudění je trojrozměrný, časově proměnný pohyb tekutiny, při němž každá veličina např. rychlost, tlak, hustota, teplota ap. (pokud není z některých důvodů konstantní) se mění více méně nahodile. Náhodné (chaotické, stochastické) rysy turbulentního proudění jsou dominantní. Nelze však asi definovat turbulentní proudění za "zcela nahodilé", jednak i turbulentní proudění je popisováno základními rovnicemi pro prostorové proudění, jednak turbulentní proudění obsahuje uspořádané skupiny vírů zvané "koherentní struktury". K těmto poznatkům se dospělo během posledních několika desítek let, díky stále se zdokonalujícím experimentálním metodám. Vystává nyní otázka, zda je nahodilost fluktuací postačující k tomu, aby turbulentní proudění bylo popisováno statistickými metodami, nebo zda lze najít, jiné vhodnější metody. V praxi se mohou vyskytnout proudění, u kterých budeme na rozpacích, zda je zařadit do kategorie turbulentního nebo neturbulentního proudění. Periodická proudění (např. vlny na vodní hladině) se nepovažují za turbulentní proudění.

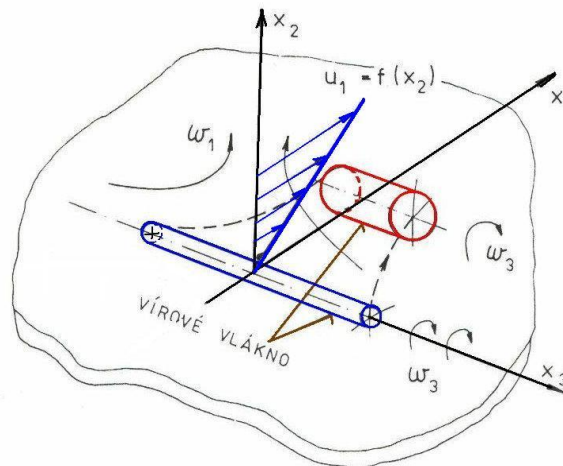
## 11.2. Přechod z laminárního na turbulentní proudění

Přechod z laminárního proudění do turbulentního popsal poprvé v roce 1883 Reynolds, který studoval proudění v kruhovém potrubí. Obdobou jeho experimentů je známý školský pokus s vypouštěním barvy do skleněné trubice, kterou proudí voda. Překročí-li se určitá rychlost, dosáhne poměr setrvačných a třecích sil, které působí na částice tekutiny, kritické hodnoty -  $Re=2300$  - a náhle se zabarví celý průřez potrubí.

Příčinou přechodu laminárního proudění do turbulence je ztráta stability laminárního proudění při zvyšování Reynoldsova čísla. Při ztrátě stability dochází k tomu, že slabé poruchy, vznikající nebo přecházející do laminárního proudění při Reynoldsově číslu vyšším než je kritická hodnota se vazkostí zcela neutlumí.

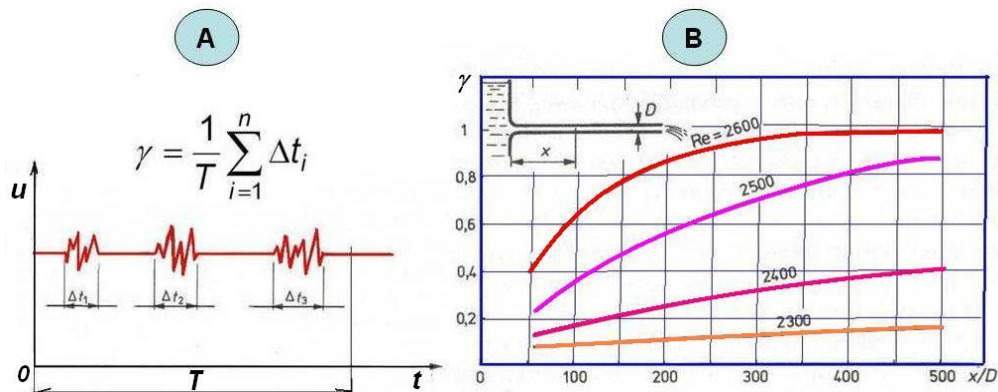
Přechod laminárního proudění v turbulentní je možné si vysvětlit na příkladě proudění v mezní vrstvě na hladké stěně - obr. 11.2. Stěnu si představíme jako svislou plochu vytvořenou z vírových vláken směřujících - unášených proudící kapalinou po rozpětí. Složky vířivosti  $\omega_1$  a  $\omega_2$  vyvolávají sekundární proudění, které způsobují smršťování části vírového vlákna. Protože sekundární proudění působí velmi krátkou dobu, zůstane cirkulace rychlosti vlákna zachována. Vlákno si zachová stejný objem, tudíž vzroste průměr vlákna. Tím se zpomalí jeho rotace a v místě smršťovaného vlákna poklesne okamžitě rychlost. Vznikají tak fluktuace rychlosti. Podle dnešních představ je vznik částice tekutiny pomalejší než je místní střední rychlost proudění. Prvním článkem vzniku mechanismu turbulence je tedy blízkost

tuhého obtékaného povrchu. Pro tyto případy proudění se zavádí pojem turbulence vynucená



Obr. 11.2 Schéma vzniku turbulence v mezní vrstvě na rovině desce

Přechod laminárního proudění do turbulentního je ještě stále studovaný, neuzavřený problém. Za příčinu vzniku turbulentního proudění se považuje nestabilita laminárního proudění při vyšších Reynoldsových číslech. Je-li Reynoldsovo číslo proudu  $Re$  větší než  $Re$  kritické, neznamená to však ještě, že by laminární proudění nemohlo existovat, ale je nestabilní a i malé poruchy proudění, vznikající např. ve vstupním průřezu téměř neustále, mohou být příčinou zhroucení laminárního proudu (analogický jev je štíhlá tyč namáhaná na vzpěr), neboť tyto odchylky od střední hodnoty exponenciálně narůstají. Je-li Reynoldsovo číslo menší než  $Re$  kritické, jsou tyto poruchy viskozitou tekutiny utlumeny.



Obr. 11.3 Vznik turbulentního proudění

Při určitých hodnotách Reynoldsova čísla se v potrubí objevují zprvu krátké úseky turbulentního proudu vystřídané delšími úseky laminárního proudění (turbulentní zátky) – obr. 11.3. Definujme jakou část celkové doby měření  $T$  zaujímají turbulentní „zátky“  $\gamma$ , proto platí rovnice

$$\gamma = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \Delta t_i .$$

Podle měření Rotta je na obr. 11.3 uvedena závislost  $\gamma = f(Re)$ , z této závislosti je vidět, že „turbulentní zátky“ jsou četnější při vyšších  $Re$  číslech.

Tento typ proudění se nazývá intermitentní proudění. S rostoucím  $Re$  jsou úseky turbulentního proudu stále delší a laminárního kratší až postupně laminární úseky zcela zmizí. Při průtoku potrubím se čelo turbulentní zátky pohybuje rychleji než její tyl a zátka se s rostoucí vzdáleností od vstupního průřezu stále více prodlužuje, až se v dostatečné vzdálenosti od vstupu do potrubí objevuje jen turbulentní proudění, i když se Reynoldsovo číslo proudění nemění.

Při turbulentním proudění je pak propustnost potrubí menší než by mohla teoreticky být při laminárním režimu, avšak turbulentní proudění je stabilnější. S laminárním a turbulentním prouděním se setkáme nejen při průtoku tekutin potrubím, tj. při vnitřních úlohách mechaniky tekutin, nýbrž i při obtékání těles, tj. při vnějších úlohách mechaniky tekutin.

Na počátku přechodu se tyto turbulentní rozruchy - stopy turbulence - objevují ojediněle a náhodně jak v čase, tak v prostoru. Dále po proudu je jejich náhodný výskyt stále častější. Přitom jsou unášeny proudem, s časem zvětšují svůj objem nebo se vzájemně spojují, ale stále zůstávají odděleny od neturbulentní tekutiny ostrou hranicí.

Proudění je tedy intermitentní, tj. s náhodnou délkou času se střídají v daném místě periody turbulentního a laminárního proudění. Na konci přechodové oblasti proudění jsou rozruchy, které náhodně vznikly v různých místech proti proudu.

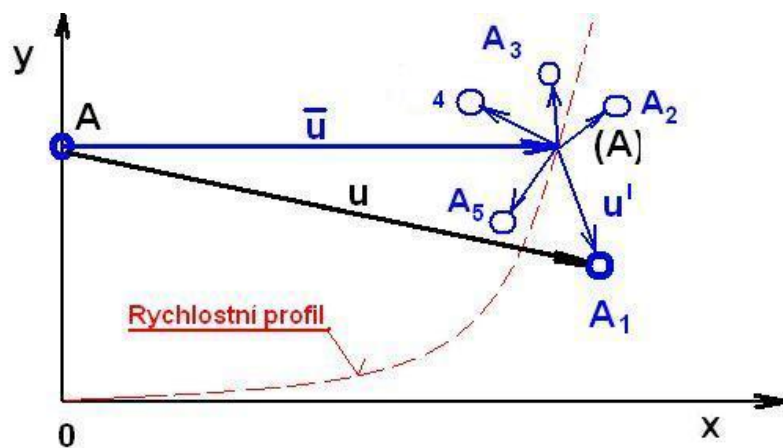
Podobná je i situace při proudění v potrubí, kde v důsledku gradientu rychlosti se vytvářejí vírová vlákna u stěny potrubí, ta jsou difusí transportována směrem ke středu, kde se v čase postupně rozpadají. Na stěně se však vytvářejí vlákna nová a celý proces se opakuje, proudění se jeví jako spojitě.

### 11.3. Charakteristiky turbulentního proudění

Pro turbulentní proudění jsou charakteristické následující vlastnosti:

a) náhodný charakter rychlosti i ostatních parametrů turbulentního proudění.

Sledujme pohyb makroskopické částice – obr. 11.4, která se v daném okamžiku nachází v poloze „A“, pohybuje se základní střední rychlostí  $\bar{u}$  ve směru osy x. Tato částice, která urazí v časové jednotce určitou dráhu, nezaujme polohu (A) jak by tomu bylo u laminárního proudění, ale polohu A<sub>1</sub> nebo některou z poloh A<sub>2</sub>, A<sub>3</sub> atd. Z toho je vidět, že částice má kromě podélné střední rychlosti  $\bar{u}$  jejíž koncové body v jednotlivých místech proudu určují rychlostní profil, ještě turbulentní (flukтуаční) rychlost  $u'$ . Tato flukтуаční rychlost se poměrně rychle mění v čase i prostoru co do velikosti i směru.



Obr. 11.4 Kinematika pohybu částice při turbulentním proudění

Reynolds navrhl vyjádřit okamžitou místní hodnotu rychlosti  $u$ , nebo jiné libovolné veličiny, která popisuje turbulentní proudění např. tlak, teplota, koncentrace apod., jako superpozici místní střední hodnoty  $\bar{u}$  a její fluktuace  $u'$  - obr. 11.5.

Střední hodnotou rychlosti  $\bar{u}$  za čas  $T$  vyjádříme integrálem, při čemž  $T \rightarrow \infty$

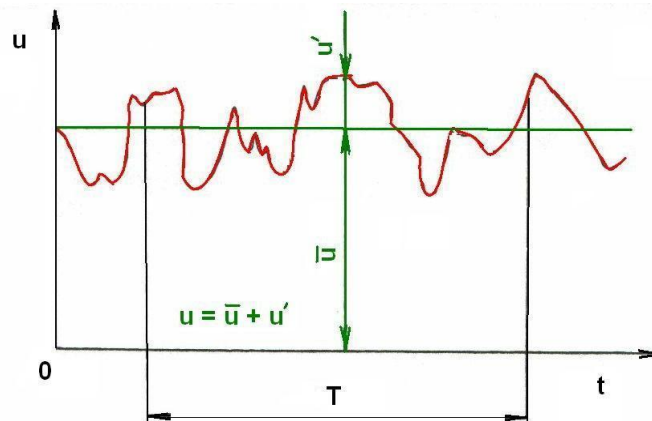
$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt. \quad (11.1)$$

Okamžitou hodnotu  $u$  lze pak vyjádřit jako součet hodnoty střední  $\bar{u}$  a flukтуаční  $u'$

$$u = \bar{u} + u'. \quad (11.2)$$

Střední hodnota fluktuací je rovna nule

$$\bar{u}' = \frac{1}{T} \int_0^T u' dt = 0. \quad (11.3)$$

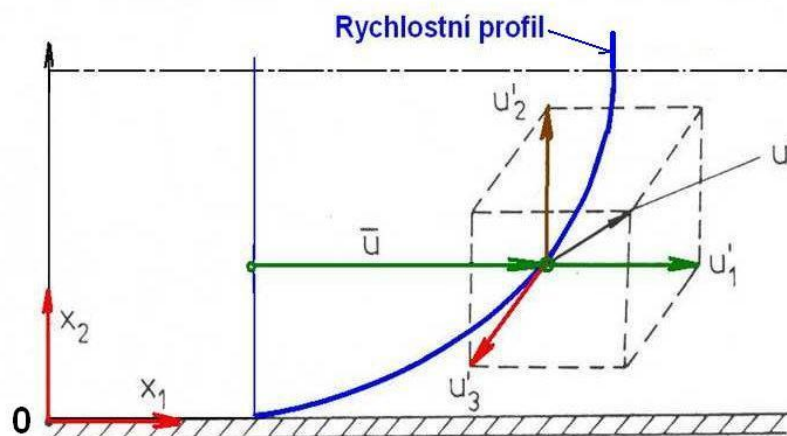


Obr. 4.5 Časový průběh rychlosti u turbulentního proudění

Podle vlastností zkoumaného proudového pole se volí vhodný způsob určení střední hodnoty. Tímto způsobem se přechází od krajně neuspořádaných a ostře se měnících polí okamžitých charakteristik proudění k víceméně uspořádaným a hladkým polím středních hodnot, pro které je možné určovat zákonitosti pomocí statistických metod. Je důsledkem nelineárnosti původních pohybových rovnic pro okamžité hodnoty, jak je dále podrobně odvozeno, že soustava středových (vyhlazených) rovnic není uzavřená. Uzavření této soustavy je hlavním problémem studia turbulence.

Všechny hydrodynamické veličiny, které popisují turbulentní proudění, mají náhodný charakter, obvykle s normálním rozložením, takže individuální popis proudového pole je prakticky nereálný. Proto se vyšetřují tato hydrodynamická pole jako soubor analogických polí a vyšetřují se časově vyhlazené charakteristiky tohoto souboru. Tento statistický popis je z praktického hlediska plně vyhovující k sestavení matematické teorie turbulence. Při praktickém využití se dále využívá ne středních hodnot dle souboru, ale středních hodnot dle času či dle souřadnic. Je třeba navíc vyžadovat, aby náhodné pole hydrodynamických veličin vyhovovalo teorii ergodičnosti, tzn. že všechny číselné charakteristiky libovolné náhodné veličiny se dají stanovit např. měřením z jedné dostatečně dlouhé realizace.

Jestliže turbulentní proudění z hlediska středního pohybu je jednorozměrné, např. v potrubí, potom z hlediska fluktuací rychlosti je toto proudění třírozměrné - obr. 11.6.



Obr. 11.6 Prostorové uspořádání flukтуаčních složek rychlosti

Ze tří složek turbulentních fluktuací rychlosti můžeme utvořit celkem devět korelačních momentů, tyto složky mají tenzorový charakter. Dá se dokázat, že tenzor je symetrický, potom se jedná o šest následujících korelačních momentů



$$\overline{u_1'^2}; \overline{u_2'^2}; \overline{u_3'^2}; \overline{u_1' u_2'}; \overline{u_1' u_3'}; \overline{u_2' u_3'}$$

Jsou-li flukтуаční rychlosti stejné ve všech směrech, tj. jsou nezávislé na volbě souřadného systému, pak hovoříme o turbulenci izotropní, pro kterou platí

$$\overline{u_1'^2} = \overline{u_2'^2} = \overline{u_3'^2} = \overline{u'^2} = konst \quad (11.4)$$

$$\overline{u_1' u_2'} = \overline{u_1' u_3'} = \overline{u_2' u_3'} = 0$$

Jestliže jsou tyto podmínky splněny ve všech bodech prostoru, pak jde o turbulenci homogenní a izotropní.

Podle rovnice (11.3) je střední hodnota flukтуаční složky rychlosti rovna nule. Proto se pro kvantitativní hodnocení turbulence zavádí veličina intenzita turbulence, určená jako poměr odmocniny ze střední hodnoty kvadrátu pulzační složky rychlosti ke střední rychlosti

$$I = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{\bar{u}}, \quad (11.5)$$

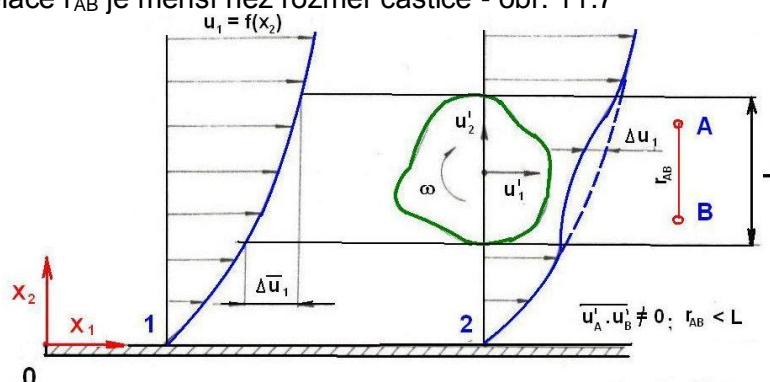
kde  $\overline{u'^2}$  je centrovaný moment druhého řádu daný rovnicí

$$\overline{u'^2} = \frac{1}{T} \int_0^T (u - \bar{u})^2 dt. \quad (11.6)$$

Nahodilost (stochastičnost, chaotičnost) změn je dominantní vlastností turbulence. Stupeň náhodnosti závisí na charakteristickém měřítku vyšetřovaného pohybu. Malé pohyby tekutiny způsobené turbulentními fluktuacemi lze považovat za stochastické. Způsobují zvýšenou disipaci energie, z hlediska dynamiky celého proudového pole nejsou rozhodující. Pohyby s větším měřítkem mají v určitém smyslu deterministický charakter. Jejich pohyby prostoru i čase je určen geometrií a parametry proudového pole, v určitém bodě je prakticky mění pouze fáze fluktuací ne charakter jejich stochastických vlastností. Tyto pohyby se obvykle označují jako koherentní struktury

b) Turbulentní proudění je vířivé.

V pojednání o turbulenci se často vyskytují pojmy turbulentní vír nebo turbulentní částice. Význam těchto pojmů je značně odlišný od významu, který se přisuzuje vírům v dokonalé tekutině nebo v laminárním proudění, protože poslední jmenované víry jsou ohraničeny proudnicí, obsahující stále tytéž částice tekutiny a jsou kvantitativně definovány. Turbulentní vír, který nejsme schopni kvantitativně definovat lze popsat jako částici tekutiny, ve které je rotace vektoru okamžité rychlosti nenulová a nahodile se pohybuje prostorem tak, že prostorová korelace libovolné složky  $u_i'$  i vektoru fluktuací rychlosti je nenulová, když vzdálenost korelace  $r_{AB}$  je menší než rozměr částice - obr. 11.7



Obr. 11.7 Vznik velkých vírů v mezní vrstvě

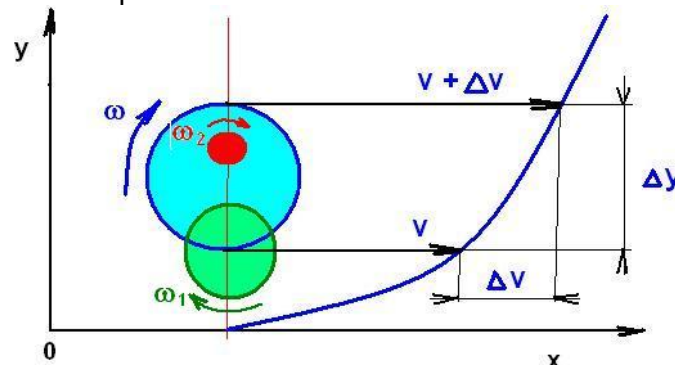
V současných představách o struktuře turbulence mají mimořádnou důležitost velké turbulentní víry, na které jsou vázány převážně části kinetické energie turbulence

$\bar{e} = \frac{1}{2} \rho \overline{u'_i u'_i}$  a turbulentního smykového napětí  $\tau_t = \rho \overline{u'_i u'_j}$ . Velké víry vznikají pouze z

takových zpomalených částic tekutiny, které jsou schopny získat energii na újmu energie středního proudění. Na obr. 4.7 je schematický příklad takové částice. Mezi průřezem 1 a 2 obtékané rovinné desky se vytvoří velký vír, což se v řezu 2 projeví tím, že rychlostní profil má menší hodnotu střední rychlosti než je tomu v bodě 1. Z charakteru turbulence vyplývá, že se tvarem, rozměry a vlastnostmi jednotlivé velké víry liší. Pokud se udávají některé parametry, týkají se středních hodnot pro statické soubory velkých vírů. Rychlost velkých vírů ve směru proudění činí  $u'_1 \approx 0,8\bar{u}_1$ , kolmo na směr proudění  $u'_2 \approx (0,05 \div 0,1)\bar{u}_1$ . Rozměr vírů odpovídá řádově příčnému rozměru oblasti proudění a určuje se jako délkové makroměřítko z křivky koeficientu příčné korelace. Ve srovnání s ostatními turbulentními víry je doba, po kterou si velké víry zachovávají svou osobitost asi o jeden řád větší. Odhaduje se z časové a prostorové korelace. Důsledkem této vlastnosti je dlouhá paměť proudění s velkými víry.

V proudění obsahující velké víry jsou zřejmě tendence vývoje k homogenní struktuře. To souvisí s tím, že vznik velkých vírů, jak bylo naznačeno, je jistý proces třídění turbulentních rozruchů, tj. na víry schopné či neschopné odebírat střednímu proudění energii.

Sledujme proudění tekutiny v blízkosti obtékaného povrchu – obr. 11.8. Na stěně je rychlost nulová a s rostoucí vzdáleností od stěny se rychlost zvětšuje, vytvoří se rychlostní profil jako důsledek viskozity proudící tekutiny. Zvolme náhodně v nějaké vzdálenosti od stěny objem tekutiny, pro jednoduchost ve dvourozměrném prostoru jako kružnici. Na jeho horní části je rychlost proudění větší než na části spodní. Dá se oprávněně předpokládat, že takto náhodně zvolený objem tekutiny v důsledku rozdílných rychlostí se začne otáčet – vířit, což je typická vlastnost turbulentního proudění. V tomto případě vířivé proudění bylo vyvoláno (způsobeno) gradientem rychlosti a tento byl zase vyvolán viskozitou proudící tekutiny. Budou-li vazkové síly dostatečně velké a k rotaci zvoleného objemu tekutiny nedojde, potom se jedná o laminární proudění.



Obr. 11.8 Vznik turbulentních vírů

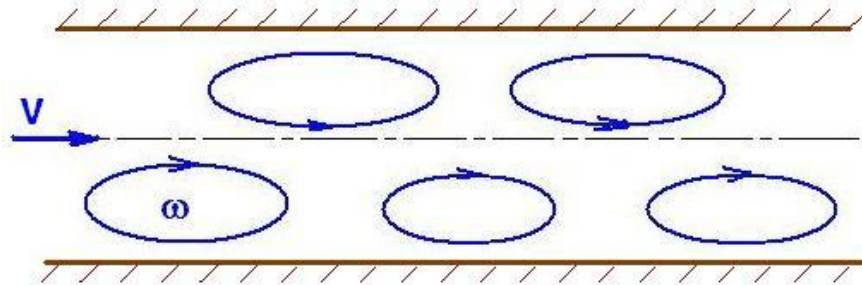
Velikost i souřadnici objemu jsme volili zcela náhodně. Jiný pozorovatel by volil objem proudící tekutiny o jiné velikosti i souřadnici, pro takto zvolený nový objem by rovněž platilo, že za jistých podmínek se začne otáčet – vířit. Oba objemy mohou být dokonce voleny i tak, že se navzájem překrývají jak je uvedeno i na obr. 11.8. Další pozorovatelé by dále mohli volit další rozdílné objemy tekutiny i jejich polohu od obtékané stěny, všechny takto zvolené objemy by se mohly pochopitelně otáčet – vířit. Je tedy pro turbulentní proudění typické, že proudící tekutina proudí ve směru kanálu, ale současně se pohybuje i vířivým pohybem.

Turbulentní víry však nejsou samostatné útvary, ale navzájem se překrývají, jinak řečeno turbulentní víry jsou superponovány jeden na druhém. Pouze při toku sypkých hmot jednotlivé částice se mohou rovněž otáčet, ale nemohou se překrývat. Touto vlastností se liší proudění tekutiny od proudění sypkých hmot. Dále můžeme volit další a další objemy tekutiny a pro všechny budou platit výše uvedené vlastnosti. Samozřejmě může nastat i případ, kdy jeden menší vír je celý superponován na vír větší – obr. 11.8.

Protože velikost vírů i jejich polohu vůči stěně jsme volili zcela náhodně, dá se očekávat, že rychlost tekutiny v turbulentním proudění bude náhodnou funkcí času, což jednoznačně potvrzují provedené experimenty při měření rychlost v turbulentním proudu. Z uvedeného výkladu vyplývá, že v turbulentním proudění existují víry různých velikostí, které jsou superponovány jeden na druhém.

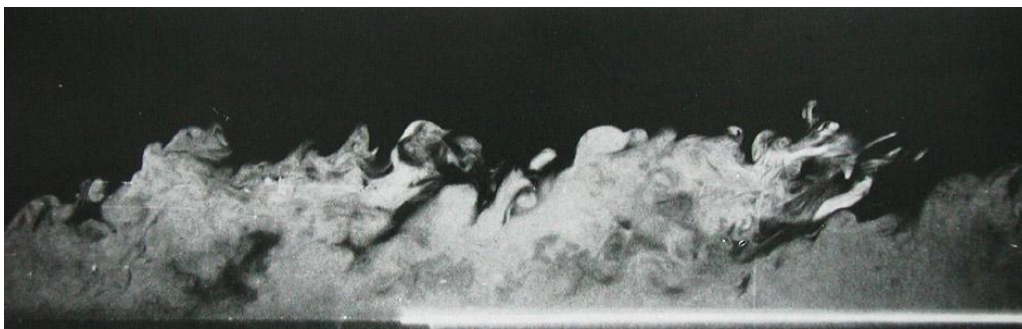


Největší víry mají obvykle rozměr řádově stejný jako je velikost kanálu ve kterém proudí tekutina, což uvádí schématicky obr. 11.9 pro kruhové potrubí nebo obdélníkovou mezeru. Víry v tomto případě mohou být protažené ve směru proudění. Obr. 11.9 je nakreslen velmi zjednodušeně, jednotlivé víry jsou kresleny jako samostatné útvary, ačkoliv se vzájemně překrývají. Odhad velikosti velkých vírů se dá provést z veličiny tzv. délkové makroměřítko turbulence, které se dá stanovit měřením.



Obr. 11.9 Schéma velkých vírů v potrubí

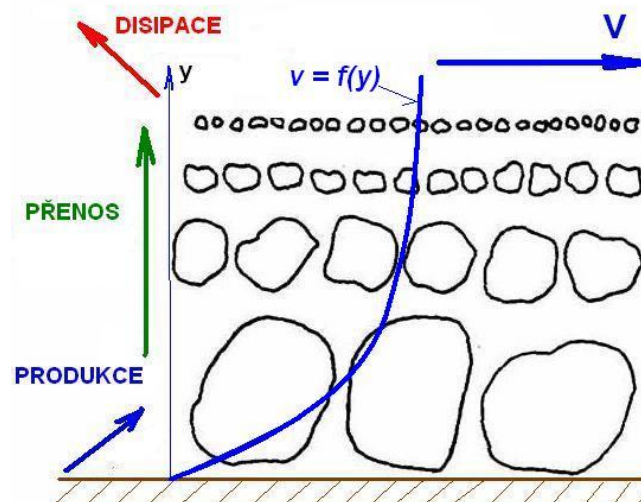
Strukturu turbulentního proudění v mezní vrstvě na obtékané desce názorně uvádí obr. 11.10, vizualizace byla provedena tzv. „světelným nožem“. Chaotický a vířivý pohyb je z tohoto obrázku dobře patrný



Obr. 11.10 Vizualizace turbulentního proudění v mezní vrstvě na obtékané desce

c) kaskádovitý přenos energie.

Turbulentní proudění obsahuje prostorové struktury, tzv. turbulentní víry různých velikostí. Velké víry obsahující energii se rozpadají na menší. Tento kaskádovitý proces je ukončen disipací energie nejmenších vírů na teplo- obr. 11.11.

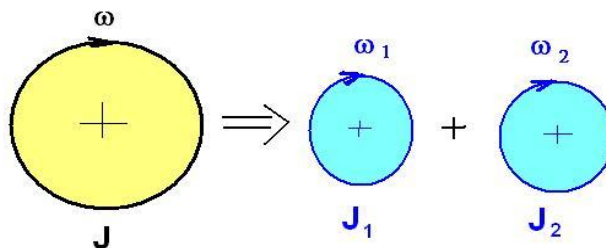


Obr. 11.11 Kaskáda turbulentních vírů

Vedle velkých turbulentních vírů jsou v každém místě turbulentního proudění turbulentní víry o různých, ale menších velikostech. Místní sekundární rychlosti vyvolané jednotlivými víry způsobují protažení těch blízkých vírů, jejichž osy rotace jsou shodně orientovány a které jsou menší než původce sekundárního proudění. Při každém protažení dochází k rozpadu vírů větších na víry menší a tím k přenosu kinetické energie od vírů větších, který protažení vyvolal, k nově vzniklému víru menšímu. Tento proces se nazývá kaskádovitým (stupňovitým) přenosem energie a je vlastní každému turbulentnímu proudění, přitom každý stupeň je vyznačen účinkem vírových elementů přibližně stejných rozměrů. Na každém stupni kaskády se zmenšuje velikost víru a tím i jeho délkové měřítko pohybu a rozruchu - víry se stále více blíží k izotropii. Tak jak klesá délkové měřítko, rostou místní gradienty složek vektoru turbulentních fluktuací rychlosti, a s tím roste disipace energie. Na určitém stupni kaskády - při jistém rozměru turbulentních vírů - se mechanická energie zcela disipuje. Rozměr disipujících turbulentních vírů je asi o dva až tři řády menší než rozměr velkých turbulentních vírů.

Při proudění s gradientem rychlosti – obr. 4.8 je možné pozorovat, že velké víry mají „omezenou délku života“. Jinak řečeno velký vír vznikne jako důsledek rychlostního gradientu, kinetickou energii odčerpá z tlakové energie proudící tekutiny. Zánik velkého víru vzhledem ke skutečnosti, že turbulentní proudění má náhodný charakter může probíhat podle následujícího schématu. Především je zapotřebí zdůraznit, že je méně pravděpodobné, že se dva víry budou spojovat a vytvářet tak víry stále větší a větší. Je však více pravděpodobné, že se velké víry budou rozpadat na víry menší a menší. Proces rozpadu vírů má však svoji hranici, protože nastane situace, kdy vazké síly již nedovolí, aby se malý vír dále rozpadal.

Při rozpadu velkých vírů se uplatňuje zákon zachování energie, z čehož vyplývají následující skutečnosti. Předpokládejme podle obr. 11.12, že velký vír má moment setrvačnosti  $J$  a otáčí se úhlovou frekvencí  $\omega$  a rozpadne se pro jednoduchost pouze na dva víry menší. Tyto mají moment setrvačnosti  $J_1$ ,  $J_2$  a úhlové frekvence  $\omega_1$  a  $\omega_2$ .



Obr. 11.12 Rozpad velkých vírů

Ze zákona zachování energie (kinetické rotační) plyne

$$\frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 .$$

Menší víry mají menší hmotnost než vír původní a proto pro momenty setrvačnosti platí nerovnost

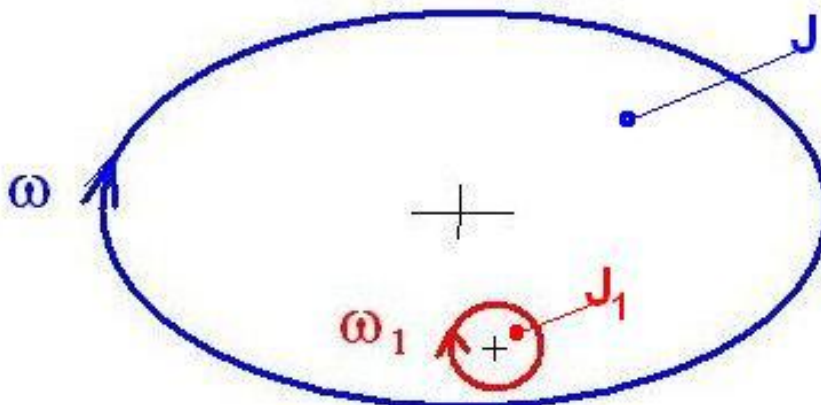
$$J \geq J_1 \quad , \quad J \geq J_2 .$$

Aby byla splněna výše uvedená rovnice, musí vzrůst úhlová frekvence obou menších vírů. Proto v turbulentním proudění pozorujeme, že velké víry mají frekvenci otáčení malou, naopak víry malé se otáčejí vyššími frekvencemi. Výše popsaný proces však dále pokračuje, protože vzniklé malé víry se v důsledku stejného mechanismu dále rozpadají. Tyto vzniklé menší a menší víry se proto otáčejí stále rychleji a rychleji. Tento proces se nazývá kaskádovitý přenos energie, poněvadž tato přechází postupně od větších vírů k menším, přičemž nově vzniklé malé víry již nejsou schopny odebírat energii z proudící tekutiny. Nespočet provedených experimentů tento mechanismus přenosu energie potvrzuje. Nejlepším důkazem kaskádovitého přenosu energie je spojitý průběh spektrální výkonové hustoty flukuační složky rychlosti (spektrální funkce kinetické energie turbulence).

d) disipativnost turbulentního proudění.

Velikost nejmenších turbulentních vírů, jak potvrzují experimentální měření, je podstatně větší než např. střední volná dráha molekul. Tato skutečnost má zásadní význam při matematickém popisu turbulentního proudění, protože není nutné přihlížet k tepelnému pohybu. V opačném případě by bylo řešení velmi náročné, pro praktickou potřebu neúměrně složité. Konkrétně ve vzduchových proudech a ve vodě mají velikost několik milimetrů nebo i desetin milimetrů, zatímco volná dráha molekul za normálních podmínek ve vzduchu je přibližně  $10^{-6}$  m a u vody je ještě mnohem menší. Protože rychlosti hydrodynamických proudů nepřekročí střední rychlost tepelného pohybu molekul, která řádově činí  $10^3$  m/s, charakteristické periody převyšují o několik řádů střední dobu mezi dvěma molekulárními srážkami. Ve vzdálenostech srovnatelných s rozměry minimálních vírů se všechny hydrodynamické veličiny mění spojitě a mohou být proto popsány diferencovatelnými funkcemi. Z toho plyne, že popis turbulentního proudění pomocí diferenciálních rovnic hydrodynamiky je plně oprávněný. Jak již bylo řečeno, tvoří tyto diferenciální rovnice neuzavřený systém, protože turbulentní pohyby jednotlivých částic kapaliny jsou obecně nestacionární a velmi silně závisí od nejmenších detailů počátečních podmínek, přičemž tyto detailní podrobnosti nejsou nikdy zcela známy.

Jak již bylo uvedeno, rozpad vírů se zastaví, jakmile převládnu viskózní síly, které nedovolí další rozpad vírů. Rozměr malých vírů se dá odhadnout z veličiny tzv. délkového mikroměřítka turbulence, úhlová frekvence pak z veličiny tzv. časové mikroměřítka turbulence. Rozměr malých vírů se pohybuje v desetinách či setinách mm. Předpokládejme, že za velmi zjednodušených podmínek existuje podle obr. 11.13 velký vír, který obsahuje jeden vír malý, který se již dále nemůže rozpadnout. Protože platí, že  $\omega_1 \geq \omega$ , můžeme předpokládat, že malý vír se otáčí prakticky ve stojící tekutině.



Obr. 11.13 Schéma velkého a malého víru pro vysvětlení vzniku disipace

O malém víru víme, že má jistou kinetickou energii  $E_k = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2$ , dále víme, že není schopen tuto kinetickou energii zvětšovat na úkor tlakové energie proudu tekutiny.

Vzhledem ke skutečnosti, že proudící tekutina je vazká, vznikají na hranici malého víru a stojící tekutiny třecí síly, které působí proti pohybu (proti rotaci). Malý vír není schopen tuto ztrátu energie nahradit, proto se jeho rychlost rotace jako důsledek viskózního tlumení stále snižuje, až se nakonec malý vír přestane otáčet.

Protože platí zákon zachování energie, lze s jistotou tvrdit, že kinetická energie malého víru se vlivem viskózního tlumení celá přeměnila – disipovala v energii tepelnou, tento děj je nevratný.

Výše popsaný proces v turbulentním proudění se nazývá disipace a tato disipace patří k významným vlastnostem turbulence.

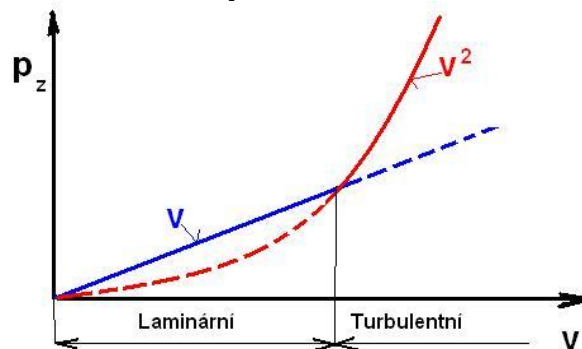
e) samobuzení turbulentního proudění.

Jednou vzniklé turbulentní proudění se dále udržuje samo tím, že vytváří nové a nové víry, které nahrazují víry, jež jsou vlivem viskozity disipovány.

### 11.4. Turbulence a její vliv na přenosové jevy

Zákonitosti přenosu hybnosti, energie (tepla) a hmoty jsou odvozovány a prezentovány ze společného teoretického základu, tzv. teorie přenosových jevů, jejich průběh, intenzita apod. jsou podmíněny laminárním (molekulárním) nebo turbulentním pohybem. Turbulentní proudění ovlivňuje přenosové jevy daleko výrazněji než proudění laminární. U laminárního proudění ideálního plynu je nejpravděpodobněji velikost rychlosti molekul cca 500 m/s, fluktuální rychlost plynu u turbulentního proudění je relativně malá a činí cca 10 m/s, spíše je menší, rozdíl v rychlostech je pouze tři řády. Intenzita přenosových jevů u laminárního nebo turbulentního proudění jistě na rychlosti záleží, podstatnější vliv však má rozdíl hmotnosti molekuly a nejmenšího víru v turbulentním proudění. Při posouzení intenzity přenosových jevů vyjdeme z velikosti Avogadrova čísla, které pro ideální plyn má velikost  $A = 6,02 \cdot 10^{23}$  molekul/kmol a tomu odpovídá objem jednoho kilomolu 24,414 m<sup>3</sup>/kmol. Je-li velikost nejmenšího turbulentního víru odhadem cca  $V = 0,1 \text{ mm}^3$ , pak tento objem plynu obsahuje  $4,19 \cdot 10^{14}$  molekul. Proto u turbulentního proudění hmotnost vírů, která je cca o 14 řádů větší než je hmotnost jedné molekuly plynu se výrazněji projevuje na intenzitě přenosových jevů než rychlost molekul.

**Pro přenos hybnosti** (proudění tekutin) je typické, že potřeba energie potřebné na uskutečnění proudění je u laminárního proudění úměrná rychlosti, naopak u turbulentního proudění je energie úměrná kvadrátu rychlosti – obr. 11.14.

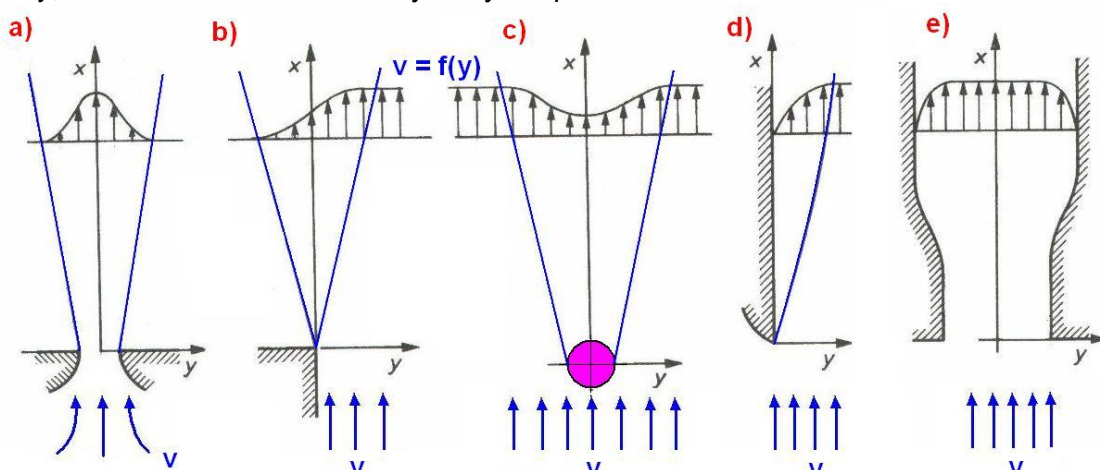


Obr. 11.14 Potřeba energie u laminárního nebo turbulentního proudění

**Přenos energie** – přestup tepla konvekcí je u turbulentního proudění výrazně větší než u proudění laminárního.

**Přenos hmoty** - difuze je u turbulentního proudění mnohem intenzivnější než při laminárním proudění, protože turbulentní směšování je způsobeno velkými víry, pohybujícími se ve všech třech směrech na mnohem větší vzdálenosti, než je střední volná dráha molekul. Turbulenci obvykle dělíme na dvě velké kategorie:

1) turbulence volná – vzniká při obtékání křídla, různých těles, staveb a domů, při výtoku z trysky, obr. 11.15 uvádí několik vybraných aplikací.



Obr. 11.15 Příklad volné turbulence

2) turbulence vynucená – vzniká jako důsledek gradientu rychlosti na povrchu tělesa při jeho obtékání.

### 11.5. Reynoldsova pravidla pro počítání s náhodnými veličinami

Střední hodnota náhodné veličiny  $x$  je definována integrálem – obr. 11. 5

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x \cdot dt .$$

Takto definovanou střední hodnotu zapíšeme zkráceně pruhem na veličinou.

Střední hodnota fluktuace je rovna nule

$$\overline{x'} = 0 .$$

Střední hodnota ze střední hodnoty

$$\overline{\overline{x}} = \bar{x} .$$

Mějme dvě náhodné veličiny  $x = \bar{x} + x'$  a  $y = \bar{y} + y'$ , pro počítání s těmito náhodnými veličinami platí následující pravidla, také nazývaná Reynoldsova:

Střední hodnota součtu dvou náhodných veličin je rovna součtu jejich středních hodnot

$$\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y} .$$

Pro střední hodnotu součinu dvou náhodných veličin platí

$$\overline{x \cdot y} = \overline{(\bar{x} + x')(\bar{y} + y')} = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} + \overline{\bar{x} \cdot y'} + \overline{\bar{y} \cdot x'} + \overline{x' \cdot y'} = \bar{x} \cdot \bar{y} + \overline{x' \cdot y'} .$$

Z tohoto výrazu je patrná závažná skutečnost, že u součinu dvou náhodných veličin přibývá další člen a sice součinitel vzájemné korelace  $\overline{x' \cdot y'}$ .

Střední hodnota derivace funkce se rovná derivaci střední hodnoty

$$\overline{\frac{dx}{dt}} = \frac{d\bar{x}}{dt} .$$

Poznámka: vedle termínu časové vyhlazení se používají v literatuře i následující termíny – časové průměrování, časové vyhlazení, časové střední hodnoty, časové středování apod.

### 11.6. Reynoldsova rovnice

Turbulentní vír i ten nejmenších rozměrů je řádově několikrát větší než je volná dráha molekul, proto platí Navierova – Stokesova rovnice a rovnice spojitosti i pro okamžité hodnoty při turbulentním proudění. Z mnoha praktických důvodů je výhodné převedení základních rovnic na rovnice časově vyhlazené. Při jejich odvození vyjdeme z rovnice Navierovy – Stokesovy pro nestlačitelnou tekutinu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \text{gradu} = \mathbf{a}_0 - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta u ,$$

kterou zapíšeme ve složkovém tvaru

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i \cdot u_j)}{\partial x_j} = a_{0i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} . \quad (11.7)$$

Tuto rovnici časově vyhladíme podle výše uvedených Reynoldsových pravidel pro počítání s náhodnými veličinami, při čemž předpokládáme, že pro rychlost a tlak platí

$$u = \bar{u} + u' \quad \text{a} \quad p = \bar{p} + p' .$$

Navierova – Stokesova rovnice po dosazení za rychlost a tlak a s využitím pravidla o součtu bude

$$\frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)(\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_j} = a_{0i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \nu \cdot \frac{\partial^2 (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j^2} .$$

Aby zápis nebyl dlouhý a nepřehledný, provedme časové vyhlazení jednotlivých členů Navierovy – Stokesovy rovnice samostatně, potom platí :



$$\frac{\partial(\overline{u_i + u'_i})}{\partial t} = \frac{\partial(\overline{u_i + u'_i})}{\partial t} = \frac{\partial(\overline{u_i} + \overline{u'_i})}{\partial t} = \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t},$$

$$\frac{\partial(\overline{u_i + u'_i})(\overline{u_j + u'_j})}{\partial x_j} = \frac{\partial(\overline{u_i + u'_i})(\overline{u_j + u'_j})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j} + \overline{u'_i u'_j}) = \frac{\partial(\overline{u_i u_j})}{\partial x_j} + \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial(\overline{p + p'})}{\partial x_i} = \frac{\partial(\overline{p + p'})}{\partial x_i} = \frac{\partial(\overline{p} + \overline{p'})}{\partial x_i} = \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2(\overline{u_i + u'_i})}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2(\overline{u_i + u'_i})}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2(\overline{u_i} + \overline{u'_i})}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j^2}.$$

Tyto výsledky dosadíme zpět do Navierovy-Stokesovy rovnice ( 11.7) a dostaneme

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{u_i u_j})}{\partial x_j} = a_0 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j}. \quad (11.8)$$

Tato časově vyhlazená rovnice je stejná s rovnicí (11.7), jen s tím rozdílem, že složky okamžitých veličin jsou nahrazeny jejich středními hodnotami. Kromě toho se však v rovnici objevily nové členy, které souvisí s turbulentními fluktuacemi rychlosti. V turbulentním proudu tekutiny mimo sdílení hybnosti mezi částicemi vlivem působení molekulární vazkosti, popsaného tenzorem vazkých napětí, existuje ještě i sdílení hybnosti mezi částicemi tekutiny vyvolané pulsacemi rychlosti. Výraz

$$\tau_t = -\rho \overline{u'_i u'_j} = -\rho \begin{vmatrix} \overline{u'_1{}^2} & \overline{u'_1 u'_2} & \overline{u'_1 u'_3} \\ \overline{u'_2 u'_1} & \overline{u'_2{}^2} & \overline{u'_2 u'_3} \\ \overline{u'_3 u'_1} & \overline{u'_3 u'_2} & \overline{u'_3{}^2} \end{vmatrix} \quad (4.9)$$

jsou tzv. Reynoldsova turbulentní napětí, která mají tenzorový charakter, tenzor je symetrický a má tedy šest složek. Rovnici ( 11.8) můžeme s přihlédnutím k rovnici ( 4.9) zapsat ve vektorovém tvaru

$$\frac{D\overline{u}}{Dt} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u} \cdot \text{grad} \overline{u} = a_0 - \frac{1}{\rho} \text{grad} \overline{p} + \nu \Delta \overline{u} + \frac{1}{\rho} \text{grad} \tau_t. \quad (11.10)$$

### 11.7. Rovnice spojitosti pro turbulentní proudění

Pro nestlačitelnou tekutinu vyjdeme z rovnice spojitosti

$$\text{div} u = 0, \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0.$$

Za okamžitou hodnotu rychlost dosadíme  $u = \overline{u} + u'$  a provedeme časové vyhlazení podle Reynoldsových pravidel

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial(\overline{u_i} + u'_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial(\overline{u_i} + \overline{u'_i})}{\partial x_i} = \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i},$$

odkud

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = 0. \quad (4.11)$$

Z této rovnice vidíme, že pro turbulentní proudění platí rovnice spojitosti nejen pro okamžitou rychlost „ $u$ “, ale i pro časově vyhlazenou rychlost  $\overline{u}$ .

### 11.8. Kinetická energie turbulentního proudění

V libovolném místě proudu je kinetická energie pro jednotku hmotnosti

$$E = \frac{1}{2} \rho u^2.$$

Po dosazení za  $u = \bar{u} + u'$  a časovém vyhlazení

$$E = \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 + \frac{1}{2} \rho \overline{u'^2} = \bar{E} + E', \quad (11.12)$$

kde první člen znamená kinetickou energii ustáleného proudění, druhý pak kinetickou energii turbulentních fluktuací rychlosti (energie turbulence). Vyjádříme-li okamžitou fluktuací rychlost jako vektorový součet složek  $u' = u'_1 + u'_2 + u'_3$ , pak pro kinetickou energii turbulence platí

$$E' = k = \frac{1}{2} \rho \overline{u'^2} = \frac{1}{2} \rho (\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}), \quad (11.13)$$

nebo ve složkovém zápise

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}. \quad (11.14)$$

### 11.9. Směšovací délka

Prandtl zavedl (1925) na základě analogie s kinetickou teorií plynů pojem „směšovací délka“, jako analogie s volnou dráhou molekul. Ve své úvaze předpokládal, že částice tekutiny se v důsledku turbulentních fluktuací přemísťují do míst s rozdílnou střední rychlostí a přenášejí svou rychlost a tím i hybnost z původního místa v proudovém poli. Je-li volná dráha molekul vzdálenost, kterou urazí molekula než narazí na stěnu nádoby nebo než dojde ke srážce s jinou molekulou, potom směšovací délka je vzdálenost, kterou v prostoru urazil turbulentní vír, než zanikl, nebo jinak řečeno ztratil svoji identitu. Proudí-li tekutina ve směru „z“, potom pro fluktuaci rychlosti lze předpokládat

$$u'_z = l \frac{d\bar{u}}{dy},$$

kde  $l$  je směšovací délka.

Prandtl předpokládal, že  $u'_y = u'_z$  z čehož plyne, že

$$u'_y = l \frac{d\bar{u}}{dy}.$$

Po dosazení za  $u'_y$  a  $u'_z$  do rovnice pro tečné napětí (4.9)

$$\tau_t = \bar{\tau}_{zy} = -\rho \overline{u'_z u'_y} = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}_z}{dy} \right| \frac{d\bar{u}_z}{dy} = \rho l^2 \left( \frac{d\bar{u}_z}{dy} \right)^2. \quad (11.15)$$

Absolutní hodnotu v poslední rovnici píšeme z toho důvodu, že znaménko turbulentního napětí je určeno pouze znaménkem gradientu rychlosti  $\frac{d\bar{u}_z}{dy}$ .

Když pro zápis turbulentního napětí použijeme analogii s napětím u laminárního proudění, potom platí rovnice

$$\tau_t = \eta_t \frac{d\bar{u}_z}{dy}, \quad (11.16)$$

odkud pro turbulentní viskozitu s využitím rovnice (11.15) dostaneme

$$\nu_t = \frac{\eta_t}{\rho} = l^2 \left( \frac{d\bar{u}_z}{dy} \right). \quad (11.17)$$



Formálně se zdá, že se mnoho nezískalo, když se turbulentní viskozita nahradila veličinou směřovací délka. Výhodou tohoto pojmu je však jeho fyzikální názornost.

Kármán na základě mechanické podobnosti turbulentních jevů v různých místech proudu odvodil pro směšovací délku vztah

$$l = \kappa \frac{\frac{du}{dy}}{\frac{d^2u}{dy^2}}, \quad (11.18)$$

kde  $\kappa$  je bezrozměrná konstanta (Kármánova konstanta), její velikost se stanoví experimentálně.

Porovnáním rovnice (11.15) a (11.18) dostaneme pro turbulentní napětí

$$\tau_t = \rho \cdot \kappa \frac{\left(\frac{du}{dy}\right)^4}{\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)}. \quad (11.19)$$

Uvažujme pro jednoduchost, že  $\tau_t = \text{konst.}$ , což platí s dostatečnou přesností pouze v blízkosti obtékané stěny. Definujme tzv. třecí rychlost

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}},$$

potom z rovnice (11.19) pro třecí rychlost dostaneme vztah

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \kappa \frac{\left(\frac{du}{dy}\right)^2}{\frac{d^2u}{dy^2}} \Rightarrow \frac{\kappa}{v^*} = \frac{\frac{d^2u}{dy^2}}{\left(\frac{du}{dy}\right)^2} = \frac{u''}{u'^2}, \quad (11.20)$$

v této rovnici je čárkami vyznačena derivace.

Je-li smykové napětí v potrubí konstantní, potom se směšovací délka s rostoucí vzdáleností od stěny mění lineárně.

$$l = \kappa \cdot y.$$

V kruhovém potrubí za předpokladu, že v ose potrubí je nulové smykové napětí a ke stěně roste lineárně, potom pro směšovací délku lze odvodit rovnici

$$l = 2 \cdot \kappa \cdot R \frac{1}{\left(1 - \frac{y}{R}\right)^{0,5} \left[\left(1 - \frac{y}{R}\right)^{0,5} + K_1\right]},$$

kde  $K_1$  je integrační konstanta.

Podle měření Nikuradseho je směšovací délka v kruhovém potrubí na základě měření určena empirickou rovnicí

$$\frac{l}{R} = 0,14 - 0,08 \left(1 - \frac{y}{R}\right)^2 - 0,06 \left(1 - \frac{y}{R}\right)^4,$$

tato rovnice platí pro  $Re = 10^5$  až  $3 \cdot 10^6$ .

### 11.10. Logaritmicke rychlostní profil v kruhovém potrubí

Při řešení vyjdeme z rovnice (11.20), kterou upravíme substitucí

$$z = \frac{1}{u'} \Rightarrow z' = -\frac{u''}{u'^2}.$$

Rovnice (4.20) se zjednoduší

$$z' = \frac{\kappa}{v^*} = konst,$$

a po integraci dostaneme

$$z = \frac{\kappa}{v^*} y + K_1.$$

Rychlostní profil se dostane další integrací

$$u' = \frac{1}{z} = \frac{1}{\frac{\kappa}{v^*} y + K_1},$$

takže rychlost

$$u = \int \frac{1}{\frac{\kappa}{v^*} y + K_1} dy = \frac{v^*}{\kappa} \ln \left( \frac{\kappa}{v^*} y + K_1 \right) + K_2.$$

Integrační konstanta  $K_1$  se určí z okrajové podmínky. Na stěně trubky pro  $y = 0$  je  $K_1 = 0$ . Podle experimentálních měření je Kármánova konstanta  $\kappa = 0,36$  až  $0,42$ . Rychlostní profil je pak určen rovnicí

$$u = \frac{v^*}{\kappa} \ln \left( \frac{\kappa}{v^*} y \right) + K_2 = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln y + K_3. \quad (11.21)$$

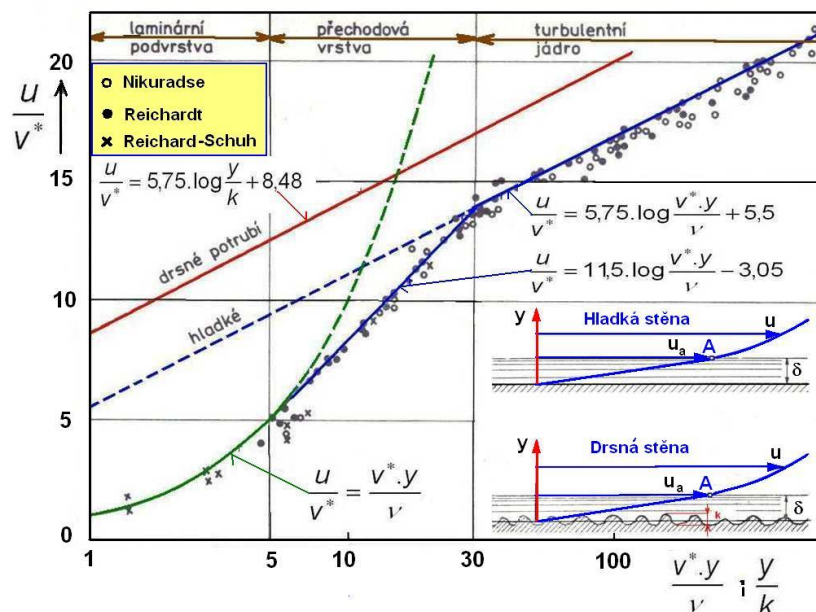
Tato rovnice však neplatí přesně, u stěny pro  $y = 0$  dává rovnice rychlost  $u = -\infty$ , rychlost by však měla být nulová –  $u = 0$ . V ose potrubí je logaritmický rychlostní profil lomený, což odporuje skutečnosti. Pak integrační konstanta

$$K_3 = -\frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} y_0.$$

Další úpravou rovnice (4.21) dostaneme výraz pro logaritmický rychlostní profil ve tvaru

$$\frac{u}{v^*} = A \log \frac{v^* \cdot y}{\nu} + B. \quad (11.22)$$

Prandtl a Kármán proto později rozdělili turbulentní proud v blízkosti stěny na tři oblasti, - obr. 11.16.



Obr. 11.16 Univerzální rychlostní profil a výsledky experimentů

- a) vazkou podvrstvou, v těsné blízkosti hladké stěny, kde převažuje viskózní tečné napětí nad zdánlivým turbulentním napětím, neboť příčné složky flukuačních rychlostí jsou

- stěnou tlumeny. Tato vrstva byla původně nazývána laminární podvrstvou, ale experimenty bylo prokázáno, že se v ní vyskytují fluktuace. Tato vrstva je velmi tenká, zlomky milimetru, ale má velký význam při přestupu tepla. Rychlostní profil je přímkový.
- b) turbulentní jádro proudu, v určité vzdálenosti od stěny už tečné napětí způsobené viskozitou tekutiny je zanedbatelně malé ve srovnání se zdánlivým turbulentním napětím. V této oblasti platí logaritmický zákon, v této formě zvaný zákon stěny.
- c) přechodová vrstva je ta část proudu, kde obě tečná napětí způsobená viskozitou nebo turbulentním směřovacím pohybem jsou řádově stejně veliká a rychlost plynule přechází z přímkového na logaritmický zákon.

Z rovnice ( 11.22) pro jednotlivé oblasti v hydraulicky hladkém potrubí platí:  
pro laminární podvrstvu

$$\frac{u}{v^*} = \frac{v^* \cdot y}{\nu} \quad , \quad (11.23)$$

pro přechodnou vrstvu

$$\frac{u}{v^*} = 11,5 \cdot \log \frac{v^* \cdot y}{\nu} - 3,05, \quad (11.24)$$

pro turbulentní jádro

$$\frac{u}{v^*} = 5,75 \cdot \log \frac{v^* \cdot y}{\nu} + 5,5, \quad (11.25)$$

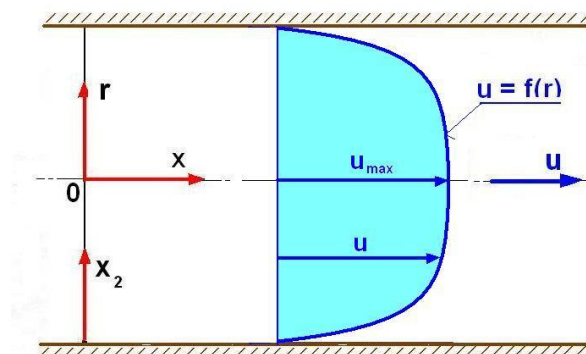
Pro drsnou stěnu potrubí s relativní drsností „k“ platí na základě experimentů rovnice

$$\frac{u}{v^*} = 5,75 \cdot \log \frac{y}{\nu} + 8,48 \quad (11.26)$$

I přes výše uvedené nedostatky logaritmický rychlostní profil velmi dobře popisuje průběh rychlosti po průřezu potrubí a technických aplikacích se často používá.

Výsledky experimentálních měření a jejich porovnání s teoretickým rychlostním profilem je na obr. 11.16. Je patrný dobrý soulad experimentálních výsledků pro turbulentní proudění v hydraulicky hladkých trubkách s rovnicí ( 11.22)

### 11.11. Mocninový rychlostní profil



Obr. 11.17 Schéma turbulentního rychlostního profilu v potrubí

Rychlostní profil turbulentního proudění v potrubí lze vyjádřit mocninovou funkcí – obr. 11.17

$$u = u_{\max} \left( \frac{y}{R} \right)^n = u_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right) \right]^{n_0} \quad , \quad (11.27)$$

kde  $n$  - exponent, závisí na Re číslo

$$n_0 = 1 + 6 \sqrt[6]{\frac{Re}{50}} \quad \text{exponent, závisí na Re číslo}$$

Pro hydraulicky hladké potrubí za předpokladu, že platí-li pro třecí součinitel Blasiusův vztah

$$\lambda = \frac{0,316}{\sqrt[4]{Re}},$$

pak exponent  $n = \frac{1}{7}$ . Obecně je  $n = f(Re)$ , v literatuře jsou uváděny empirické vztahy, např.

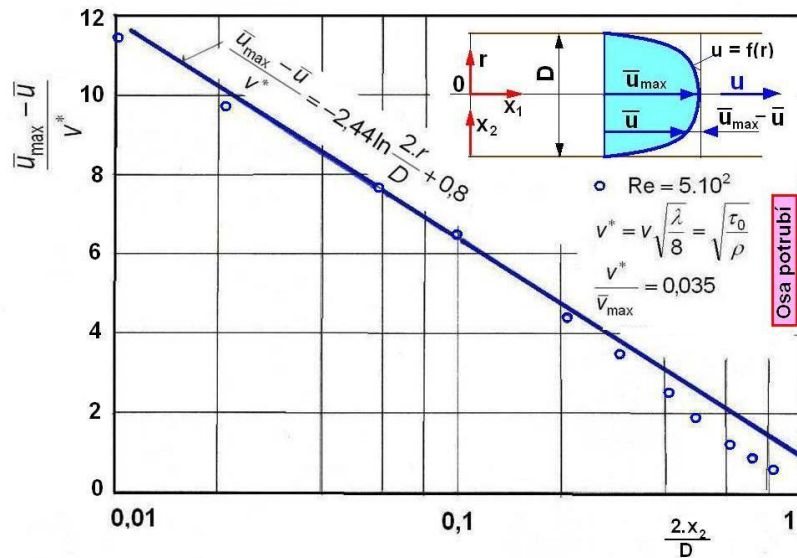
$$\frac{1}{n} = 1,03 \cdot \ln Re - 3,6. \quad (11.28)$$

Pro poměr střední a maximální rychlosti lze odvodit rovnici

$$m = \frac{u_s}{u_{\max}} = \frac{2}{(n+2)(n+1)}, \quad (11.29)$$

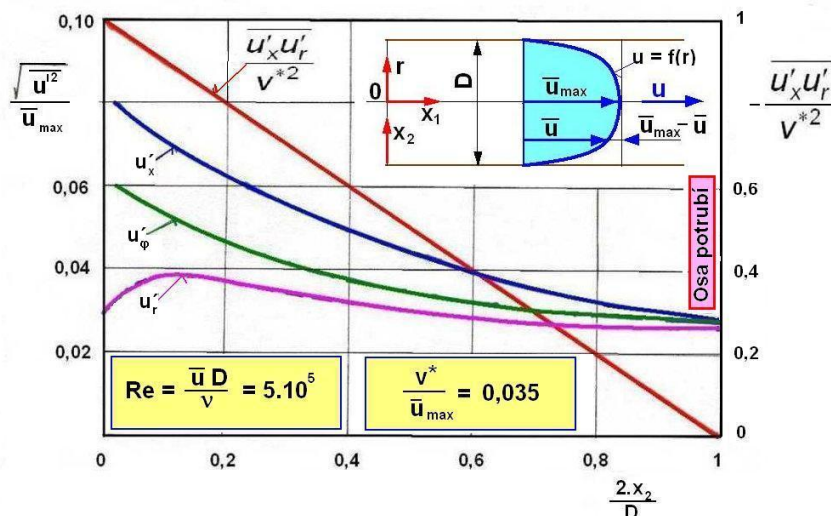
kde  $m = f(Re)$  a pohybuje se pro  $5 \cdot 10^4 < Re < 2 \cdot 10^6$  v intervalu  $m = 0,876$  až  $0,924$

### 11.12. Parametry turbulence v kruhovém potrubí



Obr 11.18 Rozložení střední rychlosti v jádře turbulentního proudění v kruhovém potrubí

Na základě rozsáhlých měření (Laufer – NASA) v kruhovém potrubí je možné si učinit dostatečně podrobný obraz o struktuře turbulentního proudění, a to jak z hlediska středních rychlostí, tak i rychlostí flukтуаčních i ostatních parametrů turbulence. Jak potvrzují tyto experimenty, je proudění v potrubí totožné s prouděním v turbulentní mezní vrstvě na rovinné desce. Velikost této shody se zvětšuje směrem ke stěně potrubí. V oblasti blízko stěny není žádného rozdílu mezi oběma druhy proudění.

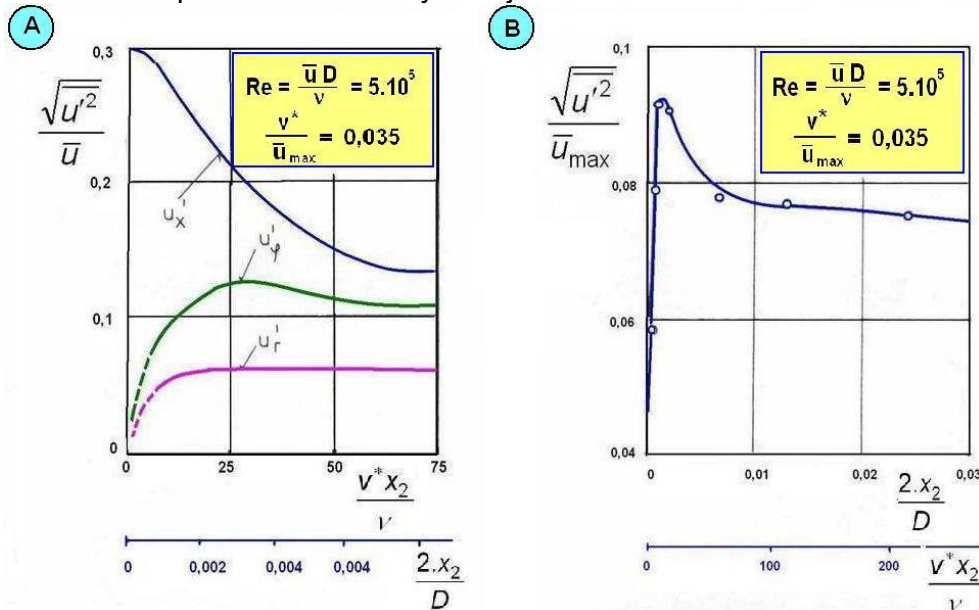


Obr. 11.19 Průběh intenzity turbulence a smykového napětí po průřezu potrubí

V trubkách kruhového průřezu je proudění laminární  $Re < 2300$ , i když vzniká stabilní vlnivý pohyb již při  $Re = 1225$ . Je-li naopak  $Re > 2300$ , existuje v potrubí proudění turbulentní.

Ze středních veličin turbulentního proudění kapalin v kruhovém potrubí má velký význam průběh rychlostního profilu, který, jak potvrzují provedená měření, je s dostatečnou přesností popsán mocninovým nebo logaritmickým zákonem, jak uvádí např. obr. 11.18.

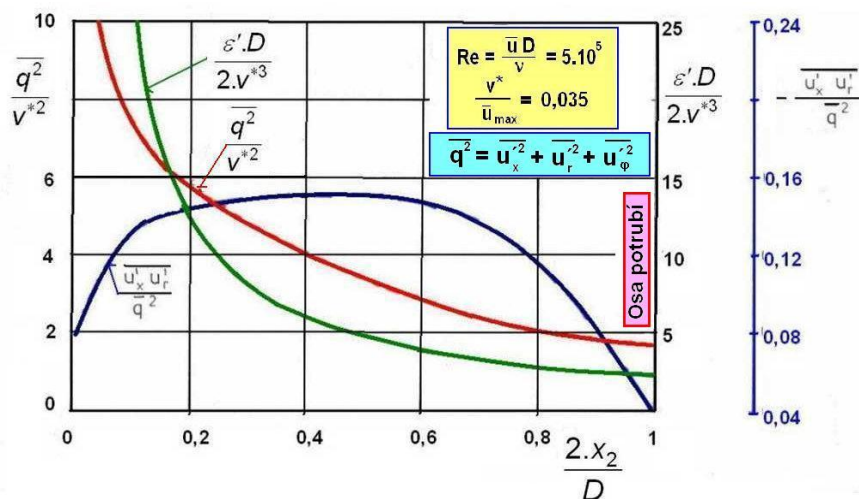
Měření znázorněná na obr. 11.19 dávají představu o průběhu intenzity turbulence jednotlivých složek flukтуаční rychlosti v příčném průřezu potrubí. V ose potrubí jsou všechny tři složky prakticky stejné a proto se zde turbulence dá považovat prakticky za izotropní. Průběh turbulentního smykového napětí definovaného jako bezrozměrná veličina na obr. 11.19 rovněž potvrzuje, že v ose potrubí je turbulence homogenní a izotropní a směrem ke stěně se anizotropnost stává stále výraznější



Obr. 11.20 a Intenzita turbulence u stěny potrubí vztahovaná k místní rychlosti

Obr. 11.20b Intenzita turbulence složky rychlosti  $u_x$  u stěny potrubí

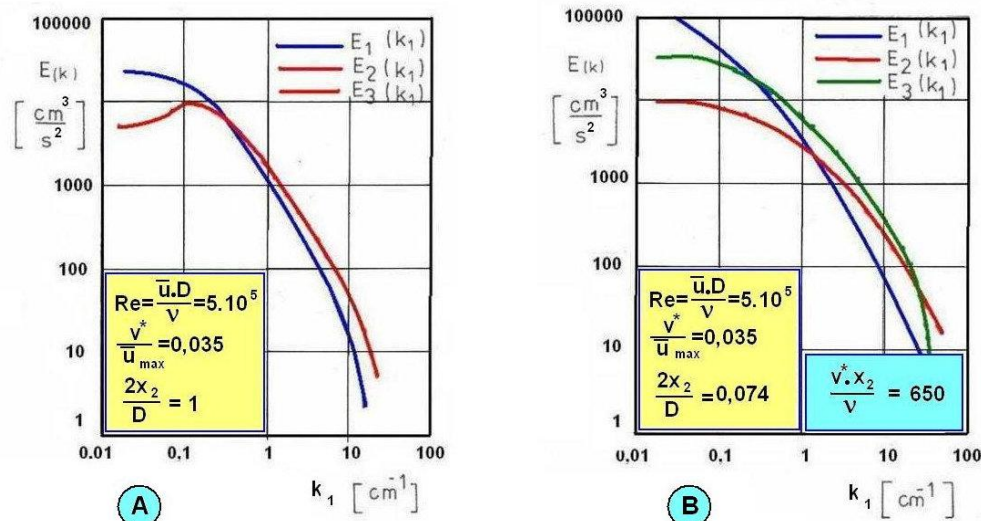
Směrem ke stěně intenzita jednotlivých složek rychlosti se zvětšuje, turbulence se stává stále více anizotropní - obr. 11.20 a. největší hodnoty vykazuje složka rychlosti  $u_x$ , pro kterou maximum leží v bodě  $v^* \cdot x_2 / \nu = 15$  - obr. 11.20 b, tj. přibližně na hranici, kde končí laminární podvrstva. Je třeba ještě podotknout, že pravděpodobnost výskytu radiální flukтуаční složky rychlosti je směrem ke středu potrubí v této oblasti větší než ve směru ke stěně. Tato skutečnost má velký význam pro vnos a unášení pevných částic proudem tekutiny.



Obr. 11.21 Průběh disipace energie a velikosti turbulentní energie po průřezu potrubí



Turbulentní disipace energie je uvedena na obr. 11.21. Disipace je v ose potrubí nejmenší a směrem ke stěně se stále zvětšuje. To dokazuje skutečnost, že u stěny potrubí mají turbulentní víry malý rozměr a tato vynucená turbulence je méně stejnorodá. Obr. 11.21 ještě uvádí bezrozměrný průběh turbulentní energie a podílu turbulentního smykového napětí a turbulentní energie. Energie turbulentních fluktuací rychlosti se směrem od osy ke stěně zvětšuje, toto potvrzuje skutečnost, že turbulentní víry bohaté na energii se nacházejí v blízkosti stěny, tj. v místě jejich vzniku.



Obr. 11.22 Spektrum kinetické energie turbulence v kruhovém potrubí  
a) osa potrubí b) blízko stěny potrubí

Spektrum kinetické energie turbulence složek rychlosti  $u'_x$ ,  $u'_r$ ,  $u'_\varphi$ , uvedené na obr. 11.22 ukazuje, že spektrum složky rychlosti  $u'_x$  je v oblasti malých vlnových čísel (nízkých frekvencí) ve všech případech větší než pro ostatní složky rychlosti. Pro velká vlnová čísla (vysoké frekvence) je tomu právě naopak. V ose potrubí se spektra složek rychlosti  $u'_r$  a  $u'_\varphi$  prakticky neliší a rozdíl mezi složkou  $u'_x$  není velký. To rovněž ukazuje na skutečnost, že v ose potrubí je turbulenci možné považovat prakticky za izotropní. Rozdíly u stěny potrubí jsou velmi výrazné, nejmenší energii vykazuje složka rychlosti  $u'_r$ , analogicky s měřením intenzity turbulence ve stejném bodě dle obr. 11.19.

Provedená měření spektra kinetické energie turbulence potvrzují rovněž Kolmogorovu hypotézu o lokální isotropnosti a sice, že pro střední velikosti vlnových čísel je směrnice tečny  $-5/3$ , jak bylo pro isotropní turbulenci odvozeno. Při přibližování ke stěně potrubí se interval vlnových čísel rozšiřuje na stranu směrem k jejich větším velikostem.

Jak již bylo uvedeno, proudění v kruhovém potrubí je možné rozdělit do tří oblastí, a to laminární podvrstvy, v níž proudění popisuje Newtonův zákon viskozity, přechodovou oblast, kde mají význam laminární i turbulentní vlivy, a oblast plně vyvinuté turbulence ve střední části potrubí. Hranice mezi těmito oblastmi nejsou pochopitelně výrazné.

V jádře proudu existují velké víry, vytáhnuté ve směru osy potrubí, jejich rozměr v příčném směru je přibližně 0,25 - 0,5 R a jejich zestředněná rychlost leží ve směru osy. Na tyto velké víry jsou nasuperponovány víry menší. V přechodné oblasti vznikají víry svým rozměrem podstatně menší, jsou bohaté na vířivou energii a mají pevnou orientaci. Vlivem difuze jsou tyto víry transportovány do jádra proudu, kde dochází k disipaci jejich kinetické energie na energii vnitřní, tj. tepelnou. Malé víry z jádra proudu jsou naopak transportovány ke stěně, kde mohou v důsledku smykových napětí dostat energii ze středního proudu a přetvořit se tak na víry energeticky bohaté.

### 11.13. Matematický popis turbulentního proudění

Přímé modelování s využitím Navier-Stokesových rovnic, bude ještě dlouho kabinetní záležitostí. Pro praktické použití se využívají:

- **statistické teorie** - přenosové jevy v turbulentním proudu mají dominantní náhodný charakter a bylo přirozené použít k jejich popisu nástroje matematické statistiky. Již v minulém století Reynolds upravil Navierovy - Stokesovy rovnice pro turbulentní proudění tak, že nahradil okamžité hodnoty veličin jejich středními hodnotami a fluktuacemi. Dostal tak tři nové rovnice, nazývané po něm Reynoldsovy rovnice, se šesti novými neznámými typu

$$\tau_{ij} = \rho \overline{v_i'v_j'}$$

kde indexy  $i$  a  $j$  postupně nahradíme symboly pro souřadné osy  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Výraz  $(\overline{v_i'v_j'})$  je střední hodnota součinu fluktučních složek rychlostí. Pravé strany rovnice mají rozměr napětí a nazývají se Reynoldsova (zdánlivá) turbulentní napětí. Protože nyní počet neznámých převyšuje počet rovnic, není soustava rovnic uzavřená, a hledají se stále nové možnosti uzavření soustavy. Tímto směrem se zde nebudeme více zabývat.

- **semiempirické modelování** středních turbulentních veličin. Tento směr se soustřeďuje na stanovení veličin jež mají význam pro inženýrskou praxi, jako např. pole středních rychlostí, tečná napětí, a pod. První pokus řešení turbulentního proudění předložil Boussinesq (1877), který zavedl zdánlivou (vírovou) viskozitu  $\eta_t$ , jež je analogií dynamické viskozity tekutiny.

Na rozdíl od ní není zdánlivá viskozita látkovým parametrem, nýbrž je funkcí souřadnic a je závislá na geometrii a dalších charakteristikách proudového pole. Pro rovinné turbulentní proudění lze pak zdánlivé tečné napětí vyjádřit rovnicí  $\tau_t = \eta_t \frac{d\bar{v}_x}{dy}$  a výsledné tečné napětí v

turbulentním proudu bude rovno součtu

$$\tau = (\eta_l + \eta_t) \frac{d\bar{v}_x}{dy}.$$

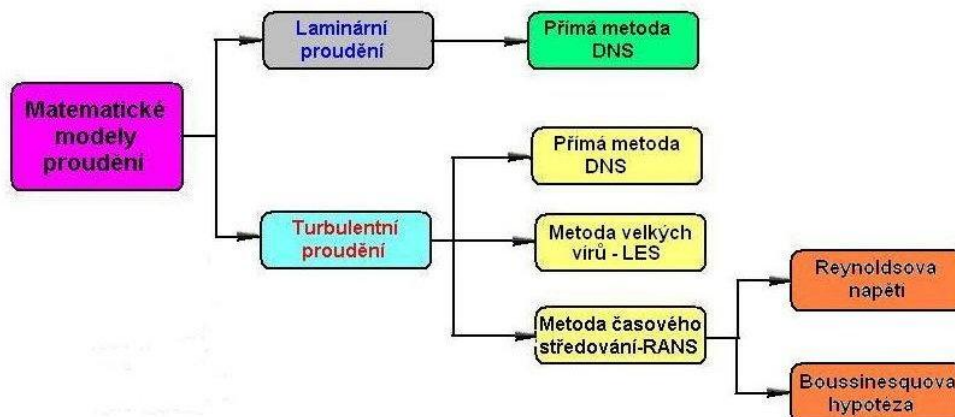
### Metody matematického modelování turbulentního proudění

Modelování turbulence je stále více používáno v technické praxi, velmi rychle se vyvíjí s pokrokem v matematickém, fyzikálním a technickém odvětví. Důležitou roli také hraje rozvoj ve sféře výpočetní techniky. Při řešení turbulentního proudění se vzhledem ke své složitosti a ne dosud plně objasněné fyzikální podstatě turbulence používají zjednodušené modely. Při numerické simulaci turbulentního proudění existují tři teoreticky odlišné přístupy, které vyplývají ze zjednodušujících modifikací výchozích rovnic popisujících proudění – obr. 11.23.

**Metoda přímé numerické simulace** (DNS-Direct Numerical Simulation) se používá jen za určitých omezujících předpokladů, které jsou dány velkými nároky na kapacitu počítače z důvodu velmi jemné sítě.

**Metoda velkých vírů** (LES-Large Eddy Simulation) je založena na modelování velkých vírů, které lze zachytit sítí.

**Statistické modely turbulence**, které jsou založeny na metodě časového (Reynoldsova) středování (RANS-Reynolds Averaged Navier-Stokes equations) veličin turbulentního proudění a na následující proceduře časového středování bilančních rovnic.



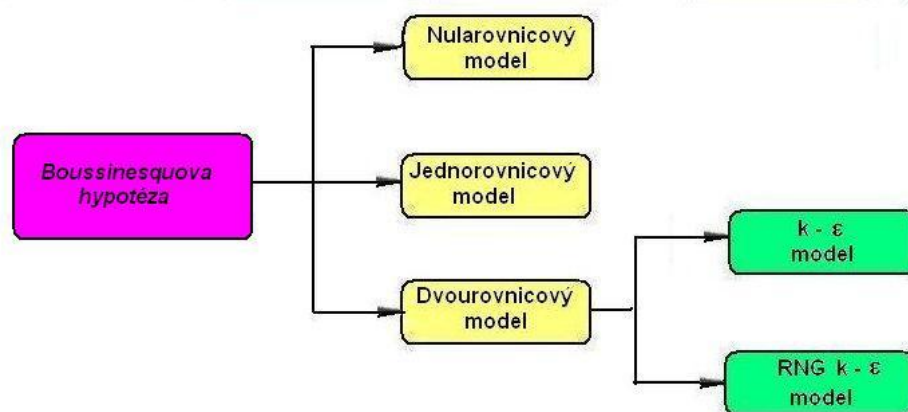
Obr. 11.23 Rozdělení matematických modelů proudění



## Statistické modely turbulence

1. Nularovnicový model – model směšovací délky  $-l$ , tento byl navržen Prandtem, který zavedl veličinu směšovací délka  $l$  a turbulentní viskozitu definoval vztahem

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|.$$



Obr 11. 24 Rozdělení statistických modelů turbulence

2. Jednorovnicový model - aby se postihl transport turbulentních parametrů, řeší se pro tyto parametry diferenciální parciální rovnice, nejčastěji pro energii turbulentních fluktuací rychlosti.

3. Dvourovnicové modely – tyto modely definují dvě transportní rovnice, např. pro turbulentní energii „ $k$ “ a rychlost disipace „ $\varepsilon$ “. Jedním z prvních modelů turbulence v této kategorii byl model  $k-\varepsilon$ , který je dále podrobněji popsán. Na obr. 11.24 je toto rozdělení uvedeno v grafické podobě.

### 11.14. Model turbulence $k-\varepsilon$

Turbulentní proudění je popsáno dvěma rovnicemi a to rovnicí Reynoldsovou

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = a_0 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j}, \quad (11.30)$$

a rovnicí spojitosti

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (11.31)$$

Tato soustava dvou parciálních diferenciálních rovnic obsahuje celkem 8 neznámých veličin a to střední rychlost „ $v$ “ střední tlak „ $p$ “ a dále 6 korelačních momentů flukuačních složek rychlosti  $\overline{u_1'^2}$ ;  $\overline{u_2'^2}$ ;  $\overline{u_3'^2}$ ;  $\overline{u_1' u_2'}$ ;  $\overline{u_1' u_3'}$ ;  $\overline{u_2' u_3'}$ .

Jedná se tedy o soustavu diferenciálních rovnic neuzavřenou. Aby se soustava rovnic uzavřela, je nutné soustavu doplnit o neznámé veličiny, které získáme experimentálním měřením, nebo soustavu doplníme dalšími diferenciálními rovnicemi. Matematické modely pak postupují tak, že se hledají další rovnice, aby soustava se stala uzavřenou.

Podle Boussinesquovy hypotézy se určí pro 3D proudění velikost turbulentních napětí  $\tau_t = -\rho \overline{u'_i u'_j}$  z gradientu středních rychlosti

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad (11.32)$$

kde je  $\nu_t$  turbulentní kinematická viskozita  
 $k$  turbulentní kinetická energie  
 $\delta_{ij}$  jednotkový tenzor, tzv. Kronekerovo delta, pro které platí,  
 že pro  $i = j \Rightarrow \delta_{ij} = 1$ , pro  $i \neq j \Rightarrow \delta_{ij} = 0$ .

Podle Prandtl – Kolmogorovy hypotézy pro lokálně isotropní turbulenci je turbulentní kinematická viskozita definována vztahem

$$\nu_t = C_\mu \frac{k}{\varepsilon} = C_\nu \cdot k^{1/2} \cdot l. \quad (11.33)$$

Dále se definuje transportní rovnice pro turbulentní energii, která se dá odvodit ve tvaru

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \cdot \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_j} - c_D \frac{k^{3/2}}{l}, \quad (11.34)$$

a transportní rovnice pro rychlost disipace

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + c_{1\varepsilon} \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_j} - c_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (11.35)$$

V posledních dvou rovnicích je energie turbulentních fluktuací určena známým vztahem

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}, \quad (11.36)$$

a rychlost disipace

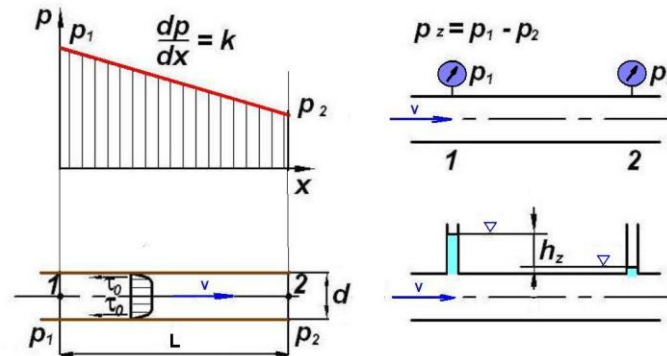
$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}. \quad (11.37)$$

Konstanty v těchto rovnicích  $C_\nu$ ;  $C_\mu$ ;  $C_{\varepsilon 1}$ ;  $C_{\varepsilon 2}$ ;  $\sigma_k$ ;  $\sigma_\varepsilon$  se musí stanovit experimentálně

Tato uvedená soustava obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic je uzavřená a může se řešit numericky např. metodou konečných diferencí nebo objemů.

## 12. Hydraulické odpory - ztráty

Při proudění skutečných tekutin vznikají následkem viskozity hydraulické odpory, tj. síly, které působí proti pohybu částic tekutiny. Mechanismus hydraulických odporů je složitý jev, který se dosud nepodařilo exaktně vyřešit až na jednodušší případy laminárního proudění. Proto se v hydraulických výpočtech uplatňuje řada poloempirických metod.



Obr. 12.1 Tlakový spád a tečné napětí

Práce třecích sil (tečných napětí od viskozity) při proudění skutečných tekutin způsobuje rozptyl (disipaci) energie, což snižuje mechanickou energii proudící tekutiny. Rozptýlená energie se mění v teplo (zvětší se vnitřní energie tekutiny, popřípadě okolí), což je nezvratná změna. Tradičně se proto rozptýlená energie nazývá ztrátová, i když název neodpovídá zákonu o zachování energie. Rozptýlenou (ztrátovou) energii vztahujeme obvykle na jednotku hmotnosti, tíhy nebo objemu a platí vztah

$$e_z = Y_z = \frac{p_z}{\rho} = gh_z = \zeta \frac{v^2}{2}. \quad (12.1)$$

Pod pojem hydraulické odpory zahrnujeme při proudění skutečné tekutiny všechny účinky, které způsobují rozptyl energie. Rozptýlená (ztrátová) energie na hydraulických odporech se projeví buď jako tlakový úbytek (vynucené proudění v potrubí apod.), nebo úbytkem kinetické energie (výtok z nádob otvory apod., anebo snížením polohové energie (proudění v korytech, gravitační potrubí apod.) – obr. 12.1.

Hydraulické odpory se dělí na odpory třecí a místní. Třecí odpory jsou charakteristické tím, že závisí na délce potrubí, kanálu, apod. Ztrátový součinitel třecího odporu je přímo úměrný délce potrubí  $L$ . Místní odpory vznikají v místech, kde se mění velikost rychlosti (změna průtočného průřezu), směr rychlosti (zakřivené potrubí), popřípadě velikost i směr rychlosti (armatury) a dochází přitom k odtržení proudu a vzniku vířivé oblasti.

Ztrátový součinitel  $\zeta$  místního odporu závisí na geometrii uvažovaného místa (změny průřezu, zakřivení a pod.) a na proudění (druh kapaliny, rychlost). Tlaková ztráta  $p_z$  je rozdíl tlaků na délce potrubí  $l$  (u třecího odporu) nebo rozdíl před místním odporem a za ním. Fyzikálně představuje rozptýlenou energii objemové jednotky proudící tekutiny. Ztrátová výška  $h$  představuje rozptýlenou energii vztahovanou na tíhovou jednotku proudící tekutiny.

### 12.1. Třecí ztráty v kruhovém potrubí při laminárním proudění

Pro  $Re < 2320$  se velikost tlakové ztráty či ztrátové výšky dá odvodit analyticky. Při řešení vyjdeme z rovnice (9.6) pro střední rychlost

$$v_s = \frac{p_z d^2}{32 \eta L}.$$

Z rovnice vypočítáme tlakovou ztrátu a provedeme následující úpravu

$$p_z = \frac{32 \eta L v}{d^2} = \frac{64 L v^2}{v d} \frac{1}{d} \frac{1}{2} \rho = \frac{64 L v^2}{Re d} \frac{1}{2} \rho,$$

kde  $Re = \frac{vd}{\nu}$ ;  $\eta = \rho\nu$ .

Potom tlakový spád je určen rovnicí

$$p_z = \lambda \frac{L}{d} \frac{v^2}{2} \rho, \quad (12.2)$$

kde třecí součinitel je určen vztahem

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \quad (12.3)$$

Pro ztrátovou výšku platí rovnice, která je často označována jako Darcy – Weisbachova

$$h_z = \frac{p_z}{\rho g} = \lambda \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g} \Rightarrow i = \frac{h_z}{L} = \lambda \frac{1}{d} \frac{v^2}{2g}, \quad (12.4)$$

kde  $i$  je hydraulický spád

Výše uvedené rovnice platí pro newtonské tekutiny a s dostatečnou přesností i pro potrubí s poměrnou drsností do  $\varepsilon \leq 0,05$ . Jak dokázaly experimenty je odchylka od vypočtených hodnot menší než 1%. To ovšem předpokládá vyvinutý rovnoměrný rychlostní profil. Při nerovnoměrném rychlostním profilu, který je způsoben např. místním odporem, jsou třecí ztráty větší, a to o 10 až 30%, pro třecí součinitel platí modifikovaná rovnice

$$\lambda = \frac{A}{Re}, \quad (12.5)$$

kde  $A = 70$  až  $85$ . V těchto případech je  $Re_{kr} = 1600$ .

## 12.2. Třecí ztráty v kruhovém potrubí pro turbulentní proudění

U turbulentního proudění je tečné napětí větší a proto jsou ztráty třením větší než u laminárního proudění. Vyjadřují se stejným způsobem, tj. ztrátovou výškou  $h_z$  nebo tlakovou ztrátou  $p_z$  jako u laminárního proudění, tzv. Darcy-Weisbachovou rovnicí – (12.4)

$$p_z = \lambda \frac{L}{d} \frac{v^2}{2} \rho; \quad h_z = \frac{p_z}{\rho g} = \lambda \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g}; \quad i = \lambda \frac{1}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

Součinitel tření  $\lambda$  je závislý na velikosti Reynoldsova čísla  $Re$  a relativní drsnosti  $\varepsilon = \frac{k}{d}$

$$\lambda = f(Re, \varepsilon),$$

kde je  $Re = \frac{vd}{\nu}$  Reynoldsovo číslo

$$\varepsilon = \frac{k}{d} \quad \text{relativní drsnost stěny}$$

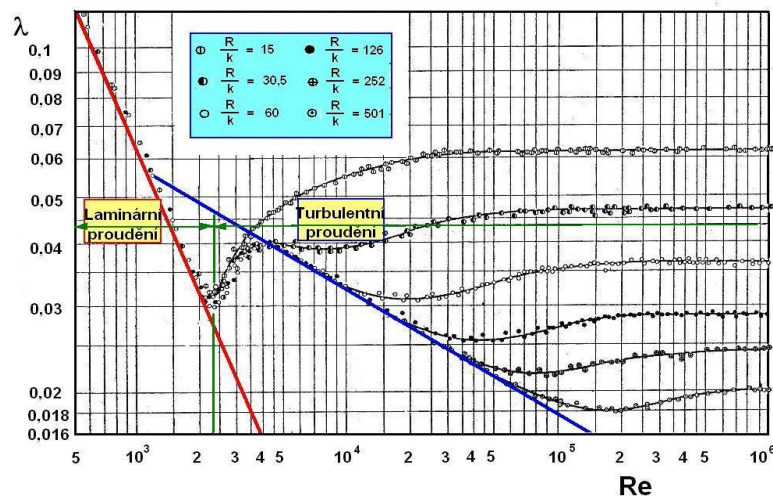
$k$  absolutní drsnost stěny potrubí

Rovnice pro třecí součinitel se nedá řešit analyticky, proto musela být stanovena experimentálně. Pro hladké potrubí  $k = 0$ , v roce 1913 odvodil Blasius empirický vztah, který platí pro Reynoldsovo číslo v rozsahu  $2300 \leq Re \leq 8 \cdot 10^4$

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}}. \quad (12.6)$$

Nikuradse pro hladké potrubí pro rozsah  $Re$  čísla ( $Re > 6 \cdot 10^4$ ) udává podle výsledků pokusů vzorec

$$\lambda = \frac{1}{[2 \log(Re \sqrt{\lambda}) - 0,8]^2}. \quad (12.7)$$

Obr. 12.2 Nikuradseho diagram  $\lambda = f(\text{Re}, \varepsilon)$ 

Vliv drsnosti potrubí vyšetřoval Nikuradse v letech 1930 až 1933. V experimentech použil bronzové potrubí kruhového průřezu o různých průměrech. Nejprve provedl měření v hladkém potrubí. Potom měnil drsnost potrubí nalepením tříděných pískových zrn. Výsledky měření jsou uvedeny v diagramu na obr. 12.2. Křivky pro různé poměrné drsnosti  $k$ , se odpoutávají od přímky Blasiovy, která představuje průběh součinitele tření pro hladké potrubí. S rostoucím Reynoldsovým číslem přecházejí v soustavu čar rovnoběžných s vodorovnou osou. Z obr. je patrné, že od určitého Reynoldsova čísla, které závisí na poměrné drsnosti, má součinitel tření hodnotu stálou a nezávisí již na  $\text{Re}$ .

V této oblasti – zvané vyvinuté turbulentní proudění – vyjádřil Nikuradse součinitel tření vztahem

$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \log \frac{d}{k} + 1,138\right)^2}, \quad \text{rovnice platí pro } \left(\frac{k}{d} \text{Re} \sqrt{\lambda} > 1912\right). \quad (12.8)$$

Mezi oblastí hydraulických hladkých potrubí a oblastí vyvinutého turbulentního proudění je oblast přechodová, v níž součinitel tření  $\lambda$  závisí jak na Reynoldsově čísle, tak na poměrné drsnosti. Pro tuto oblast bylo různými autory odvozeno několik desítek rovnic, za nej přesnější se však považuje rovnice, kterou odvodil Colebrook

$$\lambda = \frac{1}{\left[2 \log \left(\frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}}\right) + 0,27 \frac{k}{d}\right]^2}; \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \left[2 \log \left(\frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}}\right) + 0,27 \frac{k}{d}\right]^2. \quad (12.9)$$

Tato rovnice je implicitní a  $\lambda$  se musí řešit iterací. Proto byly v posledních letech mnoha autory odvozeny pro  $\lambda$  explicitní vzorce. Jako příklad je uvedena rovnice odvozená Churchillem, která oproti Colebrookovy rovnici (12.9) má nejistotu do 1,5%

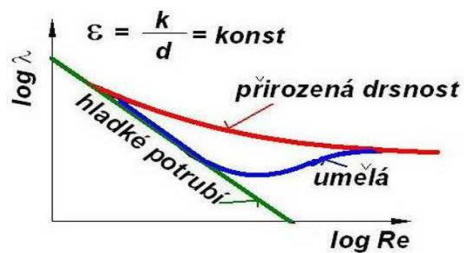
$$\lambda = 8 \left[ \left(\frac{8}{\text{Re}}\right)^{12} + \frac{1}{(a+b)^{1,5}} \right]^{-\frac{1}{12}} \quad (12.10)$$

$$a = \left[ -2,457 \ln \left( \left(\frac{7}{\text{Re}}\right)^{0,9} + 0,27 \varepsilon \right) \right]^{16}; \quad b = \left(\frac{37530}{\text{Re}}\right)^{16}.$$

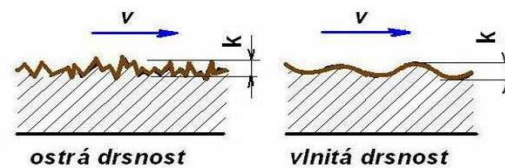
Absolutní drsnost potrubí  $k$  závisí na druhu materiálu, zpracování a provozních podmínkách (koroze, eroze). Podle zkušeností různých autorů jsou v tabulce 12.1 uvedeny drsnosti vybraných materiálů.

Tabulka 12.1 Absolutní drsnost materiálů potrubí

Absolutní drsnost potrubí $k$		
Materiál potrubí	Původní stav (mm)	Korodovaný stav (mm)
Tažené trubky mosazné, měděné, hliníkové	0,0015 až 0,003	0,003 až 0,1
Bezešvé trubky ocelové	0,04 až 0,1	0,1 až 0,9
Tažené trubky ocelové	0,03 až 0,12	0,12 až 0,9
Svařované trubky ocelové	0,05 až 0,1	0,1 až 0,9
Pozinkované trubky ocelové	0,15 až 0,5	0,5 až 3,5
Vodovodní potrubí po 20-ti a více letech v provozu		0,6 až 3,0
Skleněné trubky, trubky z plastů	0,001 5 až 0,01	
Přezkové hadice	0,01 až 0,03	
Betonové potrubí	0,3 až 6,0	

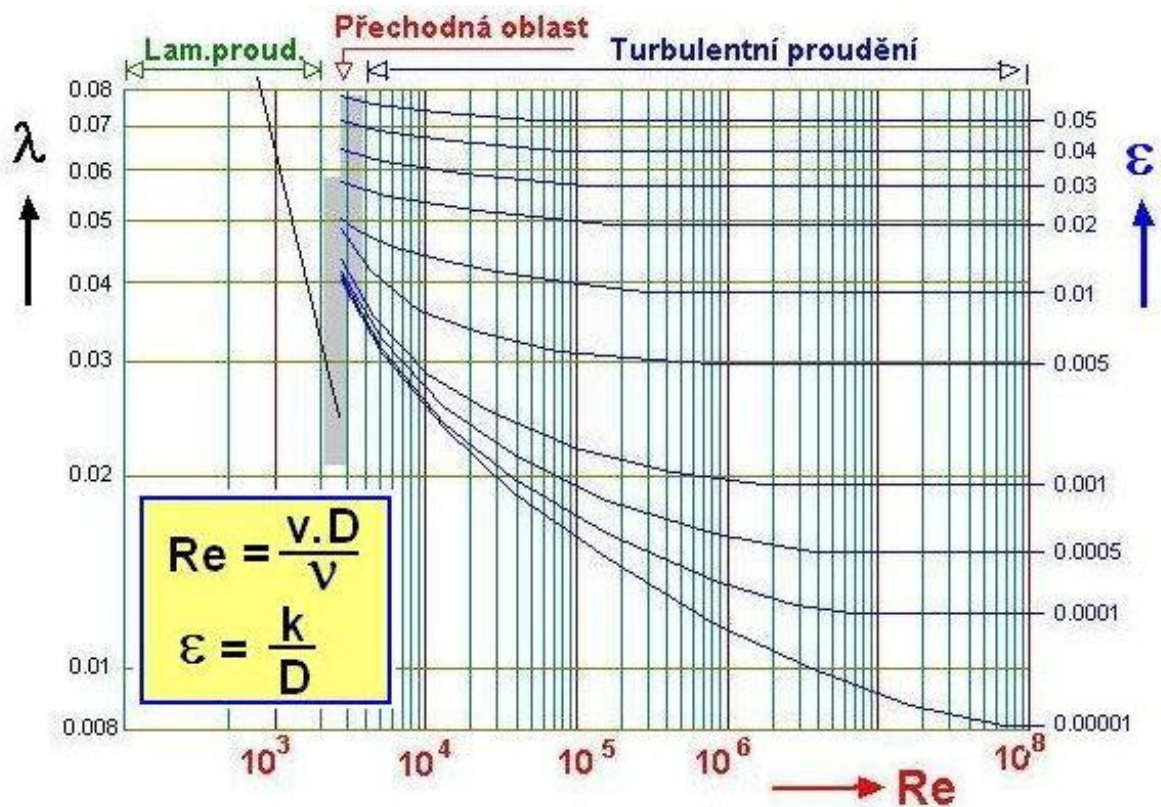


Obr. 12.3 Třecí odpor v potrubí s přirozenou a umělou drsností



Obr. 12.4 Druhy drsností

Zdrsnění vnitřních stěn potrubí vytvářel Nikuradse uměle tříděným pískem. Tato umělá drsnost, která je téměř rovnoměrná, se však liší od skutečné drsnosti, která je nerovnoměrná. Proto průběh součinitele tření v přechodové oblasti se u přirozené drsnosti odlišuje od průběhu pro umělou drsnost, což potvrdily Colebrookovy experimenty - obr. 12.3.

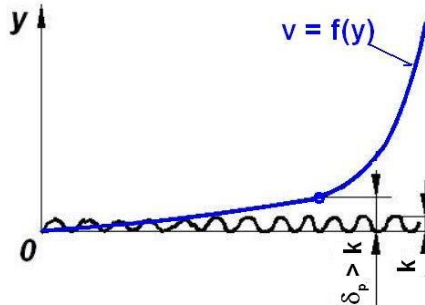
Obr. 12.5 Moody-Colebrookův diagram -  $\lambda = f(Re, \epsilon)$



Kromě absolutní velikosti výstupků nerovnosti  $k$  má velikost součinitele tření podstatný vliv též tvar těchto výstupků. Rozlišují se dvě drsnosti, a to drsnost, která je způsobena ostrými a krátkými výstupky a druhá vlnitá drsnost, která je způsobena zaoblenými nerovnostmi tvaru dlouhých vln – obr. 12.4. U drsnosti prvního druhu závisí součinitel tření více na poměrné drsnosti a méně na  $Re$ -čísle, u vlnité drsnosti je tomu naopak.

Výsledky měření třecího součinitele  $\lambda$  různých autorů, zpracovaná Colebrookem, jsou na obr. 12. 5. Z diagramu  $\lambda = f(Re, \varepsilon)$  je patrné, že pro turbulentní proudění se křivky pro různé drsnosti přimykají při nižších číslech  $Re$  k Blasiově přímce. Od určité hodnoty  $Re$  se odpoutávají a přibližují se vodorovné přímce.

V turbulentním proudění se u stěny potrubí vytvoří vazká ( laminární) podvrstva, která přikrývá nerovnosti povrchu – obr. 12.6.



Obr. 12.6 Hydrodynamický hladký povrch

Z hlediska vlivu drsnosti na součinitel tření  $\lambda$  se rozděljuje turbulentní proudění na tři oblasti:

1. Hydrodynamicky hladká stěna – v tomto případě vazká podvrstva zakryje nerovnosti povrchu, tyto nemají vliv na ztrátu třením a v potrubí jsou hydraulické odpory tření jako v hladkém potrubí. Takový obtékaný povrch se nazývá hydrodynamicky hladký – obr. 12.6 -  $k < \delta_p$ .
2. Oblast přechodová – v ní nerovnosti povrchu začínají vyčnívat z vazké podvrstvy. Tato oblast je charakterizována tím, že součinitel tření je závislý na  $Re$  a poměrné drsnosti -  $\lambda = f(Re, \varepsilon)$ . Tato oblast podle obr. 12.5 leží mezi Blasiovou přímkou a vodorovnými přímkami pro různé drsnosti.
3. Oblast vyvinutého turbulentního proudění – v tomto případě je tloušťka laminární podvrstvy malá, takže nezakryje nerovnosti obtékaného povrchu -  $k > \delta_p$ . Třecí součinitel  $\lambda$  je závislý pouze na relativní drsnosti  $\varepsilon$ . V obr. 12.5 je tato oblast charakterizována vodorovnými přímkami pro různou poměrnou drsnost.

### 12.3. Třecí ztráty v potrubí nekruhového průřezu

Laminární proudění (vzhledem k platnosti Newtonova zákona pro tečné napětí od viskozity) v nekruhových potrubích se dá řešit matematicky. U laminárního proudění se třením o stěny potrubí zbrzdí částice v celém průtočném průřezu. „Mezní vrstva“ vyplňuje celý průtočný průřez a jeho tvar má vliv na rozložení rychlosti neboli rychlostní profil. Proto je nutno pro každý průřez odvodit vztah pro třecí ztráty a nelze je přepočítat z jednoho průřezu na druhý.

U turbulentního proudění v potrubí se vliv třecích sil na obtékaných stěnách omezí na podstatně menší vrstvu, která ve srovnání s charakteristickými rozměry průtočného průřezu je velmi malá. Tloušťka mezní vrstvy u turbulentního proudu závisí především na  $Re$  čísle. Jestliže tvar průtokového průřezu potrubí nemá v podstatě vliv na součinitel tření, jsou ztráty třením turbulentního proudění v potrubí nekruhového průřezu určeny stejnými vzorci jako pro kruhové potrubí. Místo průměru  $d$  kruhového potrubí je však třeba dosadit ekvivalent pro nekruhové průřezy, pomocí něhož se vypočte  $Re$ -číslo, součinitel tření a ztrátová výška. Tento ekvivalent se nazývá hydraulický průměr –  $d_h$  a je určen vztahem



$$d_h = \text{konst} \frac{S}{O} = k \frac{S}{O}.$$

Konstantu úměrnosti je možno zvolit. Výhodně se stanoví z podmínky, aby hydraulický průměr kruhového potrubí  $d_h$  byl roven jeho průměru  $d$  čili  $d_h=d$ . Protože u kruhového potrubí je průtočný průřez  $S = \frac{\pi}{4} d^2$  a omočený obvod  $O = \pi d$ , potom je

$$d_h = k \frac{\frac{\pi}{4} d^2}{\pi d} = k \frac{d}{4}.$$

Z rovnosti  $d_h = d$  vyplývá konstanta  $k = 4$ . Je tedy hydraulický průměr definován vztahem

$$d_h = \frac{4 \cdot S}{O}. \quad (12.11)$$

Hydraulický průměr  $d_h$  je tedy ekvivalent nekruhového průřezu a představuje kruhové potrubí o světlosti  $d = d_h$ , v němž jsou stejné hydraulické ztráty jako v nekruhovém průřezu. Hydraulický průměr se může dosadit do výrazu pro poměrnou drsnost, do Reynoldsova čísla a do výrazu pro ztrátovou výšku

$$h_z = \lambda \frac{1}{d_h} \frac{v^2}{2g}; \quad \lambda = f(\text{Re}, \varepsilon); \quad \text{Re} = \frac{v d_h}{\nu}; \quad \varepsilon = \frac{k}{d_h}. \quad (12.12)$$

Z toho je patrné, že výpočet ztráty třením v nekruhovém potrubí (turbulentní proudění) je shodný s výpočtem téže ztráty v kruhovém potrubí. Pro přechod laminárního proudění v turbulentní v nekruhových průřezích se uvažuje  $\text{Re}_{\text{krit}}$  stejné jako u kruhového potrubí.

#### 12.4. Místní odpory (ztráty)

V každém potrubí bývají vedle rovných úseků i různá kolena, odbočky, armatury, měřicí zařízení, čističe, chladiče apod., kromě toho se může měnit průřez potrubí. V těchto částech potrubí dochází ke změně velikosti i směru rychlosti proudění, což vyvolá víření, popřípadě odtržení proudu kapaliny spojené s rozptylem energie. Energie proudící kapaliny se rozptyluje v místě potrubí, kde dochází ke změně vektoru rychlosti, proto je rozptyl nazván místními ztrátami.

Velikost místních ztrát se vyjadřuje obdobně jako ztráta třením rychlostní výškou a ztrátovým součinitelem

$$h_z = \zeta \frac{v^2}{2g}, \quad (12.13)$$

nebo jako měrnou ztrátovou energii

$$e_z = g h_z = \zeta \frac{v^2}{2}. \quad (12.14)$$

Ztrátový součinitel  $\zeta$  závisí na druhu místní ztráty, konstrukčních parametrech, drsnosti stěn, tvaru rychlostního profilu a na režimu proudění. Vliv Re-čísla se projevuje - obdobně jako u třecích odporů – především při malých hodnotách Re-čísla.

Při velkých Re-číslích je ztrátový součinitel konstantní. Složitost jevů spojených s vířením v místních odporech způsobuje to, že teoretické stanovení ztrátového součinitele místních odporů je nedostupné (kromě jednoduchých případů). Proto se ztrátový součinitel  $\zeta$  určuje experimentálně. Takto určená závislost ztrátového součinitele platí jen ve stejných podmínkách, za nichž byl měřen, nebo ve fyzikálně podobných případech.

Místní odpory v potrubí se mohou vyjádřit ekvivalentní délkou  $l_e$  potrubí, v němž je ztráta třením stejná jako místní ztráta. Z rovnosti ztrátových výšek

$$\zeta \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{l_e}{d} \frac{v^2}{2g}$$

se určí ekvivalentní délka potrubí

$$l_e = \frac{\zeta}{\lambda} d . \quad (12.15)$$

Za součinitel tření a průměr se dosadí hodnoty platné pro rovný úsek potrubí. Při změnách průřezu se mění průtočná rychlost a místní ztráty se mohou vyjádřit v závislosti na přítokové  $v_1$  nebo odtokové rychlosti  $v_2$  - obr. 12.7.

$$h_z = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} .$$

Z této rovnice vyplývá vztah pro přepočet ztrátových součinitelů

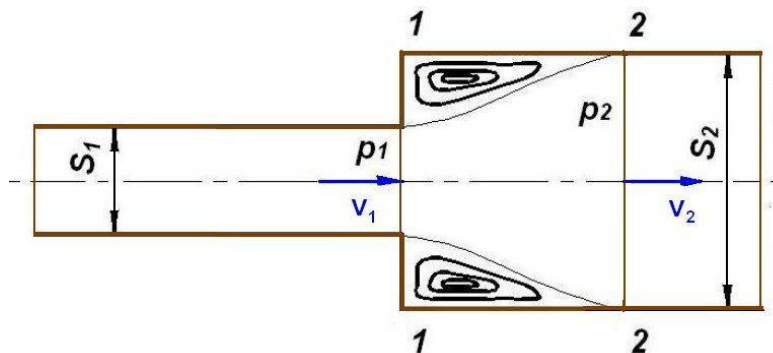
$$\zeta_1 = \zeta_2 \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^2 = \zeta_2 \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^2 . \quad (12.16)$$

Pomocí rovnice kontinuity  $S_1 v_1 = S_2 v_2$  pro kruhové průřezy platí

$$\zeta_1 = \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^4 \zeta_2; \quad \zeta_2 = \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^4 \zeta_1 . \quad (12.17)$$

### Ztráta náhlým rozšířením průřezu.

Při náhlém rozšíření průřezu se odtrhne proud kapaliny od stěn a vytvoří se víry - obr. 12.7. V rozšířené části potrubí se proud kapaliny znovu rozšíří po celém průřezu. Se změnou rychlostí je spojena i změna tlaku.



Obr. 12.7 Náhlé rozšíření průřezu

Při rozšíření průřezu klesá střední rychlost, a proto musí stoupnout tlak. Pro dokonalou tekutinu, která by neměla ztráty třením ani vířením, je dán tlakový rozdíl Bernoulliho rovnicí

$$p_{2t} - p_1 = \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2) .$$

Teoretický tlak v průřezu 2 je označen  $p_{2t}$  a je menší o tlakovou ztrátu spojenou s rozšířením průřezu. Při proudění skutečné tekutiny v potrubí a kanálech není rozložení po průřezu rovnoměrné, a proto kinetická energie takového proudu je větší, než odpovídá hodnotě vypočítané ze střední rychlosti podle průtoku, jak bylo odvozeno dříve.

Při nerovnoměrném rozdělení rychlostí jsou ztráty při náhlém rozšíření průřezu větší než při rovnoměrném. Následující výpočet se provede pro rovnoměrný rychlostní profil. K výpočtu hybnosti je třeba správně volit kontrolní objem, který musí zahrnovat celou oblast, v níž se mění rychlost proudu. V uvažovaném případě tvoří kontrolní objem válec omezený průřezy 1 a 2. Brzdící síla ve směru proudu je dána rozdílem tlakových sil v průřezích 1 a 2. Protože tlak v průřezu je konstantní, je brzdící síla, která vyvolá změnu hybnosti, dána výrazem

$$F = (p_2 - p_1) S_2 .$$

Tlak v průřezu 1 těsně za rozšířením je stejný jako těsně před rozšířením, protože proud kapaliny se nerozšířil, a tím i tlak se tedy nezměnil. Brzdící síla  $F$  se rovná změně hybnosti kapaliny protékající v jednotce času. Hybnost v průřezu 1 je dána výrazem  $H_1 = \rho v_1^2 S_1$ , podobně v průřezu 2 je  $H_2 = \rho v_2^2 S_2$ . Průtok kapaliny průřezů 1 a 2 je stejný. Hybnostní věta  $F = Q_m \Delta v$  má tvar

$$(p_2 - p_1)S_2 = \rho S_2 v_2 (v_1 - v_2).$$

Tlakový rozdíl je určen Bernoulliho rovnicí pro skutečnou kapalinu

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2) - \rho g h_z.$$

Odečtením posledních dvou rovnic se dostane po úpravě výraz pro ztrátou výšku náhlým rozšířením průřezu při užití rovnice spojitosti  $v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2$

$$h_z = \left[ \left( \frac{S_2}{S_1} \right)^2 - 1 - 2 \frac{v_1^2 - v_2^2}{v_2^2} \right] \frac{v_2^2}{2g}.$$

Další úpravou dostaneme

$$h_z = \left( \frac{S_2}{S_1} - 1 \right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = \left( 1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}. \quad (12.18)$$

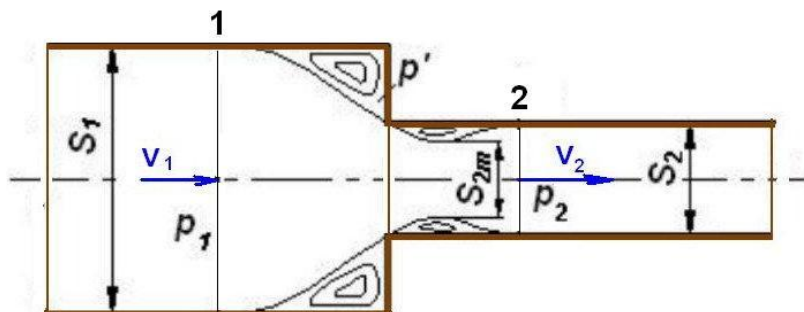
Tento vzorec bývá nazýván Bordův (1766) nebo Carnotův. Ztrátový součinitel pro náhlé rozšíření je určen pro průtokovou rychlost  $v_1$  (označen  $\zeta_1$ ) a odtokovou rychlost  $v_2$  (označen  $\zeta_2$ ) těmito výrazy:

$$\zeta_1 = \left( 1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2 = \left[ 1 - \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2 \right]^2, \quad \zeta_2 = \left( \frac{S_2}{S_1} - 1 \right)^2 = \left[ \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^2 - 1 \right]^2. \quad (12.19)$$

Ztráta náhlým rozšířením průřezu je způsobena víry v oblasti mezi odtrženou proudnicí a stěnami. Při velkém poměru průřezů  $S_2/S_1$  je ztráta větší než vypočtená hodnota, neboť se může rozptýlit celá rychlostní výška. Vtéká-li kapalina rychlostí  $v_1$  z potrubí do velké nádrže, v níž je rychlost  $v_2$  zanedbatelná, rozptýlí se celá kinetická energie kapaliny.

### Ztráta náhlým zúžením průřezu.

K této ztrátě dochází v místě náhlého zúžení průřezu, kde se zúžením vyvolá zrychlení kapaliny. Proud kapaliny nemůže následkem setrvačnosti sledovat tvar stěn potrubí.



Obr. 12.8 Náhlé zúžení průřezu

Matematické řešení ztráty zúžením vychází ze změny hybnosti kapaliny. Postup odvození je obdobný jako pro náhlé rozšíření. Pro ztrátovou výšku se odvodí rovnice

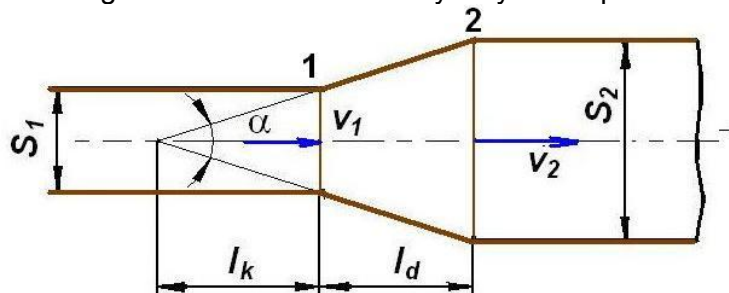
$$h_z = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = \left( \frac{S_1}{S_2} - 1 \right) \frac{S_1}{S_2} \frac{v_1^2}{2g} = \left( 1 - \frac{S_2}{S_1} \right) \frac{v_2^2}{2g} = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g}. \quad (12.20)$$

Ztrátový součinitel  $\zeta$  vztažený na přítokovou rychlost  $v_1$  nebo odtokovou rychlost  $v_2$  je

$$\zeta_1 = \left( \frac{S_1}{S_2} - 1 \right) \frac{S_1}{S_2}, \quad \zeta_2 = \left( 1 - \frac{S_2}{S_1} \right). \quad (12.21)$$

## Difuzor

Při ztrátě náhlým rozšířením bylo dokázáno, že dochází ke značným ztrátám způsobeným odtržením proudu a vířením. Ztráty mohou být podstatně zmenšeny, jestliže přechod z menšího průřezu na větší bude pozvolný, jak je tomu u difuzoru. Difuzor se používá hlavně tam, kde je třeba přeměnit kinetickou energii proudu na tlakovou (u podzvukových rychlostí) s nejmenšími ztrátami. Je známo, že velmi malým rozšířením průřezu se mění zanedbatelně proudění, a to zejména rychlostní profil, který je tím více protažen ve směru proudění, čím je úhel rozšíření větší (obr. 12.9). Do úhlu rozšíření  $\alpha = 6^\circ$  až  $8^\circ$  zůstává protažený rychlostní profil symetrický k ose difuzoru. Při dalším zvětšení úhlu se proud účinkem tlakového gradientu odtrhne od stěny a symetrie proudu se poruší.



Obr. 12.9 Kuželové potrubí – difuzor

Při úhlech rozšíření  $\alpha = 10^\circ$  až  $50^\circ$  nastává odtržení proudu zpravidla od jedné stěny, na niž je rychlost menší. Proto nemůže dojít k odtržení proudu na protější stěně. Rychlostní profil se stane nesymetrickým. Nesouměrnost proudu je často doprovázena nestabilním odtrháváním, což vyvolá kmitání proudu (pulsace) a tvoření vírů.

V difuzorech s většími úhly rozšíření než  $50^\circ$  až  $60^\circ$  nemůže proud sledovat stěny difuzoru a odtrhává se po celém průřezu. Odtrhávání od stěny je doprovázeno menšími pulsacemi proudu. V rozšiřující se troubě nebo kanále vzrůstá smykové napětí následkem zvýšení turbulence, což způsobuje zvýšení ztrát. Rovněž pulsace přispívají ke zvýšení ztrát. Nastává-li odtržení proudu v difuzoru, jsou ztráty způsobeny převážně vzniklými víry. V difuzoru pochopitelně vznikají i ztráty třením. Celkové ztráty v difuzoru je možno rozepsat na ztrátu třením a ztrátu spojenou se změnou průřezu, takže  $h_{zd} = h_{zt} + h_{zr}$ .

Skutečný tlakový rozdíl na difuzoru je dán rozdílem tlaků v rozšířeném a počátečním průřezu a musí splňovat Bernoulliho rovnici pro skutečnou tekutinu čili

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gh_z \quad \Rightarrow \quad p_2 - p_1 = \rho \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} - \rho gh_{zd}.$$

Protože ztrátová výška se dá vyjádřit rychlostní výškou v průřezu 1, je ztrátový součinitel difuzoru dán výrazem

$$\zeta_{d1} = \frac{h_{zd}}{\frac{v_1^2}{2g}} = 1 - \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = 1 - \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 - \frac{p_2 - p_1}{\rho \frac{v_1^2}{2}} = 1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 2 \frac{p_2 - p_1}{\rho v_1^2}.$$

Podobně se určí ztrátový součinitel difuzoru vztažený na odtokovou rychlost  $v_2$ :

$$\zeta_{d2} = \frac{h_{zd}}{\frac{v_2^2}{2g}} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = 1 - 2 \frac{p_2 - p_1}{\rho v_2^2} = \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 - 1 - 2 \frac{p_2 - p_1}{\rho v_2^2}.$$

Pro dokonalou tekutinu (bez ztrát) je tlakový rozdíl mezi průřezy 1 a 2 větší,

$$p_2' - p_1 = \rho \frac{v_1^2 - v_2^2}{2}.$$

Účinnost difuzoru, s níž se mění kinetická energie na tlakovou, je dána poměrem skutečného rozdílu tlaku k teoretickému, to je

$$\eta_d = \frac{p_2 - p_1}{p_2' - p_1} = \frac{p_2 - p_1}{\rho \frac{v_1^2 - v_2^2}{2}} = \frac{2}{1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2} \frac{p_2 - p_1}{\rho v_1^2} = \frac{2}{\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 - 1} \frac{p_2 - p_1}{\rho v_2^2}. \quad (12.22)$$

Hydraulické ztráty v difuzoru jsou spojeny se změnou průřezu, a proto je lze vyjádřit v poměru ke ztrátě náhlým rozšířením – rov. (12.18).

$$\zeta_r = \frac{h_{zd}}{h_{zn}} = \frac{h_{zd}}{\frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}}.$$

Součinitel  $\zeta_r$  se nazývá stupeň rázu. Při rostoucím úhlu rozevření difuzoru, kdy změna průřezu přechází v náhlou změnu, se stupeň rázu blíží hodnotě jedna.

Hydraulické ztráty v difuzorech se dají vyjádřit třemi způsoby:

$$h_{zd} = \zeta_{d1} \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_{d2} \frac{v_2^2}{2g} = \zeta_r \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}. \quad (12.23)$$

Ztrátové součinitele  $\zeta_{d1}$ ,  $\zeta_{d2}$  a stupeň rázu  $\zeta_r$  se určí měřením. Pro vzájemný přepočít součinitelů  $\zeta_{d1}$ ;  $\zeta_{d2}$ ;  $\zeta_r$  slouží rovnice

$$\zeta_{d1} = 2 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 + \zeta_{d2} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \zeta_r, \quad (12.24)$$

nebo

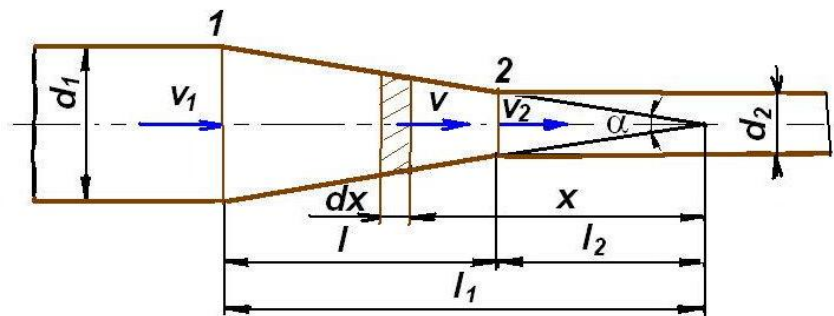
$$\zeta_{d2} = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 + \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 - 2 + \zeta_{d1} = \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 \zeta_r. \quad (12.25)$$

### Kuželové potrubí

Při zužování průřezu je hydraulická ztráta způsobena rovněž třením a lze ji určit integrací na elementární délce kuželového potrubí – obr. 12.10.

Ztráta třením na elementárním úseku  $dx$  je určena vztahem

$$dh_z = \lambda \frac{dx}{d} \frac{v^2}{2g}.$$



Obr 12.10 Kuželové potrubí - konfuzor

Celková ztráta se určí integrací diferenciální rovnice, přičemž je nutno uvažovat změnu průměru a rychlosti po délce kuželového potrubí. Rovněž součinitel tření  $\lambda$  se mění s Re-číslem, avšak v malém rozmezí, takže se uvažuje střední hodnota  $\lambda_s$  jako konstanta. Průměr  $d$  se mění se souřadnicí  $x$  podle vztahu

$$d = \frac{d_2}{l_2} x = \frac{d_1}{l_1} x; \quad \frac{l_2}{l_1} = \frac{d_2}{d_1}; \quad \frac{l_2}{l} = \frac{d_2}{d_1 - d_2},$$

ktej vyplývá z podobnosti trojúhelníků (obr. 12.10). Z rovnice kontinuity vyplývá pro rychlost

$$v = v_2 \left( \frac{d_2}{d} \right)^2 = v_2 \left( \frac{l_2}{x} \right)^2.$$

Dosazením do výrazu pro  $dh_z$  se dostane

$$dh_z = \lambda_s \frac{l_2^5}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} \int_{l_2}^{l_1} \frac{dx}{x^5},$$

a po integraci je ztrátová výška v kuželovém potrubí

$$h_z = \frac{1}{4} \lambda_s \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} \left( 1 - \frac{l_2^4}{l_1^4} \right) = \frac{1}{4} \lambda_s \frac{l}{d_1 - d_2} \left( 1 - \frac{d_2^4}{d_1^4} \right) \frac{v_2^2}{2g} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g}. \quad (12.26)$$

Z poslední rovnice vyplývá výraz pro ztrátový součinitel ztráty v kuželovém potrubí

$$\zeta_2 = \frac{1}{4} \lambda \frac{l}{d_1 - d_2} \left( 1 - \frac{d_2^4}{d_1^4} \right) = \frac{\lambda_s}{8 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \left[ 1 - \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^4 \right]. \quad (12.27)$$

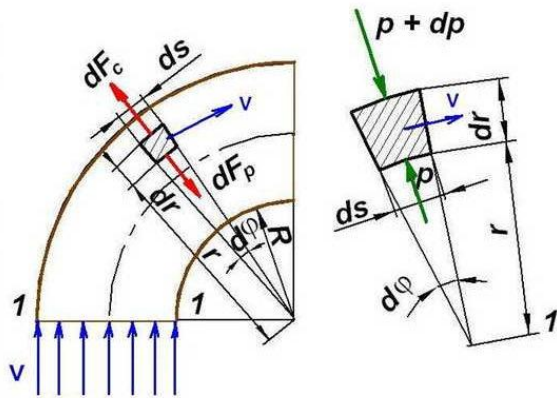
### Změna směru proudění - oblouk

V každém potrubním systému se zpravidla vyskytuje prvek, v němž se mění směr rychlosti tekutiny. Tento prvek tvoří zakřivené potrubí, oblouky, kolena a také kombinace oblouků. V těchto prvcích dochází k rozptýlu energie, která se vyjadřuje místní ztrátou změnou směru proudění.

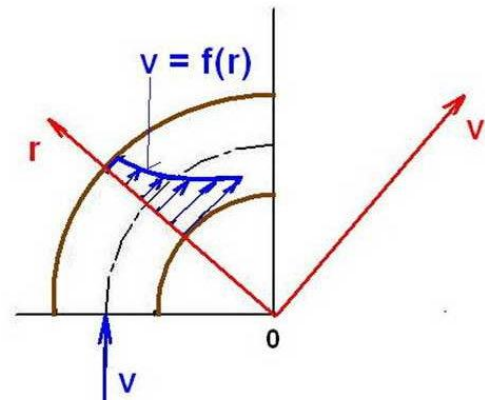
K vytvoření představy proudění v zakřiveném potrubí je užitečné si povšimnout proudění dokonalé kapaliny v kruhovém oblouku. Předpokládá se, že kapalina přitéká ke kolenu konstantní rychlostí rozloženou po celém průřezu 1 – 1 rovnoměrně (obr. 12.11).

Následkem zakřivení drah působí na částice kapaliny odstředivá síla, která musí být v rovnováze s tlakovou silou. Aby vznikla tlaková síla působící do středu křivosti, musí na větším poloměru  $r$  působit větší tlak. Toto lze dosáhnout v souladu s Bernoulliho rovnicí tím, že se rychlost částice sníží.





12.11 Síly na elementární části proudu v zakřiveném potrubí



Obr 12.12 Rychlostní profil v oblouku

Pro elementární částici kapaliny o rozměrech  $ds.dr$ , která se pohybuje ve vodorovné rovině na poloměru  $r$  a má jednotkovou šířku, je rovnováha tlakové a odstředivé síly  $dF_p = dF_c$  vyjádřena rovnicí

$$dp \cdot ds = \frac{v^2}{r} dm.$$

Hmotnost elementární částice je  $dm = \rho \cdot ds \cdot dr$ . Pro všechna vlákna na různých poloměrech  $r$ , která vycházejí z průřezu 1-1, kde rychlosti a tlaky jsou rovnoměrně rozloženy, platí Bernoulliho rovnice

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = konst \quad \frac{dp}{\rho} + v dv = 0,$$

z čehož

$$dp = -\rho v dv.$$

Dosažením výrazů pro diferenciály  $dp$  a  $dm$  do rovnice vyjadřující rovnováhu sil se po úpravě a integraci dostane

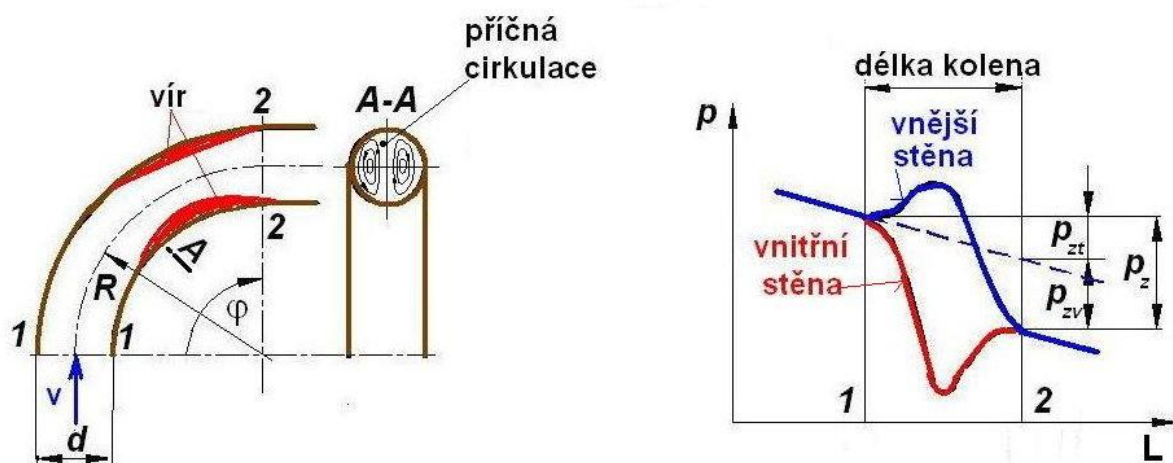
$$\frac{dv}{v} + \frac{dr}{r} = 0; \quad \rightarrow \quad \ln v + \ln r = \ln k,$$

neboli

$$v \cdot r = konst$$

( 12.28)

To je zákon potenciálního víru. Závislost rychlosti  $v$  a poloměru  $r$  je graficky znázorněna rovnoosou hyperbolou. – obr. 12.12.



Obr. 12. 13 Proudění v zakřiveném potrubí – oblouku

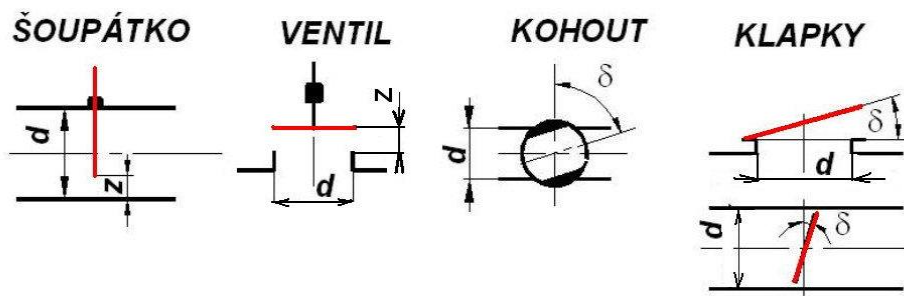
V provedené úvaze a výpočtech nejsou zahrnuty třecí síly od viskozity, které se budou uplatňovat při průtoku skutečné kapaliny. Z hyperbolického rozložení rychlostí je patrné, že mezi částicemi kapaliny jsou relativní rychlosti, které u skutečných kapalin vyvolávají tečné napětí úměrné rozdílům rychlostí. Skutečná tekutina nemůže tedy protékat kolenem jako dokonalá kapalina, pro niž byly odvozeny uvedené výrazy. Částice pomalejší budou brzdit částice rychlejší, přičemž u skutečné kapaliny se částice přemisťují na větší nebo menší poloměr. Vzniká složitý (spirálový) prostorový pohyb – obr. 12.13. Součástí tohoto proudění je vířivé proudění v příčném řezu, charakteristické dvěma víry opačného smyslu. Proud na vnitřní hraně kanálu se může odtrhnout, takže vznikají víry i u stěn (obr. 12.13). Průběh tlaku na vnitřní a vnější stěně kolena je vyznačen na obr. 12.13. Čárkovaná přímka znázorňuje průběh tlaku v přímém potrubí. V diagramu je vyznačena tlaková ztráta  $p_z$  a její složky odpovídající třecím ztrátám  $p_{zt}$  a víření  $p_{zv}$ . Obecně je tedy závislost ztrátového součinitele vyjádřena funkcí

$$\zeta_o = f\left(\frac{R}{d}, \varepsilon, Re, \text{geom. tvar}\right) \quad (12.29)$$

Četné výsledky měření ztrátového součinitele jsou uvedeny v literatuře, výsledky se dosti rozcházejí, protože v zakřiveném potrubí má na proudění vliv mnoho parametrů, které nejsou stejně dodrženy ve všech experimentech.

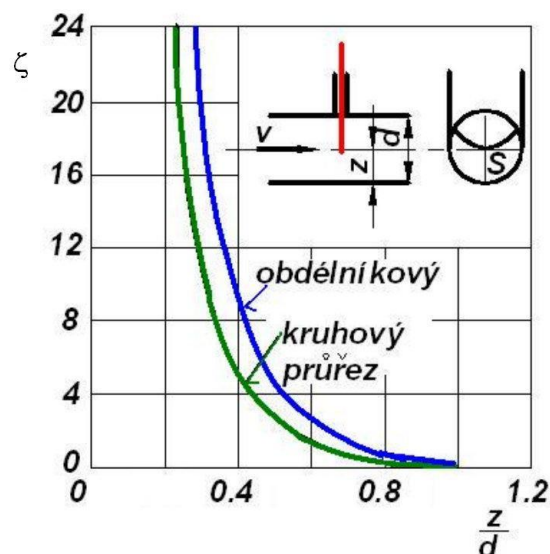
### Armatury

Armatury (ventily, šoupátka, kohouty a klapky) slouží k uzavření potrubí nebo k regulaci průtoku či tlaku - obr. 12.14.



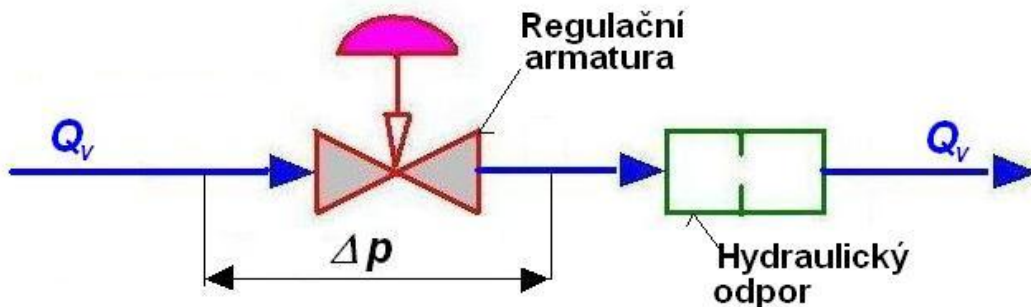
Obr. 12.14 Schéma armatur

Při zcela otevřených uzávěrkách mají být ztráty co nejmenší. Při plném otevření mají nejmenší odpor šoupátka a kohouty.



Obr. 12.15 Ztrátový součinitel šoupátka

U ventilů jsou ztráty větší (až 25 krát) a závisí na zakřivení proudnic ve ventilovém tělese. Hydraulický odpor je způsoben jednak třením, ale hlavně vířením. Deskou šoupátka, ventilu, klapky nebo tělesem kohoutu se zužuje průtočný průřez. Proud kapaliny nesleduje okrajovými proudnicemi přesně změny průřezu a dochází k odtržení proudnic a vniku vířivých oblastí. Tyto jevy vyvolávají hydraulický odpor spojený s rozptylem energie. Ztrátový součinitel se zjišťuje měřením. Obecně závisí na konstrukčním provedení armatury, na jejím poměrném otevření a na  $Re$ -čísle. Charakteristický průběh ztrátového součinitele je znázorněn v diagramu na obr. 12.15. pro šoupátko. Protože armatury představují proměnný odpor – obr. 12.15, používají se velmi často v technické praxi i pro regulaci průtoku tekutin. U ventilů se vhodný průběh ztrátového součinitele dosahuje tvarem kuželky. Regulační vlastnosti armatur jsou charakterizovány tzv. „jmenovitou kapacitou armatury“ často označovanou  $K_v$ . Jmenovitou kapacitu  $K_v = 1$  má armatura, kterou protéká průtok  $Q_v = 1 \text{ m}^3/\text{hod.}$ , při tlakovém spádu na armatuře  $\Delta p = 10^5 \text{ Pa}$  – obr. 12.16.



Obr. 12.16 Jmenovitá kapacita armatury

Obecně se jmenovitá kapacita armatury vypočítá pro proudění vody z rovnice

$$K_v = Q_v \sqrt{\frac{100000}{\Delta p}}, \quad (12.30)$$

kde  $Q_v$  - průtok protékající armaturou –  $\text{m}^3/\text{hod.}$

$\Delta p$  - tlakový spád na armatuře - Pa

Pro jinou látku, která má hustotu  $\rho$  se jmenovitá kapacita armatury určí z rovnice

$$K_v = Q_v \sqrt{\frac{100000}{\Delta p}} \cdot \sqrt{\frac{\rho}{\rho_v}}, \quad (12.31)$$

kde  $\rho_v$  je hustota vody při teplotě  $t = 15 \text{ }^\circ\text{C}$ .

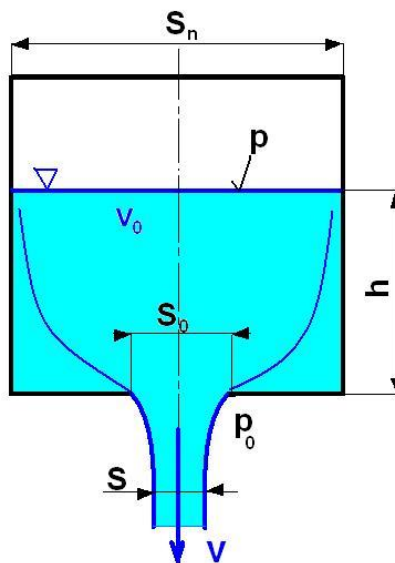
## 13. Výtok tekutiny otvory

### 13.1. Výtok malým otvorem

Uvažujeme výtok kapaliny otvorem ve dně podle obr.13.1 Protože polohová výška je pro celý otvor konstantní, potom rychlost v otvoru je rovnoměrně rozložena. Výtoková rychlost v tomto případě se vypočítá z Bernoulliho rovnice. V obecném případě se uvažuje v nádrži tlak  $p_0$ , který je odlišný od tlaku ovzduší  $p_0$ , do něhož vytéká kapalina otvorem o průřezu  $S_0$ . Nádrž má konstantní průřez  $S_n$  (válec, hranol) a je naplněna do výšky  $h$  (obr. 13.1). Pro skutečnou kapalinu platí Bernoulliho rovnice psaná pro hladinu v nádrži a pro výtokový průřez

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} + gh = \frac{v^2}{2} + gh_z + \frac{p_0}{\rho} \quad (13.1)$$

Předpokládáme, že průřez výtokového otvoru  $S_0$  je ve srovnání a průřezem nádrže  $S_n$  velmi malý potom rychlost poklesu hladiny  $v_0 \rightarrow 0$



Obr.13.1 Výtok z nádoby otvorem ve dně

Pro ztrátovou výšku platí známá rovnice

$$h_z = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g},$$

potom z rovnice (13.1) pro výtokovou rychlost platí

$$v = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \sqrt{2 \left( gh + \frac{p-p_0}{\rho} \right)} = \varphi \sqrt{2 \left( gh + \frac{p-p_0}{\rho} \right)}. \quad (13.2)$$

Pro teoretickou výtokovou rychlost ( $\zeta = 0$ ) dostaneme

$$v_t = \sqrt{2 \left( gh + \frac{p-p_0}{\rho} \right)}.$$

Poměr skutečné a teoretické rychlosti je rychlostní součinitel

$$\varphi = \frac{v}{v_t} = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} < 1. \quad (13.3)$$

Při stejném tlaku v nádrži a ve výtokovém otvoru je výtoková rychlost určena rovnicí

$$v = \varphi \sqrt{2gh}, \quad (13.4)$$

pro  $\varphi = 1$  je teoretická rychlost

$$v_t = \sqrt{2gh}, \quad (13.5)$$

což je známý Torricelliho výraz.

Při výtoku z nádoby nevyplňuje proud kapaliny zpravidla celý výtokový otvor, neboť proudnice se nemohou náhle zakřivit podle hran otvorů. Setrvačností částic kapaliny je způsobeno zúžení nebo kontrakce paprsku. Vyjadřuje se součinitelem kontrakce

$$\varepsilon = \frac{S}{S_0} < 1. \quad (13.6)$$

Součinitel zúžení závisí obecně na tvaru výtokového otvoru, jeho umístění vůči bočním stěnám a na Re-čísle.

Skutečný výtok kapaliny otvorem po dosažení rovnice (13.4) a (13.6) je

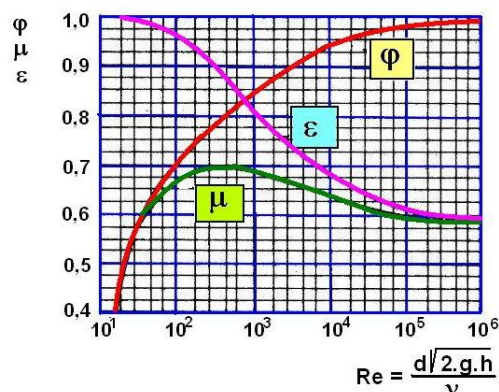
$$Q_v = v \cdot S = \varepsilon \cdot \varphi \cdot S_0 \sqrt{2gh} = \mu S_0 \sqrt{2gh}, \quad (13.7)$$

kde

$$\mu = \frac{Q_v}{Q_{vt}} = \varepsilon \cdot \varphi < 1,$$

je výtokový součinitel, který rovněž závisí na tvaru otvoru či nátrubku a Re-čísle.

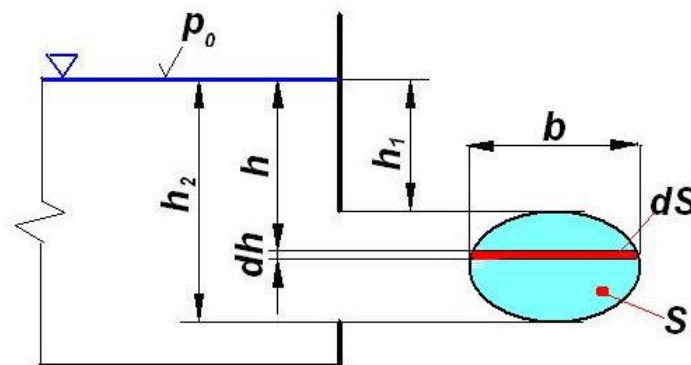
Závislost  $\varphi, \varepsilon, \mu = f(\text{Re})$  pro ostrohranný otvor podle výsledků měření uvádí obr. 13.2.



Obr.13.2 Rychlostní, kontrakční a výtokový součinitel malého otvoru

### 13.2. Výtok velkým otvorem v boční stěně

Při relativně velkém otvoru ve svislé stěně je nutno respektovat závislost výtokové rychlosti kapaliny na hloubce uvažovaného místa pod hladinou tlaku ovzduší. Skutečná výtoková rychlost kapaliny je určena vztahem (13.2) nebo (13.4). Výtok kapaliny z nádoby se určí integrací. Elementem plochy výtokového otvoru  $dS = b \cdot dh$  (obr. 13.3) vytéká elementární skutečný průtok kapaliny



Obr.13.3 Výtok velkým otvorem obecného tvaru

$$dQ_v = \mu \cdot v \cdot dS = \mu \cdot b \cdot \sqrt{2gh} \cdot dh.$$

Výtok rozměrným otvorem je určen obecně integrálem

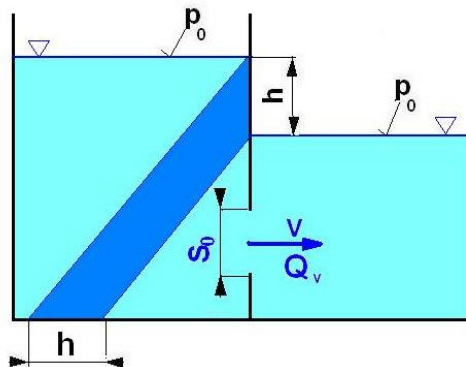
$$Q_v = \int_S dQ = \mu \int_{h_1}^{h_2} b \sqrt{2gh} \, dh. \quad (13.8)$$

Má-li otvor obdélkový průřez –  $b = \text{konst}$ , potom výtok určíme integrací rovnice (13.8)

$$Q_v = \frac{2}{3} \mu \cdot b \sqrt{2g} \left( h_2^{3/2} - h_1^{3/2} \right). \quad (13.9)$$

### 13.3. Výtok ponořeným otvorem

Kapalina vytéká otvorem do prostředí vyplněného rovněž kapalinou (obr.13.4). Jde v podstatě o průtok otvorem mezi dvěma nádobami. Otvor je pod oběma hladinami v nádržích, proto je označován jako ponořený. Výtoková rychlost otvorem závisí na rozdílu hladin v nádobách.



Obr.13.4 Výtok ponořeným otvorem

K odvození vztahu pro výtokovou rychlost se pomyslně otvor zakryje deskou. Tlak kapaliny působící na desku z obou stran je přímo úměrný hloubce uvažovaného místa do hladiny tlaku ovzduší. Jejich průběh je vyznačen v obrázku přímkami. Tlaky působí proti sobě, proto výsledný tlak je dán jejich rozdílem, který je po celé stěně smočené z obou stran konstantní  $\Delta p = \rho gh$ . Po odkrytí otvoru začne kapalina přetékat teoretickou výtokovou rychlostí

$$v_t = \sqrt{2gh}.$$

Tento výraz je formálně totožný s Torricelliho výrazem. Protože tlakový rozdíl je po celém průřezu ponořeného otvoru stejný, je výtoková rychlost ve všech místech stejná a nezávislá na tvaru otvoru  $S$ .

Pro objemový průtok proto platí rovnice

$$Q_v = \mu \cdot S \sqrt{2gh}. \quad (13.10)$$

### 13.4. Výtok při současném přítoku

Z otevřené nádoby vytéká kapalina  $Q$  otvorem  $S_0$  (obr. 13.5) a současně přitéká  $Q_{vp}$ , přičemž  $Q_{vp} = Q_v$ . Výtok při libovolné výšce  $h$  hladiny je určen vztahem

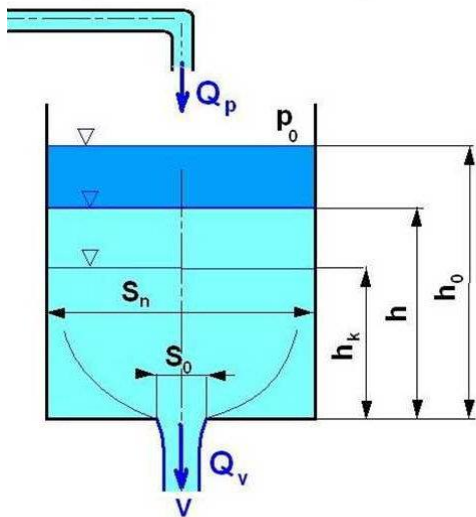
$$Q_v = \mu S_0 \sqrt{2gh}.$$

Když  $Q_{vp} \neq Q_v$ , pak se poloha hladiny v nádobě bude měnit. Při  $Q_{vp} \geq Q_v$  hladina stoupá, při  $Q_{vp} \leq Q_v$  hladina klesá.

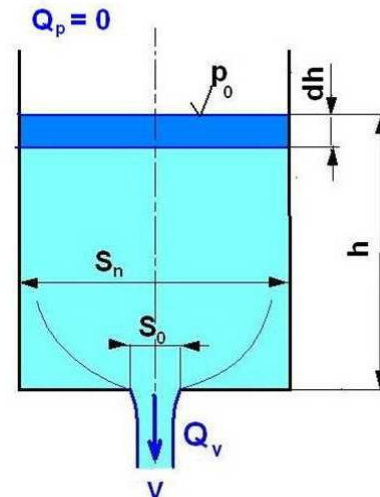
Stoupání, popřípadě klesání hladiny trvá tak dlouho, až se dosáhne rovnováhy  $Q_{vp} = Q_v$ . Tomuto ustálenému stavu odpovídá výška  $h_k$ , pro níž platí

$$Q_{vp} = Q_v = \mu S_0 \sqrt{2gh_k}.$$





Obr.13.5 Výtok při současném přítoku



Obr.13.6 Vyprazdňování nádoby

Vyšetříme změnu polohy hladiny v závislosti na čase  $t$ . Předpokládá se, že v rovnovážném stavu v čase  $t = 0$  je hladina ve výšce  $h_0$ . Skokem se změnil přítok kapaliny na hodnotu  $Q_{vp}$ , = konst., např. se  $Q_{vp}$ , zvětší. V libovolném časovém okamžiku  $t$  způsobí rozdíl přiteklé a vyteklé kapaliny za elementární čas  $dt$  zvýšení  $dh$  hladiny  $p_0$  v nádobě o průřezu  $S_n$ .

$$dt = \frac{S_n dh}{Q_{vp} - Q_v} = \frac{S_n dh}{\mu S_0 \sqrt{2g} (\sqrt{h_k} - \sqrt{h})}. \quad (13.11)$$

Integrací této rovnice se stanoví čas za který hladina stoupne nebo klesne z původní hodnoty  $h_0$  na hodnotu  $h$ . V obecném případě je třeba také uvážit, že  $S_n = f(h)$  a  $Q_{vp} = f(t)$ .

### 13.5. Vyprazdňování nádob

Jestliže do nádoby nepřitéká kapalina a tedy  $Q_{vp} = 0$ , hladina klesá, až se nádoba vyprázdní  $h = 0$ . Čas potřebný k vyprázdnění nádoby se vypočte z diferenciální rovnice (13.11) do níž se dosadí  $Q_{vp} = 0$  neboli  $h_k = 0$ . Pak platí

$$dt = - \frac{S_n dh}{\mu S_0 \sqrt{2gh}}.$$

Z otevřené nádoby s konstantním průřezem  $S_n$  se dostane integrací doba  $t$  potřebná ke snížení hladiny  $p_0$  z výšky  $h_0$  na  $h$

$$t = - \frac{S_n}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \int_{h_0}^h h^{-\frac{1}{2}} dh = \frac{2S_n}{\mu S_0 \sqrt{2g}} (\sqrt{h_0} - \sqrt{h}).$$

Při úplném vyprázdnění nádoby je konečná výška hladiny rovna  $h = 0$  a potřebná doba vyprázdnění nádoby se vypočte ze vzorce

$$t_v = \frac{2Sh_0}{\mu S_0 \sqrt{2gh_0}} = 2 \frac{Sh_0}{Q_{v0}} = 2 \frac{V_0}{Q_{v0}}, \quad (13.12)$$

kde  $V_0$  – objem nádrže

$Q_{v0} = \mu S_0 \sqrt{2gh_0}$  je výtok na začátku vyprazdňování

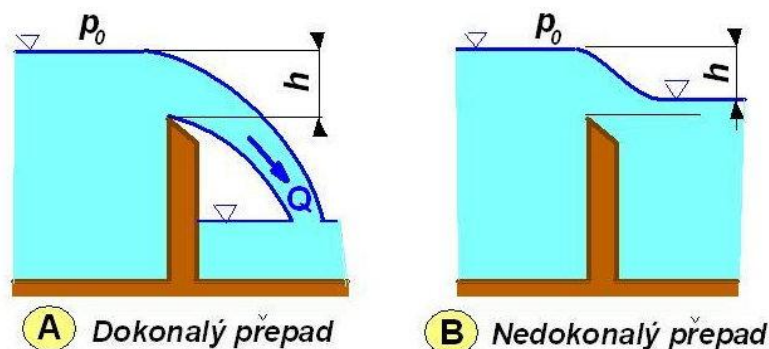
Vypočítaná doba úplného vyprázdnění nádoby při menších výškách hladiny  $h_0$  se může lišit od skutečné doby vyprázdnění. To je způsobeno kvalitativními změnami ve výtoku kapaliny otvorem, neboť při určité výšce hladiny nad otvorem vznikne nálevkovitý vír.

### 13.6. Přepady

Přepad je výtok nezaplňným otvorem nebo otvorem s neuzavřeným obrysem. (obr. 13.7) Nejnižší místo výtokového otvoru je korunou přepadu. Výška horní hladiny  $p_0$  (před přepadem) nad korunou přepadu je přepadová výška  $h$ . S přepadem se setkáváme na přehradách, kde zajišťují propuštění při maximálních průtocích a udržení hladiny v nádrži pod maximální úrovní. Přepady mají význam rovněž pro měření velkých průtoků, např. v laboratořích.

Podle polohy spodní hladiny se rozlišují přepady dokonalé a nedokonalé. Dokonalý přepad je takový, při němž spodní hladina neovlivňuje průtok přepadem. U dokonalého přepadu je spodní hladina pod korunou přepadu (obr. 13.7). Nedokonalý přepad má ovlivněn průtok spodní hladinou, která je výše než koruna přepadu (obr. 13.7). Přepadová stěna může být poměrně tenká nebo tlustá, popřípadě se zaoblením.

Průtok dokonalým přepadem s volným proudem se stanoví jako výtok velkým otvorem ve stěně nádoby – rov. (13.8).



Obr.13.7 Dokonalý a nedokonalý přepad

$$Q_v = \mu \sqrt{2g} \int_s b \sqrt{h} dh. \quad (13.13)$$

Tato rovnice je rovnice Dubuatova pro obecný tvar přepadu. Součinitel přepadu  $\mu$  je obdobný výtokovému součiniteli. Je závislý na přepadové výšce  $h$  a vlastnostech přepadu -  $\mu = (Re, geomt \text{ var})$

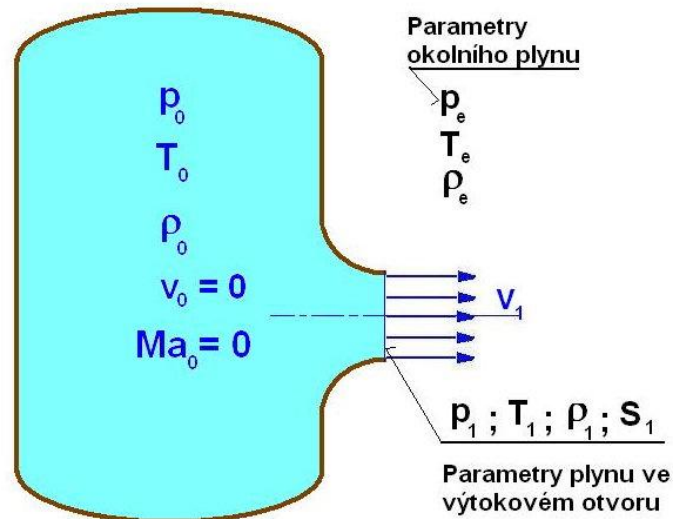
Pro obdélníkový přepad (obr. 13.7) se šířkou koruny přepadu  $b$  je průtok určen vzorcem pro rozměrný otvor ve svislé stěně (obr. 13.3). Jestliže se dosadí  $h_1 = 0$  a  $h_2 = h$ , pak

$$Q_v = \frac{2}{3} \mu b h \sqrt{2gh}. \quad (13.14)$$

Pro přepad s ostrou hranou a je střední hodnota součinitele přepadu  $\mu = 0,65$ , pokud šířka přepadu  $b$  je rovna šířce celého kanálu  $b_0$ . Pro přepady jiných průřezů vztahy pro průtok je možné najít v odborné literatuře. Pro měření průtoků se velmi často používá přepad trojúhelníkový.

### 13.7. Výtok plynu dýzou

V tlakové nádobě - obr. 13.8 se nachází plyn (vzduch), jeho stavové veličiny jsou  $p_0, \rho_0, T_0$ , jsou také dány stavové veličiny okolního plynu -  $p_e, \rho_e, T_e$ . Zabuďme se případem, kdy tekutina vytéká nerozšířenou tryskou z rozměrné nádoby - obr.13.8, ve které je tlak  $p_0$ , teplota  $T_0$ , přičemž rychlost tekutiny v nádobě je nulová -  $v_0 = 0$ , tomu odpovídá, že i Machovo číslo je nulové -  $Ma = 0$ . Tekutina vytéká do prostředí s teplotou  $T_e$  a tlakem  $p_e$ , tento tlak se také nazývá protitlak. Výtokový otvor má průřez  $S_1$ , a je v něm tlak  $p_1$ , rychlost  $v_1$  a teplota  $T_1$ , při čemž  $T_1 \neq T_e$ . Tlak v ústí trysky  $p_1$  nemusí být vždy totožný s tlakem okolí  $p_e$ . Při proudění tryskou se vnitřní a tlaková energie proudící stlačitelné tekutiny - plynu mění (transformuje) na energii kinetickou.



Obr. 13.8 Schéma pro výpočet výtokové rychlosti plynu

Při řešení vyjdeme z Bernoulliho rovnice (7.25), psané pro nádobu (index 0) a výtokový otvor (index 1)

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_0^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0},$$

odkud vypočítáme kvadrát výtokové rychlosti

$$v_1^2 = v_0^2 + \frac{2\kappa}{\kappa-1} \left( \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) = v_0^2 + \frac{2 \cdot r \cdot \kappa}{\kappa-1} (T_0 - T_1) = v_0^2 + 2c_p (T_0 - T_1). \quad (13.15)$$

Při odvození této rovnice byly použity známé vztahy z adiabatické stavové změny

$$c_p = \frac{\kappa \cdot r}{\kappa-1}, \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v}, \quad r = c_p - c_v, \quad \frac{T_1}{T_0} = \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}.$$

V nádobě je rychlost plynu nulová, proto pro rychlost platí  $v_0 = 0$  (stagnační bod). Pro výtokovou rychlost z předcházející rovnice dostaneme rovnici Saint Vénantovu - Wantzelovu

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} r T_0 \left[ 1 - \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} = \\ &= \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} r T_0 \left[ 1 - \left( \frac{T_1}{T_0} \right) \right]} = \sqrt{\frac{2\kappa \cdot r}{\kappa-1} [T_0 - T_1]} \quad . \end{aligned} \quad (13.16)$$

Pro výtok do vakua kde  $p_1 = 0$ ,  $T_1 = 0$  bude výtoková rychlost největší a je dána rovnicí

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} r \cdot T_0}. \quad (13.17)$$

Poměr výtokové rychlosti a max. rychlosti je

$$\frac{v_1}{v_{\max}} = \sqrt{1 - \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = \sqrt{1 - \frac{T_1}{T_0}}. \quad (13.18)$$

Hmotnostní průtok se stanoví z rovnice kontinuity (7.3)

$$Q_m = \rho_1 v_1 S_1.$$

Po dosazení do rovnice spojitosti (7.3) za rychlost  $v_1$  z rovnice (13.16), hmotnostní průtok je

$$Q_m = S_1 \cdot \rho_1 \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} = S_1 \cdot \rho_1 \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} r \cdot T_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}. \quad (13.19)$$

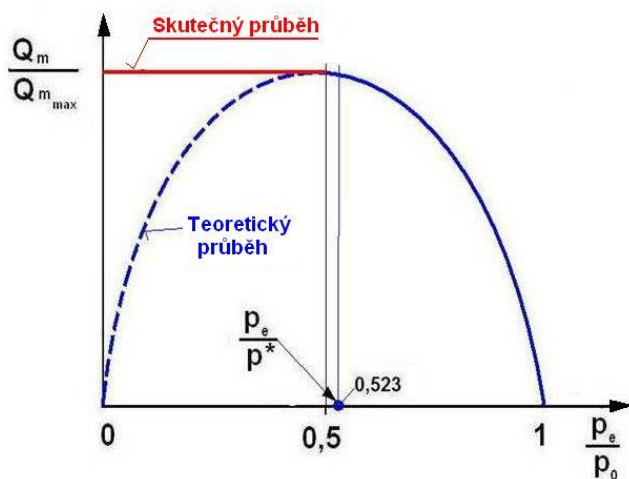
Při výpočtu rychlosti plynu, stavových veličin nebo průřezu trysky podél osy trubice v obecném průřezu se nahradí index 1 indexem obecného průřezu.

Hmotnostní průtok  $Q_m$  dosáhne své maximální hodnoty při  $v_1 = v^* = a$  ( $Ma = 1$ ), tj. v okamžiku, kdy se výstupní průřez stane kritickým a tlak rovněž nabude kritické hodnoty -  $p = p_e = p^*$ . Při libovolných jiných protitlacích  $p_e$  nemůže hmotnostní průtok  $Q_m$  přestoupit kritickou, a tím i maximální hodnotu.

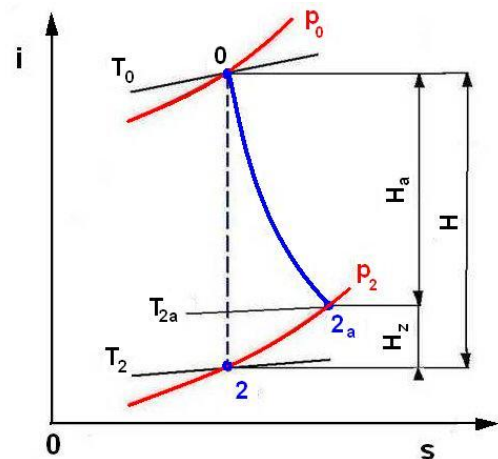
Pro další výklad bude užitečné graficky znázornit rovnici (13.18), tj. stanovit závislost,

$$\frac{Q_m}{Q_{mMAX}} = f\left(\frac{p_e}{p_0}\right),$$

kteřá je uvedena na obr. 13.9.



Obr. 13.9 Závislost  $\frac{Q_m}{Q_{mMAX}} = f\left(\frac{p_e}{p_0}\right)$  pro vzduch



Obr. 13.10 Výtok dýzou i – s diagram

Pro  $p_e = p_0$ , nebo  $p_e / p_0 = 1$  je poměr průtoků nulový. Zvyšujeme-li tlak  $p_0$  a současně tlak  $p_e$  zůstává konstantní, potom průtok stále roste a jak již bylo uvedeno pro  $Ma = 1$  nebo také pro  $p_e = p^*$  dosáhne průtok max. velikosti  $Q_{mMAX}$ . Protože se hmotnostní průtok již nezvyšuje, tento jev se často nazývá „ucpání“ nebo též „zahlnění trysky“.

Bude-li se však tlak v nádobě  $p_0$  dále zvětšovat, pak v souladu s rovnicí (13.19) se bude průtok rovněž zmenšovat a Machovo číslo bude neustále vzrůstat. Křivka na obr. 13.9 připomíná půlelipsu, tato je v první části vytažena plnou čarou, naopak v levé části je kreslena čárkovaně. Snižování hmotnostního průtoku je však jev fyzikálně nemožný, je zřejmé, že při zvyšování tlaku  $p_0$  se nemůže hmotnostní průtok snižovat. Ve skutečnosti hmotnostní průtok  $Q_m$ , Machovo číslo  $Ma$ , tlak  $p_1$  ve výstupním průřezu si zachovávají své kritické hodnoty  $Q_m = Q_{mMAX}$ ,  $Ma^* = 1$ ,  $p_1 = p^*$ , ačkoliv tlak  $p_0$  neustále stoupá a je čím dál tím větší než je tlak kritický  $p^*$ . Jak ukazuje obr. 8.6 ve skutečnosti pro oblast  $p_e < p^*$  hmotnostní průtok bude konstantní a bude mít velikost  $Q_m = Q_m^* = Q_{mMAX}$ . Toto je velmi důležitý praktický závěr.

Jestliže ve výtokovém otvoru rychlost dosáhne rychlosti zvuku  $v_1 = v^* = a$ , potom pro poměr stavových veličin ve výtokovém otvoru a v nádobě lze odvodit následující vztahy

$$\frac{p^*}{p_0} = \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}; \quad \frac{T^*}{T_0} = \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right); \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}. \quad (13.20)$$

Tak např. pro dvouatomový plyn ( $\kappa = 1,4$ ) je poměr tlaků  $p^*/p_0 = 0,523$ , poměr teplot  $T^*/T_0 = 0,833$  a poměr hustot  $\rho^*/\rho_0 = 0,634$

Skutečná výtoková rychlost je vždy menší než teoretická výtoková rychlost určená předcházejícími rovnicemi. Proto i při proudění reálných plynů, stejně jako v mechanice tekutin při výtoku nestlačitelné vazké tekutiny otvorem se zavádí tzv. rychlostní součinitel  $\varphi$ , tento je dán poměrem skutečné a teoretické rychlosti a s účinností trysky je vázán vztahem

$$\varphi = \frac{v_t}{v_s} = \sqrt{\eta_t} \Rightarrow v_s = \varphi \cdot v_t, \quad (13.21)$$

kde  $v_t$  - teoretická výtoková rychlost

$v_s$  - skutečná výtoková rychlost

Velikost rychlostního součinitele se obvykle stanovuje měřením.

Pro výtoku tryskou reálného plynu je výhodné využít  $i - s$  diagram (Mollierův diagram) – obr. 13.10. Teoretická výtoková rychlost plynu z trysky se vypočítá z Bernoulliho rovnice (7.26)

$$v_2 = v_t = \sqrt{2(i_0 - i_2)}. \quad (13.22)$$

Při proudění skutečné (reálně) tekutiny je adiabatický průtok popsán stejnou Bernoulliho rovnicí (7.26), integrace se však musí provést po jiné křivce. Tuto integrační cestu obvykle přesně neznáme, víme však, že koncový bod leží na isobaře  $p_2 = \text{konst.}$  – obr. 13.10. Tomuto novému stavu přísluší podle 2 věty termomechaniky pro nevratné děje měrná entropie  $s_{2a} > s_2$ . Výtoková rychlost skutečná je dána vztahem

$$v_s = v_{2a} = \sqrt{2(i_0 - i_{2a})} = \sqrt{2H_a}. \quad (13.23)$$

V této rovnici je  $H_a$  tzv. adiabatický spád. Poměr

$$\eta = \frac{H_a}{H} = \frac{i_0 - i_{2a}}{i_0 - i_2}, \quad (13.24)$$

je tzv. účinnost trysky, tato se obvykle určuje měřením, u trysek se účinnost pohybuje v rozsahu  $\eta = 0,9$  až  $0,95$ . Při výtoku nestlačitelné tekutiny otvorem jak již bylo výše uvedeno se zavádí tzv. rychlostní součinitel  $\varphi$ , tento je s účinností vázán vztahem

$$\varphi = \frac{v_t}{v_s} = \sqrt{\eta}. \quad (13.21)$$

Definujme podle obr. 13.10 tzv. ztrátový entalpický spád  $H_z$ , pro který platí

$$H_z = H - H_a = i_0 + i_{2a} - i_{2a} - i_2. \quad (13.25)$$

Po dosazení z rovnic (13.20) a (13.23) pro ztrátový adiabatický spád dostaneme

$$H_z = \frac{v_t^2 - v_s^2}{2} = \zeta \frac{v_t^2}{2} = e_z, \quad (13.26)$$

kde  $e_z$  je měrná ztrátová energie.

V této rovnici je  $\zeta$  ztrátový součinitel, tento se musí stanovit měřením a je obecně funkcí Reynoldsova čísla  $Re$ , relativní drsnosti  $k/D_h$ , Machova čísla  $Ma$  a Poissonova čísla  $\kappa$ , ztrátový součinitel je tedy funkcí  $\zeta = f(Re, k/D_h, Ma, \kappa)$ . S využitím rovnice (13.26) pro  $H_z$  dostaneme pro rychlostní součinitel výpočtové vztahy

$$\varphi = \frac{v_s}{v_t} = \sqrt{\frac{H_a}{H}} = \sqrt{1 - \frac{H_z}{H}} = \sqrt{1 - \zeta} = \sqrt{\eta}. \quad (13.27)$$

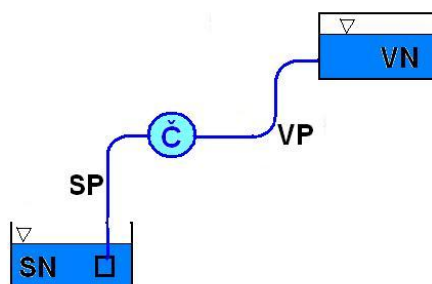
## 14. Čerpadla

Čerpadlo je stroj, který dodává kapalině energii (obvykle tlakovou), toto je využíváno v technické praxi nejčastěji k následujícím účelům:

- zvedání kapaliny (zvyšování polohové energie např. u vodojemů),
- zvyšování tlakové energie (hydrostatické mechanismy),
- zvyšování kinetické energie (hasící zařízení),
- doprava kapaliny v potrubí z jednoho místa na druhé.

Čerpadla podle způsobu jakým se vyvozuje čerpací účinek se rozdělují na tři skupiny :

- čerpadla objemová – hydrostatická, s přímou přeměnou mechanické energie v energii tlakovou, využívá se Pascalův zákon,
- čerpadla hydrodynamická – s nepřímou přeměnou mechanické energie v energii tlakovou,
- čerpadla speciální – např. proudová, k čerpání je využito kinetické energie proudící tekutiny.



Obr. 14.1 Schéma čerpacího zařízení

Klasický příklad zapojení čerpadla do potrubního systému uvádí obr. 14.1. Čerpadlo Č je sacím potrubím SP napojeno na sací nádrž SN. Na výtlačku je čerpadlo výtlačným potrubím VP propojeno s výtlačnou nádrží VN. Tlak v sací a výtlačné nádrži může být rozdílný, jsou však také případy, kdy v obou nádržích je tlak stejný, např. atmosférický. Výtlačná nádrž se vzhledem k nádrži sací může nacházet výše nebo i níže, ale může být i na stejné úrovni. Výtlačná nádrž může současně plnit úlohu různého technologického zařízení, např. kotel, reaktor, hydraulický válec apod. Sací a výtlačné potrubí tvoří zátěž pro čerpadlo.

### 14.1. Čerpadla objemová – hydrostatická

Objemová čerpadla, také nazývaná hydrostatická zprostředkovávají přímou přeměnu mechanické energie v hydraulickou, při této přeměně se uplatňuje Pascalův zákon. Mechanickým tlakem pohyblivého členu (píst, plunžr, zub, lopatka, membrána, hadice apod.) na kapalinu se zvyšuje její tlaková energie přímo, proto s velkou účinností. Klasická, v této velmi rozsáhlé a rozmanité skupině čerpadel ( v některých oborech se používá také termín hydrogenerátor), jsou čerpadla pístová s vratným přímočarým pohybem a ventilovým rozvodem. Jejich konstrukce a stavební prvky byly převzaty z konstrukce parních strojů, zejména pak klikový mechanismus.

V porovnání s čerpadly hydrodynamickými lze definovat několik významných rozdílů a vlastností:

- vysoká účinnost,
- menší počet otáček a proto větší hmotnost i cena,
- dobrá sací schopnost,
- při konstantních otáčkách dodávají stejný průtok prakticky nezávislý na tlaku,
- s klesajícím tlakem přímo úměrně klesá i příkon,
- při uzavřené armatuře na výtlačku mají teoreticky nekonečně velký výkon,
- viskozita čerpané kapaliny prakticky neovlivňuje dodávaný objemový průtok,
- regulace průtoku je složitější a nedá se užít regulace škrcením na výtlačku.



Rozdělení objemových čerpadel se dá provést podle mnoha hledisek:

a) čerpadla rotační – zubová, vřetenová, lamelová, radiální nebo axiální pístová, čerpadla s odvalujícími písky apod.

b) čerpadla s kmitavým pohybem

- podle tvaru činné části čerpadla (pístová, plunžrová, membránová, vlnovcová, křídlová )
- podle počtu plunžrů nebo pístů (jedno, dvou, tří a více pístová)
- podle uspořádání činných elementů vyvozujících tlak
- podle způsobu rozvodů čerpané kapaliny
- podle kinematiky hnacího mechanismu

c) čerpadla s jiným pohybem, např. hadicová

d) kombinovaná čerpadla

Objemová čerpadla za jednu otáčku nebo cyklus dodávají zdvihový teoretický objem  $V_t$ , proto čerpaný průtok je

$$Q = V_t \cdot n \quad (14.1)$$

tento průtok je málo závislý na tlaku nebo viskozitě čerpané látky. Tlak v systému s objemovým čerpadlem se nastaví podle velikosti hydraulického odporu nebo jiné zátěže. Aby nedošlo k nekontrolovatelnému stoupení tlaku, systém s objemovým čerpadlem musí být vybaven vhodným pojišťovacím zařízením, které zabrání i náhodnému stoupení tlaku nad nastavenou jeho velikost.

V objemových čerpadlech v důsledku netěsností pístů, ucpávek, různých jiných těsnících elementů apod. dochází k objemovým ztrátám, proto tato čerpadla vykazují objemovou účinnost, kterou lze definovat následujícím vztahem

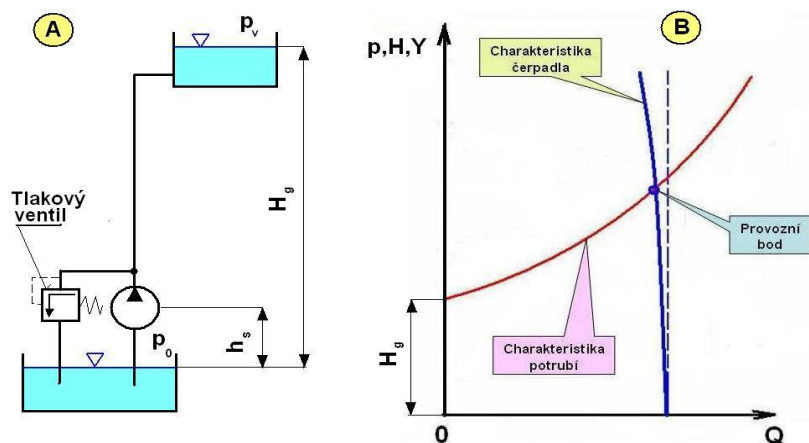
$$\eta_0 = \frac{Q_s}{Q_t} = 1 - \frac{Q_z}{Q_t} \quad (14.2)$$

kde  $Q_s$  - skutečný průtok;  $Q_t$  - teoretický průtok;  $Q_z$  - ztrátový průtok

Vedle objemové účinnosti je třeba uvážit i účinnost mechanickou  $\eta_m$ , jako důsledek odporů v ložiskách, ucpávkách, převodech, spojce atd. Celková účinnost je pak dána

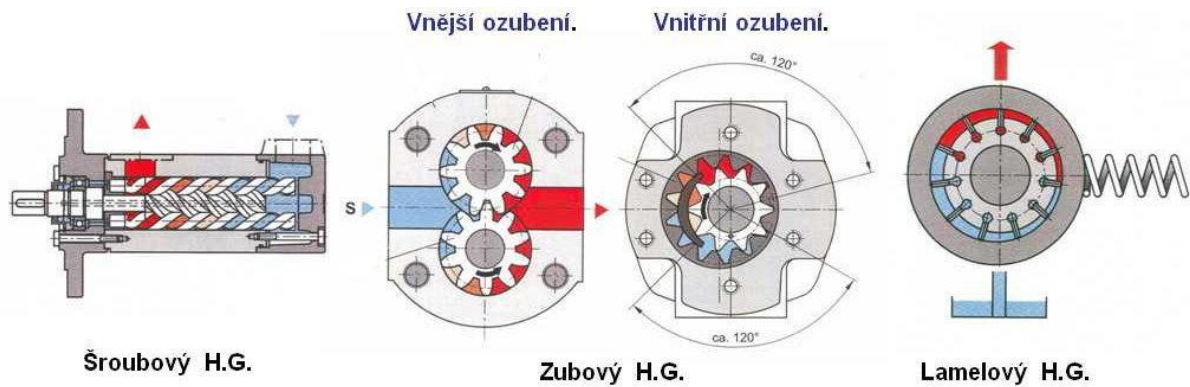
$$\eta_c = \eta_0 \cdot \eta_m \quad (14.3)$$

Charakteristika čerpadla  $Y = f(Q)$ ,  $H = f(Q)$  nebo  $p = f(Q)$  je teoreticky definována svislou přímkou, vzhledem k objemové účinnosti a rovněž i ke stlačitelnosti čerpané kapaliny je skutečná charakteristika křivka, která se od svislé přímký nepatrně odchyľuje směrem k menšímu průtoku – obr. 14.2.

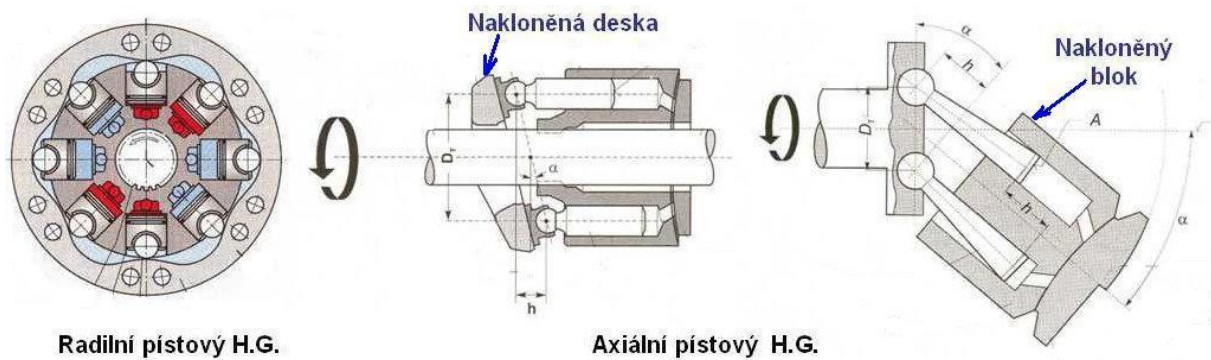


Obr. 14.2 Charakteristika objemového čerpadla

V technické praxi se užívají objemová čerpadla pro nejrůznější aplikace, používají se ve srovnání s odstředivými čerpadly hlavně v těch případech, kde jsou vyšší tlaky řádově do 50 MPa a malé průtoky. Asi nejčastěji se používají v oblasti hydraulických mechanismů či servomechanismů, kde se užívají čerpadla šroubová, zubová, lamelová, axiální nebo radiální pístová a další – obr. 14.3 a obr. 14.4.

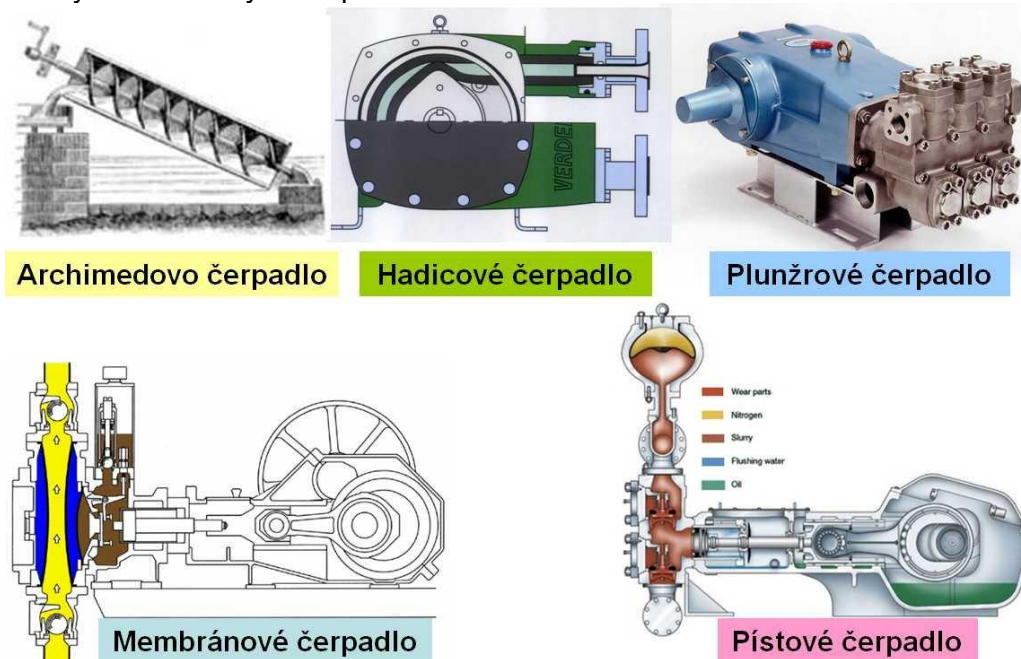


Obr. 14.3 Některá vybraná objemová čerpadla



Obr. 14.4 Schéma radiálních a axiálních pístových čerpadel

Další velmi rozsáhlé je užití objemových čerpadel v chemickém průmyslu, při konstrukci hydraulických lisů, v hornictví pro čerpání emulzí, při hlubinném vrtání atd. Zde se často používají čerpadla pístová nebo plunžrová, obr. 14.5 uvádí řez plunžrovým, pístovým, membránovým a hadicovým čerpadlem.

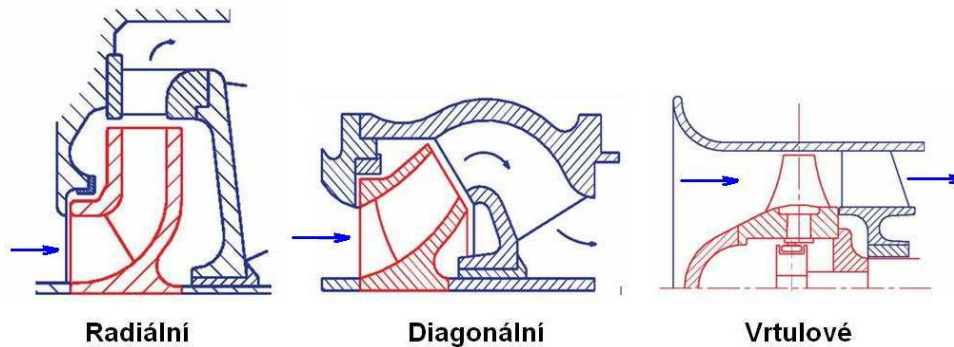


Obr. 14.5 Čerpadlo pístové, plunžrové, membránové a hadicové

V oblasti medicíny při transplantacích, nebo dialýze se používají čerpadla hadicová také nazývaná peristaltická.

## 14.2. Čerpadla odstředivá – hydrodynamická

U těchto čerpadel probíhá přeměna mechanické energie na energii tlakovou zprostředkovaně přes změnu kinetické energie. Hnací motorem je dodávána mechanická práce – energie oběžnému kolu, kde se přemění na hydraulickou energii kinetickou, která se pak ve spirále nebo v rozváděcím kole dále přemění na hydraulickou energii tlakovou. Ze spirály či rozváděcího kola odchází kapalina s nezbytnou rychlostí a s převažující energií tlakovou do potrubního systému. Tato dvojitá přeměna má za následek snížení celkové účinnosti hydrodynamických čerpadel v porovnání s čerpadly hydrostatickými. Tato kapalina u hydrodynamických čerpadel protéká spojitě v nepřetržitém proudu. Čerpadla pracují s větším počtem otáček, mají proto menší rozměry i hmotnost a jsou proto i cenově výhodnější, zvládají i velké průtoky



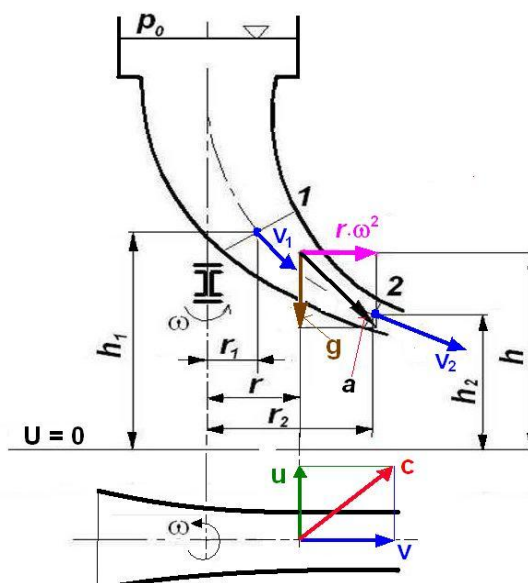
Obr. 14.6 Hydrodynamická čerpadla

Hydrodynamická čerpadla podle směru proudění kapaliny v kanálech oběžného kola dělí na tři skupiny - obr. 7.6 :

- čerpadlo radiální – kapalina do oběžného kola tohoto čerpadla vstupuje axiálně (rovnoběžně s osou čerpadla) a vystupuje z oběžného kola radiálně (kolmo na osu rotace),
- čerpadlo diagonální – kapalina vstupuje do oběžného kola axiálně a vystupuje diagonálně (šikmo k ose rotace)
- čerpadla axiální – vrtulová - kapalina vstupuje a vystupuje z oběžného kola čerpadla axiálně.

Přesnějším měřítkem rozdělení čerpadel jsou jejich měrné otáčky, o kterých je pojednáno v dalším textu.

### 14.2.1. Bernoulliho rovnice pro rotující kanál



Obr. 14.7 Rotující kanál

Při průtoku kapaliny kanálem, který se pohybuje, se změní energie kapaliny, neboť na ni vedle tíhy působí i síly od pohybu kanálu. Např. při rovnoměrné rotaci ( $\omega = konst$ ) okolo svislé osy působí v každém bodě rotujícího kanálu na kapalinu gravitační a odstředivé zrychlení - obr. 14.7.

Práce, kterou odstředivá síla vykoná při proudění kapaliny, má vliv na její energii. Bernoulliho rovnice jak byla dříve odvozena v obecném tvaru – rov. (7.19)

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U = konst,$$

zahrnuje v potenciálu  $U$  práci všech objemových sil, které působí na proudící kapalinu, tedy i odstředivé síly při rotaci kanálu. Na částici kapaliny v rotující proudové trubici působí složky zrychlení

$$a_r = r\omega^2; \quad a_y = -g; \quad a_z = 0.$$

Pro přírůstek potenciálu byla odvozena rovnice (3.11)

$$dU = (a_x dx + a_y dy + a_z dz),$$

potom pro svislou osu rotace s využitím výše uvedených rovnic se určí potenciál integrací

$$U = \int dU = \int (a_x dx + a_y dy) = -g \int dy + \omega^2 \int r dr = -gh + \frac{\omega^2 r^2}{2} + konst.$$

Dosazením do obecné Bernoulliho rovnice se dostane pro rotující kanál následující rovnice

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh - \frac{u^2}{2} = konst. \quad (14.4)$$

Rychlost  $v$  je relativní rychlost kapaliny, jíž proudí v rotujícím kanále vzhledem k jeho stěně, rychlost  $u$  je obvodová, neboli unášivá rychlost v uvažovaném místě rotujícího kanálu. Ostatní veličiny jsou stejné jako v základní Bernoulliho rovnici.

Při odstředivém průtoku rotujícím kanálem se unášivá rychlost  $u$  zvětšuje a energie kapaliny se zvyšuje. Tak je tomu např. v odstředivých čerpadlech. Obdobně při dostředivém průtoku unášivá rychlost se zmenšuje a energie kapaliny se snižuje. To je případ vodních turbin (např. Francisových).

Přihlíží-li se k hydraulickým odporům při ustáleném proudění skuteční kapaliny rotujícím kanálem, platí pro dva průřezy jedné a též proudové trubice Bernoulliho rovnice

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 - \frac{u_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2 - \frac{u_2^2}{2} + gh_z. \quad (14.5)$$

#### 14.2.2. Pracovní rovnice čerpadla – Eulerova rovnice

Na obr. 14.8 je uvedeno schéma odstředivého čerpadla s radiálním oběžným kolem. Čerpadlo nasává kapalinu ze sací nádrže, kde je tlak  $p_0$ . Sacím potrubím proudí kapalina do oběžného kola, toto se otáčí a vystupující kapalina z oběžného kola vstupuje do difuzoru, zde se snižuje rychlost a zvyšuje podle Bernoulliho rovnice tlak. Z difuzoru (nebo spirály) proudí tekutina výtlačným potrubím do výtlačné nádrže, ve které je tlak  $p_v$ . Protože v systému je rotující oběžné kolo, pro odvození pracovní rovnice čerpadla musíme postupovat tak, že napíšeme Bernoulliho rovnice postupně pro sací potrubí, rotující kanál, difusor a nakonec pro výtlačné potrubí. Jejich sečtením a úpravou získáme vzpomínanou pracovní rovnici čerpadla.

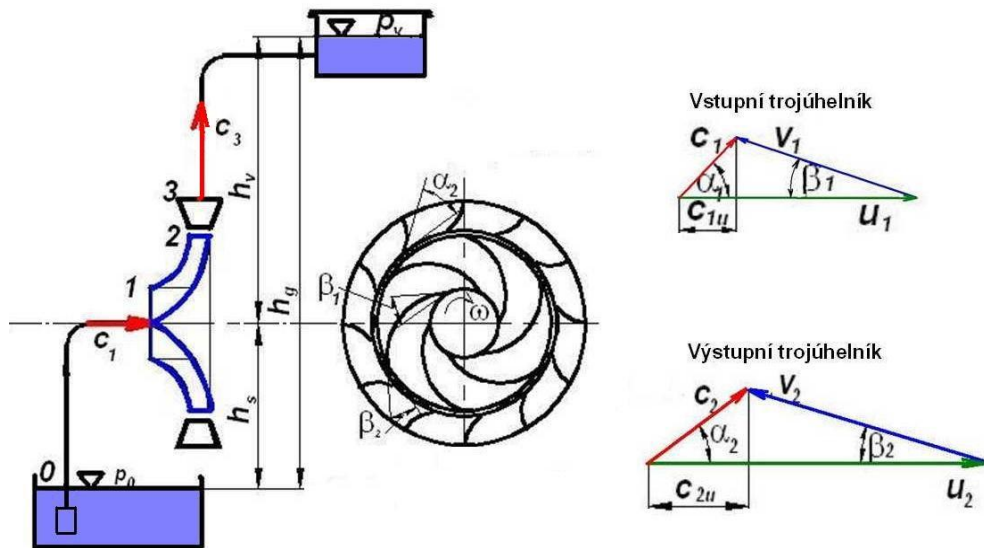
Při odvození rovnice pro čerpadlo je označení rychlostí následující:

$v$  – relativní rychlost proudění tekutiny vzhledem ke stěně kanálu,

$u$  – obvodová nebo unášivá rychlost způsobená rotací kanálu nebo oběžného kola,

$c$  – absolutní rychlost, tato rychlost je vektorovým součtem rychlostí „ $v$ “ a „ $u$ “.





Obr. 14.8 Odstředivé čerpadlo

**Sací potrubí** - Bernoulliho rovnice pro sací potrubí – úsek 0,1, psaná pro hladinu ve spodní nádrži a vstup do oběžného kola je

$$\frac{p_0}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + gh_s + \frac{c_1^2}{2} + gh_{zs} .$$

V rovnici jsou tyto veličiny:  $h_s$  je geodetická sací výška,  $h_{zs}$  jsou hydraulické odpory v sacím potrubí čerpadla,  $p_0$  tlak na hladinu v sací nádrži. Veličiny označené indexem 1 se vztahují na vstup do oběžného kola čerpadla.

**Oběžné kolo** - zde platí Bernoulliho rovnice pro rotující kanál – úsek 1, 2, která je pro vstupní a výstupní průřez

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} - \frac{u_2^2}{2} + gh_{z0} .$$

Rychlosti  $v_1, v_2$  jsou relativní,  $u_1, u_2$  jsou rychlosti unášivé (obvodové), index 1 značí vstup do oběžného kola, index 2 výstup z oběžného kola. Ztrátová výška  $h_{z0}$  zahrnuje ztráty spojené s průtokem kapaliny oběžným kolem (hydraulické). Mezi rychlostmi absolutní, relativní a unášivou platí pro vstup i výstup z oběžného kola vztah  $\mathbf{c} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ . Absolutní rychlostí  $c_2$  vystupuje kapalina z oběžného kola a vstupuje do difuzoru, kde se kinetická energie mění v tlakovou. Protože průměr oběžného kola je obvykle značně menší než výška  $h_v$ , výška mezi body 1-2 u oběžného kole se zanedbává.

**Difusor** - pro difusor (nebo spirálu) jako stojící kanál platí Bernoulliho rovnice psaná pro vstupní a výstupní průřez – úsek 2,3.

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} = \frac{p_3}{\rho} + \frac{c_3^2}{2} + gh_{zd} .$$

Ztráty třením v difuzoru včetně vstupních a výstupních místních ztrát jsou zahrnuty ztrátovou výškou v difuzoru  $h_{zd}$ . Rychlost  $c_3$  a tlak  $p_3$  jsou shodné s tlakem a rychlostí ve výtlačném hrdle čerpadla, na které je připojeno výtlačné potrubí nádrže. Ze stejných důvodů jako u oběžného kola se zanedbává výška mezi body 2-3 u difuzoru.

**Výtlačné potrubí** - Bernoulliho rovnice pro výtlačné potrubí – úsek 3-V

$$\frac{p_3}{\rho} + \frac{c_3^2}{2} = \frac{p_v}{\rho} + gh_v + gh_{zv}$$

Celkové ztráty ve výtlačném potrubí jsou vyjádřeny ztrátovou výškou  $h_{zv}$ . Veličiny označené indexem „v“ se vztahují na výtlačnou nádrž.

Sečtením všech čtyř rovnic se dostane rovnice pro teoretickou měrnou energii čerpadla

$$Y_t = g(h_s + h_v) + \frac{p_v - p_o}{\rho} + g(h_{zs} + h_{zv} + h_{zo} + h_{zd}) = \quad (14.6)$$

$$= \frac{1}{2} (u_2^2 - u_1^2 - v_2^2 + v_1^2 + c_2^2 - c_1^2)$$

Vedle měrné energie se v čerpací technice také používá veličina dopravní výška, obě tyto veličiny jsou vázány vztahem

$$Y_t = g.H_t .$$

S přihlédnutím k posledním dvěma rovnicím je teoretická dopravní výška čerpadla

$$H_t = \frac{Y_t}{g} = (h_s + h_v) + \frac{p_v - p_o}{\rho \cdot g} + (h_{zs} + h_{zv} + h_{zo} + h_{zd}) = \quad (14.7)$$

$$= \frac{1}{2g} (u_2^2 - u_1^2 - v_2^2 + v_1^2 + c_2^2 - c_1^2)$$

Měrná energie  $Y_t$  představuje energii, která je předána v čerpadle každému 1 kg hmotnosti kapaliny. Část této energie se spotřebuje v oběžném kole a difuzoru čerpadla

$$g(h_{zo} + h_{zd}) = gh_{z\check{c}},$$

což představuje hydraulické odpory čerpadla.

Skutečná měrná energie čerpadla  $Y_d$  nebo dopravní výška je o tyto ztráty menší

$$Y_d = Y_t - gh_{z\check{c}} = g(h_s + h_v) + \frac{p_v - p_o}{\rho} + g(h_{zs} + h_{zv}) = gH_d , \quad (14.8)$$

$$H_d = H_t - h_{z\check{c}} = (h_s + h_v) + \frac{p_v - p_o}{\rho \cdot g} + (h_{zs} + h_{zv} + h_{zo} + h_{zd}).$$

Vedle skutečné měrné energie  $Y_d$  nebo skutečné dopravní výšky  $H_d$  se používá i dopravní tlak  $p_d$ , pro který platí

$$p_d = \rho \cdot g \cdot H_d = \rho \cdot Y_d . \quad (14.9)$$

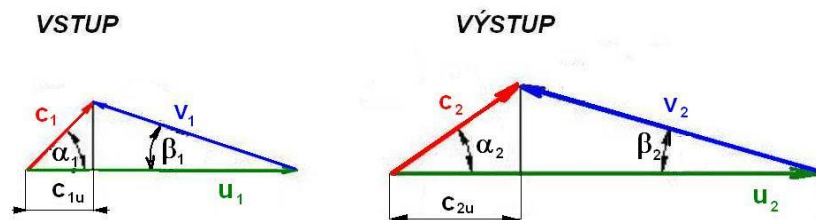
V rovnici pro skutečnou měrnou energii čerpadla  $Y_d$  je zahrnuta energie potřebná na

- zvedání kapaliny  $g(h_s + h_v)$ ,

- zvýšení tlakové energie  $\frac{p_v - p_o}{\rho}$ ,

- dopravu kapalin, která je spojena s překonáním hydraulických odporů v sacím a výtlačném potrubí  $g(h_{zs} + h_{zv})$ .

Teoretická měrná energie  $Y_t$ , jak vyplývá z odvozené rovnice (14.7), je dána rychlostními poměry na vstupu a výstupu z oběžného kola, tj. rychlostmi  $v_1, v_2, c_1, c_2, u_1, u_2$ , které určují rychlostní trojúhelníky na vstupu a výstupu z oběžného kola – obr. 7.9.



Obr. 14.9 Rychlostní trojúhelník na vstupu a výstupu oběžného kola

Kapalina se pohybuje v oběžném kole relativní rychlostí „v“, která svírá s unášivou rychlostí „u“ úhel  $\beta$ . Aby nedocházelo k rázu, musí lopatky oběžného kola mít směr relativní rychlosti.



Určuje tedy úhel  $\beta_1$  a  $\beta_2$  sklon lopatek na vstupu a výstupu z oběžného kola čerpadla. Podobně úhly lopatek v difuzoru jsou dány směrem absolutních rychlostí  $c_2$  a  $c_3$ , jimiž proudí kapalina stojícím difuzorem. Podle kosinové věty platí pro vstupní rychlostní trojúhelník – obr. 14.9

$$v_1^2 = u_1^2 + c_1^2 - 2u_1c_1 \cos \alpha_1 ,$$

a podobně pro výstupní rychlostní trojúhelník – obr. 14.9

$$v_2^2 = u_2^2 + c_2^2 - 2u_2c_2 \cos \alpha_2 .$$

Dosazením obou těchto výrazů do rovnice (7.7) pro teoretickou měrnou energii čerpadla  $Y_t$

$$Y_t = \frac{1}{2} (u_2^2 - u_1^2 - v_2^2 + v_1^2 + c_2^2 - c_1^2) ,$$

se po úpravě dostane

$$Y_t = gH_t = (u_2c_2 \cos \alpha_2 - u_1c_1 \cos \alpha_1) = u_2c_{2u} - u_1c_{1u} , \quad (14.10)$$

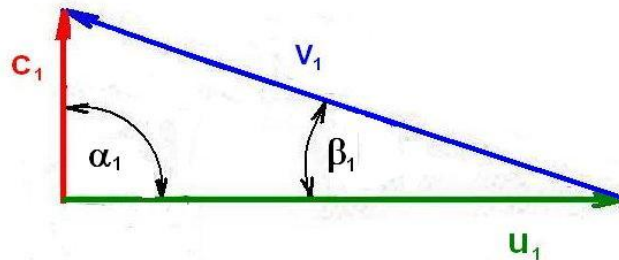
kde  $c_{1u} = c_1 \cdot \cos \alpha_1$ ,  $c_{2u} = c_2 \cdot \cos \alpha_2$

Rychlosti  $c_{1u}$  a  $c_{2u}$  jsou složky absolutní rychlosti „c“ promítnuté do směru unášivé rychlosti „u“. Pro skutečnou měrnou energii  $F_d$  platí výrazy

$$Y_d = gH_d = \eta_h gH_t = \eta_h (u_2c_{2u} - u_1c_{1u}) , \quad (14.11)$$

kde  $\eta_h$  je hydraulická účinnost čerpadla.

Toto je Eulerova čerpadlová rovnice



Obr. 14.10 Rychlostní trojúhelník na vstupu – kolmý vstup

Je-li úhel  $\alpha_1 = 90^\circ$  tzv. kolmý vstup – obr 14.10, což se v praxi často používá, potom předcházející rovnice se zjednoduší

$$Y_d = \eta_h \cdot u_2 \cdot c_{2u} . \quad (14.12)$$

Podobným způsobem lze popsat i průtok vodní turbínou, která v porovnání s čerpadlem vodě energii odebírá. Teoretická měrná energie vodní turbíny je vyjádřena rovnicí

$$Y_t = \frac{1}{2} (u_1^2 - u_2^2 - v_1^2 + v_2^2 + c_1^2 - c_2^2) , \quad (14.13)$$

po dosazení z rychlostních trojúhelníků na vstupu a výstupu z oběžného kola se dostane

$$Y_t = (u_1c_1 \cos \alpha_1 - u_2c_2 \cos \alpha_2) = u_1c_{1u} - u_2c_{2u} , \quad (14.14)$$

což je Eulerova turbínová rovnice.

### 14.2.3. Účinnost a příkon čerpadla

U odstředivých čerpadel při přeměně kinetické energie na tlakovou vznikají ztráty:

- hydraulické,
- objemové,
- mechanické.

**Hydraulické ztráty** – v kanálech odstředivého čerpadla od sacího až k výtlačnému hrdlu neproudí kapalina po jednoduché dráze, ale dochází ke změně směru i velikosti rychlosti. Kromě toho část proudící kapaliny rotuje, což také přispívá k velikosti hydraulických ztrát. Mezi hydraulické ztráty počítáme především ztráty třením, ztráty změnou průřezu i změnou směru proudu, turbulenci a víření kapaliny v kanálech čerpadla.

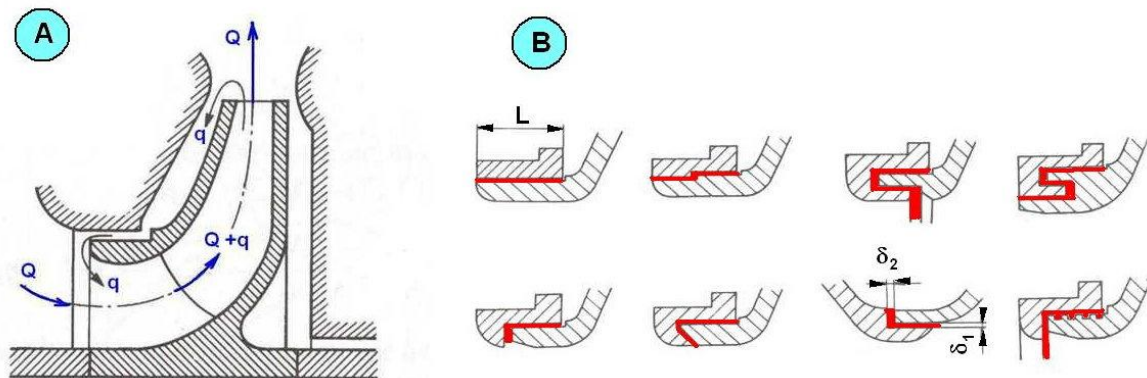
Hydraulickou účinnost můžeme definovat

$$\eta_h = \frac{H}{H_t} = \frac{g \cdot H}{u_2 \cdot c_{2u}},$$

kde  $H$  – dosažená dopravní výška

$H_t$  – teoretická dopravní výška

**Ztráty objemové** - vznikají zpětným unikáním čerpané kapaliny z výtlačku čerpadla do sání, v důsledku netěsností těsnících prstenců oběžného kola – obr. 14.11A.



Obr. 14.11 Vznik objemových ztrát a tvar těsnící spáry u odstředivého čerpadla

Oběžným kolem protéká větší průtok ( $Q + q$ ) než je průtok, který dodává čerpadlo do výtlačného potrubí. Objemovou účinnost můžeme definovat zlomkem

$$\eta_0 = \frac{Q}{Q + q},$$

kde  $Q$  – objemový průtok dodávaný čerpadlem

$q$  - zpětný průtok z výtlačku čerpadla do jeho sání, tento bývá 5 až 10 % průtoku  $Q$ .

Zpětný průtok můžeme stanovit ze známé rovnice

$$q = \mu \cdot S \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho}},$$

kde  $\mu$  - výtokový součinitel -  $\mu = 0,2$  až  $0,6$  dle konstrukce spáry

$S$  - příčný průřez spáry

$\Delta p$  - tlakový spád ve spáře

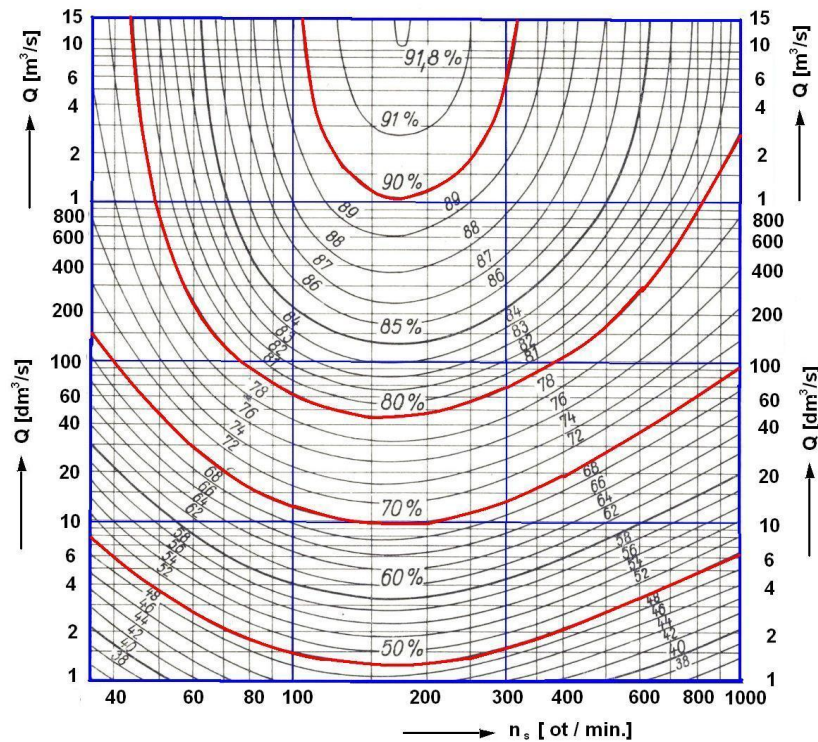
Velikost objemových ztrát se snižuje s rostoucí velikostí měrných otáček  $n_q$ . Některá provedení těsnící spáry jsou na obr. 14.11B.

**Ztráty mechanické** – vznikají třením hřídele v ucpávkách a ložiskách, ve spojkách a také třením diskovým, tj. třením bočních stěn čerpadla a oběžného kola o kapalinu v tělese čerpadla. Mechanická účinnost bývá  $\eta_m = 0,8$  až  $0,94$  podle kvality provedení a velikosti čerpadla. Celková účinnost je poměr teoretického a efektivního výkonu, z čehož plyne, že účinnost je součinem jednotlivých dílčích účinností

$$\eta_c = \frac{P_t}{P_{ef}} = \eta_h \cdot \eta_0 \cdot \eta_m \quad (14.15)$$

Tato účinnost se obvykle stanovuje měřením, výpočty dávají velkou nejistotu (chybu). Účinnost objemových čerpadel bývá výrazně větší než u čerpadel odstředivých.

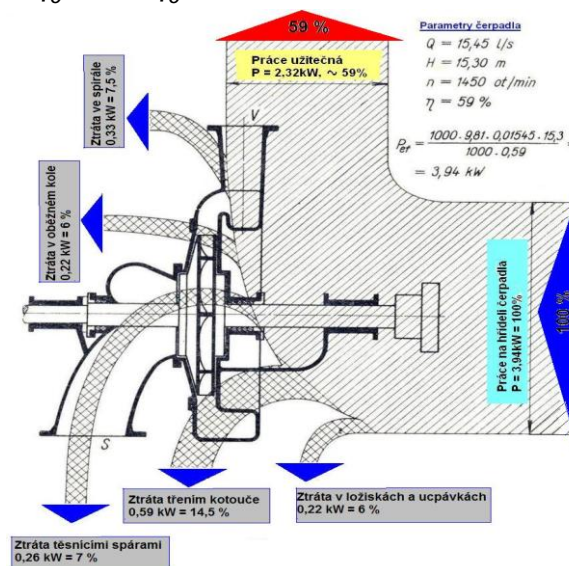
Podle Erharta je celková účinnost závislá na měrných otáčkách a průtoku – obr.14.12.



Obr. 14.12 Dosažitelná účinnost odstředivých čerpadel

Příkon čerpadla je dán rovnicí

$$P = \frac{\rho \cdot g \cdot H_d \cdot Q}{\eta_c} = \frac{p_d \cdot Q}{\eta_c} = \frac{\rho \cdot Y_d \cdot Q}{\eta_c} \quad (14.16)$$

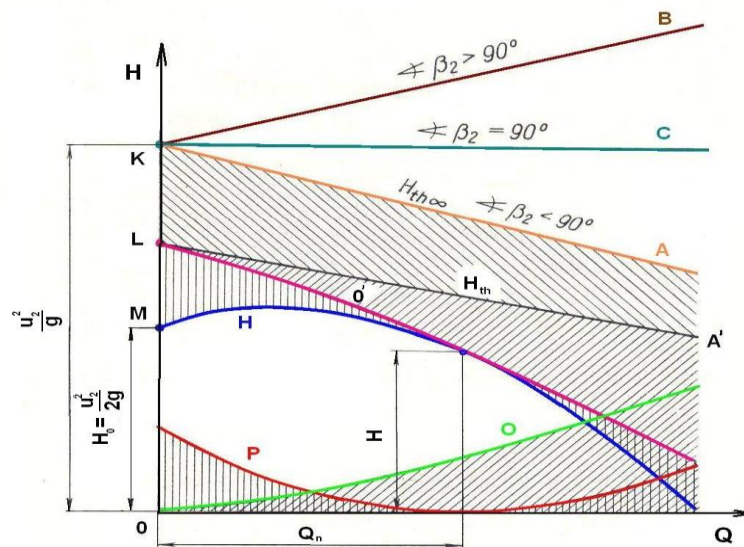


Obr. 14.13 Rozdělení ztrát v čerpadle

Názorně podle Nechleby ukazuje rozdělení ztrát v odstředivém čerpadle obr 14.13.

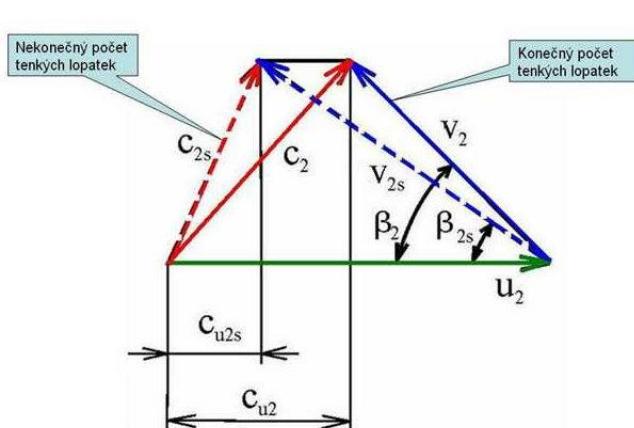
#### 14.2.4. Charakteristiky čerpadla

Charakteristikou čerpadla nazýváme závislost dopravní výšky  $H_d$ , nebo dopravního tlaku  $p_d$ , nebo měrné energie  $Y_d$  na objemovém průtoku  $Q$  při stálých otáčkách čerpadla. Pro kapalinu ideální za předpokladu nekonečného počtu tenkých lopatek je charakteristikou čerpadla přímka, její sklon závisí na výstupním úhlu  $\beta_2$  - obr. 14.14.

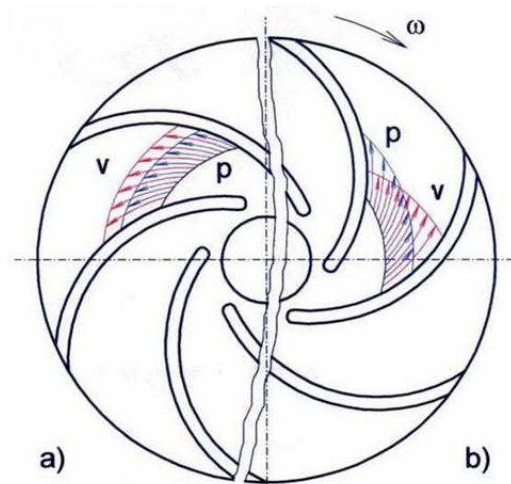


Obr. 14.14 Teoretická a skutečná charakteristika radiálního hydrodynamického čerpadla

Pro kapalinu ideální a pro oběžné kolo s konečným počtem lopatek se zanedbatelnou tloušťkou dostáváme menší teoretickou dopravní výšku, protože se změnil rychlostní trojúhelník na výstupu z oběžného kola - obr. 14.15



Obr. 14.15 Výstupní rychlostní trojúhelník

Obr. 14.16 Průběh rychlosti a tlaku v kanále oběžného kola  
a) nekonečný počet lopatek  
b) konečný počet lopatek

Teoretická dopravní výška je menší v důsledku konečného rozměru kanálu. V jednotlivých elementárních vláknách se nastavují různé tlaky a relativní rychlosti - obr. 14.16. Na lopatce se vytváří tzv. přetlaková a podtlaková strana. Výsledkem je, že se zmenší složka rychlosti  $c_{2u}$ . Skutečná dopravní výška  $H_d$  je vždy menší než výška teoretická  $H_t$ .

Přibližný tvar skutečné charakteristiky čerpadla se dá vypočítat z průběhu hydraulických ztrát v čerpadle. Ztráty jsou tvořeny hlavně třením, ohybem proudu a také změnou průřezu. Tyto ztráty jsou úměrné druhé mocnině rychlosti nebo průtoku a na obr. 14.14 jsou vyznačeny parabolou „O“.

Další ztráty vznikají rázem vodního proudu, když není dodržen směr vtoku proudu ve shodě se vtokovými úhly lopatek. Tyto ztráty jsou tím větší, čím více se bude lišit průtok v čerpadle  $Q$  od průtoku jmenovitého  $Q_n$ , pro který byly stanoveny úhly lopatek. Tyto ztráty

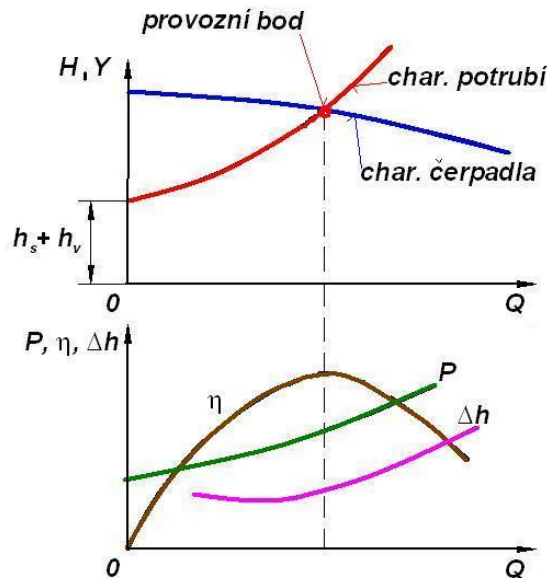


se dají rovněž aproximovat parabolou a na obr. 7.14 je to parabola označená „P“. Po odečtení paraboly „O“ a „P“ od přímky L H' dostaneme charakteristiku čerpadla „H“.

V počátečním bodě „M“ skutečná charakteristika „H“ má velikost přibližně  $H_0 = \frac{u_2^2}{2.g}$ ,

protože při nulovém průtoku se voda otáčí s oběžným kolem a má kinetickou energii úměrnou rychlostní výšce.

Skutečná charakteristika odstředivého čerpadla se stanoví zpravidla měřením na zkušebně výrobního závodu - obr 14.17.



Obr. 14.17 Skutečná charakteristika odstředivého radiálního čerpadla

Charakteristika bývá doplněna křivkou příkonu  $P - Q$ , celkové účinnosti  $\eta - Q$  a někdy také kavitační výškou  $\Delta h - Q$ . Když se do grafu charakteristiky čerpadla nakreslí i charakteristika potrubí, což je parabola, získá se průtok dodávaný čerpadlem v provozním bodě i velikosti ostatních veličin čerpadla –  $H$ ,  $P$ ,  $\eta$ ,  $\Delta h$ . Snahou provozovatele čerpadla musí být skutečnost, aby provozní bod ležel v oblasti maximální celkové účinnosti.

#### 14.2.5. Měrné otáčky

V souvislosti s podobností čerpadel se zavádí pojem měrné otáčky, tyto označují počet otáček, které by mělo čerpadlo geometricky podobné danému při jednotkovém průtoku  $Q = 1 \text{ m}^3/\text{s}$  a dopravní výšce  $H = 1 \text{ m}$ .

Předpokládejme, že v čerpadle z hlediska podobnosti jsou rozhodující síly a to síla setrvačná –  $F_s$ , síla tlaková –  $F_p$ , síla tíhová –  $F_g$ , síla třecí –  $F_t$  a síla impulsní –  $F_h$ . Z těchto sil se dají sestavit čtyři podobnostní kritéria (čísla) a sice Eulerovo –  $Eu$ , Froudovo –  $Fr$ , Reynoldsovo –  $Re$  a Strouhalovo –  $Sh$ . Podrobnosti uvádí kap. 9. Splnění všech podobnostních čísel není reálné, proto budeme předpokládat, že dominantní jsou podobnostní čísla Froudovo (definuje dynamickou podobnost) a Strouhalovo (které definuje kinematickou podobnost).

Tato dvě podobnostní čísla uvedeme do vztahu s parametry hydraulických strojů – průtok  $Q$ , dopravní výška  $H$  nebo měrnou energii  $Y$ . Vyjdeme z definice Strouhalova čísla

$$Sh = \frac{c.t}{x},$$

kde za charakteristický délkový rozměr  $x$  dosadíme průměr oběžného kola  $D$ , místo času  $t$  dosadíme otáčky  $n$  ( $s^{-1}$ ), nebo za obě veličiny dosadíme obvodovou rychlost oběžného kola  $u \approx n.D$ . Za těchto předpokladů je Strouhalovo číslo

$$Sh = \frac{c}{u},$$

toto udává úměrnost absolutních rychlostí a unášivých rychlostí v rychlostních trojúhelnících oběžných kol čerpadel nebo vodních turbín.

Je-li Froudovo číslo definováno vztahem

$$Fr = \frac{c}{\sqrt{g.H}} \Rightarrow c = Fr \sqrt{g.H},$$

po úpravě dostaneme

$$Sh = \frac{Fr \cdot \sqrt{g.H}}{u} = \frac{Fr \cdot \sqrt{Y}}{u},$$

odkud obvodová rychlost

$$u = \frac{Fr \cdot \sqrt{Y}}{Sh} \approx n.D. \quad (14.17)$$

U geometricky podobných hydrodynamických strojů souvisí průměr oběžného kola  $D$  s průtokem  $Q$

$$Q \approx D^2 \cdot c = D^2 \cdot Fr \cdot \sqrt{Y},$$

odkud pro průměr oběžného kola  $D$

$$D = \sqrt{\frac{Q}{Fr \cdot \sqrt{Y}}}.$$

Tento výraz dosadíme do rovnice (14.17) a obdržíme

$$\frac{Fr \cdot \sqrt{Y}}{Sh} = n \cdot \sqrt{\frac{Q}{Fr \cdot \sqrt{Y}}},$$

odkud pro otáčky hydrodynamického stroje (otáčky mají rozměr  $s^{-1}$ )

$$n = \frac{Fr^{1,5} Y^{0,75}}{Sh Q^{0,5}}. \quad (14.18)$$

Má-li hydrodynamický stroj hlavní parametry  $Q = 1 \text{ m}^3/\text{s}$  a  $Y = 1 \text{ J/kg}$ , potom z předcházející rovnice obdržíme

$$n_q^* = \frac{Fr^{1,5}}{Sh} \quad (s^{-1}). \quad (14.19)$$

Dělíme-li tuto rovnici rovnicí (7.18), potom pro měrné otáčky platí

$$n_q^* = \frac{n \cdot Q^{0,5}}{Y^{0,75}} \quad (s^{-1}). \quad (14.20)$$

V této rovnici se kritéria  $Fr$  a  $Sh$  krátí, poněvadž se předpokládá hydrodynamická podobnost mezi hydrodynamickým strojem s otáčkami  $n_q^*$  a mezi hydrodynamickým strojem s otáčkami  $n$ , pak musí platit, že podobnostní kritérium  $Fr = \text{konst.}$  a  $Sh = \text{konst.}$

Ve starší literatuře, kde byla užitá technická soustava jednotek, pak mezi měrnými otáčkami  $n_q$  a  $n_q^*$  platí

$$n_q = 333,3 \cdot n_q^* \quad (\text{min}^{-1}).$$

Původní definice měrných otáček zavedených u vodních turbín s označením  $n_s$  se vztahovala k jednotkovému výkonu turbíny 1 ks (koňská síla) a spádu  $H = 1 \text{ m}$ , potom přepočtový vztah je



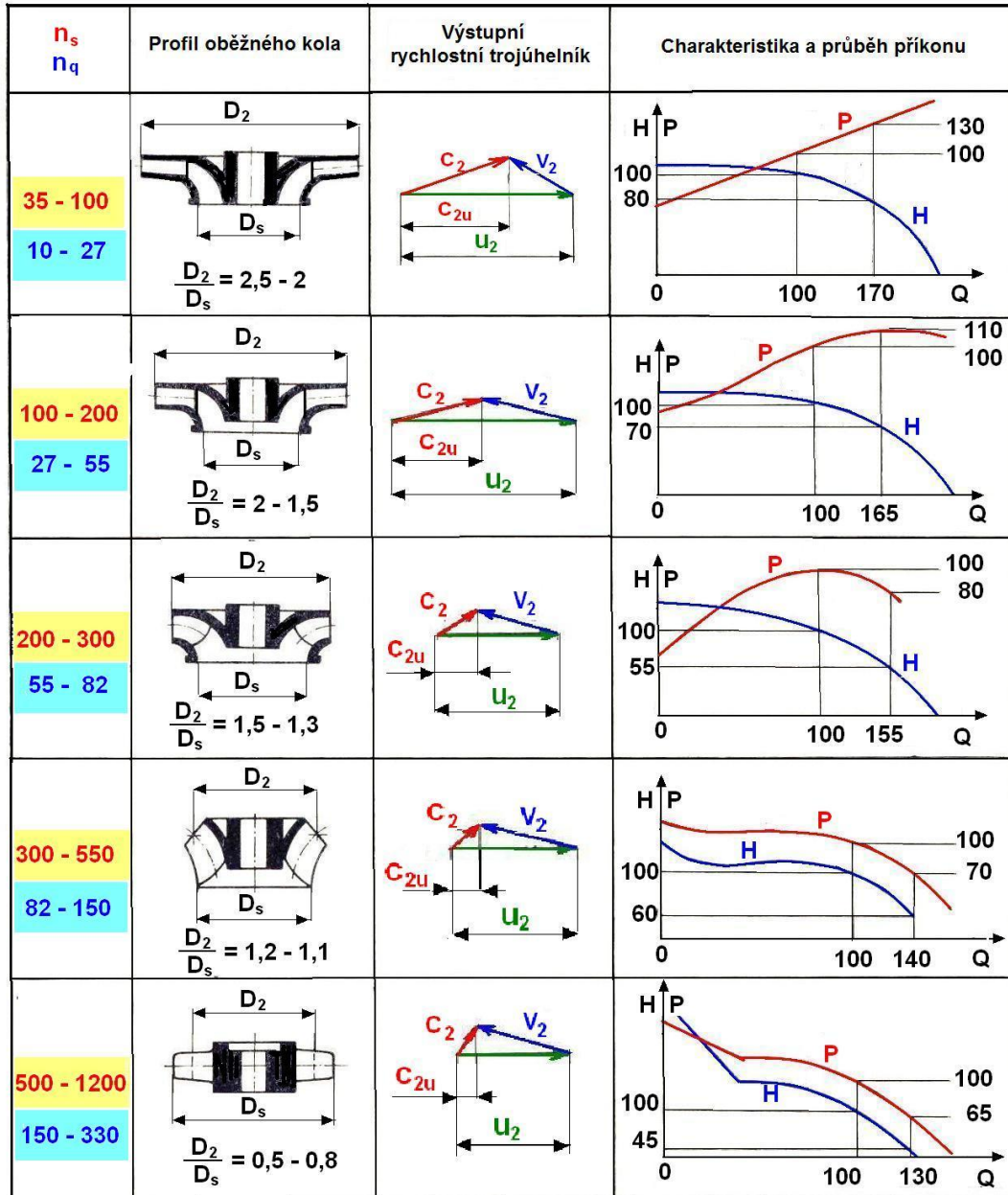
$$n_s = 3,65 \cdot n_q = 1200 \cdot n_q^* \quad (\text{min}^{-1}).$$

U objemových hydrostatických strojů pro měrné otáčky platí rovnice

$$n_q^* = \frac{n \cdot Q^{0,5}}{\gamma^{0,75}} = \frac{1}{Sh \cdot Eu^{0,75}} = \frac{Fr^{1,5}}{Sh} \quad (14.21)$$

Při odvození byla použita závislost  $Eu = Fr^{-2}$ .

Tento výraz je totožný s rovnicí (7.19), to tedy znamená, že hydrostatické stroje a hydrodynamické stroje mají společný základ činnosti.



Obr.14.18 Změna tvaru oběžného kola a charakteristiky hydrodynamických čerpadel

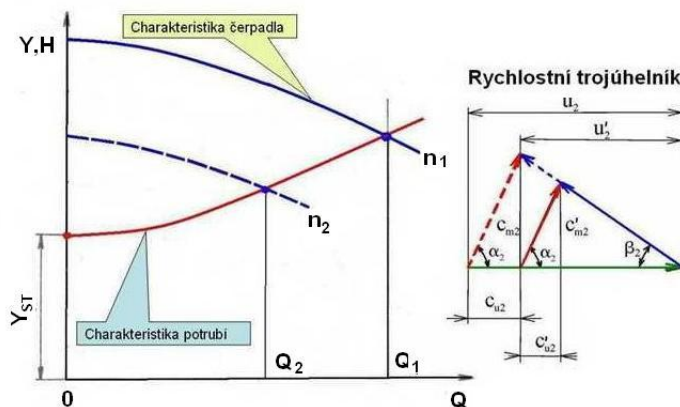
Měrné otáčky vážou obě základní přeměny energie a to dynamickou (kinetickou) v kritériu  $Fr$  nebo  $Eu$  a kinematickou část energie v kritériu  $Sh$ . Je nutné připomenout, že měrné otáčky neobsahují vliv viskozity ( $Re$  – kritérium), která se projeví ve formě hydraulických ztrát. Z tohoto důvodu účinnost modelu není stejná jako účinnost díla.

Měrné otáčky mají významný vliv na tvar oběžného kola i na charakteristiku čerpadla – obr.14.18.

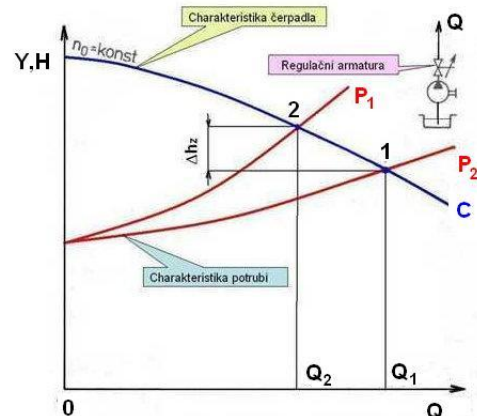
### 14.2.6. Regulace průtoku u čerpadel

Tento problém je v technické praxi velmi častý a důležitý. Provozní bod daný charakteristikou čerpadla a charakteristikou potrubí nemusí vždy splňovat podmínku, že průtok v čerpadle je stejný jako průtok požadovaný. Proto se u čerpadel musí provádět regulace průtoku, tato se obvykle provádí následujícím způsobem:

**Regulace změnou otáček čerpadla** - změníme-li otáčky z původních „ $n_1$ “ na „ $n_2$ “, potom se změní i obvodová rychlost a v jejím důsledku i charakteristika čerpadla - obr. 14.19.



Obr. 14.19 Změna charakteristiky čerpadla při změně otáček



Obr. 14.20 Regulace odstředivého čerpadla škrcením

Pro poměr obvodových rychlostí platí

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{c_{1u}}{c_{2u}}.$$

Pro poměr průtoků a otáček platí

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (14.22)$$

Dopravní výška a otáčky budou v poměru

$$\frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2. \quad (14.23)$$

Poměr příkonu a otáček je

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^3, \quad (14.24)$$

a poměr kroutícího momentu a otáček

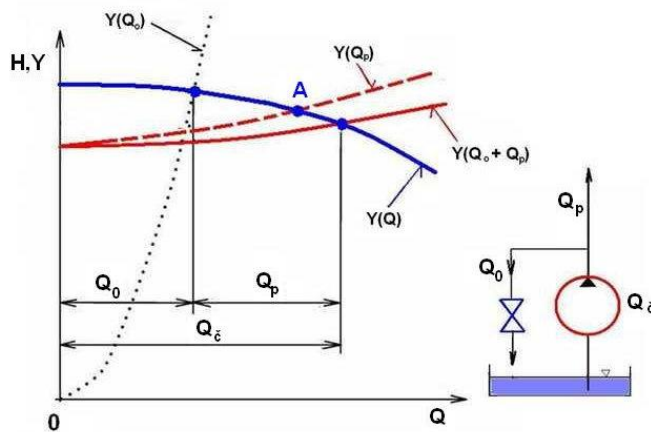
$$\frac{M_{k1}}{M_{k2}} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2. \quad (14.25)$$

Toto jsou tzv. afinní vztahy, pomocí kterých se dají s jistou přesností přepočítat základní parametry čerpadla při změně otáček.

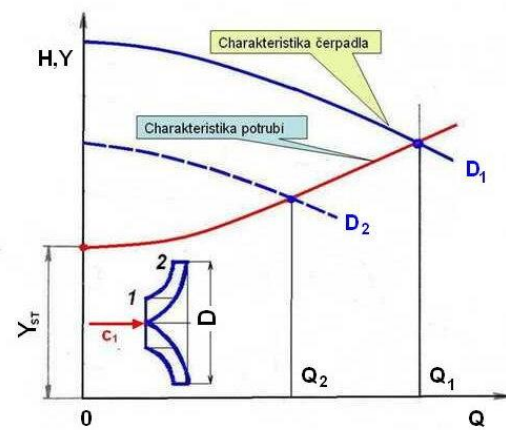
**Regulace průtoku škrcením** – tato regulace předpokládá, že na výtlaku čerpadla je regulační armatura (obvykle šoupátko), pomocí kterého se dá změnit charakteristika potrubí, a tím dojde ke změně průtoku. Tato regulace je velmi jednoduchá, proto se často používá, je však energeticky nevýhodná, její použití se prakticky omezuje pouze na malé výkony čerpadel. Obr. 14.20 názorně ukazuje tuto regulaci.

**Regulace obtokem** – při této regulaci se přepouští část čerpaného průtoku z výtláčného potrubí zpět do sací nádrže. Tento způsob není často používán hlavně z energetických

důvodů, je však vhodný pro odstraňování nestabilní práce čerpadla v labilní části charakteristiky např. u vrtulových čerpadel – obr. 14.21.



Obr. 14.21 Regule průtoku čerpadla obtokem



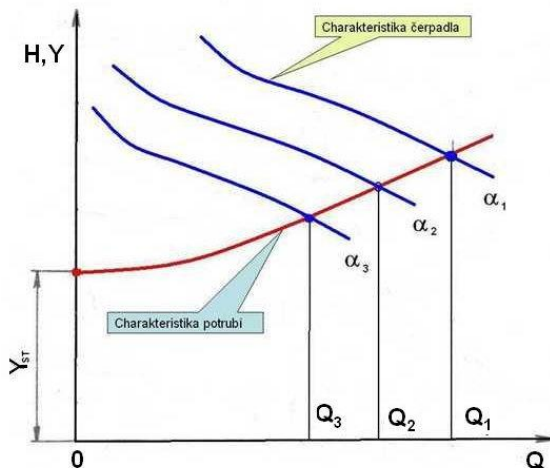
Obr. 14.22 Změna průtoku zmenšením průměru oběžného kola

**Regule průtoku změnou průměru oběžného kola** – oběžné kolo odstředivého čerpadla se obvykle vyrábí s max. průměrem. Má-li čerpadlo s tímto kolem velký průtok, potom se u oběžného kola soustružením jeho průměr sníží tak, aby splňoval podmínku požadovaného průtoku - obr. 14.22 při  $n = \text{konst.}$  Tato úprava se však dá provést pouze jedenkrát před smontováním čerpadla.

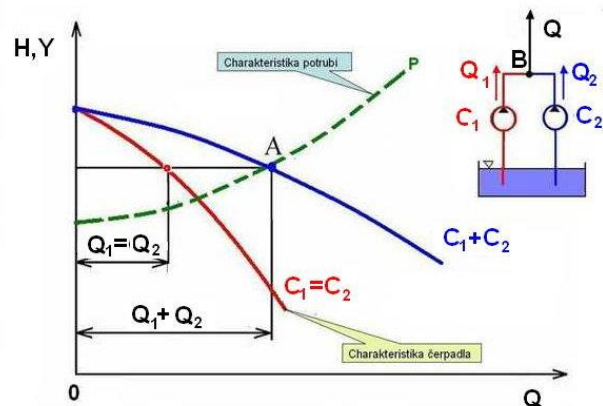
Pro poměr průměrů oběžného kola a parametry čerpadla platí rovnice

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{Q_1}{Q_2}, \quad \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 = \frac{H_1}{H_2}, \quad \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^3 = \frac{P_1}{P_2}. \quad (14.26)$$

**Regule natáčením lopatek oběžného kola** – tato regulace se užívá u axiálních čerpadel. Dá se řešit jako plynulá nebo skokově. Jedná se o velmi ekonomickou regulaci, kdy je možno pracovat vždy s maximálně dosažitelnou účinností – obr. 14.23.



Obr. 14.23 Regule průtoku u čerpadla natáčením lopatek oběžného kola



Obr. 14.24 Paralelní řazení dvou čerpadel se stejnou charakteristikou

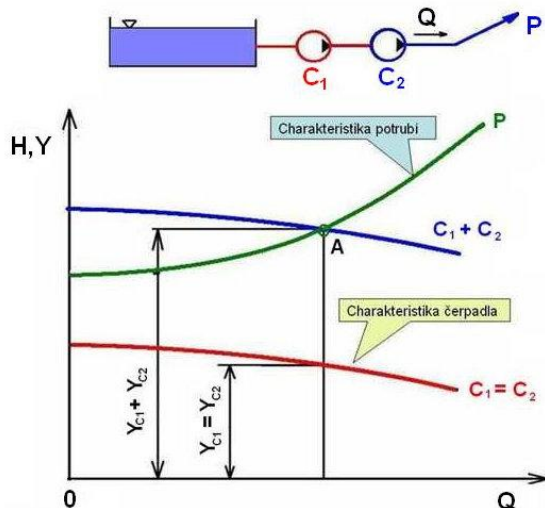
### 14.2.7. Řazení čerpadel

#### a) paralelní spolupráce čerpadel

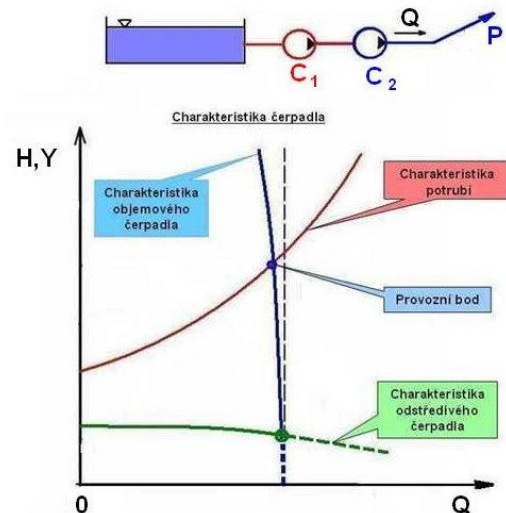
Prakticky se dají paralelně řadit odstředivá čerpadla s rozdílnou charakteristikou, nejčastěji jsou však řazena paralelně čerpadla s charakteristikou stejnou. Výsledná charakteristika se získá tak, že se sečtou jednotlivé charakteristiky podle průtoku – obr. 14.24.

## b) sériová spolupráce čerpadel

I zde platí, že se dají sériově řadit čerpadla s rozdílnou charakteristikou, nejčastěji se však řadí čerpadla s charakteristikou stejnou. Výsledná charakteristika se získá součtem dopravních výšek (měrných energií) – obr. 14.25 .



Obr.14.25 Sériové řazení dvou čerpadel se stejnou charakteristikou



Obr.14.26 Sériové řazení odstředivého a objemového čerpadla

## c) sériové řazení odstředivého a objemového čerpadla

Obecně platí, že se dají řadit různé typy čerpadel, a to jako sériově tak i paralelně. V technických aplikacích se však všechny možné kombinace nepoužívají, často se však řadí sériově čerpadlo objemové a odstředivé. Toto řešení se používá v případě, kdy objemové čerpadlo má špatnou sací schopnost např. v důsledku vysokých otáček. Potom odstředivé čerpadlo slouží jako podávací, řešení uvádí obr. 14.26. Pokud měrná energie odstředivého čerpadla je výrazně menší než čerpadla objemového, což bývá prakticky vždy splněno, potom výsledná charakteristika takto sériově řazených čerpadel je prakticky totožná s charakteristikou objemového čerpadla.

### 14.2.8. Sací schopnost a kavitace v čerpadlech

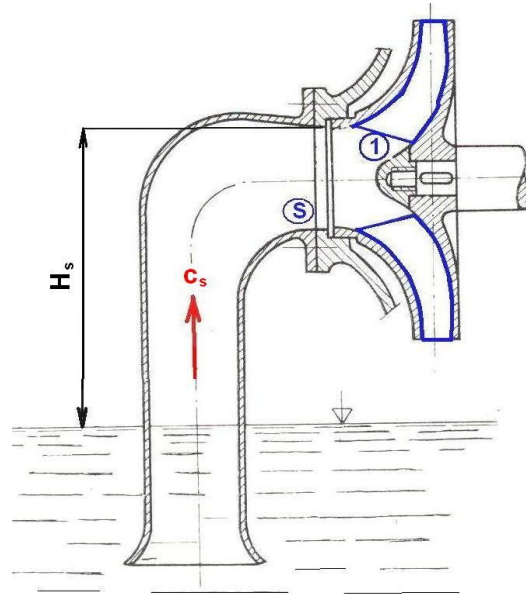
Pro sací potrubí čerpadla podle obr. 14.27 napíšeme Bernoulliho rovnici mezi hladinou v sací nádrži a sacím hrdlem (přírubou) čerpadla

$$\frac{p_0}{\rho} = \frac{p_s}{\rho} + \frac{c_s^2}{2} + g(h_s + h_{zs}).$$

Kapalina u hydrodynamického čerpadla nejdříve vstupuje do sacího hrdla a pak proudí k lopatkám oběžného kola. Tlak před vstupem do oběžného kola bude menší o ztrátu  $\Delta p$

$$p_1 = p_s - \Delta p,$$

kde  $p_1$  - tlak na vstupní hraně lopatky oběžného kola,  
 $p_s$  - tlak v místě sacího hrdla, zde se u reálných čerpadel dá tlak změřit.



Obr. 14.27 Schéma sacího potrubí u odstředivého čerpadla

Poklesne-li tlak  $p_1$  na hodnotu tlaku nasycených par  $p_n$  dochází k odpařování kapaliny a vznikají parní bublinky. Tyto jsou okolní proudící kapalinou unášeny dále do čerpadla do oblasti vyššího tlaku, zde parní bublinky náhle zanikají. Když zánik bublinky je v blízkosti povrchu součástí čerpadla (např. lopatky oběžného kola), potom do zaniklé bublinky proudí voda vysokou rychlostí, což vyvolá stoupenutí tlaku (totální hydraulický ráz) a v jeho důsledku dojde v materiálu čerpadla k jeho namáhání, které nakonec vede až k jeho poškození. Tento jev se nazývá kavitace, při které vedle poškození materiálu vznikají i zvukové efekty.

Měřítkem vzniku kavitace je kavitační deprese  $\Delta y$ , která plyne z Bernoulliho rovnice psané pro hladinu v sací nádrži (index 0) a vstup do oběžného kola (index 1)

$$\frac{p_0}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{\Delta p}{\rho} + \frac{c_s^2}{2} + g(h_s + h_{zs}),$$

označíme

$$\Delta y = \left( \frac{\Delta p}{\rho} + \frac{c_s^2}{2} \right),$$

potom se Bernoulliho rovnice upraví

$$\frac{p_0}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + \Delta y + g(h_s + h_{zs}). \quad (14.27)$$

Aby v čerpadle nevznikla kavitace, potom tlak v bodě „1“ nesmí klesnout pod tlak nasycených par  $p_n$ , musí platit nerovnost

$$p_1 \geq p_n.$$

Tlak nasycených par je u kapalin závislý na teplotě, pro vodu lze jeho velikost zjistit z parních tabulek.

Definujme kritickou hodnotu kavitační deprese  $\Delta y_{krit}$ , potom rovnice (14.27) se upraví

$$\frac{p_1}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} - \Delta y_{krit} - g(h_s + h_{zs}),$$

odkud pro kritickou sací výšku

$$h_{skrit} = \frac{p_0 - p_n}{\rho \cdot g} - \frac{\Delta y_{krit}}{g} - h_{zs}. \quad (14.28)$$

Veličina  $\Delta y_{krit}$  se také nazývá „čistá sací měrná energie“, dynamická deprese, nebo kavitační rezerva, v anglické literatuře „Net positive suction head – NPSH“.



Pro dovolenou sací výšku podle předcházejících úvah platí

$$h_{sdov} \leq \frac{p_0 - p_n}{\rho \cdot g} - \frac{\Delta y_{dov}}{g} - h_{zs} = \frac{p_0}{\rho} - \frac{p_n}{\rho} - \Delta h_{dov} - h_{zs}, \quad (14.29)$$

kde zlomek  $\frac{\Delta y_{dov}}{g} = \Delta h_{dov}$  je dovolená kavitační výška.

Energetická rezerva je v sacím kanále nutná ke krytí hydrodynamických ztrát v přívodních kanálech čerpadla a ztrát na vstupu do oběžného kola. Při bez kavitačním provozu čerpadla musí být v místě „1“ ohroženém kavitací tlak  $p_1 \geq p_n$ . Aby nedocházelo při provozu ke kavitaci v čerpadle, volí se dovolené hodnoty kavitační deprese

$$\Delta y_D \geq 1,15 \cdot \Delta y_{krit}. \quad (14.30)$$

Vypočtená sací výška  $h_s$  vyjde buď kladná, potom čerpadlo kapalinu nasává a je umístěno nad hladinou v sací nádrži, nebo je  $h_s$  záporné, v tomto případě je čerpadlo umístěno níže než je hladina v sací nádrži. Čerpadlo v tomto případě pracuje s nátokem, takové případy se vyskytují u kalových čerpadel a při čerpání teplých nebo těkavých kapalin.

V čerpadle provozovaném v kavitačním režimu dochází k poklesu měrné energie  $Y$ . Pokles  $Y$  o 1% je směrodatný pro vyhodnocování kritické kavitační deprese. Někdy se kritický stav určuje podle poklesu účinnosti nebo vzrůstu příkonu. Změna  $\eta$  nebo  $P$  vlivem kavitace nebývá však tak jednoznačná jako změna  $Y$ . Výkonové parametry  $Y$ ,  $P$ ,  $\eta$  reagují na kavitaci až tehdy, když je v čerpadle kavitací zasažena celá vstupní hrana oběžné lopatky. Kavitace u čerpadel je také provázána generováním hluku do okolí. Na obr. 14.28 je oběžné kolo čerpadla poškozené kavitací.

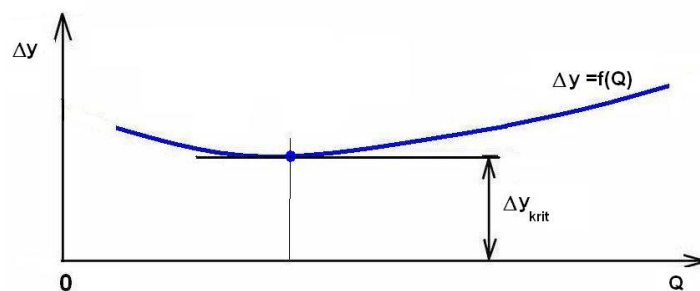


Obr. 14.28 Oběžné kolo čerpadla poškozené kavitací

Pro konstrukci a aplikaci čerpadel je významná vnitřní kavitační charakteristika (kavitační deprese  $\Delta y$  při kritické hodnotě), definované podle ČSN 11 0033 rovnicí

$$\Delta y_{krit} = \frac{p_s}{\rho} + \frac{c_s^2}{2} - \frac{p_n}{\rho}. \quad (14.31)$$

Hodnota  $\Delta y_{krit}$  je převýšení energie nasávané kapaliny na vstupním hrdle čerpadla nad velikostí tlakové energie nasycených par čerpané kapaliny  $\frac{p_n}{\rho}$  a nazývá se kritická hodnota kavitační deprese – obr. 7.29.



Obr. 14.29 Závislost měrné kavitační energie  $\Delta y = f(Q)$



Kavitační deprese se zjišťuje měřením, podrobněji o tom bude pojednáno v kap. 14.2.10. Kavitační vlastnosti čerpadel se v literatuře vyjadřují zobecněnou bezrozměrnou charakteristikou pomocí Tomova vnitřního součinitele  $\sigma$ , který je definován poměrem

$$\sigma = \frac{\Delta y}{Y} \quad (14.32)$$

Tento součinitel závisí na parametrech čerpadla  $Q$ ,  $n$ ,  $H$ ,  $n_s$ , v literatuře bývá uváděn empirickým vztahem

$$\sigma = \sigma_0 \cdot n_s^{\frac{4}{3}}$$

kde –  $\sigma_0$  je konstanta velikosti  $\sigma_0 = (2,2 \text{ až } 2,2) \cdot 10^4$ .

Kavitační opotřebením (pitting) vzniká v místech zániku kavitačních bublin po určité tzv. inkubační době, která je závislá na stádiu kavitace. U počáteční kavitace se nevytváří souvislé kaverny, naopak u rozvinuté kavitace se tvoří kaverny, které se u superkavitace rozšíří po celé délce lopatky (v celém prostoru). Kavitační opotřebením je charakterizováno poškozením povrchu a oddělováním částic materiálu v oblasti zániku kavitačních dutin (kaverny).

Kavitační opotřebením vzniká v důsledku následujících účinků :

- mechanických – při zániku kavitačních bublin vzniká tlakový (hydraulický) ráz, tento je větší než je mikropevnost materiálu. Vznikají proto v materiálu trvalé deformace, vnitřní napětí, mikrotrhliny a únava materiálu,
- elektrických,
- tepelných – dochází k ohřevu povrchové vrstvy materiálu, což vyvolá pnutí v materiálu jako důsledek tepelné dilatace.

V současné době není znám materiál, který je absolutně odolný proti kavitačnímu opotřebením.

Kavitace vzniká hlavně u vodních strojů jako jsou čerpadla, turbíny nebo také lodní šrouby. Kavitace byla poprvé pozorována u anglického torpédoborce Daring v roce 1894. Vznik kavitace v čerpadle ovlivňují fyzikální vlastnosti čerpané kapaliny, tlak nasycených par a hydrodynamické vlastnosti kanálů čerpadel.

Kapalina se pohybuje od volné hladiny v sací nádrži sacím potrubím až po vstup do kanálů oběžného kola. Pohyb se děje na úkor potenciální energie, bez energetické účasti oběžných lopatek. Kavitace u čerpadel vzniká na vstupu do oběžného kola, u vodních turbin naopak na výstupu z kola, proto se kavitace u čerpadel projevuje výrazněji.

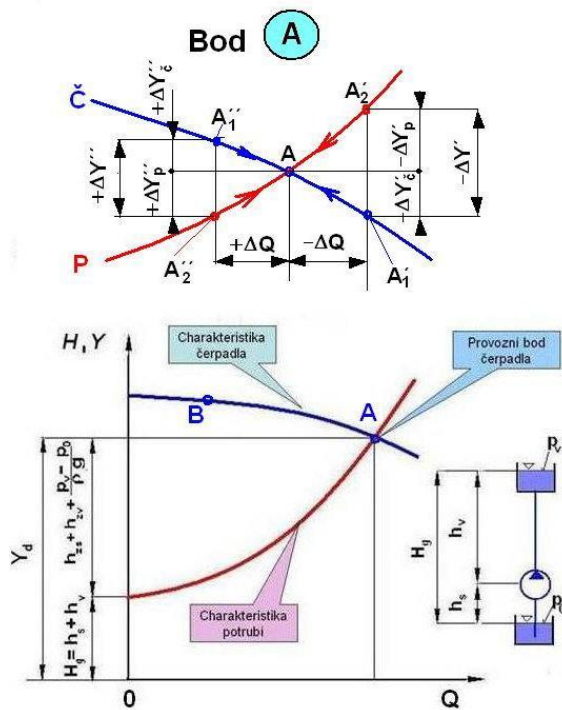
#### 14.2.9. Provozní stav čerpacího systému

Čerpací systém se skládá z čerpadla a potrubního řadu. Jsou-li okrajové podmínky obou složek stálé, je provoz systému v čase ustálený, v opačném případě je neustálený. U čerpadla způsobuje neustálenost provozu spouštění, zastavování a řízení a u potrubí změnu polohy a tlaku hladiny kapaliny v nádržích, popř. hydraulického odporu potrubí. Ustálenost provozu ruší též havarijní stavy čerpadla a potrubního řadu.

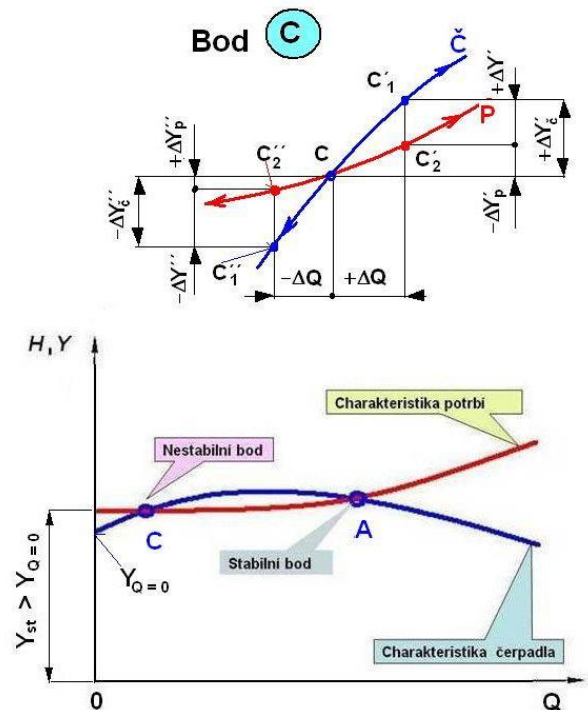
Ustálený provozní stav systému ve skutečnosti neexistuje. Charakteristické vlastnosti různých typů čerpadel se při vsazení čerpadla do potrubního řadu mohou zvýraznit v kladném i záporném smyslu. Typickou vlastností hydrodynamických čerpadel je měkká charakteristika hlavních parametrů  $Q - Y$ . Opakem jsou čerpadla hydrostatická s konst. geometrickým objemem, protože mají konstantní průtok bez ohledu na velikost měrné energie, jejich charakteristika je naopak tvrdá.

Parametry čerpacího systému  $Q$  a  $Y$  jsou určeny rovností měrné energie čerpadla (jako zdroje či generátoru) a potrubního řadu (jako spotřebiče) – rov. (7.8). Graficky jsou tedy provozní hodnoty  $Q$  a  $Y$  určeny průsečíkem charakteristiky čerpadla a charakteristiky potrubí, určujícím provozní bod „P“ čerpacího systému – obr.14.30.

Obvykle se pracuje s charakteristikou celého potrubního řadu, tj. sériově sečtenými částmi sacího i výtlačného řadu. Vzájemný vztah charakteristiky potrubí a čerpadla určuje stabilitu



Obr. 14.30 Provozní bod čerpacího systému



Obr. 14.31 Labilní provozní poměry čerpacího systému

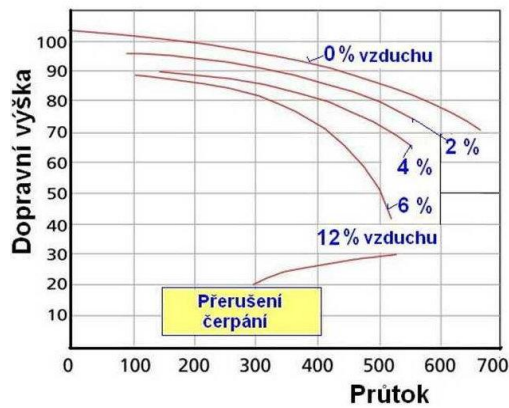
provozu čerpadla v systému. Mějme čerpadlo a potrubí s charakteristikou podle obr. 14.30, kde je rovnovážný pracovní bod označen „A“. Při náhodné poruše (změně průtoku) o hodnotu  $+\Delta Q$  se přesune provozní bod do  $A'_1$ . Energie potřebná pro čerpání kapaliny je dána hodnotou  $A'_2$  na charakteristice potrubí. Okamžitý nedostatek energie je tedy  $-\Delta Y' = -\Delta Y'_p - (-\Delta Y'_c)$ . Ten způsobuje zpomalení proudění čerpadlem až na průtok, při němž se energie čerpadla rovná odporu potrubí. Provozní stav se tedy vrací do původního bodu „A“, provoz je tedy stabilní. Obdobně při změně průtoku o  $-\Delta Q$ , bod „A“ přejde do bodu  $A'_2$  a celý systém má tendenci se opět vrátit do bodu „A“. I v tomto případě je provoz stabilní. Je-li provozní bod dán průsečíkem „B“, pak změna průtoku o  $\pm \Delta Q$  má vždy snahu se vrátit zpět do bodu „B“, proto i v tomto bodě je provoz systému vždy stabilní.

Jestliže má charakteristika potrubí a čerpadla podle obr. 14.31 průsečíky dva, potom v bodě „A“ je provoz systému stabilní. V bodě „C“ jsou však poměry nestabilní. Při změně průtoku o  $+\Delta Q$  přejde měrná energie do bodu  $C'_1$  na charakteristice potrubí. Okamžitý rozdíl energie je  $\Delta Y' = \Delta Y'_c - \Delta Y'_p$ , při čemž  $|\Delta Y'_c| > |\Delta Y'_p|$ , vzniká tedy přebytek energie čerpadla, až provozní bod přejde do stabilního bodu „A“.

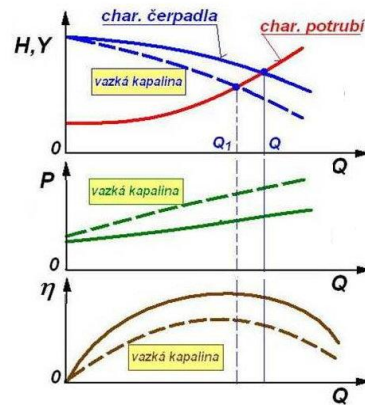
Je-li naopak změna průtoku záporná  $-\Delta Q$ , potom bod „C“ přejde do bodu  $C'_2$ , rozdíl energie je  $\Delta Y'' = -\Delta Y''_c + \Delta Y''_p$ . Tento nedostatek energie čerpadla vede k poklesu průtoku až na jeho nulovou hodnotu, bod „C“ není tedy stabilním provozním bodem. Nemá-li potrubí samočinnou zpětnou uzávěru (klapku), při  $Q = 0$  nedojde k uzavření potrubí, nastane v potrubním řadu zpětný průtok samospádem. Otáčející se oběžné kolo čerpadla působí jako hydraulický odpor proti zpětnému průtoku. Z předchozí úvahy jak již bylo řečeno vyplývá, že bod C nemůže být stabilním provozním stavem.

Obecně je charakteristika čerpadla závislá na typu čerpadla, tedy na měrných otáčkách – obr. 14.18. Čerpadla s nižšími hodnotami měrných otáček mohou mít charakteristiku nestabilní, se zvětšováním měrných otáček se charakteristika stává stabilnější.

**Obsah vzduch** – obsahuje-li čerpaná kapalina (voda) vzduch ve formě bublinek, potom obsah vzduch má nezanedbatelný vliv na charakteristiku čerpadla. Vzduch v kapalině snižuje její hustotu, tím dochází ke snížení měrné energie, naměřené výsledky jsou schématicky uvedeny na obr. 14.32. Je-li obsah vzduchu cca 12 %, potom čerpadlo takto provzdušněnou vodu již není schopno nasát a objemový průtok klesá k nule



Obr. 14.32 Vliv obsahu vzduch ve vodě na charakteristiku čerpadla

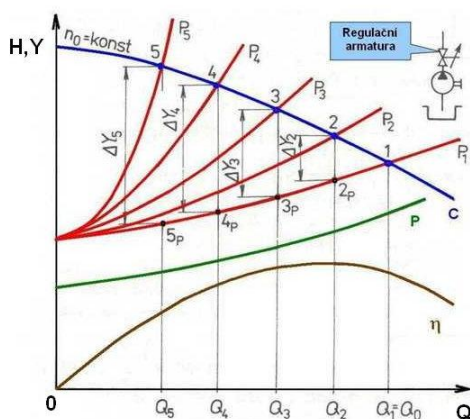


Obr. 14.33 Vliv viskozity na parametry čerpadla

**Vliv viskozity** – s rostoucí viskozitou čerpané kapaliny se mění parametry čerpadla  $Q$ ,  $Y$ ,  $P$ ,  $\eta$ , velikost změny je dána velikostí Reynoldsova kritéria. S rostoucí viskozitou kapaliny vzrůstají hydraulické ztráty v kanálech čerpadla, čímž klesá měrná energie i hydraulická účinnost čerpadla. Zvýšené tření disků oběžného kola snižuje mechanickou účinnost a zvyšuje příkon čerpadla. Při přepočtu charakteristiky čerpadla se vychází v naměřené charakteristiky při čerpání čisté vody. Pro přepočet charakteristiky se používají korelační součinitelé, které se stanovují experimentálně. Schématicky je uveden vliv viskozity na obr.14.33.

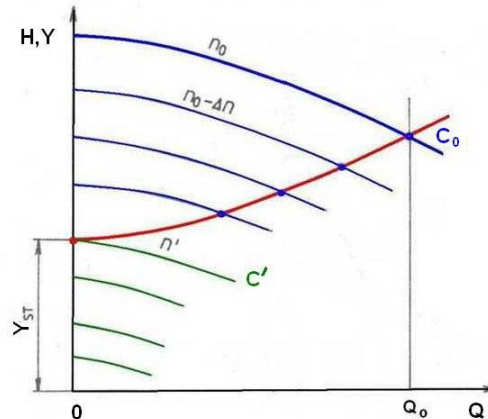
### Spouštění čerpadel

**a) uzavřený výtlač** - radiální čerpadla s nižšími měrnými otáčkami, u nichž příkon i moment roste s rostoucím průtokem je výhodné spouštět s uzavřeným výtlačem.



Obr.14.34 Spouštění odstředivého čerpadla při uzavřeném výtlaču

Zatěžováním čerpadla otevíráním na výtlaču roste průtok z  $Q = 0$  až na  $Q_0$ . Postupné otevírání uzávěru (např. šoupátka) je na obr. 14.34 naznačeno řadou charakteristik potrubí „ $P_5$  až  $P_0$ “. Spouštění čerpadla začíná s minimálním příkonem, který stejně jako průtok roste až na hodnotu  $Q_0$ , při čemž otáčky čerpadla jsou konstantní.



Obr. 7.35 Provozní body systému při spouštění s otevřeným výtlačem

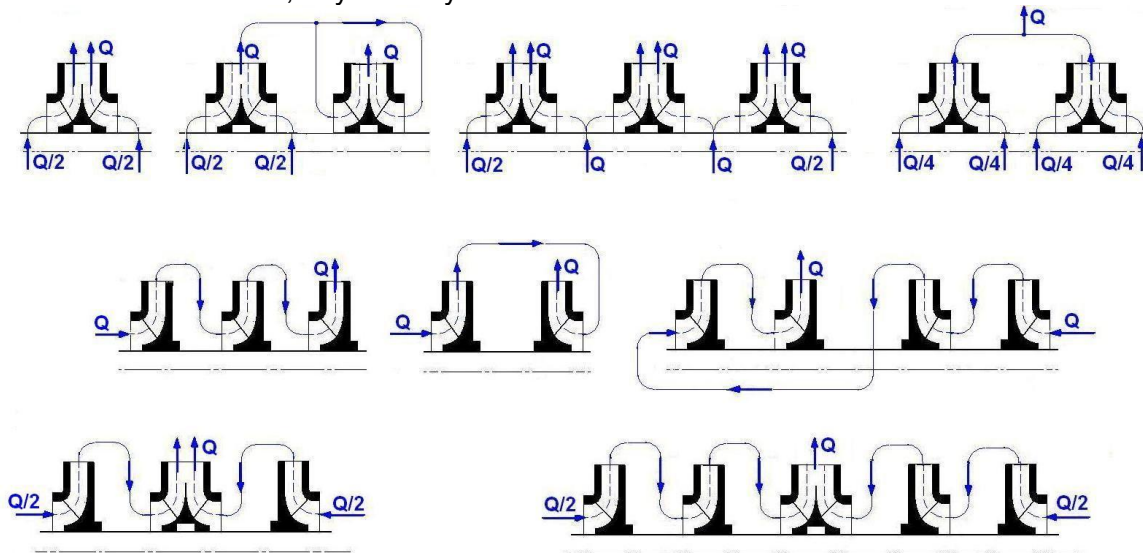
**b) otevřený výtlač** - jedná se o případ, kdy ve výtlačném řadu není při rozběhu čerpadla uzavřena armatura, ale rozbíhající se čerpadlo začne čerpat do výtlaču proti zpětné klapce, a ta se účinkem kapaliny samočinně otevírá. Při rozběhu čerpadla dochází k hydraulickému zatěžování podle charakteristiky potrubí, a to pro charakteristiku potrubí  $Y = 0$  ihned od  $n = 0$  - obr. 14.35. Pro potrubní řad, u něhož je  $Y_{st} > 0$  je čerpaný průtok stále nulový až do okamžiku, kdy při otáčkách  $n$  je dosaženo, že  $Y > Y_{st}$  - charakteristika  $C'$ . Od tohoto

okamžiku s rostoucími otáčkami čerpadla roste i průtok, až do okamžiku kdy nastane ustálený stav s průtokem  $Q_0$  a  $n_0 = \text{konst.}$

Spouštění při otevřeném výtlaku se používá při malých hodnotách  $Y_{st}$ , a to u čerpadel s vyššími měrnými otáčkami, kde výkon roste s klesajícím průtokem - obr. 14.18. Čerpadlo se spouští pouze zapnutím motoru. Pro jednoduchost manipulace se tento způsob spouštění používá i u menších radiálních čerpadel s malým příkonem. Záběrový proud u elektromotoru je větší než při spouštění s uzavřeným výtlakem, poněvadž kromě příkonu na urychlení rotoru se přenáší i hydraulický výkon. Elektromotory malých výkonů lze snadno na takové podmínky dimenzovat. Při rychlém rozběhu vyvolá časová změna průtoku nestabilitu v systému, které mohou ovlivnit fázi zatěžování.

#### 14.2.10. Vybrané konstrukční části čerpadla

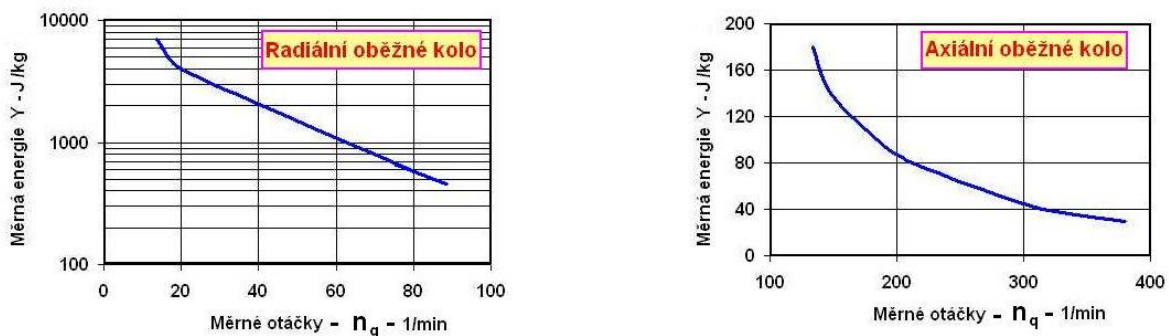
**Řazení oběžných kol** – na obr. 14.36 je uvedeno několik variant řazení oběžných kol a to sériové, paralelní, případně sérioparalelní. Pokud je řazen sudý počet oběžných kol, potom je optimálně vyvážená axiální síla na rotoru, axiální ložisko pak bývá výrazně menší. Oběžná kola bývají většinou stejná, pouze při čerpání těkavých kapalin a kondenzátů par bývá první oběžné kolo řešeno tak, aby mělo vysoké antikavitační vlastnosti.



Obr. 14.36 Varianty řazení oběžných kol odstředivých čerpadel

Pokud je to možné, řeší se požadavky čerpací techniky nejjednodušším způsobem, tj. realizuje se odstředivé čerpadla jako jednostupňové, protože tato varianta je ekonomicky nejvýhodnější. Jednotlivé typy hydrodynamických čerpadel mají optimální oblasti použití, čerpadla s radiálním oběžným kolem mají větší měrnou energii při menších průtocích, u axiálních čerpadel je tomu naopak.

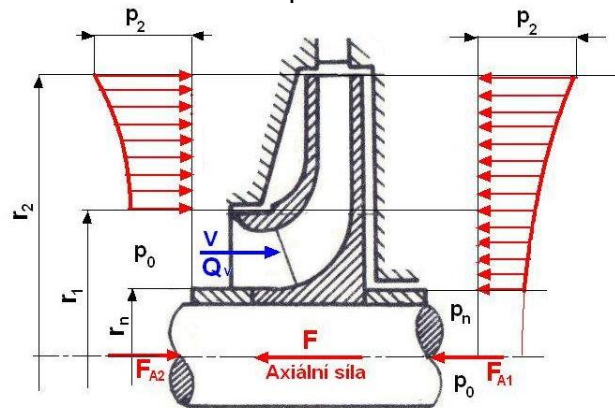
Při konstantních otáčkách a objemovém průtoku lze pro dané oběžné kolo přiřadit jistou velikost měrné energie, její velikost závisí od velikosti měrných otáček, výsledky uvádí obr. 14.37.



Obr. 14.37 Měrná energie jednostupňových odstředivých čerpadel



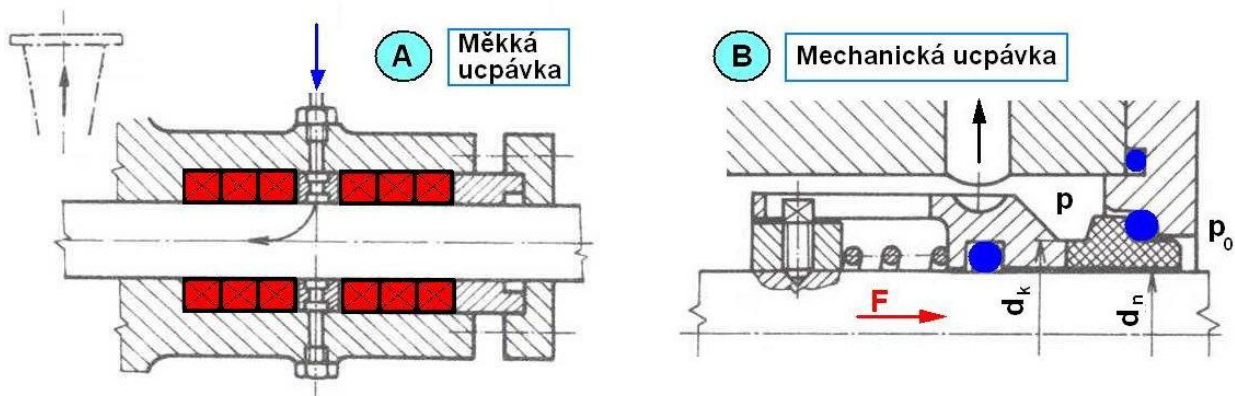
**Síly na oběžném kole čerpadla** – nesymetrické hydrodynamické zatížení oběžného kola vyvolává vznik sil, které na kolo působí, tyto síly mají radiální tak i axiální směr. Protože v průtočných kanálech dochází k pulsacím rychlosti a proto i tlaku, jsou hydrodynamické síly působící na oběžné kolo periodicky proměnné. Periodičnost těchto sil je vázána na otáčky čerpadla a také na interakci lopatkových míří oběžného i rozváděcího kola. časové změny těchto sil jsou příčinou vibrací a hlučnosti čerpadel.



Obr. 14.38 Vznik axiální síly u radiálního oběžného kola

Poněvadž rozložení tlaku na obou discích oběžného kola není stejné – obr. 14.38, vzniká axiální síla, tato musí být zachycena ve vhodném axiálním ložisku. Vhodnou volbou těsnicí spáry a uspořádáním oběžných kol se tato síla dá výrazně snížit. Na oběžném kole vzniká radiální síla také z důvodu ohybu meridiánové rychlosti z axiálního do radiálního směru.

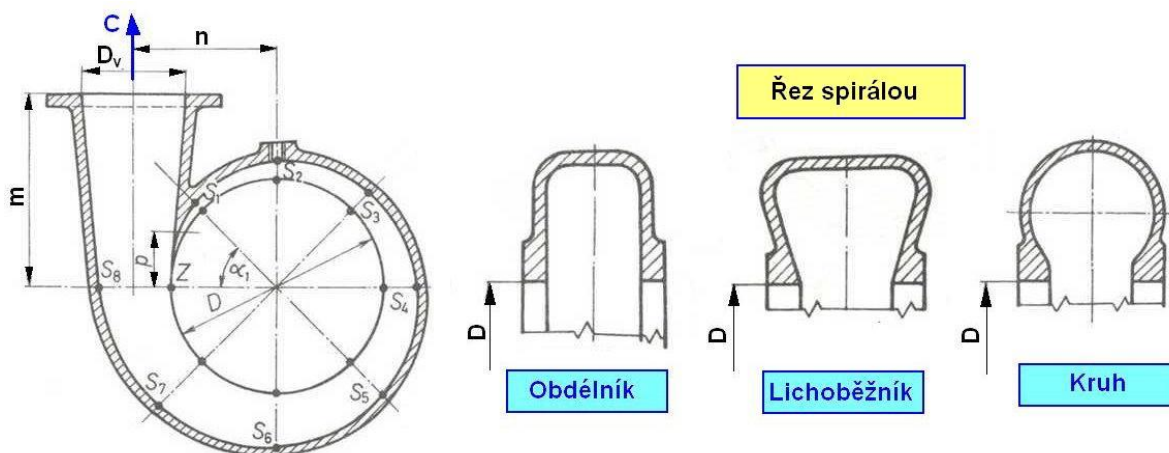
**Ucpávky hřídele** – u každého čerpadla vzniká problém, jak vyřešit těsnění hřídele, vzhledem k teplotě, agresivitě, jedovatosti nebo i výbušnosti čerpané kapaliny. Problém se řeší tak, že u čerpadla se použije vhodná ucpávka, nebo se čerpadlo provede jako bezucpávkové (tzv. hermetická čerpadla).



Obr. 14.39 Provedení měkké a mechanické ucpávky

U čerpadel s ucpávkami se používají ucpávky měkké nebo ucpávky mechanické, jejich těsnost však není absolutní. Měkké ucpávky jsou provedeny z pletených konopných provazců slisovaných do čtverce, často jsou provazce napuštěny tukem, olejem a pod. Tyto provazce jsou šroubem a „brýlemi“ stlačeny v těsnicí mezeře, měkká ucpávka může být v provedení jako uzavřená, odváděná, smáčená nebo proplachovaná. Možné provedení ucpávky je na obr. 14.39A, přes otvor ve střední části ucpávky je možné přivádět čistou kapalinu nebo odvádět průsak z čerpané kapaliny. Konstrukcí mechanických ucpávek je celá řada, těsnicí účinek je proveden na čelech rotujícího a pevného disku, přitlačná síla je zajištěna pružinou, jedno provedení uvádí obr. 14.39B. Na těsnících plochách dochází k zvýšení teploty, aby se zamezilo vypařování filmu a suchému tření na těsnících plochách, musí být zajištěna cirkulace tekutiny v dutině ucpávky.

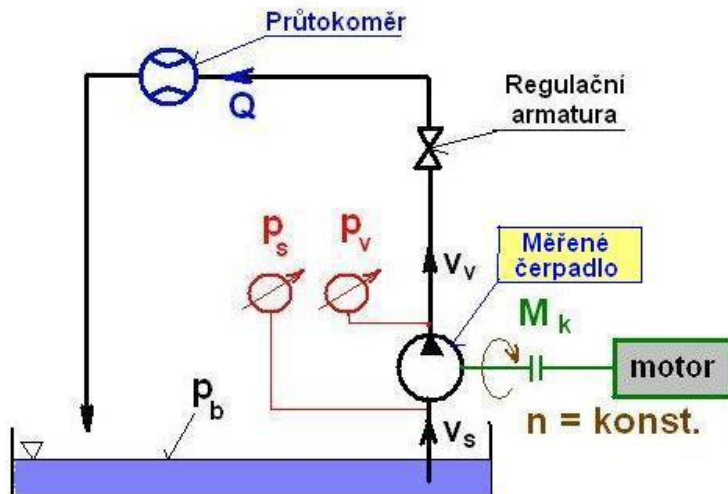
**Rozváděcí kolo, spirála** – pro přeměnu kinetické energie získané rotací oběžného kola na energii tlakovou se používají rozváděcí kola, spirály, nebo jejich kombinace. U vícestupňových radiálních čerpadel bývá mezi jednotlivými oběžnými koly kombinován radiální lopatkový rozvaděč s vratnými lopatkami. U jednostupňových čerpadel se nejčastěji používá vzhledem k jednoduchosti konstrukce pouze spirála, její možné provedení je na obr. 14. 40.



Obr. 14.40 Schéma spirála a její typické průřezy

#### 14.2.11. Zkoušení čerpadel

Pro realizaci hydrodynamických strojů je nezbytně nutné provádět měření jejich důležitých parametrů. Měření se u menších strojů provádí na skutečných zařízeních, pro stroje větších rozměrů se měření realizuje na zmenšených modelech a s využitím teorie podobnosti se naměřené veličiny z modelu přepočítají na dílo.



Obr. 14.41 Zkušební okruh pro měření charakteristiky čerpadla

Rozsah zkoušek u prototypových čerpadel může být velmi rozsáhlý, měří se celá řada fyzikálních veličin jako např. tlak na výtlačku a sání, průtok, otáčky, kroutící moment, teplota, vibrace, hluchost, pulsace tlaku a pod. Z hlediska uživatele čerpadel je důležité provést měření charakteristiky čerpadla a kavitační zkoušku čerpadla.

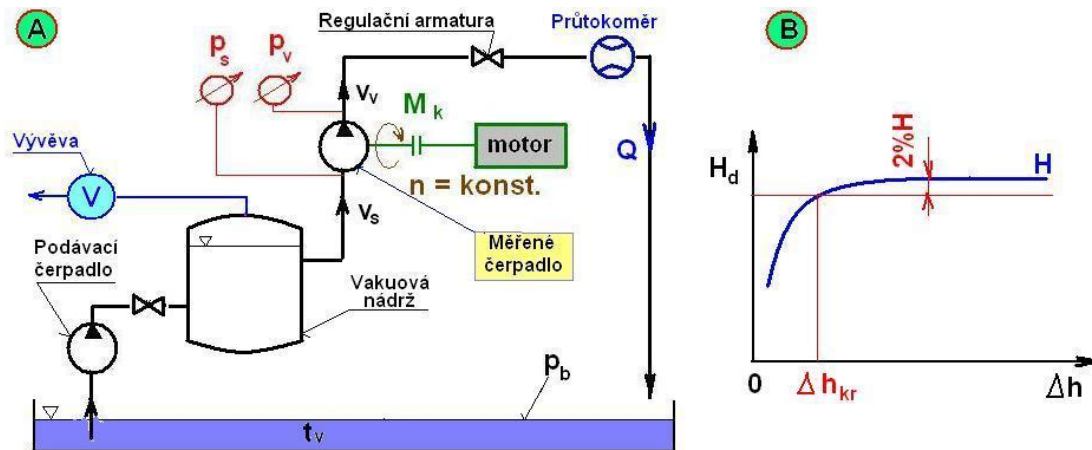
Na obr. 14.41 je uveden jednoduchý zkušební okruh pro měření charakteristiky čerpadel. Zkoušené čerpadlo je poháněno motorem, měří se kroutící moment  $M_k$  a otáčky „ $n$ “, které se po celou dobu měření udržují na konst. velikosti. Současně se ve výtlačném potrubí měří průtok  $Q$ , z tohoto průtoku se výpočtem stanoví rychlost v sacím –  $v_s$  a výtlačném potrubí –  $v_v$ , regulace průtoku je prováděna škracením armaturou na výtlačku. Z naměřených tlaků se vypočítá dopravní výška čerpadla z rovnice



$$H_d = \frac{p_v - p_s}{\rho \cdot g} + \frac{v_v^2 - v_s^2}{2g} \quad (14.33)$$

Tato rovnice platí pro případ, že oba tlakoměry jsou ve stejné výšce. Dále se z naměřených veličin vypočítá výkon, příkon a celková účinnost čerpadla, potom se nakreslí zkušební diagram, např. v podobě podle obr. 14.17. Po celou dobu měření se teplota vody udržuje na konst. velikosti.

Pro měření kavitačních vlastností čerpadel (sací schopnosti) je zkušební okruh ve zjednodušené podobě uveden na obr. 14.42.



Obr. 14. 42 Zkušební okruh pro měření kavitačních vlastností čerpadel

Podávací čerpadlo dopravuje kapalinu do vakuové nádrže, na tuto je napojeno sací potrubí měřeného čerpadla. Ve vakuové nádrži se nastavuje podtlak pomocí vývěvy „V“. Na zkoušeném čerpadle se měří tlak v sacím –  $p_s$  a výtlačném potrubí –  $p_v$ , dále se měří průtok ve výtlačném potrubí  $Q$ , barometrický tlak, teplota kapaliny a otáčky motoru. Obě poslední jmenované veličiny se po celou dobu měření udržují konstantní. Z teploty vody se z parních tabulek odečítá tlak nasycených par –  $p_n$ . Dopravní výška čerpadla se stanoví z rov. ( 14.33).

Celková měrná energie proudící kapaliny v sacím potrubí nad tlakovou energií nasycených par se určí z rovnice

$$\Delta h = \frac{v_s^2}{2g} + \frac{p^*}{2g}, \quad (14.34)$$

kde  $p^* = p_s - p_n$ .

Měření se provádí tak, že ve vakuové nádrži se zvětšuje podtlak tak dlouho, až tlak ve výtlačném hrdle čerpadla začne klesat, při čemž průtok je konst., tento se reguluje škrcením na výtlačku čerpadla. Takto se měření opakuje pro dalších několik průtoků rozložených rovnoměrně kolem jmenovitého průtoku. Zjištěné hodnoty dopravní výšky  $H$  se vynášejí v závislosti na  $\Delta h$  jako tzv. kavitační křivky. Z těchto kavitačních křivek ( charakteristik) se pak zjišťuje kritická hodnota  $\Delta h_{kr}$  . Je to hodnota, při níž klesne dopravní výška  $H$  o 2%, . Prakticky se zjišťuje tak, že se ve vzdálenosti 2%  $H$  vede rovnoběžka s charakteristikou  $H$ . Průsečík této rovnoběžky s charakteristikou  $H$  určuje kritickou hodnotu kavitační výšky  $\Delta h_{kr}$  při daném průtoku – obr. 14.42A. Poněvadž čerpadlo musí pracovat bezpečně i mimo oblast kavitace, zvyšuje se změřená hodnota kavitační výšky o 15 až 20%, pro dovolenou velikost kavitační výšky pak platí

$$\Delta h_{dov} = (0,15 \text{ až } 0,20) \Delta h_{kr}.$$

Hodnota  $\Delta h_{dov}$  případně i  $\Delta h_{kr}$  se kreslí společně s charakteristikou čerpadla do zkušební diagramu čerpadla – obr. 14.17.

Je-li známa velikost dovolené kavitační výšky, potom přípustná sací výška se stanoví z rovnice

$$h_s \leq \frac{p_b}{2g} - h_{zs} - \frac{p_n}{2g} - \Delta h_{dov} \quad (14.35)$$

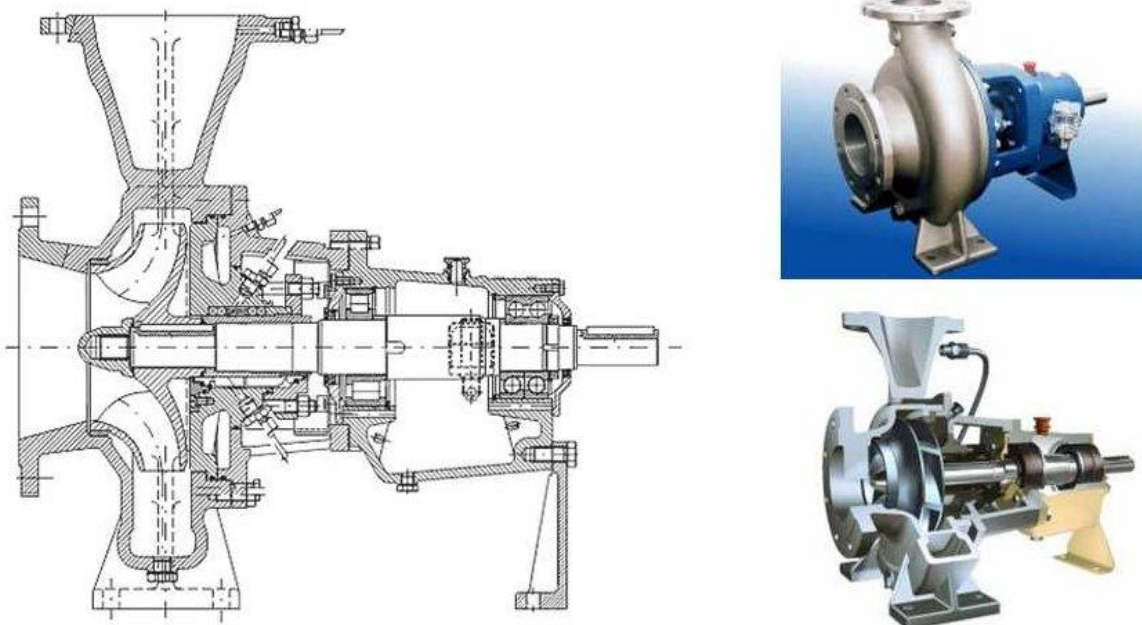
#### 14.2.12. Aplikace čerpadel

Použití čerpadel v technické praxi je velmi časté a rozsáhlé a zasahuje prakticky do všech průmyslových odvětví. Asi nejčtenější aplikace čerpadel jsou v chemickém průmyslu, vodárenství, energetice, hornictví, zemědělství, čerpadla se používají rovněž v medicíně, jsou součástí různých strojů a zařízení jako jsou automobily, letadla, rakety a pod. Čerpadla se vyrábějí nejen pro čerpání vody, ale i pro čerpání nejrůznějších kapalin. Parametry čerpadel se pohybují v širokých mezích a to jak z hlediska tlaku tak i průtoku.

Ve vodárenství se používají obvykle odstředivá čerpadla pro čerpání čisté vody, čerpadla jsou obvykle jedno nebo dvoustupňová s vodorovnou osou, u větších jednotek z důvodů oprav a montáže vodorovně dělená. Pro čerpání užitkových vod v průmyslu se používají čerpadla s vertikální osou a to v provedení do suchých nebo mokrých jímek. Časté je také použití ponorných čerpadel zavěšených přímo na výtlačném řadu. Energetika klasická i jaderná rovněž patří k provozům, kde je čtené použití odstředivých čerpadel. Tato se používají jako čerpadla napájecí, čerpadla na kondenzát, čerpadla chladicí vody kondenzátu, čerpadla kondenzátu nebo otopné vody a pod. Další použití čerpadel je v oblasti meliorací a závlah, hydraulické dopravy, sacích bagrů, betonových směsí, čerpání důlních vod z povrchových nebo hlubinných dolů, zajímavé aplikace čerpání jsou rovněž v medicíně.

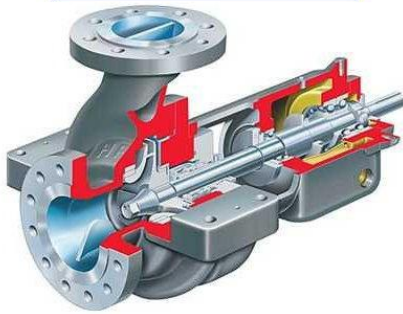
Nejčtenější a nejrozsáhlejší použití čerpací techniky je v chemickém průmyslu, čerpají se vedle vody i různé jiné kapaliny s odlišnými teplotami, viskozitou a ostatními fyzikálními vlastnostmi. Používají se čerpadla pro čerpání louhů i kyselin, naftových produktů různých teplot i tlaků, čerpají se suspenze, nejrůznější vazké kapaliny nebo kapaliny těkavé a pod.

Konstrukce čerpadel, jejich materiálové provedení je velmi rozmanité. Nejčtenější konstrukcí je kozlíkové provedení podle obr.14.43, následující obrázky uvádějí několik dalších vybraných konstrukcí odstředivých čerpadel – obr. 14.44.

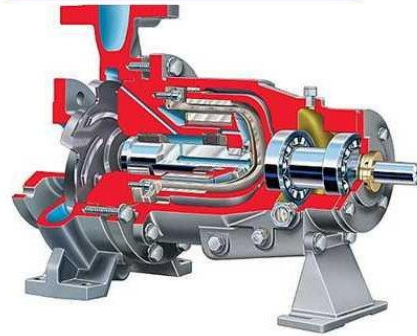


Obr. 14.43 Řez a pohled na jednostupňové odstředivé čerpadlo typ BET

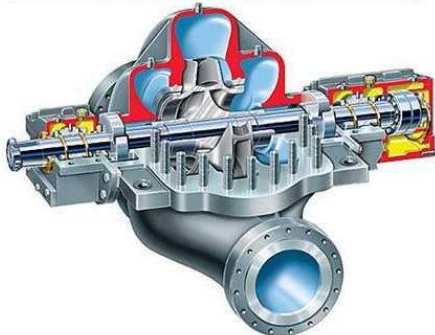
Radiální jednostupňové  
kozlíkové čerpadlo



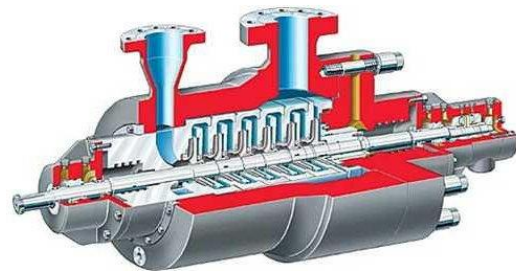
Jednostupňové hermetické  
radiální čerpadlo



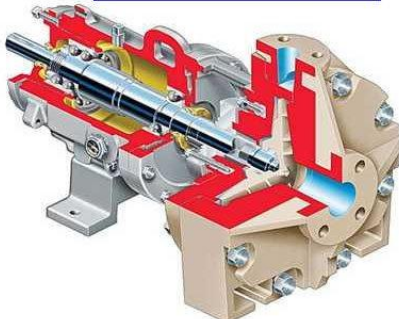
Jednostupňové čerp. s paralelně  
řazeným oběžným kolem



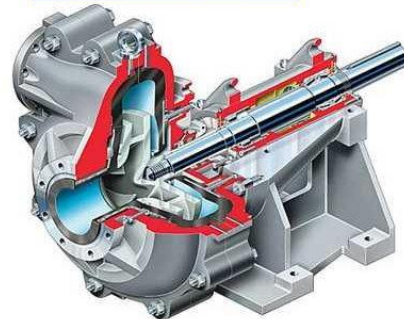
Článkové 6-ti stupňové čerp.  
pro chemický průmysl



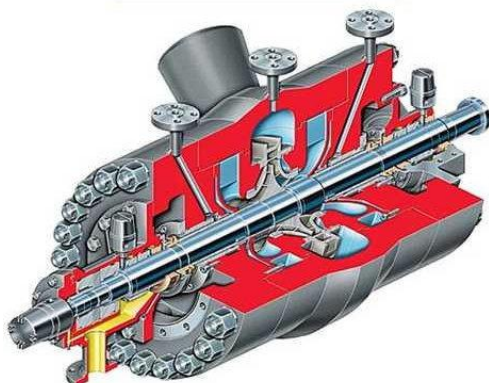
Odstředivé čerpadlo  
provedené z polyméru



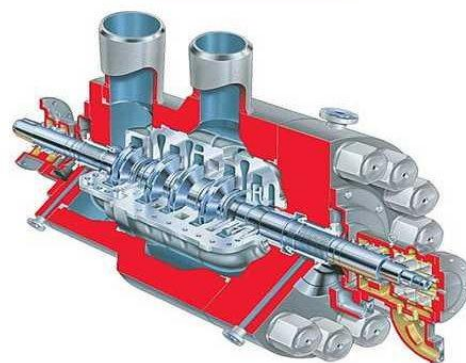
Kalové čerpadlo pro  
čerpání suspenzí



Oběhové čerpadlo pro  
jadernou energetiku



Napájecí čerpadlo  
pro energetiku



Obr.14.44 Vybraná provedení odstředivých čerpadel

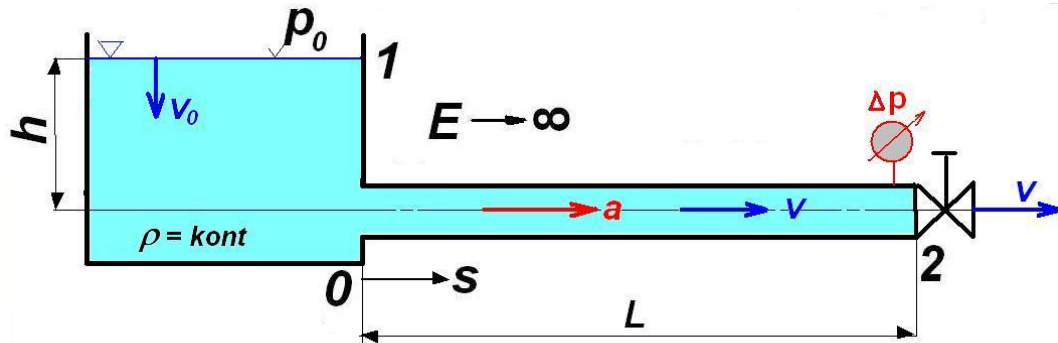


## 15. Neustálené proudění

### 15.1. Bernoulliho rovnice pro neustálené proudění

Integrací Eulerovy rovnice hydrodynamiky byla získána pro dokonalou kapalinu (nestlačitelnou a bez vnitřního tření) rovnice Bernoulliho

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh + \int_1 \frac{\partial v}{\partial t} ds = konst,$$



Obr.15.1 Neustálený proud v potrubí

kteřá platí obecně pro neustálené proudění. Pro nejjednodušší případ neustáleného proudění – obr. 15.1, kdy kapalina je nestlačitelná ( $\rho = konst$ ,  $K \rightarrow \infty$ ) a potrubí je tuhé ( $E \rightarrow \infty$ ) a stálého průřezu, je rychlost proudění jen funkcí času  $v = v(t)$  a integrál v poslední rovnici se dá vyčíslit

$$\int_1 \frac{\partial v}{\partial t} ds = \int_1 \frac{dv}{dt} ds = a \int_1 ds = aL.$$

Bernoulliho rovnice pro neustálené proudění nestlačitelné kapaliny v tuhém potrubí je

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh + aL = konst, \quad (15.1)$$

kde  $a$  je zrychlení sloupce kapaliny v potrubí o délce  $L$ . Ostatní veličiny mají stejný význam jako dříve.

Pro průřezy 1 v nádrži a 2 na konci potrubí, jímž protéká skutečná kapalina nestacionárně, platí Bernoulliho rovnice

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} + gh = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v^2}{2} + aL + gh_z.$$

Když se průřez potrubí mění, je v každém úseku potrubí jiná rychlost a zrychlení proudu kapaliny. Pro každý časový okamžik platí rovnice kontinuity pro libovolné průřezy

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = S \cdot v = konst.$$

Po uplynutí doby  $dt$  se změní rychlosti na  $v_1 + dv_1$ ,  $v_2 + dv_2$ ,  $v + dv$ , pro které platí obdobně rovnice kontinuity

$$S_1(v_1 + dv_1) = S_2(v_2 + dv_2) = S \cdot (v + dv).$$

Z obou rovnic spojitosti se dostane odečtením

$$S_1 dv_1 + S_2 dv_2 + S \cdot dv,$$

a po dělení diferenciálu rychlost  $dt$  dostaneme výrazy pro zrychlení

$$\frac{dv_1}{dt} = a_1; \frac{dv_2}{dt} = a_2; \frac{dv}{dt} = a.$$

Jejich dosazením do předcházející rovnice se rovnice spojitosti upraví na tvar

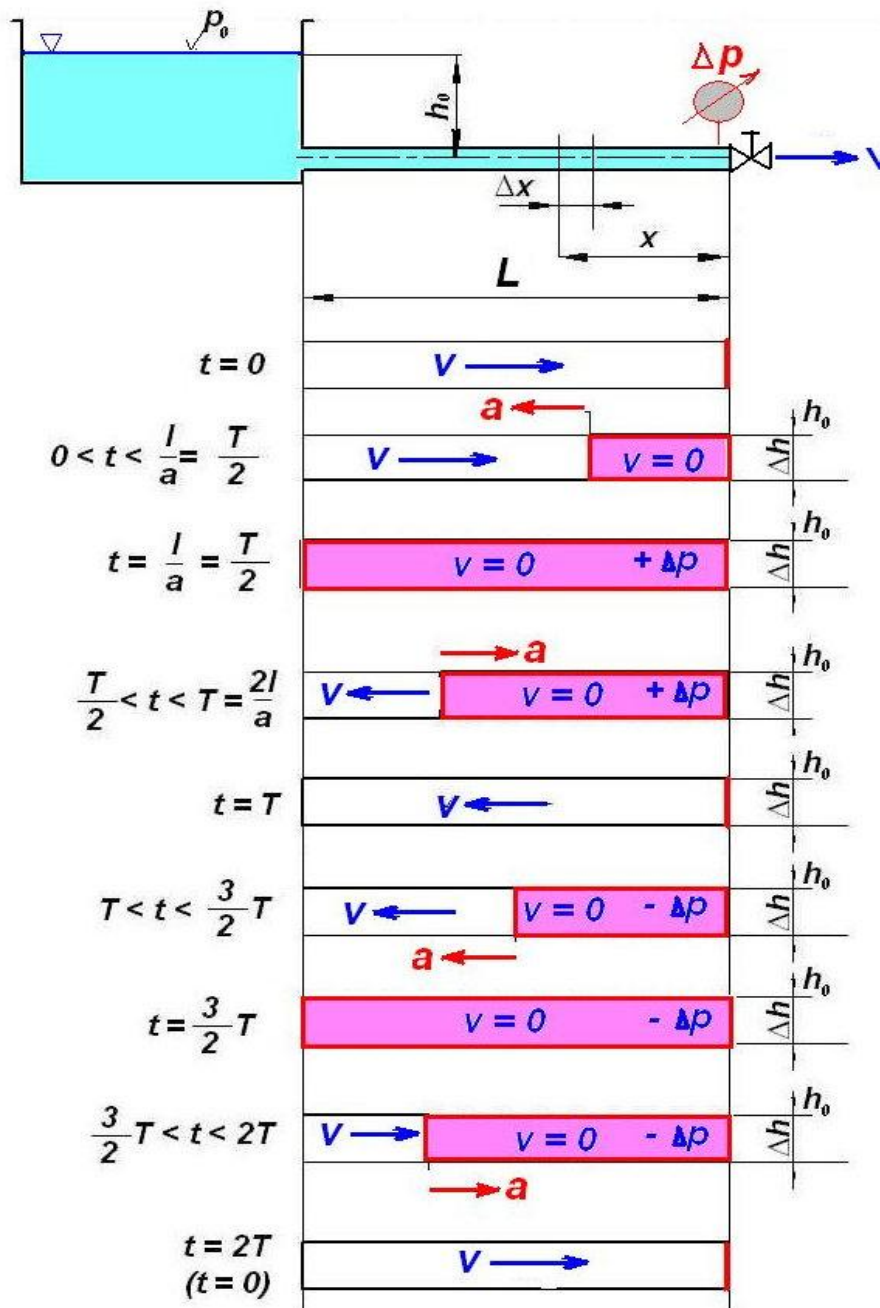
$$S_1 a_1 = S_2 a_2 = Sa = konst \quad (15.2)$$

což je druhá rovnice kontinuity pro neustálené proudění nestlačitelné kapaliny v tuhém potrubí.

### 15.2. Hydraulický ráz

Odvození se provede opět na nejjednodušším případě, kdy potrubí je napojeno na velkou nádrž, v níž je hladina kapaliny v konstantní výši a na konci potrubí je uzavírací či regulační armatura. Předpokládejme náhlé uzavření armatury, čímž se okamžitě zastaví výtok kapaliny – obr 15.2.

Částice kapaliny těsně u armatury se zastaví. Jejich kinetická energie se spotřebuje na stlačení. Tím se vytvoří prostor, do kterého další částice vtékají. Při nárazu na zastavenou kapalinu dochází k přeměně kinetické energie na deformační práci spojenou se stlačením



Obr.15.2 Pohyb přímé a odražené vlny a jemu odpovídající tlakové poměry v potrubí

zastaveného sloupce kapaliny. Rozhraní mezi zastavenou (a stlačenou) kapalinou a pohybující se kapalinou se šíří od místa vzniku rázu, tj. armatury, rychlostí zvuku  $a =$  rychlost šíření tlakových vln. Zastavená kapalina má větší tlak o hodnotu  $\Delta p$ . Tlaková (rázová) vlna, které se říká přímá, se pohybuje rovnoměrně, takže za čas

$$t = \frac{l}{a}$$

proběhne celý úsek potrubí až k nádrži a sloupec kapaliny v potrubí je stlačen – má vyšší tlak o  $\Delta p$ .

Rázová vlna se nemůže šířit dále do nádrže, kde je volná hladina. Na počátku potrubí je v tomto okamžiku rozhraní stlačené a nestlačené kapaliny, což je nerovnovážený stav. Proto stlačená kapalina začne expandovat do nádrže, deformační energie se přemění opět v kinetickou (kapalina „odpruží“) a rozběhne se v opačném smyslu (od uzávěru do nádrže). Stoupnutí tlaku  $\Delta p$  se tím zruší a čelo této vlny, zvané odražená vlna, se šíří rychlostí zvuku zpět ke konci potrubí (k armatuře). Při expanzi posledních částic na konci potrubí vznikne snížení tlaku o hodnotu  $\Delta p$  (částice kapaliny mají snahu se odtrhnou od zavřeného uzávěru). Tato tlaková vlna (snížení tlaku o  $\Delta p$ ) se opět šíří od uzávěru k nádrži, kde se odrazí. Přitom se snížení tlaku  $\Delta p$  zruší a kapalina se rozběhne od uzávěru k nádrži. Tato odražená vlna doběhne k uzávěru, na který kapalina narazí, takže dojde opět k zastavení a zvýšení tlaku. Ale to se již celý proces šíření tlakové vlny opakuje. U kapaliny bez vnitřního tření nedochází k útlumu a rázové vlny by se neustále opakovaly. Ve skutečných kapalinách se vnitřním třením rázové vlny utlumí až prakticky zaniknou. Doba, ve které rázová vlna se vrátí do místa vzniku, tj. k uzávěru, se nazývá doba běhu vlny  $T$  a vypočítá se ze vztahu

$$T = \frac{2L}{a}, \quad (15.3)$$

kde  $L$  je délka potrubí  
 $a$  je rychlost zvuku.

V kapalinách je rychlost šíření tlakových vln (zvuku) určena výrazem

$$a_t = \sqrt{\frac{K}{\rho}}. \quad (15.4)$$

Je to teoretická rychlost zvuku, která by se dosáhla v dokonale tuhém potrubí. Vzhledem k pružnosti potrubí je skutečná rychlost menší

$$a = \kappa a_t, \quad (15.5)$$

kde pro tenkostěnné potrubí je

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{Kd}{Es}}}, \quad (15.6)$$

kde  $s$  je tloušťka stěny trubky

Pro tlustostěnné potrubí je

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \frac{K D^2 + d^2}{E D^2 - d^2}}},$$

kde  $d$  je vnitřní poloměr potrubí  
 $D$  je vnější poloměr potrubí.

Stoupnutí tlaku při hydraulickém rázu se dostane z rovnosti kinetické energie a deformační práce při stlačení kapaliny v potrubí. Za určitý čas po uzavření armatury se



dostane rázová vlna do vzdálenosti  $x$  od uzávěru.- obr. 15.2. Sloupec kapaliny o délce  $x$  se zastaví a jeho kinetická energie

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \rho S x v^2 = \frac{1}{2} \rho V v^2 \quad (15.7)$$

se přemění na deformační práci potřebnou ke stlačení sloupce  $x$  o  $\Delta x$

$$E_d = \frac{1}{2} F \Delta x = \frac{1}{2} \Delta p S \Delta V. \quad (15.8)$$

Z rovnosti  $E_k = E_d$  se dostane

$$\frac{1}{2} \rho V v^2 = \frac{1}{2} \Delta p \Delta V \quad \text{neboli} \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{\rho v^2}{\Delta p}.$$

Poměrné objemové stlačení je dáno modulem stlačitelnosti kapaliny

$$\frac{1}{K} = \frac{\Delta V}{V} \frac{1}{\Delta p} \quad \text{neboli} \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta p}{K}.$$

Z porovnání obou poměrných objemových změn dostane

$$\frac{\Delta p}{K} = \frac{\rho v^2}{\Delta p} \quad (15.9)$$

a stoupenutí tlaku při hydraulickém rázu je

$$\Delta p = \sqrt{\rho K v^2} = \rho \sqrt{\frac{K}{\rho}} v = \rho a_t v \quad (15.10)$$

Tento výraz odvodil poprvé N.E. Žukovský (1897 – 1898). Teoretická rychlost zvuku by se dosáhla v dokonale tuhém potrubí, vzhledem k pružnosti stěny potrubí je skutečná rychlost zvuku menší

$$a = \kappa a_t,$$

pro součinitel „ $\kappa$ “ je možné odvodit analytické rovnice, tyto jsou uváděny v odborné literatuře.

Skutečné zvýšení tlaku při hydraulickém rázu se vypočte se skutečnou rychlostí zvuku „ $a$ “, takže platí

$$\Delta p = \rho a v = \kappa \rho a_t v. \quad (15.11)$$

V tomto případě se veškerá kinetická energie přeměnila v deformační práci. Takovému hydraulickému rázu se říká úplný nebo totální. Nastane v těch případech, kdy doba uzavírání  $t_z$  je kratší nebo rovna době běhu vlny  $T$ , čili

$$t_z \leq T. \quad (15.12)$$

Hydraulický ráz představuje značné zvýšení tlaku. Např. při změně rychlosti vody  $\Delta v = 1 \text{ m/s}$  je při totálním hydraulickém rázu stoupenutí tlaku

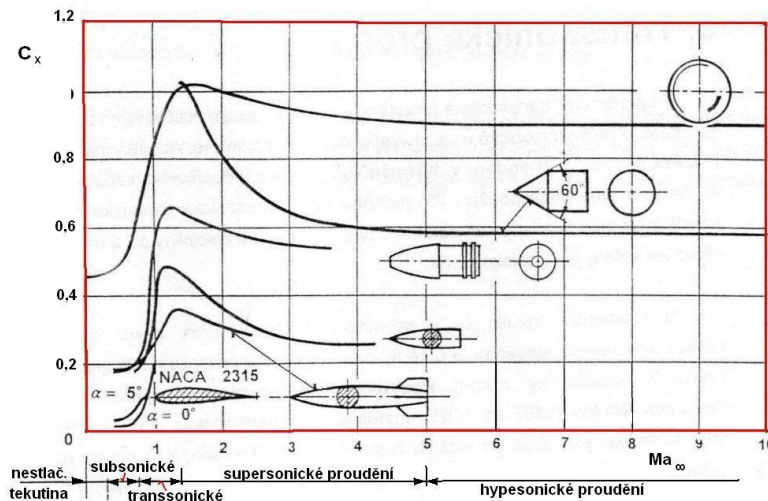
$$\Delta p = \rho a \Delta v = \sqrt{\rho K} \Delta v = \sqrt{10^3 \cdot 2 \cdot 10^9} \cdot 1 \doteq 1,4 \cdot 10^6 = 1,4 \text{ MPa}.$$

Pružností potrubí je hydraulický ráz snížen.

Bude-li čas uzavírání  $t_z < T$  jedná se o částečný hydraulický ráz, jehož řešení vede na parciální diferenciální rovnice druhého řádu, tzv. vlnové rovnice.

## 16. Obtékání a odpor těles

Při obtékání těles či pohybu tělesa v tekutině vznikají síly a momenty. Výslednou sílu lze rozložit obecně na tři složky, odpor  $F_x$ , vztlak  $F_y$  a boční sílu  $F_z$ . Experimentálně bylo zjištěno, že při velkých Reynoldsových číslech sahá vliv viskozity jen do malé vzdálenosti od povrchu tělesa a tato část proudu se nazývá mezní vrstva; úplav je odplavovaná mezní vrstva. Při obtékání těles se setkáváme s různě velkou rychlostí obtékání, nebo s různě velkou velikostí Machova čísla –  $Ma$ . Z praktického hlediska i názvosloví, je výhodné rozdělit proudění podle velikosti Machova čísla, možné rozdělení uvádí obr. 16.1.

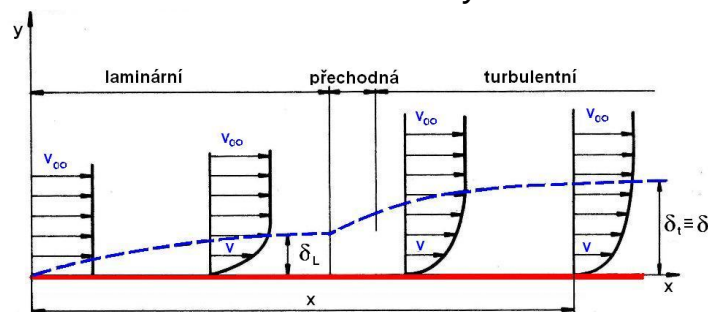


Obr. 16.1 Závislosti součinitele odporu obtékaných těles na Machově čísle nabíhajícího proudu

### 16.1. Mezní vrstva

Pojem mezní vrstva byl zaveden Prandtlm a má velký význam v aerodynamice i při obtékání těles, protože metody výpočtu třecího odporu jsou založeny na teorii mezní vrstvy. Pojem mezní vrstva se dá názorně vysvětlit na příkladu obtékání rovinné desky umístěné v rovnoběžném proudu tekutiny, přičemž deska má stejný směr jako proudnice – obr. 6.3.

Částice tekutiny před deskou mají všechny stejnou rychlost  $v_\infty$  i směr. Částice, které ulpí na desce mají rychlost nulovou, v blízkosti desky jsou částice tekutiny brzděny pomalejšími částicemi u obtékaného povrchu. Část jejich kinetické energie se přeměňuje třením na teplo. Oblast v těsné blízkosti stěny desky, kde se mění rychlost nebo jinak řečeno kde existuje gradient rychlosti a tedy platí nerovnost  $\frac{\partial v}{\partial y} \neq 0$  se nazývá mezní vrstva.

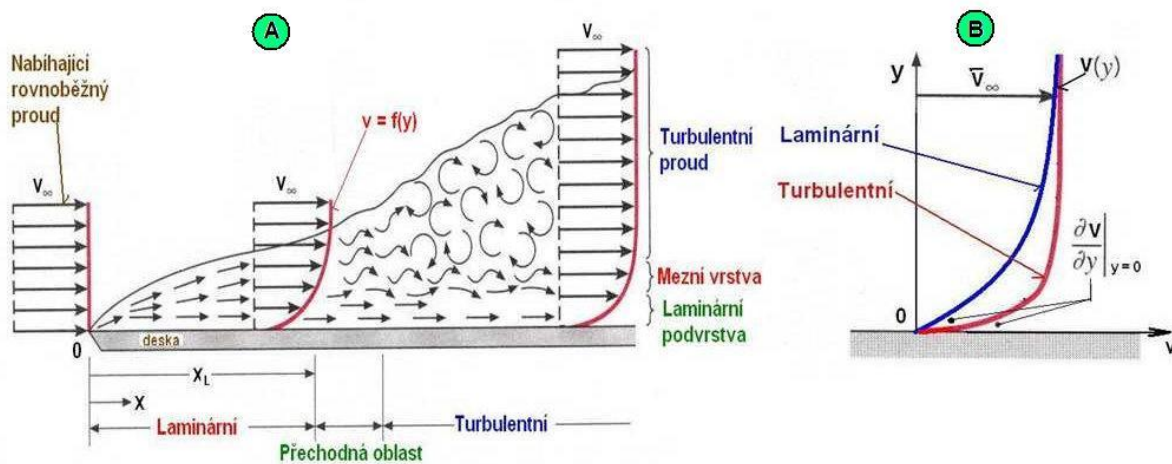


Obr. 16.2 Mezní vrstva na desce

Předpokládejme, že nekonečně dlouhá deska podle obr. 16.2 je obtékána proudem tekutiny. Rychlostní profil v náběžném bodě má obdélníkový průběh, dále od náběžného bodu ve směru „x“ v důsledku viskozity (tření) je rychlost tekutiny na stěně desky nulová a kolmo na desku ve směru „y“ se vytváří rychlostní profil. Tření na desce stále zbrzdí částice tekutiny, další částice vzdálenější od povrchu se přenášejí do mezní vrstvy. Protože

do mezní vrstvy vstupují další částice tekutiny, mezní vrstva směrem po proudu stále narůstá. Rychlostní profily mají spojitý přechod od nulové rychlosti na stěně do plné rychlosti ve vnějším proudu - obr. 16.2. Tloušťka mezní vrstvy je vzdálenost od stěny, kde rychlost dosáhne smluvní velikosti, obvykle  $0,99 v_\infty$  - obr.16.2.

V dostatečné vzdálenosti od náběžné hrany jsou si rychlostní profily podobné a nezávislé na vzdálenosti  $x$ . Má-li nabíhající proud nulovou turbulenci, vznikne na začátku desky laminární mezní vrstva, která pro  $Re_x = 100\,000$  přechází v mezní vrstvu turbulentní s laminární podvrstvou – obr. 16.3a. Mezi laminární a turbulentní mezní vrstvou existuje jistá přechodná oblast. Mezní vrstva podle druhu proudění může být laminární nebo turbulentní. Rychlostní profily se od sebe liší, u turbulentní mezní vrstvy je u stěny větší gradient rychlosti a tloušťka mezní vrstvy je v porovnání s laminární mezní vrstvou větší – obr. 16.3b. Má-li nabíhající proud určitou turbulenci, potom na počátku desky laminární mezní vrstva nevznikne a turbulentní mezní vrstva se může nastavit již od náběžného bodu.



Obr. 16.3 Rychlostní profil u laminární a turbulentní mezní vrstvy

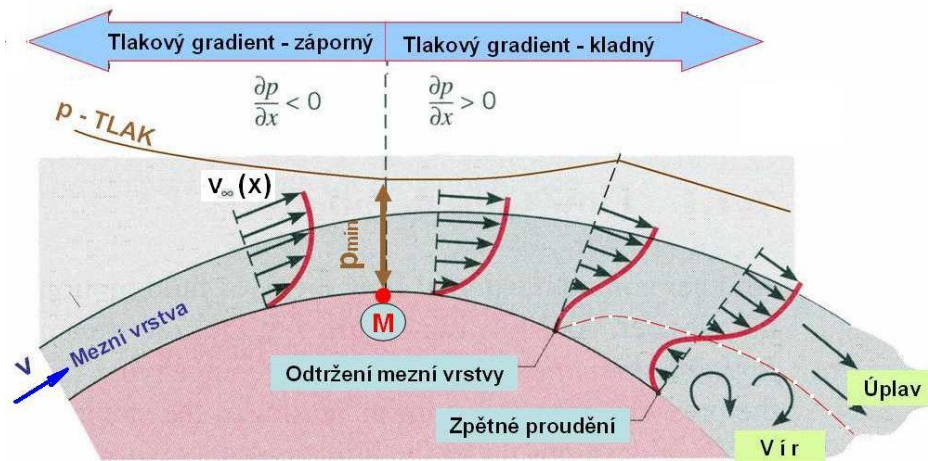
Proudění ideální (nevazké) tekutiny je popsáno Eulerovou rovnicí. Tato rovnice však nerespektuje vliv tření tekutiny na obtékaném povrchu tělesa, kde rychlost tekutiny je nulová. Prandtl předpokládal, že v tenké vrstvě tekutiny na povrchu tělesa roste rychle s rostoucí vzdáleností „ $y$ “ od stěny tangenciální složka rychlosti z nulové hodnoty rychlosti na povrchu tělesa až k hodnotě rychlosti v nerušeném proudu na vnějším okraji této vrstvy. V proudovém poli vně této tzv. mezní vrstvy převažuje vliv setrvačných sil nad silami vazkými a zde k popisu proudění můžeme použít Eulerovu rovnici.

Proudění uvnitř mezní vrstvy je charakterizováno tím, že se uplatňují třecí síly od viskozity. Síly setrvačné a třecí jsou přibližně stejného řádu a proudění je proto popsáno Navierovou-Stokesovou rovnicí. Prandtl pro 2D proudění předpokládal, že v mezní vrstvě proudí vazká tekutina a vně mezní vrstvy je možné zanedbat viskozitu tekutiny a proudění je zde popsáno rovnicí pro ideální tekutinu, tedy rovnicí Eulerovou.

**Održení proudu** - při obtékání rovinné desky se statický tlak podél desky nemění, protože  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ . Jiná situace nastává při obtékání těles zaoblených (např. válec, koule, letecký profil apod.), kde dochází ke změně rychlosti na povrchu tělesa a protože platí Bernoulliho rovnice, mění se i tlak. Sledujme proudění na zakřiveném povrchu podle obr. 16.4.

Předpokládejme, že se tlak vnějšího proudu podél povrchu na začátku zmenšuje a v bodě M dosáhne minima, pak se tlak začíná zvětšovat. V prvním úseku je tlakový gradient záporný -  $\frac{\partial p}{\partial x} \leq 0$ , rychlost uvnitř mezní vrstvy se zvětšuje. Ve druhém úseku je tlakový

gradient kladný  $\frac{\partial p}{\partial x} \geq 0$  a rychlost uvnitř mezní vrstvy se zmenšuje



Obr. 16.4 Odrážení mezní vrstvy na zakřiveném povrchu

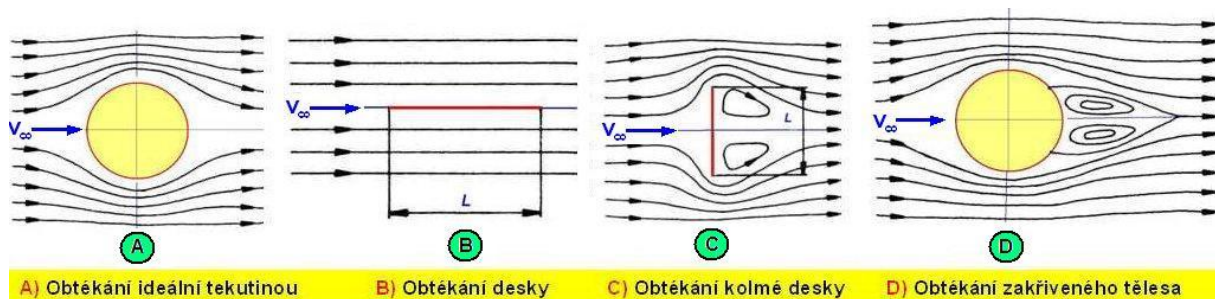
V oblasti rostoucího tlaku jsou částice tekutiny ubrzdovány, a to vnitřním třením, ale též kladným tlakovým gradientem. Rychlost v mezní vrstvě klesá, rychlostní profil mezní vrstvy se tím deformuje, na rychlostním profilu se objeví inflexní bod, až dojde k tomu, že rychlostní profil svírá se stěnou pravý úhel ( má směr normály). V tomto okamžiku se částice tekutiny zastavily. V dalším průběhu nastává účinkem kladného tlakového gradientu, pohyb tekutiny, který směřuje proti smyslu původního proudu u stěny. Při styku se základním proudem vzdalují se pohybující částice od stěny, což vede k odtržení mezní vrstvy.

O tom, zda se mezní vrstva odtrhne a ve kterém místě rozhoduje tlakový gradient podél povrchu tělesa a rovněž skutečnost, zda je v mezní vrstvě proudění laminární či turbulentní. V žádném případě však nemůže nastat odtržení mezní vrstvy při obtékání zakřivené stěny v její první části. Dá se dokázat, že poloha bodu odtržení nezávisí u laminární mezní vrstvy na  $Re$ -čísle.

Je-li mezní vrstva turbulentní, vzniká intenzivní výměna hybnosti mezi částicemi tekutiny a proto i při zvýšeném tření částice tekutiny ztrácejí kinetickou energii pomaleji. V důsledku tohoto se turbulentní mezní vrstva odtrhne později než laminární.

## 16.2. Odpor těles

Je-li těleso obtékáno ideální tekutinou (viskozita je nulová), proudnice sledují povrch obtékaného tělesa – obr. 16.5a, proudové pole je symetrické okolo svislé i vodorovné osy a proto je odpor nulový.



Obr. 16.5 Schéma obtékání těles různých tvarů

Při obtékání tělesa skutečnou tekutinou si celkový odpor rozkládáme na odpor třecí a tlakový. V důsledku viskozity vznikají silové účinky dané integrálem tečných sil na povrchu obtékaného tělesa. Vzniká také nerovnoměrné rozdělení tlaku na povrchu obtékaného tělesa, což rovněž přispívá ke vzniku odporové síly.



Odpor těles je určen rovnicí, kterou definoval Newton

$$F_x = c_x S \frac{v_\infty^2}{2} \rho, \quad (16.1)$$

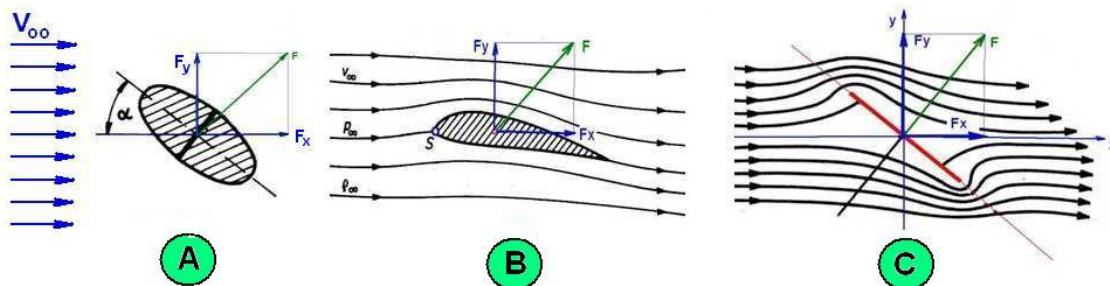
Jak již bylo uvedeno, odpor těles se skládá z třecího odporu, tvarového odporu a indukovaného odporu. Protože stanovení jednotlivých složek odporu je složité, při výpočtech nebo při měření se stanovuje obvykle pouze odpor celkový.

Při obtékání desky, která má směr rychlosti - obr. 16.5b, se uplatňuje v odporové síle především vliv třecího odporu. Součinitel odporu závisí na tvaru desky, Reynoldsově čísle, drsnosti povrchu a na turbulenci nabíhajícího proudu.

Pro desku postavenou kolmo na vektor rychlosti - obr. 16.5c dojde k odtržení mezní vrstvy na hranách, bod odtržení nemění v tomto případě svoji polohu. Před deskou je větší tlak než za deskou, vzniklý úplav je velký. V tomto případě je odporová síla tvořena především tvarovým odporem. Součinitel odporu závisí hlavně na tvaru obtékaného tělesa, méně na Reynoldsově čísle.

Při obtékání zakřivených těles je typické, že proudící tekutina v důsledku odstředivé síly nemusí sledovat povrch obtékaného tělesa, dochází k odtržení mezní vrstvy a vzniká úplav. Rychlostní pole je v tomto případě nesymetrické, protože rychlost a tlak jsou vázány Bernoulliho rovnicí, je rozložení tlaku rovněž nesymetrické. Toto je příčinou tvarového odporu. V tomto případě se také uplatňuje vliv viskozity a vzniká proto i odpor třecí. Je obtížné stanovit podíl odporu tvarového a třecího, třecí součinitel je závislý na tvaru obtékaného tělesa a velikosti Reynoldsova čísla – obr. 16.5d.

U těles osově symetrických, postavených vzhledem k proudu pod úhlem větším než nula, dochází ke vzniku vztlakové síly – obr. 16.6a. Vztlaková síla vznikne i u nesymetrických těles obtékaných rovnoběžným proudem – obr. 16.6b a rovněž při obtékání šikmé desky – obr. 16.6c. Silové účinky obvykle dělíme na sílu vztlakovou, která působí kolmo na vektor rychlosti nenarušeného proudu a odpor těles, což je síla, která působí ve směru proudění, ale má opačný smysl



Obr. 16.6 Obtékání tělesa se vztlakem  
a) symetrické těleso b) nesymetrické těleso c) šikmá deska

Pomocí teorie potenciálního proudění je vztlaková síla určena Žukovského rovnicí

$$F_y = \rho \cdot v_\infty \cdot \Gamma, \quad (16.2)$$

kde  $\Gamma = \oint_k v \cdot ds$  je cirkulace rychlosti

Rovnice (6.4) platí pro tekutinu ideální tak i skutečnou. Pro vztlakovou sílu platí také rovnice (Newtonova)

$$F_y = c_y S \frac{v_\infty^2}{2} \rho. \quad (16.3)$$

Porovnáním posledních dvou rovnic je součinitel vztlaku určen výrazem

$$c_y = \frac{2 \cdot \Gamma}{v \cdot S}. \quad (16.4)$$

### 16.3. Obtékání koule

Koule jako jednoduché geometrické těleso je z hlediska obtékání relativně velmi podrobně prozkoumáno, a to jak pro malá Re-čísla (plouživé proudění), tak i pro vysoká Re – čísla, kdy Machovo číslo  $Ma \geq 1$ . Analytické řešení je možné pouze pro malá Re-čísla  $Re < 1$ , pro větší Re-čísla je možné poznatky získat pouze experimentálním měřením, např. v aerodynamickém tunelu.

Plouživé obtékání koule ( $Re < 1$ ) řešil jako první Stokes. Při řešení vyšel z Navierovy-Stokesovy rovnice, ve které zanedbal setrvačné síly -  $\mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v} = 0$ . Dostal rovnici, která se nazývá Stokesova

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = a_0 \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (16.5)$$

Tato rovnice je parciální diferenciální rovnice druhého řádu, je však lineární, její řešení je proto snadnější než řešení rovnice Navierovy-Stokesovy.

Stokes integroval tuto rovnici ve sférických souřadnicích pro ustálené proudění a zanedbal ještě vnější objemovou sílu. S přihlédnutím k rovnici spojitosti pro třecí odpor odvodil rovnici

$$F_t = 4\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v = 2\pi \cdot \eta \cdot d \cdot v,$$

a podobně pro tlakový odpor

$$F_p = 2\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v = \pi \cdot \eta \cdot d \cdot v$$

Celkový odpor je součet odporu třecího a tlakového

$$F = F_t + F_p = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v = 3\pi \cdot \eta \cdot d \cdot v. \quad (16.6)$$

Tato rovnice je v literatuře uváděna jako Stokesův zákon. Reynoldsovo číslo je učeno známým vztahem

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu},$$

Porovnáme li Stokesovu rovnici s klasickou rovnicí pro celkový odpor

$$F = 3\pi \cdot \eta \cdot d \cdot v = c_x \frac{\pi}{4} d^2 \frac{v^2}{2} \rho, \quad (16.7)$$

odkud pro součinitel odporu dostaneme

$$c = c_x = \frac{24}{Re}. \quad (16.8)$$

Tato rovnice platí přesně pro  $Re < 0,5$ , prakticky se používá pro  $Re < 1$ .

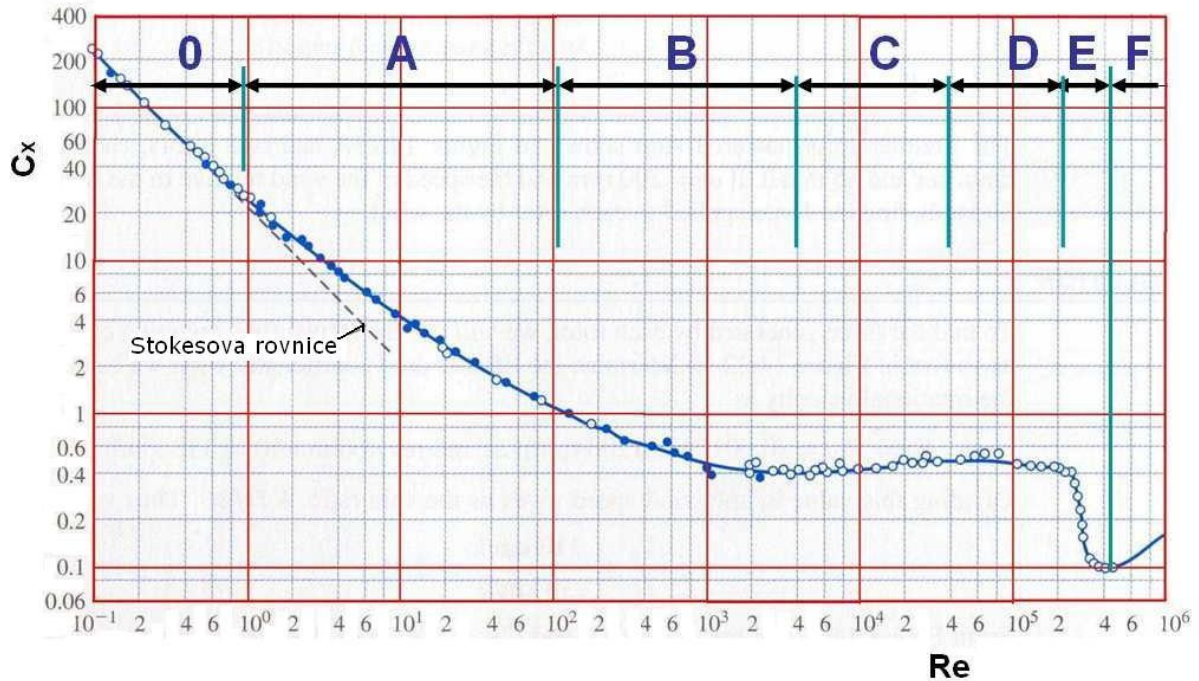
Oseenova linearizace: úplné zanedbání setrvačných sil v Navierově-Stokesově rovnici je možné pouze při malých Re-číslích a v těsné blízkosti povrchu koule. Není však oprávněná v místech od povrchu koule dosti vzdálených, kde velikost vazkých a setrvačných sil je řádově stejná. Oseen linearizoval Navierovu-Stokesovu rovnici trochu jiným způsobem a pro součinitel odporu obdržel

$$c = c_x = \frac{24}{Re} \left( 1 + \frac{3}{16} Re \right), \quad (16.9)$$

tato rovnice platí pro  $Re < 2$ .

Závislost součinitele odporu pro kouli uvádí obr. 16.7, závislost pro  $Re > 1$  byla stanovena měřením v aerodynamickém tunelu. Pro  $Re > 1$  je možné součinitel odporu vypočítat z empirických rovnic uvedených v Tab. 16.1. Pro  $Re = 4,5 \cdot 10^5$  na závislosti  $c_x = f(Re)$  je možné pozorovat výrazný pokles  $c_x$ , který je způsoben přechodem laminární mezní vrstvy v turbulentní. Tento jev se uplatňuje např. při letu golfového míčku.



Obr. 16.7 Závislost  $c_x = f(Re)$  pro kouli

Tabulka 16.1 Rovnice pro výpočet součinitele odporu pro hladkou kouli

Číslo	Autor	Rovnice	Rozsah $Re_w$
1	Stokes	$c_x = \frac{24}{Re}$	$Re_w < 0,5$
2	Allen	$c_x = \frac{k}{\sqrt{Re}}$	$Re = 10$ až $1000$
3	Goldstein	$c_x = \frac{12}{Re} \left[ 1 + \frac{3}{16} Re - \frac{19}{1280} Re^2 + \dots \right]$	$Re < 2$
4	Schiller	$c_x = \frac{12}{Re} \left[ 1 + 0,15 Re^{0,687} \right]$	$Re < 800$
5	Fair a Geyer	$c_x = \frac{24}{Re} + \frac{3}{\sqrt{Re}} + 0,34$	$Re = 0,5$ až $10^4$
6	Bird	$c_x = 18,5 \cdot Re^{-\frac{3}{5}}$	$Re = 2$ až $500$
7	Kasatkin	$c_x = \frac{18,5}{Re^{0,6}}$	$Re = 2$ až $500$
8	Mika	$c_x = \frac{24}{Re} \left( 1 + 0,125 Re^{0,7} \right)$	$Re < 3 \cdot 10^3$
9	Brauer	$c_x = \frac{24}{Re} + \frac{4}{\sqrt{Re}} + 0,4$	$Re < 3 \cdot 10^5$
10	Newton	$c_x = 0,44$	$Re = 550$ až $2 \cdot 10^5$

## 16.4. Obtékání válce

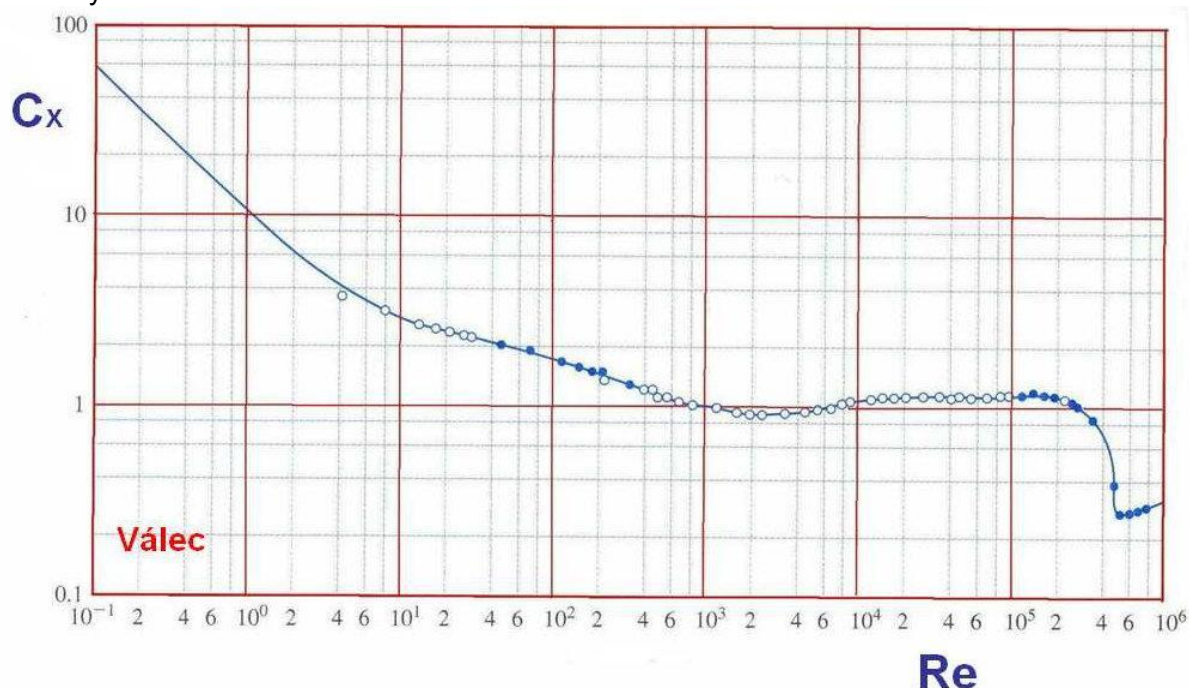
Válec, stejně jako koule je jednoduché geometrické těleso a z hlediska obtékání je relativně velmi podrobně prozkoumáno stejně jako u koule, a to jak pro malá  $Re$ -čísla (plouživé proudění), tak i pro vysoká  $Re$  – čísla. Analytické řešení je možné pouze pro malá  $Re$ -čísla  $Re < 2$ , pro větší  $Re$ -čísla je možné poznatky získat pouze experimentálními měřeními, např. v aerodynamickém tunelu.

Pro plouživé obtékání nekonečně dlouhého válce, v nekonečně velkém prostoru a za předpokladu, že vektor rychlosti tekutiny je kolmý na osu válce, pro součinitel odporu odvodil Lamb rovnici

$$c = c_x = \frac{8\pi}{Re(2,002 - \ln Re)} \quad (16.10)$$

Tato rovnice platí přesně pro  $Re < 0,5$ , prakticky se používá pro  $Re < 2$ .

Obr. 6.21 uvádí závislost  $c_x = f(Re)$ , která pro  $Re > 1$  byla stanovena měřeními v aerodynamickém tunelu.

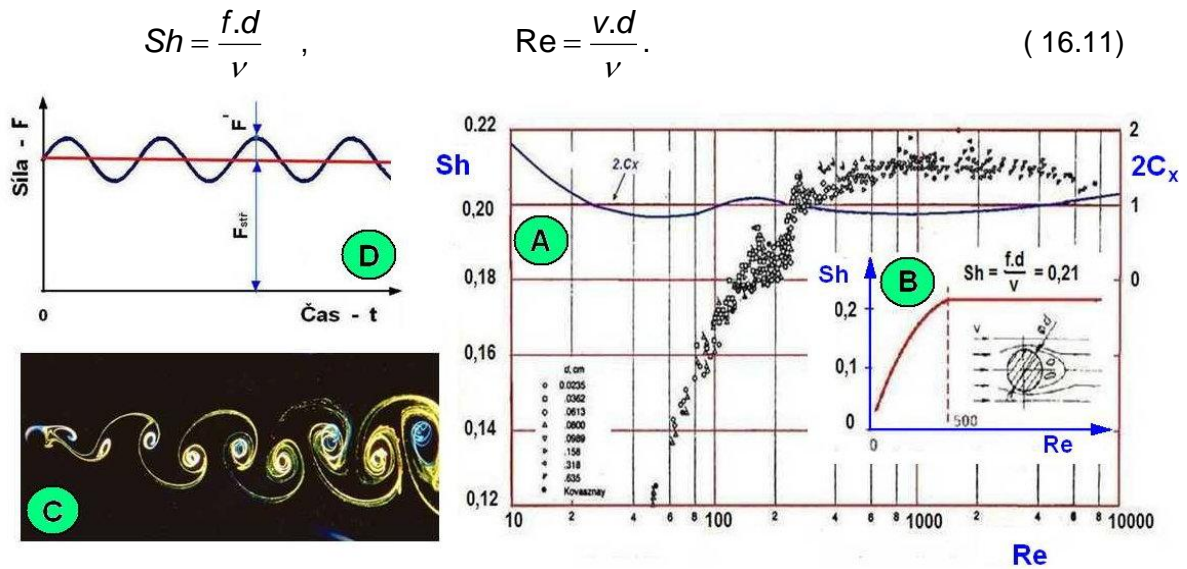


Obr. 16.8 Závislost  $c_x = f(Re)$  pro válec

Na závislosti  $c_x = f(Re)$  stejně jako při obtékání koule je možné pozorovat několik výrazných oblastí, popis provedený pro kouli v předcházející kapitole je prakticky možné použít i pro válec.

**Kármánova vírová cesta** - Za obtékáním tělesem dochází k odtržení mezní vrstvy a za tělesem se vytváří úplav, tento je při malých  $Re$  stabilní a neodtrhává se od tělesa. Od jisté velikosti  $Re$ -čísla se však začíná úplav odtrhávat a je proudící tekutinou unášen ve směru proudění. Odtrhávání vírů je střídavé – obr.16.9, toto je dáno tím, že je málo pravděpodobné, že oba víry se budou vyvíjet v čase naprosto stejně. Řadě vírů unášených proudící tekutinou za tělesem se říká „Kármánova vírová cesta“ - obr. 16.9C, Kármán tuto úlohu studoval a podrobně popsal. Tato úloha je asi nejpodrobněji popsána při obtékání válce, první experimentální práce publikoval Roshko. Obr. 16.9A uvádí závislost Strouhalova čísla jako funkci Reynoldsova čísla –  $Sh = f(Re)$  podle původního měření Roshka a také stejnou závislost, ale vyhlazenou – obr. 16.9B.

V obrázcích je Strouhalovo  $Sh$  a Reynoldsovo číslo definováno zlomkem



Obr. 16.9 Kármánova vírová cesta - závislost  $Sh = f(Re)$  podle měření Roshka

Odtrhávání vírů za obtékaným tělesem – válcem způsobí periodické změny rychlostního i tlakového pole, proto odporová síla není konstantní, ale má amplitudově namodulovanou periodickou složku s frekvencí  $f$ , velikost této frekvence odpovídá Strouhalovu číslu - obr. 16.9D.

Je-li vlastní frekvence obtékaného tělesa  $f_v$  určena vztahem

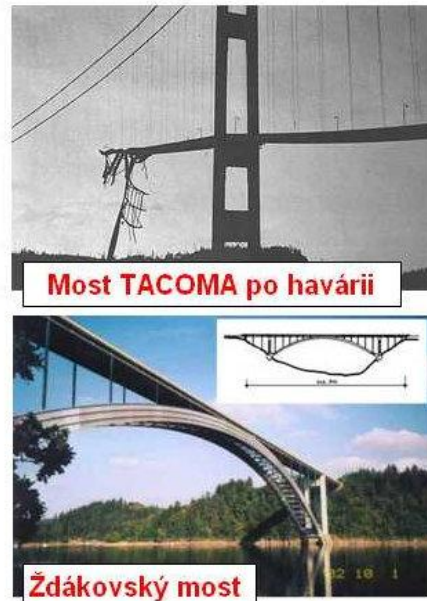
$$f_v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (16.12)$$

kde  $k$  – tuhost tělesa

$m$  – hmotnost tělesa,

potom při řešení praktických úloh je nutné zajistit, aby nebyla stejná vlastní frekvence a frekvence odtrhávaných vírů –  $f_v \neq f$ .

V technické praxi jsou známé případy, kdy tato podmínka nebyla dodržena a vznikly problémy nebo i havárie. Asi nejznámějším případem je zřícení kabelového mostu přes Tacoma úžinu v USA ve státě Washington. Most byl dlouhý 1,6 míle a ke zřícení došlo 1. 6. 1940 – obr. 16.10.



Obr. 16.10 Foto mostu přes Tacoma úžinu a mostu u Žďákovy





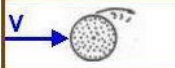
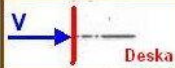


















V ČR byl postaven v souvislosti se stavbou přehrady Orlík na Vltavě v Jižních Čechách obloukový most u Žďákova – obr. 16.10. Most má celkovou délku 542,91 m, rozpětí oblouku je 379,6 m, most se stavěl v letech 1957 až 1965. Po jeho postavení při rychlosti větru cca 40 km/hod. došlo ke kmitání svislých pilířů, tyto byly zhotoveny z ocelové trubky průměru 900 mm. Tato nepředpokládaná událost se vyřešila tím, že do dutých pilířů byl nasypán štěrk. Podle rov. (16.12) se zvýšila štěrkem hmotnost, tím se snížila vlastní frekvence pilíře a bylo vyhověno podmínce  $f_v \neq f$ .

### 16.5. Odpor vybraných těles

Při obtékání těles nejrůznějších tvarů lze tvrdit, že odporová síla je tvořena jak odporem třecím, tak i tlakovým (tvarovým, profilovým, čelním apod.). Má-li obtékané těleso takový tvar, že je přesně definován bod odtržení mezní vrstvy, potom převládá odpor tlakový a vliv Reynoldsova čísla je obvykle malý. V ostatních případech je třeba počítat s tím, že odporový součinitel bude funkcí Reynoldsova čísla.

Tabulka 16.2 uvádí velikost odporového součinitele pro vybraná 3D a 2D tělesa.

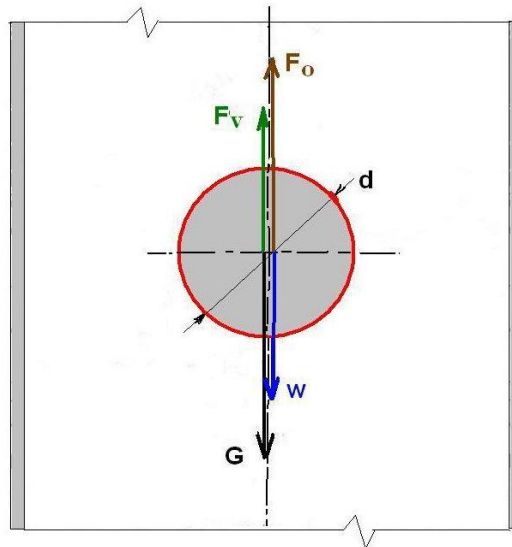
Tabulka 16.2 Odporový součinitel pro vybraná 3D a 2D tělesa

3D - těleso	$C_x$	3D - těleso	$C_x$	2D - těleso	$C_x$	2D - těleso	$C_x$
 Koule	0,47	 Deska čtvercová	1,17		1,7	 Deska	1,98
 Polokoule dutá	0,38	 Polokoule plná	1,17		1,20		2,00
 Polokoule plná	0,42	 Polokoule dutá	1,42		1,16		2,30
 Elipsoid	0,59	 Polokoule dutá	1,38		1,60		2,20
 Krychle	0,80	 Krychle	1,05		1,55		2,05
 Kužel 60°	0,50	$Re \doteq 10^4$			1,55	$Re \doteq 10^4$	

## 17. Usazování

### 17.1. Sedimentační rychlost

Pohybuje-li se kulová částice průměru  $d$  vlivem tíhového zrychlení ve stojící tekutině charakterizované hodnotami hustoty  $\rho_v$ , a viskozity  $\eta$ , potom rychlost padání částice se také nazývá sedimentační (usazovací) rychlost. Tekutina zaujímá nekonečně velký poloprostor a na částici působí vedle tíhové síly  $G$  ještě vztlaková síla  $F_v$  a síla odporová  $F_o$ , tj. odpor částice proti pohybu - obr. 17.1



Obr. 17.1 Rovnováha sil při pohybu částice

Předpokládejme, že pevná částice se pohybuje rovnoměrnou rychlostí  $w$ , tzn. setrvačná síla  $F_s=0$ , potom pro rovnováhu sil platí

$$G = F_v + F_o,$$

a po dosazení za jednotlivé síly

$$\frac{\pi d^3}{6} g \rho_p = \frac{\pi d^3}{6} g \rho_v + c_x \frac{\pi d^2}{4} \frac{w^2}{2} \rho_v, \quad (17.1)$$

kde  $w$  – sedimentační rychlost koule

$\rho_p$  - hustota částice

$\rho_v$  - hustota vody nebo vzduchu

Odpor proti pohybu je vyjádřen známou rovnicí

$$F_o = c_x S \frac{w^2}{2} \rho_v = c_x \frac{\pi d^2}{4} \frac{w^2}{2} \rho_v.$$

Z rovnice ( 6.5) pro sedimentační rychlost dostaneme

$$w = \sqrt{\frac{4 \cdot d (\rho_p - \rho_v) \cdot g}{3 \cdot c_x \cdot \rho_v}}. \quad (17.2)$$

**Rozeběh částice působením vlastní tíhy.** Částice materiálu se nachází v tekutině, jejíž absolutní rychlost je rovna nule. Vlivem vlastní tíhy  $G$  se počne částice pohybovat ve svislém směru rychlostí  $v_p$ , tato se mění od nulové hodnoty v čase  $t = 0$ , až po

sedimentační rychlost  $w$ , které dosáhne teoreticky v čase nekonečně dlouhém. Relativní rychlost obtékání se rovná absolutní rychlosti pohybu částice tekutiny. Z rovnováhy sil, které na částici působí

$$F_s = F_v + F_0 - G,$$

kde  $F_s = m \cdot a = \frac{\pi d^3}{6} \rho_v \frac{dv_p}{dt} = \frac{\pi d^3}{6} \rho_v \frac{v_p \cdot dv_p}{dx}$  - setrvačná síla

$$F_v = \frac{\pi d^3}{6} g \cdot \rho_v - \text{vztlaková (Archimedova) síla}$$

$$F_0 = c_x \frac{\pi d^2}{4} \frac{v_p^2}{2} \rho_v - \text{odporová síla}$$

$$G = m \cdot g = \frac{\pi d^3}{6} g \rho_p - \text{tíhová síla (tíha)}$$

pro dráhu částice odvodíme rovnici

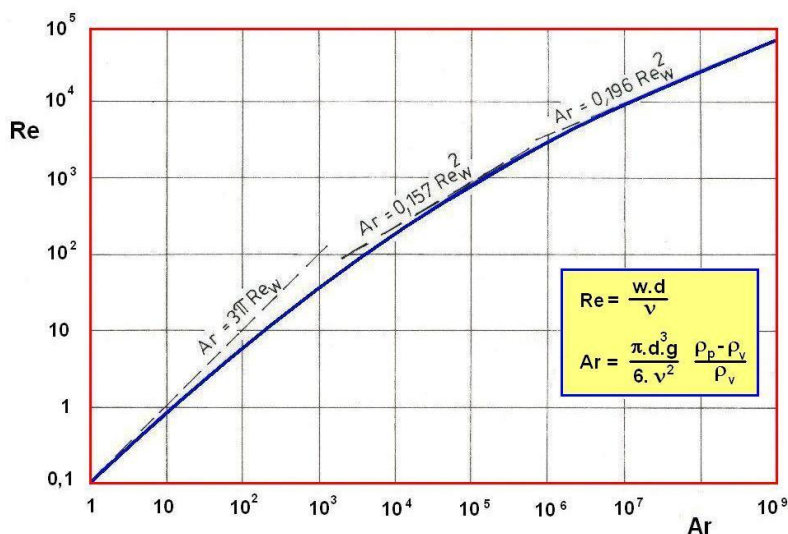
$$x = -\frac{w^2}{2g} \ln \left| 1 - \left( \frac{v_p}{w} \right)^2 \right|, \quad (17.3)$$

kde  $v_p$  rychlost částice ve směru  $x$   
 $w$  sedimentační rychlost

Rychlost částice  $v_p$  z nulové hodnoty dosáhne sedimentační rychlosti  $w$  teoreticky na nekonečně dlouhé dráze, prakticky se uvažuje dráha konečné délky, může se volit podmínka, že  $v_p = 0,99w$ . Po dosažení této dráhy se již částice nezrychluje a pohybuje se konstantní rychlostí  $w$ .

**Výpočet sedimentační rychlosti.** Sedimentační (usazovací) rychlost jedné kulové částice závisí na průměru částice, součiniteli odporu, hustotě částice, dále závisí na hustotě a viskozitě kapaliny a na režimu obtékání. Výpočet sedimentační rychlosti podle rov. (17.2) vyžaduje znalost součinitele odporu  $c_x$  a provádí se iterací,  $c_x$  se může určit z obr. 16.7 nebo vypočítat z rovnic uvedených v tabulce 16.1. Aby se odstranila při výpočtu sedimentační rychlosti iterace, je vhodné zavést bezrozměrné Archimedovo číslo, které je závislé pouze na fyzikálních veličinách tekutiny a částice a nezávisí tedy na sedimentační rychlosti

$$Ar = \frac{\pi d^3 g}{6 \nu^2} \frac{\rho_p - \rho_v}{\rho_v}. \quad (17.4)$$



Obr. 17.2 Závislost  $Re = f(Ar)$



Závislost  $c_x = f(Re)$  např. podle obr. 16.7 se přepočítá do nových souřadnic  $Re = f(Ar)$ , tato závislost je uvedena na obr. 17.2. Praktický výpočet se provede tak, že se stanoví velikost Archimedova čísla  $Ar$ , z obr. 17.2 se odečte velikost Reynoldsova čísla sedimentace  $Re_w$  a z něj se vypočítá sedimentační rychlost

$$Re_w = \frac{w \cdot d}{\nu} ; \quad \rightarrow \quad w = \frac{\nu \cdot Re_w}{d} . \quad (17.5)$$

## 17.2. Sedimentace nekulové částice

Sedimentační rychlost částice, která nemá kulový tvar, je dána v podstatě stejnými zákony, pouze s tím rozdílem, že její odpor v kapalině bude s ohledem na členitost povrchu větší než kulové částice a tedy sedimentační rychlost bude menší. Pro řešení různých materiálových skupin nelze dát všeobecný návod. Dosavadní experimentální výsledky umožnily sestavit pouze přibližné hodnoty koeficientů  $c_x$ , zahrnujících vliv tvaru částice. Obvykle se obecná částice převede na ekvivalentní průměr kulové částice, při čemž se předpokládá, že ekvivalentní koule má stejnou hmotnost jako obecná částice.

Pro  $Re < 1$  je podle literatury částice orientována během usazování tak, jak byla do kapaliny vložena. Pro větší Reynoldsova čísla je u neizometrických částic naopak pozorována tendence docílit určité stabilní orientace. Např. plochá částice má tendenci se orientovat v prostoru při sedimentaci tak, aby její největší průřez byl kolmý na směr vektoru usazovací rychlosti. Částice může v této oblasti kmitat kolem střední rovnovážné polohy.

Jisté zobecnění sedimentace je možné pro tzv. izometrický tvar částic u kterých jsou délkové rozměry ve třech na sobě kolmých směrech zhruba stejné. Definujeme součinitel sféricity jako poměr

$$\sigma = \frac{\text{povrch ekvivalentní koule}}{\text{povrch obecné částice}} = \frac{S_e}{S_c} ,$$

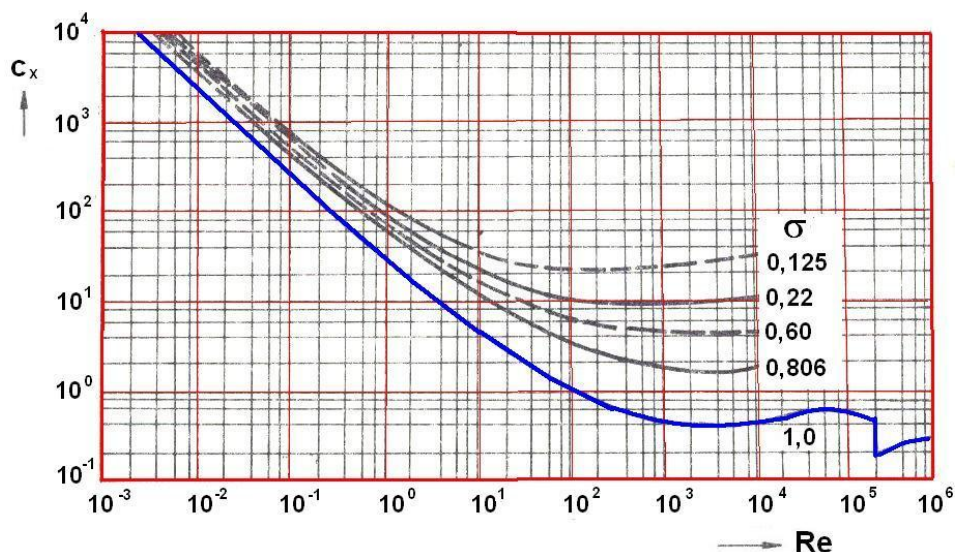
kde průměr ekvivalentní koule je definován vzorcem

$$d_e = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot V}{\pi}} , \quad (17.6)$$

kde  $V$  je objem obecné částice.

Pro  $Re < 1$  pak odporový součinitel lze vyjádřit empirickým vztahem

$$c_x = \frac{24}{0,843 \cdot \log \frac{\sigma}{0,065} Re} .$$



Obr. 17.3 Závislost  $c_x = f(Re, \sigma)$  pro obecnou částici

Tato rovnice pro  $\sigma = 1$  přejde v rovnici Stokesovu

$$c_x = \frac{24}{Re}.$$

Pro  $Re > 1000$  je odporový součinitel možné aproximovat empirickou rovnicí

$$c_x = 5,31 - 4,88 \cdot \sigma.$$

Podle této rovnice je pro kulovou částici pro  $\sigma = 1$  součinitel odporu  $c_x = 0,43$ . Tato rovnice je omezena pro  $\sigma = 0,67$  až 1. Na obr. 17.3 je závislost  $c_x = f(Re, \sigma)$ .

Pro vyjádření vlivu orientace částice v prostoru při sedimentaci na hodnotu  $c_x$  je vhodné zavést poměr  $d_e / d_N$ ,

kde  $d_e$  - ekvivalentní průměr částice podle objemu – rov. (17.2)

$d_N$  - ekvivalentní průměr částice podle průmětu, definovaný jako průměr kruhu, který má stejnou plochu jako průměr částice promítnutý do roviny kolmé na směr pohybu.

Pro  $Re < 1$  je součinitel odporu určen rovnicí

$$c_x = \frac{24}{K \cdot Re}, \quad (17.7)$$

kde faktor  $K = f\left(\sigma, \frac{d_e}{d_N}\right)$ . Korelací naměřených dat byla stanovena závislost

$$\log K = \frac{-0,27}{\sqrt{\sigma} \left(\frac{d_e}{d_N}\right)^{0,435}} \left(\frac{d_e}{d_N} - 1\right) + \log\left(\frac{d_e}{d_N} \sqrt{\sigma}\right).$$

Tato rovnice platí pro částice, u kterých je průmětem do roviny kolmé na směr rychlosti pohybu kruh nebo rovnostranný obrazec.

Když nejsou splněny výše uvedené podmínky, potom se doporučuje následující korelace

$$\log K = -0,25 \left(\frac{d_e}{d_N} - 1\right) \sqrt{\sigma \frac{d_e}{d_N}} + \log\left(\frac{d_e}{d_N} \sqrt{\sigma}\right). \quad (17.8)$$

Při usazování válečku s rozměry  $0,1 \leq \frac{L}{D} \leq 10$  a  $200 \leq Re \leq 6 \cdot 10^4$  dochází při sedimentaci k významnému sekundárnímu pohybu – kmitání a rotaci. Součinitel odporu je dán empirickou rovnicí

$$c_x = 0,99 \left(\frac{\rho_p}{\rho_v}\right)^{-0,12} \left(\frac{L}{D}\right)^{-0,08}, \quad (17.9)$$

kde  $\rho_p, \rho_v$  hustota částice a vody

$L$  délka válečku

$D$  průměr válečku

Pro poměr  $L/D > 1$  při usazování válečku byla jeho podélná osa vodorovná, pro poměr  $L/D < 1$  byla osa válečku vertikální a pro poměr  $L/D = 1$  je poloha válečku nestabilní, usazovací dráha se odchyľuje od svislé přímky, váleček rotuje kolem osy kolmé k ose válečku.

### 17.3. Omezené usazování

**Vliv průměru potrubí** - když se částice usazuje v ohraničeném prostoru, např. v potrubí, jehož charakteristický rozměr je srovnatelný s rozměrem částice – obr. 17.4, potom sedimentační rychlost pro jednu částici vypočtenou pro nekonečně velký prostor je nutné násobit korekčním faktorem „k“. Pro malé hodnoty poměru  $d/D$  platí přibližná empirická rovnice

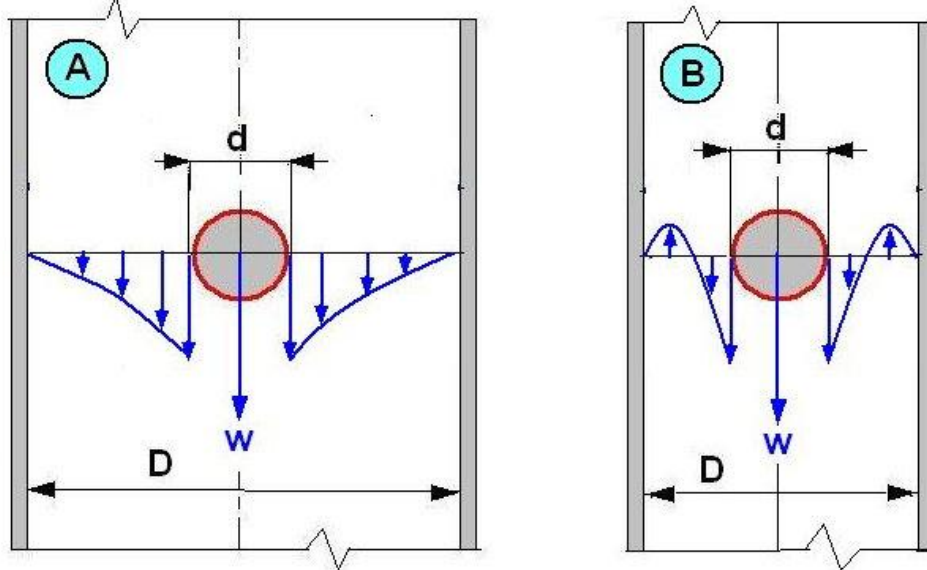
$$k = 1 - 2,104 \frac{d}{D}, \quad (17.10)$$

pro větší poměr  $d/D$  pak rovnice

$$k = \left(1 - \frac{d}{D}\right)^{2,35} \text{ nebo } k = \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2\right], \quad (17.11)$$

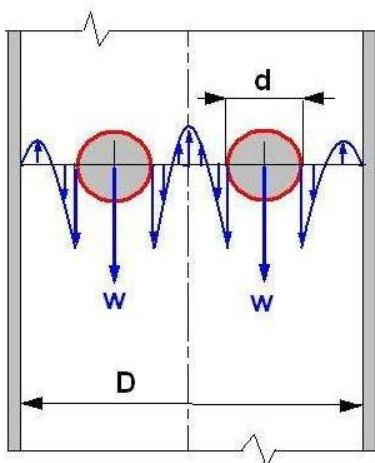
pro  $Re > 1000$  pak rovnice

$$k = 1 - \left(\frac{d}{D}\right)^{1,5} \quad (17.12)$$

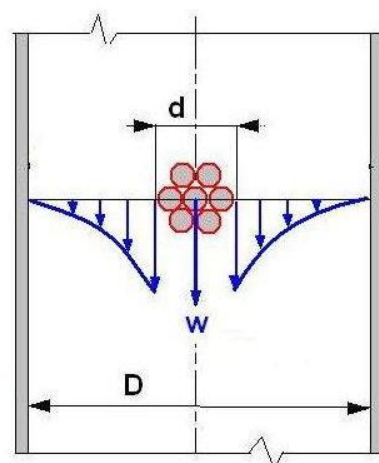


Obr. 17.4 Schéma omezeného usazování ve vertikální trubce  
a) neomezené prostředí b) omezené prostředí

**Vliv koncentrace** - při sedimentační rychlosti více částic se nemůže plně vyvinout rychlostní profil, jak je patrné z obr. 17.5 při padání dvou částic. Dalším důvodem zmenšené rychlosti je koagulace částic, sedimentační rychlost pak nezávisí na průměru samotné částice, ale na průměru shluku částic – obr. 17.6.



Obr. 17.5 Sedimentaci dvou částic



Obr. 17.6 Sedimentace shluku částic

Pro další aplikace má pochopitelně největší význam sedimentační rychlost mraku  $w_c$ . Znamená to, že sedimentační rychlost, vypočtenou již dříve podle rovnice (17.7), musíme ještě dále upravovat o vliv objemové koncentrace  $c_v$ . Vzorce, které určují hledanou opravu jsou rovněž převážně empirické a jejich platnost je omezena na lineární zákon odporu. Přehled těchto vztahů udává tabulka 17.1 spolu s rozmezím platnosti.

Tabulka 17.1 Vliv koncentrace suspenze na sedimentační rychlost

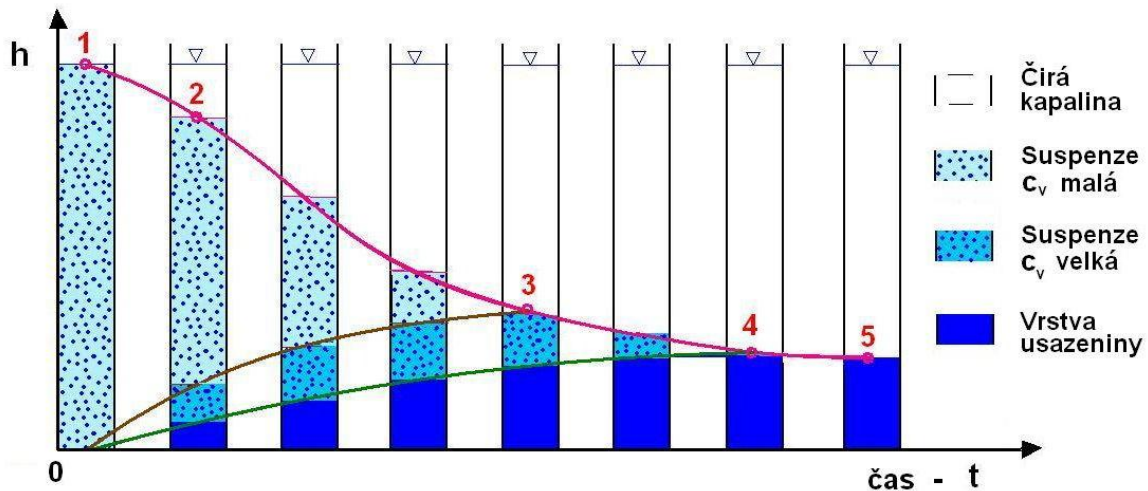
Číslo	Autor	Vzorec	Platnost	Poznámka
1	Loefler Ruth	$w_c = w \left[ \frac{1}{1-c_v} + \frac{2kc_v}{(1-c_v)^3} \right]^{-1}$	$c_v \leq 0,35$	k - exp. konstanta
2	Oliver	$w_c = w(1 - k_1c_v) \left( 1 - k_2c_v^{\frac{1}{3}} \right)$	$c_v \leq 0,4$	$k_1, k_2$ - exp. konstanta
3	Meikl	$w_c = 0,149w \frac{(1-c_v)^3}{c_v}$	$c_v \leq 0,4$	
4	Richardson Zaki	$w_c = w(1 - c_v)^m$	$c_v \leq 0,3$ $Re \leq 0,2$	$m = 4,8$
5	Robinson	$w_c = \frac{kd^2(\rho_p - \rho_v)}{\mu} g$		$\mu$ - viskozita suspenze k - konstanta
6	Rouse	$w_c = \frac{w}{b} \left[ 1 - \left( \frac{c_v}{a} \right)^{\frac{2}{3}} \right]$	$c_v \leq 0,4$	a, b - exp. konstanty
7	Steinour	$w_c = 0,123 \frac{w(1-c_w)^3}{c_v}$	$0,3 \leq c_v \leq 0,4$	
8	Thomas	$w_c = w \cdot \exp(-5,9c_v)$	$c_v \leq 0,43$	
9	Mande	$w_c = (1 - c_v)^\beta$		$\beta = f(Re_w)$

**Elektrické síly mezi částicemi** - pro částice s průměrem  $d < 100 \mu\text{m}$  se může výrazně projevit vliv elektrických sil. U částic s průměrem  $d < 1 \mu\text{m}$  zpravidla převládají elektrické odpudivé síly natolik, že znemožňují sedimentaci, jedná se o tzv. koloidní suspenze. Eliminace odpudivých sil změnou elektrického náboje částic se prakticky provádí přidávkem vhodného elektrolytu, nebo roztoku polymeru. Pak mezi částicemi převládá van der Waalsovy přitažlivé síly, začne docházet k tvorbě shluků, tzv. koagulaci nebo flotaci.

Ke koagulaci suspenze dochází přidáním látky, které narušují obalovou sféru kolem částice, vznikají přitažlivé síly, čímž se vytvářejí shluky částic. Tyto shluky mají pochopitelně větší charakteristický rozměr a proto se usazují rychleji. Obvyklými koagulanty jsou elektrolyty, nejčastěji roztoky solí, např. hliníku. Při flotaci dochází ke slepování částic, vytvářejí se tzv. vločky, tyto rychleji sedimentují. Jako flokulanty se používají polyakrylamid a aktivovaná kyselina křemičitá. Oba tyto způsoby se využívají při čištění vody.

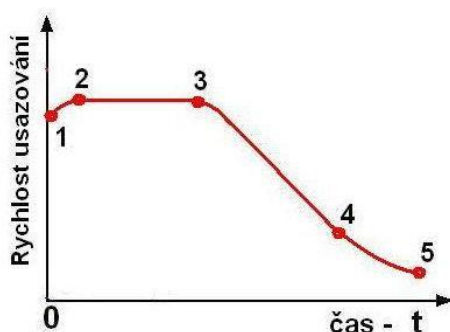
**Vliv nespojitosti prostředí** – pro sedimentaci částic jsme předpokládali spojitě prostředí, tato podmínka hlavně u plynu není splněna. U plynů je volná dráha molekul za atmosférického tlaku a pokojové teploty  $10^{-4}$  až  $10^{-5}$  mm, u kapalin pak  $10^{-7}$  mm. Pro vzduch za uvedených podmínek je volná dráha molekul  $\lambda = 0.8 \cdot 10^{-4}$  mm, potom hranice použitelnosti Stokesova zákona platí pro částice s průměrem  $d > 10 \mu\text{m}$ . Pro tuto oblast lze v literatuře vyhledat korekční faktory. U částic s průměrem  $d < 0,1 \mu\text{m}$  se začne projevovat vliv Brownova pohybu, částice se pohybují všemi směry a prakticky se neusazují.

Při usazování jemných koncentrovaných suspenzí vyjdeme z pokusu dle obr. 17.7. Ve skleněném válci pozorujeme usazování suspenze v čase, v suspenzi probíhá usazování částic a v horní části skleněného válce se začíná objevovat čistá voda, naopak na dně válce se začíná vytvářet vrstva usazeniny, těsně nad ní pak je vrstva koncentrované suspenze.

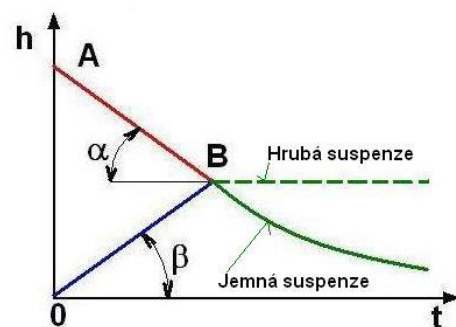


Obr. 17.7 Průběh usazování jemných částic u koncentrovaných suspenzí

Při grafickém vyhodnocení tohoto experimentu se dostane tzv. zahušťovací křivka – obr. 17.7. V oblasti 1-2 je pohyb rozhraní pomalý, oblast 2-3 je naopak pohyb s konstantní rychlostí. V bodě 3 se setká suspenze o původní koncentraci se suspenzí vysoce koncentrovanou, v oblasti 4-5 pak probíhá nejpomalejší část sedimentace. Časový průběh sedimentace je schématicky uveden na obr. 17.8, pohyb rozhraní při usazování jemných a hrubých suspenzí je na obr. 17.9



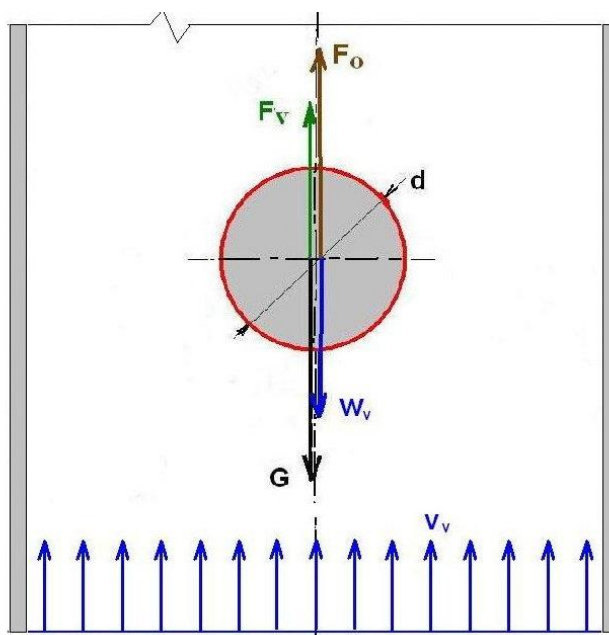
Obr. 17.8 Závislost rychlosti pohybu rozhraní na čase



Obr. 17.9 Pohyb rozhraní při usazování suspenzí

**Rychlost vznosu - vliv pohybu prostředí** - podle obr.17.10 je to taková rychlost kapaliny  $v_v$ , když pevná částice nacházející se v této kapalině se nepohybuje, tedy platí  $v_v = w_v$ . Při výpočtu sedimentační rychlosti jsme předpokládali, že kapalina stojí a pevná částice se vlivem tíhové síly pohybuje. Odlišné poměry budou v opačném případě, kdy kapalina bude proudit a pevná částice se bude pohybovat v tomto proudu kapaliny. Je-li proudění laminární,

potom sedimentace probíhá jako by kapalina se nepohybovala. Složitější je situace u proudění turbulentního.



Obr. 17.10 Rychlost vznosu

Sedimentaci podstatně ovlivňují vertikální fluktuační rychlosti. Největší vliv turbulence je na malé částice, jejichž rozměr je srovnatelný s velikostí turbulentních vírů. V tomto případě mohou částice sledovat fluktuační rychlosti tekutiny a sedimentace se nemusí uskutečnit. Protože ve většině případů je proudění vody i plynů turbulentní, nemusí být hodnota sedimentační rychlosti a rychlosti vznosu stejná. Pouze v oblasti laminárního obtékání jsou tyto dvě rychlosti tekutiny totožné. Prakticky se i v tomto případě rychlost vznosu počítá z rov. (17.2).



## 18. Proudění porézní vrstvou, fluidace, míchání

### 18.1. Filtrační proudění – Proudění porézní vrstvou

Vedle proudění tekutin potrubím se v technických úlohách vyskytuje i proudění tekutiny vrstvou zrnitého materiálu jako jsou písky, štěrky, zemina, katalyzátor, aktivní uhlí nebo vrstva tělísek, tzv. výplňová tělíska nejrůznějších tvarů. Když protéká vrstvou zrnitého materiálu pouze jedna tekutina, mluvíme o jednofázovém průtoku, v technických aplikacích jsou však i případy současného proudění plynu a kapaliny, pak mluvíme o dvoufázovém proudění. Pro další řešení bude vhodné definovat vlastnosti sypkého materiálu (porézní vrstvy).

**Mezerovitost** - předpokládejme, že sypká látka zaujímá objem  $V_p$ , objem pórů pak je  $V_v$ , celkový objem tj. objem materiálu včetně pórů pak je jejich součet

$$V_s = V_p + V_v.$$

Pomocí těchto objemů definujeme veličinu, tzv. objemovou koncentraci

$$c_v = \frac{V_p}{V_s} = \frac{V_p}{V_v + V_p} = \frac{\rho_s - \rho_v}{\rho_p - \rho_v}.$$

Podobně můžeme definovat tzv. mezerovitost nebo také koeficient pórovitosti

$$\varepsilon = \frac{V_v}{V_s} = 1 - c_v. \quad (18.1)$$

Koeficient mezerovitosti je vlastně objem pórů obsažených v objemové jednotce.

**Hydraulický průměr** - na vrstvu stejnorodého materiálu, vytvořenou například kuličkami stejného průměru, jejíž mezerovitost je konstantní, lze pohlížet jako na potrubí o velmi složitém tvaru, v němž objem tekutiny dělený omočeným povrchem materiálu je hydraulický průměr vrstvy materiálu, pro který platí

$$D_h = k \frac{V_v}{S_p} = k \frac{V_v}{V_p} \frac{V_p}{S_p},$$

kde  $k$  je konstanta úměrnosti.

Pro jednoduchost uvažujeme kulové částice potom pro poměr

$$\frac{V_p}{S_p} = \frac{\pi \cdot d^3 N}{6 \cdot \pi \cdot d^2 N} = \frac{d}{6},$$

kde  $N$  je počet částic.

Pro poměr

$$\frac{V_v}{V_p} = \frac{V_s - V_p}{V_p} = \frac{V_s}{V_p} - 1 = \frac{V_v}{V_p} \cdot \frac{1}{\varepsilon} - 1,$$

odkud

$$\frac{V_v}{V_p} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}.$$

S použitím posledních dvou rovnic pro hydraulický průměr platí

$$D_h = \frac{k}{6} \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} d,$$

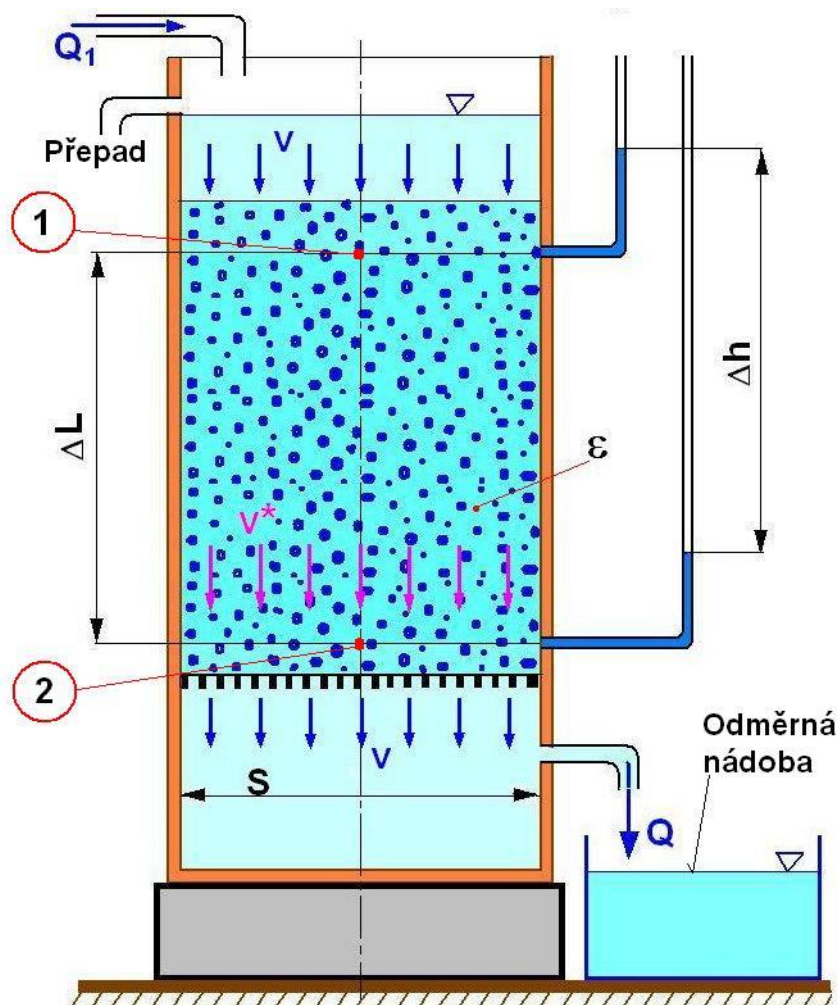
kde  $d$  je průměr částice materiálu - kuličky

Volíme-li  $k=6$ , což odpovídá předpokladu, že pro kouli o průměru  $d$  je  $D_h = d$ , potom

$$D_h = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} d. \quad (18.2)$$

Při řešení proudění pórovitým prostředím (porézní vrstvou) vyjdeme z klasického pojetí Darcyho. Mějme nádobu podle obr. 18.1, která je opatřena ve spodní části např. sítím, roštem, děrovanou deskou a pod. Na tuto přepážku uložíme sypký materiál, tento může být stejnozrný např. kuličky stejného průměru nebo i různozrný. Sypký materiál se

v nádobě náhodně uspořádá a mezi jednotlivými zrny vzniknou mezery, tyto nejsou izolované, ale jedna z druhou jsou vždy nějakým způsobem propojeny. Proto je v těchto mezerách možné proudění tekutiny a to jak kapalin tak i plynů. Přidáme-li do nádoby dle obr. 18.1 tekutinu, např. vodu, může tato kapalina mezi zrny v mezerách proudit jako důsledek působení gravitační síly.



Obr. 18.1 Odvození Darcyho filtračního zákona

Aby byla hladina kapaliny na konstantní výšce, je nádoba v horní části opatřena přepadem. V nádobě zvolíme dva průřezy označené 1 a 2 a do těchto míst na stěně nádoby přes vytvořené otvory ve stěně připojíme dva piezometry (skleněné trubičky). Pomocí odměrné nádoby budeme měřit objemový průtok kapaliny, který protéká vrstvou sypkého materiálu. Do horní části nádoby bude přitékat kapalina např. z vyznačeného potrubí s možností regulace průtoku kapaliny armaturou.

Při proudění tekutiny pórovitým prostředím můžeme definovat dvě rychlosti a to

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{dQ}{dS}, \quad (18.3)$$

kde  $S$  je plocha průřezu trubice.

Tato rychlost je stejně definovaná jako rychlost v potrubí, je to však rychlost fiktivní.

Dále můžeme definovat rychlost v pórech, pro kterou platí

$$v^* = \frac{Q}{S^*} = \frac{dQ}{dS^*}, \quad (18.4)$$

kde  $S^*$  je plocha pórů v příčném řezu trubkou. Pochopitelně platí, že  $v^* > v$ .

Definujme poměr těchto rychlostí

$$n = \frac{\frac{dQ}{dS^*}}{\frac{dS}{dQ}} = \frac{dS^*}{dS}, \quad (18.5)$$

kde  $n$  je tzv. plošná pórovitost.

Když vytkneme v sypkém materiálu hranol o základně  $dS$  a výšce „ $h$ “, pak jeho objem je

$$V = h \cdot dS.$$

V tomto objemu bude objem pórů

$$V_v = h \cdot dS^*,$$

potom pro koeficient pórovitosti

$$\varepsilon = \frac{V_v}{V} = \frac{h \cdot S^*}{h \cdot S} = \frac{S^*}{S} = n, \quad (18.6)$$

a mezi rychlostmi bude platit vztah

$$\varepsilon = \frac{v}{v^*} \Rightarrow v = \varepsilon \cdot v^*. \quad (18.7)$$

Sledujme proudění podle obr. 18.1, voda při průtoku přes sypký materiál musí překonat určitý odpor, který kladou zrna materiálu proudění. Proto v piezometrických trubicích hladina vody je nižší a nedosahuje hladiny vody nad vrstvou sypkého materiálu. Je-li proudění ustálené, pak protéká vrstvou sypkého materiálu průtok  $Q = \text{konst.}$  Na piezometrech při tomto průtoku naměříme rozdíl hladin  $\Delta h$  a piezometry jsou na trubici zapojeny ve vzdálenosti  $\Delta L$ . Poměr těchto dvou veličin je hydraulický spád

$$i = \frac{\Delta h}{\Delta L} = \frac{dh}{dL}. \quad (18.8)$$

Darcy na základě výše popsaného pokusu stanovil, že průtok tekutiny protékající vrstvou sypkého materiálu je definován vztahem

$$Q = k_f \cdot S \frac{\Delta h}{\Delta L} = k_f \cdot S \cdot i. \quad (18.9)$$

Z této rovnice pak pro rychlost proudění platí

$$v = \frac{Q}{S} = k_f \cdot i = k_f \frac{\Delta h}{\Delta L} = k_f \frac{dh}{dL}. \quad (18.10)$$

Toto je Darcyho filtrační rovnice. Koeficient  $k_f$  je koeficient filtrace a má rozměr rychlosti. Protože platí

$$\varepsilon = \frac{v}{v^*} \Rightarrow v = \varepsilon \cdot v^*,$$

potom pro rychlost v pórech platí rovnice

$$v^* = \frac{i}{\varepsilon} k_f \cdot i.$$

Porovnejme Darcyho zákon se zákonem Poiseuilleovým, pro který platí známá rovnice

$$i = \frac{h_z}{L} = \lambda \frac{1}{d} \frac{v^2}{2g} = \frac{64}{\text{Re}} \frac{1}{d} \frac{v^2}{2g} \Rightarrow v = \frac{g \cdot d^2}{31} i.$$

Pro Darcyho filtrační zákon byla odvozena rovnice

$$v = \varepsilon \cdot v^* = k_f \cdot i,$$

porovnáním posledních dvou rovnic pro součinitel filtrace dostaneme

$$k_f = \varepsilon \frac{g \cdot d^2}{32 \cdot v}. \quad (18.11)$$

Aby platil Darcyho filtrační zákon, musí být proudění v sypké hmotě laminární.

Pokusy ukázaly, že lineární závislost mezi rychlostí filtrace a hydraulickým spádem platí jen v určitých mezích. Přestoupí-li rychlost určitou velikost, začne platit kvadratický zákon, udávaný obvykle

$$i = Av + Bv^2,$$

nebo podle jiných autorů v následujícím tvaru

$$v = K \cdot i^{\frac{1}{n}},$$

kde A, B po případě K a „n“ jsou charakteristiky proudění stanovené experimentálně.

Hranice, kdy přestává platit Darcyho zákon je dána „kritickým“ Reynoldsovým číslem, které je uváděno v odborné literatuře. Přechod z laminárního proudění do turbulentního nenastává náhle, je velmi pozvolný. Provedená měření potvrzují, že převážná část inženýrských úloh leží v oblasti laminární filtrace, turbulentní proudění je méně časté.

**Ustálené filtrační proudění** - s přihlédnutím k rovnici (18.10) můžeme pro 3D ustálené filtrační proudění pro složky filtrační rychlosti psát

$$v_x = -k_f \frac{\partial h}{\partial x}; \quad v_y = -k_f \frac{\partial h}{\partial y}; \quad v_z = -k_f \frac{\partial h}{\partial z}. \quad (18.12)$$

Zavedeme-li veličinu  $\varphi$ , což je potenciál filtrační rychlosti, potom pro rychlost filtrace platí

$$v = \text{grad}\varphi,$$

kde  $v = i.v_x + j.v_y + k.v_z$  a gradient je definován rovnicí

$$\text{grad}\varphi = i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Porovnáme dvě poslední rovnice, při čemž využijeme pravidlo, že dva vektory se sobě rovnají, rovnají-li se složky, proto pro složky filtrační rychlosti platí

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (18.13)$$

Dále napíšeme rovnici spojitosti pro nestlačitelnou tekutinu

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \text{div}v = 0. \quad (18.14)$$

Dosadíme-li do rovnice spojitosti (18.14) za složky rychlosti z rov. (18.13) dostaneme

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi = 0$$

Vidíme, že funkce  $\varphi(x,y,z)$  splňuje Laplaceovu rovnici a je proto funkcí harmonickou. Dosadíme-li do rov. (18.14) složky rychlosti definované rov. (18.12) potom dostaneme

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \Delta h = 0. \quad (18.15)$$

Funkce  $h(x,y,z)$  je stejně jako funkce  $\varphi(x,y,z)$  funkcí harmonickou a můžeme ji řešit přímo řešením rovnice (18.15).

Z výše odvozených rovnic pro 3D proudění snadno přejdeme na rovinné 2D filtrační proudění, kde platí, že  $v_z = 0$ , rovnice budou mít tvar

$$v_x = -k_f \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = -k_f \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad v_z = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0. \quad (18.16)$$

Podobně upravíme rovnice filtrace pro jednorozměrné proudění

$$v_x = -k_f \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \quad (18.17)$$

Jednofázový průtok porézní vrstvou vedle klasického pojetí Darcyho, můžeme řešit tak, že při výpočtu tlakové ztráty (mechanické energie) vyjdeme z rovnice Darcy Weisbachovy,

$$e_z = g \cdot h_z = \frac{p_z}{\rho} = \lambda \frac{\Delta L}{d_h} \frac{v^{*2}}{2}.$$

Rovnici upravíme dosazením za hydraulický průměr podle rovnice (18.2), a průměrnou rychlost tekutiny – rov. (18.7). Za délku  $\Delta L$  dosadíme výšku vrstvy sypkého materiálu  $h$ , potom pro tlakový spád dostaneme rovnici

$$p_z = p_1 - p_2 = \lambda \frac{\Delta L}{D_h} \frac{v^{*2}}{2} \rho_v = \frac{\lambda}{2} \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \frac{h}{d} v^2 \cdot \rho_v = k^* \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \frac{h}{d} v^2 \cdot \rho_v, \quad (18.18)$$

kde  $k^* = \frac{\lambda}{2}$  je třecí součinitel při proudění tekutiny porézní vrstvou.

Tento je závislý na velikosti Reynoldsova čísla, které je definováno vztahem

$$Re = \frac{v^* \cdot D_h \cdot \rho_v}{\eta} = \frac{v_v \cdot d \cdot \rho_v}{\eta(1-\varepsilon)}. \quad (18.19)$$

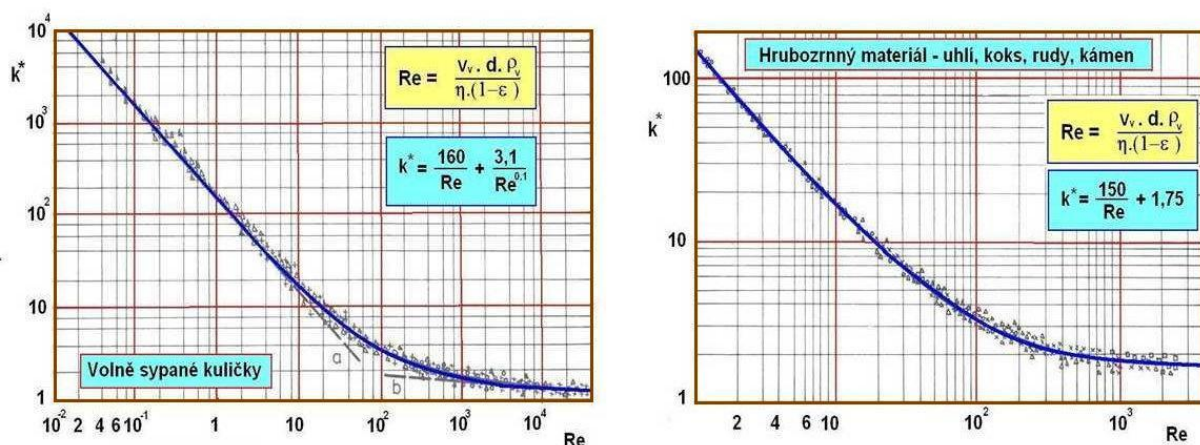
V oblasti malých hodnot  $Re \leq 10$  (plouživé proudění), kdy setrvačná síla je menší než síla třecí je možné třecí součinitel určit ze vztahu

$$k^* = \frac{A}{Re}, \quad (18.20)$$

naopak pro velká  $Re \geq 10$  je možné užít vztah

$$k^* = \frac{B}{Re^\beta}, \quad (18.21)$$

parametry  $A$ ,  $B$ ,  $\beta$  se musí stanovit měřením.



Obr. 18.2 Závislost  $k^* = f(Re)$

Pro oblast  $10 < Re < 2.10^3$  vystihuje dobře experimentální měření rovnice získaná součtem obou předcházejících rovnic

$$k^* = \frac{A}{Re} + \frac{B}{Re^\beta}. \quad (18.22)$$

Pro stejnozrnnou fluidní vrstvou vytvořenou z volně sypaných kuliček mají konstanty v rovnici (18.22) velikost :  $A = 160$ ,  $B = 3,1$ ,  $\beta = 0,1$ , závislost  $k^* = f(Re)$  uvádí obr. 18.2.

Pro vrstvou tvořenou z hrubozrnných materiálů, jako je např. koks, uhlí, rudy, drcený kámen, granuláty, tablety apod. mají konstanty velikost  $A = 150$ ,  $B = 1,75$ ,  $\beta = 0$  závislost  $k^* = f(Re)$  uvádí obr.18.2. V odborné literatuře jsou uváděny další rovnice pro výpočet ztrátového součinitele.

Pro částice obecného tvaru je třeba rovnici (18.18) dělit tzv. tvarovým součinitelem  $\delta$ , který je definován jako poměr povrch koule k povrchu obecné částice, jejíž objem je stejný jako objem koule.

$$\delta = \frac{S_k}{S_p} = \sqrt[3]{\frac{36 \pi V_p^2}{S_p^3}}, \quad (18.23)$$

kde  $S_k$  - povrch koule

$S_p$  - povrch obecné částice, jejíž objem je stejný jako je objem koule

Rovnice (18.6) pro obecnou částici bude mít tedy tvar

$$p_1 - p_2 = k^* \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon^3} \frac{h}{\delta \cdot d} v^2 \cdot \rho_v. \quad (18.24)$$

V praktických úlohách se často jedná o materiál různorodý, nestejnorodý, v takovém případě se za průměr částice „d“ vhodně definovaný ekvivalentní průměr, např. střední průměr definovaný z křivky zmitosti.

V technických aplikacích se vyskytuje filtrační proudění např. při proudění vody zeminou, proudění tekutiny pískovým filtrem, proudění kapaliny vrstvou filtračního koláče, proudění v náplňových aparátech a pod. Tvar tělísek tvořící náplň zařízení mohou být kuličky, plné nebo duté válečky, případně další tvary uvedené na obr. 18.3



Obr. 18.3 Vybrané tvary náplňových tělísek

Když se u náplňových aparátů předává teplo nebo se uplatňuje přenos hmoty, potom je vždy snaha, aby vrstva náplně měla co největší povrch na jednotku objemu, odtud plyne velká rozmanitost tvaru náplňových tělísek. Materiálem tělísek jsou plasty, ocel, grafit a celá řada dalších materiálů. Když se u náplňových aparátů předává teplo nebo se uplatňuje přenos hmoty, potom je vždy snaha, aby vrstva náplně měla co největší povrch na jednotku objemu tělísek, parametry tělísek udávají jejich výrobci.

## 18.2. Fluidace

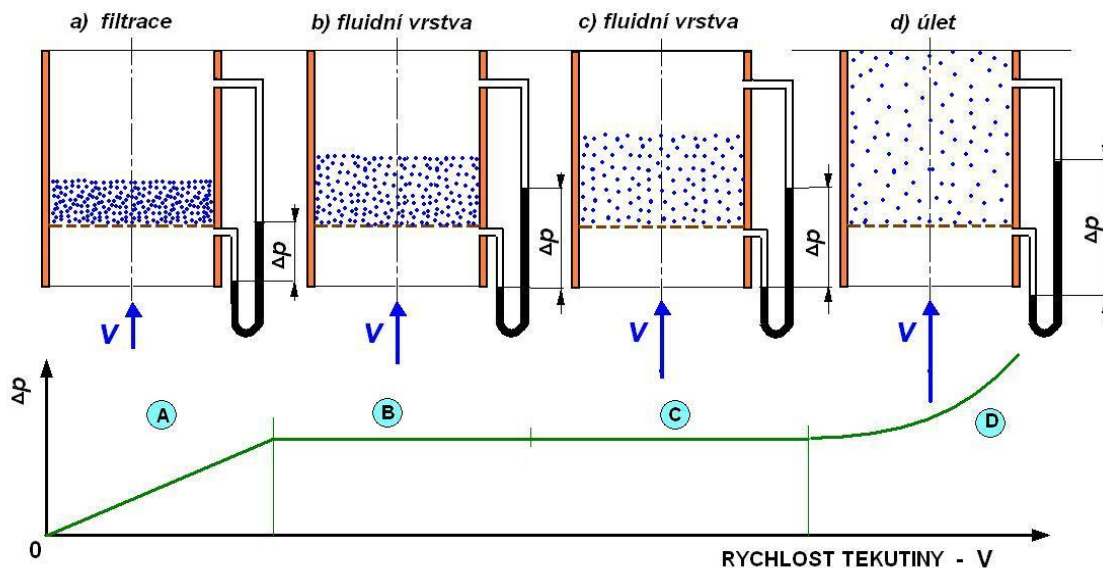
Jestliže budeme přivádět tekutinu pod pórovitou přepážkou, na které je vrstva sypkého materiálu, bude tento proudit póry mezi částicemi materiálu a po průchodu celou vrstvou bude tato dále proudit v potrubí nad vrstvou materiálu - obr. 18.4. Fluidace může být realizována s kapalinou i plynem, realizace s plynem je v technických aplikacích čtenější. V dalším textu bude proto proveden popis fluidace pro proudění plynu.

K průtoku plynu je nutný určitý rozdíl statických tlaků pod vrstvou a nad ní. Je-li průtočná rychlost plynu malá, zůstává vrstva materiálu v klidu - obr. 18.4A, jedná se o filtrační proudění. Se zvětšováním tlakového rozdílu vzrůstá i rychlost plynu a od určité hodnoty rychlosti začne dosud nehybná vrstva „narůstat“ - obr. 18.4B, vzroste mezerovitost, takže se částice vzájemně oddělí, aniž však nastane jejich pohyb. Při dalším zvětšování rychlosti začnou částice konat neuspořádaný pohyb, přičemž střední časová hodnota vektoru rychlosti je rovna nule, tzn., že těžiště vrstvy se nepohybuje. Příčinou tohoto pohybu je proudění plynu póry mezi částicemi materiálu. Prouděním plynu jsou částičky unášeny se snahou opustit vrstvu. Tím se ovšem zvětší velikost pórů ve vrstvě, v důsledku čehož



poklesne rychlost plynu a částice materiálu se ustálí v určité rovnovážné poloze. V okamžiku, kdy došlo k fluidaci získal materiál nové vlastnosti. Na povrchu se vytvoří vodorovná hladina, která je více nebo méně neklidná, lehké předměty na této hladině plavou a vrstva materiálu v důsledku oddělení jednotlivých částic a tím snížení vnitřního tření se chová jako tekutina. Dosažení těchto vlastností u vrstvy materiálu se nazývá provzdušnění nebo fluidace.

Průběh tlakového spádu ve vrstvě materiálu v závislosti na rychlosti proudění plynu je na obr. 18.4. Tlakový spád s rostoucí rychlostí plynu se nejdříve zvětšuje, samotná vrstva materiálu je však nehybná – obr. 18.4A, jedná se o případ filtračního proudění. Rychlost, při které začíná fluidace se nazývá prahová rychlost fluidace. Jakmile se vytvoří fluidní vrstva je tlakový spád konstantní, tj. nezávisí na rychlosti plynu – obr. 18.4B. Další zvětšování rychlosti má pouze vliv na tloušťku fluidní vrstvy materiálu, která se s rostoucí rychlostí plynu zvětšuje, to znamená, že se zvětšuje také mezerovitost – obr. 18.4C. Při dalším zvýšení rychlosti plynu nad rychlost vznosu (prahová rychlost úletu) jsou pevné částice materiálu unášeny ve směru proudu a tím přechází soustava do režimu pneumatické dopravy – obr. 18.4D. Fluidace je tedy přechodný stav mezi nehybnou vrstvou materiálu a unášením materiálu proudem plynu. Jsou-li všechny částice materiálu ve vrstvě stejné, např. kulové, potom v každém místě vrstvy jsou stejné podmínky a vzniká fluidace homogenní. V technické praxi mají dopravované částice nejrůznější tvar a velikost, dosažení homogenní fluidace je obtížné, někdy se ve vrstvě tvoří krátery, které fluidaci ztěžují nebo dokonce i znemožňují. U nestejně velkých částic se stává, že rychlost plynu je větší než rychlost vznosu nejmenších částic, které pak jsou unášeny z fluidní vrstvy ven.



Obr 18.4 Provzdušněná vrstva materiálu

Fluidní vrstva se svým chováním podobá kapalině, na tělesa ponořená do fluidní vrstvy působí vztlačová síla, lehčí tělesa plavou na vrstvě, když se skloní nádoba potom hladina fluidní vrstvy zůstává vodorovná. Z fluidní vrstvy je možné hrdly materiál kontinuálně odvádět, je možné realizovat pohyb vrstvy ve skloněných žlebech.

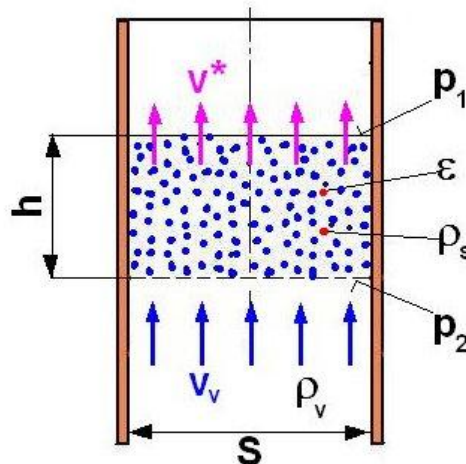
Při ustáleném průtoku se může vytvořit rovnoměrná (homogenní) fluidní vrstva, koncentrace částic v každém místě je nezávislá na čase a pohyb částic má náhodný charakter. Vrstva fluidizovaná kapalinou zůstává homogenní až prakticky do úletové rychlosti, naopak pro fluidizovanou vrstvu plynem jsou poměry ve vrstvě složitější. Při průtoku plynu přes vrstvu se mohou tvořit bubliny, tyto se mohou spojovat a vytvářet bubliny větší, tyto mohou dosahovat průměru nádoby, pohyb může být pístový, mohou se vytvářet i kanálky, které prostupují celou fluidní vrstvou, z hladiny fluidní vrstvy mohou prudce vyskakovat částice materiálu, které se však vrací zpět do mezní vrstvy.

Ve fluidní vrstvě je přenos tepla i hmoty velmi intenzivní, rozložení teploty i koncentrace je rovnoměrné, přestup tepla mezi fluidní vrstvou a vestavěným výměníkem je intenzivní, do fluidní vrstvy je možné kontinuálně přivádět nebo z fluidní vrstvy odvádět pevné částice, fluidní vrstva nemá pohyblivé části, proto je konstrukčně zařízení jednoduché. U fluidní vrstvy se musí přihlídnout ke skutečnosti, že pevné částice se v ní nemusí zdržet všechny stejně dlouho, pevné částice mohou být z hlediska průměru částic degradovány a takto vzniklé malé částice jsou z fluidní vrstvy vynášeny, dále je třeba také počítat z větší abrazi ve fluidní vrstvě.

Pro výpočet tlakového spádu při proudění fluidní vrstvou můžeme použít rovnice odvozené pro proudění porézní vrstvou – rov. (18.18)

$$p_1 - p_2 = k^* \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon^3} \frac{h}{d} v_v^2 \rho_v, \quad (18.18)$$

označení ostatních veličin je patrné z obr. 18.5



Obr. 18.5 Označení veličin ve fluidní vrstvě

Třecí součinitel  $k^*$  je závislý na Reynoldsově čísle, které je určeno rov. (18.19)

$$Re = \frac{v^* \cdot d_h \cdot \rho_v}{\eta} = \frac{v_v \cdot d \cdot \rho_v}{\eta \cdot (1 - \varepsilon)}. \quad (18.19)$$

Pro výpočet  $k^*$  je možné použít rovnice (18.20) až (18.21) nebo obr. 18.3. Pro nesterjnorodný materiál je možné tlakový spád vypočítat z rov. (18.24)

$$p_1 - p_2 = k^* \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon^3} \frac{x}{\delta \cdot d} v_v^2 \rho_v. \quad (18.24)$$

V praktických úlohách se často jedná o materiál různorodý, nesterjnorodný, v takovém případě se za průměr částice „d“ považuje vhodně definovaný ekvivalentní průměr, např. střední průměr vypočtený z křivky zrnitosti.

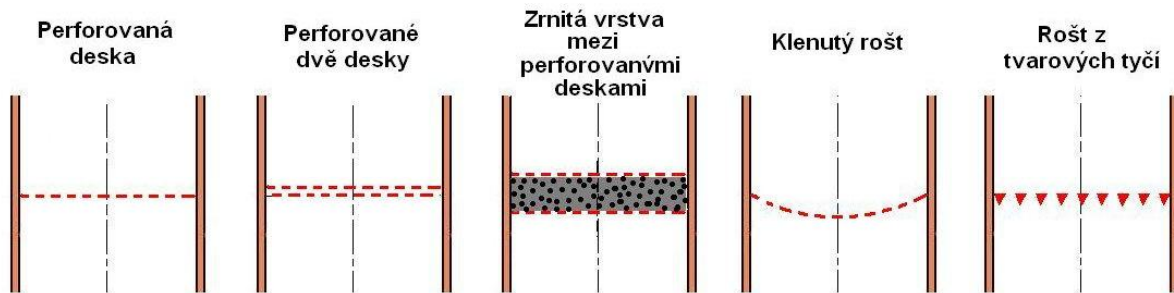
**Minimální rychlost plynu**, při které nastane fluidace materiálu, se stanoví z podmínky, že tíhová síla materiálu musí být v rovnováze se silou tlakovou, tzn., že platí

$$(p_1 - p_2) S = (1 - \varepsilon) (\rho_p - \rho_v) g \cdot S \cdot x.$$

S použitím rovnice (18.24) pro minimální rychlost plynu dostaneme

$$v_{v \min} = \sqrt{\varepsilon^3 \frac{\rho_p - \rho_v}{\rho_v} \cdot \frac{g \cdot \delta \cdot d}{k^*}}. \quad (18.25)$$

Maximální rychlost fluidace je totožná s rychlostí vznosu částice materiálu, poněvadž při větší rychlosti je materiál proudem plynu unášen a fluidní vrstva materiálu se mění na pneumatickou dopravu ve vznosu.



Obr. 18.6 Některé vybrané typy roštu pro fluidaci

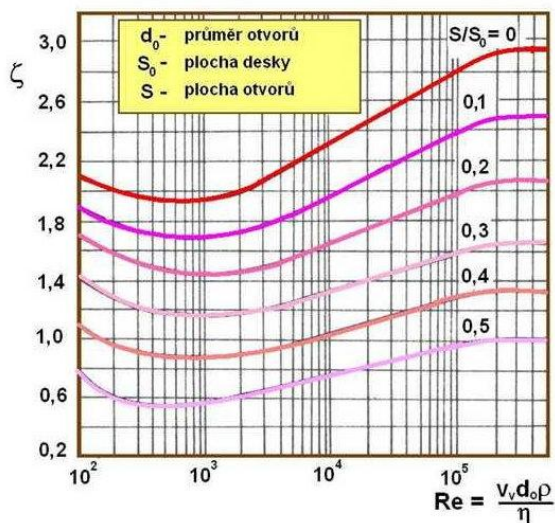
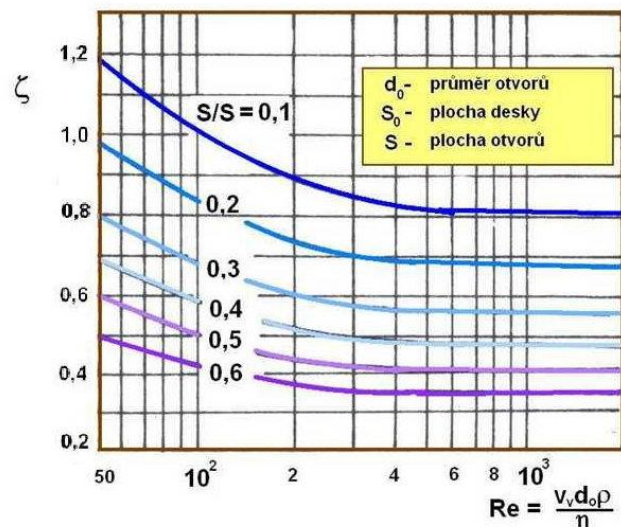
Pro uskutečnění fluidace materiálu je důležitá pórovitá přepážka - rošt, která slouží jednak jako ložná plocha pro materiál a jednak umožňuje vhodné rozptýlení provzdušňovacího plynu do vrstvy. Používají se různá síta, děrované plechy, textilní tkaniny, keramika apod., některá řešení uvádí obr. 18.6.

Průtokem plynu pórovitou přepážkou vzniká tlakový spád, který se určí z rovnice

$$\Delta p = k^{**} \cdot \frac{L}{d_h} \cdot \frac{v_v^2}{2} \cdot \rho_v = \zeta \frac{v_v^2}{2} \rho_v \quad (18.26)$$

kde  $k^{**}$  - je třecí součinitel, tento je závislý na velikosti Reynoldsova čísla a pro různé druhy přepážek se určuje experimentálně.

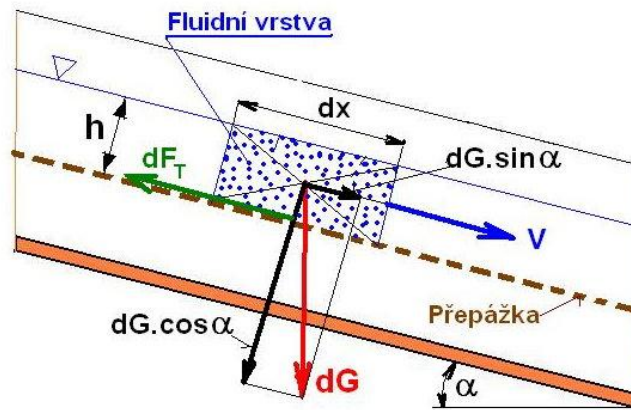
Protože se těžko definuje tloušťka roštu, pro výpočet tlakového spádu se asi použije pravá část rov. (18.26). Ztrátový součinitel je i v tomto případě stanoven měřením – obr.18.7 a obr.18.8. Celkový tlakový spád potřebný pro proudění přes fluidní vrstvu je dán součtem rovnice (18.24) a (18.26).

Obr. 18.7 Závislost  $\zeta = f(\text{Re})$  pro perforovanou deskuObr.18.8 Závislost  $\zeta = f(\text{Re})$  pro síto

Vlastností fluidní vrstvy se využívají s výhodou k dopravě sypkého materiálu tzv. pneumatickými žlaby. Je to mírně skloněný žlab, který je podélnou pórovitou přepážkou rozdělen na dva prostory. Na přepážku do horního prostoru je přiváděn dopravovaný materiál, do spodního prostoru je přiváděn dopravní plyn, který proniká přes pórovitou přepážku do vrstvy materiálu, kterou fluidizuje. Vrstva materiálu vlivem sklonu žlabu začne proudit jako kapalina v otevřeném skloněném korytě.

Rychlost proudění materiálu určíme z rovnováhy sil podle obr. 18.8. Za ustáleného stavu musí být v rovnováze složka tíhové síly se silou třecí.

$$dF_T = dG \sin \alpha$$



Obr. 18.9 Schéma proudění fluidní vrstvy materiálu ve žlabu

Pro rychlost materiálu za ustáleného stavu dostaneme

$$v = \sqrt{\frac{8g}{k^*}} \sqrt{r_h \operatorname{tg} \alpha} = \sqrt{\frac{8g}{k^*}} \sqrt{r_h i}, \quad (18.27)$$

což je obdoba rovnice Chézyho. Součinitel  $k^*$  je závislý hlavně na druhu dopravovaného materiálu, hydraulickém poloměru, na poměrném sklonu žlabu a obvykle se určuje experimentálně.

Dopravní výkon pneumatickými žlaby se určí z rovnice kontinuity

$$Q_{np} = bhv_{pk}(1 - \varepsilon)\rho_p. \quad (18.28)$$

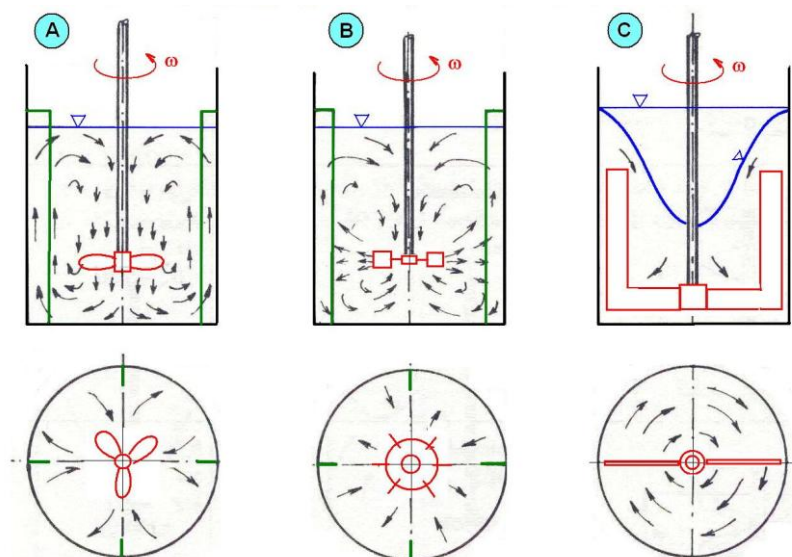
### 18.3. Míchání

Pro urychlení procesu výměny tepla a hmoty (látky) v kapalném prostředí se používá míchání, které lze realizovat různými způsoby:

Mechanické míchání – používají se obvykle mechanická rotační míchadla, která vytvářejí v nádobě nucené proudění.

Pneumatické míchání – jsou obvykle provedena tak, že do spodní části nádoby je přiveden vhodným zařízením plyn, tento v kapalině vytvoří bubliny. Stoupající bubliny strhávají k pohybu okolní kapalinu, čímž dochází k míchání.

Hydraulické míchání – je provedeno pomocí ponořených trysek, proud kapaliny vytékající z těchto trysek vytlačuje a strhuje okolní kapalinu a tím dochází k míchání.

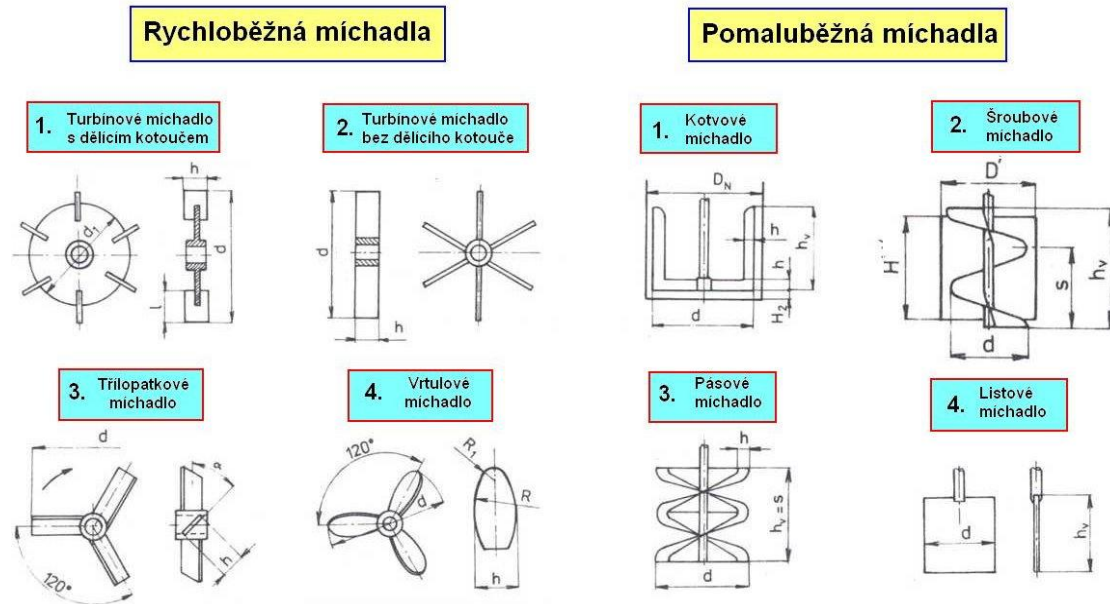


Obr.18.10 Schéma proudění v nádobě s rotačním míchadlem



Při turbulentním proudění dvou kapalin např. v potrubí je míchání mnohem intenzivnější než při proudění laminárním. U praktických realizací se nejčastěji používají míchadla mechanická s rotačním pohybem, jejich provedení je na obr. 18.10, nádoby s míchadlem mohou být opatřeny narážkami. Míchadlo se umísťuje do nádoby obvykle centricky, při tomto řešení se v nádobě bez zarážek vytváří středový vír, který snižuje intenzitu míchání. Míchadlo umístěné mimo osu nádoby, popřípadě šikmo k ose nádoby zamezuje vzniku víru. Některé vybrané typy pomaluběžných a rychloběžných míchadel uvádí následující obrázek obr. 18.11.

Proudové a tlakové pole při míchání kapalin je popsáno Navierovou-Stokesovou rovnicí a rovnicí spojitosti. Analytické řešení této soustavy dvou parciálních diferenciálních rovnic vzhledem ke složitosti sledovaného systému není zpravidla možné. Při praktických úlohách se provádí numerické řešení, nebo se úloha řeší experimentálně.

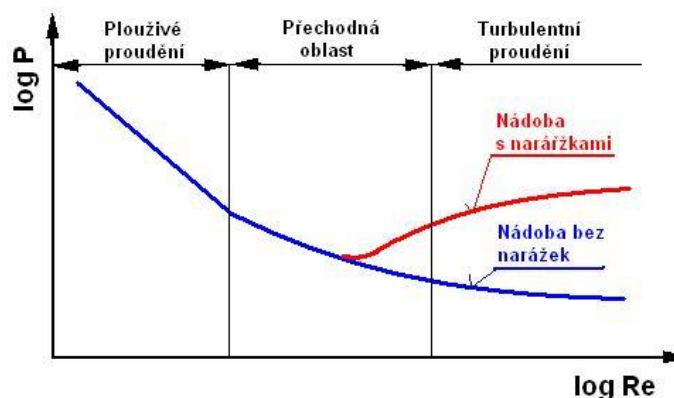


Obr.18.11 Vybraná provedení míchadel

Účinkem mechanického míchadla vzniká v nádobě axiální i radiální proudění, na míchadlo můžeme proto pohlížet jako na čerpadlo. Proto může být průtok kapaliny vyvolaný míchadlem považován za jednu z charakteristických veličin charakterizujících účinnost míchadel. Pro řešení příkonu míchadla definujeme Reynoldsovo číslo rovnicí

$$Re = \frac{n \cdot d^2 \cdot \rho}{\eta}, \quad (18.29)$$

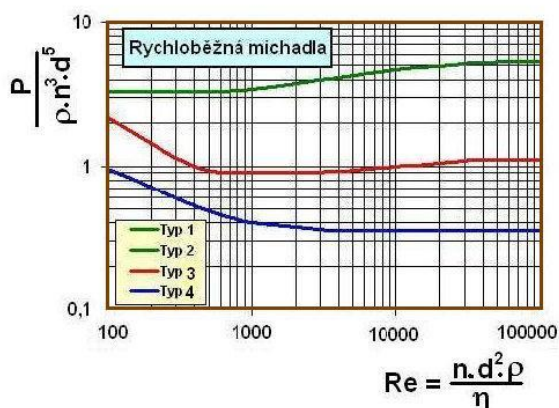
kde  $n$  – otáčky míchadla  
 $d$  – průměr míchadla



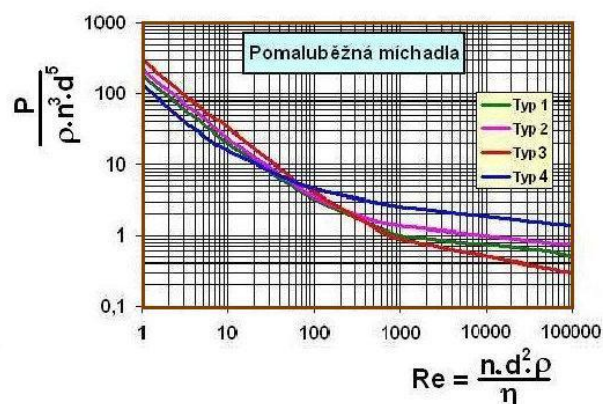
Obr. 18.12 Typický průběh příkonové charakteristiky

Podle experimentálních měření je typická závislost příkonu míchadla  $P = f(\text{Re})$  uvedena na obr.18.12, tato závislost se také nazývá příkonová charakteristika míchadla.

Pro závislost  $P = f(\text{Re})$  literatura uvádí empirické rovnice, nebo jsou výsledky experimentů uváděny graficky, např. obr. 18.12 nebo obr. 18.13. Uváděný typ míchadla v obrázcích odpovídá označení uvedeném na obr. 18.11.



Obr.18.13 Příkonová charakteristika pomaluběžných míchadel



Obr.18.14 Příkonová charakteristika vybraných vybraných rychloběžných míchadel

Obdobné příkonové charakteristiky uvádí literatura i pro míchání neneutonských kapalin. Tak např. při míchání suspenze voda – uhlí ve válcovém zásobníku průměru 38 m, výšky 25,4 m mělo vrtulové míchadlo průměr 9 m a při otáčkách 7 ot/min. byl příkon 370 kW.



## 19. Fyzikální podobnost a teorie modelování

### 19.1. Hydrodynamická podobnost při proudění tekutin

Experimentální práce v hydraulické laboratoři je velmi významnou složkou výzkumné práce. Zkoumají se modely nejrůznějších strojů a zařízení, aby se poznaly jejich základní vlastnosti nebo zjistily a opravily vady, ověřují se teoretické předpoklady návrhu či projektu a velmi často se pokusně zjišťují vzájemné závislosti zúčastněných veličin.

Výsledky získané na modelu se pak přepočítávají na skutečné zařízení, tzv. dílo. Prozkoumání jevu na modelu umožňuje také zavést opravné součinitele do teoreticky odvozených rovnic, jejichž řešení bylo založené na zjednodušujících předpokladech (aby se matematické řešení usnadnilo nebo zjednodušilo), které se však od skutečných poměrů částečně odchyľují. V některých složitých případech, které nejsou dosud teoreticky řešitelné, se experimentem získávají pro praxi potřebné vztahy veličin.

Model se zhotovuje téměř vždy menší než dílo, proto je levnější, lehčí, manipulace s ním je snadnější, výroba modelu kratší a lze experimentovat v laboratořích. Menší náklady umožňují vyšetřovat na modelu několik alternativ a provádět úpravy během experimentování.

Základní metody teorie podobnosti jsou:

- rozměrová – dimenzionální analýza
- podobnost z rovnic matematické teorie problému
- matematická podobnost

Zákony podobnosti lze odvodit z teorie rozměrovosti (dimenzionální analýzy, nebo ze základních diferenciálních rovnic matematické teorie daného jevu a jejich určovacích tj. počátečních a okrajových podmínek – tab. 19.1.

Tab. 19.1 Základní druhy fyzikální podobnosti

č.	Základní druhy podobnosti	Typická vlastnost podobnosti	Další nová fyzikální veličina a její rozměr
1	Geometrická podobnost	Úměrnost délek	L - délka [m]
2	Kinematická podobnost	Úměrnost časů	t - čas [s]
3	Dynamická podobnost	Úměrnost sil	m - hmotnost [kg]
4	Teplotní podobnost	Úměrnost teplot	$\Delta t$ - teplotní rozdíl [deg]
5	Chemická podobnost	Úměrnost koncentrací	

Pozn. : kinematická a dynamická podobnost tvoří společně podobnost mechanickou.

Splnění podmínek geometrické a kinematické podobnosti je obvykle snadné, složitější bývá splnění dynamické podobnosti. Jsou-li splněny všechny tři výše uvedené podmínky, potom mluvíme o úplné fyzikální podobnosti. Tato se dá splnit prakticky pouze při měření na díle, při měření na modelech se musí počítat, že její platnost je téměř vždy omezená.

Výsledky měření na modelu, mají-li splnit svůj úkol, je nutno přepočítat na skutečné provedení – dílo, což se provádí na základě poznatků teorie fyzikální podobnosti. Fyzikální podobnost stanoví podmínky, za kterých je zkoumaný jev na modelu fyzikálně podobný jevu ve skutečném provedení – díle. Úplná fyzikální podobnost je splněna tehdy, když jsou současně splněny následující tři podmínky:

1. **geometrická podobnost.** Tato vyžaduje, aby poměr odpovídajících délek na modelu a na díle byl konstantní a úhly stejné

$$\left( \frac{L_1}{L_2} \right)_{Model} = \left( \frac{L_1}{L_2} \right)_{Dílo} = konst. \quad (19.1)$$

2. **kinematická podobnost.** Tato podobnost vyžaduje, aby poměr odpovídajících rychlostí a zrychlení na modelu a díle byl konstantní

$$\left( \frac{v_1}{v_2} \right)_{Model} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)_{Dílo} = konst. \quad (19.2)$$

3. **dynamická podobnost.** Proudění tekutin je pohyb hmotných částic, podle klasické Newtonovy mechaniky jsou příčinou pohybu síly. Při proudění na modelu a na geometricky podobném díle musí být Navierova –Stokesova rovnice modelu a díla shodné. Odtud plyne, že poměr libovolných, ale navzájem si odpovídajících sil téhož druhu musí být stejný, jinak řečeno dynamická podobnost vyžaduje, aby poměr odpovídajících sil na modelu a na díle byl konstantní

$$\frac{\text{Libovolná síla na modelu}}{\text{Odpovídající síla na díle}} = konst.$$

Tato definice se dá odvodit z následující úvahy. Rovnováha sil v proudící tekutině je určena Navierovou-Stokesovou rovnicí, kterou zapíšeme pro model i dílo formálně ve tvaru

$$F_{sM} = F_{gM} + F_{pM} + F_{tM}; \quad F_{sD} = F_{gD} + F_{pD} + F_{tD} \quad (19.3)$$

Fyzikální podobnost modelu a díla dovoluje převést Navierovu-Stokesovu rovnici pro model na tvar

$$\left[ \frac{F_{sM}}{F_{sD}} \right] F_{sD} = \left[ \frac{F_{gM}}{F_{gD}} \right] F_{gD} = \left[ \frac{F_{pM}}{F_{pD}} \right] F_{pD} = \left[ \frac{F_{tM}}{F_{tD}} \right] F_{tD} \quad (19.4)$$

Je-li obtékání modelu a geometricky podobného díla fyzikálně podobné, musí být Navierova-Stokesova rovnice modelu i díla shodná, proto musí být všechny členy v hranatých závorkách u předcházející rovnice stejně velké, takže platí

$$\frac{F_{sM}}{F_{sD}} = \frac{F_{gM}}{F_{gD}} = \frac{F_{pM}}{F_{pD}} = \frac{F_{tM}}{F_{tD}} \quad (19.5)$$

Tato definice vyžaduje úměrnost všech sil modelu a fyzikálně podobného díla bez ohledu na původ, velikost i směr těchto sil a vztahuje se na všechny síly modelu a díla ať působí v bodě, přímce, rovině nebo prostoru. Proto představuje podmínku dynamické podobnosti nejen v mechanice tekutin, ale v celé fyzice.

Tlakové síly v Navierově-Stokesově rovnici se skládají ze tří složek a to složka tlaku nezávislá na stlačitelnosti tekutiny –  $F_p$ , složka tlaku závislá na stlačitelnosti (pružnosti) tekutiny –  $F_e$  a kapilární tlak na zakřivené volné hladině tekutiny –  $F_k$ . S přihlédnutím k této skutečnosti se rov. (21.5) upraví

$$\frac{F_{sM}}{F_{sD}} = \frac{F_{gM}}{F_{gD}} = \frac{F_{pM}}{F_{pD}} = \frac{F_{eM}}{F_{eD}} = \frac{F_{kM}}{F_{kD}} = \frac{F_{tM}}{F_{tD}}$$

Tuto rovnici lze psát jako soustavu jednodušších současně platných rovnic, např. ve tvaru dvojic

$$\frac{F_{sM}}{F_{sD}} = \frac{F_{gM}}{F_{gD}}; \quad \frac{F_{sM}}{F_{sD}} = \frac{F_{pM}}{F_{pD}}; \quad \frac{F_{sM}}{F_{sD}} = \frac{F_{eM}}{F_{eD}}; \quad \frac{F_{sM}}{F_{sD}} = \frac{F_{kM}}{F_{kD}}; \quad \frac{F_{sM}}{F_{sD}} = \frac{F_{tM}}{F_{tD}} \dots$$

Předpokládejme, že na daný problém působí pouze dvě síly  $F_1$  a  $F_2$ , potom podle předcházející definice můžeme pro poměr sil psát

$$\frac{F_{1M}}{F_{1D}} = \frac{F_{2M}}{F_{2D}} = konst \Rightarrow \left( \frac{F_1}{F_2} \right)_M = \left( \frac{F_1}{F_2} \right)_D = konst. \quad (19.6)$$

tuto rovnici pak použijeme v dalším textu pro odvození podobnostních čísel v mechanice tekutin.

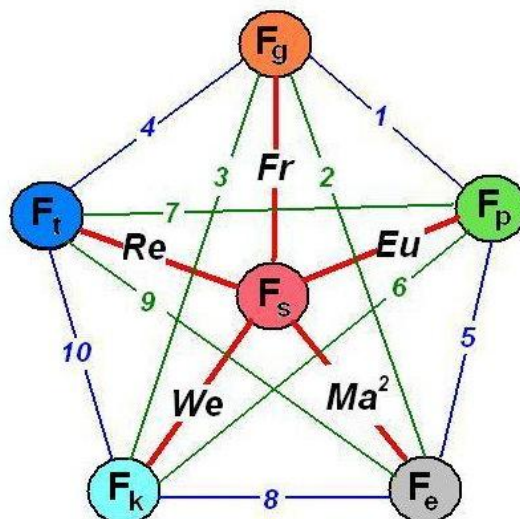
V mechanice tekutin se vyskytuje mnoho sil, vyberme ze všech pouze ty, které se nejčastěji vyskytují, je to šest sil, které byly definovány pomocí rovnice Navierovy – Stokesovy. K těmto silám přidáme ještě sílu impulzní a tyto síly jsou přehledně uspořádány v následující Tab. 19.2. V této tabulce první dvě síly a poslední síla patří do kategorie sil objemových, zbývající čtyři síly pak do kategorie sil plošných.

Tabulka 19.2 Přehled vybraných sil , které se vyskytují v mechanice tekutin

Číslo	Název síly	Definice síly	Síla
1	Síla setrvačná	$F_s = m.a$	$F_s \approx \rho L^2 v^2$
2	Síla tíhová - tíha	$F_g = mg \approx$	$F_g \approx \rho g L^3$
3	Síla tlaková	$F_p = p.S$	$F_p \approx \rho L^2$
4	Síla kompresní-pružnostní	$F_d = \Delta p_d . S = \frac{\Delta V}{V} K . S$	$F_d \approx \rho . L^2 a^2$
5	Síla kapilární	$F_k = \sigma . L$	$F_k \approx \sigma . L$
6	Síla třecí	$F_t = \tau . S$	$F_t \approx \eta . L . v$
7	Síla impulsní	$F_h = m \frac{\Delta v}{t} = Q_m \Delta v$	$F_h \approx \frac{\rho L^3 v}{t}$

Pro  $n$  sil je možno sestavit  $\binom{n}{2}$  kritérií fyzikální podobnosti (poměr dvou sil), z čehož

polovina je na sobě nezávislá. Prvních 6 základních sil odvozených z Navierovy-Stokesovy rovnice podle této tabulky dává tedy patnáct různých kombinací druhé třídy bez opakování, tj. patnáct základních zákonů dynamické podobnosti, určených libovolnou dvojicí ze šesti zvolených druhů sil. Těchto patnáct základních zákonů dynamické podobnosti uvádí obr. 19.1 a můžeme je rozdělit do dvou skupin. První skupinu tvoří pět základních zákonů dynamické podobnosti v proudění závislých na setrvačnosti (setrvačné síle) tekutiny, jsou to zákony Frouduv, Eulerův, Machův, Weberův a Reynoldsův. V obr. 19.1 jsou tyto vazby podobnostních čísel vyznačeny silnou červenou čarou.



Obr. 19.1 Grafické znázornění souvislosti podobnostních čísel v mechanické podobnosti

Druhou skupinu tvoří deset nepojmenovaných základních zákonů dynamické podobnosti v mechanice tekutin nezávislých na setrvačnosti (setrvačné síle) tekutiny. V obr. 19.1 jsou

tyto vazby podobnostních čísel vyznačeny slabou modrou nebo zelenou čarou a jsou rovněž označeny číslem jedna až deset.

V další části textu jsou probrány všechny důležité varianty podobnostních čísel užívaných v mechanice tekutin, jejich definice jsou v dalším textu podrobně odvozeny.

### Síla setrvačná – $F_s$ a třecí – $F_t$

Podle rovnice (19.6) poměr setrvačné a třecí síly na modelu i díle je konstantní

$$\left(\frac{F_s}{F_t}\right)_M = \left(\frac{F_s}{F_t}\right)_D = konst$$

Po dosazení za jednotlivé síly je-li  $\frac{\eta}{\rho} = \nu$  dostaneme

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho L^2 \nu^2}{\eta L \nu}\right)_M &= \left(\frac{\rho L^2 \nu^2}{\eta L \nu}\right)_D \\ \left(\frac{\nu L}{\nu}\right)_M &= \left(\frac{\nu L}{\nu}\right)_D \Rightarrow Re_M = Re_D \end{aligned} \quad (19.7)$$

Zlomek

$$Re = \frac{\nu L}{\nu} \quad (19.8)$$

je Reynoldsovo číslo. Výraz na levé straně rovnice (19.7) je Reynoldsovo číslo na modelu a na pravé straně pak Reynoldsovo číslo na díle. Podobnost je v tomto případě splněna tehdy, jsou-li Reynoldsova čísla na modelu a na díle stejná -  $Re_M = Re_D$ .

Reynoldsovo kritérium se uplatňuje při laminárním i turbulentním proudění tekutin v potrubí, při obtékání těles apod. Patří k nejznámějšímu kritériu v mechanice tekutin.

### Síla tlaková – $F_p$ a setrvačná – $F_s$

Podle rovnice (19.6) poměr tlakové a setrvačné síly na modelu i díle je konstantní

$$\left(\frac{F_p}{F_s}\right)_M = \left(\frac{F_p}{F_s}\right)_D = konst$$

Po dosazení za jednotlivé síly a po úpravě

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho L^2}{\rho l^2 \nu^2}\right)_M &= \left(\frac{\rho L^2}{\rho l^2 \nu^2}\right)_D, \\ \left(\frac{\rho}{\rho \nu^2}\right)_M &= \left(\frac{\rho}{\rho \nu^2}\right)_D \Rightarrow Eu_M = Eu_D \end{aligned} \quad (19.9)$$

Zlomek

$$Eu = \frac{\rho}{\rho \nu^2} \quad (19.10)$$

je Eulerovo číslo. Výraz na levé straně rovnice (19.9) je Eulerovo číslo na modelu a na pravé straně pak Eulerovo číslo na díle. Podobnost je v tomto případě splněna tehdy, jsou-li Eulerova čísla na modelu a na díle stejná -  $Eu_M = Eu_D$ .

Fyzikálně shodné je kritérium Newtonovo

$$Ne = \frac{F_p}{\rho \nu^2}. \quad (19.11)$$

Fyzikálně shodné je i kritérium Stokesovo

$$St = \frac{F_p}{\eta \cdot l \cdot v} \quad (19.12)$$

Analogické s Eulerovým číslem je číslo Hedströmovo, které se uplatňuje při proudění neneutonských kapalin.

$$He = \frac{\tau_p}{\rho \cdot v^2} \quad (19.13)$$

kde  $\tau_p$  je počáteční napětí v Binghamově kapalině (ideálně nebo skutečně plastické).

Poslední tři jmenovaná podobnostní čísla vyjadřují stejnou fyzikální podobnost, rozdíl je pouze v tlakových silách. U Eu-čísla je uveden tlak, u Ne-čísla pak tlaková síla.

Eulerovo kritérium se uplatňuje při obtékání těles, tvarový odpor, tlaková ztráta v potrubí, při proudění neneutonských tekutin .

### Síla setrvačné – $F_s$ a tíha – $F_g$

Podle rovnice (19.6) poměr setrvačné a tíhy na modelu i díle je konstantní

$$\left( \frac{F_s}{F_g} \right)_M = \left( \frac{F_s}{F_g} \right)_D = konst$$

Po dosazení za jednotlivé síly a úpravě

$$\begin{aligned} \left( \frac{\rho L^2 v^2}{\rho g L^3} \right)_M &= \left( \frac{\rho L^2 v^2}{\rho g L^3} \right)_D \\ \left( \frac{v^2}{gL} \right)_M &= \left( \frac{v^2}{gL} \right)_D \Rightarrow Fr_M = Fr_D \quad (19.14) \end{aligned}$$

Zlomek

$$Fr = \frac{v^2}{gL} \quad (19.15)$$

je Froudovo číslo, které se také zapisuje ve tvaru

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{g \cdot L}} \quad (19.16)$$

Výraz na levé straně rovnice (19.14) je Froudovo číslo na modelu a na pravé straně pak Froudovo číslo na díle. Podobnost v tomto případě je splněna, jsou-li stejná Froudova čísla na modelu a na díle  $Fr_M = Fr_D$ .

Froudovo kritérium se uplatňuje při řešení vlnového odporu u lodí, při sedimentaci částic a při proudění suspenzí voda - pevná částice nebo vzduch - pevná částice.

### Síla setrvačné – $F_s$ a kapilární – $F_k$

Podle rovnice (19.6) poměr setrvačné a kapilární síly na modelu i díle je konstantní

$$\left( \frac{F_s}{F_k} \right)_M = \left( \frac{F_s}{F_k} \right)_D = konst$$

Po dosazení za jednotlivé síly dostaneme

$$\begin{aligned} \left( \frac{\rho L^2 v^2}{\sigma \cdot L} \right)_M &= \left( \frac{\rho L^2 v^2}{\sigma \cdot L} \right)_D \\ \left( \frac{\rho \cdot L \cdot v^2}{\sigma} \right)_M &= \left( \frac{\rho \cdot L \cdot v^2}{\sigma} \right)_D \Rightarrow We_M = We_D \quad (19.17) \end{aligned}$$

Zlomek

$$We = \frac{\rho \cdot L \cdot v^2}{\sigma} \quad (19.18)$$

je Weberovo číslo. Výraz na levé straně rovnice (19.17) je Weberovo číslo na modelu a na pravé straně pak Weberovo číslo na díle. Podobnost je v tomto případě splněna tehdy, jsou-li Weberova čísla na modelu a na díle stejná -  $We_M = We_D$ .

Weberovo kritérium se uplatňuje u kapilárních jevů.

### Síla setrvačná – $F_s$ a síla kompresní – $F_d$

Podle rovnice (19.6) poměr setrvačné a kompresní síly na modelu i díle je konstantní

$$\left( \frac{F_s}{F_d} \right)_M = \left( \frac{F_s}{F_d} \right)_D = konst$$

Po dosazení za jednotlivé síly dostaneme

$$\left( \frac{\rho L^2 v^2}{\rho L^2 a^2} \right)_M = \left( \frac{\rho L^2 v^2}{\rho L^2 a^2} \right)_D$$

$$\left( \frac{v}{a} \right)_M = \left( \frac{v}{a} \right)_D \Rightarrow Ma_M = Ma_D \quad (19.19)$$

Zlomek

$$Ma = \frac{v}{a} \quad (19.20)$$

je Machovo číslo. Výraz na levé straně rovnice (19.19) je Machovo číslo na modelu a na pravé straně pak Machovo číslo na díle. Podobnost je v tomto případě splněna tehdy, jsou-li Machova čísla na modelu a na díle stejná -  $Ma_M = Ma_D$ .

Machovo kritérium se uplatňuje při proudění stlačitelných tekutin a při nadzvukovém proudění.

### Síla impulzní – $F_h$ a setrvačná – $F_s$

Podle rovnice (19.6) poměr impulzní a setrvačné síly na modelu i díle je konstantní

$$\left( \frac{F_s}{F_h} \right)_M = \left( \frac{F_s}{F_h} \right)_D = konst$$

Po dosazení za jednotlivé síly je-li  $\frac{\eta}{\rho} = \nu$  dostaneme

$$\left( \frac{t \cdot \rho \cdot L^2 v^2}{\rho \cdot L^3 \nu} \right)_M = \left( \frac{t \cdot \rho \cdot L^2 v^2}{\rho \cdot L^3 \nu} \right)_D$$

$$\left( \frac{v \cdot t}{L} \right)_M = \left( \frac{v \cdot t}{L} \right)_D \Rightarrow Sh_M = Sh_D \quad (19.21)$$

Zlomek

$$Sh = \frac{v \cdot t}{L} = \frac{v}{c} = \frac{v}{f \cdot L} \quad (19.22)$$

je Strouhalovo číslo. Výraz na levé straně rovnice (19.21) je Strouhalovo číslo na modelu a na pravé straně pak Strouhalovo číslo na díle. Podobnost je v tomto případě splněna tehdy, je-li Strouhalovo číslo na modelu a na díle stejné -  $Sh_M = Sh_D$ .

Strouhalovo číslo může být pro periodické jevy modifikováno následujícími vztahy

$$v \approx L \cdot \omega, \quad t \approx \frac{1}{f}, \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot f, \quad f \cdot \lambda = a.$$



Strouhalovo kritérium se uplatňuje při nestacionárním a periodickém proudění, v hydrodynamických strojích, Kármánova vírová cesta za obtékaným tělesem, rozteč vírů u Kármánovy vírové cesty a pod. Strouhalovo číslo je u hydrodynamických strojů užíváno pod pojmem měrné otáčky.

V tabulce 19.3 a 19.4 je uveden přehled podobnostních čísel používaných v mechanice tekutin.

Tabulka 19.3 Přehled základních zákonů dynamické podobnosti v proudění s uplatněním setrvačné síly

Číslo	Podobnostní číslo	Poměr sil	Definice	Zákon podobnosti
1	Reynoldsovo	$Re = \frac{F_s}{F_t}$	$Re = \frac{v.L}{\nu}$	$Re_M = Re_D$
2	Eulerovo	$Eu = \frac{F_p}{F_s}$	$Eu = \frac{p}{\rho v^2}$	$Eu_M = Eu_D$
3	Froudovo	$Fr = \frac{F_s}{F_g}$	$Fr = \frac{v^2}{g.L}$	$Fr_M = Fr_D$
4	Weberovo	$We = \frac{F_s}{F_k}$	$We = \frac{\rho.L.v^2}{\sigma}$	$We_M = We_D$
5	Machovo	$Ma = \frac{F_s}{F_d}$	$Ma = \frac{v}{a}$	$Ma_M = Ma_D$
6	Strouhalovo	$Sh = \frac{F_s}{F_h}$	$Sh = \frac{v.t}{L} = \frac{v}{c} = \frac{v}{f.L}$	$Sh_M = Sh_D$

Tabulka 19.4 Přehled základních zákonů dynamické podobnosti v proudění nezávislých na setrvačné síle

Č.	Působící síly	Poměr sil	Fyzikální význam podobnosti	Č	Působící síly	Poměr sil	Fyzikální význam podobnosti
1	$F_g + F_p$	$\frac{F_g}{F_p} = \frac{\rho g L^3}{\rho L^2}$	$\frac{F_g}{F_p} = \frac{1}{Eu.Fr}$	6	$F_p + F_k$	$\frac{F_p}{F_k} = \frac{\rho L^2}{\sigma.L}$	$\frac{F_p}{F_k} = Eu.We$
2	$F_g + F_e$	$\frac{F_g}{F_e} = \frac{\rho g L^3}{\rho.L^2.a^2}$	$\frac{F_g}{F_e} = \frac{Ma^2}{Fr}$	7	$F_p + F_t$	$\frac{F_p}{F_t} = \frac{\rho.L^2}{\eta.L.v}$	$\frac{F_p}{F_t} = Eu.Re$
3	$F_g + F_k$	$\frac{F_g}{F_k} = \frac{\rho g L^3}{\sigma.L}$	$\frac{F_g}{F_k} = \frac{We}{Fr}$	8	$F_e + F_k$	$\frac{F_e}{F_k} = \frac{\rho.L^2.a^2}{\sigma.L}$	$\frac{F_e}{F_k} = \frac{We}{Ma^2}$
4	$F_g + F_t$	$\frac{F_g}{F_t} = \frac{\rho g L^3}{\eta.L.v}$	$\frac{F_g}{F_t} = \frac{Re}{Fr}$	9	$F_e + F_t$	$\frac{F_e}{F_t} = \frac{\rho.L^2.a^2}{\eta.L.v}$	$\frac{F_e}{F_t} = \frac{Re}{Ma^2}$
5	$F_p + F_e$	$\frac{F_p}{F_e} = \frac{\rho L^2}{\rho.L^2.a^2}$	$\frac{F_p}{F_e} = Eu.Ma^2$	10	$F_k + F_t$	$\frac{F_k}{F_t} = \frac{\sigma.L}{\eta.L.v}$	$\frac{F_k}{F_t} = \frac{Re}{We}$

Dosud byla řešena úloha, ve které byly dominantní pouze dvě síly. Složitější je případ, kdy v daném problému vystupuje sil více. Ukážeme řešení, ve kterém jsou dominantní tři síly.

**Síla setrvačná –  $F_s$ , třecí –  $F_t$  a tíha  $F_g$** 

Z těchto tří sil můžeme sestavit dvě podobnostní čísla a sice:

$$\text{Reynoldsovo číslo} - \text{Re} = \frac{v \cdot L}{\nu} \quad \text{a}$$

$$\text{Froudovo číslo} - \text{Fr} = \frac{v^2}{g \cdot L}.$$

Podobnost je splněna v tomto případě tehdy, když jsou stejná na modelu i díle obě jmenovaná podobnostní čísla. Takový problém se vyskytuje např. při vyšetřování odporu lodí. Třecí odpor je vyjádřen  $\text{Re}$  – číslem, odpor vlnový pak  $\text{Fr}$  – číslem. Musí tedy současně platit  $\text{Re} = \text{konst.}$ , a  $\text{Fr} = \text{konst.}$  Bude – li modelování provedeno ve stejné kapalině, např. vodě, potom z  $\text{Re}$  – čísla vyplývá

$$\text{Re}_M = \text{Re}_D = \frac{v_M \cdot L_M}{\nu} = \frac{v_D \cdot L_D}{\nu} \Rightarrow \frac{v_M}{v_D} = \frac{L_M}{L_D}, \quad (19.23)$$

obdobně se stanoví podmínka podobnosti z  $\text{Fr}$  - čísla

$$\text{Fr}_M = \text{Fr}_D = \frac{v_M^2}{g \cdot L_M} = \frac{v_D^2}{g \cdot L_D} \Rightarrow \frac{v_M}{v_D} = \sqrt{\frac{L_M}{L_D}}. \quad (19.24)$$

Z posledních dvou výrazů je vidět, že při modelování nelze splnit současně obě podmínky. Pro další modelování je potřeba rozhodnout, která podmínka bude dominantní. V tomto konkrétním případě bude rozhodující vlnový odpor, dominantní jsou tedy síly setrvačné a gravitační, musí být proto splněna podmínka  $\text{Fr}_M = \text{Fr}_D$ , která však platí s jistou chybou, která se musí stanovit měřením.

Při výběru podobnostních čísel můžeme postupovat následujícím způsobem:

- na základě zkušeností definovat dominantní síly, které se uplatňují u zkoumaného jevu
- definujeme místo sil veličiny na nichž posuzovaný jev prokazatelně závisí. Kriteria podobnosti určíme s využitím bezrozměrové analýzy
- daný zkoumaný jev popíšeme rovnicemi a to i diferenciálními

U posledního problému jsou dále uvedeny dva příklady řešení. Je-li problém popsán obyčejnou rovnicí, např. odpor těles, u kterého odporová síla je dána známou rovnicí

$$F_x = c_x S \frac{v^2}{2} \rho,$$

tuto rovnici převedeme na bezrozměrný tvar

$$c_x = 2 \frac{F_x}{\rho S v^2} \approx \text{Ne},$$

kde  $c_x$  je součinitel odporu, který pro složitější tělesa se obvykle stanovuje experimentálně. Z obtékání těles (koule, válec, profil a pod.) je známo, že součinitel odporu  $c_x$  závisí na tvaru tělesa a Reynoldsově čísle. Poslední rovnici lze doplnit

$$c_x \approx \text{Ne} = f(\text{Re}, \text{tvar}). \quad (19.25)$$

Jedná-li se o těleso jednoho tvaru, pak se předcházející rovnice zjednoduší

$$c_x \approx \text{Ne} = f(\text{Re}), \quad (19.26)$$

tato závislost se musí ověřit experimentálně.

Je-li daný problém popsán diferenciální rovnicí, v mechanice tekutin obvykle rovnicí Navierovou-Stokesovou, potom je možné postupovat tak, že se rovnice upraví do bezrozměrného tvaru. Zavedeme následující bezrozměrné veličiny

$$v_x^* = \frac{v_x}{v}, \quad v_v^* = \frac{v_v}{v}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_{\max}}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}.$$

Pro ustálené dvourozměrné proudění bez vlivu vnější objemové síly napíšeme Navierovu-Stokesovu rovnici pro směr  $x$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right). \quad (19.27)$$

Tuto rovnici převedeme pomocí výše uvedených bezrozměrných veličin do bezrozměrného tvaru

$$v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} = -\frac{p_{\max}}{\rho \cdot \nu} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\nu}{\nu} \left( \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} \right),$$

zavedením podobnostních čísel se rovnice upraví

$$v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} = -Eu \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} \right). \quad (19.28)$$

V této bezrozměrné Navierově-Stokesově rovnici se vyskytují dvě podobnostní čísla a sice Eulerovo –  $Eu$  a Reynoldsovo –  $Re$ , která představují kriteria fyzikální podobnosti.

## 19.2. Podobnost v termomechanice

Z rovnice energie je možné definovat podobnostní čísla používaná v termomechanice, místo poměru sil budeme uvažovat poměr energií, pro další řešení to budou tyto energie – Tabulka 19.5.

Tabulka 19.5 Přehled vybraných druhů energie

Číslo	Název energie	Definice energie
1	Vedení tepla	$E_v \approx \lambda \cdot L \cdot \Delta T$
2	Konvekce	$E_k \approx a \cdot L^2 \cdot \Delta T$ ; $a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}$
3	Ohřev	$E_0 \approx \rho \cdot c_p \cdot L^2 \cdot \nu \cdot \Delta T$
4	Ztráta třením	$E_t \approx \eta \cdot L \cdot \nu^2$

Z těchto energií je možné sestavit podobnostní kriteria, tato jsou uvedena v následující tabulce 19.6.

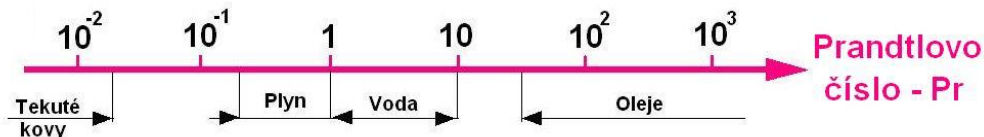
Tabulka 19.6 Přehled podobnostních kriterii v termomechanice

Číslo	Podobnostní číslo	Poměr energií	Definice
1	Prandtlovo	$Pr = \frac{E_0}{E_v} = \frac{1}{Re} = \frac{Pe}{Re}$	$Pr = \frac{\nu}{a}$ ; $a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}$ a – teplotová vodivost
2	Nusseltovo	$Nu = \frac{E_k}{E_v}$	$Nu = \frac{a \cdot l}{\lambda}$
3	Eckertovo	$Ec = \frac{E_t}{E_0} Re$	$Ec = \frac{\nu^2}{c_p \Delta T}$
4	Pécletovo	$Pe = \frac{E_0}{E_v} = Pr \cdot Re$	$Pe = \frac{\nu \cdot L}{a}$
5	Fourierovo	$Fo = \frac{E_0}{E_v} Sh = Pe \cdot Sh$	$Fo = \frac{L^2}{a \cdot t}$
6	Biotovo	$Bi = \frac{E_k}{E_v}$	$Bi = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda}$ $\lambda$ - vodivost tuhé fáze

Vlastnosti podobnostních čísel jsou následující:

**Prandtlovo číslo - Pr** - je poměr kinematické viskozity a teplotové vodivosti. Kinematická viskozita vyjadřuje přenos hybnosti tepelným pohybem molekul při rozdílné rychlosti „v“ proudící tekutiny. Teplotová vodivost „a“ vyjadřuje přenos energie (tepla) tepelným pohybem molekul při rozdílech teploty tekutiny. Z toho vyplývá, že Prandtlovo číslo charakterizuje též vztah mezi polem rychlosti a polem teploty tekutiny, tj. přirozenou (volnou) i vynucenou konvekci. Jinak řečeno je Prandtlovo číslo mírou poměrné důležitosti viskozity a teplotové vodivosti tekutiny.

Prandtlovo číslo pro vodu a vodní páru je definováno Mezinárodní asociací pro vlastnosti vody a vodní páry – IAPWS – IF97. Velikost Prandtlova čísla pro vybrané látky je na obr. 19.2.



Obr. 19.2 Velikost Prandtlova čísla pro vybrané látky

Prandtlovo číslo se pro plyny vypočítá z veličin  $\lambda, \eta, c_p$ , pro dokonalý plyn závisí jen na počtu atomů v molekule, nezávisí však na teplotě a tlaku. Z kinetické teorie plynů vyplývá pro plyn jeho velikost - viz Tab. 19.7.

Tab. 19.7 Velikost Prandtlova čísla pro ideální plyn

Číslo	Druh plynu	Počet platných otáčivých stupňů volnosti molekul - $\delta$	$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5 + \delta}{3 + \delta}$	$Pr = \frac{4 \cdot \kappa}{9 \cdot \kappa - 5}$ ( A.Eucken)
1	Jednoatomový	0	1,66	0,67
2	Dvouatomový	2	1,40	0,74
3	Tříatomový	3	1,33	0,77
4	Čtyři a více atomů	3		1

U kapalin Prandtlovo číslo klesá s rostoucí teplotou, bývá větší než jedna a může dosahovat vysokých hodnot (např. u olejů), pro tekuté kovy  $Pr \ll 1$ . Pro  $Pr < 1$  převažuje molekulový přenos tepla vedením nad konvekci. Pro velká Prandtlova čísla pak konvekce převažuje nad vedením tepla. Prandtlovo číslo charakterizuje vztah mezi polem rychlostí a polem teplot.

**Nuseltovo číslo - Nu** - charakterizuje přestup tepla a je v podstatě jen zvláštní a bezrozměrný tvar součinitele přestupu tepla -  $\alpha$ . Množství přestupujícího tepla ( velikost Nu) závisí na charakteru rychlostního pole tekutiny, tj. na Re a jeho vazbě s teplotním polem tekutiny - Pr a na tepelném vztahu tekutiny - Gr. Nuseltovo číslo je obecně popsáno kriteriální rovnicí  $Nu = f(Gr, Pr, Re)$ , která pro přirozenou konvekci se zjednoduší -  $Nu = f(Gr, Pr)$ , pro nucenou konvekci pak má tvar -  $Nu = f(Pr, Re)$ .

**Pécletovo číslo - Pe = Pr.Re** - uplatňuje se při sdílení tepla prouděním - konvekci. Pro plyny je přibližně  $Pr = 1$ , potom  $Pe = Re$ . S rostoucím Pe se podíl vedení tepla zmenšuje a podíl konvekce se zvětšuje. Při nadkritickém Re, kdy laminární proudění přechází v turbulentní se teplo šíří turbulentní konvekci, která při vysokých Re zcela převládá.

**Fourierovo - Fo** - uplatňuje se při neustáleném vedením tepla v látce ( neustálený molekulový přenos energie). Je zajímavé, že Fo neobsahuje ve své definici teplotu T.

### 19.3. Podobnost při přenosu hmoty

**Pro jednorozměrnou difúzi** - (molekulový přenos hmoty) platí Fickův zákon, tento se zapíše ve tvaru

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (19.29)$$

který musí platit pro model i dílo

$$\frac{\partial c_M}{\partial t_M} = D_M \frac{\partial^2 c_M}{\partial x_M^2} \quad ; \quad \frac{\partial c_D}{\partial t_D} = D_D \frac{\partial^2 c_D}{\partial x_D^2} . \quad (19.30)$$

Úpravou předcházejících rovnic pro model dostaneme

$$\left[ \begin{array}{cc} c_M & t_D \\ c_D & t_M \end{array} \right] \frac{\partial c_D}{\partial t_D} = \left[ \begin{array}{ccc} D_M & c_M & L_D^2 \\ D_D & c_D & L_M^2 \end{array} \right] D_D \frac{\partial^2 c_D}{\partial x_D^2} ,$$

po další úpravě

$$\frac{\partial c_D}{\partial t_D} = \left[ \begin{array}{c} \frac{D_M t_M}{L_M^2} \\ \frac{D_D t_D}{L_D^2} \end{array} \right] D_D \frac{\partial^2 c_D}{\partial x_D^2} . \quad (19.31)$$

Porovnáním rov. (21.30) a (21.31) vyplývá zákon podobnosti molekulární difúze

$$\frac{D_M t_M}{L_M^2} = \frac{D_D t_D}{L_D^2} \Rightarrow Fo_M = Fo_D ,$$

kde difúzní Fourierovo číslo podobnosti je

$$Fo_d = \frac{D \cdot t}{L^2} . \quad (19..32)$$

Napišeme-li Fourierovu rovnici pro jednorozměrné vedení tepla

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} , \quad (19.33)$$

vidíme, že je podobná rovnici pro difúzi (19.29). Je tedy matematicky shodná s rovnicí pro difúzi (19.33), z čehož plyne, že difúze je analogická vedení tepla a pole koncentrací „c“ je podobné poli teplot T.

**Konvektivní difúze** - jedná se o přenos hmoty uspořádaným pohybem molekul, který je popsán pro jednorozměrné proudění rovnicí

$$v_x \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} . \quad (19.34)$$

Stejným postupem jako v předcházejícím odstavci dostaneme upravenou rovnici pro model

$$v_{x_D} \frac{\partial c_D}{\partial x_D} = \left[ \begin{array}{c} \frac{v_D L_D}{D_D} \\ \frac{v_M L_M}{D_M} \end{array} \right] D_D \frac{\partial^2 c_D}{\partial x_D^2} . \quad (19.35)$$

Z této rovnice porovnáním s rovnicí (19.34) vyplývá zákon podobnosti konvektivní difúze pro model a dílo ve tvaru

$$\frac{v_M L_M}{D_M} = \frac{v_D L_D}{D_D} \Rightarrow Pe_M = Pe_D ,$$

kde difúzní Pécletovo číslo podobnosti je

$$Pe_d = \frac{v \cdot L}{D} . \quad (19.36)$$

Difúzní Pécletovo číslo je obdobou Reynoldsova čísla, jeho velikost charakterizuje strukturu proudu a tím i režim přenosu hmoty. Je-li  $Re_d \ll 1$ , převažuje molekulární difúze, je-li naopak  $Re_d \gg 1$  převažuje konvektivní difúze.

Podíl difúzního Péceletova a Reynoldsova čísla se nazývá difúzní Prandtlovo ( také Schmidtovo) číslo

$$\frac{Pe_d}{Re} = \frac{\frac{v \cdot L}{D}}{\frac{v \cdot L}{\nu}} = \frac{\nu}{D} = Pr_d = Sc. \quad (19.37)$$

U plynů je kinematická viskozita a součinitel difúze stejného řádu, takže difúzní Prandtlovo číslo plynů, stejně jako tepelné Prandtlovo číslo má hodnotu kolem 1. proto přenos hmoty je u plynů analogický přenosu tepla. U kapalin je difúzní Prandtlovo číslo podstatně větší než 1, u tekutých kovů naopak je výrazně menší než 1. U kapalin se přenos hmoty liší od přenosu tepla podle vzájemné velikosti difúzního Prandtlova čísla a tepelného Prandtlova čísla.

**Přenos hmoty z pevného tělesa do tekutiny** - Přenos hmoty z pevného tělesa do tekutiny vlivem její rozdílné koncentrace na stěně a v tekutina vyjadřuje rovnice hustoty difúzního toku odvodíme výraz pro difúzní Nusseltovo číslo

$$Nu_d = \frac{\alpha_d \cdot L}{D}, \quad (19.38)$$

kde  $\alpha_d$  je součinitel přestupu hmoty.

**Souvislosti mezi přenosovými jevy** - Molekulové přenosové jevy v tekutinách charakterizují tři základní podobnostní čísla Prandtlovo - Pr, Schmidtovo - Sc a Lewisovo - Le sestavená z veličin a to součinitel difúze -D, kinematická viskozita -  $\nu$ , teplotová vodivost - a , která vyjadřují tři fyzikální (přenosové) vlastnosti tekutiny – Tab. 19.8 .

Tab. 19.8 Definice podobnostních čísel Pr, Sc, Le

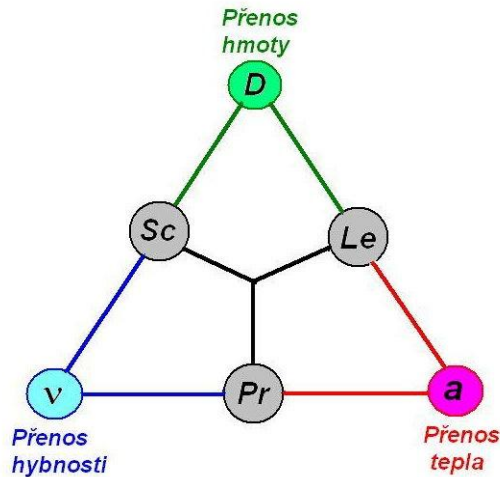
Číslo	Podobnostní číslo	Definice	Poměr přenosových jevů
1	Prandtlovo	$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\text{kinematická viskozita}}{\text{teplotová vodivost}}$	$= \frac{\text{přenoshybnosti}}{\text{přenostepla}}$
2	Schmidtovo	$Sc = \frac{\nu}{D} = \frac{\text{kinematická viskozita}}{\text{součinitel difuze}}$	$= \frac{\text{přenoshybnosti}}{\text{přenoshmoty}}$
3	Lewisovo	$Le = \frac{a}{D} = \frac{\text{teplotová vodivost}}{\text{součinitel difuze}}$	$= \frac{\text{přenostepla}}{\text{přenoshmoty}}$

Mezi podobnostními čísly Pr, Sc a Le platí vztah

$$\frac{Le \cdot Pr}{Sc} = 1 .$$

Graficky je závislost mezi podobnostními čísly Pr, Sc a Le a veličinami D,  $\nu$ , a uvedena na obr. 19.3 .





Obr. 19.3 Závislost mezi podobnostními čísly Pr, Sc, Le

#### 19.4. Dimenzionální analýza ( $\pi$ -teorém)

Aplikace  $\pi$ -teorému bude názorněji vysvětlena na následujícím příkladě.

Pro součinitel tření  $\lambda$  v potrubí můžeme na základě zkušeností psát, že je funkcí čtyř fyzikálních veličin

$$\lambda = f(v, D, \nu, k).$$

Tzn. že počet proměnných veličin  $n = 4$ . Tyto čtyři veličiny se dají vyjádřit pomocí dvou základních rozměrů a sice délka  $L$  a čas  $t$ . Počet základních rozměrů tedy je  $r = 2$ .

Počet bezrozměrných veličin je

$$\pi = n - r = 4 - 2 = 2. \quad (19.39)$$

Mohou to být tato bezrozměrná podobnostní čísla:

$$\pi_1 = \text{Re} = \frac{vD}{\nu} - \text{číslo Reynoldsovo}$$

$$\pi_2 = \varepsilon = \frac{k}{D} - \text{relativní drsnost}$$

Závislost třecího součinitele se zapíše ve tvaru

$$\lambda = f(\text{Re}, \varepsilon). \quad (19.40)$$

Pomocí  $\pi$ -teorému, se tedy snížil počet nezávisle proměnných z původních 4 pouze na 2, což představuje významné zjednodušení problému. Podrobné řešení této úlohy lze nalézt v odborné literatuře.

## Přehled použitých označení

Označení	Jednotka	Veličina
A	J	práce
D	m	průměr potrubí, oběžného kola
D	$m^2 \cdot s^{-1}$	součinitel difuze
E	Pa	modul pružnosti v tahu
E	J	energie, kinetická energie
E	$m^2 \cdot s^{-1}$	spektrální funkce kinetické energie turbulence
F	$N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$	síla
$F_0$	N	objemová síla
$F_p$	N	tlaková síla – plošná síla
$F_s$	N	setrvačná síla
$F_t$	N	tečná síla, třecí síla
G	N	tíha ( = $F_g$ )
H	$kg \cdot m \cdot s^{-1}$	hybnost
H	$kg \cdot m \cdot s^{-2}$	průtoková hybnost
H	$J \cdot kg^{-1}$	izoentropický spád
$H_d$	m	dopravní výška čerpadla
$H_t$	m	teoretická dopravní výška čerpadla
J	$kg \cdot m^2$	moment setrvačnosti
J	$m^4$	moment setrvačnosti plochy
K	Pa	modul objemové stlačitelnosti (pružnosti) tekutiny
K	$Pa \cdot s^n$	součinitel konsistence
L	m	délka
M	$N \cdot m = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$	moment síly
$M_k$	$N \cdot m = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$	kroucí moment
M	$m^3$	statický moment plochy
O	m	obvod
P	W	výkon, příkon
P	$J \cdot kg^{-1}$	tlaková funkce
Q	J	teplo
$Q_m$	$kg \cdot s^{-1}$	hmotnostní průtok
$Q_v$	$m^3 \cdot s^{-1}$	objemový průtok
R	m	poloměr
S	$m^2$	plocha
T	K	absolutní teplota
T	s	doba děje (měření), doba oběhu vlny
U	$J \cdot kg^{-1}$	potenciál vnějších sil
V	$m^3$	objem
Y	$J \cdot kg^{-1}$	měrná energie
$Y_d$	$J \cdot kg^{-1}$	skutečná měrná energie čerpadla
$Y_t$	$J \cdot kg^{-1}$	teoretická měrná energie čerpadla
$Y_z$	$J \cdot kg^{-1}$	měrná ztrátová energie
a	$m \cdot s^{-1}$	rychlost zvuku
a	$m \cdot s^{-2}$	zrychlení
a	$m^2 \cdot s^{-1}$	teplotová vodivost
$a_0$	$m \cdot s^{-2}$	vnější objemové zrychlení
$a_t$	$J \cdot kg^{-1}$	měrná technická práce
$a_v$	$J \cdot kg^{-1}$	měrná objemová práce
b	m	šířka
c	$m \cdot s^{-1}$	rychlost absolutní
c	1	součinitel odporu
$c_v$	1	objemová koncentrace
$c_x$	1	součinitel odporu ve směru x
$c_y$	1	součinitel vztlaku
$c_n$	1	součinitel odporu ve směru normály
$c_p$	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	měrná tepelná kapacita při konst. tlaku
$c_v$	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	měrná tepelná kapacita při konst. objemu
d	m	průměr, průměr částice
$d_h$	m	hydraulický průměr
e	m	síla stěny trubky
e	$J \cdot kg^{-1}$	měrná energie
$e_z$	$J \cdot kg^{-1}$	měrná ztrátová energie ( = $e_r = Y_z$ )
f	$s^{-1}$	frekvence
$f_v$	$s^{-1}$	vlastní frekvence
g	$m \cdot s^{-2}$	tíhové zrychlení

h	m	výška, svislá vzdálenost, hloubka
$h_z$	m	ztrátová výška
i	Pa . m <sup>-1</sup>	spád tlaku
i	J . kg <sup>-1</sup>	měrná entropie
<b>i,j,k</b>	1	jednotkové vektory
j	s <sup>-1</sup>	gradient rychlosti
k	m	absolutní drsnost stěny trubky, desky
k	N . m <sup>-1</sup>	tuhost
k	J . kg <sup>-1</sup>	měrná kinetická energie turbulence
$k_f$	m . s <sup>-1</sup>	součinitel filtrace
l	m	délka, vzdálenost, směšovací délka
$l_e$	m	ekvivalentní délka potrubí
m	kg	hmotnost
n	1	index toku
n	s <sup>-1</sup>	otáčky
$n_s$	s <sup>-1</sup>	měrné otáčky čerpadla
p	Pa = N . m <sup>-2</sup>	tlak, hydrostatický tlak
$p_c$	Pa	celkový tlak
$p_d$	Pa	dynamický tlak
$p_s$	Pa	statický tlak
$p_z$	Pa	tlaková ztráta
r	J . kg <sup>-1</sup> . K <sup>-1</sup>	měrná plynová konstanta
r	m	poloměr
$r_h$	m	hydraulický poloměr
s	J . kg <sup>-1</sup> . K <sup>-1</sup>	měrná entropie
s	m	dráha
t	°C	teplota
t	s	čas
u	m . s <sup>-1</sup>	rychlost v bodě, unášivá, obvodová rychlost
u	J . kg <sup>-1</sup>	měrná vnitřní energie
v	m . s <sup>-1</sup>	rychlost, relativní rychlost
v	m <sup>3</sup> . kg <sup>-1</sup>	měrný objem
$v^*$	m . s <sup>-1</sup>	třecí rychlost
w	m . s <sup>-1</sup>	sedimentační rychlost
x,y,z	m	souřadnice
$\Gamma$	m <sup>2</sup> . s <sup>-1</sup>	cirkulace rychlosti
$\Phi$	m <sup>2</sup> . s <sup>-1</sup>	rychlostní potenciál
$\Psi$	m <sup>2</sup> . s <sup>-1</sup>	proudová funkce
$\alpha$	rad	úhel, směrový úhel
$\alpha$	W.m <sup>-2</sup> .K <sup>-1</sup>	součinitel přestupu tepla
$\beta$	rad	úhel, směrový úhel
$\beta$	K <sup>-1</sup>	součinitel teplotní objemové roztažnosti
$\gamma$	rad	úhel, směrový úhel
$\gamma$	N . m <sup>-3</sup>	měrná tíha
$\delta$	m	tloušťka mezní vrstvy
$\delta$	m <sup>2</sup> . N <sup>-1</sup>	součinitel stlačitelnosti
$\delta_{ij}$	1	jednotkový tenzor, Kronekerovo delta
$\varepsilon$	rad . s <sup>-1</sup>	úhlová deformace
$\varepsilon$	1	součinitel kontrakce, mezerovitost
$\varepsilon$	1	relativní drsnost stěny trubky, stěny desky
$\varepsilon$	m <sup>2</sup> . s <sup>-3</sup>	rychlost disipace
$\zeta$	1	ztrátový součinitel
$\eta$	Pa . s	dynamická viskozita
$\eta$	1	účinnost
$\eta_\Delta$	Pa . s	diferenciální viskozita
$\eta_B$	Pa . s	Binghamova viskozita
$\eta_c$	1	celková účinnost čerpadla
$\eta_h$	1	hydraulická účinnost čerpadla
$\eta_m$	1	mechanická účinnost čerpadla
$\eta_v$	1	objemová účinnost čerpadla
$\eta_t$	1	účinnost trysky - dýzy
$\kappa$	1	izoentropický exponent
$\lambda$	W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>	vodivost materiálu
$\lambda$	1	součinitel tření
$\mu$	1	výtokový součinitel
$\mu_a$	Pa.s	zdánlivá viskozita
$\mu_\Delta$	Pa.s	diferenciální viskozita
$\mu_B$	Pa.s	Binghamova viskozita

$\nu$	$m^2 \cdot s^{-1}$	kinematická viskozita
$\xi$	1	stupeň rázu
$\pi$	1	bezrozměrový parametr
$\rho$	$kg \cdot m^{-3}$	hustota ( měrná hmotnost )
$\sigma$	Pa	normálové napětí
$\sigma$	$N \cdot m^{-1}$	povrchové napětí
$\tau$	Pa	tečné ( smykové napětí )
$\tau_p$	Pa	počáteční smykové napětí
$\varphi$	rad	úhel
$\varphi$	1	rychlostní součinitel
$\omega$	$s^{-1}$	úhlová rychlost

**Index dolní:**

- x,y,z - směr x, y, z
- i, j, k - směr x, y, z
- e - vnější – okolní prostředí
- l - laminární
- n - směr normály
- o - klidový stav
- p - pevná částice
- r - poloměr
- s - skutečný, stěna, střední, sání čerpadla, suspenze
- t - turbulentní, teoretický
- v - výtlač čerpadla, voda, vzduch
- stř - střední
- max - maximální
- kr - kritický
- $\infty$  - nerozrušený proud před tělesem
- M - model
- D - dílo
- T - těžiště

**Index horní:**

- \* - kritická veličina

**Onačení veličin u turbulentního proudění:**

- střední hodnoty značeny pruhem
- flukтуаční hodnoty značeny čárkou
- vektory značeny tučně

**Vektorové operátory:**

Gradient :

$$\mathbf{grad}p = \mathbf{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial p}{\partial z}; \quad \text{grad}p = \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Divergence :

$$\mathbf{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}; \quad \mathbf{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

Substanciální derivace:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \mathbf{grad} \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} v_z;$$

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Laplaceův operátor :

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2}; \quad \Delta \mathbf{v} = \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_i^2}$$

## Literatura

1. **Bird, B.R., Steward, W.E., Lightfoot, E.N.:** Přenosové jevy. Academia 1968
2. **Bláha, J., Brada, K.:** Hydraulické stroje, SNTL Praha 1992, 752 s.
3. **Douglas, J.F., Gasiorek, J.M., Swaffield, J..A., Jack, L.B. :** Fluid Mechanics
4. **Fox, R.W., Mc Donald, A.T.:** Introduction to Fluid Mechanics, J. Wiley & sons, New York, 1994
5. **Hewitt, G.F., Vussilicos, J.C.:** Prediction of Turbulent Flowws, Gambridge Univ. Press, 2005, 343 str. ISBN-13978-0-521-83899-3
6. **Incropera, F.P., Dewitt, D.P, Bergman, T.L., Lavine, A.S.:** Fundamentals of Heat and Mass Transfer, John Wiley a Sons, 2006, 995 str. ISBN-10-0-471-45728-0
7. **Janalík, J., Štáva, P.:** Mechanika tekutin, skripta VŠB TU Ostrava 2001, 126 str.
8. **Ježek, J., Váradiová, B.:** Mechanika tekutin pro pětileté obory. ČVUT Praha, 1991
9. **Lojczanskij, L.G.:** Mechanika židkosti i gaza. Moskva, Nauka 1987, 940 s.
10. **Maštovský, O.:** Hydromechanika. SNTL Praha 1956, 1963
11. **Melichar, J., Bláha, j.:** Problémy soudobé čerpací techniky, ČVUT Praha 2007, ISBN 978-80-01-03917-5
12. **Nechleba, M., Hušek, J.:** Hydraulické stroje, SNTL Praha 1966, 386 s.
13. **Nožička, J.:** Termodynamika. ČVUT, Praha 2001, 179 s, ISBN 80-01-01836-9
15. **Noskievič, J. a kol.:** Mechanika tekutin. SNTL/ALFA Praha 1990, 354 str.
16. **Novák, V., Rieger, F., Vavro. :** Hydraulické pochody v chemickém a potravinářském průmyslu, SNTL Praha 1989, 447 s. ISBN 80-03-00144-7
17. **Shauphnoosy, E.J., Katz, I.M., Schaffer, J.P. :** Fluid Mechanics, Oxford univer. Press, 2005, 1017str., ISBN-13-978-0195154-51-1
18. **Streeter, V.L.:** Fluid Mechanics, Mc Graw-Hill, New York, 1971
19. **Šesták, J., Eiegel, F. :** Přenos hybnosti, tepla a hmoty Skripta ČVUT Praha , 1993, s. 299, ISBN 80-01-00957-2
20. **White, F.M.:** Fluid Mechanics, Mc Graw-Hill, New York, 1986

[www.nasa.gov](http://www.nasa.gov)  
[www.thomasnet.com](http://www.thomasnet.com)  
[www.flowserve.com](http://www.flowserve.com)  
[www.gaso.com](http://www.gaso.com)  
[www.princeton.edu](http://www.princeton.edu)  
[www.ihr.uiowa.edu](http://www.ihr.uiowa.edu)  
[www.efluid.com](http://www.efluid.com)  
[www.uni-karlsruhe.de](http://www.uni-karlsruhe.de)