Moment setrvačnosti

- je v obecné případě tenzor $\hat{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{12} & J_{22} & J_{23} \\ J_{13} & J_{23} & J_{33} \end{bmatrix}$
- prvky tenzoru odpovídají kartézským složkám vektoru otáčení **b**

$$J_{ln} = m \cdot \left(\vec{b}_l \times \vec{r}\right) \cdot \left(\vec{b}_n \times \vec{r}\right) \quad l, n = 1, 2, 3$$

- *zde*: osa rotace je v ose z, tedy $\vec{b} = [0; 0; 1] = \vec{k}$

$$J = J_{zz} = m \cdot \left(x\vec{j} + y\vec{i}\right)^2 = m \cdot \left(x^2 + y^2\right) = mr_{\perp}^2$$

Hybnost a točivost

- hybnost (*vzhledem k souřadné soustavě*)

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

- točivost (*k ose*) – moment hybnosti

$$\mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = m r_{\perp}^{2} \boldsymbol{\omega}$$

$$\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega}$$

Kinetická energie hmotného bodu

na rozdíl od hybnosti a točivosti je skalár

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} m (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 = \frac{1}{2} m r_\perp^2 \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2$$

Rekapitulace

- sledujeme pohyb hmotného bodu
- všechny geometrické charakteristiky odvozeny z časové funkce **r**(t)
- fyzikální charakteristikou je m
- na základě těchto dvou údajů zavedeny veličiny: $\vec{v}, \vec{a}, \vec{\varphi}, \vec{\omega}, \vec{\varepsilon}, s, J, \vec{p}, \vec{L}, E_k$
- různé charakteristiky jsou vhodné v různých situacích

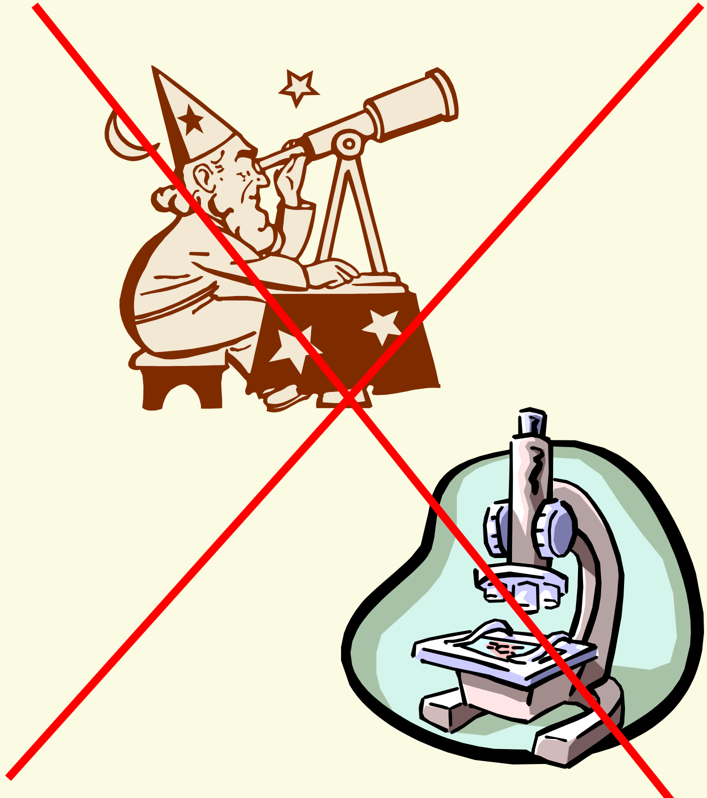
Základní otázky dynamiky

Jak se pohybuje těleso v určitých podmínkách?

Co způsobí, že těleso koná pohyb?

Vymezení:

- musíme využít zkušenost
- najít soulad s pozorováním
- omezit se dostupné rozměry



Zkušenost:

- Tělesa
  - mění svůj pohybový stav
  - mění svůj tvar
- tyto změny musí mít svoji příčinu:
- různá tělesa se *vzájemně* ovlivňují
- toto působení se projevuje při dotyku, ale i na jistou vzdálenost

Interakce

- Působení bodů je určeno speciálními vlastnostmi – NENÍ obecné
- neexistuje *jednotný* (*jediný*) popis
- nelze nalézt jednu obecnou charakteristiku
- jedno těleso může mít i několik charakteristik, projevujících se v různých vazbách

Interakce

- z hlediska klasické mechaniky:
  - přímé působení – dotyk bodů (těles)
    - „tlakové působení“ – dotyk
    - smykové složky, vzájemný posuv
  - působení na dálku (zprostředkované)
    - charakterizuje se termínem pole
    - vliv v celém prostoru – funkce souřadnic
- vždy ***směrový*** charakter

S í l a

- ***interakci*** lze charakterizovat ***různě*** vytvořenými ***veličinami*** (pojmy) či jejich kombinacemi
- každý takový pojem se vytváří empiricky
- **síla** je taková charakteristika, která vyvolává opět **sílu** – v téže přímce, stejně velkou, opačně orientovanou

S í l a

- fyzikální veličina, umožňující kvantifikovat vzájemné působené – označuje se **F** (či jiným velkým písmenem)

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t, \mathbf{v}, \mathbf{a}, m, Q, \ldots)$$

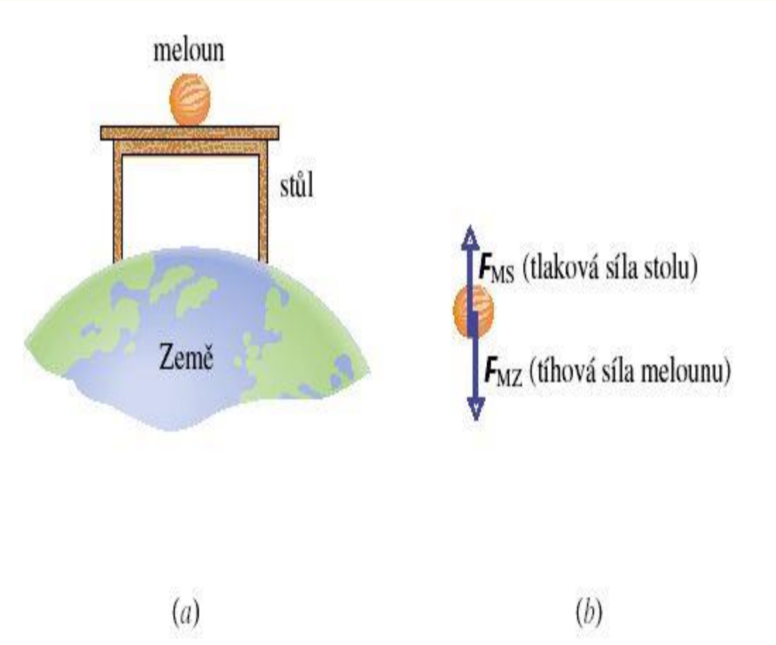
$$\mathbf{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

- V mezích klasické mechaniky se určuje empiricky (měřením a porovnáváním)

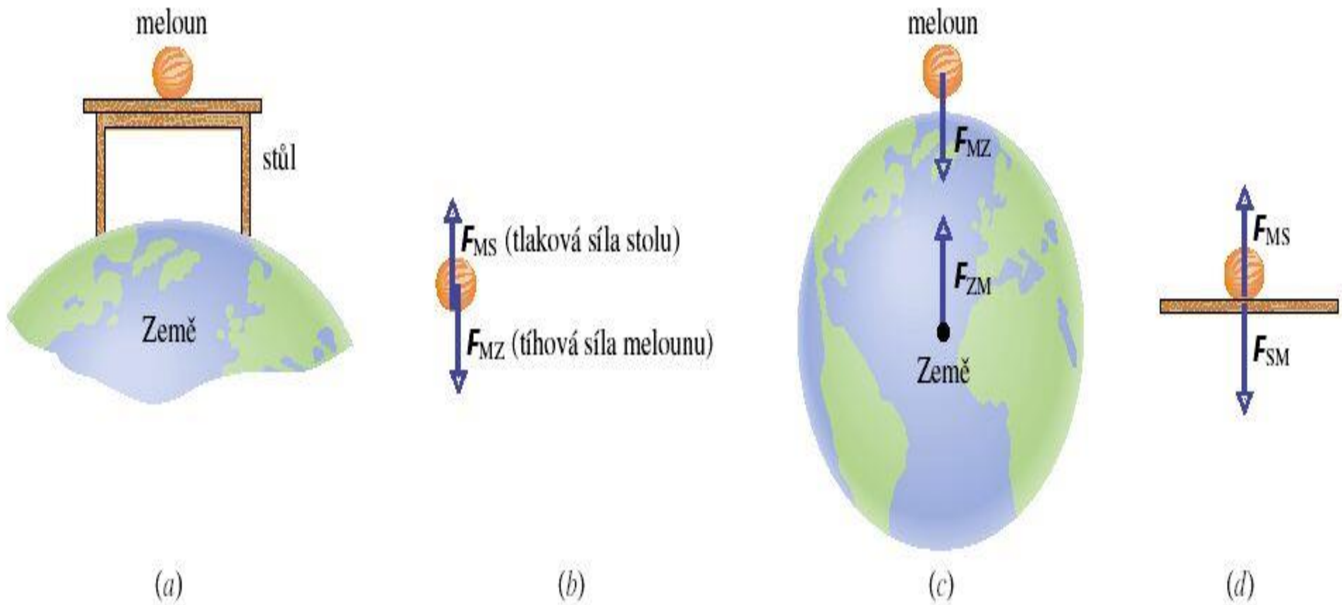
S í l a

- vzájemné působení lze popsat veličinou typu vektor
- představuje působení mezi dvěma tělesy
  – je vhodné užít DVA vektory – působení tělesa č. 1 na č. 2 a naopak
- síla je jednoznačná charakteristika dvojice těles, mění se s rozměry těles, polohou, rychlostí, hmotností či *jinak*.

Akce a reakce



Akce a reakce



Obr. 5.14 (a) Meloun leží na stole, který spočívá na zemském povrchu. (b) *Na meloun* působí síly $\boldsymbol{F}_{MS}$ a $\boldsymbol{F}_{MZ}$. Meloun je v klidu, neboť tyto síly jsou v rovnováze. (c) Dvojice akce – reakce při interakci melounu a Země. (d) Dvojice akce – reakce při interakci melounu a stolu.

Souhrnný popis působení

- Síla (moment,..) charakterizuje působení
  - v jednom bodě
  - v jednom okamžiku
- = popis STAVU
- souhrnný popis
  - na určité dráze
  - v časovém intervalu
- = popis DĚJE

Impuls síly

- Souhrnně hodnotí účinek síly
  - není důležitý výsledek působení (tj. *stav na konci*)
  - je důležitý popis pro časový úsek
- proto

$$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}.\mathrm{d}t$$

- impuls je časový integrál (*účinek*) síly

Impuls síly

- jen v případě konstantní síly, tj.
  - velikost
  - směr !!!!!
- lze použít jednoduchý součin skalárů

$$I = F.\Delta t$$

- a směr impulsu je stejný jako síly

Práce

- Souhrnně hodnotí účinek síly
  - **není** důležitý výsledek působení (tj. *stav na konci*)
  - je důležitá charakteristika děje
- proto

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}.\mathrm{d}\mathbf{r}$$

- práce je dráhový integrál (*účinek*) síly

Potenciální energie

- tento **určitý** integrál lze zapsat pomocí primitivní funkce (**neurčitého** integrálu)

$$-\int \mathbf{F}.\mathrm{d}\mathbf{r} = E_P(\mathbf{r})$$

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}.\mathrm{d}\mathbf{r} = \left[\int \mathbf{F}.\mathrm{d}\mathbf{r}\right]_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} = \left[-E_p(\mathbf{r})\right]_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}$$

$$W = \left[E_p(\mathbf{r})\right]_{\mathbf{r}_2}^{\mathbf{r}_1} = E_p(\mathbf{r}_1) - E_p(\mathbf{r}_2)$$

Potenciální energie

$$-\int \mathbf{F}(\mathbf{r}).\mathrm{d}\mathbf{r} = E_P(\mathbf{r})$$

- pokud $\mathbf{r} = x\vec{i}$ tak $E_p = E_p(x)$

$$\mathbf{F}.\mathbf{r} = (F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}).x\vec{i} = F_x x \quad \mathrm{d}E_p = -F_x\mathrm{d}x$$

a tedy $$-\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x} = F_x$$

Potenciální energie

- v trojrozměrném prostoru

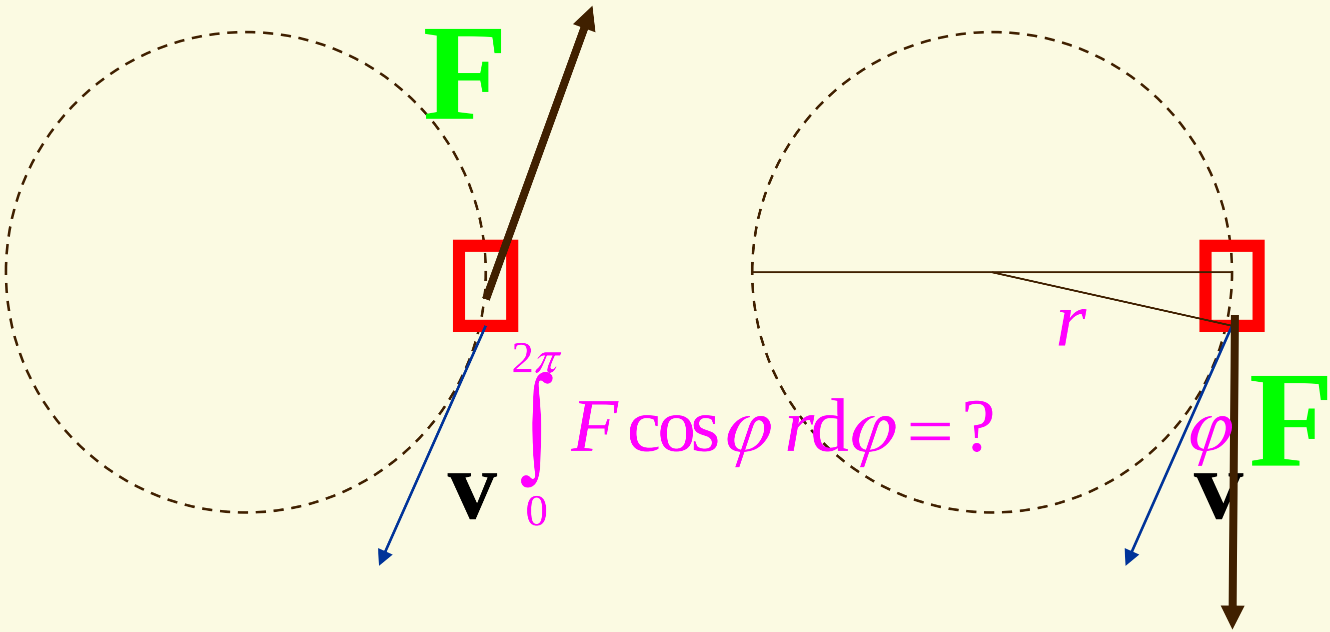
$$\mathrm{d}E_p(x,y,z) = -F_x\mathrm{d}x - F_y\mathrm{d}y - F_z\mathrm{d}z$$

$$-\frac{\partial E_p(\mathbf{r})}{\partial x} = F_x \qquad -\frac{\partial E_p(\mathbf{r})}{\partial y} = F_y$$

$$-\frac{\partial E_p(\mathbf{r})}{\partial z} = F_z$$

Výpočet práce pro dvě síly:

$$\mathbf{F} = -F.\vec{\tau} \qquad \mathbf{F} = -F.\vec{j}$$



$$W = -2\pi r F \qquad W = 0$$

Pokud E_p existuje

$$E_P(\mathbf{r}) = -\int \mathbf{F}(\mathbf{r}).\mathrm{d}\mathbf{r} \Rightarrow$$

$$-\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla E_P(\mathbf{r}) = \frac{\partial E_P(\mathbf{r})}{\partial x} i + \frac{\partial E_P(\mathbf{r})}{\partial y} j + \frac{\partial E_P(\mathbf{r})}{\partial z} k$$

- Skalární pole E_p obsahuje tytéž informace o interakci, stejně jako vektorová síla
- E_p je další vhodná charakteristika

Potenciální energie

- je **neurčitý** integrál

$$E_P(\mathbf{r}) = -\int \mathbf{F}(\mathbf{r}).\mathrm{d}\mathbf{r}$$

- (je funkcí **r**) – lze zavést, platí-li

$$\oint_{lib.\,k\check{r}ivka} \mathbf{F}.\mathrm{d}\mathbf{r} = 0$$

Potenciální energie

- v trojrozměrném prostoru:
  - síly **konzervativní** – splňují podmínku

$$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}).d\mathbf{r} = 0$$

  - a mají potenciální energii
  - síly **disipativní** – platí $\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}).d\mathbf{r} \neq 0$ nebo nelze
  - a NEmají potenciální energii

Práce a potenciální energie

- Práci lze přiřadit jakékoli síle
- obecně závisí na tvaru dráhy
- je charakteristikou **děje na** této **křivce**

- potenciální energii lze přiřadit jen některým silám
- je charakteristikou stavu, stejně jako síla

Rekapitulace

- zabýváme se vzájemným působením vybraného tělesa (bodu) s okolím
- interakci je nutno popsat fyzikální veličinou
- používá se:
  - síla **F,** moment síly **M**
  - impuls síly **I**, práce W
  - potenciální energie $E_p(t,\mathbf{r},\ldots.)$

- různé charakteristiky jsou vhodné v různých situacích

Interakce

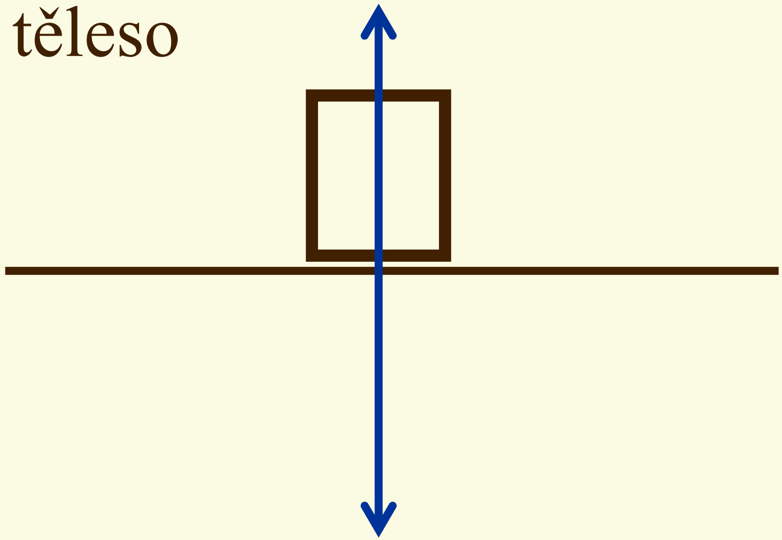
- z hlediska klasické mechaniky:
  - přímé působení – dotyk bodů (těles)
    - „tlakové působení“ – dotyk
    - smykové složky, vzájemný posuv
  - působení na dálku (zprostředkované)
    - charakterizuje se termínem pole
    - vliv v celém prostoru – funkce souřadnic

Příklady sil

- **síly při dotyku** dvou bodů (těles)
  - tlaková síla
  - třecí síla
  - tahová síla
- silová pole
  - ....

Přímý dotyk těles

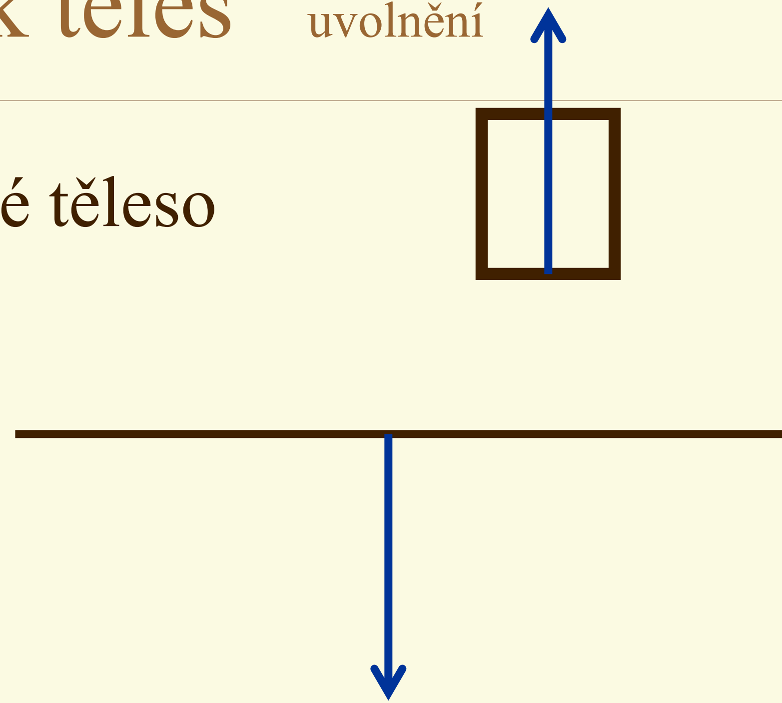
- dokonale tuhé těleso



- směr normály k ploše dotyku
- tlakové působení

Přímý dotyk těles

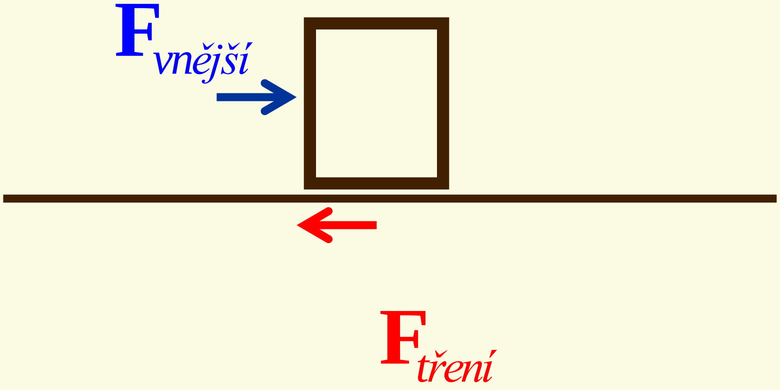
uvolnění



- dokonale tuhé těleso
- směr normály k ploše dotyku
- tlakové působení

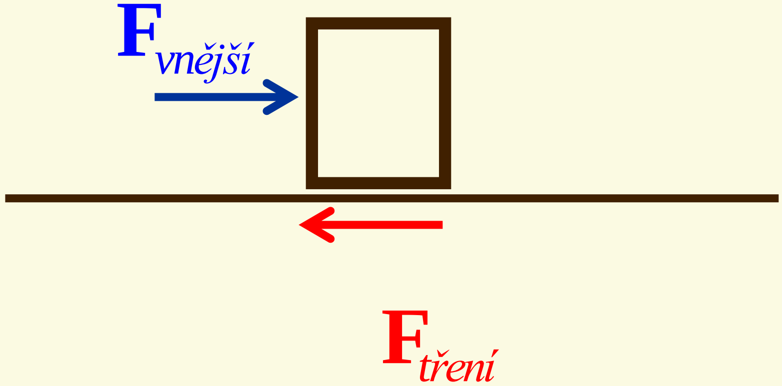
Přímý dotyk těles

- dokonale tuhé těleso



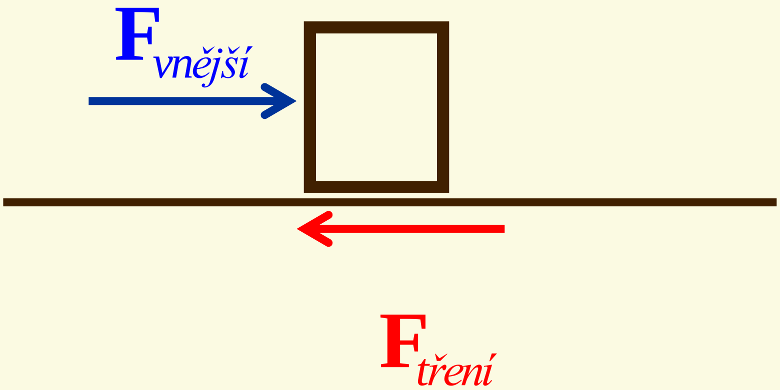
Přímý dotyk těles

- dokonale tuhé těleso



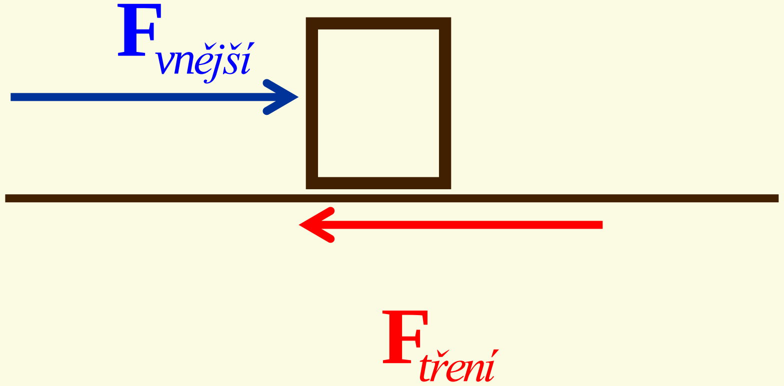
Přímý dotyk těles

- dokonale tuhé těleso



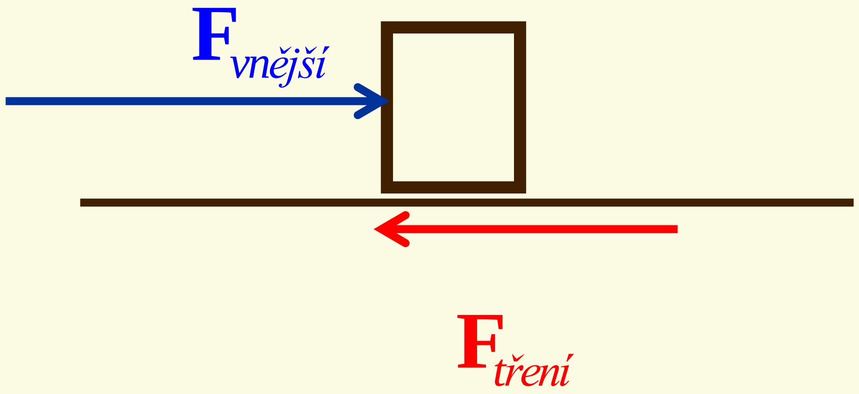
Přímý dotyk těles

- dokonale tuhé těleso



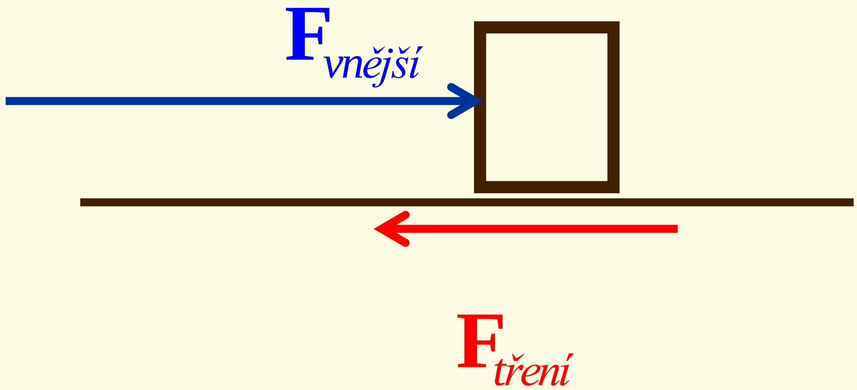
Přímý dotyk těles

- dokonale tuhé těleso



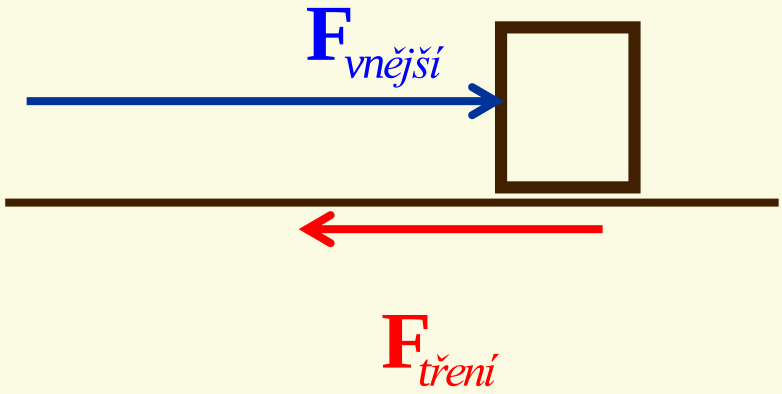
Přímý dotyk těles

- dokonale tuhé těleso



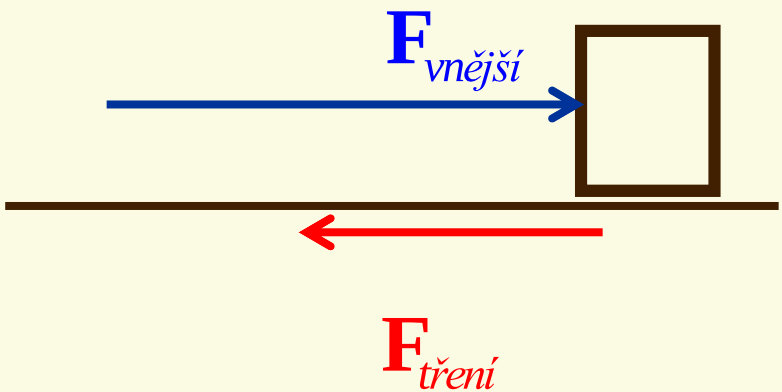
Přímý dotyk těles

- dokonale tuhé těleso



Přímý dotyk těles

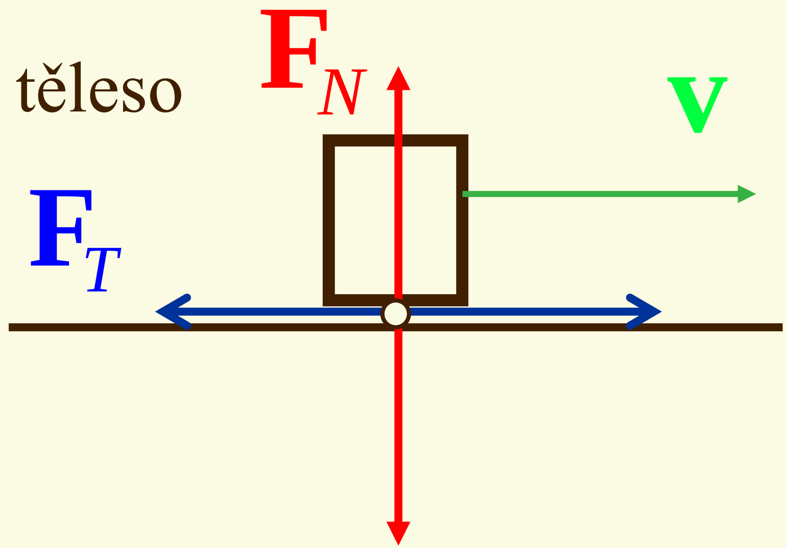
- dokonale tuhé těleso



- $\mathbf{F}_{vnější}$ i $\mathbf{F}_{tření}$ působí na totéž těleso
- směr tření je proti vnějšímu působení
- třecí síla při klidu, při pohybu

Přímý dotyk těles

- dokonale tuhé těleso

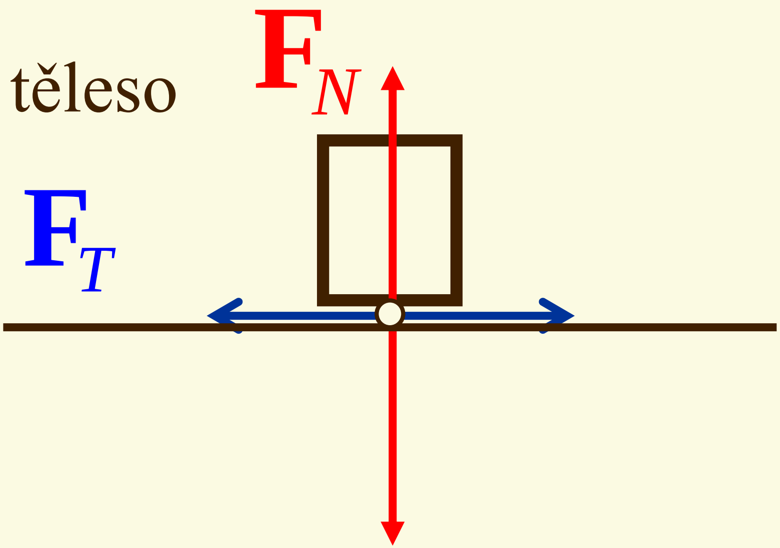


- **tělesa se vzájemně pohybují**
- směr působení v ploše dotyku
- tření

$$F_T \sim F_N$$

Přímý dotyk těles

- dokonale tuhé těleso

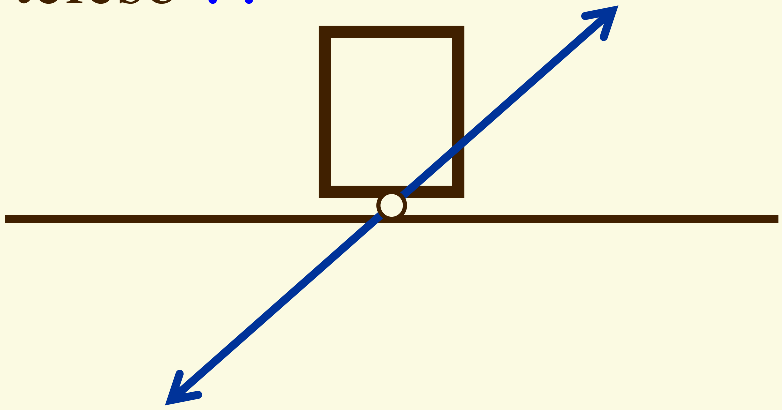


- **tělesa jsou vzájemně v klidu**
- směr působení v ploše dotyku
- tření

$$F_T \leq F_{T\max}$$

Přímý dotyk těles

- *dokonale tuhé* těleso ??



- silové působení =>

  těleso se deformuje

Přímý dotyk těles

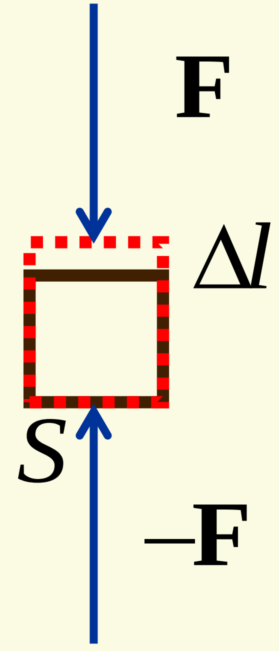
- *pružné* těleso

$$F = k\Delta l$$

- **tuhost** - vlastnost tělesa (jako celku)

$$\frac{F}{S} = \sigma = E\varepsilon = E\frac{\Delta l}{l}$$

- **modul E** – vlastnost materiálu

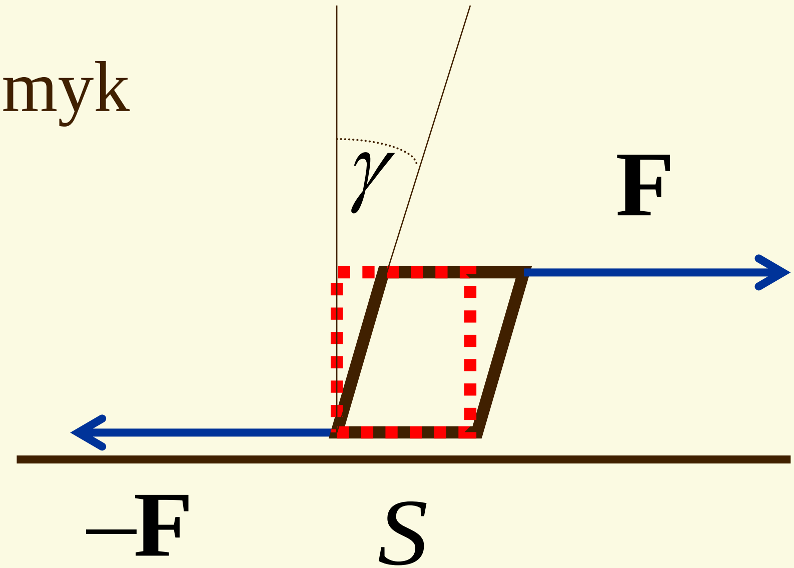


Přímý dotyk těles

- *pružné* těleso – smyk

$$F \sim \Delta\varphi \,(= \gamma)$$

$$\frac{F}{S} = \tau = G\gamma$$

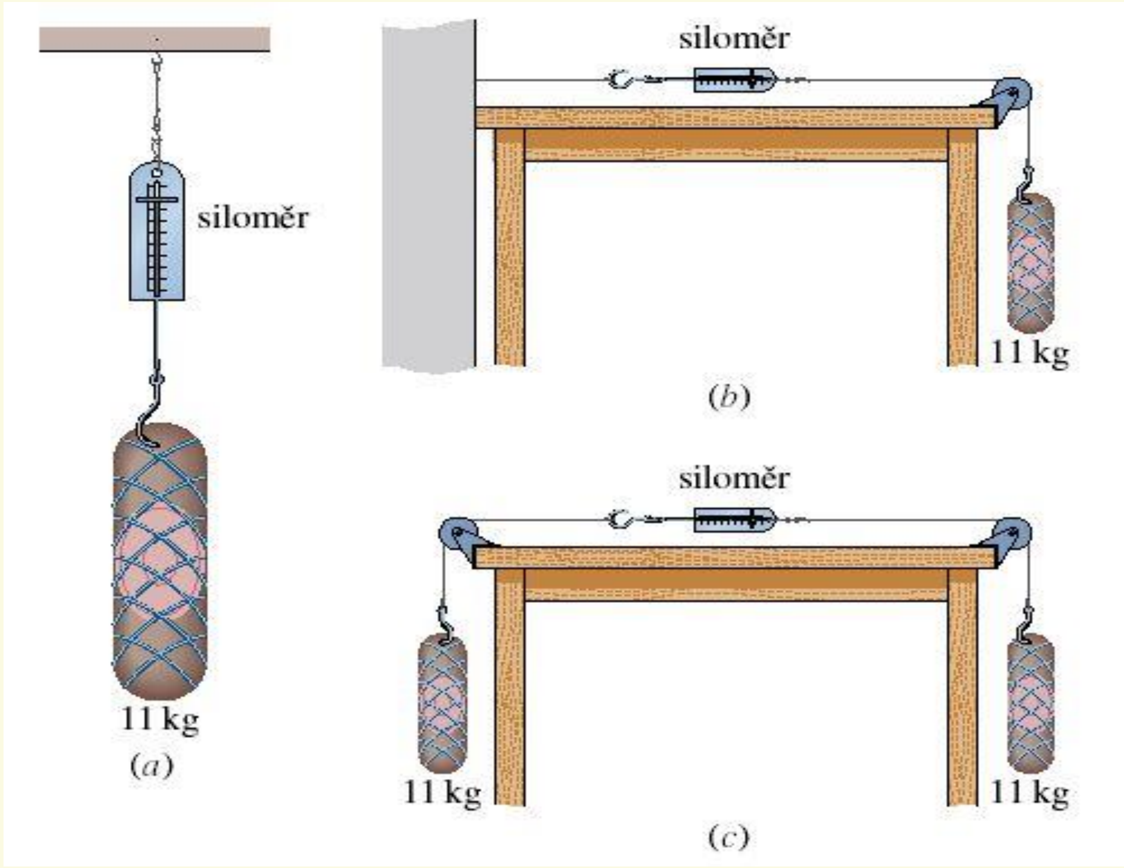


- **modul G** – vlastnost materiálu

Tahová síla

- představována působením lana
- lano je
  - nehmotné
  - dokonale tuhé
  - dokonale deformovatelné
- směr síly a lana je týž

Tahová síla



Kontaktní síly

Normálová síla *N* je tlaková síla, kterou působí na těleso podložka, na níž těleso spočívá. Je k podložce vždy kolmá.

Třecí silou *F* působí na těleso podložka, pokud je podél ní uváděno do skluzu, nebo již po ní klouže. Tato síla je rovnoběžná s podložkou a směřuje proti směru skutečného či zamýšleného pohybu tělesa. **Dokonale hladká podložka** působí na těleso zanedbatelně malou třecí silou.

Tahovou silou *T* působí na těleso připojené lano (vlákno). Její působiště je v místě spoje. Síla má směr vlákna a míří ven z tělesa. Pro **nehmotné** vlákno (tj. vlákno se zanedbatelnou hmotností) má tahová síla na obou jeho koncích stejnou velikost, i když je vedeno přes **nehmotnou kladku**, která se může otáčet **bez tření** (hmotnost kladky je zanedbatelná stejně jako třecí síla v ose kladky, která by bránila její rotaci).

Příklady sil

- **síly při dotyku** dvou bodů (těles)
  - tlaková síla
  - třecí síla
  - tahová síla
- silová pole
  - ....

Příklady sil

- síly při dotyku dvou bodů (těles)
  - tlaková síla
  - třecí síla
  - tahová síla
- **silová pole**
  - ....

Příklady sil

- síly při dotyku dvou bodů (těles)
  - ....
- **silová pole**
  - síla závislá na **r**:
  - konstantní síla $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = konst.$
  - centrální síla (závisí na *r*) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r).\mathbf{r}^0$
- jiné typy sil

Tíhová síla

$$\mathbf{F} = -F.\vec{j}$$

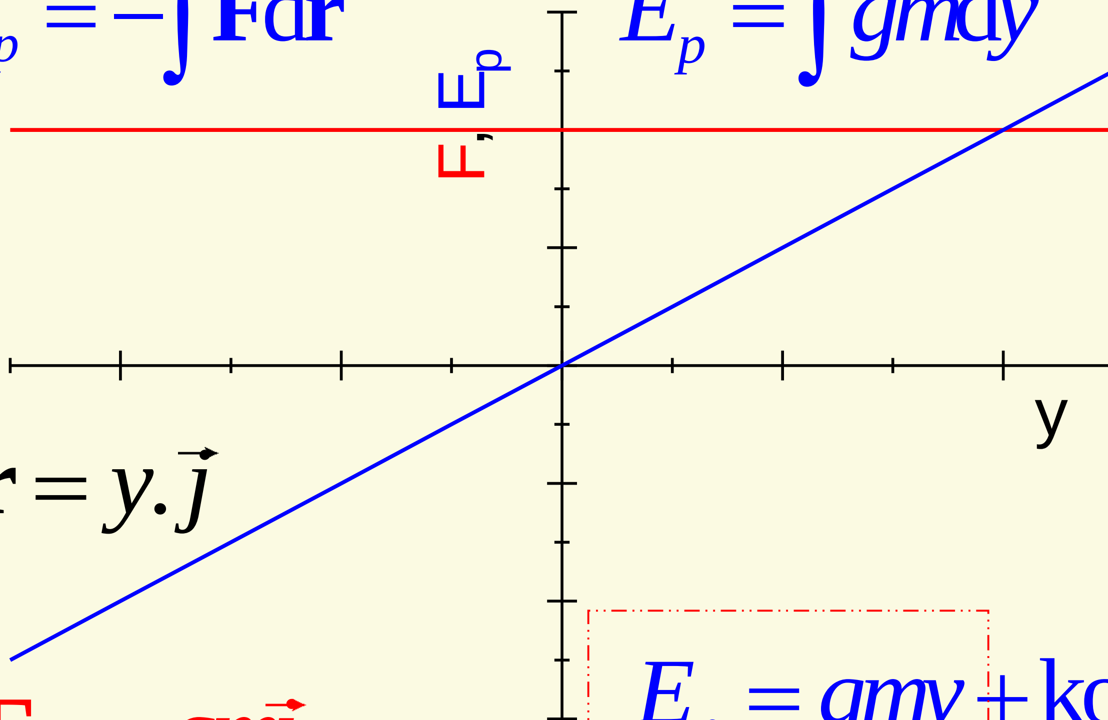
- tíhová síla
    - nezávisí na poloze
    - je různá pro různá tělesa

$$\mathbf{F} = -mg.\vec{j} \qquad g = 9{,}80665\ \mathrm{ms}^{-2}$$

Tíhová síla - homogenní pole

$$E_p = -\int \mathbf{F}\,d\mathbf{r}$$

$$E_p = \int gm\,dy$$



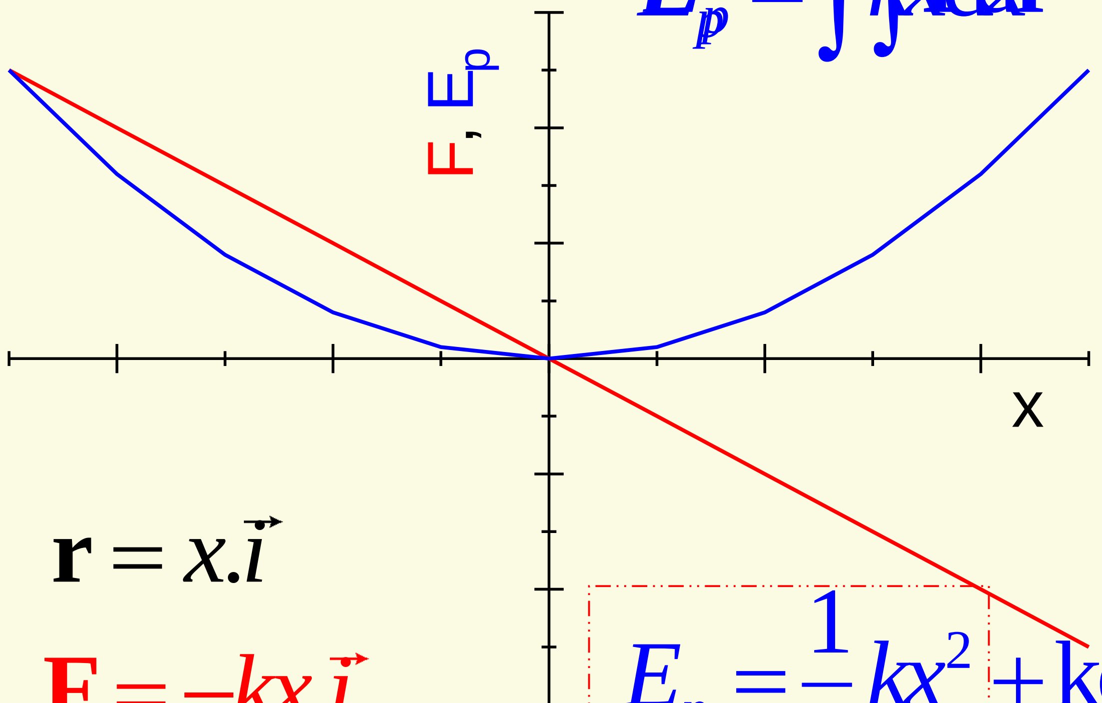
$$\mathbf{r} = y.\vec{j}$$

$$\mathbf{F} = -gm\vec{j}$$

$$\boxed{E_p = gmy + \text{konst}}$$

Elastická síla

$$E_p = -\int \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \int kx\,dx$$



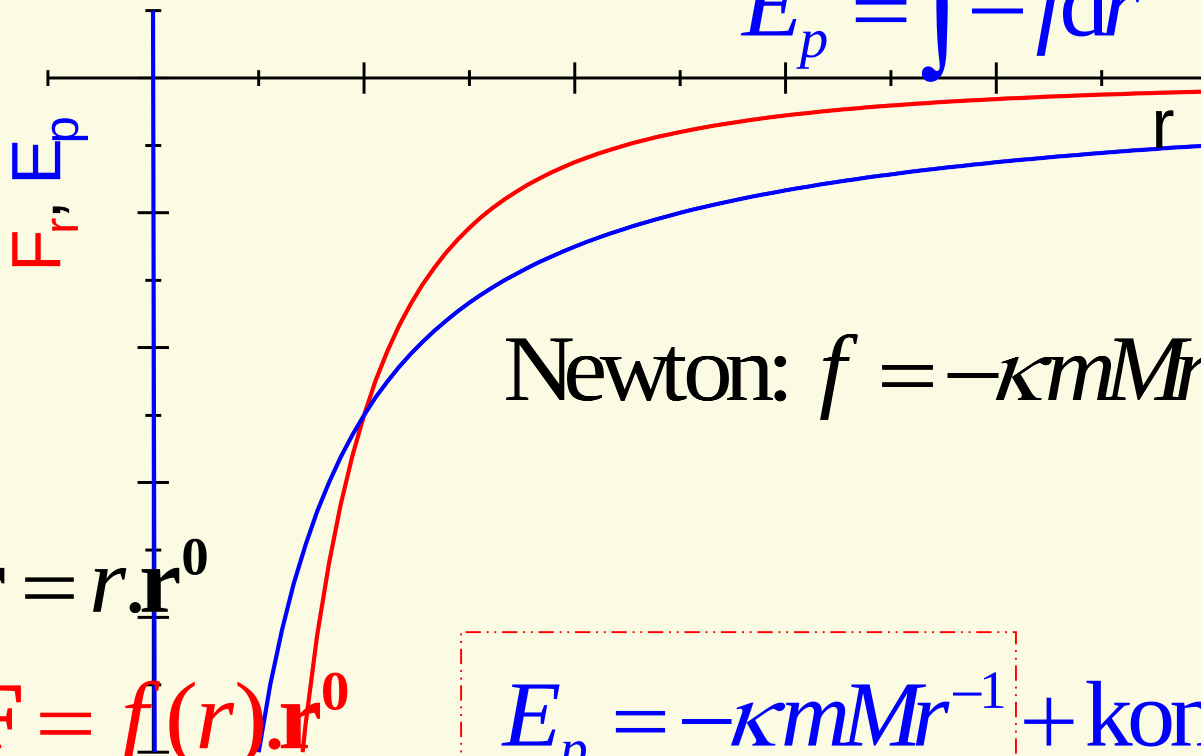
$$\mathbf{r} = x.\vec{i}$$

$$\mathbf{F} = -kx.\vec{i}$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 + \text{konst}$$

Gravitační síla - centrální pole

$$E_p = \int -f\mathrm{d}r$$



$$\text{Newton: } f = -\kappa m M r^{-2}$$

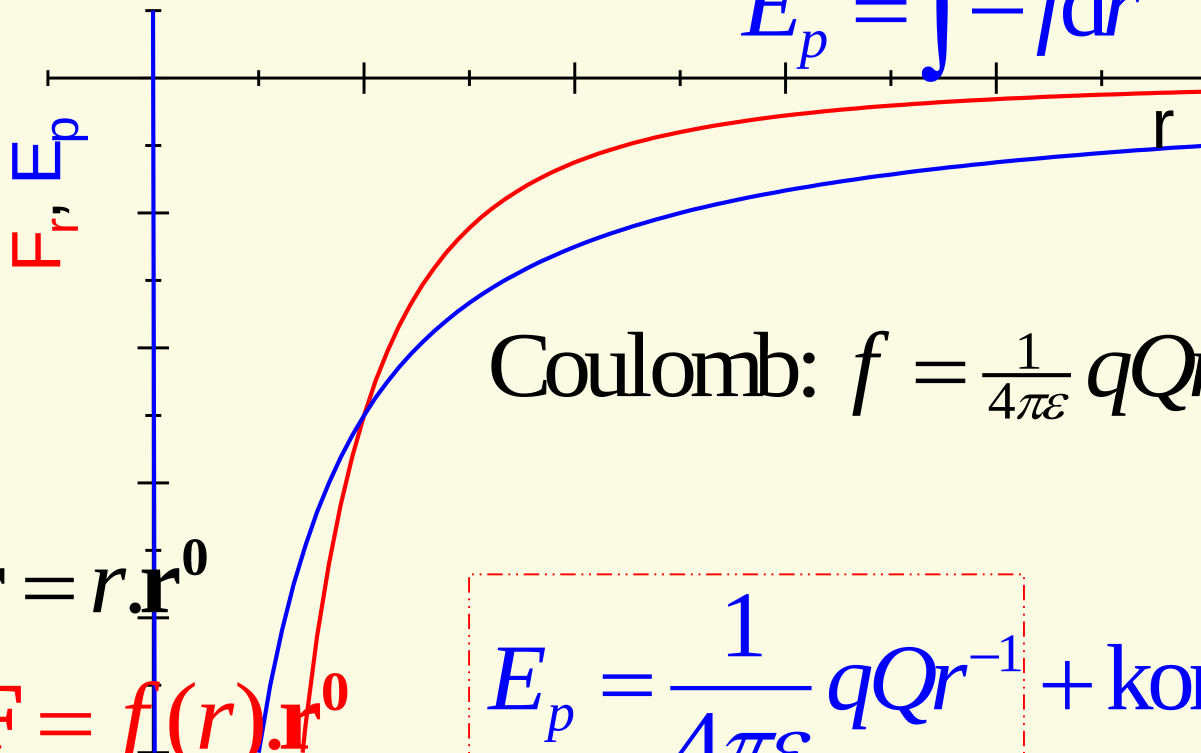
$$\mathbf{r} = r.\mathbf{r}^0$$

$$\mathbf{F} = f(r).\mathbf{r}^0$$

$$\boxed{E_p = -\kappa m M r^{-1}} + \mathrm{konst}$$

Elektrostatická síla - centrální pole

$$E_p = \int -f\,\mathrm{d}r$$



Coulomb: $f = \frac{1}{4\pi\varepsilon} qQr^{-2}$

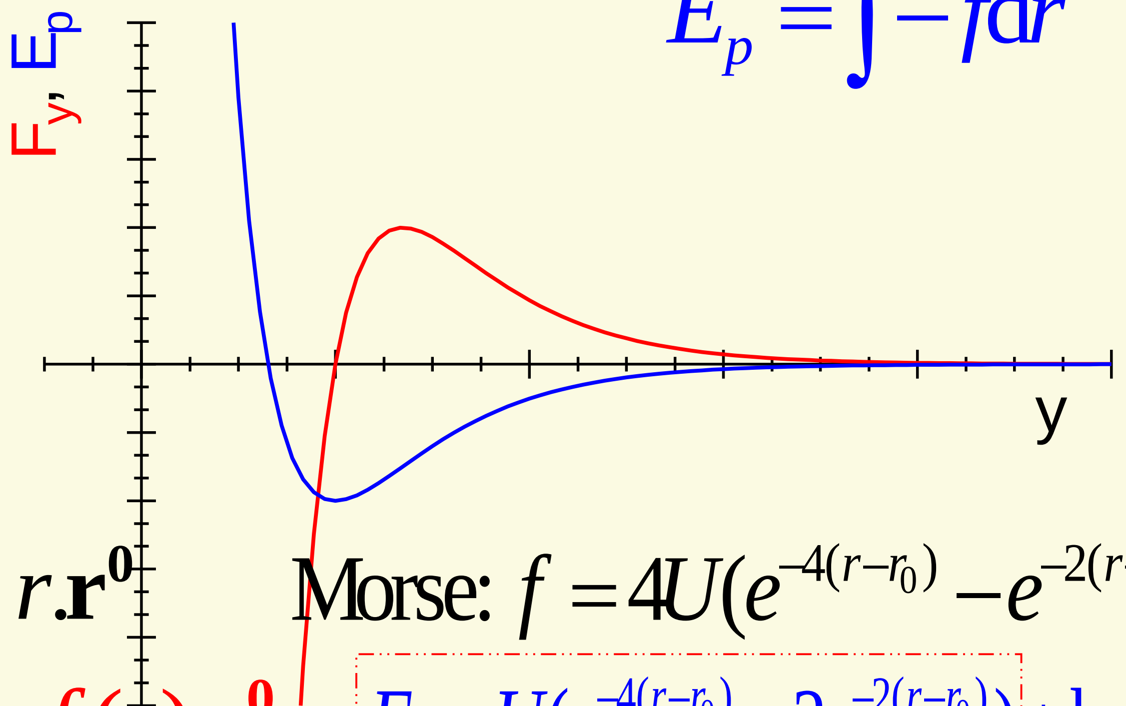
$$\mathbf{r} = r.\mathbf{r}^0$$

$$\mathbf{F} = f(r).\mathbf{r}^0$$

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon} qQr^{-1} + \mathrm{konst}$$

Kovová vazba – centrální pole

$$E_p = \int -f\,\mathrm{d}r$$



$$\mathbf{r} = r.\mathbf{r^0}$$

$$\mathbf{F} = f(r).\mathbf{r^0}$$

Morse: $f = 4U\left(e^{-4(r-r_0)} - e^{-2(r-r_0)}\right)$

$$\boxed{E_p = U\left(e^{-4(r-r_0)} - 2e^{-2(r-r_0)}\right) + \mathrm{konst}}$$