

Na vzduchové dráze se srazí vozík dokonale pružně s druhým vozíkem, který byl do srážky v klidu. Po srážce se oba vozíky pohybují stejně velkými rychlostmi opačným směrem. Určete poměr hmotností obou vozíků.

Předpokládejme, že jde o pohyb po přímce:

rychlosti před srážkou:

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 = 0 \text{ ms}^{-1}$$

rychlosti po srážce:

$$v'_1 = v'_2, \vec{v}'_1 = -\vec{v}'_2$$

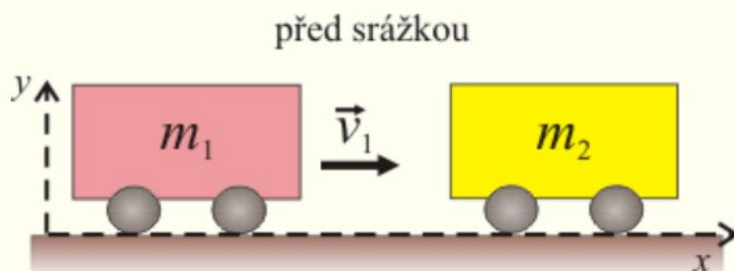
Pro dokonale pružnou srážku platí:

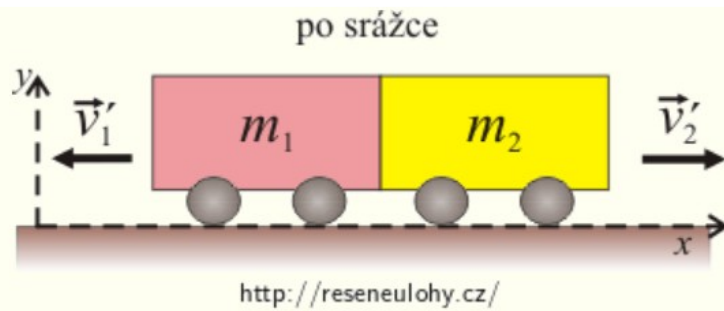
Zákon zachování hybnosti (ZZH):

Součet hybností těles v izolované soustavě je konstantní, nebo-li celková hybnost izolované soustavy se zachovává.

Zákon zachování mechanické energie (ZZME):

Celková mechanická energie izolované soustavy se zachovává, neboli součet potenciální a kinetické energie je konstantní.





$$\text{ZZH: } \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2,$$

kde \vec{p}_1 – hybnost 1. vozíku před srážkou,

\vec{p}_2 – hybnost 2. vozíku před srážkou,

\vec{p}'_1 – hybnost 1. vozíku po srážce,

\vec{p}'_2 – hybnost 2. vozíku po srážce.

Dosadíme za hybnost:

$$m_1 \vec{v}_1 + 0 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2.$$

Zvolíme souřadný systém podle obrázku a prepíšeme skalárně:

$$m_1 v_1 = -m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (1)$$

$$\text{ZZME: } E_{k1} + E_{k2} = E'_{k1} + E'_{k2},$$

kde E_{k1} – kinetická energie 1. vozíku před srážkou,

E_{k2} – kinetická energie 2. vozíku před srážkou,

E'_{k1} – kinetická energie 1. vozíku po srážce,

E'_{k2} – kinetická energie 2. vozíku po srážce.

Dosadíme za kinetickou energii:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_1'^2. \quad (2)$$

Rovnici (1) na pravé straně upravíme vytknutím v_1' a pak ji umocníme. Rovnici (2) vynásobíme dvěma.

$$\text{ZZH: } m_1v_1 = -m_1v_1' + m_2v_1' = v_1'(m_2 - m_1) \quad /^2$$

$$\text{ZZME: } \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_1'^2 \quad / \cdot 2$$

Dostali jsme tvar:

$$m_1^2v_1^2 = v_1'^2(m_2 - m_1)^2$$

$$m_1v_1^2 = v_1'^2(m_1 + m_2)$$

Vyjádříme si z obou rovnic v_1^2 a dáme do rovnosti:

$$\frac{v_1'^2}{m_1^2}(m_2 - m_1)^2 = \frac{v_1'^2}{m_1}(m_1 + m_2)$$

Protože složka $\frac{v_1'^2}{m_1^2}$ je nenulová, můžeme s ní celou rovnici vydělit. Dostaneme:

$$(m_2 - m_1)^2 = m_1(m_1 + m_2)$$

Zbývá nám rovnici upravit:

$$m_2^2 - 2m_1m_2 + m_1^2 = m_1^2 + m_1m_2$$

$$m_2^2 - 3m_2m_1 = 0$$

$$m_2(m_2 - 3m_1) = 0$$

Protože hmotnost druhého vozíku není nula, musí platit:

$$m_2 = 3m_1.$$

Pro poměr hmotností vozíků pak platí:

$$\frac{m_2}{m_1} = 3.$$

Odpověď: Poměr hmotností vozíků je $\frac{m_2}{m_1} = 3$.