Rovnice matematické fyziky

V této podkapitole se seznámíme se základními diferenciálními rovnicemi používanými v matematické fyzice. Jedná se o rovnice zachycující matematicky děje okolo nás. Protože se bude jednat o rovnice, kde neznámé jsou funkce více proměnných a v rovnicích vystupují i derivace těchto funkcí, patří tyto rovnice do kategorie parciálních diferenciálních rovnic. Naprostá většina fyzikálních zákonů a procesů je matematicky formulována právě pomocí parciálních diferenciálních rovnic nebo jejich integrálních ekvivalentů a vztahy, které známe například ze střední školy, jsou aproximacemi řešení těchto rovnic. Tyto rovnice můžeme uvažovat v jedné dimenzi (například šíření tepla nebo kmitů v tyči), ve dvou dimenzích (šíření tepla v desce, kmity membrány) nebo ve třech dimenzích (šíření tepla nebo kmitů v tělese).

Úmluva: Abychom se vyhnuli nedorozuměním v používání symbolu Δ, budeme tímto symbolem v následující kapitole vždy rozumět konečnou změnu. Laplaceův operátor budeme označovat symbolem ∇^2.

Pozorování 1: Všechny rovnice, se kterými se setkáme v této kapitole jsou lineární. Jsou tedy zachovány všechny principy, které plynou přímo z linearity. Zejména tedy libovolná lineární kombinace libovolného počtu řešení homogenní rovnice je opět řešením.

Pozorování 2: V rovnicích uvedených v následujících podkapitolách figurují vždy parciální derivace a jisté materiálové konstanty, dané povahou problému. Tyto konstanty jsou důležité z fyzikálního hlediska, při matematickém studiu je však budeme pro větší přehlednost v některých podkapitolách vynechávat (položíme je rovny jedné). Toto není na úkor obecnosti, protože číselné velikosti konstant lze měnit vhodnou volbou fyzikálních jednotek. Můžeme například délku měřit v tak obrovských jednotkách, že rychlost světla ve vakuu bude rovna jedné. Že je taková jednotka velmi nepraktická při měření v běžném životě není pro matematické studium povahy problému nijak podstatné.

Rovnice kontinuity (bilance množství stavové veličiny)

Odvodíme rovnici kontinuity pro dvě proměnné, pro tři proměnné nebo jednu proměnnou je postup analogický. Nechť x, y jsou prostorové proměnné a t čas. Uvažujme skalární stavovou funkci $u(x, y, t)$ charakterizující stav studovaného objektu v daném bodě a čase. Například hustotu plynu v oblasti mezi dvěma rovnými deskami. Pro jednoduchost předpokládejme, že všechny veličiny jsou dostatečně hladké a použijeme poněkud neformální postup bez podrobných důkazů.

Nechť M je jednoduše souvislá oblast v rovině. Rovnice kontinuity vyjadřuje, že ke změně celkového množství veličiny u v oblasti M za jednotku času přispívá tok veličiny přes hranici ∂M (dovnitř nebo ven) a případné zdroje nebo spotřebiče uvnitř množiny M. Je-li $\vec{\varphi}(x, y, t)$ vektorová funkce popisující tok prostředí popsaného veličinou u, $\sigma(x, y, t)$ je hustota zdrojů (je-li σ kladné) a spotřebičů (je-li σ záporné), docházíme k bilanci pro rychlost změny celkového množství veličiny v množině M ve tvaru

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overbrace{\iint_M u(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}^{\text{množství veličiny v množině } M}}_{\text{velikost změny za jednotku času}} = \underbrace{\iint_M \sigma(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}_{\text{celková vydatnost zdrojů uvnitř množiny } M} - \underbrace{\oint_{\partial M} -\varphi_2(x,y,t)\mathrm{d}x + \varphi_1(x,y,t)\mathrm{d}y}_{\text{tok přes hranici množiny } M}, \qquad (*)$$

kde $\varphi_{1,2}(x, y, t)$ jsou jednotlivé komponenty vektoru $\vec{\varphi}(x, y, z)$.

Rovnice kontinuity (integrální tvar)

Použijeme-li na rovnici (*) Greenovu větu, dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_M u(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M \sigma(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_M \operatorname{div}\vec{\varphi}(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

Pokud se oblast M nemění v čase, je možné na levé straně přesunout časovou derivaci dovnitř integrálu a dostáváme dále rovnici zvanou *rovnice kontinuity v integrálním tvaru*

$$\iint_M \frac{\partial}{\partial t}u(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M \Big(-\operatorname{div}\vec{\varphi}(x,y,t) + \sigma(x,y,t)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Rovnice kontinuity (lokální tvar)

Z rovnice kontinuity v integrálním tvaru

$$\iint_M \frac{\partial}{\partial t}u(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M \Big(-\operatorname{div}\vec{\varphi}(x,y,t) + \sigma(x,y,t)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

plyne (protože rovnost musí platit pro každou množinu M) nutně

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{\varphi} + \sigma,$$

neboli

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\varphi} = \sigma,$$

což je *diferenciální tvar rovnice kontinuity*, ve kterém jsme pro stručnost vynechali explicitní vypisování nezávislých proměnných. Ve stejném tvaru rovnice platí i v lineárním případě a trojdimenzionálním případě. Z integrálního tvaru a z odvození ihned vidíme, že se vlastně jedná o rovnici vyjadřující zákon zachování veličiny u, kde člen $\frac{\partial u}{\partial t}$ vyjadřuje časovou změnu veličiny u, $\vec{\varphi}$ vyjadřuje hustotu toku veličiny u, $\operatorname{div}\vec{\varphi}$ je divergence této hustoty toku a σ je člen související s přítomností zdrojů nebo spotřebičů.

Rovnice kontinuity (speciální případy)

Speciálními případy rovnice kontinuity jsou rovnice kontinuity bez zdrojů

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\varphi} = 0,$$

nebo stacionární rovnice kontinuity pro popis stacionárních jevů

$$\operatorname{div}\vec{\varphi} = \sigma.$$

Stacionární bezzdrojová rovnice kontinuity

$$\operatorname{div}\vec{\varphi} = 0,$$

má v integrálním tvaru pro ustálené proudění nestlačitelné tekutiny trubicí s proměnným průřezem tvar

$$Sv = \text{konst},$$

který známe ze střední školy. Ten vyjadřuje, že objem nestlačitelné tekutiny, který do trubice na jedné straně vteče je stejný jako objem, který z ní vyteče.

Difuzní rovnice (vedení tepla)

Difuzní rovnice je kombinací rovnice kontinuity a zákona, který říká, že v označení z předchozí kapitoly směřuje vektor $\vec{\varphi}$ (difuzní tok, tj. množství veličiny u které projde elementární oblastí za jednotku času) z oblastí s vyšší koncentrací do oblastí s nižší koncentrací a velikost je úměrná gradientu veličiny u. Platí tedy

$$\vec{\varphi} = -D\nabla u,$$

kde D je tzv. difuzní koeficient. Tento zákon a veličina D se vyskytují v mnoha různých oblastech zkoumání přírody a mají různé názvy podle konkrétní povahy proudící veličiny (např. Fickův zákon, Darcyho zákon, Fourierův zákon). S využitím tohoto vztahu má rovnice tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(D\nabla u) = \sigma.$$

Pouze v izotropním prostředí je směr $\vec{\varphi}$ a ∇u stejný. Proto pouze v izotropním prostředí je možné považovat koeficient D za skalární veličinu. Obecně by to mohlo být jakékoliv zobrazení mezi vektorovými prostory a vzhledem k úměrnosti je možné toto zobrazení reprezentovat maticí. Tato matice má navíc speciální vlastnosti (z fyzikálních důvodů bývá symetrická a z matematických důvodů pro ni platí jistá pravidla při změně souřadnic) a nazývá se tenzor. Difuzní koeficient D je tedy tenzorová veličina.

Při studiu pohybu vody nebo tepla ve dřevě neuvažujeme zdroje ($\sigma = 0$) a naopak uvažujeme prostředí, které má v každém směru jiné vlastnosti. Difuzní koeficient je tenzor, ale pokud zvolíme soustavy souřadnic v souladu s anatomickými směry dřeva, ukazuje se, že matice D je diagonální a výsledná difuzní rovnice má poté tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(D_y\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(D_z\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0.$$

Je-li difuzní koeficient D skalární a konstantní (nezávislý na prostorových souřadnicích a na směru, tj. v případě dřeva například $D_x = D_y = D_z = D \in \mathbb{R}$), potom má difuzní rovnice vhledem k identitě

$$\operatorname{div}\vec{\varphi} = -\operatorname{div}(D\nabla u) = -D\operatorname{div}(\nabla u) = -D\nabla^2 u$$

konečný tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\nabla^2 u = \sigma, \qquad (**)$$

kde ∇^2 je Laplaceův operátor. Tuto rovnici je možno najít v literatuře pod názvem rovnice vedení tepla, protože popisuje šíření tepla v prostředí s součinitelem teplotní vodivosti D a hustotou tepelných zdrojů σ.

V praxi je dřevo často s jistou přesností homogenní, ale difuzní koeficient dřeva závisí na teplotě a vlhkosti. Proto vztah mezi gradientem u a difuzním tokem $\vec{\varphi}$ není lineární. Přesto i v tomto případě používáme úměrnost, ovšem složky difuzního koeficientu nepovažujeme za konstanty, ale za veličiny měnící se s u. Ani takovém případě si úpravu na rovnici (**) nemůžeme dovolit.

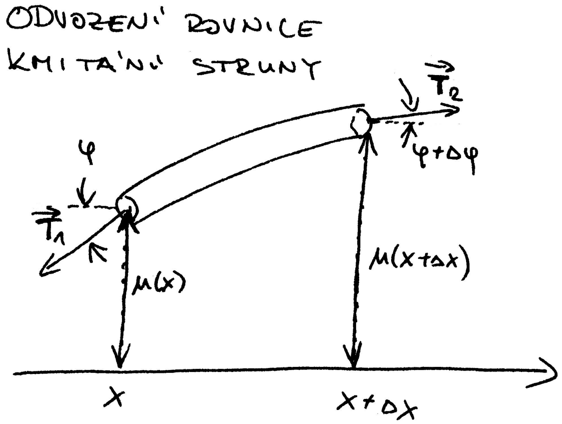
Difuzní rovnice (rozměrová analýza)

Odhadnout některé aspekty chování rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\nabla^2 u = \sigma$$

je možné i bez znalosti řešení této rovnice, kterou je možno vyřešit pouze v některých speciálních případech. Například z toho, že členy $\frac{\partial u}{\partial t}$ a $D\nabla^2 u$ musí mít stejné jednotky vidíme, že jednotka difuzního koeficientu D je $m^2 s^{-1}$. Proto je přirozené očekávat, že

- průměrná vzdálenost na kterou dodifunduje látka za čas t je úměrná výrazu $\sqrt{Dt}$;
- průměrný čas za který látka dodifunduje na vzdálenost d je úměrný výrazu $\frac{d^2}{D}$.



Obrázek 1

Vlnová rovnice (odvození v jedné dimenzi)

Vlnová rovnice je rovnice popisující kmity strun (v jednorozměrném případě), membrán (ve dvourozměrném případě) nebo těles (v trojrozměrném případě). Odvodíme rovnici kmitání strun. Na kmitající struně uvažujme v bodě x element o délce Δx. Výchylku z rovnovážného stavu označme u. Dále označme $\vec{\mathcal{T}}$ sílu, která v tomto bodě napíná strunu - vnitřní napětí ve struně. Tento vektor má podél struny konstantní velikost a směr se mění podle zakřivení struny. Označíme-li φ úhel mezi vektorem $\vec{\mathcal{T}}$ a vodorovným směrem, je $\tan\varphi = \frac{\partial u}{\partial x}$ (derivace je směrnice tečny). Na levý konec působí síla $\vec{\mathcal{T}}_1$, kterou pro další počítání rozložíme do vodorovného a svislého směru. Doleva působí síla o velikosti $\mathcal{T}\cos\varphi$ a dolů síla $\mathcal{T}\sin\varphi$. Podobně, na pravý konec, kde je směrnice tečny $\varphi+\Delta\varphi$ působí doprava síla $\mathcal{T}\cos(\varphi+\Delta\varphi)$ a nahoru síla $\mathcal{T}\sin(\varphi+\Delta\varphi)$. Protože se element pohybuje ve svislém směru, podle Newtonova pohybového zákona platí

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathcal{T}\sin(\varphi+\Delta\varphi) - \mathcal{T}\sin\varphi,$$

kde m je hmotnost uvažovaného elementu. Je-li lineární specifická hmotnost struny ρ a délka elementu v rovnovážné poloze (bez deformace) je přibližně Δx, je možno vyjádřit hmotnost jako $m = \rho\Delta x$ a dostáváme po úpravě vztah

$$\frac{\rho}{\mathcal{T}}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\sin(\varphi+\Delta\varphi) - \sin\varphi}{\Delta x},$$

Pokud pravou stranu rovnice, tj.

$$\frac{\sin(\varphi+\Delta\varphi) - \sin\varphi}{\Delta x}$$

přepíšeme do tvaru

$$\frac{\sin(\varphi+\Delta\varphi) - \sin\varphi}{\Delta\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$$

a v limitě stáhneme velikost uvažovaného elementu k nule, dostáváme výraz známý z definice derivace

$$\frac{\partial\sin(\varphi)}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad \text{tj.} \quad \cos(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Potřebujeme nyní vyjádřit výraz $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$. Ze vztahu $\tan\varphi = \frac{\partial u}{\partial x}$ derivováním podle x dostáváme

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

a za předpokladu malých výchylek nahradíme v předchozích dvou vzorcích funkci kosinus její lineární aproximací v okolí nuly:

$$\begin{aligned}\cos(\varphi) &\approx \cos(0) + (\cos(\varphi))'\Big|_{\varphi=0}(\varphi - 0)\\ &= 1 + \sin(\varphi)\Big|_{\varphi=0}\varphi = 1.\end{aligned}$$

Tím se pravá strana rovnice zjednoduší na $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ a získáváme rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\mathcal{T}}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Vlnová rovnice

Rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\mathcal{T}}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

je rovnice popisující kmitavý pohyb struny. Ve vícerozměrném případě je situace obdobná, pouze na pravé straně dostaneme Laplaceův operátor a výsledná rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\mathcal{T}}{\rho}\nabla^2 u.$$

se nazývá vlnová rovnice.

Po přeznačení je možno vlnovou rovnici zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\nabla^2 u,$$

kde c je kladná konstanta.

Rovnice postupné vlny

Nechť f je libovolná dvakrát diferencovatelná funkce jedné proměnné a uvažujme jednorozměrnou vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

a funkci dvou proměnných $u(x,t) = f(x-ct)$. Potom platí

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x-ct), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x-ct),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -cf'(x-ct), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 f''(x-ct),$$

odkud snadno vidíme, že funkce u je řešením vlnové rovnice Vrstevnice funkce $u(x,t)$ jsou dány rovnicí $x - ct = \text{konst}$, což odpovídá tomu, že bod o dané výchylce se za čas Δt posune o $\Delta x = c\Delta t$. Jedná se tedy o postupnou vlnu, která se šíří rychlostí c doprava. Podobně, funkce $v(x,c) = f(x+ct)$ je řešením této rovnice, které odpovídá postupné vlně, která postupuje rychlostí c doleva.

Rovnice popisující podélné kmity kmity tyče modulu pružnosti E a hustotě ρ má stejný tvar, kde $c = \sqrt{E\rho}$ je rychlost šíření kmitů. Trojrozměrná analogie této rovnice je vhodná pro popis elastických kmitů (chvění) v tělese.

Fourierova metoda (separace proměnných)

Jedna z nejjednodušších metod řešení parciálních diferenciálních rovnic spočívá v tom, že se řešení rovnic snažíme najít v nějakém konkrétním tvaru, který nám umožní rovnici redukovat na několik rovnic jednodušších.

Uvažujme šíření tepla v tyči jednotkové délky bez vnitřních zdrojů tepelné energie, popsané diferenciální rovnicí

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Pro jednoznačný popis děje je nutno zadat počáteční teplotu $\varphi(x)$ ve všech bodech tyče a podmínky, které udávají, v jakém prostředí se tyč nachází – například teplotu konců tyče. Pro jednoduchost uvažujme homogenní okrajové podmínky $u(0,t) = 0 = u(1,t)$ a počáteční podmínku $u(x,0) = \varphi(x)$.

Řešení u budeme hledat ve tvaru funkce

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

kde X a T jsou funkce jedné proměnné. V tomto označení platí $\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t)$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$ a po dosazení do rovnice a po vydělení faktorem $X(x)T(t)$ dostaneme

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Fourierova metoda (separace proměnných, pokračování)

Protože levá strana rovnice

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

závisí pouze na t a pravá strana pouze na x, musí být obě strany rovny stejné konstantě. Tuto konstantu zapíšeme z důvodů které budou patrné později jako $-\lambda^2$. Z okrajových podmínek naložených na funkci u plyne, že funkce X musí splňovat

$$X(0) = 0 = X(1). \tag{*}$$

Funkce X a T tedy musí splňovat rovnice

$$T' = -\lambda^2 T, \quad X'' + \lambda^2 X = 0$$

a okrajovou podmínku (*).

Rovnice

$$T' = -\lambda^2 T$$

je lineární a její obecné řešení je libovolný násobek funkce $T(t) = e^{-\lambda^2 t}$.

Úloha najít funkci vyhovující rovnici

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

souvisí s vlastními hodnotami rovnice.

Okrajová úloha, vlastní čísla

Pro parametr λ řešme rovnici

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

s okrajovými podmínkami

$$X(0) = 0 = X(1).$$

Rovnice je homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu a má (podle toho jaké je řešení charakteristické rovnice) řešení buď exponenciální funkce nebo goniometrické funkce. Podrobným rozborem lze ukázat, že v případě lineární kombinace exponenciálních funkcí se nepodaří splnit podmínky a charakteristická rovnice tedy nesmí mít reálné kořeny. Proto jsme volili konstantu v separaci proměnných ve tvaru $-\lambda^2$. Nyní jsou totiž řešeními charakteristické rovnice čísla $\pm i\lambda$ a řešením rovnice je tvaru

$$X(x) = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x).$$

Z podmínky $X(0) = 0$ dostáváme $C_2 = 0$. Tedy

$$X(x) = C_1 \sin(\lambda x).$$

Z podmínky $X(1) = 0$ dostáváme $0 = C_1 \sin(\lambda)$. Zajímá nás pouze netriviální řešení a proto nemůžeme připustit $C_1 = 0$. Platí tedy $\sin(\lambda) = 0$, neboli $\lambda = k\pi$, kde k je přirozené číslo. Vlastní hodnoty jsou tedy tvaru

$$\lambda^2 = k^2\pi^2$$

a uvažovaná okrajová úloha pro libovolné přirozené číslo k řešení

$$X(x) = C \sin(k^2\pi^2 x),$$

kde C je reálná konstanta.

Fourierova metoda (separace proměnných, superpozice řešení)

Protože řešení rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

hledáme ve tvaru $u(x,t) = X(x)T(t)$, můžeme výsledky předchozích odstavců shrnout do poznatku, že pro libovolnou konstantu C_k a libovolné přirozené číslo k je funkce

$$C_k \sin(k\pi x)e^{-\lambda^2 t}.$$

Protože rovnice je lineární, je řešením i libovolná lineární kombinace těchto funkcí. Použijeme-li všechny funkce tohoto tvaru, dostáváme řešení

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\pi x)e^{-\lambda^2 t},$$

Protože máme zadánu počáteční podmínku $u(x,0) = \varphi(x)$, potřebujeme najít konstanty C_k takové, že platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\ \pi x) = \varphi(x).$$

Tuto úlohu budeme řešit v dalších odstavcích.

Fourierův rozvoj periodické funkce

Nekonečná řada goniometrických funkcí tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\ x) + b_k \sin(k\ x))$$

může pro konkrétní hodnoty koeficientů a_i, b_i konvergovat k nějaké funkci $f(x)$ a za jistých podmínek je tato funkce dostatečně pěkná: je spojitá, je možno ji derivovat člen po členu apod.

Při řešení rovnic matematické fyziky řešíme opačný problém: pro zadanou funkci $f(x)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ chceme nalézt koeficienty a_i, b_i tak, aby na tomto intervalu platilo

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Koeficienty Fourierova rozvoje

Ukazuje se, že tento zápis funkce f pomocí goniometrických funkcí je možný, pokud použijeme následující volbu koeficientů

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$$
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x.$$

Tyto vztahy je možno zobecnit i na jiné intervaly než $[-\pi, \pi]$ a také pro jiné funkce než goniometrické – je možné použít například systém všech vlastních funkcí okrajové úlohy. V našem případě je možné ukázat, že pokud platí

$$C_k = 2\int_0^1 \varphi(x)\sin(k\pi x)\mathrm{d}x,$$

potom na intervalu $[0, 1]$ platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\pi x) = \varphi(x).$$

Máme tedy koeficienty C_k, které je možno použít pro konečný zápis řešení naší úlohy.

Fourierova metoda (separace proměnných, závěr)

Řešení rovnice vedení tepla, které splňuje zadané počíteční a okrajové podmínky je

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\pi x)e^{-\lambda^2 t},$$

kde

$$C_k = 2\int_0^1 \varphi(x)\sin(k\pi x)\mathrm{d}x.$$

Podobně, kmity struny jednotkové délky, popsané vlnovou rovnicí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

s okrajovými podmínkami

$$u(0,t) = 0 = u(1,t)$$

(struna upevněná na koncích) a počátečními podmínkami

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x).$$

(počáteční poloha a rychlost všech bodů struny) jsou dány vztahem

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_n\cos(k\pi t) + b_n\sin(k\pi t)\right)\sin(k\pi x),$$

kde

$$a_k = 2\int_0^1 \varphi(x)\sin(k\pi x)\mathrm{d}x$$

a

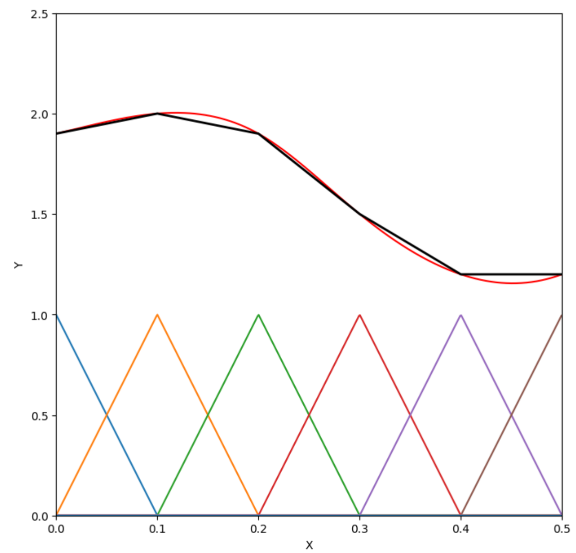
$$b_k = 2\int_0^1 \psi(x)\cos(k\pi x)\mathrm{d}x.$$

Numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic

Při řešení praktických úloh založených na rovnicích matematické fyziky se málokdy podaří efektivně nalézt obecné řešení v explicitním tvaru. Proto zpravidla hledáme řešení zadané úlohy (rovnice s okrajovými a počátečními podmínkami) numericky.

Hlavní myšlenkou je převod modelu na soustavu lineárních rovnic. Jednoduchá metoda, jak toto provést například pro nalezení stacionárního stavu čtvercové desky je zvolit uzlové body uvnitř desky a teplotu v každém bodě určovat jako průměr teplot v sousedních uzlech. V praxi se však používají více rafinované postupy, které jsou sice založené na hlobokých myšlenkách, ale po dotažení do prakticky použitelného nástroje jsou jednoduché i pro laiky, kteří nemusí do hloubky rozumět celému pozadí výpočtu.

Nejpoužívanější metodou pro numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic je metoda konečných prvků. Tato metoda je založena na myšlence vyjádření řešení jako lineární kombinace velice jednoduchých funkcí. Místo goniometrických funkcí, které jsme použili ve Fourierově rozvoji, je možné použít například trojúhelníkové funkce jako na obrázku. Výhodou je obrovský nárůst rychlosti, nevýhodou je, že lineární kombinace několika funkcí složených z lomených čar je lomená čára a řešení je tedy možné obdržet jen přibližně. Na druhou stranu je velice jednoduché najít koeficienty lineární kombinace aproximující nějakou funkci. V místě, kde očekáváme dramatičtější změny funkčních hodnot, je možné volit hustší síť a aproximace potom bude jemnější.



Obrázek 2: Trojúhelníkové funkce, ze kterých se skládá aproximace řešení. Červenou křivku je možno snadno aproximovat černou lomenou čarou, protože koeficienty do lineární kombinace jsou právě funkční hodnoty.