1 Elementární funkce – pokračování

Příklad 1.1 Vyřešte rovnici:

$$\tan z = \frac{5}{3} j \,.$$

Po dosazení z definice funkce tan dostaneme:

$$\frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{j} \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{e^{jz} + e^{-jz}} = \frac{5}{3} j \,.$$

Po substituci $p = e^{jz}$ a vynásobení j máme:

$$\frac{p - p^{-1}}{p + p^{-1}} = -\frac{5}{3} \,.$$

A tedy

$$3p - 3p^{-1} = -5p - 5p^{-1} \,.$$

Po vynásobení p a převedení všech členů na jednu stranu dostáváme:

$$8p^2 + 2 = 0 \,.$$

Řešení této kvadratické rovnice je následující:

$$p \in \sqrt{-\frac{1}{4}} = \left\{ \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}}, \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \right\} = \left\{ \frac{j}{2}, -\frac{j}{2} \right\} \,.$$

Dosadíme-li za p dostáváme:

$$jz \in \operatorname{Log}\left(\frac{j}{2}\right) \cup \operatorname{Log}\left(-\frac{j}{2}\right) \,,$$

tedy

$$jz \in \left\{ -\ln 2 + j\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\ln 2 + j(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \,.$$

Po vydělení j a sjednocení obou množin dostaneme:

$$z \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi + j \ln 2 \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \,.$$

Příklad 1.2 Řešte rovnici:

$$\cosh z + \sinh z = j \,.$$

Dosazením z definice funkcí sinh a cosh dostaneme:

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} + \frac{e^z - e^{-z}}{2} = e^z = j \,.$$

Množina řešení tedy je

$$z \in \operatorname{Log}(j) = \left\{ j\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \,.$$

Příklad 1.3 Najděte množinu řešení rovnice:

$$\sin z - \cos z = j\,.$$

Dosazením z definice funkcí sin a cos dostaneme:

$$\frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} - \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} = j\,.$$

Roznásobením $2j$ máme:

$$e^{jz} - e^{-jz} - je^{jz} - je^{-jz} = -2\,.$$

Substitucí $p = e^{jz}$ a vynásobením p získáme:

$$p^2 - 1 - jp^2 - j + 2p = 0\,.$$

Tedy

$$(1-j)p^2 + 2p - (1+j) = 0\,.$$

Kořeny této rovnice jsou

$$p_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4(1-j)(1+j)}}{2(1-j)} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{1-j} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3})(1+j)\,.$$

Po dosazení za p dostaneme, že jz musí ležet v jedné z následujících dvou množin:

$$\operatorname{Log}\left(\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3})(1+j)\right) = \left\{\ln\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + j\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\},$$

$$\operatorname{Log}\left(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3})(1+j)\right) = \left\{\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + j\left(-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\},$$

Po vydělení j tedy dostáváme množinu řešení:

$$\left\{\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) - j\ln\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\left(-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right) - j\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2 Holomorfní funkce

Příklad 2.1 Určete, kde jsou funkce f holomorfní a určete f':

1. $f(z) = 3z^2 - 2jz + 5j - 1$,
2. $f(z) = (\mathrm{Im}\ z)^2$,
3. $f(z) = 2jz - \frac{3j}{z+j5}$,
4. $f(z) = \frac{e^z \cos z}{z - j\pi}$,

5. $f(z) = 3j\sqrt{z}$,
6. $f(z) = \frac{3+j5}{\sqrt{z-1+j}}$,
7. $f(z) = \log(z^2+1)$,

Řešení:

1. f je holomorfní v $\mathbb{C}$ a $f'(z) = 6z - 2j$.
2. Protože $(\text{Im } z)^2 = y^2$, dostaváme, že $u(x,y) = y^2$ a $v(x,y) = 0$. Spočtěme parciální derivace u a v.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

   Z C-R podmínek plyne, že f má derivaci jen pokud $y = 0$, t.j. pouze na reálné ose. Což znamená, že f není holomorfní nikde.

3. f je holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{-5j\}$ a $f'(z) = 2j + \frac{3j}{(z+5j)^2}$.
4. f je holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{j\pi\}$ a z derivace podílu a součinu dostaneme:

$$f'(z) = \frac{e^z(\cos z - \sin z)(z - j\pi) - e^z \cos z}{(z - j\pi)^2}.$$

5. f je holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{w \in \mathbb{C} \mid \text{Re } w \leq 0, \text{Im } w = 0\}$ a

$$f'(z) = 3j\frac{1}{2\sqrt{z}}.$$

6. Vzhledem k tomu, že derivace hlavní větve odmocniny neexistuje v

$$M = \{w \in \mathbb{C} \mid \text{Re } w \leq 0, \text{Im } w = 0\},$$

   musíme zjistit, kdy platí $z-1+j \in M$. Dostáváme tedy, že f je holomorfní na množině:

$$\mathbb{C} \setminus \{w \in \mathbb{C} \mid \text{Re } w \leq 1, \text{Im } z = -1\}.$$

   Derivace je rovna:

$$f'(z) = \frac{-(3+j5)}{2(z-1+j)\sqrt{z-1+j}} = -\frac{(3+j5)\sqrt{z-1+j}}{2(z-1+j)^2}.$$

7. Derivace funkce log neexistuje na
$$M = \{w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\ w \leq 0, \mathrm{Im}\ w = 0\},$$
tedy musíme zjistit, kdy $z^2+1 \in M$. Nechť $z^2+1 = w \in M$, pak z je $\pm j\sqrt{|w-1|}$. Máme tedy, že f je holomorfní na
$$\mathbb{C} \setminus \{w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\ w = 0, |w| \geq 1\}.$$
Derivace je rovna:
$$f'(z) = \frac{2z}{z^2+1}.$$

3 Integrál komplexní funkce

Příklad 3.1 Vypočtěte integrál
$$\int_{\mathcal{C}} |z|^2 \mathrm{d}z,$$
kde $\mathcal{C}$ je positivně orientovaný obdelník s vrcholy:
$$-1, 2, 2+j, -1+j.$$
Křivku $\mathcal{C}$ popíšeme následovně:
$$\begin{array}{llll}
\mathcal{C}_1: & \varphi_1(t) = t, & \varphi_1'(t) = 1, & t \in \langle -1, 2\rangle, \\
\mathcal{C}_2: & \varphi_2(t) = 2+jt, & \varphi_2'(t) = j, & t \in \langle 0, 1\rangle, \\
\mathcal{C}_3: & \varphi_3(t) = -t+j, & \varphi_1'(t) = -1, & t \in \langle -2, 1\rangle, \\
\mathcal{C}_4: & \varphi_4(t) = -1-jt, & \varphi_1'(t) = -j, & t \in \langle -1, 0\rangle.
\end{array}$$
Protože $|z|^2 = x^2+y^2$, pro jednotlivé úseky dostáváme:
$$\int_{\mathcal{C}_1} |z|^2 \mathrm{d}z = \int_{-1}^{2} t^2 \mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3.$$
$$\int_{\mathcal{C}_2} |z|^2 \mathrm{d}z = \int_{0}^{1} (4+t^2) j \mathrm{d}t = j\left(4 + \frac{1}{3}\right) = \frac{13}{3}j.$$
$$\int_{\mathcal{C}_3} |z|^2 \mathrm{d}z = \int_{-2}^{1} (-t^2-1) \mathrm{d}t = \left[-\frac{t^3}{3} - t\right]_{-2}^{1} = -\frac{1}{3} - 1 - \frac{8}{3} - 2 = -6.$$
$$\int_{\mathcal{C}_4} |z|^2 \mathrm{d}z = \int_{-1}^{0} (1+t^2)(-j) \mathrm{d}t = -j\left[t + \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{0} = -j - \frac{j}{3} = -\frac{4}{3}j.$$

Sečtením hodnot pro jednotlivé části křivky dostaneme:

$$\int_{\mathcal{C}} |z|^2 \mathrm{d}z = 3 + \frac{13}{3}j - 6 - \frac{4}{3}j = 3(-1+j)\,.$$

Příklad 3.2 Vypočtěte

$$\int_{\mathcal{C}} \overline{z} \arg z \;\mathrm{d}z\,,$$

kde $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná křivka daná rovnicí $|z| = 1$. Protože funkce $\arg z$ je nespojitá na záporné reálné ose, budeme ji parametrizovat tak abychom ji během integrace neprotnuli, ale umístíme bod nespojitosti na začátek křivky. Tedy

$$\varphi(t) = e^{jt}\,, \quad t \in \langle -\pi, \pi\rangle\,.$$

Pak $\varphi'(t) = je^{jt}$, $\overline{\varphi(t)} = e^{-jt}$ a $\arg\varphi(t) = t$. Dostáváme tedy

$$\int_{\mathcal{C}} \overline{z} \arg z \;\mathrm{d}z = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jt}\, t\, je^{jt}\mathrm{d}t = j\int_{-\pi}^{\pi} t \,\mathrm{d}t = j\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = j\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}\right) = 0\,.$$

Příklad 3.3 Vypočtěte

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{-j|z|^2}{16z}\;\mathrm{d}z\,,$$

kde křivka $\mathcal{C}$ se skládá ze dvou částí. První část $\mathcal{C}_1$ je čtvrtkruh se středem v nule o poloměru 4 začínající v bodě $-4j$ a končící v bodě 4. Druhá část $\mathcal{C}_2$ je přímka začínající v bodě 4 a končící v bodě $4j$.

Parametrizujme křivku $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{llll} \mathcal{C}_1: & \varphi_1(t) = 4e^{jt}, & \varphi_1'(t) = 4je^{jt}, & t \in \langle -\frac{\pi}{2}, 0\rangle, \\ \mathcal{C}_2: & \varphi_2(t) = 4 - t + jt, & \varphi_2'(t) = -1 + j, & t \in \langle 0, 4\rangle. \end{array}$$

Pro jednotlivé části tedy dostáváme:

$$\int_{\mathcal{C}_1} \frac{-j|z|^2}{16z}\;\mathrm{d}z = -\frac{j}{16}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{16}{4e^{jt}}\, 4je^{jt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\,.$$

Nejprve zadaný integrál upravme:

$$\int_{\mathcal{C}_2} \frac{-j|z|^2}{16z}\;\mathrm{d}z = -\frac{j}{16}\int_{\mathcal{C}_2} \frac{z\overline{z}}{z}\;\mathrm{d}z = -\frac{j}{16}\int_{\mathcal{C}_2} \overline{z}\;\mathrm{d}z\,.$$

Máme tedy

$$
\begin{aligned}
-\frac{j}{16}\int\limits_{\mathcal{C}_2} \overline{z}\,\mathrm{d}z &= -\frac{j}{16}\int\limits_0^4 (4-t-jt)(-1+j)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{j}{16}\int\limits_0^4 (-4+2t+4j)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{j}{16}\left(\int\limits_0^4 (-4+2t)\,\mathrm{d}t + j\int\limits_0^4 4\,\mathrm{d}t\right) \\
&= -\frac{j}{16}\left(\left[-4t+t^2\right]_0^4 + 16j\right) \\
&= -\frac{j}{16}(0+16j) = 1\,.
\end{aligned}
$$

Sečtením tedy obdržíme:

$$
\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{-j|z|^2}{16z}\,\mathrm{d}z = 1 + \frac{\pi}{2}\,.
$$