

Úvod do nelineární pružnosti pro biomechaniku

Lukáš Horný

lukas.horny@fs.cvut.cz

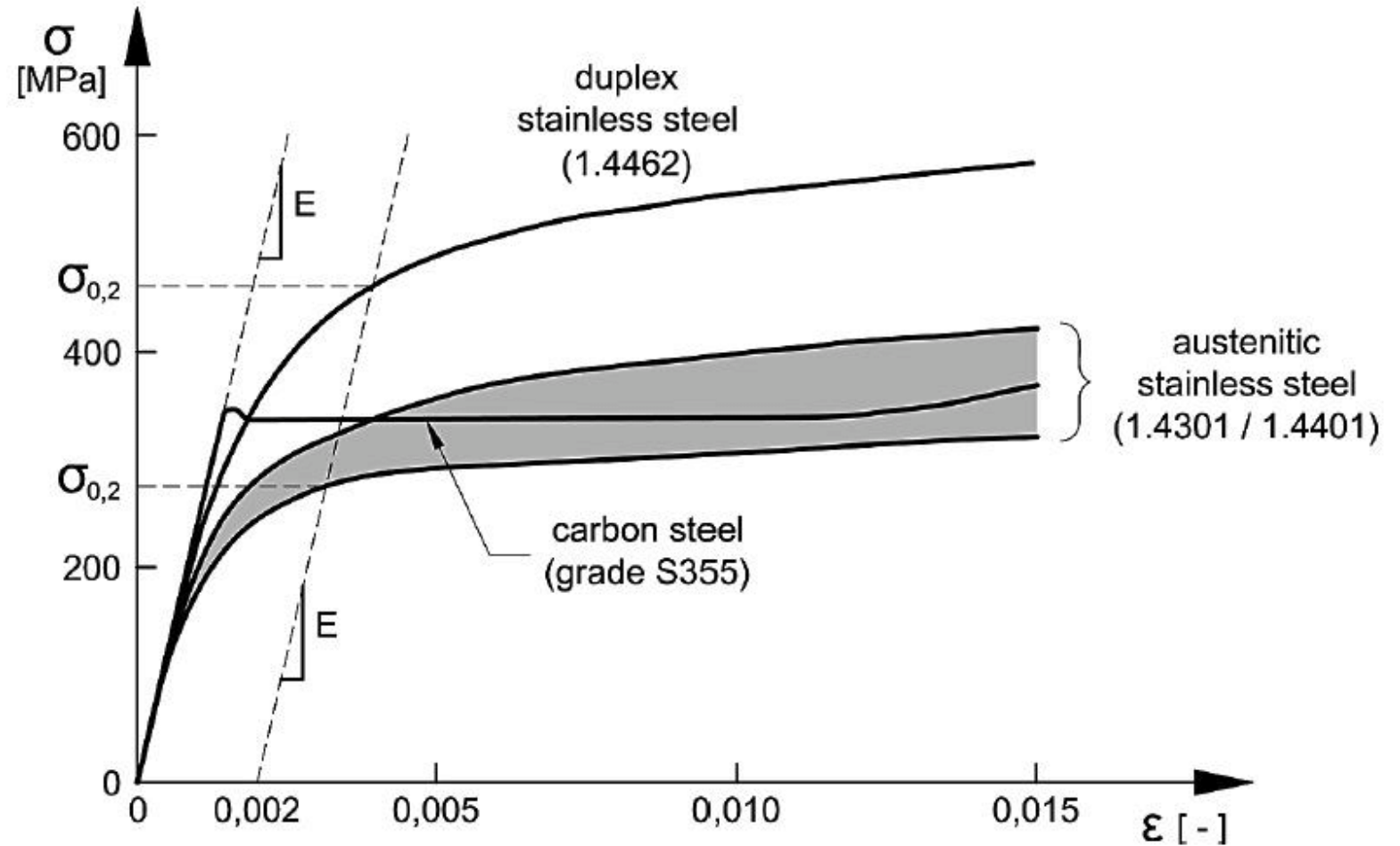
Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky, ČVUT FS

Verze 31.1.2023

Proč nelineární pružnost?

Zdroje nelinearit

- *Velké posuvy*
- *Velká natočení*
- *Velké deformace*
- *Nelineární materiál*



Proč nelineární pružnost?

Zdroje nelinearit

- Velké posuvy
- Velká natočení
- Velké deformace
- Nelineární materiál

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}{2}$$

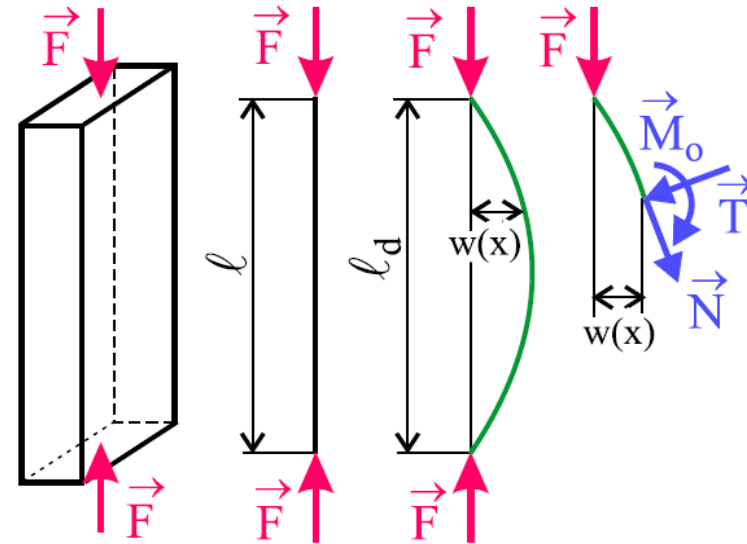
$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}{2}$$

$$e_{xy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}}{2}$$

Proč nelineární pružnost?

Zdroje nelinearit

- Velké posuvy
- Velká natočení
- Velké deformace
- Nelineární materiál

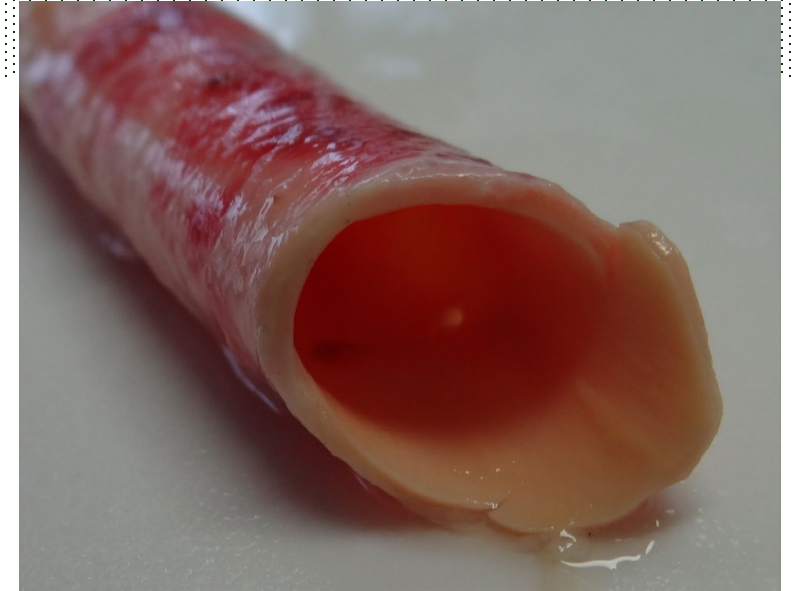
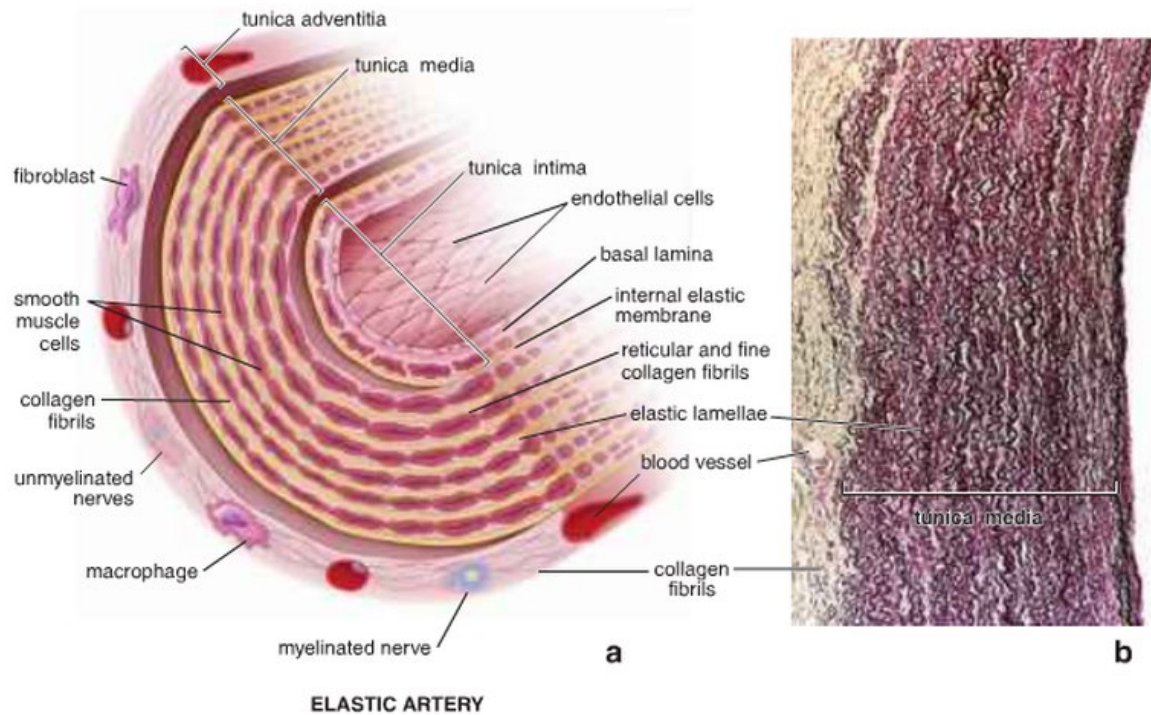


$$M_o(x) - Fw(x) = 0$$

$$\frac{w''}{(1 + w'^2)^{3/2}} = -\frac{Fw(x)}{EJ}$$

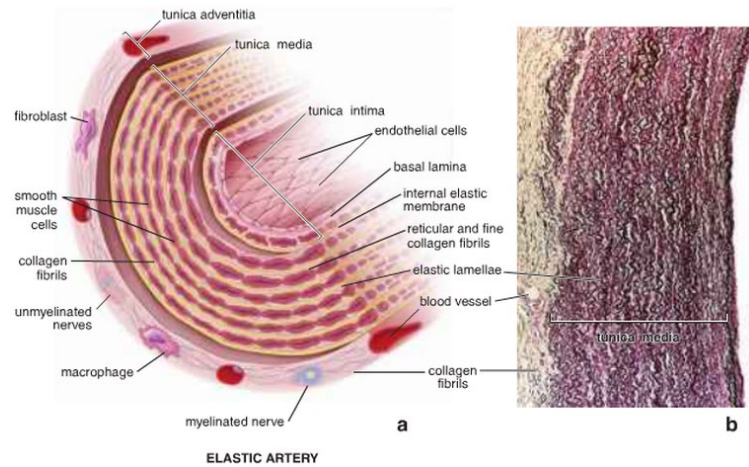
Proč nelineární pružnost?

Tepenná stěna

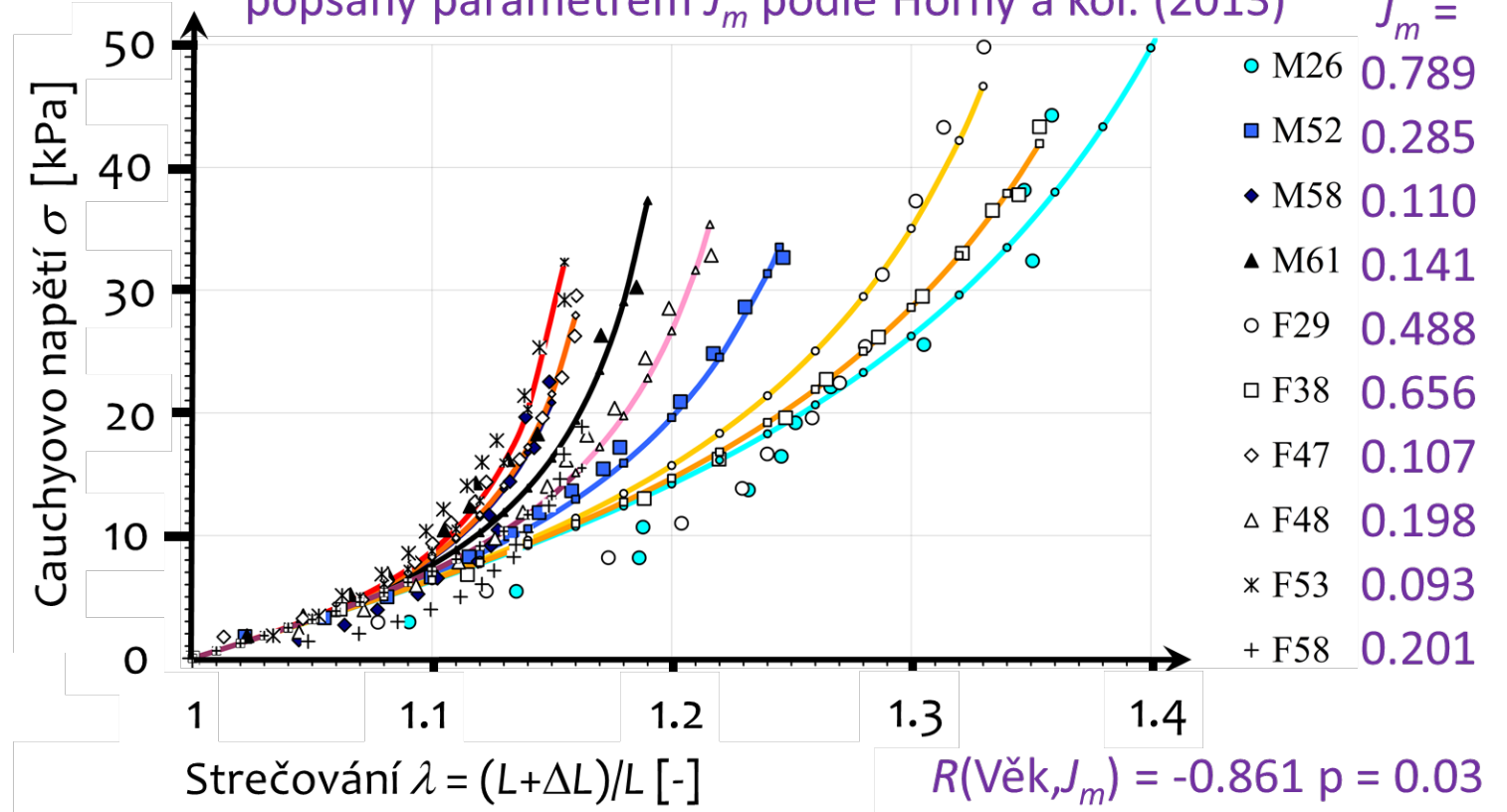


Proč nelineární pružnost?

Tepenná stěna

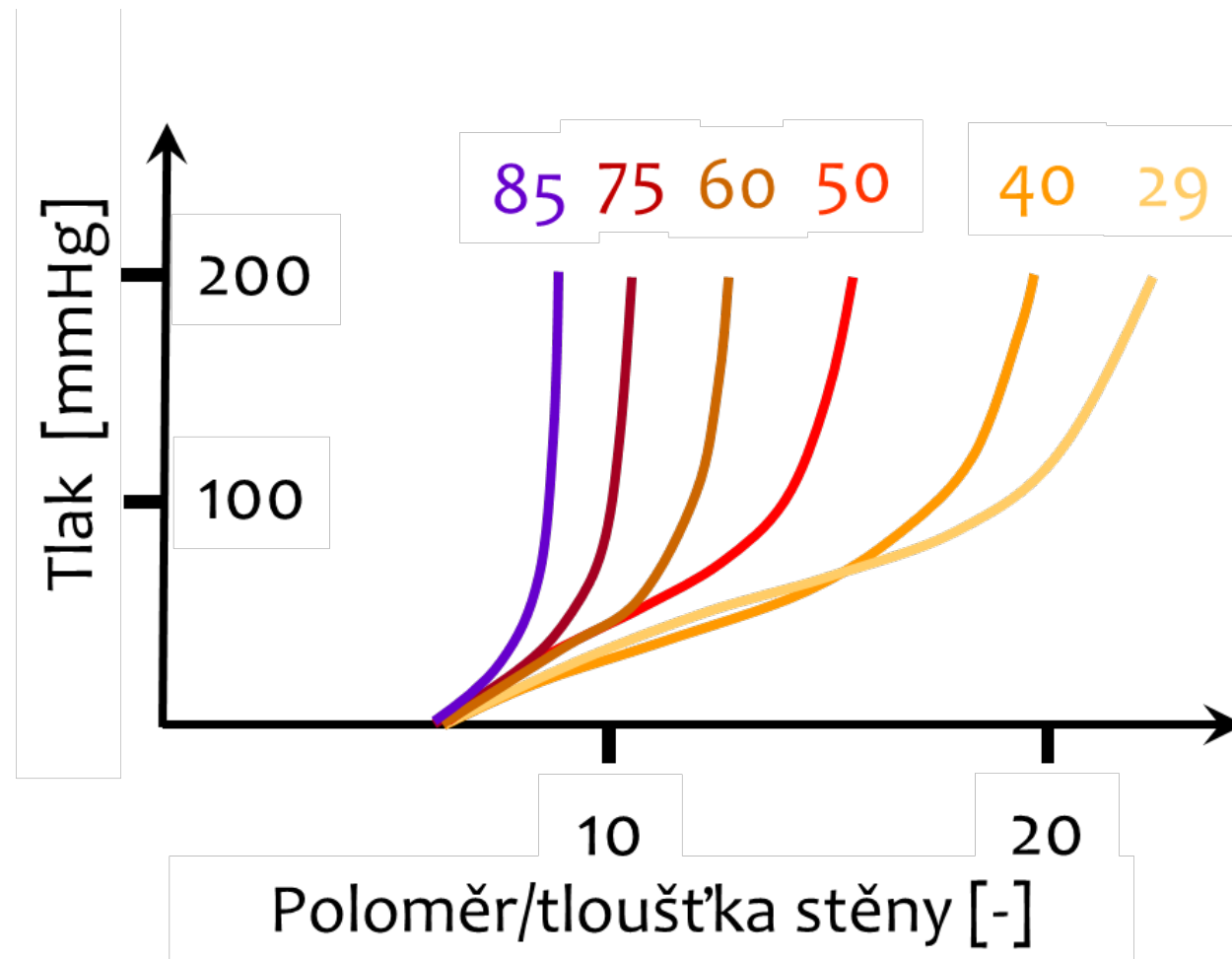


Jednoosý tah tubulárních segmentů aorty
popsaný parametrem J_m podle Horný a kol. (2013)



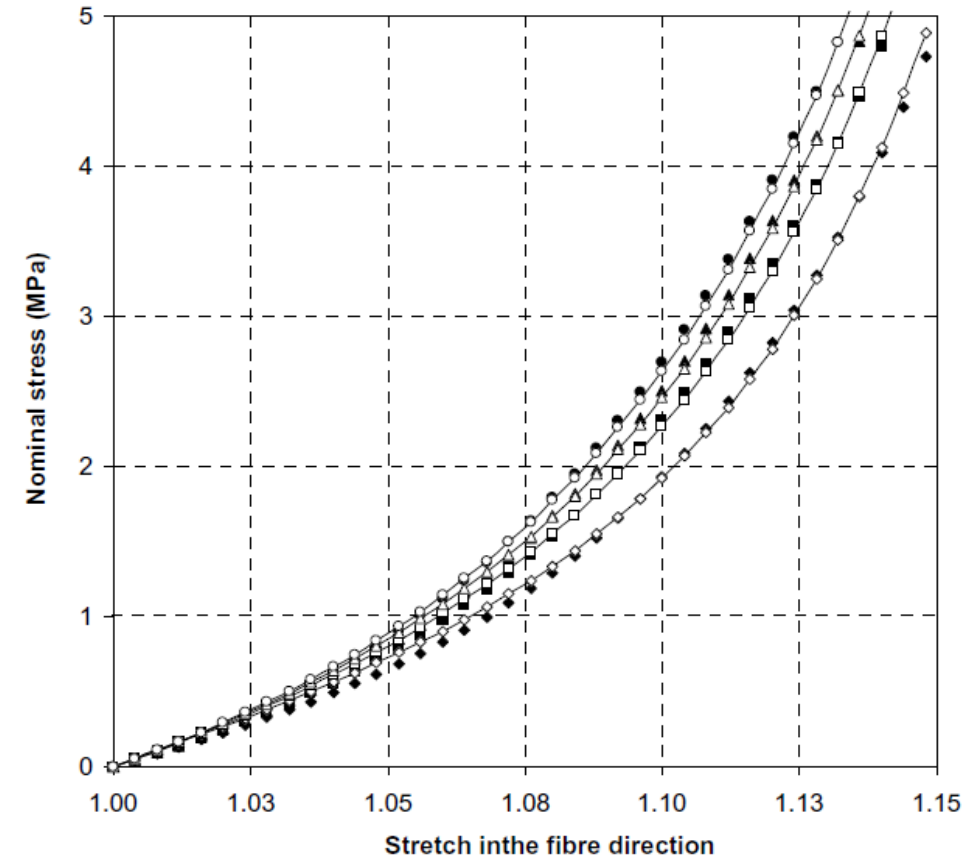
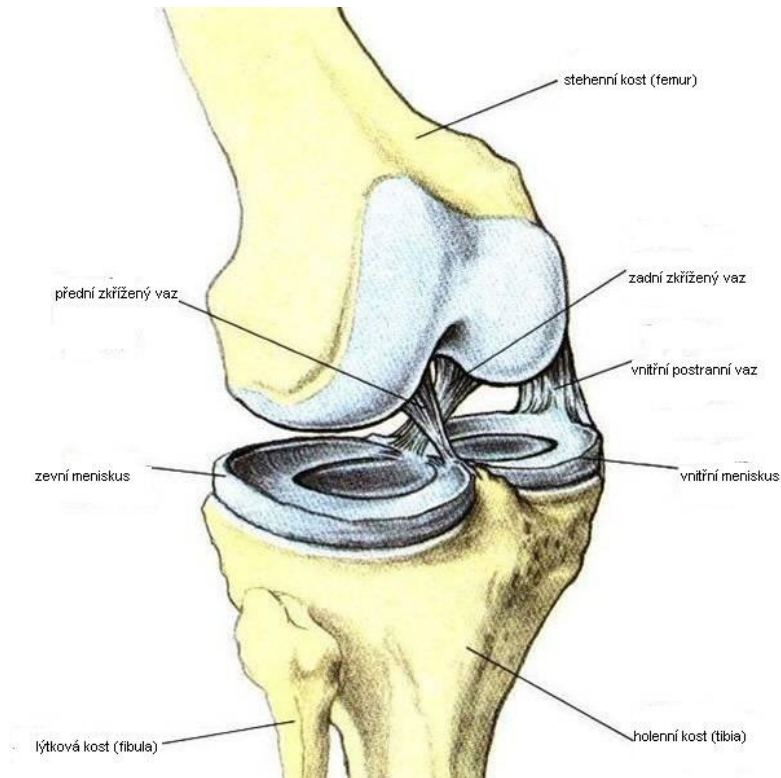
Proč nelineární pružnost?

Tepenná stěna



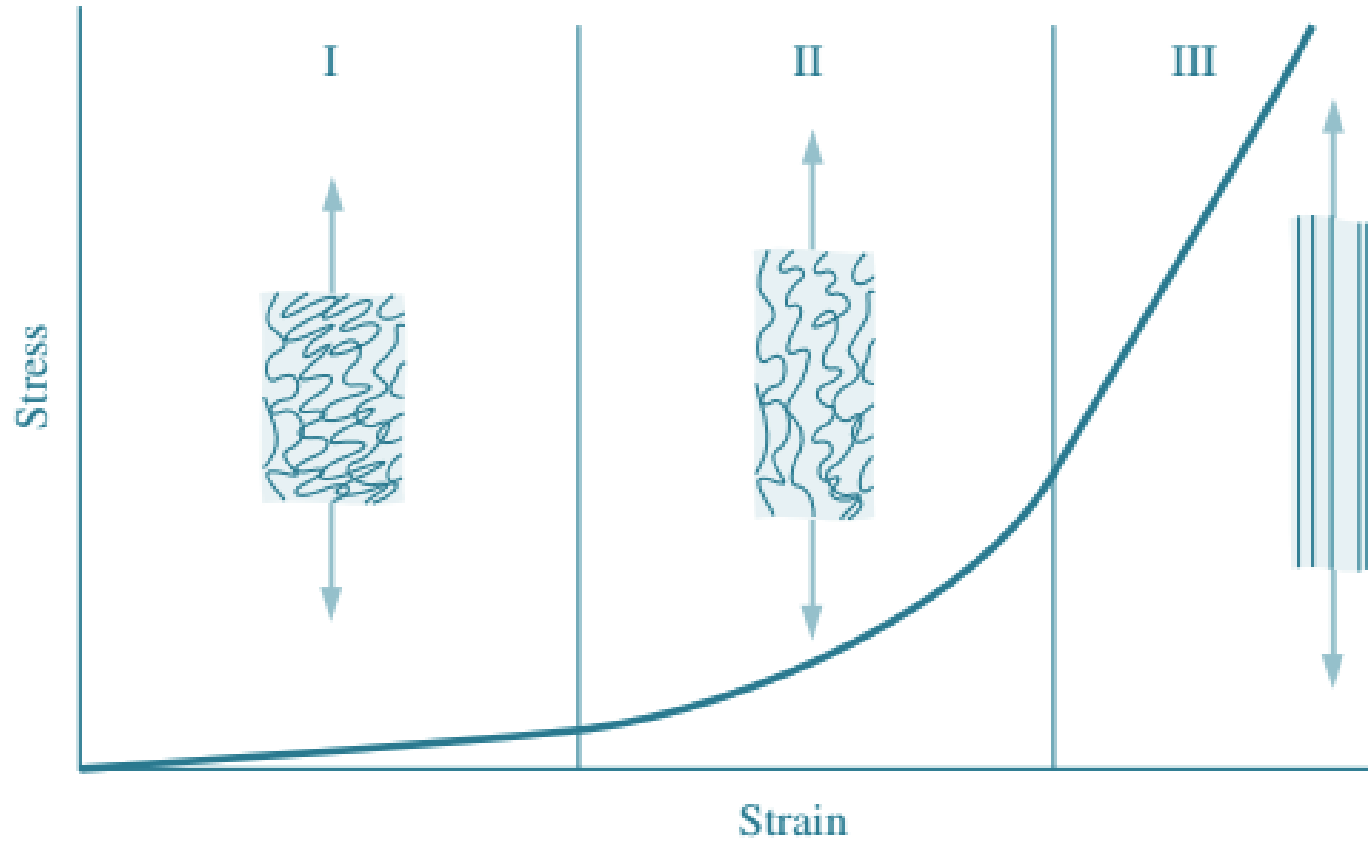
Proč nelineární pružnost?

Zadní zkřížený vaz



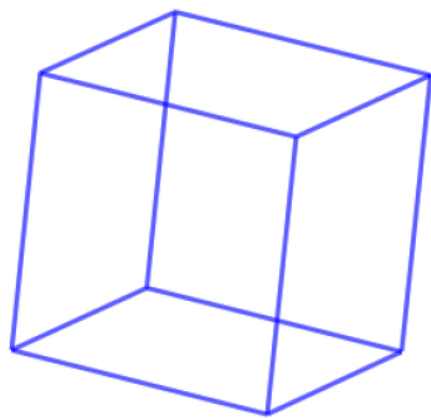
- ◆ Isotropic Hyperelastic
- Isotropic Hyperviscoelastic (25 %/s)
- ▲ Isotropic Hyperviscoelastic (38 %/s)
- Isotropic Hyperviscoelastic (50 %/s)
- ◇ Transversely Isotropic Hyperelastic
- Transversely Isotropic Hyperviscoelastic (25 %/s)
- △ Transversely Isotropic Hyperviscoelastic (38 %/s)
- Transversely Isotropic Hyperviscoelastic (50 %/s)

Proč nelineární pružnost?



Tělesa

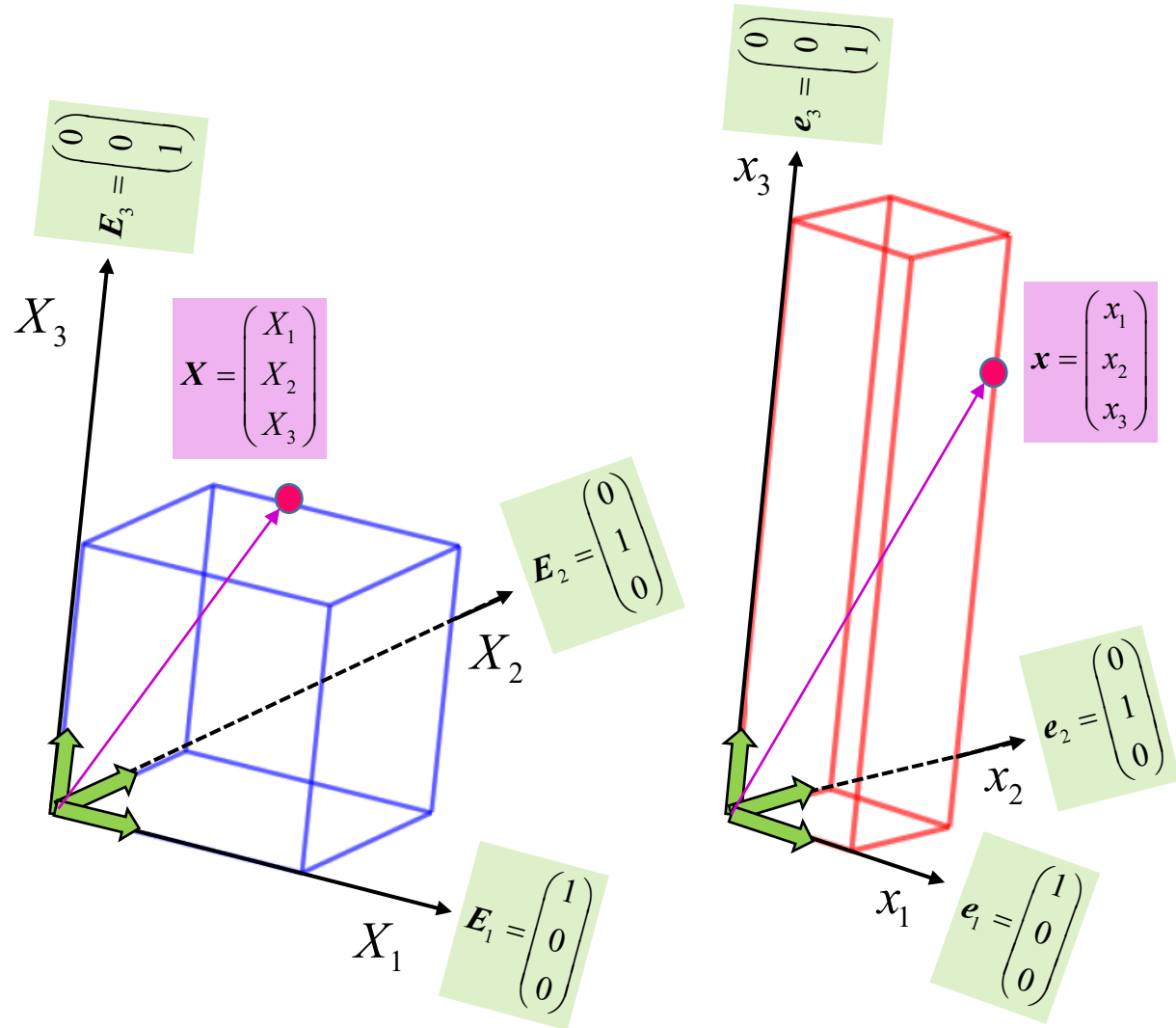
Mějme dvě tělesa...



a představme si je v matematických prostorech, které známe

- \mathbb{R}^3
- myslíme na prostor, kde každý bod má tři reálné souřadnice
- kde umíme měřit vzdálenosti
- kde každý bod umíme zaměřit vektorem jdoucím z počátku soustavy souřadnic

Vektorová algebra a analytická geometrie



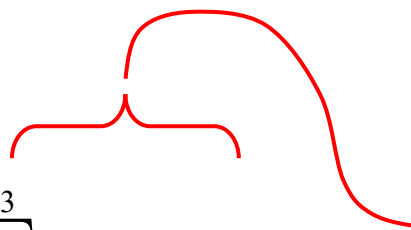
Vzpomeňme si na

- *Báze*
- *Operace (součiny, součty,...)*
- *Souřadnice*
- *Transformace*

Vektorová algebra a analytická geometrie

složky vektoru

v dané bázi

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i = u_i \mathbf{e}_i$$


Sumační pravidlo
v indexovém zápisu:
**přes opakující se
index sčítáme**

standardní báze v \mathbb{R}^3

ortonormální, kartézská

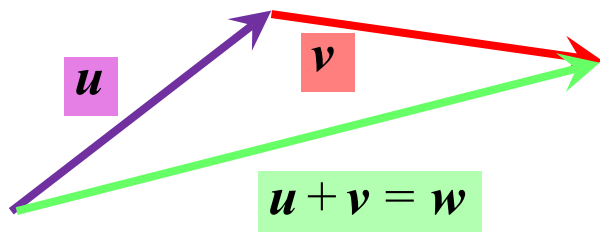
$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektorová algebra a analytická geometrie

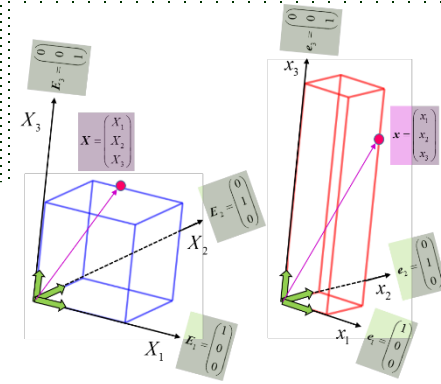
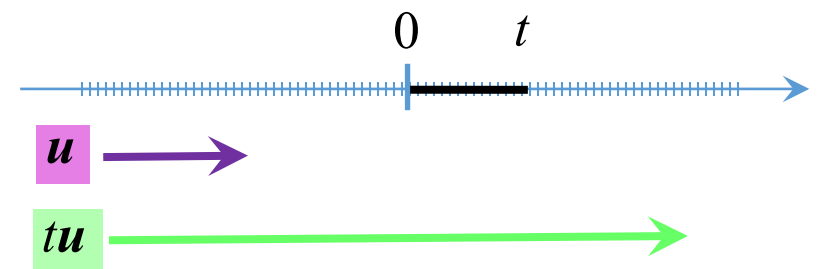
Mějme vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} a \mathbf{w} z vektorového prostoru \mathcal{V} nad \mathbb{R}

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{Ve } \mathcal{V} \text{ platí:}$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix}$$



$$t \cdot \mathbf{u} = \begin{pmatrix} t \cdot u_1 \\ t \cdot u_2 \\ t \cdot u_3 \end{pmatrix}$$

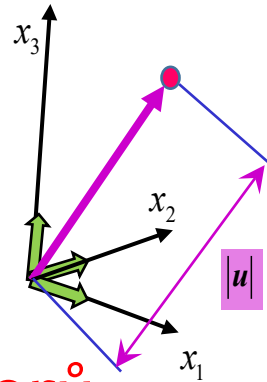


Vektorová algebra a analytická geometrie

norma vektoru

je číslo vyjadřující jeho délku

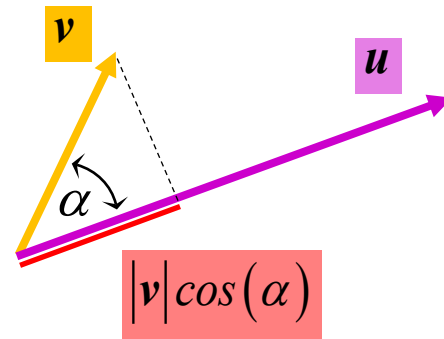
$$u = |\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{[\mathbf{u}]^T [\mathbf{u}]}$$



skalární součin vektorů

je číslo

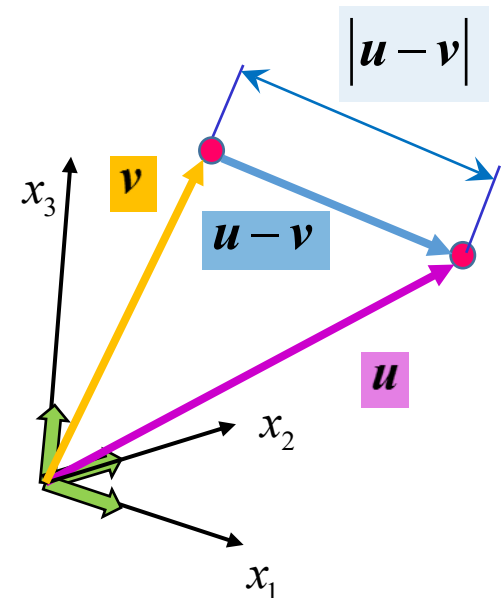
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i = u_i v_i = [\mathbf{u}]^T [\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos(\alpha)$$



$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|}$$

vzdálenost vektorů
(jimi zaměřených bodů) je číslo

$$\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u} - \mathbf{v}| = \sqrt{(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})}$$



Vektorová algebra a analytická geometrie

vektorový součin

je vektor

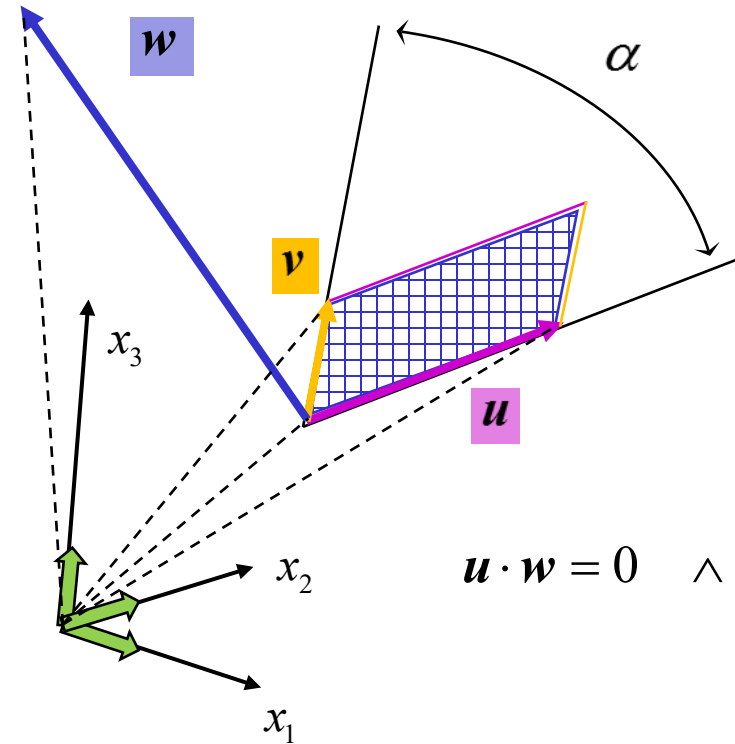
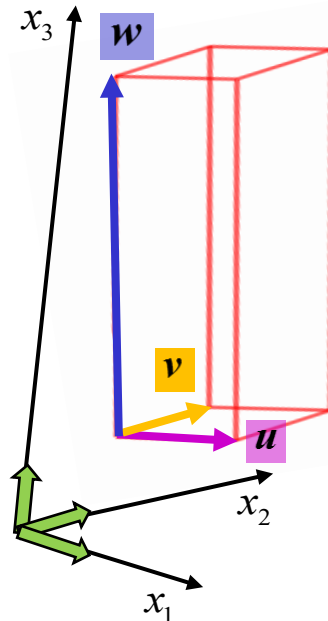
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} = \mathbf{w}$$

$$|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin(\alpha)$$

smíšený součin

je číslo vyjadřující objem rovnoběžnostěny daného vektory \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w}

$$V = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u})$$



$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0 \quad \wedge \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$$

Vektorová algebra a analytická geometrie

Lineární transformace \mathbf{A} prostoru \mathcal{V}

$$\mathbf{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}(\mathbf{u}) + \mathbf{A}(\mathbf{v})$$

Aditivita

$$\mathbf{A}(t\mathbf{u}) = t\mathbf{A}(\mathbf{u})$$

Homogenita

Lineární transformaci \mathbf{A} prostoru \mathcal{V} reprezentujeme maticí \mathbf{A}

$$\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{v}$$

$$\mathbf{A}(t\mathbf{u}) = t\mathbf{A}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{w}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 \\ a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

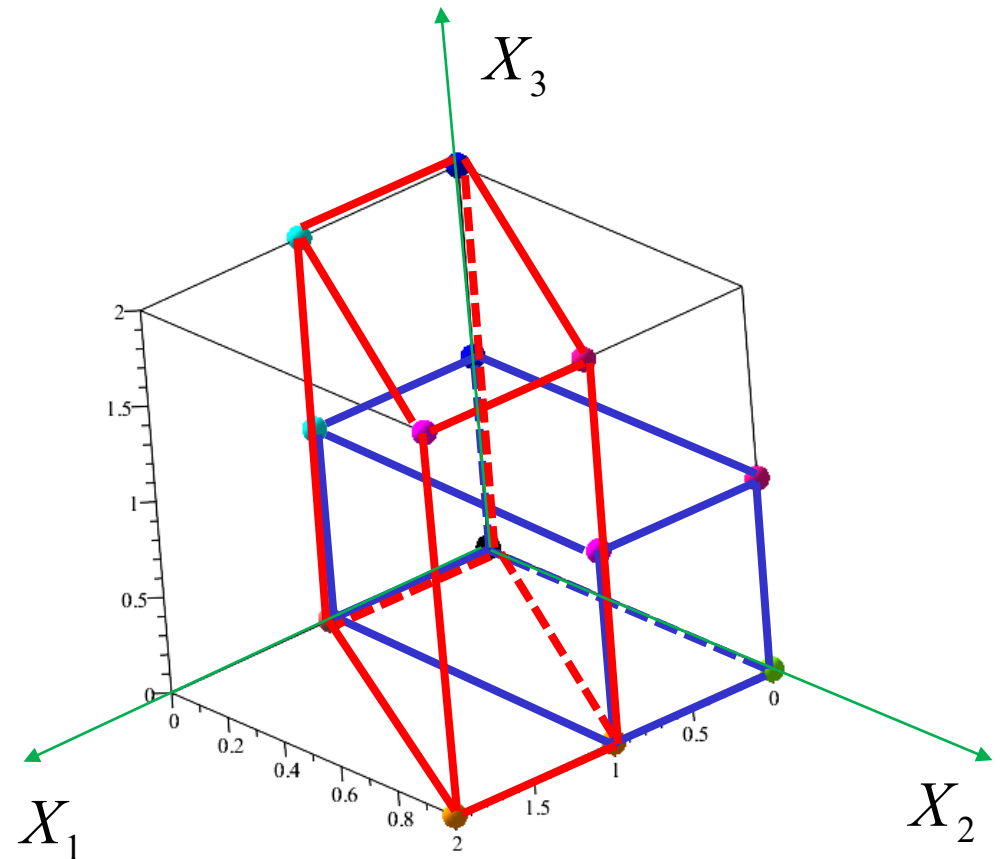
Vektorová algebra a analytická geometrie

Lineární transformace \mathbf{A} prostoru \mathcal{V}

$$\mathbf{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} = \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 + X_2 \\ X_2 \\ 2X_3 \end{pmatrix}$$



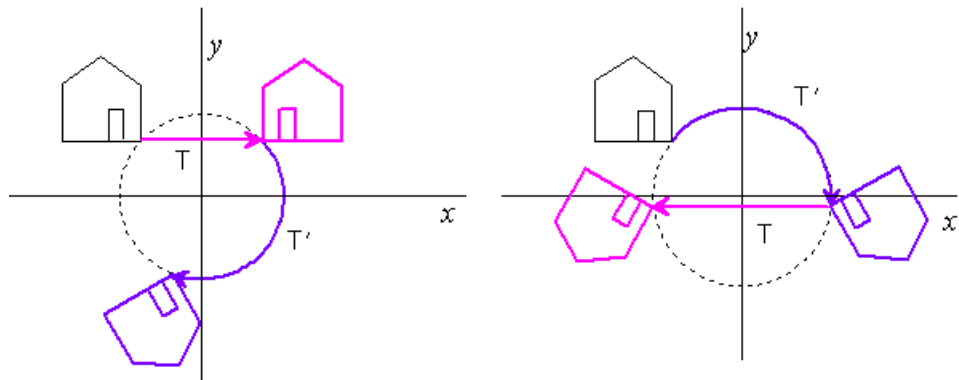
Vektorová algebra a analytická geometrie

Násobení matic \mathbf{B} a \mathbf{A} interpretujeme jako *skládání zobrazení*

Vzniká nové zobrazení $\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{A}$

Celou událost čteme jako \mathbf{B} po \mathbf{A}

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{A} \neq \mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{C}'$$



$$\mathbf{C}(u) = \mathbf{B} \circ \mathbf{A}(u) = \mathbf{B}(\mathbf{A}(u)) = \mathbf{B}(w) = z$$

\uparrow $\mathbf{A}u = w$ \uparrow $\mathbf{B}w = z$

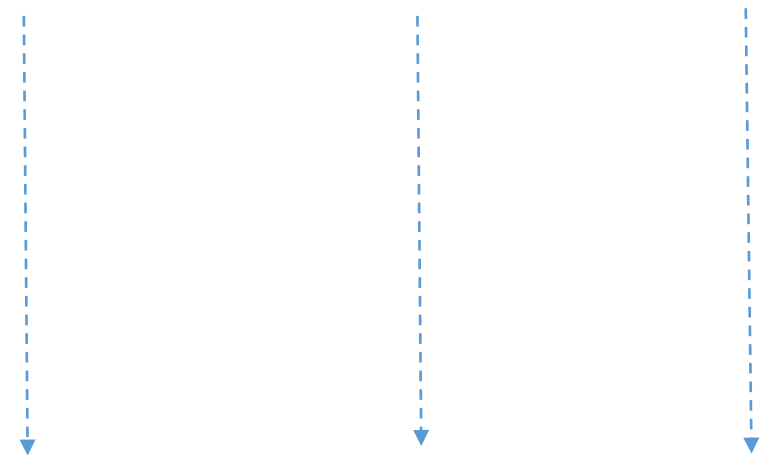
$$\mathbf{C}'(u) = \mathbf{A} \circ \mathbf{B}(u) = \mathbf{A}(\mathbf{B}(u)) = \mathbf{A}(w') = z'$$

\uparrow $\mathbf{B}u = w'$ \uparrow $\mathbf{A}w' = z'$

Vektorová algebra a analytická geometrie

$$\mathbf{C} = \mathbf{B} \mathbf{A} \quad \Leftrightarrow \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^3 B_{ik} A_{kj} = B_{ik} A_{kj}$$

$$C_{11} = B_{11}A_{11} + B_{12}A_{21} + B_{13}A_{31} = \sum_{k=1}^3 B_{1k}A_{k1}$$



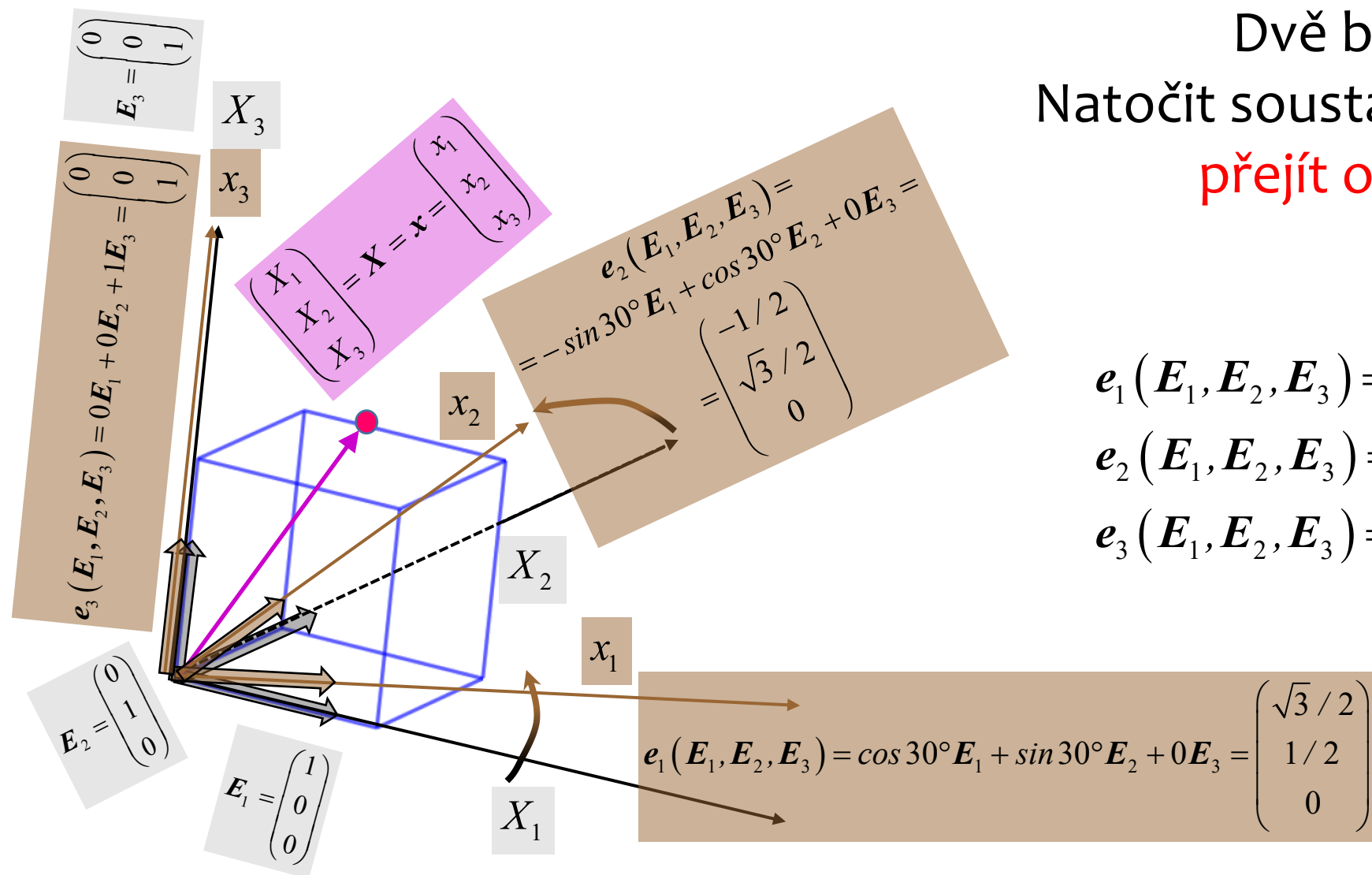
$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$C_{23} = B_{21}A_{13} + B_{22}A_{23} + B_{23}A_{33} = \sum_{k=1}^3 B_{2k}A_{k3}$$

$$C_{33} = B_{31}A_{13} + B_{32}A_{23} + B_{33}A_{33} = \sum_{k=1}^3 B_{3k}A_{k3}$$

Vektorová algebra a analytická geometrie

Dvě báze v jednom prostoru:
Natočit soustavu souřadnic znamená
přejít od vektorové báze E_i k e_i



Vektorová algebra a analytická geometrie

$$e_1(E_1, E_2, E_3) = \cos 30^\circ E_1 + \sin 30^\circ E_2 + 0 E_3$$

$$e_2(E_1, E_2, E_3) = -\sin 30^\circ E_1 + \cos 30^\circ E_2 + 0 E_3$$

$$e_3(E_1, E_2, E_3) = 0 E_1 + 0 E_2 + 1 E_3$$

$$Mat_E^e = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ & 0 \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_i(E_1, E_2, E_3) = Mat_E^e E_i$$

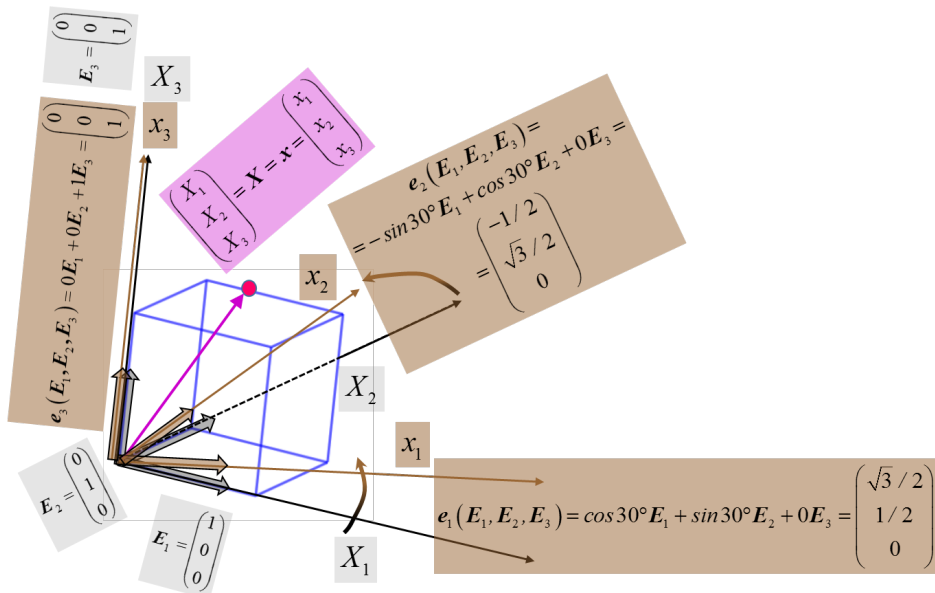
$$(Mat_E^e)^{-1} = (Mat_E^e)^T$$

$$X = Mat_E^e x$$

$$x = (Mat_E^e)^T X$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ & 0 \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

Dvě báze v jednom prostoru:
Natočit soustavu souřadnic znamená
přejít od vektorové báze E_i k e_i



Vektorová algebra a analytická geometrie

Připomeňme si některé, v mechanice běžné, vektorové veličiny

- Polohový vektor
- Rychlost a zrychlení
- Síla
- Hybnost
- Moment síly
vzhledem k počátku
- Moment hybnosti
vzhledem k počátku

\mathbf{x}

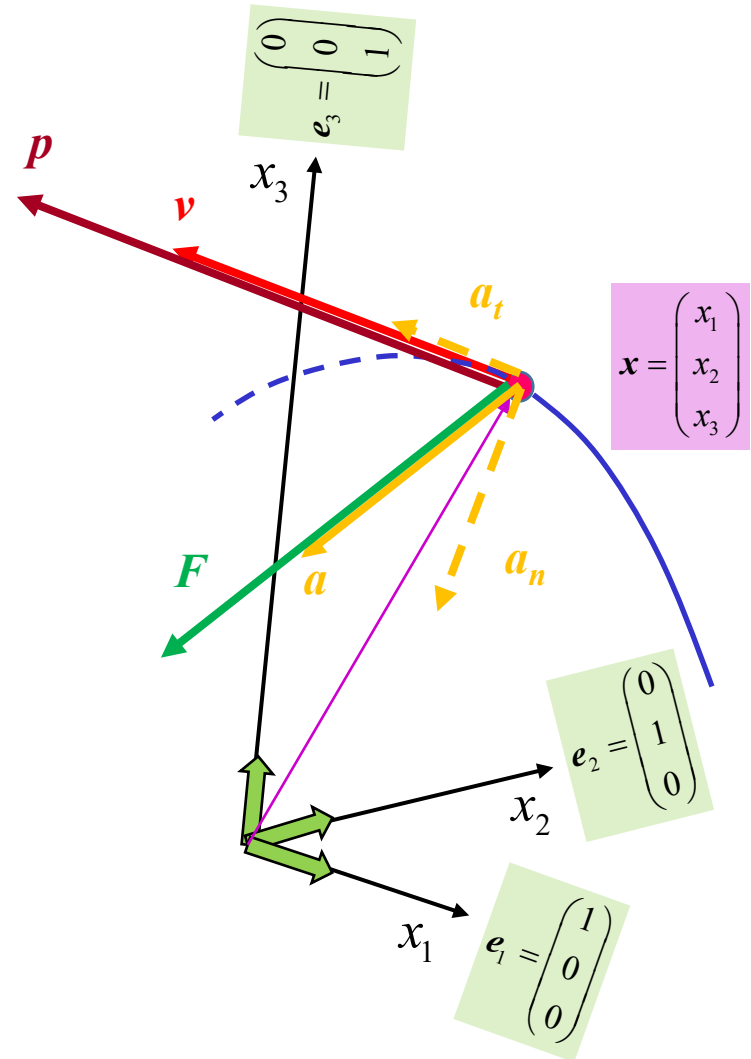
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{x} \times \mathbf{F}$$

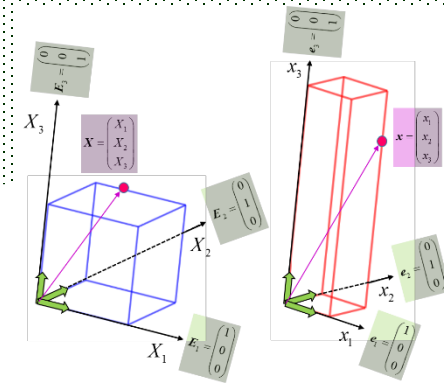
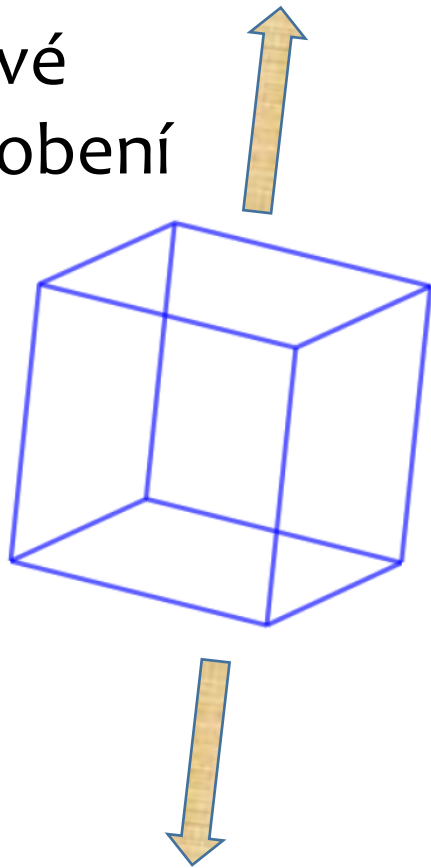
$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$$



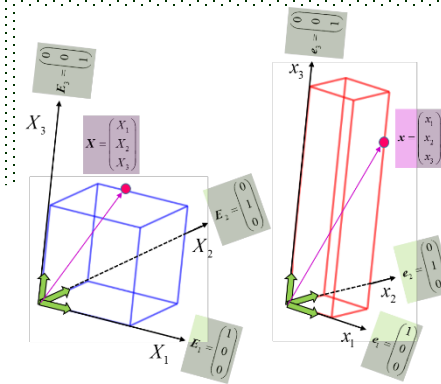
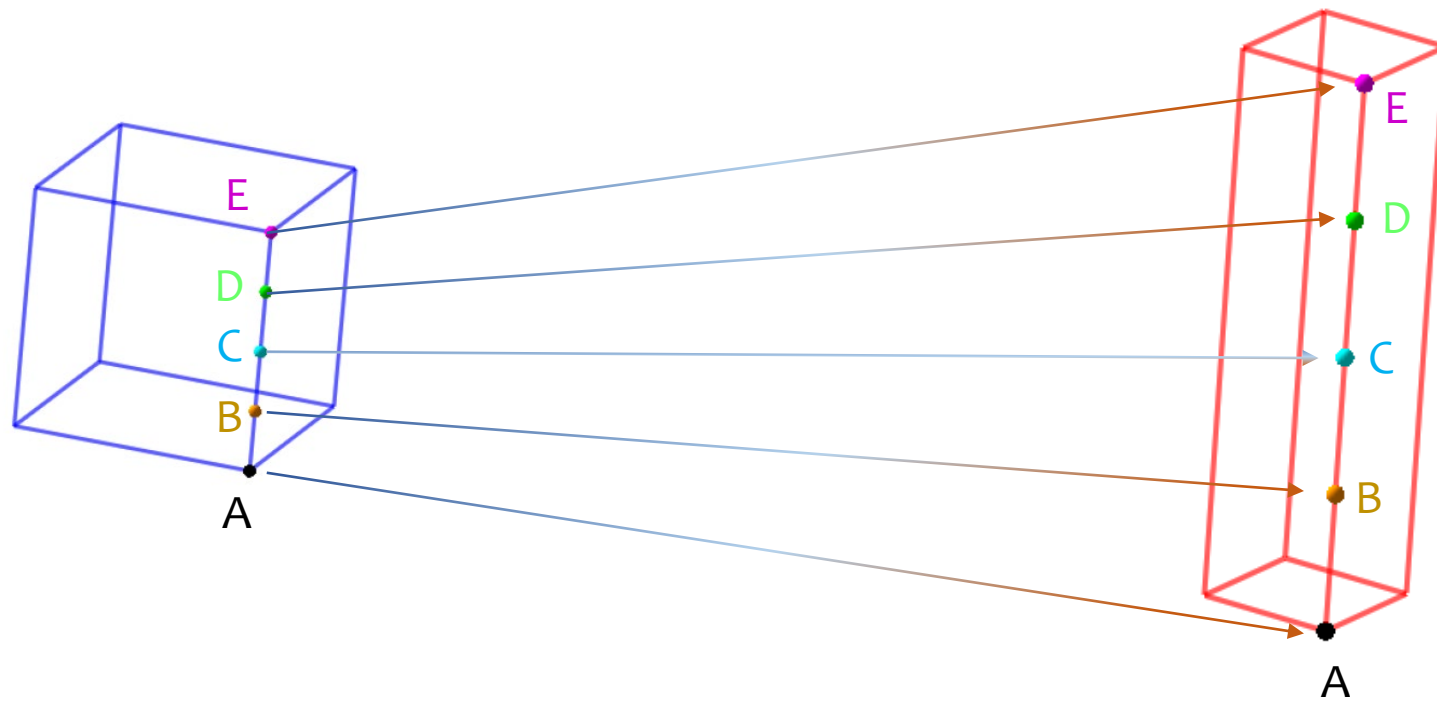
Kinematika deformace a její míry

Deformace

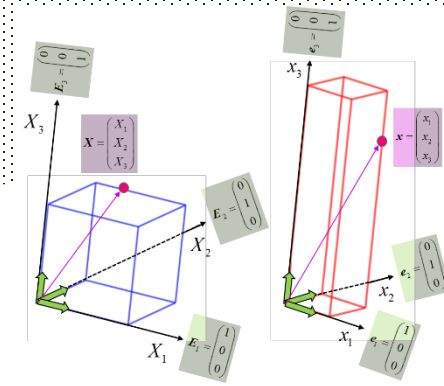
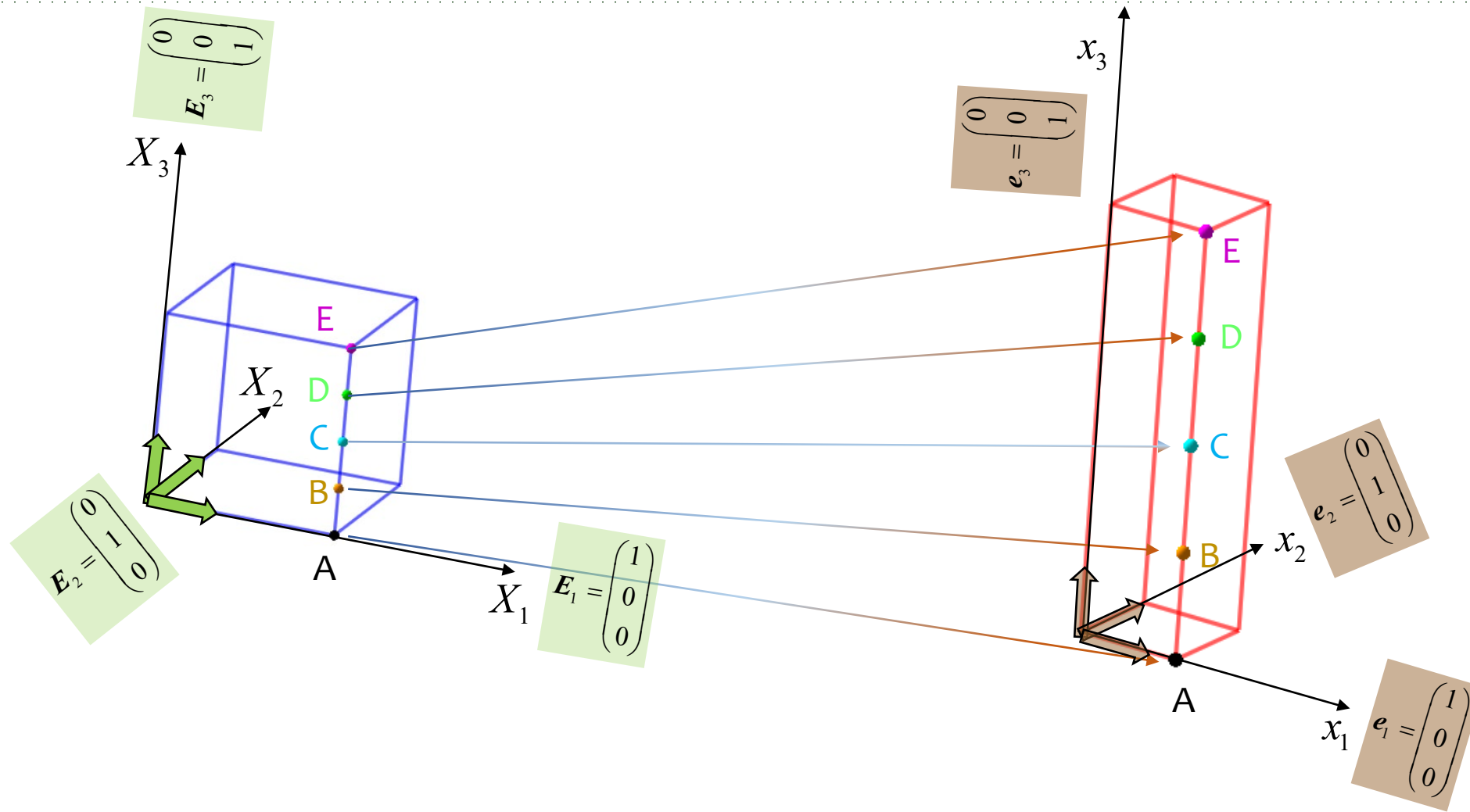
Silové působení



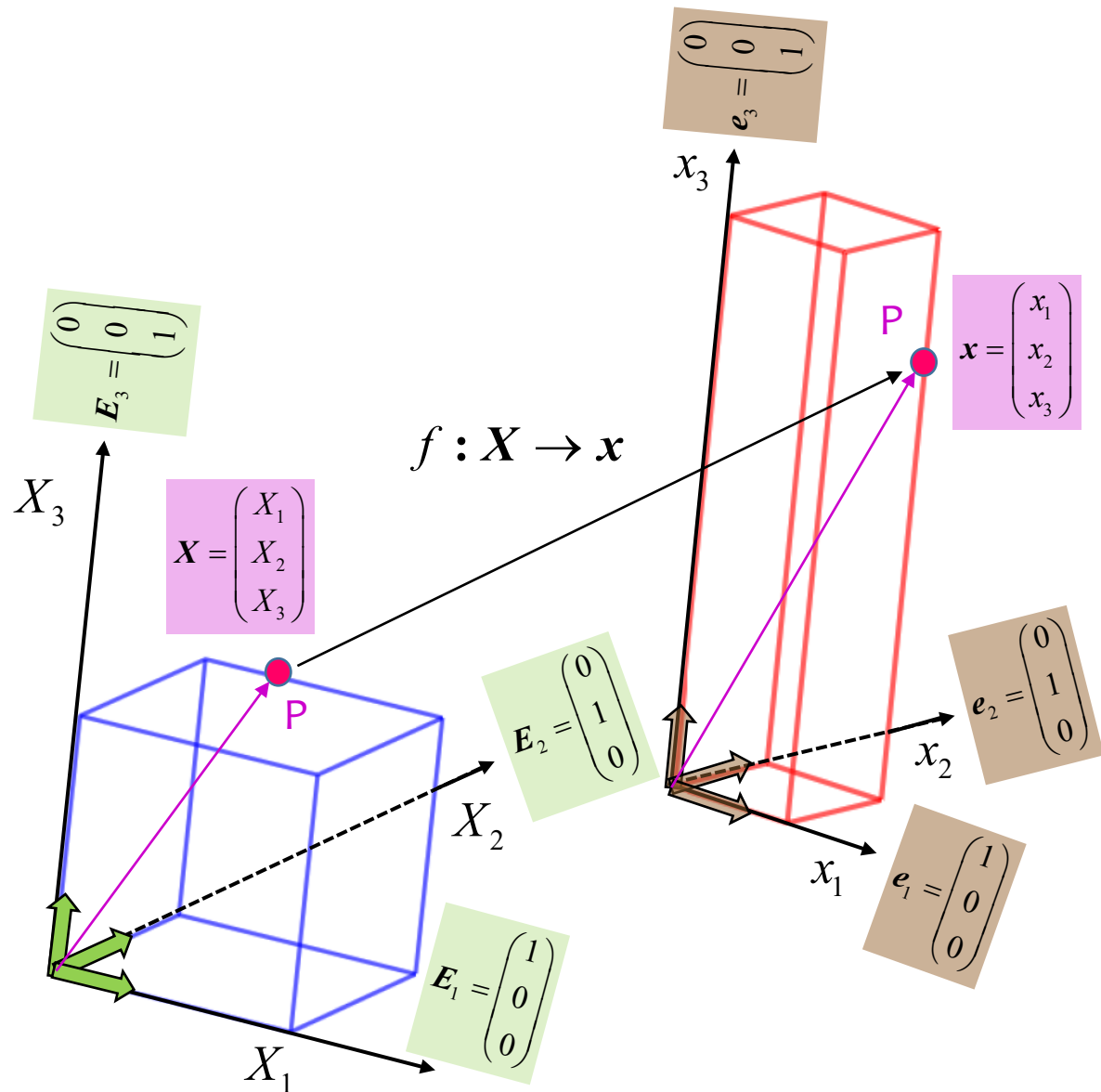
Deformace = Zobrazení



Deformace = Zobrazení



Zobrazení $f : X \rightarrow x$

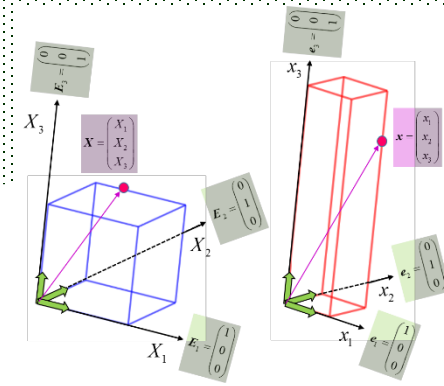


$$f : X \rightarrow x$$

$$x = f(X)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(X_1, X_2, X_3) \\ f_2(X_1, X_2, X_3) \\ f_3(X_1, X_2, X_3) \end{pmatrix} =$$

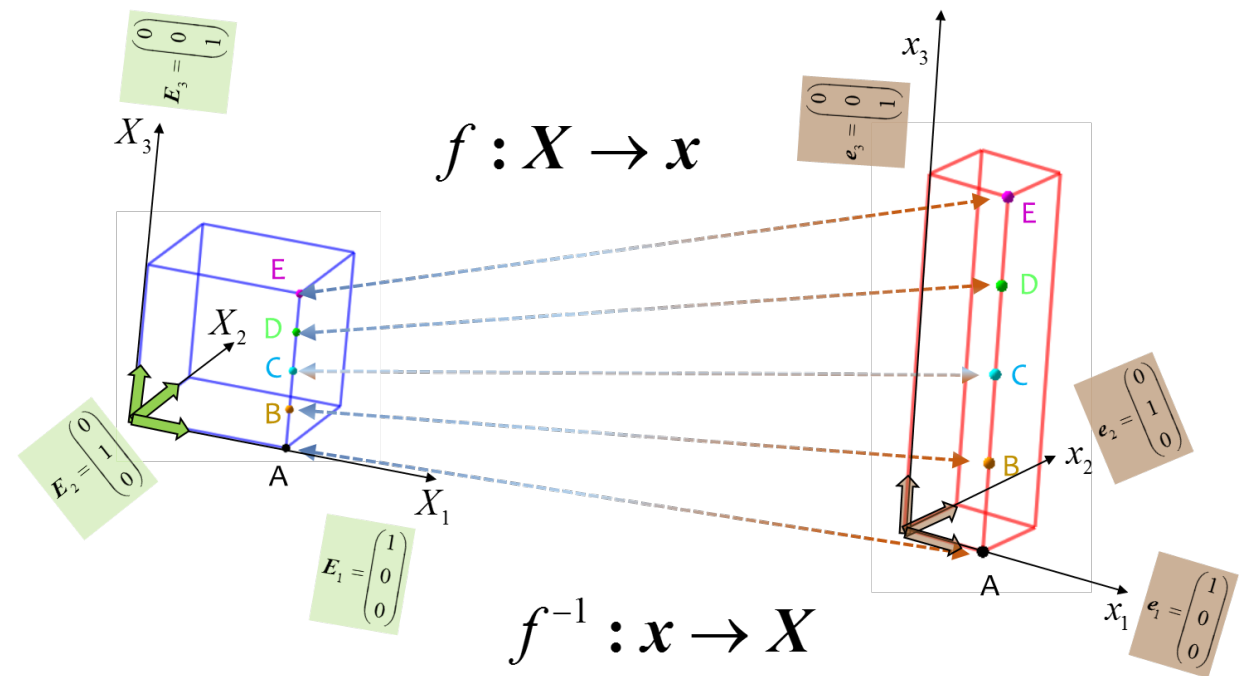
$$= f_1(X_1, X_2, X_3)e_1 + f_2(X_1, X_2, X_3)e_2 + f_3(X_1, X_2, X_3)e_3$$



Zobrazení $f^{-1} : \mathbf{x} \rightarrow X$

Po zobrazení $f : X \rightarrow \mathbf{x}$ požadujeme, aby bylo **bijektivní** (vzájemně jednoznačné) a **spojité**

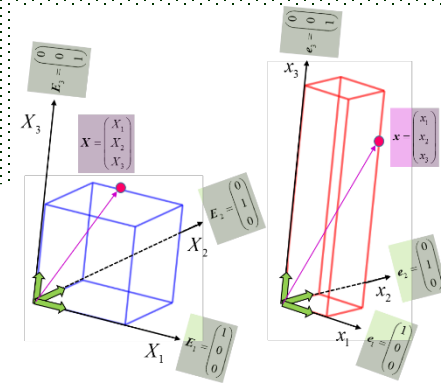
Požadujeme též existenci **spojitého** f^{-1}



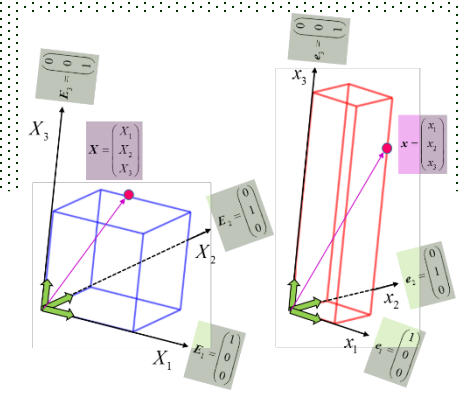
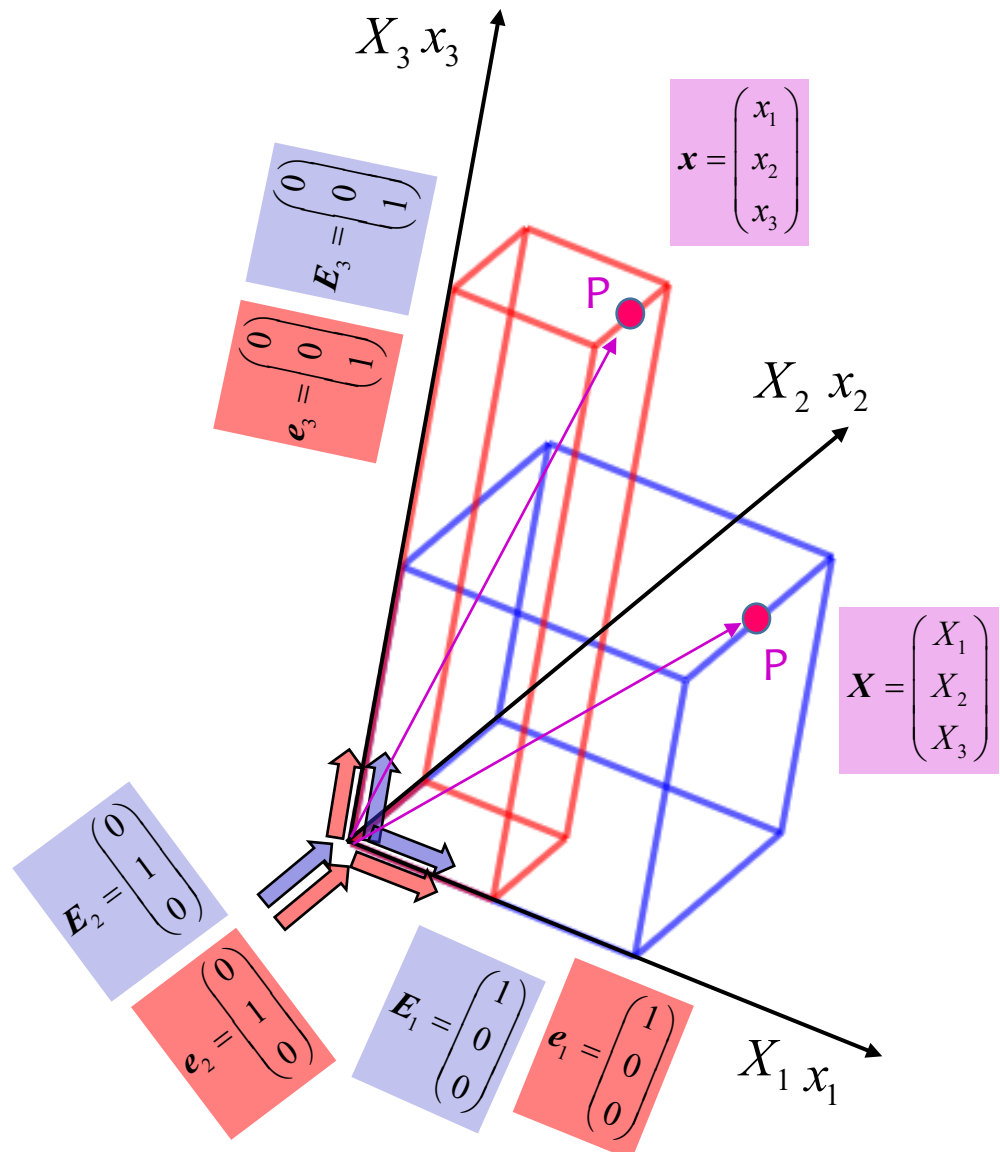
Materiálový vs. prostorový popis

Materiálový popis znamená,
že pracujeme s $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}$
to je typické pro mechaniku poddajných těles
(náčrtek stavu před deformací a po ní)

Prostorový popis znamená,
že pracujeme s $f^{-1} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{X}$
To je typické pro mechaniku
kapalin (kontrolní objem)



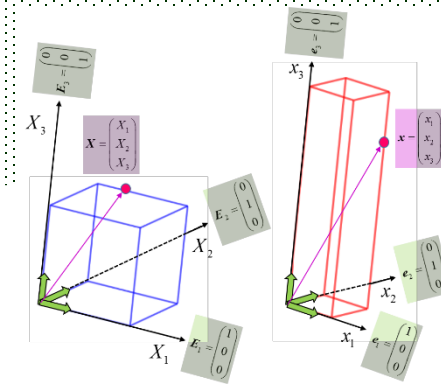
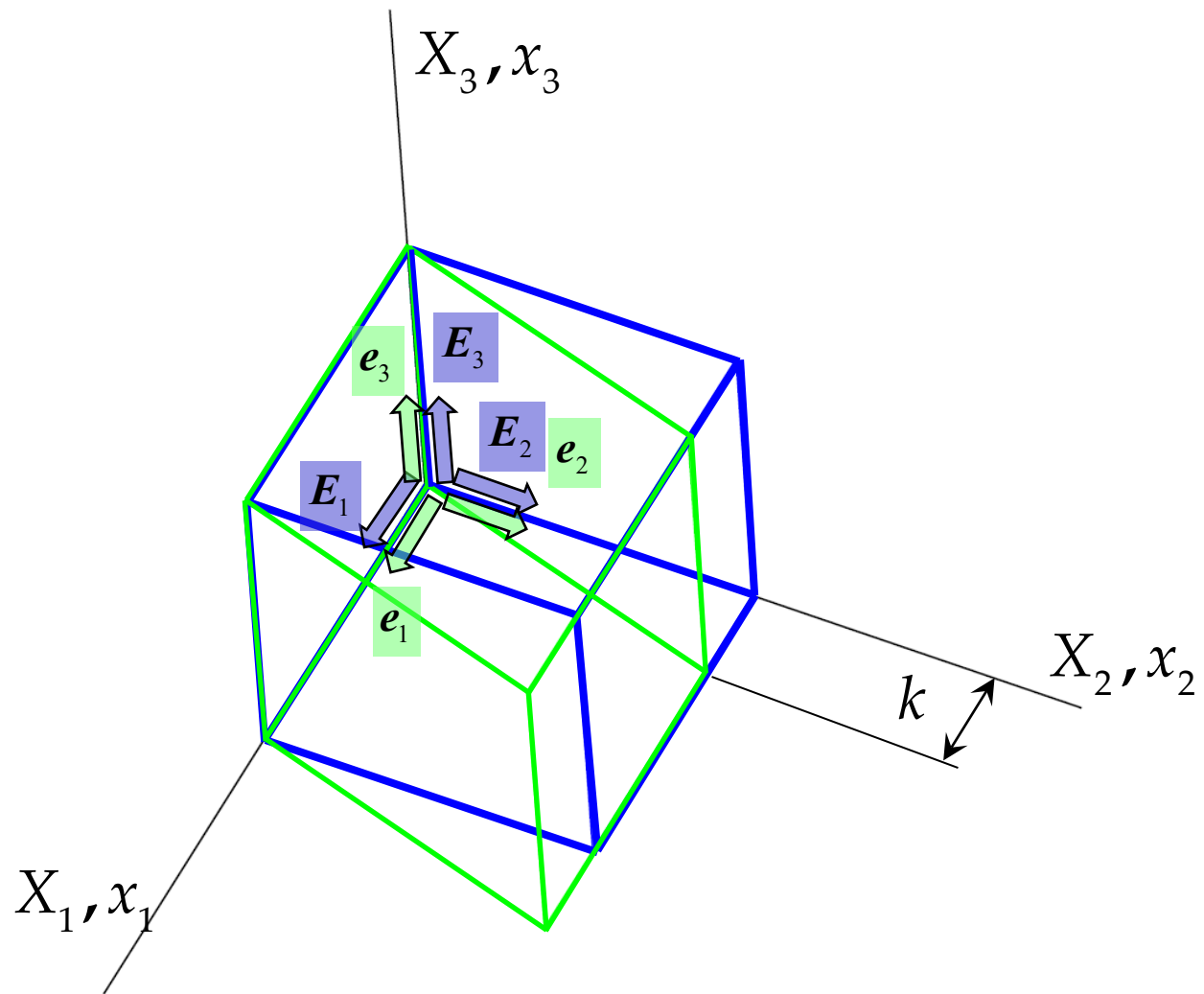
Zobrazení $f : X \rightarrow x$



$$f : X \rightarrow x$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5X_1 \\ 0.5X_2 \\ 2X_3 \end{pmatrix} = 0.5X_1e_1 + 0.5X_2e_2 + 2X_3e_3$$

Zobrazení $f : X \rightarrow x$

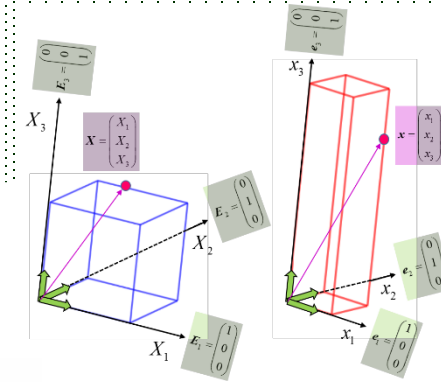


$$f : X \rightarrow x$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 + kX_2 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = (X_1 + kX_2)\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3$$

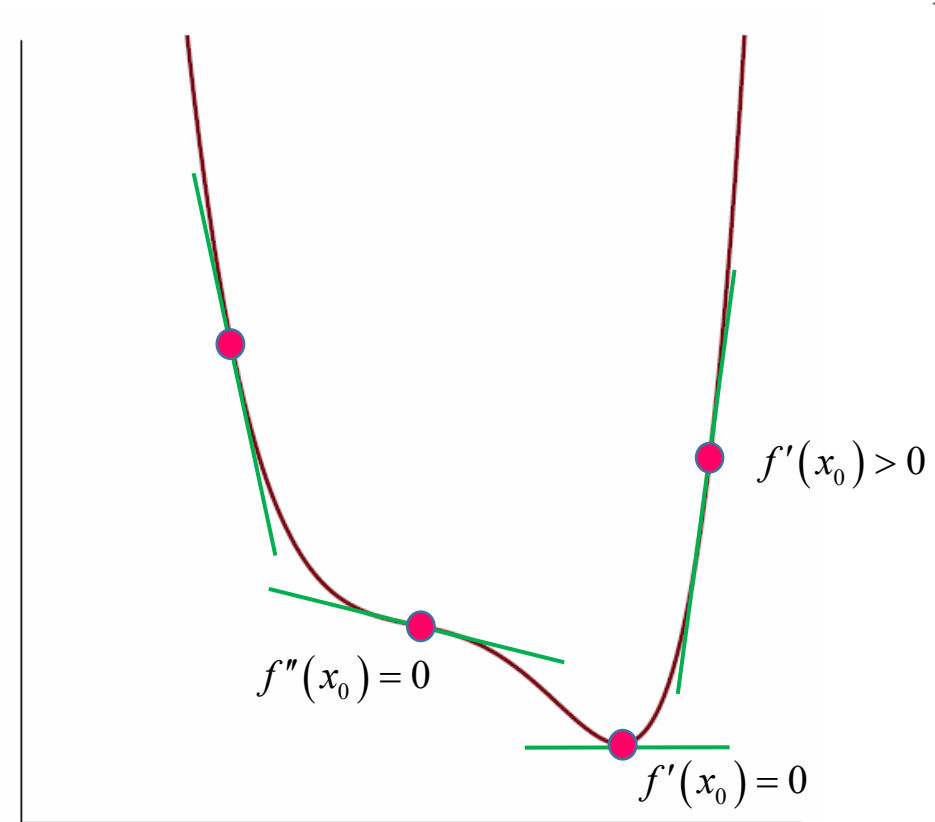
Zjišťování lokálních vlastností zobrazení

Derivace – nástroj pro studium lokálních vlastností funkcí



$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow f(x)$$

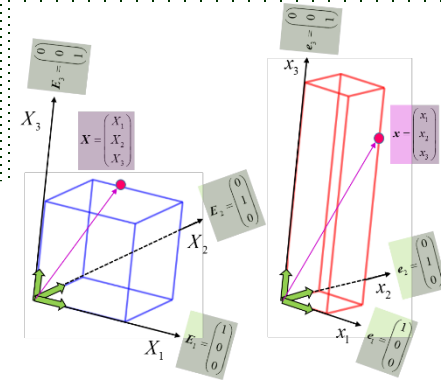
$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Zjišťování lokálních vlastností zobrazení

Směrová derivace a gradient

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathbf{x} \rightarrow f(\mathbf{x})$$



$$\nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{h} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}$$

Směrová derivace

$$\nabla_{(1,0,0)} f(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h(1,0,0)) - f(\mathbf{x}_0)}{h} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}$$

Parciální derivace

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_3} \mathbf{e}_3$$

Gradient skalární funkce

Zjišťování lokálních vlastností zobrazení

Gradient vektorové funkce f

(Jacobiho matice)

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \mathbf{x} = f(\mathbf{X}) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(X_1, X_2, X_3) \\ f_2(X_1, X_2, X_3) \\ f_3(X_1, X_2, X_3) \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = \nabla \mathbf{x}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1(\mathbf{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1(\mathbf{X})}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1(\mathbf{X})}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2(\mathbf{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2(\mathbf{X})}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2(\mathbf{X})}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3(\mathbf{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3(\mathbf{X})}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3(\mathbf{X})}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

Zjišťování lokálních vlastností zobrazení

Gradient

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{X})$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = X_1 \mathbf{E}_1 + X_2 \mathbf{E}_2 + X_3 \mathbf{E}_3$$

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} f_1(X_1, X_2, X_3) \\ f_2(X_1, X_2, X_3) \\ f_3(X_1, X_2, X_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = f_1(\mathbf{X}) \mathbf{e}_1 + f_2(\mathbf{X}) \mathbf{e}_2 + f_3(\mathbf{X}) \mathbf{e}_3$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1(\mathbf{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1(\mathbf{X})}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1(\mathbf{X})}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2(\mathbf{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2(\mathbf{X})}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2(\mathbf{X})}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3(\mathbf{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3(\mathbf{X})}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3(\mathbf{X})}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{matrix} & \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 & \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{e}_1 & \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1(\mathbf{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1(\mathbf{X})}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1(\mathbf{X})}{\partial X_3} \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_2 & \begin{pmatrix} \frac{\partial x_2(\mathbf{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2(\mathbf{X})}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2(\mathbf{X})}{\partial X_3} \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_3 & \begin{pmatrix} \frac{\partial x_3(\mathbf{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3(\mathbf{X})}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3(\mathbf{X})}{\partial X_3} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Zjišťování lokálních vlastností zobrazení

Gradient

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} f_1(X_1, X_2, X_3) \\ f_2(X_1, X_2, X_3) \\ f_3(X_1, X_2, X_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = f_1(\mathbf{X}) \mathbf{e}_1 + f_2(\mathbf{X}) \mathbf{e}_2 + f_3(\mathbf{X}) \mathbf{e}_3 \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = X_1 \mathbf{E}_1 + X_2 \mathbf{E}_2 + X_3 \mathbf{E}_3$$

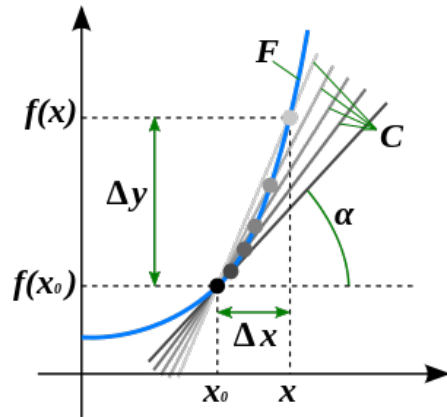
$$\begin{aligned} \nabla f = \nabla \mathbf{x}(\mathbf{X}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1(\mathbf{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1(\mathbf{X})}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1(\mathbf{X})}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2(\mathbf{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2(\mathbf{X})}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2(\mathbf{X})}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3(\mathbf{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3(\mathbf{X})}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3(\mathbf{X})}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1}(x_1 \mathbf{e}_1) \mathbf{E}_1 & \frac{\partial}{\partial X_2}(x_1 \mathbf{e}_1) \mathbf{E}_2 & \frac{\partial}{\partial X_3}(x_1 \mathbf{e}_1) \mathbf{E}_3 \\ \frac{\partial}{\partial X_1}(x_2 \mathbf{e}_2) \mathbf{E}_1 & \frac{\partial}{\partial X_2}(x_2 \mathbf{e}_2) \mathbf{E}_2 & \frac{\partial}{\partial X_3}(x_2 \mathbf{e}_2) \mathbf{E}_3 \\ \frac{\partial}{\partial X_1}(x_3 \mathbf{e}_3) \mathbf{E}_1 & \frac{\partial}{\partial X_2}(x_3 \mathbf{e}_3) \mathbf{E}_2 & \frac{\partial}{\partial X_3}(x_3 \mathbf{e}_3) \mathbf{E}_3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\partial x_1}{\partial X_1} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_3 + \frac{\partial x_2}{\partial X_1} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_3 + \frac{\partial x_3}{\partial X_1} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_1 + \frac{\partial x_3}{\partial X_2} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_3 \end{aligned}$$

Zjišťování lokálních vlastností zobrazení

Podstatou stále zůstává derivování...

měření velikosti změny $\Delta f(x)$ vzhledem ke změně Δx

$$\frac{df(x)}{dx}$$



Gradient $x = f(X)$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

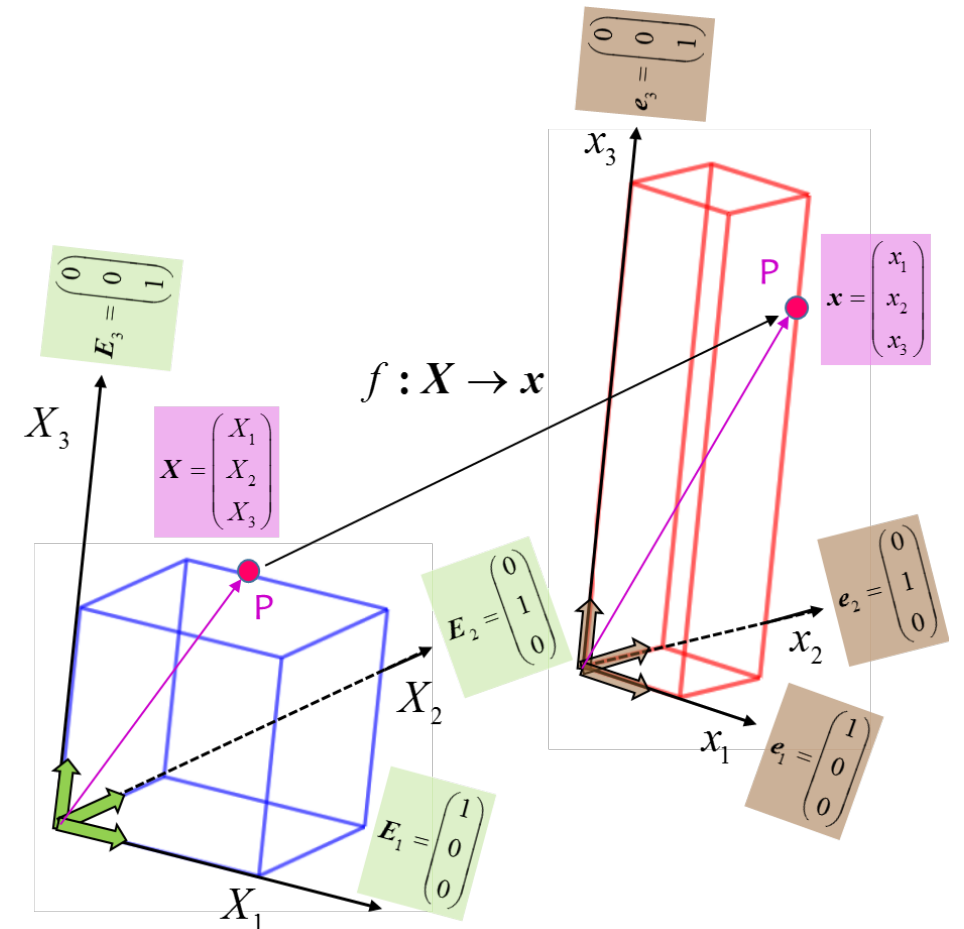
$$\frac{\partial f_i(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_K} \quad i, K = 1, 2, 3$$

Deformace

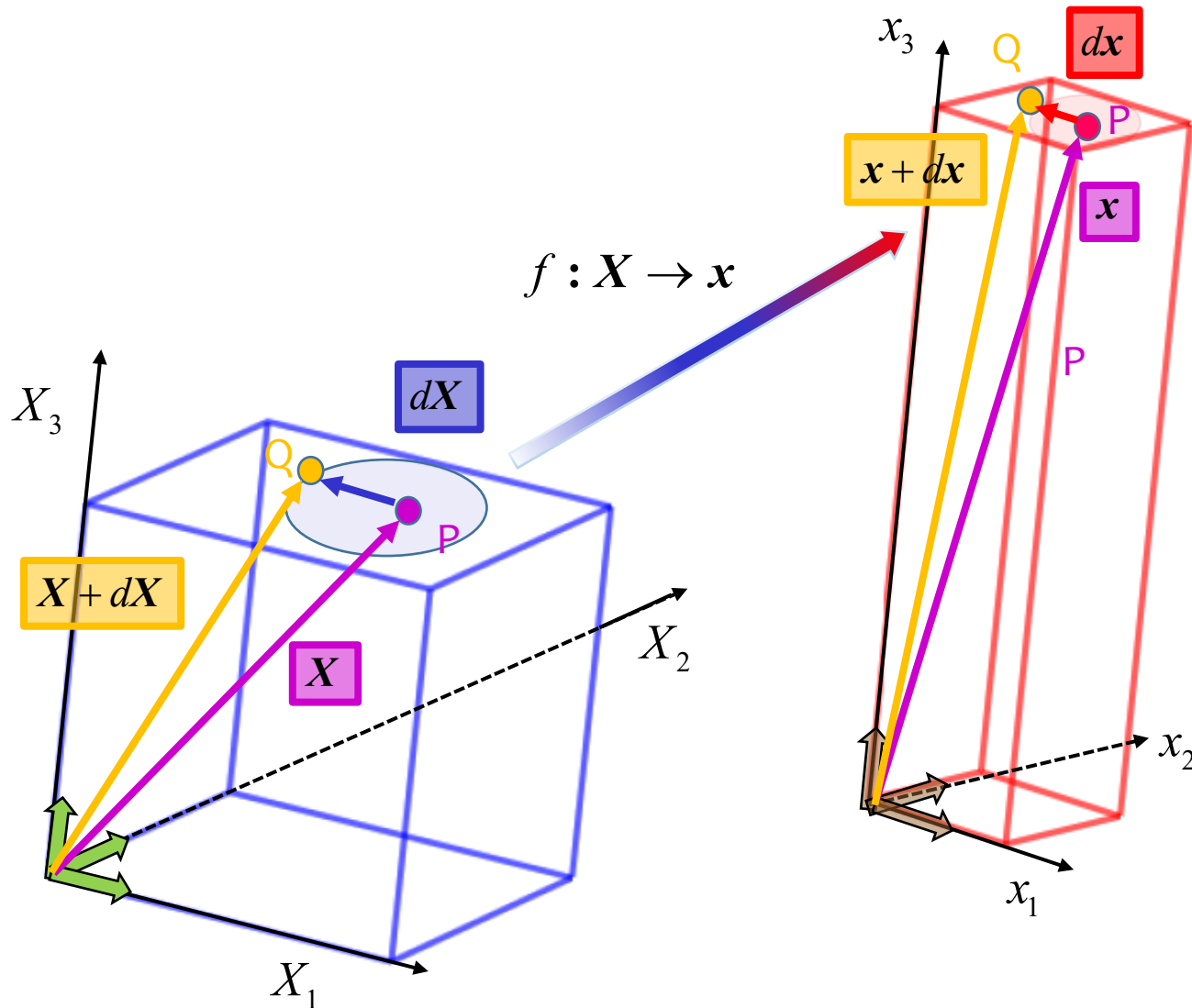
Takže odpověď na otázku, co se děje s tělesem při deformování, budeme opět hledat pomocí derivací...

Pomocí tzv.

deformačního gradientu



Deformace



Referenční konfigurace:

bod P zaměřen X

Bod v elementárním okolí Q

zaměřen $X + dX$

Deformovaná konfigurace:

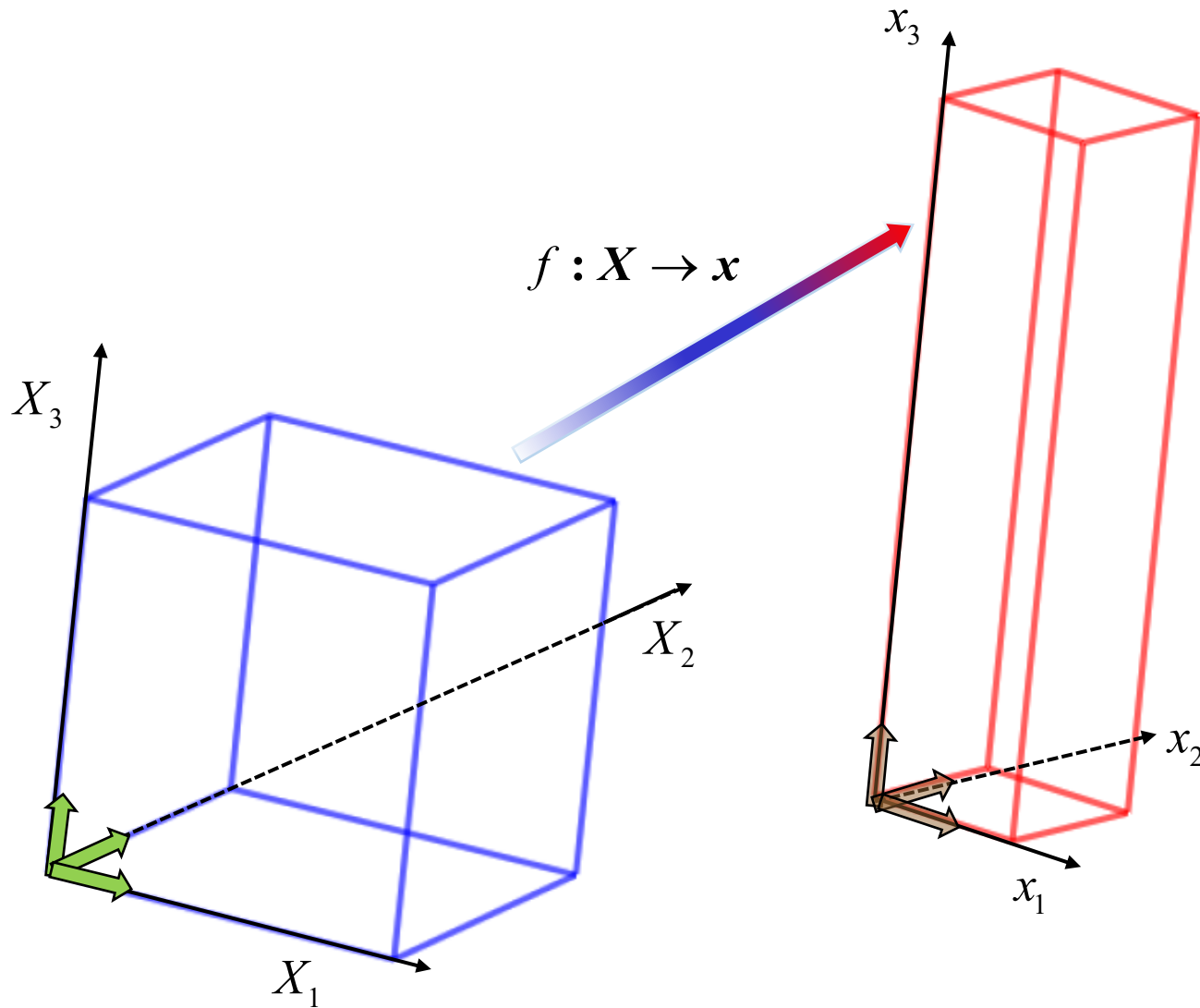
bod P zaměřen x

Bod v elementárním okolí Q

zaměřen $x + dx$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(X_1, X_2, X_3) \\ f_2(X_1, X_2, X_3) \\ f_3(X_1, X_2, X_3) \end{pmatrix}$$

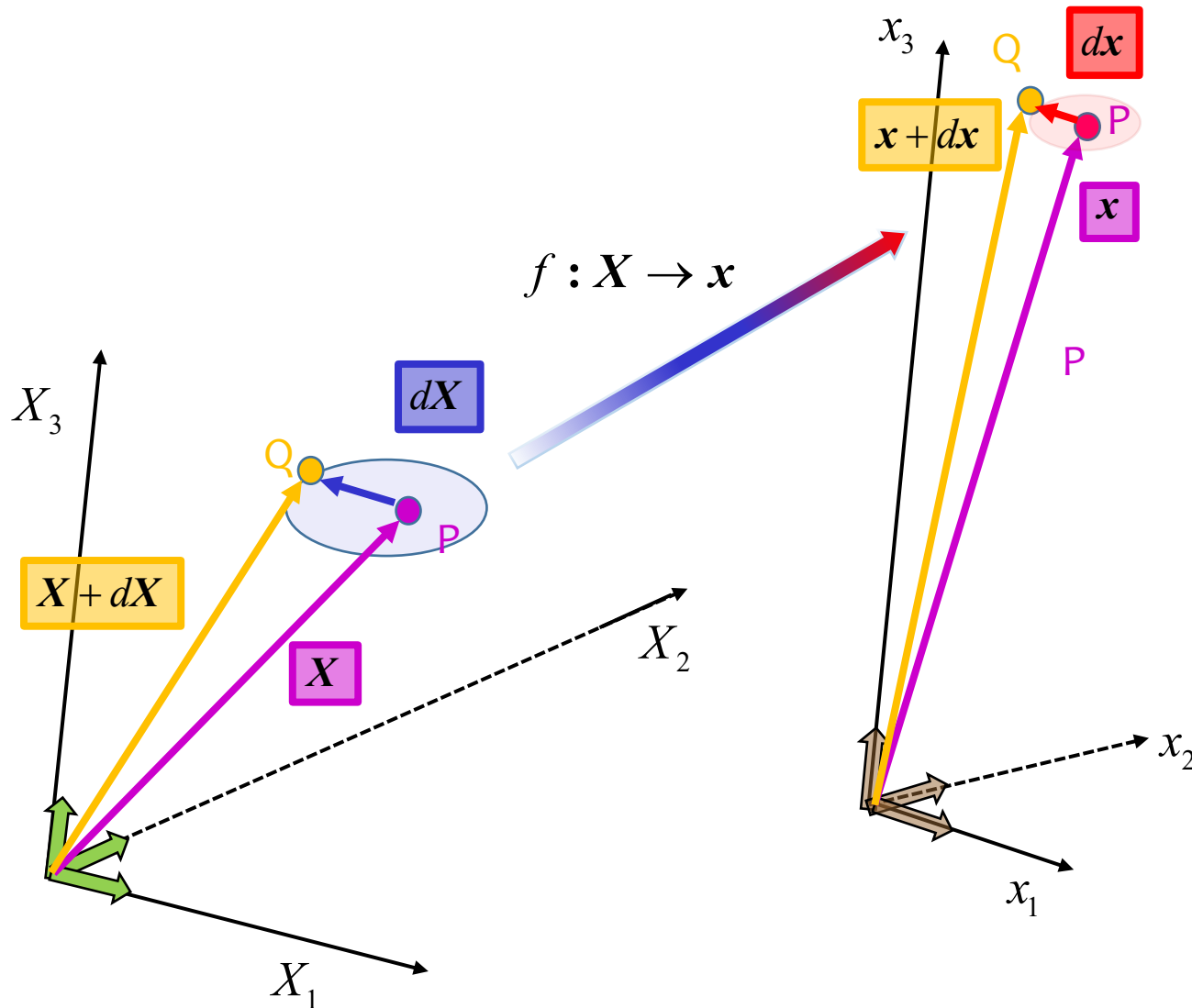
Deformace



f vyjadřuje pohyb
(**celého**) tělesa

Deformaci ale studujeme
jako lokální vlastnost.
Mluvíme o **deformaci**
v bodě tělesa (v bodě **P**)

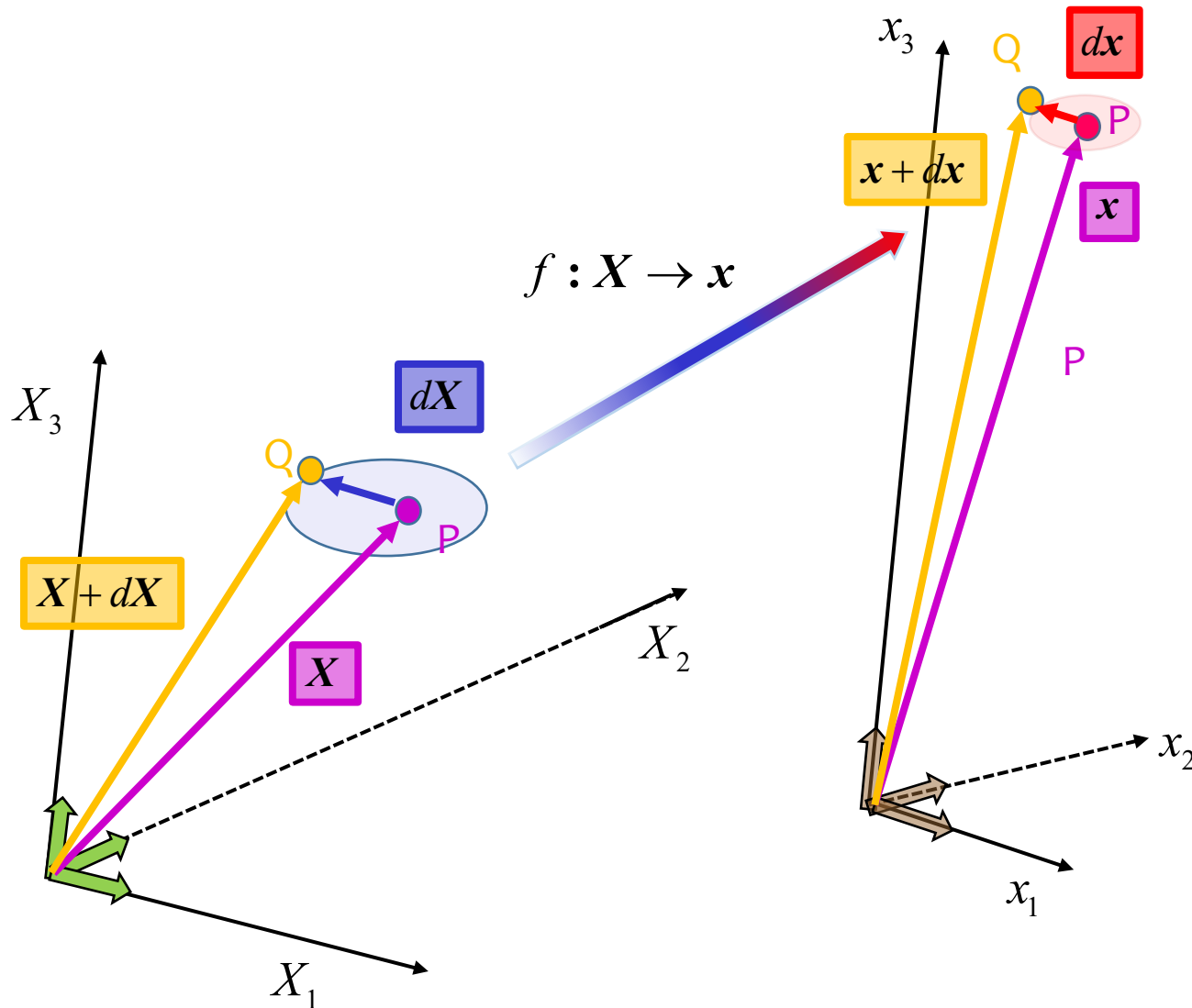
Deformace



Deformaci ale studujeme jako lokální vlastnost. Mluvíme o **deformaci v bodě tělesa** (v bodě P).

Lokální ve smyslu matematické analýzy; ptáme se, **co se děje s okolím bodu P ?**

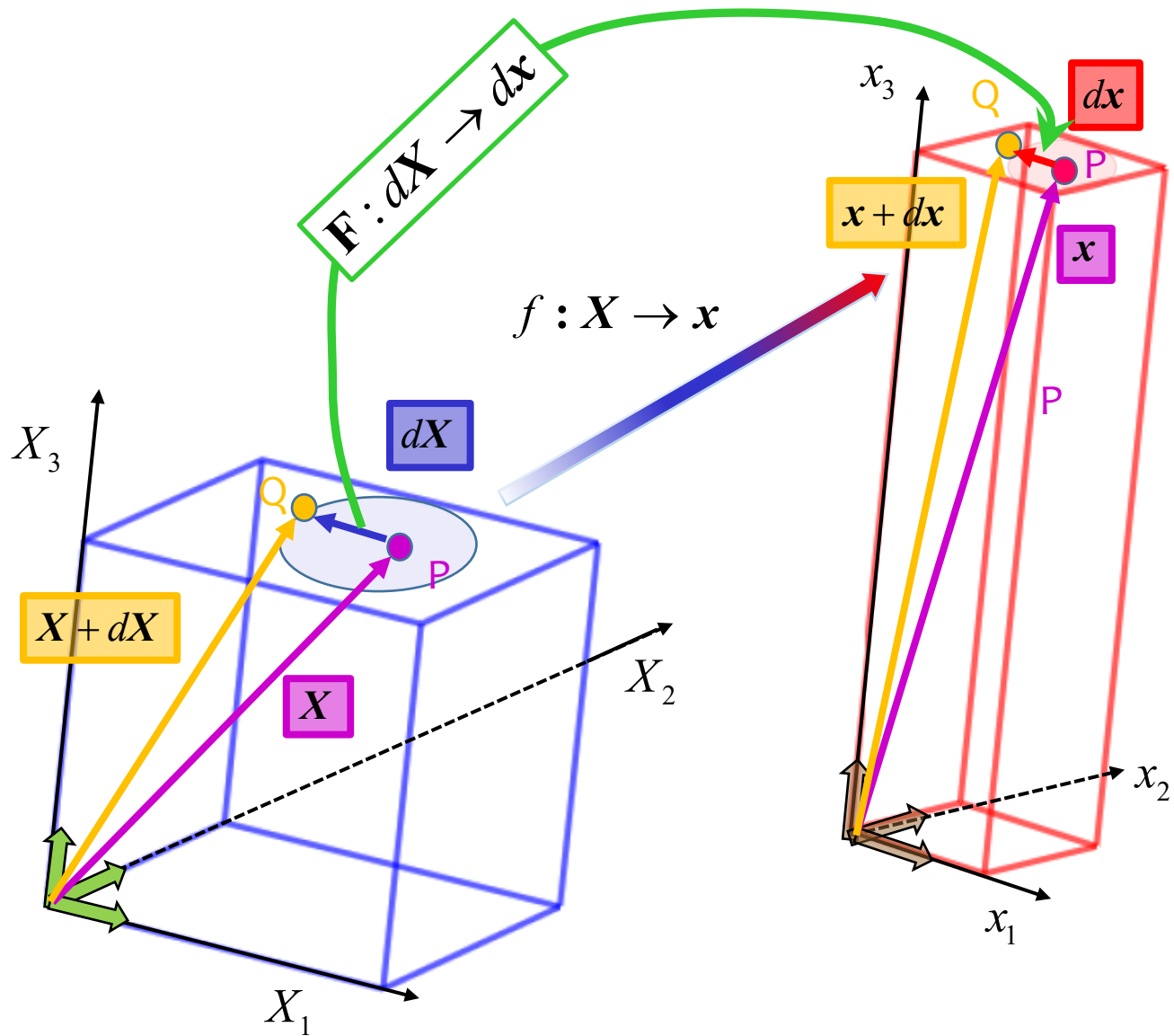
Deformace



Při deformaci se okolí bodu P mění z dX na dx .

Přesněji řečeno prostor vektorů $\{dX\}$ je zobrazován (přechází v) na prostor vektorů $\{dx\}$.

Deformace



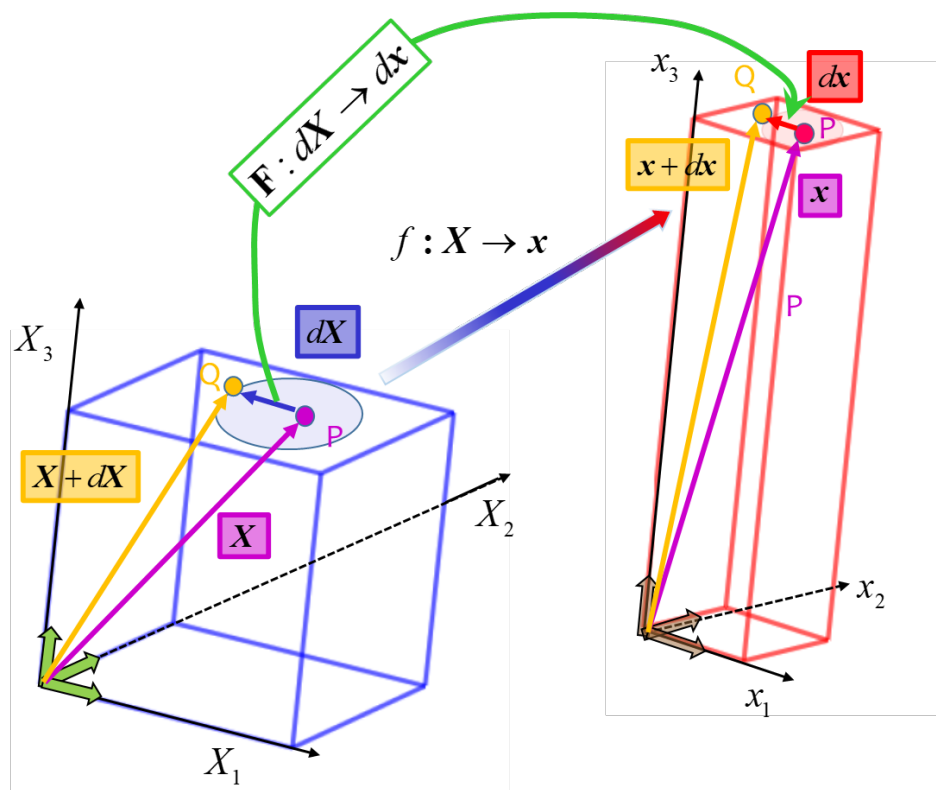
Takže během deformace
jakožto nějakého
obecného pohybu se
s tělesem (globálně) děje

$$f : X \rightarrow x$$

a v okolí bodu, který
studujeme se děje

$$F : dX \rightarrow dx$$

Deformační gradient \mathbf{F}

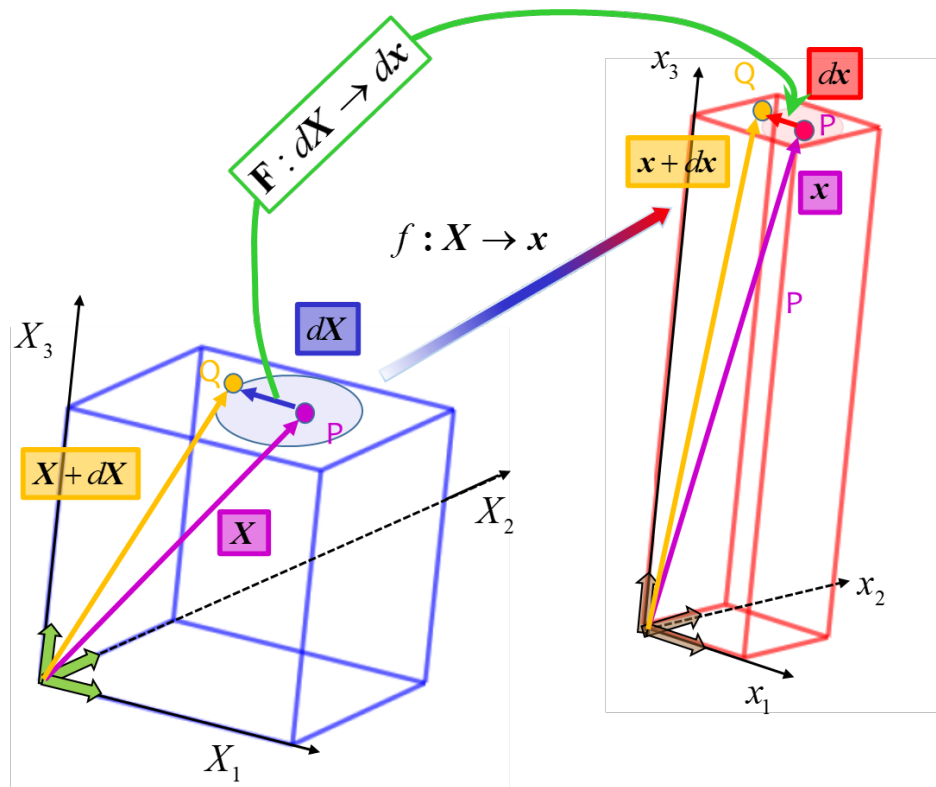


Deformační gradient je zobrazení mezi vektorovými prostory $\{dX\}$ a $\{dx\}$

$$\mathbf{F} : dX \rightarrow dx$$

$$dx = \mathbf{F} dX$$

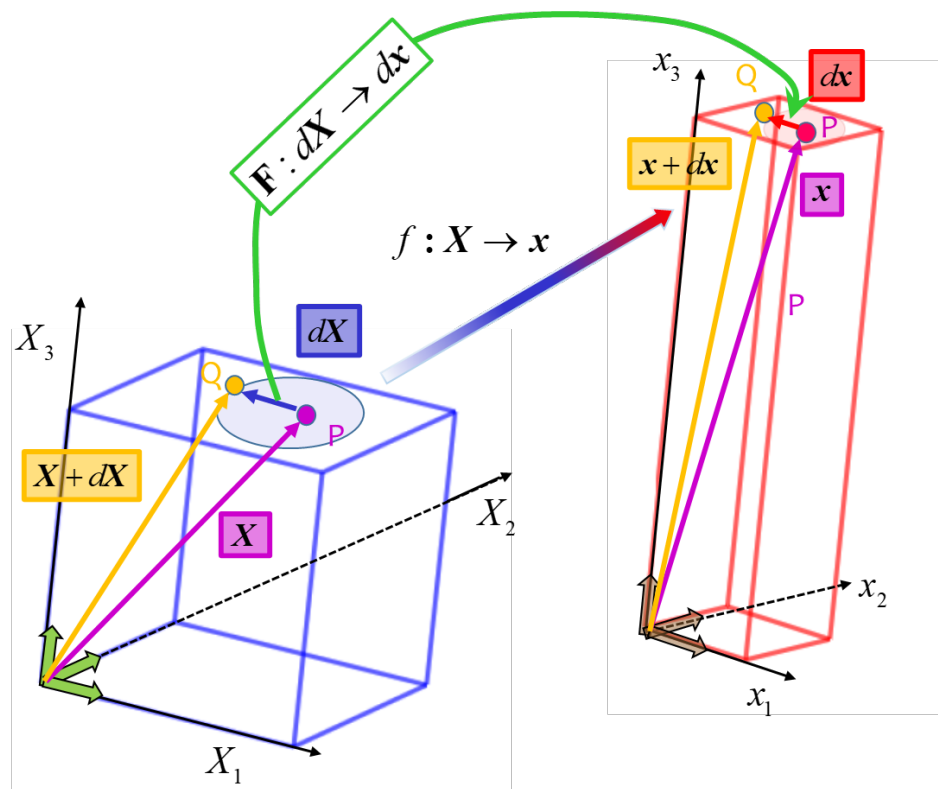
Deformační gradient \mathbf{F}



$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$$

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \mathbf{F} \begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{pmatrix}$$

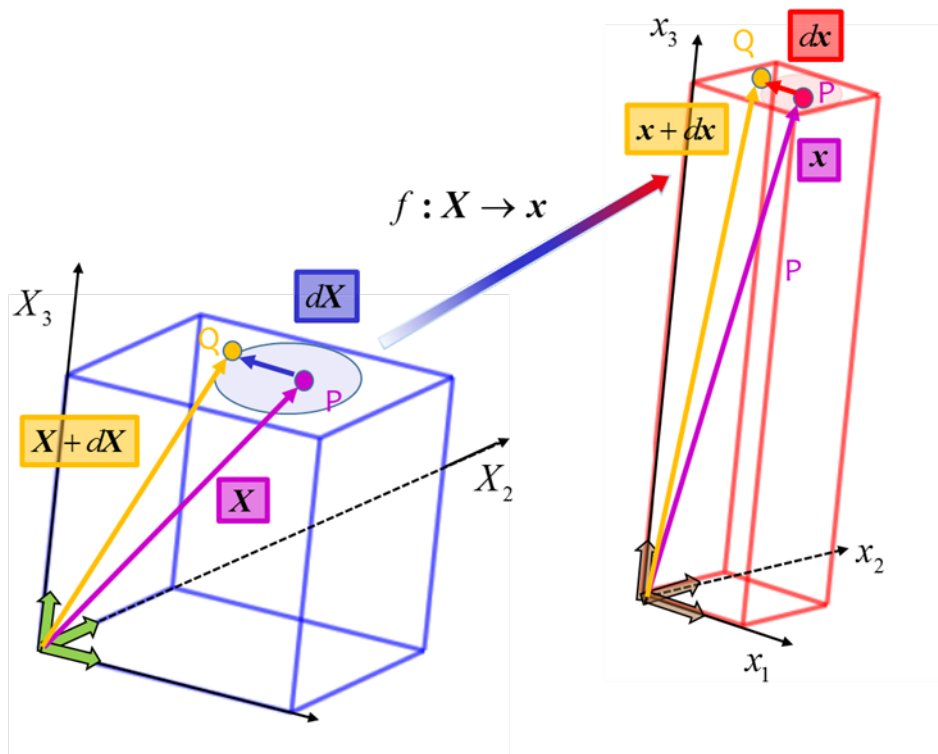
Deformační gradient \mathbf{F}



$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}}$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

Deformační gradient \mathbf{F}

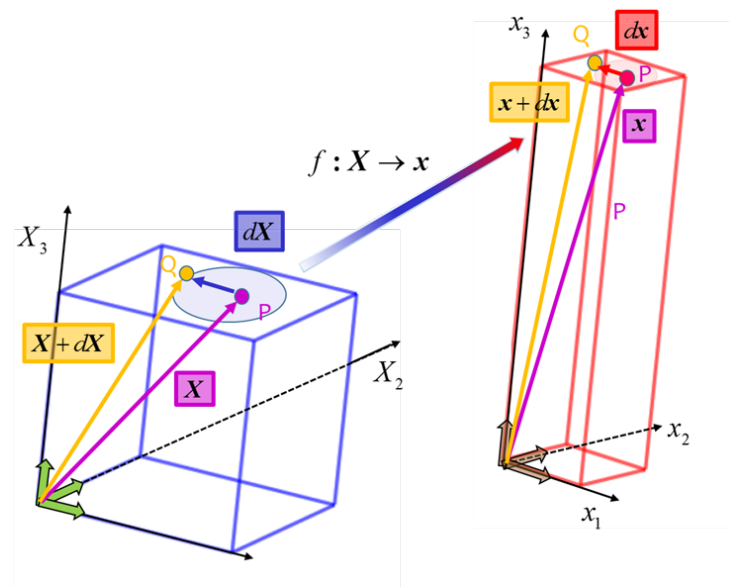


$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}}$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$$

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{pmatrix}$$

Deformační gradient \mathbf{F}



$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$$

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{pmatrix}$$

$$dx_i = F_{iK} dX_K$$



přes opakující se index sčítáme

Deformační gradient \mathbf{F}

\mathbf{F} představuje lineární zobrazení mezi dvěma vektorovými prostory (prostor referenčních a deformovaných elementárních vektorů)

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$$

$$\mathbf{F} : d\mathbf{X} \rightarrow d\mathbf{x}$$

$$dx_1 \mathbf{e}_1 + dx_2 \mathbf{e}_2 + dx_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{F} \{ dX_1 \mathbf{E}_1 + dX_2 \mathbf{E}_2 + dX_3 \mathbf{E}_3 \}$$

Takovou veličinu nazýváme tenzor

\mathbf{F} je konkrétně **tenzor druhého řádu** (tzv. **smíšený**, též dvoubodový)

Deformační gradient \mathbf{F}

$$\mathbf{F} : d\mathbf{X} \rightarrow d\mathbf{x}$$

$$\begin{pmatrix} dx_1 \mathbf{e}_1 \\ dx_2 \mathbf{e}_2 \\ dx_3 \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1 \mathbf{e}_1}{\partial X_1 \mathbf{E}_1} & \frac{\partial x_1 \mathbf{e}_1}{\partial X_2 \mathbf{E}_2} & \frac{\partial x_1 \mathbf{e}_1}{\partial X_3 \mathbf{E}_3} \\ \frac{\partial x_2 \mathbf{e}_2}{\partial X_1 \mathbf{E}_1} & \frac{\partial x_2 \mathbf{e}_2}{\partial X_2 \mathbf{E}_2} & \frac{\partial x_2 \mathbf{e}_2}{\partial X_3 \mathbf{E}_3} \\ \frac{\partial x_3 \mathbf{e}_3}{\partial X_1 \mathbf{E}_1} & \frac{\partial x_3 \mathbf{e}_3}{\partial X_2 \mathbf{E}_2} & \frac{\partial x_3 \mathbf{e}_3}{\partial X_3 \mathbf{E}_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX_1 \mathbf{E}_1 \\ dX_2 \mathbf{E}_2 \\ dX_3 \mathbf{E}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1 \mathbf{e}_1}{\partial X_1 \mathbf{E}_1} dX_1 \mathbf{E}_1 + \frac{\partial x_1 \mathbf{e}_1}{\partial X_2 \mathbf{E}_2} dX_2 \mathbf{E}_2 + \frac{\partial x_1 \mathbf{e}_1}{\partial X_3 \mathbf{E}_3} dX_3 \mathbf{E}_3 \\ \frac{\partial x_2 \mathbf{e}_2}{\partial X_1 \mathbf{E}_1} dX_1 \mathbf{E}_1 + \frac{\partial x_2 \mathbf{e}_2}{\partial X_2 \mathbf{E}_2} dX_2 \mathbf{E}_2 + \frac{\partial x_2 \mathbf{e}_2}{\partial X_3 \mathbf{E}_3} dX_3 \mathbf{E}_3 \\ \frac{\partial x_3 \mathbf{e}_3}{\partial X_1 \mathbf{E}_1} dX_1 \mathbf{E}_1 + \frac{\partial x_3 \mathbf{e}_3}{\partial X_2 \mathbf{E}_2} dX_2 \mathbf{E}_2 + \frac{\partial x_3 \mathbf{e}_3}{\partial X_3 \mathbf{E}_3} dX_3 \mathbf{E}_3 \end{pmatrix} =$$

Deformační gradient \mathbf{F}

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1 \mathbf{e}_1}{\partial X_1 \mathbf{E}_1} dX_1 \mathbf{E}_1 + \frac{\partial x_1 \mathbf{e}_1}{\partial X_2 \mathbf{E}_2} dX_2 \mathbf{E}_2 + \frac{\partial x_1 \mathbf{e}_1}{\partial X_3 \mathbf{E}_3} dX_3 \mathbf{E}_3 \\ \frac{\partial x_2 \mathbf{e}_2}{\partial X_1 \mathbf{E}_1} dX_1 \mathbf{E}_1 + \frac{\partial x_2 \mathbf{e}_2}{\partial X_2 \mathbf{E}_2} dX_2 \mathbf{E}_2 + \frac{\partial x_2 \mathbf{e}_2}{\partial X_3 \mathbf{E}_3} dX_3 \mathbf{E}_3 \\ \frac{\partial x_3 \mathbf{e}_3}{\partial X_1 \mathbf{E}_1} dX_1 \mathbf{E}_1 + \frac{\partial x_3 \mathbf{e}_3}{\partial X_2 \mathbf{E}_2} dX_2 \mathbf{E}_2 + \frac{\partial x_3 \mathbf{e}_3}{\partial X_3 \mathbf{E}_3} dX_3 \mathbf{E}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1 \mathbf{e}_1}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_1 \mathbf{e}_1}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_1 \mathbf{e}_1}{\partial X_3} dX_3 \\ \frac{\partial x_2 \mathbf{e}_2}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_2 \mathbf{e}_2}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_2 \mathbf{e}_2}{\partial X_3} dX_3 \\ \frac{\partial x_3 \mathbf{e}_3}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_3 \mathbf{e}_3}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_3 \mathbf{e}_3}{\partial X_3} dX_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_1}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_1}{\partial X_3} dX_3 \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_2}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_2}{\partial X_3} dX_3 \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_3}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_3}{\partial X_3} dX_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_1}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_1}{\partial X_3} dX_3 \end{pmatrix} \mathbf{e}_1 + \begin{pmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_2}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_2}{\partial X_3} dX_3 \end{pmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{pmatrix} \frac{\partial x_3}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_3}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_3}{\partial X_3} dX_3 \end{pmatrix} \mathbf{e}_3$$

Deformační gradient \mathbf{F}

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1 \mathbf{e}_1}{\partial X_1 \mathbf{E}_1} & \frac{\partial x_1 \mathbf{e}_1}{\partial X_2 \mathbf{E}_2} & \frac{\partial x_1 \mathbf{e}_1}{\partial X_3 \mathbf{E}_3} \\ \frac{\partial x_2 \mathbf{e}_2}{\partial X_1 \mathbf{E}_1} & \frac{\partial x_2 \mathbf{e}_2}{\partial X_2 \mathbf{E}_2} & \frac{\partial x_2 \mathbf{e}_2}{\partial X_3 \mathbf{E}_3} \\ \frac{\partial x_3 \mathbf{e}_3}{\partial X_1 \mathbf{E}_1} & \frac{\partial x_3 \mathbf{e}_3}{\partial X_2 \mathbf{E}_2} & \frac{\partial x_3 \mathbf{e}_3}{\partial X_3 \mathbf{E}_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} \mathbf{e}_1 \mathbf{E}_1 & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \mathbf{e}_1 \mathbf{E}_2 & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \mathbf{e}_1 \mathbf{E}_3 \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} \mathbf{e}_2 \mathbf{E}_1 & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \mathbf{e}_2 \mathbf{E}_2 & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \mathbf{e}_2 \mathbf{E}_3 \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} \mathbf{e}_3 \mathbf{E}_1 & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} \mathbf{e}_3 \mathbf{E}_2 & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \mathbf{e}_3 \mathbf{E}_3 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{\partial x_1}{\partial X_1} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_1) + \frac{\partial x_1}{\partial X_2} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_2) + \frac{\partial x_1}{\partial X_3} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_3) + \frac{\partial x_2}{\partial X_1} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_1) + \frac{\partial x_2}{\partial X_2} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_2) + \\
 &+ \frac{\partial x_2}{\partial X_3} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_3) + \frac{\partial x_3}{\partial X_1} (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_1) + \frac{\partial x_3}{\partial X_2} (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_2) + \frac{\partial x_3}{\partial X_3} (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_3)
 \end{aligned}$$

Deformační gradient \mathbf{F}

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} \quad F_{iK} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & F_{11}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_1) + F_{12}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_2) + F_{13}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_3) + F_{21}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_1) + F_{22}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_2) + \\ & + F_{23}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_3) + F_{31}(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_1) + F_{32}(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_2) + F_{33}(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_3) \end{aligned}$$

Tenzory druhého řádu – smíšený tenzor

Lineární zobrazení mezi dvěma vektorovými prostory \mathcal{V} a \mathcal{W}

Tenzor 2. řádu \mathbf{A} tedy je $\mathbf{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$

$$\mathbf{u} \in \mathcal{V}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$$

$$\mathbf{v} \in \mathcal{W}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$$

Jako lineární zobrazení je
tenzor druhého řádu \mathbf{A}
reprezentován složkami A_{iK}

$$\mathbf{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{u}$$

Ty vždy přísluší nějaké
konkrétní volbě bází \mathbf{E}_i a \mathbf{e}_i

$$\mathbf{A} = A_{iK} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_K$$

$$[\mathbf{v}] = [\mathbf{A}][\mathbf{u}]$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Tenzory druhého řádu

Lineární zobrazení prostoru \mathcal{V} sama na sebe (lineární transformace \mathcal{V})

Tenzor **2. řádu** \mathbf{A} tedy je $\mathbf{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ čili $\mathcal{V} = \mathcal{W}$ $u \in \mathcal{V}(E_1, E_2, E_3)$
 $v \in \mathcal{V}(E_1, E_2, E_3)$

Jako lineární transformace je
tenzor \mathbf{A} druhého řádu
opět reprezentován
maticí složek A_{IK}
(odpovídajících
volbě báze E_K)

$$\mathbf{A} = A_{IK} \mathbf{E}_I \otimes \mathbf{E}_K$$

$$\mathbf{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{u}$$

$$[\mathbf{v}] = [\mathbf{A}][\mathbf{u}]$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Operace s tenzory druhého řádu

„po složkách“ $u, v \in \mathcal{V}$ $t \in \mathbb{R}$ \otimes nazýváme **dyadický součin**

$$(u \otimes v)_{ij} = u_i v_j \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{pmatrix} \quad A_{ij} = u_i v_j$$

$$u \otimes v = u_i v_j (e_i \otimes e_j) = u_i v_j e_i \otimes e_j$$

Operace s tenzory druhého řádu

„**po složkách**“ $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ tenzory (druhého řádu) $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \text{ tak, že } A_{ij} + B_{ij} = C_{ij}$$

$$t \cdot \mathbf{A} = \mathbf{C} \text{ tak, že } t \cdot A_{ij} = C_{ij}$$

Operace s tenzory druhého řádu

„po složkách“ $u, v \in \mathcal{V}$ $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = A_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + A_{12} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \dots + A_{23} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + A_{33} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 =$$

$$= A_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots + A_{23} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + A_{33} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operace s tenzory druhého řádu

„po složkách“ $u, v \in \mathcal{V}$ $t \in \mathbb{R}$

$$(u \otimes v)^T = v \otimes u \quad \text{též} \quad v \cdot (A u) = u \cdot (A^T v) \quad \text{též} \quad A u = u A^T$$

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^3 A_{ii} = A_{ii} \quad \text{stopa tenzoru} \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A : B = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} B_{ij} = A_{ij} B_{ij} \quad \text{vnitřní součin (analogon skalárního) „po složkách“}$$

Operace s tenzory druhého řádu

„po složkách“

$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{C}$ Skládání zobrazení = násobení matic tenzorů

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^3 A_{ik} B_{kj} = A_{ik} B_{kj}$$

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{u} \otimes \mathbf{y}) = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{y})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \sum_{k=1}^3 v_k x_k = v_k x_k$$

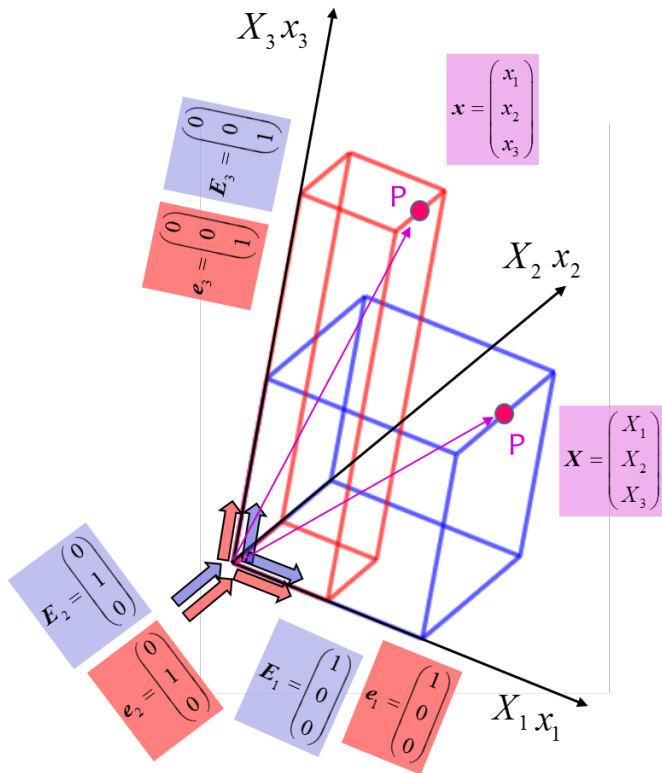
$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad I_{ij} = \delta_{ij}, \text{ kde } \delta_{ij} = 1 \text{ pro } i = j, \text{ jinak } \delta_{ij} = 0$$

Inverzní tenzor jako inverzní matice; *jednotkový tenzor* (matice) – Kroneckerovo delta

Příklady pro deformační gradient \mathbf{F}

$$f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5X_1 \\ 0.5X_2 \\ 2X_3 \end{pmatrix} = 0.5X_1\mathbf{e}_1 + 0.5X_2\mathbf{e}_2 + 2X_3\mathbf{e}_3$$

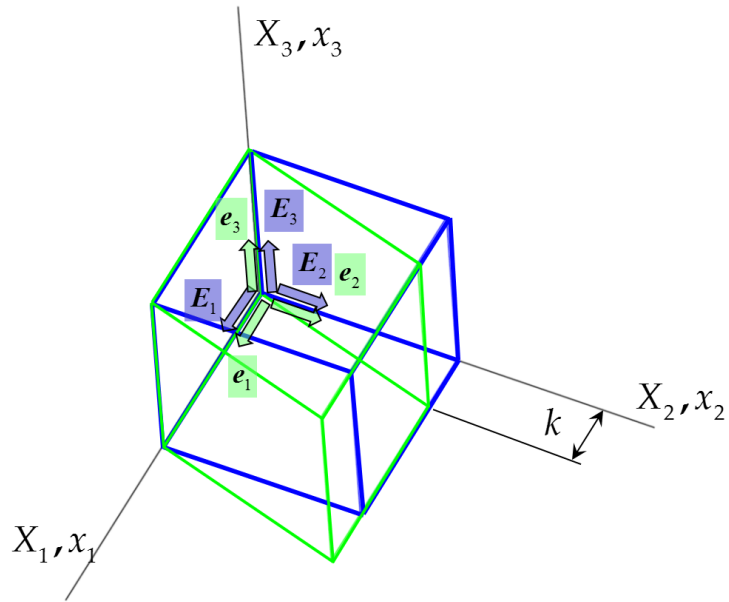
$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} \quad F_{iK} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K}$$



$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklady pro deformační gradient \mathbf{F}

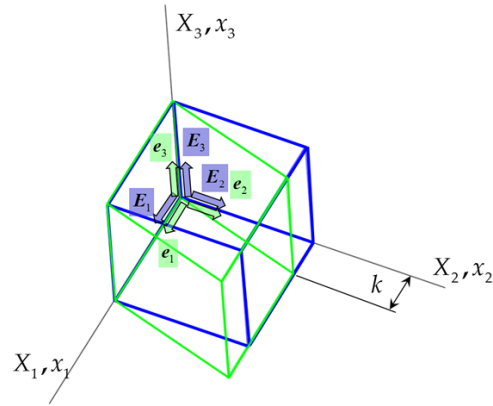
$$f: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 + kX_2 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = (X_1 + kX_2)\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3 \quad \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} \quad F_{iK} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K}$$



$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nesymetrie \mathbf{F}

\mathbf{F} má devět nezávislých složek F_{iK} $i, K = 1, 2, 3$



$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

To je důsledek přítomnosti rotací \mathbf{R} při zobrazení (pohybu) $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}$ mezi konfiguracemi. f obsahuje informaci o *translaci*, *rotaci* i *deformaci*. Od popisu deformace samozřejmě očekáváme, že bude založen pouze na změně relativní vzdálenosti bodů tělesa vůči sobě. Dodejme, že translace je „konstanta“, a tak derivována na 0, tudíž není v \mathbf{F} .

$$\mathbf{F} = \frac{df(\mathbf{X})}{d\mathbf{X}} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{v}\mathbf{R}$$

Polární rozklad \mathbf{F}

Jestliže \mathbf{F} je deformační gradient (což znamená, že jeho matice je regulární čtvercová), pak existuje právě jedno \mathbf{U} , \mathbf{v} a \mathbf{R} tak, že platí:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{v}\mathbf{R}$$

Navíc platí, že \mathbf{U} a \mathbf{v} jsou symetrické pozitivně definitní tenzory a \mathbf{R} je ortogonální.

$$F_{iK} = R_{iL}U_{LK} = v_{ij}R_{jK}$$

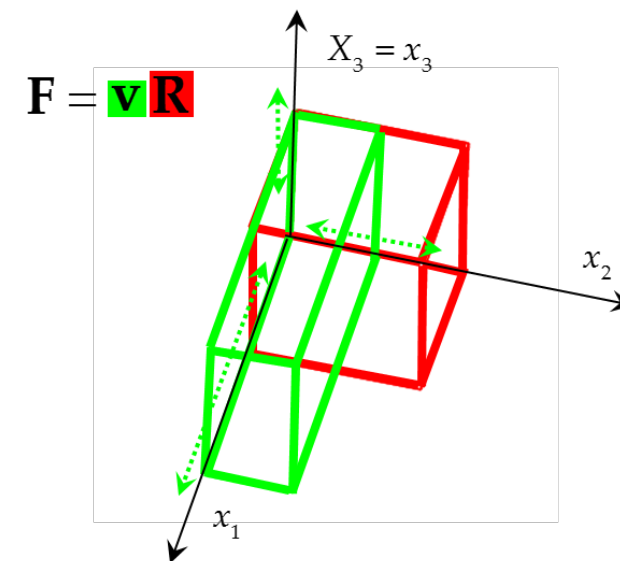
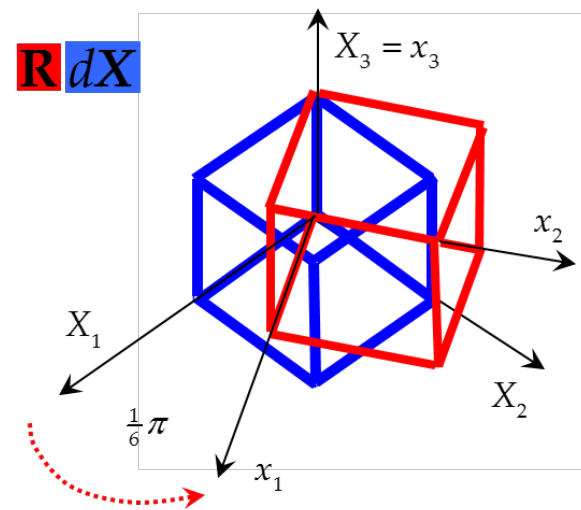
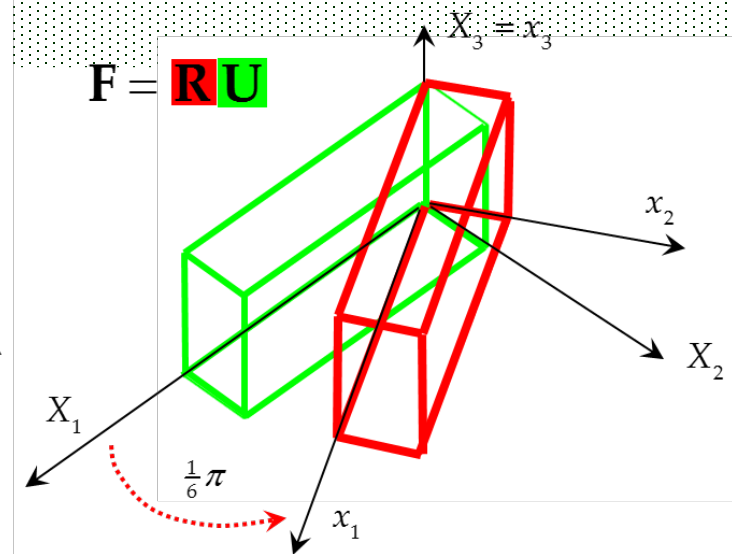
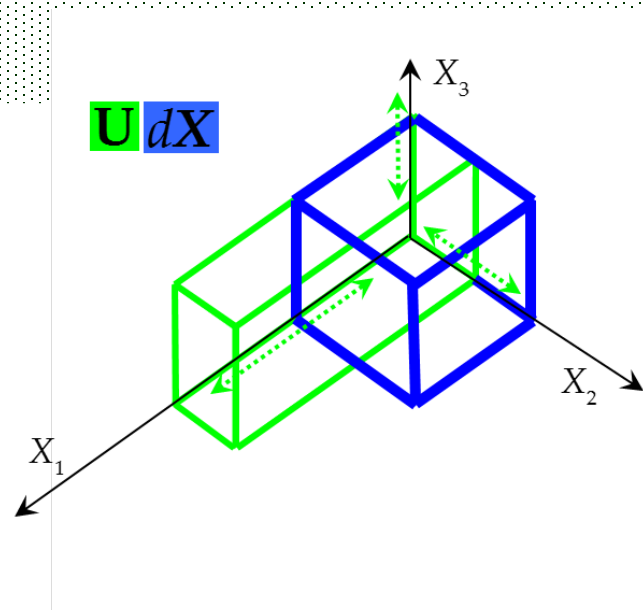
Jde o důsledek obecnější věty o singulárním rozkladu (obdélníkové matice).

Polární rozklad F

$$F = RU = vR$$

$$F = R U = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F = v R = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{8} & \frac{\sqrt{3} \cdot 3}{8} & 0 \\ \sqrt{3} \cdot \frac{3}{8} & \frac{7}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Dodejme, že U a v existují jednoznačně a jsou nejen **symetrické** ale i **pozitivně definitní**.

Polární rozklad \mathbf{F}

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{v}\mathbf{R}$$

Rotace po
deformaci

Deformace po
rotaci

$$F_{iK} = R_{iL} U_{LK} = v_{ij} R_{jK}$$

Rotace strečovaného
tělesa k zdeformovaným
(průběžným) osám

Čisté strečování
vyjádřené vůči
původním
(materiálovým)
osám

Čisté strečování
vyjádřené vůči
zdeformovaným
osám

Rotace nedeformovaného
tělesa k zdeformovaným
(průběžným) osám

Tenzory deformace

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{R}\mathbf{U})^T \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U} = \mathbf{U}^2$$

pravý Cauchyův-Greenův

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{v}^2 \quad \text{levý Cauchyův-Greenův}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad \text{Greenův (též Lagrangeův)}$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}) \quad \text{Eulerův (též Almansiho)}$$

$$\ln(\mathbf{U}) \quad \text{logaritmický}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{11} \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{e}_1 & F_{21} \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{e}_2 & F_{31} \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \\ F_{12} \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{e}_1 & F_{22} \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{e}_2 & F_{32} \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \\ F_{13} \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{e}_1 & F_{23} \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{e}_2 & F_{33} \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_1 & F_{12} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_2 & F_{13} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_3 \\ F_{21} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_1 & F_{22} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_2 & F_{23} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_3 \\ F_{31} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_1 & F_{32} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_2 & F_{33} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_3 \end{pmatrix} =$$

$$C_{11} \sim F_{11} F_{11} (\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_1) + F_{21} F_{21} (\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_1) + F_{31} F_{31} (\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{e}_3) \cdot (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_1) = \\ = F_{11} F_{11} \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + F_{21} F_{21} \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + F_{31} F_{31} \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 = (F_{11} F_{11} + F_{21} F_{21} + F_{31} F_{31}) \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1$$

$$C_{12} \sim F_{11} F_{12} (\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_2) + F_{21} F_{22} (\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_2) + F_{31} F_{32} (\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{e}_3) \cdot (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_2) = \\ = F_{11} F_{12} \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + F_{21} F_{22} \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + F_{31} F_{32} \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 = (F_{11} F_{12} + F_{21} F_{22} + F_{31} F_{32}) \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2$$

⋮

$$C_{21} \sim F_{12} F_{11} (\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_1) + F_{22} F_{21} (\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_1) + F_{32} F_{31} (\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{e}_3) \cdot (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_1) = \\ = F_{12} F_{11} \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1 + F_{22} F_{21} \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1 + F_{32} F_{31} \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1 = (F_{12} F_{11} + F_{22} F_{21} + F_{32} F_{31}) \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1$$

⋮

$$= \begin{pmatrix} F_{11}^2 + F_{21}^2 + F_{31}^2 & F_{11} F_{12} + F_{21} F_{22} + F_{31} F_{32} & F_{11} F_{13} + F_{21} F_{23} + F_{31} F_{33} \\ F_{11} F_{12} + F_{21} F_{22} + F_{31} F_{32} & F_{12}^2 + F_{22}^2 + F_{32}^2 & F_{12} F_{13} + F_{22} F_{23} + F_{32} F_{33} \\ F_{11} F_{13} + F_{21} F_{23} + F_{31} F_{33} & F_{12} F_{13} + F_{22} F_{23} + F_{32} F_{33} & F_{13}^2 + F_{23}^2 + F_{33}^2 \end{pmatrix} =$$

$$= (F_{11}^2 + F_{21}^2 + F_{31}^2) \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + (F_{12}^2 + F_{22}^2 + F_{32}^2) \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 +$$

$$+ (F_{13}^2 + F_{23}^2 + F_{33}^2) \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3 + 2(F_{11} F_{12} + F_{21} F_{22} + F_{31} F_{32}) \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 +$$

$$+ 2(F_{12} F_{13} + F_{22} F_{23} + F_{32} F_{33}) \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_3 + 2(F_{11} F_{13} + F_{21} F_{23} + F_{31} F_{33}) \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_1 = \mathbf{C}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} F_{11}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_1 & F_{12}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_2 & F_{13}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_3 \\ F_{21}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_1 & F_{22}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_2 & F_{23}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_3 \\ F_{31}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_1 & F_{32}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_2 & F_{33}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{11}\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{e}_1 & F_{21}\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{e}_2 & F_{31}\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \\ F_{12}\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{e}_1 & F_{22}\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{e}_2 & F_{32}\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \\ F_{13}\mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{e}_1 & F_{23}\mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{e}_2 & F_{33}\mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} b_{11} &= F_{11}F_{11}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_1) \cdot (\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{e}_1) + F_{12}F_{12}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_2) \cdot (\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + F_{13}F_{13}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_3) \cdot (\mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{e}_1) = \\ &= F_{11}F_{11}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + F_{12}F_{12}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + F_{13}F_{13}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 = (F_{11}F_{11} + F_{12}F_{12} + F_{13}F_{13})\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{12} &= F_{11}F_{21}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_1) \cdot (\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{e}_2) + F_{12}F_{22}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_2) \cdot (\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + F_{13}F_{23}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_3) \cdot (\mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{e}_2) = \\ &= F_{11}F_{21}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + F_{12}F_{22}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + F_{13}F_{23}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 = (F_{11}F_{21} + F_{12}F_{22} + F_{13}F_{23})\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{21} &= F_{21}F_{11}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_1) \cdot (\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{e}_1) + F_{22}F_{12}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_2) \cdot (\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + F_{23}F_{13}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_3) \cdot (\mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{e}_1) = \\ &= F_{21}F_{11}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + F_{22}F_{12}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + F_{23}F_{13}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 = (F_{21}F_{11} + F_{22}F_{12} + F_{23}F_{13})\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (F_{11}^2 + F_{12}^2 + F_{13}^2)\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + (F_{21}^2 + F_{22}^2 + F_{23}^2)\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + (F_{31}^2 + F_{32}^2 + F_{33}^2)\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + 2(F_{11}F_{21} + F_{12}F_{22} + F_{13}F_{23})\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \\ &+ 2(F_{21}F_{31} + F_{22}F_{32} + F_{23}F_{33})\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + 2(F_{11}F_{31} + F_{12}F_{32} + F_{13}F_{33})\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 = \mathbf{b} \end{aligned}$$

Tenzory deformace

$$\text{Platí: } \mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{v}\mathbf{R} \quad \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$$

- Páry tenzorů \mathbf{U} a \mathbf{v} a \mathbf{C} a \mathbf{b} mají stejná **vlastní čísla** (λ_i pro \mathbf{U} a \mathbf{v} , λ_i^2 pro \mathbf{C} a \mathbf{b} , $i = 1, 2, 3$).
- Tato vlastní čísla nazýváme **hlavní streče (protážení)**.
- \mathbf{U} a \mathbf{C} (respektive \mathbf{v} a \mathbf{b}) mají stejné **vlastní vektory** \mathbf{N}_i (respektive \mathbf{n}_i).
- Vlastní vektory tvoří **ortonormální bázi** prostoru.
- **Spektrální rozklad:**

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = \lambda_1^2 \mathbf{N}_1 \otimes \mathbf{N}_1 + \lambda_2^2 \mathbf{N}_2 \otimes \mathbf{N}_2 + \lambda_3^2 \mathbf{N}_3 \otimes \mathbf{N}_3 \neq \lambda_1^2 \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + \lambda_2^2 \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2 + \lambda_3^2 \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

Úloha o vlastních číslech

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Pozor na formální shodu matic, která ale neznamená rovnost tenzorů!

Tenzory deformace

Platí:

- Pro jistotu si připomeňme, že $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ $\{P + t\mathbf{u}, t \in \mathbb{R}\}$
Znamená, že vlastní vektor \mathbf{u} při transformaci \mathbf{A} zůstane na přímce, na které ležel před transformací \mathbf{A} .

Rovnici $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ lze psát ve tvaru $-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$, kde I_1, I_2, I_3 jsou tzv. **hlavní invarianty** \mathbf{A} .

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left((\text{tr}(\mathbf{A}))^2 - \text{tr}(\mathbf{A}^2) \right) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$$

$$I_3 = \det(\mathbf{A}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

$$I_1^{\mathbf{C}} = \text{tr}(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

$$I_2^{\mathbf{C}} = \frac{1}{2} \left((\text{tr}(\mathbf{C}))^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2) \right) = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2$$

$$I_3^{\mathbf{C}} = \det(\mathbf{C}) = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2$$

Vyjádření hlavních invariantů pomocí vlastních čísel platí jen pro symetrické tenzory!

Tenzory deformace

$$f: X \rightarrow x$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{X}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}Y - \frac{Y}{2}$$

$$y = \frac{X}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}X + \frac{Y}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}Y$$

$$z = 2z$$

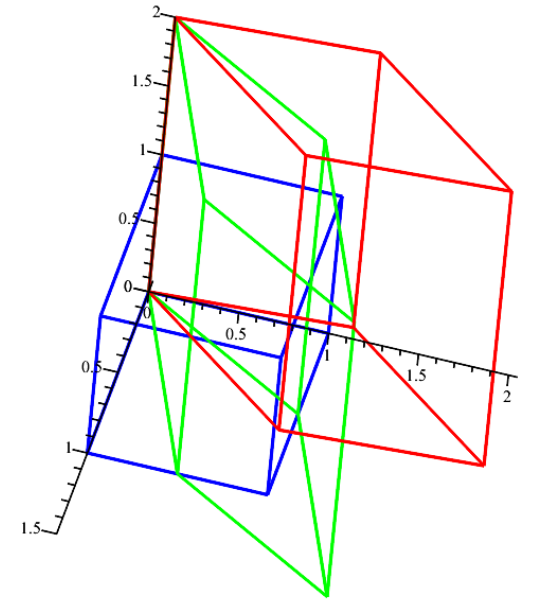
$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Referenční jednotková krychle

Deformace na protažený rovnoběžnostěn popsaná \mathbf{U}

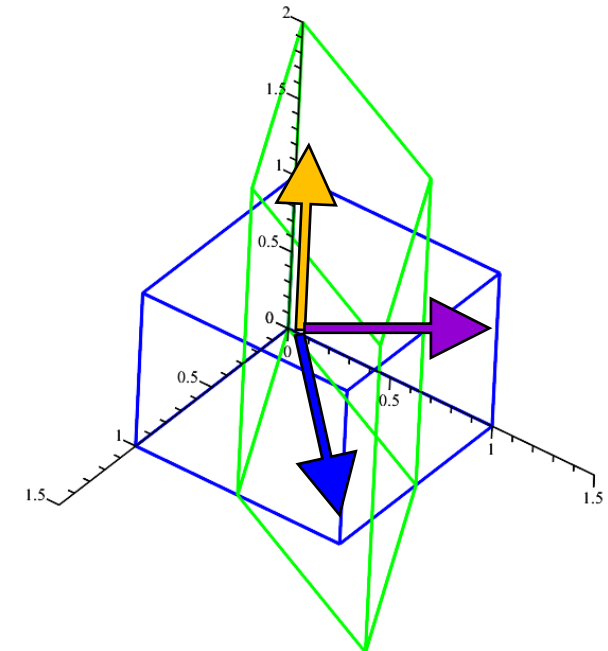
Pohyb vyjádřený deformačním gradientem \mathbf{F}



Vlastní čísla \mathbf{U}
 $\{2, 1/2, 3/2\}$

Vlastní vektory \mathbf{U}

$$\mathbf{N}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{N}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{N}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

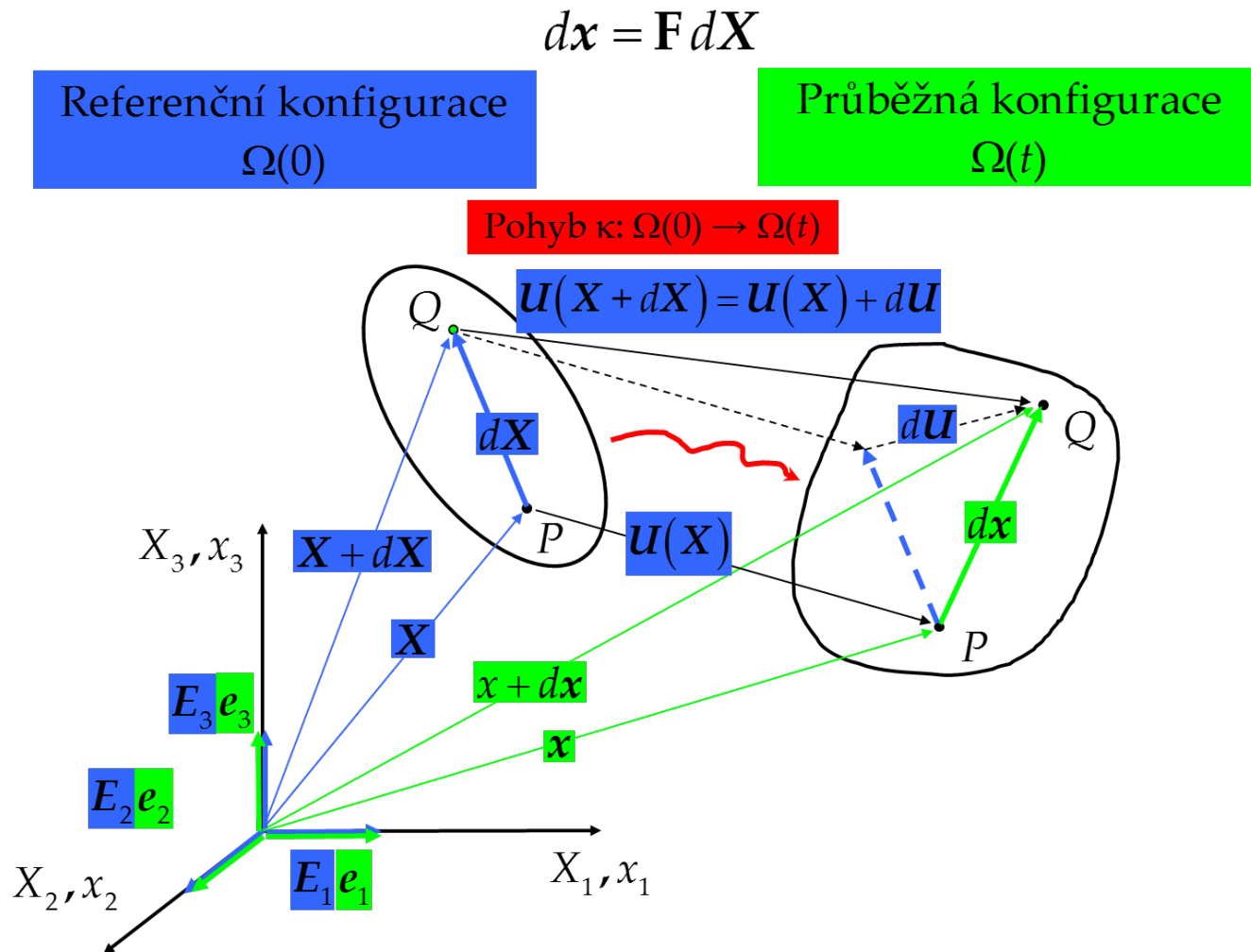


Linearizace tenzorů deformace

Vektor posuvů $U = \mathbf{x} - \mathbf{X}$

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{U} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} - \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F} - \mathbf{I}$$

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{U} + \mathbf{I}$$



Linearizace tenzorů deformace

Protože platí $\mathbf{U} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{U}$

tak pro **Greenův-Lagrangeův tenzor** \mathbf{E} můžeme psát:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}\left((\mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{U})^T (\mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{U}) - \mathbf{I}\right) = \frac{1}{2}\left((\mathbf{I}^T + (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{U})^T)(\mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{U}) - \mathbf{I}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{I}^T\mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{U} + (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{U})^T + (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{U})^T \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{U} - \mathbf{I}\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{U} + (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{U})^T + (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{U})^T \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{U}\right)\end{aligned}$$

$$E_{IK} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_I}{\partial X_K} + \frac{\partial U_K}{\partial X_I} + \frac{\partial U_J}{\partial X_I} \frac{\partial U_J}{\partial X_K}\right)$$

Linearizace tenzorů deformace

$$E_{IK} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_I}{\partial X_K} + \frac{\partial U_K}{\partial X_I} + \frac{\partial U_J}{\partial X_I} \frac{\partial U_J}{\partial X_K} \right)$$

 \doteq

$$\varepsilon_{IK} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_I}{\partial X_K} + \frac{\partial U_K}{\partial X_I} \right)$$

$$E_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{\partial U_1}{\partial X_1} \frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} \frac{\partial U_2}{\partial X_1} + \frac{\partial U_3}{\partial X_1} \frac{\partial U_3}{\partial X_1} \right)$$

$$E_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} + \frac{\partial U_1}{\partial X_1} \frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} \frac{\partial U_2}{\partial X_2} + \frac{\partial U_3}{\partial X_1} \frac{\partial U_3}{\partial X_2} \right)$$

$$E_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_3} + \frac{\partial U_3}{\partial X_1} + \frac{\partial U_1}{\partial X_1} \frac{\partial U_1}{\partial X_3} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} \frac{\partial U_2}{\partial X_3} + \frac{\partial U_3}{\partial X_1} \frac{\partial U_3}{\partial X_3} \right)$$

$$E_{22} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_2} + \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_2} \frac{\partial U_2}{\partial X_2} + \frac{\partial U_3}{\partial X_2} \frac{\partial U_3}{\partial X_2} \right)$$

$$E_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial X_3} + \frac{\partial U_3}{\partial X_2} + \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \frac{\partial U_1}{\partial X_3} + \frac{\partial U_2}{\partial X_2} \frac{\partial U_2}{\partial X_3} + \frac{\partial U_3}{\partial X_2} \frac{\partial U_3}{\partial X_3} \right)$$

$$E_{33} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_3}{\partial X_3} + \frac{\partial U_3}{\partial X_3} + \frac{\partial U_1}{\partial X_3} \frac{\partial U_1}{\partial X_3} + \frac{\partial U_2}{\partial X_3} \frac{\partial U_2}{\partial X_3} + \frac{\partial U_3}{\partial X_3} \frac{\partial U_3}{\partial X_3} \right)$$

 \doteq

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{\partial U_1}{\partial X_1} \right)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} \right)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_3} + \frac{\partial U_3}{\partial X_1} \right)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_2} \right)$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial X_3} + \frac{\partial U_3}{\partial X_2} \right)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_3}{\partial X_3} + \frac{\partial U_3}{\partial X_3} \right)$$

Linearizace tenzorů deformace

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}) \quad \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{I} - \mathbf{F}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}$$

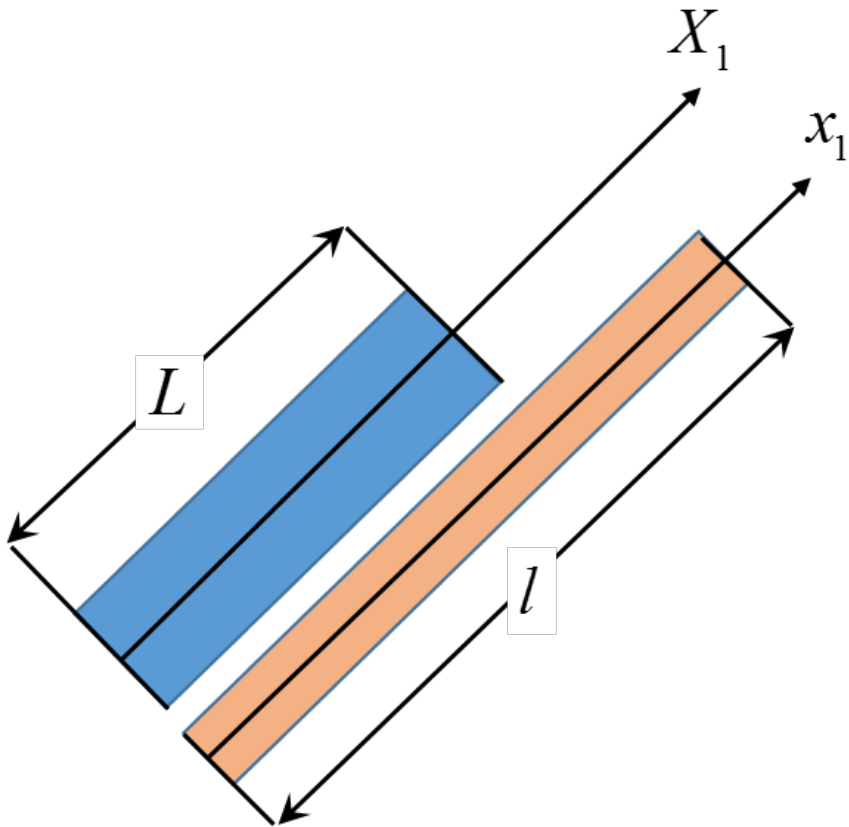
pro Eulerův-Almansiho tenzor \mathbf{e} můžeme psát:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T (\mathbf{I} - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - (\mathbf{I}^T - (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T)(\mathbf{I} - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})) = \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{I}^T \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T - (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T - (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}) \end{aligned}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \doteq \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Tenzory deformace

Porovnání číselných hodnot při protahování

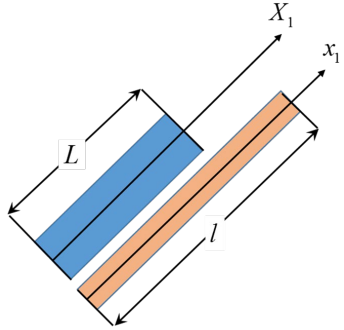


$$x_1 = \lambda_1 X_1$$

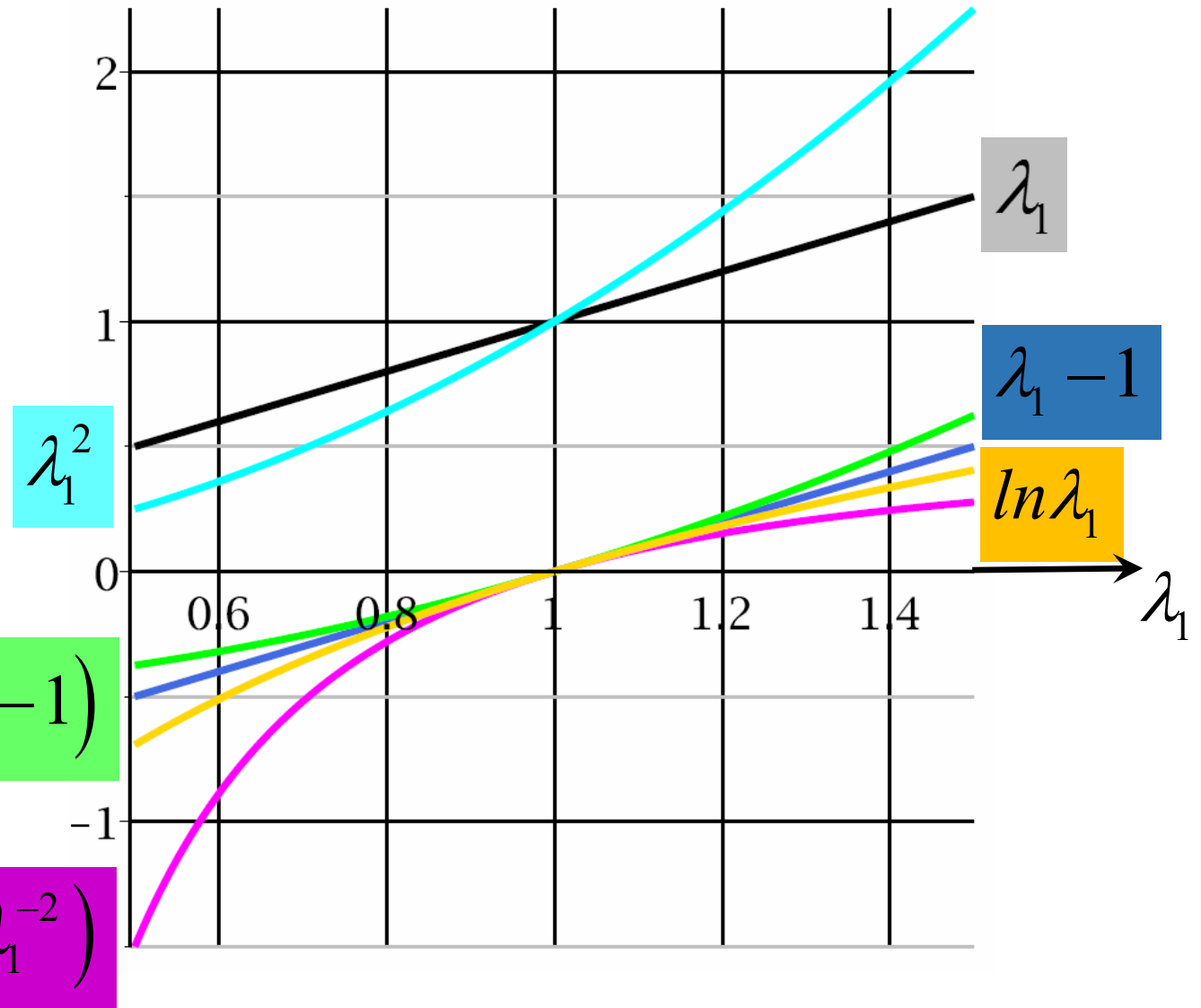
$$F_{11} = \lambda_1 = \frac{\partial x_1}{\partial X_1} = \frac{l}{L}$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Tenzory deformace



\mathbf{F}	$F_{11} = \lambda_1$
$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$	$C_{11} = \lambda_1^2$
$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}$	$U_{11} = \lambda_1$
$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$	$b_{11} = \lambda_1^2$
$\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{b}}$	$v_{11} = \lambda_1$
$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$	$E_{11} = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - 1)$
$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1})$	$e_{11} = \frac{1}{2}(1 - \lambda_1^{-2})$
$\ln \mathbf{U}$	$\ln U_{11} = \ln \lambda_1$
$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\varepsilon_{11} = \lambda_1 - 1$



Tenzory deformace

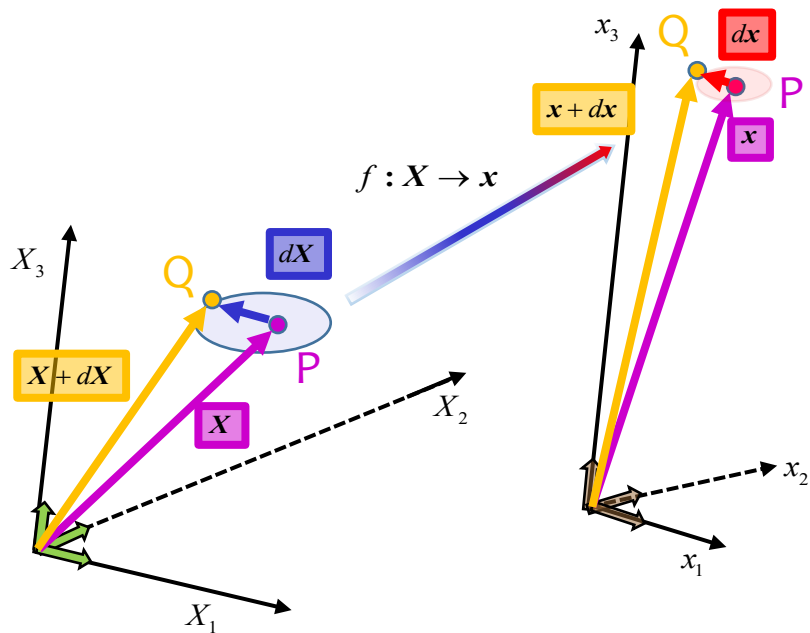
Těleso se deformuje, jestliže se změní vzdálenost alespoň dvou bodů tělesa

Změna vzdálenosti $|PQ| \Leftrightarrow |dx| - |dX| \neq 0$

$$|dx| - |dX| \neq 0 \Leftrightarrow |dx|^2 - |dX|^2 \neq 0 \Leftrightarrow dx \cdot dx - dX \cdot dX \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{F} dX \cdot \mathbf{F} dX - dX \cdot dX \neq 0 \Leftrightarrow dX \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} dX - dX \cdot dX \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$dX \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) dX = 2dX \cdot \mathbf{E} dX \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{E} \neq 0$$



$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$$

Deformace liniových, plošných a objemových

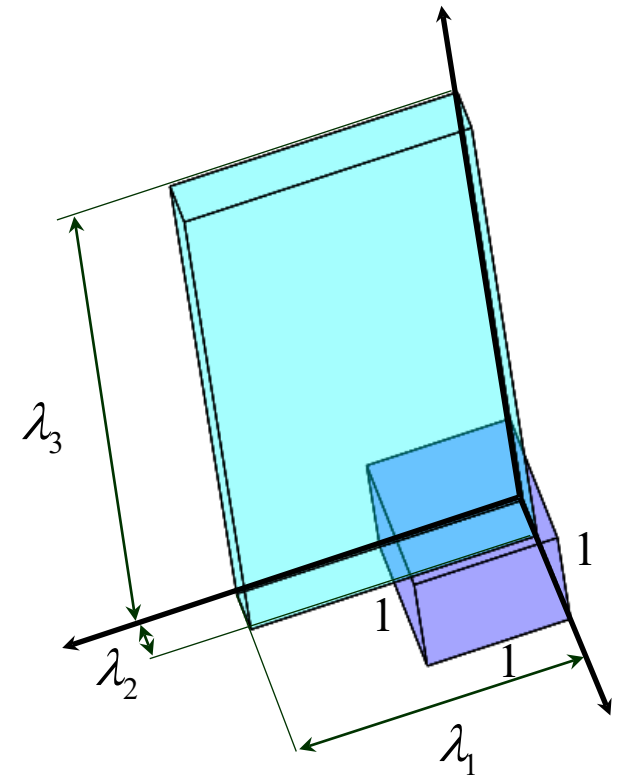
elementů

- Liniový element $d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$

- Změna objemu při deformaci

$$dv = JdV \quad J = \det(\mathbf{F}) = \sqrt{I_3^C} = I_3^U > 0$$

Nestlačitelný materiál (izochorická deformace) $\frac{dv}{dV} = J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$



Deformace plošných elementů

$$ds = J \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{S}$$

$$dv = JdV \Rightarrow ds \cdot dx = Jd\mathbf{S} \cdot d\mathbf{X} \Rightarrow ds \cdot \mathbf{F} d\mathbf{X} = Jd\mathbf{S} \cdot d\mathbf{X} \Rightarrow$$

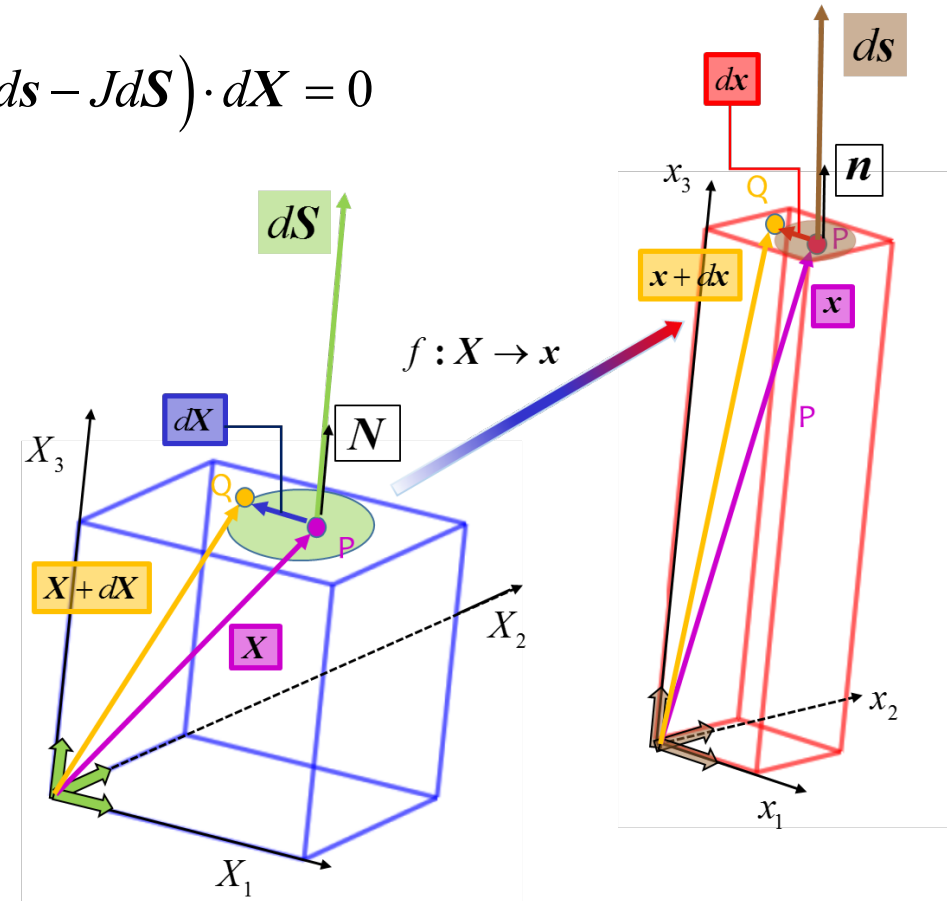
$$ds \cdot \mathbf{F} d\mathbf{X} - Jd\mathbf{S} \cdot d\mathbf{X} = 0 \Rightarrow \mathbf{F}^T ds \cdot d\mathbf{X} - Jd\mathbf{S} \cdot d\mathbf{X} = 0 \Rightarrow (\mathbf{F}^T ds - Jd\mathbf{S}) \cdot d\mathbf{X} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}^T ds - Jd\mathbf{S} = 0 \Rightarrow ds = J \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{S}$$

Připomeňme, že platí

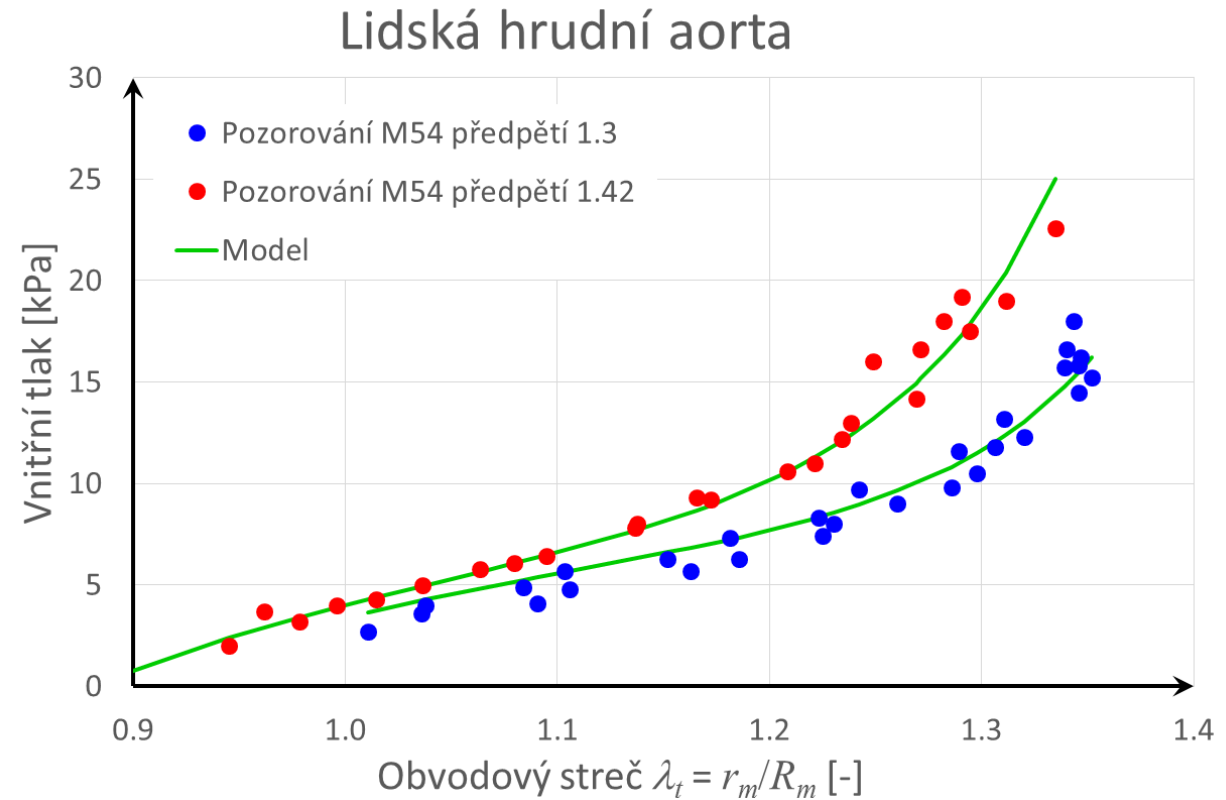
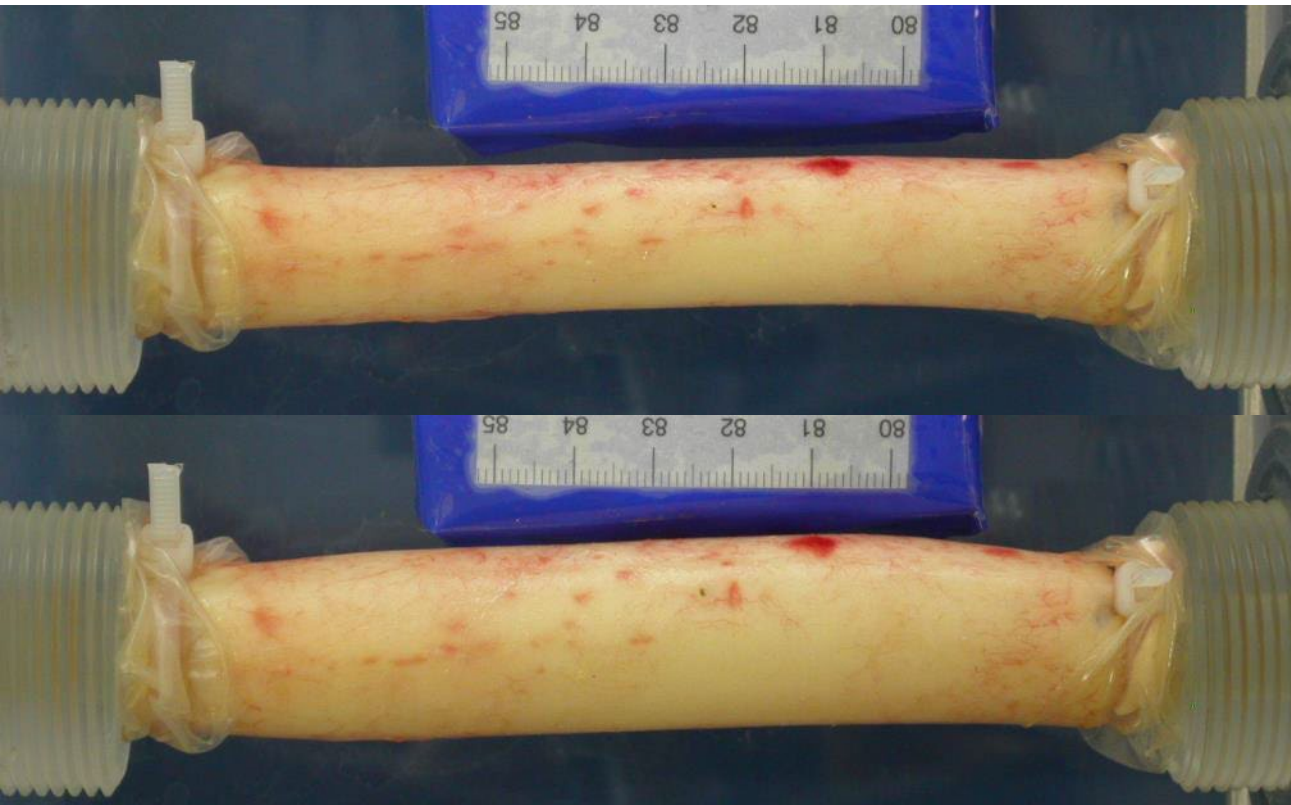
$$ds = dsn \quad d\mathbf{S} = d\mathbf{S}N$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{A} \mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$



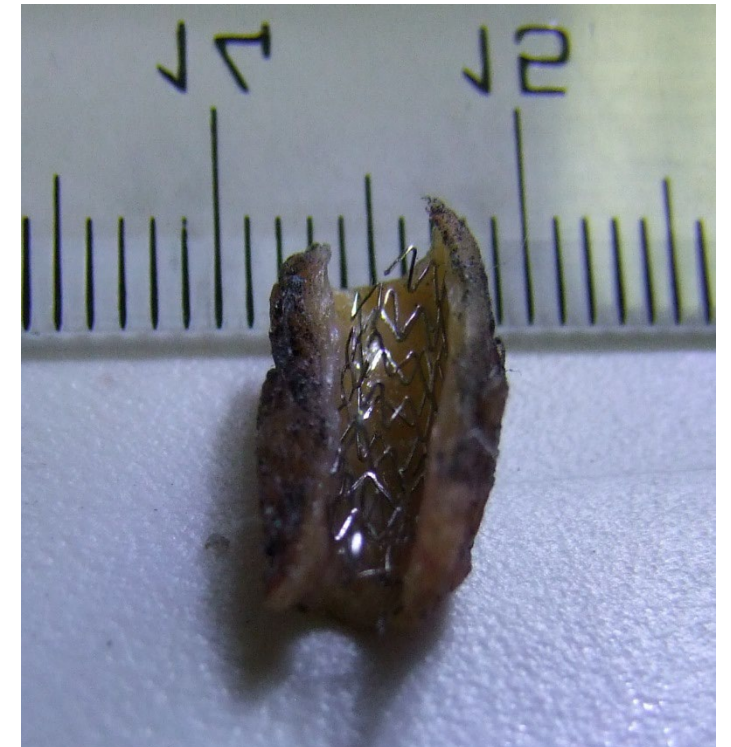
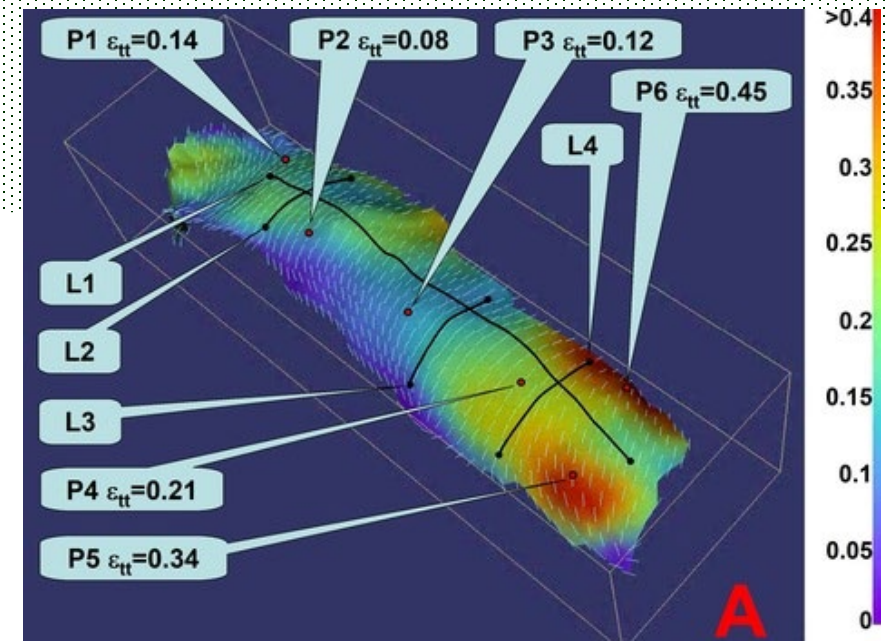
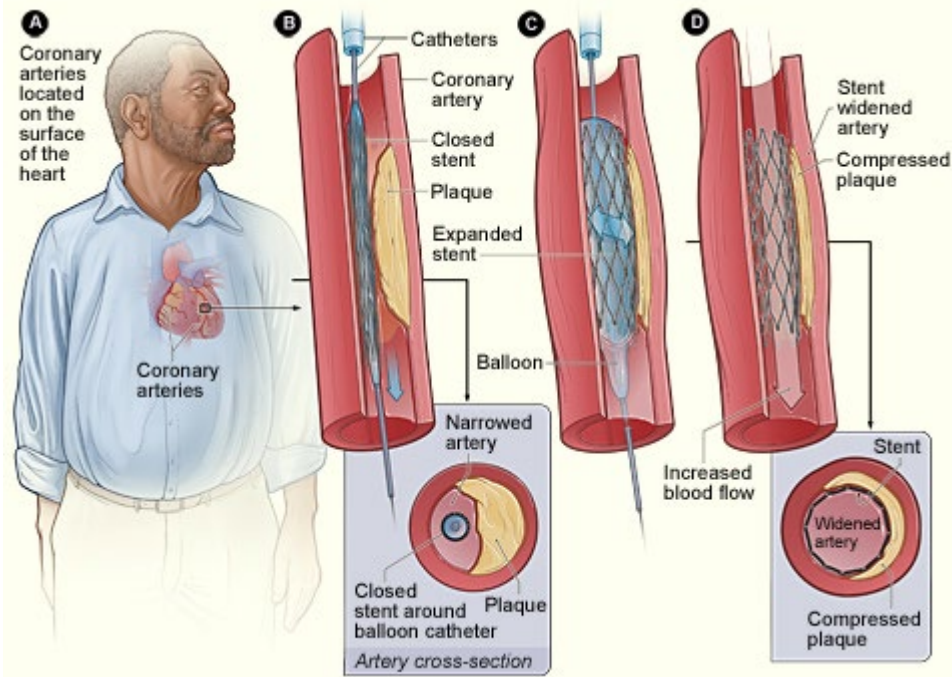
Velké deformace v reálných úlohách

Ex vivo (laboratorní) biomechanika – inflační test aorty



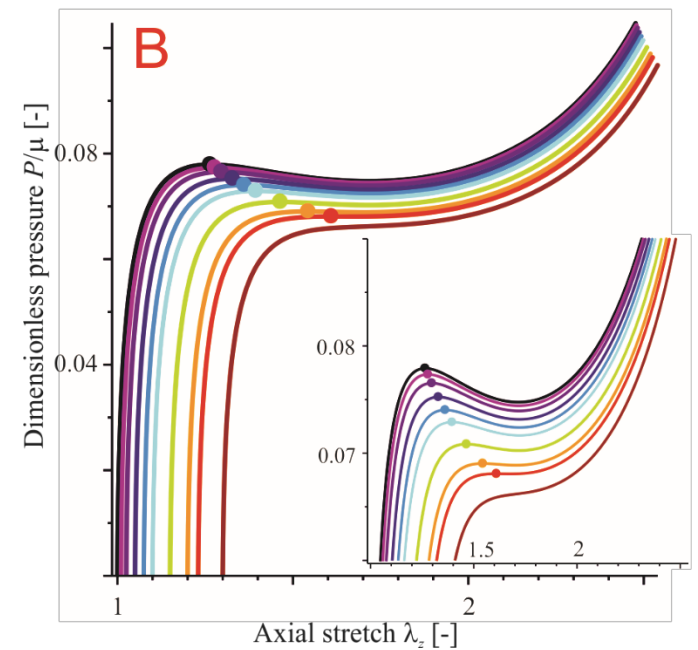
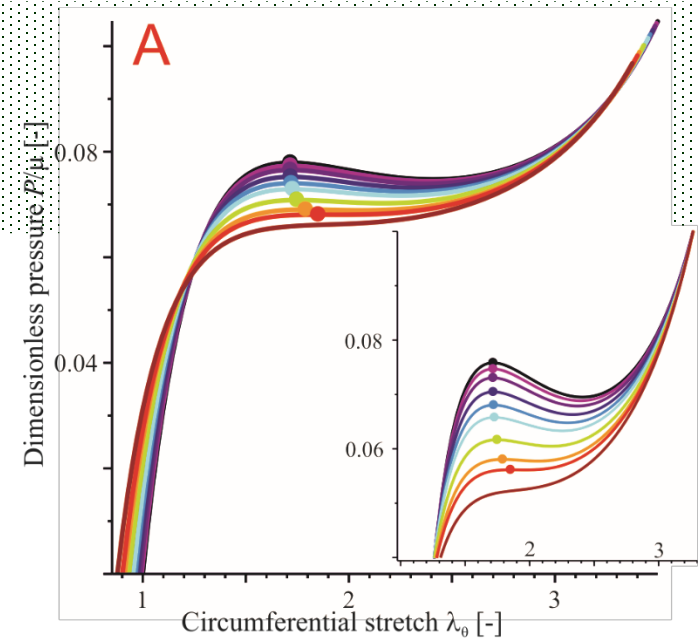
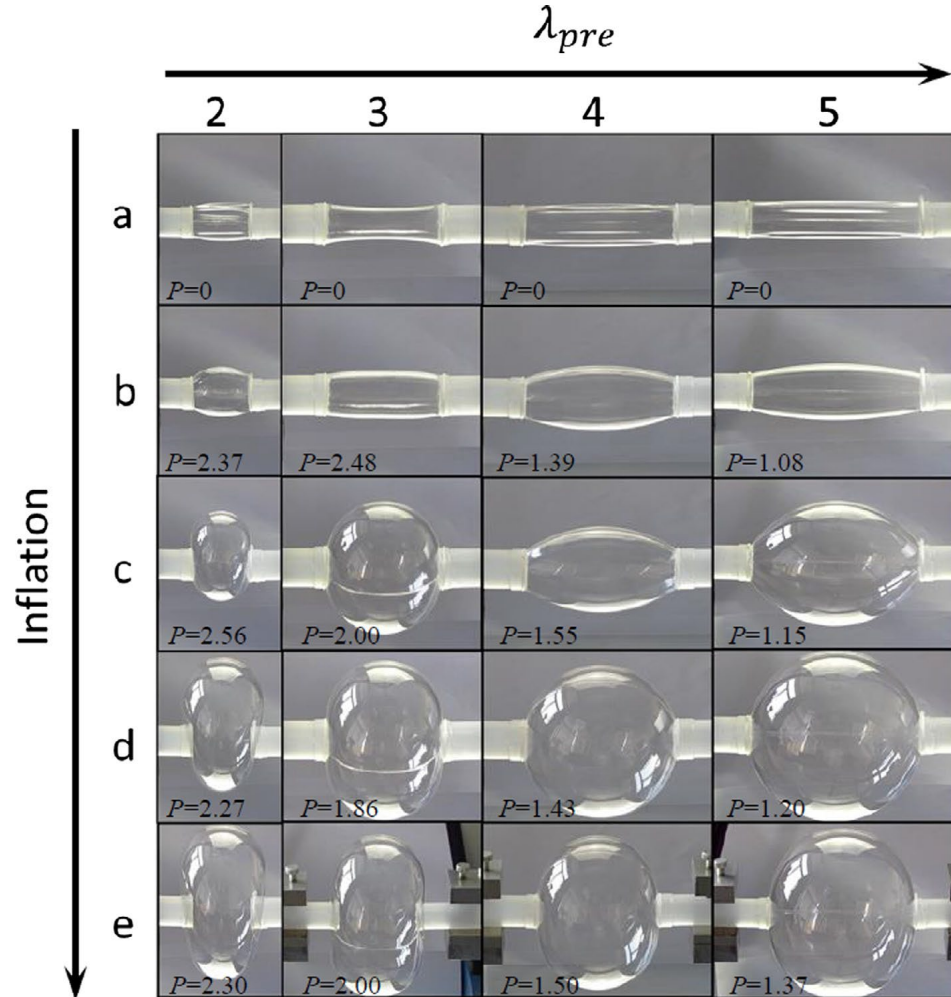
Velké deformace v reálu

Ex vivo (laboratorní) biomechanika - stent



Velké deformace v reálných úlohách

Nestabilita při nafukování elastomerní trubice



Tenzory deformace v MKP systémech

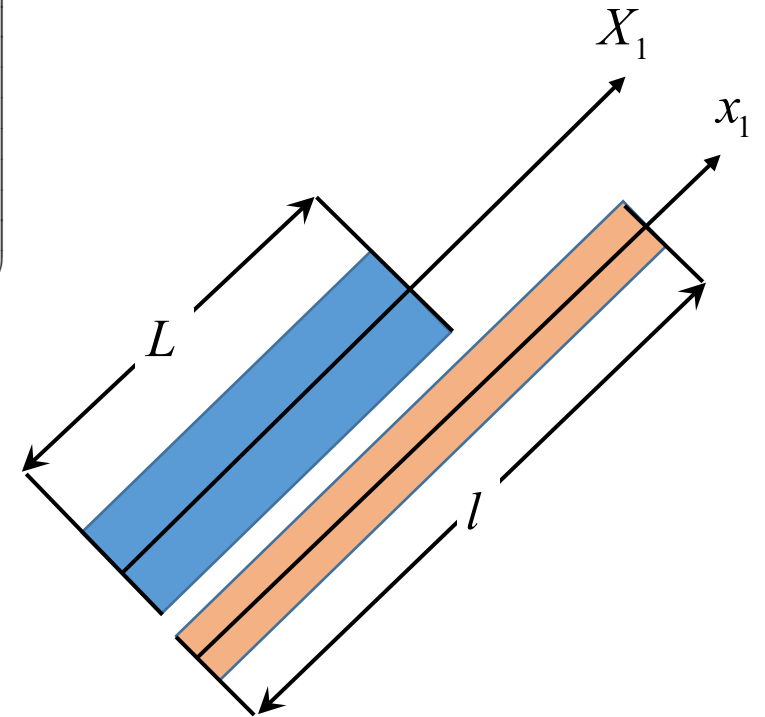
Vždy je třeba zkontrolovat manuál!

ANSYS, ABAQUS:

NLGEOM: OFF (default)

NLGEOM: ON (option)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & 2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & 2 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$



$$\ln(\mathbf{U})$$

$$\ln(\mathbf{U})_{11} = \ln \frac{l}{L} = \ln \frac{L + \Delta l}{L} = \ln(1 + \varepsilon_{11})$$

Inflace a extenze válcové trubice

Kartézské souřadnice $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$

Válcové souřadnice $\mathbf{X} = (R, \Theta, Z)$

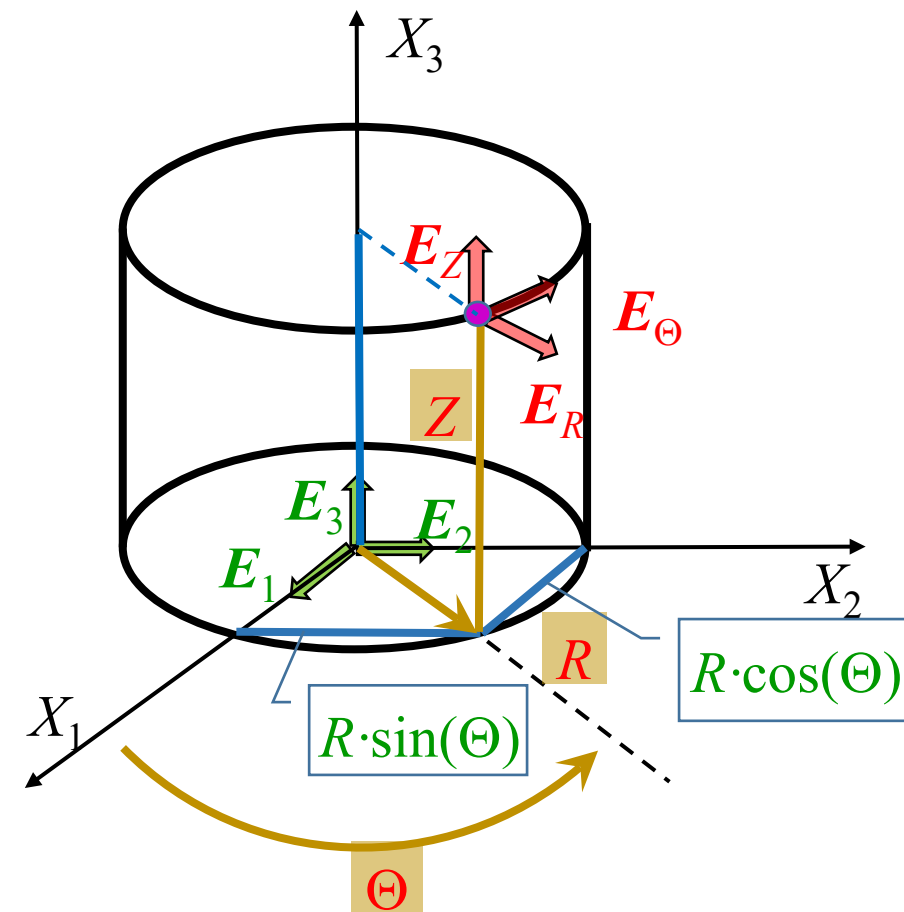
$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3) = (R \cos \Theta, R \sin \Theta, Z) = R \cos \Theta \mathbf{E}_1 + R \sin \Theta \mathbf{E}_2 + Z \mathbf{E}_3$$

\Leftrightarrow

$$R \mathbf{E}_R(\Theta) + Z \mathbf{E}_Z = (\sqrt{X_1^2 + X_2^2}, \arctg(X_2/X_1), X_3) = (R, \Theta, Z) = \mathbf{X}$$

$$R \in (0, \infty) \wedge \Theta \in (0, 2\pi) \wedge Z \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{E}_R = \cos \Theta \mathbf{E}_1 + \sin \Theta \mathbf{E}_2 \quad \mathbf{E}_\Theta = -\sin \Theta \mathbf{E}_1 + \cos \Theta \mathbf{E}_2 \quad \mathbf{E}_Z = \mathbf{E}_3$$



Inflace a extenze válcové trubice

Kartézský polohový vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T = X_1\mathbf{E}_1 + X_2\mathbf{E}_2 + X_3\mathbf{E}_3$

Kartézský polohový vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$

Kartézský deformační gradient \mathbf{F}

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_K = \frac{\partial x_1}{\partial X_1} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + \dots + \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

Deformační gradient

Válcový polohový vektor $\mathbf{X} = (R, \Theta, Z)^T = R\mathbf{E}_R(\Theta) + Z\mathbf{E}_Z$

Válcový polohový vektor $\mathbf{x} = (r, \theta, z)^T = r\mathbf{e}_r(\theta) + z\mathbf{e}_z$

Válcový deformační gradient \mathbf{F}

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \left(|\mathbf{g}_i| \mathbf{e}_i \otimes \frac{1}{|\mathbf{G}_K|} \mathbf{E}_K \right) = \frac{|\mathbf{g}_i|}{|\mathbf{G}_K|} \frac{\partial x_i}{\partial X_K} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_K) = F_{iK} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_K \quad \begin{array}{l} i = r, \theta, z \\ K = R, \Theta, Z \end{array}$$

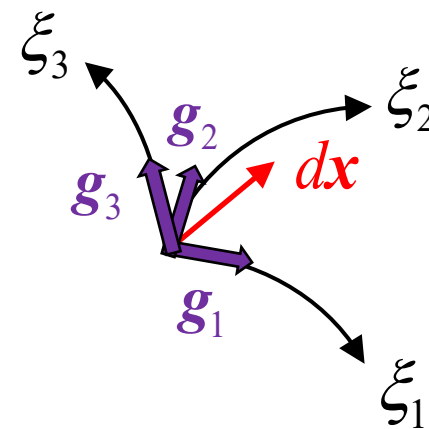
$|\mathbf{g}_i|$ a $|\mathbf{G}_K|$ mají význam **normalizačních koeficientů**, které jsou nutné pro „**kompensaci**“ fyzikálních rozměrů derivací

$$F_{rR} \sim \frac{r}{R} \left[\frac{m}{m} \right] \quad \text{kdežto} \quad F_{\theta R} \sim \frac{\theta}{R} \left[\frac{1}{m} \right]$$

Inflace a extenze válcové trubice

\mathbf{g}_i jsou tzv. přirozené bázové vektory, které získáme jako **tečné vektory ke křivočarým souřadnicovým osám** ξ_1, ξ_2, ξ_3 v bodě \mathbf{x}

$$d\mathbf{x} = \partial \xi_i \mathbf{g}_i = \partial \xi_1 \mathbf{g}_1 + \partial \xi_2 \mathbf{g}_2 + \partial \xi_3 \mathbf{g}_3$$

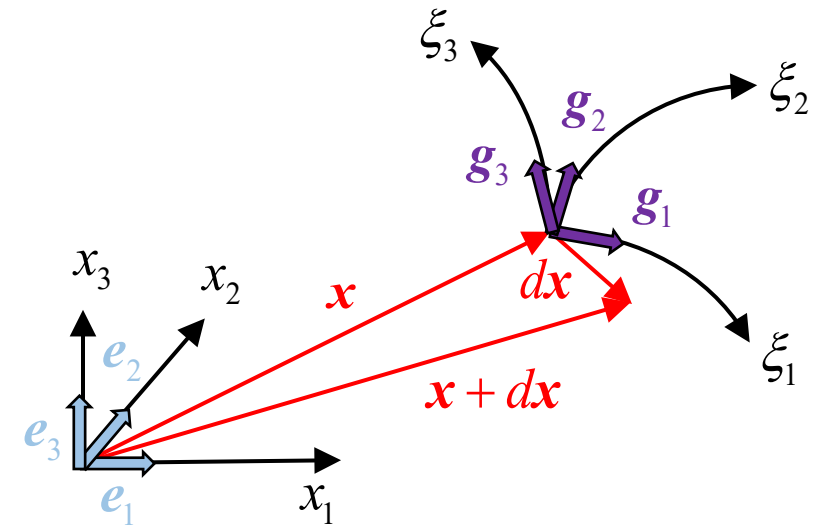


Inflace a extenze válcové trubice

\mathbf{g}_i jsou tzv. přirozené bázové vektory, které získáme jako **tečné vektory ke křivočarým souřadnicovým osám** ξ_1, ξ_2, ξ_3 v bodě \mathbf{x}

$$d\mathbf{x} = \partial \xi_i \mathbf{g}_i = \partial \xi_1 \mathbf{g}_1 + \partial \xi_2 \mathbf{g}_2 + \partial \xi_3 \mathbf{g}_3$$

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_i} \quad \xi_1 = r, \quad \xi_2 = \theta, \quad \xi_3 = z$$



Inflace a extenze válcové trubice

Přirozené bázové vektory \mathbf{g}_i

Lokální tečné vektory k souřadnicovým osám

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_i} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j \mathbf{e}_j}{\partial \xi_i} = \frac{\partial x_j \mathbf{e}_j}{\partial \xi_i} = \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} \mathbf{e}_j = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \xi_i} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial \xi_i} \mathbf{e}_3 \quad i = r, \theta, z$$

Inflace a extenze válcové trubice

Přirozené bázové vektory \mathbf{g}_i $\mathbf{g}_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} \mathbf{e}_j$

$$\mathbf{x} = (r, \theta, z)^T = r\mathbf{e}_r(\theta) + z\mathbf{e}_z = \overbrace{r \cdot \cos(\theta)}^{x_1} \mathbf{e}_1 + \overbrace{r \cdot \sin(\theta)}^{x_2} \mathbf{e}_2 + \underbrace{z}_{x_3} \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{g}_r = \frac{\partial x_1}{\partial r} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial r} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial r} \mathbf{e}_3 = \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \cos(\theta)) \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \sin(\theta)) \mathbf{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial r} \mathbf{e}_3 = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \quad |\mathbf{g}_r| = 1$$

$$\mathbf{g}_\theta = \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial \theta} \mathbf{e}_3 = \frac{\partial}{\partial \theta} (r \cdot \cos(\theta)) \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \cdot \sin(\theta)) \mathbf{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial \theta} \mathbf{e}_3 = (-r \cdot \sin(\theta), r \cdot \cos(\theta), 0) \quad |\mathbf{g}_\theta| = r$$

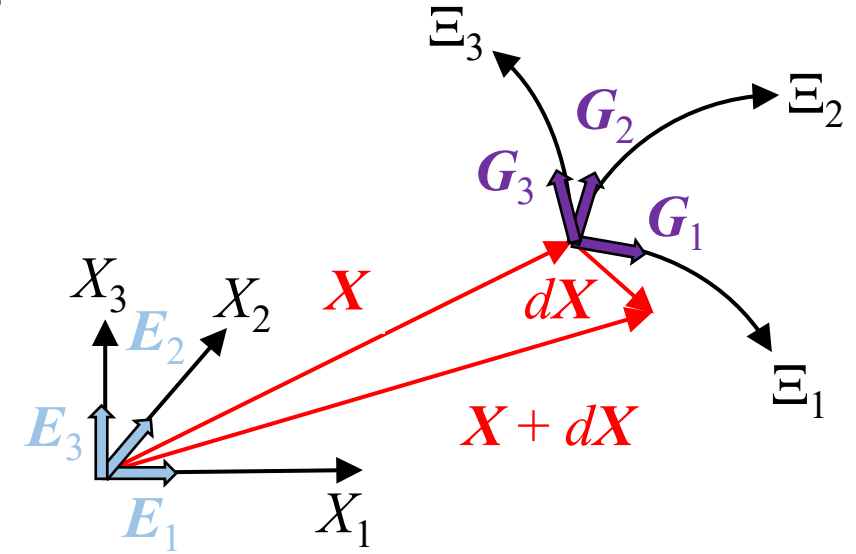
$$\mathbf{g}_z = \frac{\partial x_1}{\partial z} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial z} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial z} \mathbf{e}_3 = \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot \cos(\theta)) \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot \sin(\theta)) \mathbf{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial z} \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1) \quad |\mathbf{g}_z| = 1$$

Inflace a extenze válcové trubice

Přirozené bázové vektory \mathbf{G}_K v referenční konfiguraci

Vše je naprosto analogické k vektorům \mathbf{g}_i

$$\mathbf{G}_K = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Xi_K} \quad \Xi_1 = R, \quad \Xi_2 = \Theta, \quad \Xi_3 = Z$$



$$\mathbf{G}_K = \sum_{J=1}^3 \frac{\partial X_J}{\partial \Xi_K} \mathbf{E}_J = \frac{\partial X_J}{\partial \Xi_K} \mathbf{E}_J = \frac{\partial X_1}{\partial \Xi_K} \mathbf{E}_1 + \frac{\partial X_2}{\partial \Xi_K} \mathbf{E}_2 + \frac{\partial X_3}{\partial \Xi_K} \mathbf{E}_3 \quad K = R, \Theta, Z$$

Inflace a extenze válcové trubice

Přirozené bázové vektory \mathbf{G}_K

$$\mathbf{X} = (R, \Theta, Z)^T = R\mathbf{E}_R(\Theta) + Z\mathbf{E}_Z = \overbrace{R \cdot \cos(\Theta)}^{X_1} \mathbf{E}_1 + \overbrace{R \cdot \sin(\Theta)}^{X_2} \mathbf{E}_2 + \overbrace{Z}^{X_3} \mathbf{E}_3$$

$$\mathbf{G}_K = \sum_{J=1}^3 \frac{\partial X_J}{\partial \Xi_K} \mathbf{E}_J \quad K = R, \Theta, Z$$

$$\mathbf{G}_R = (\cos(\Theta), \sin(\Theta), 0)$$

$$|\mathbf{G}_R| = 1$$

$$\mathbf{G}_\Theta = (-R \cdot \sin(\Theta), R \cdot \cos(\Theta), 0)$$

$$|\mathbf{G}_\Theta| = R$$

$$\mathbf{G}_Z = (0, 0, 1)$$

$$|\mathbf{G}_Z| = 1$$

Inflace a extenze válcové trubice

Přirozené bázové vektory \mathbf{g}_i a \mathbf{G}_K

$$\mathbf{g}_r = \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{g}_\theta = r\mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{g}_z = \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{G}_R = \mathbf{E}_R$$

$$\mathbf{G}_\Theta = R\mathbf{E}_\Theta$$

$$\mathbf{G}_Z = \mathbf{E}_Z$$

Metrický tenzor g_{ij}

ds^2 metrika je skalární invariant prostoru

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (\mathbf{g}_i d\xi_i) \cdot (\mathbf{g}_j d\xi_j) = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j d\xi_i d\xi_j = g_{ij} d\xi_i d\xi_j$$

Inflace a extenze válcové trubice

Deformační gradient $\mathbf{F} = d\mathbf{x}/d\mathbf{X}$

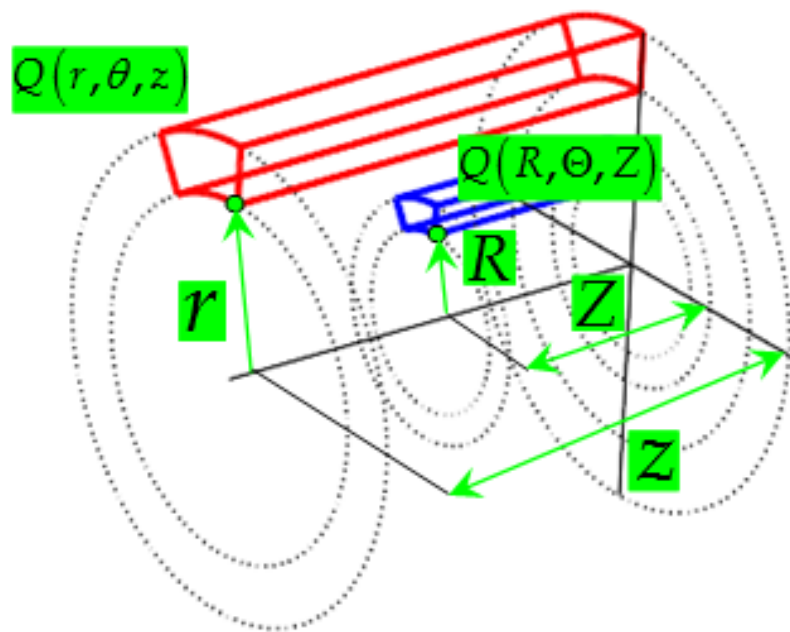
$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \left(|\mathbf{g}_i| \mathbf{e}_i \otimes \frac{1}{|\mathbf{G}_K|} \mathbf{E}_K \right) = \frac{|\mathbf{g}_i|}{|\mathbf{G}_K|} \frac{\partial x_i}{\partial X_K} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_K) = F_{iK} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_K$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & F_{rR} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{E}_R + F_{r\Theta} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{E}_\Theta + \\ & F_{rZ} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{E}_Z + F_{\theta R} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{E}_R + F_{\theta\Theta} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{E}_\Theta + F_{\theta Z} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{E}_Z \\ & + F_{zR} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{E}_R + F_{z\Theta} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{E}_\Theta + F_{zZ} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{E}_Z \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{\partial r}{R\partial\Theta} & \frac{\partial r}{\partial Z} \\ \frac{r\partial\theta}{\partial R} & \frac{r\partial\theta}{R\partial\Theta} & \frac{r\partial\theta}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{\partial z}{R\partial\Theta} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix}$$

Inflace a extenze válcové trubice

Interpretace složek \mathbf{F}



$$F_{rR} = \frac{\partial r(R, \Theta, Z)}{\partial R}$$

$$F_{rR} = \frac{\partial r(R, \Theta, Z)}{\partial R} = f(R) \quad \text{pokud se trubice nafukuje rovnoměrně a zachovává symetrii}$$

$$F_{r\Theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial r(R, \Theta, Z)}{\partial \Theta}$$

$$F_{r\Theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial r(R, \Theta, Z)}{\partial \Theta} \neq 0 \Leftrightarrow r = r(\Theta) \quad \text{tj. zdeformovaný poloměr } r \text{ závisí na obvodové souřadnici}$$

Zdeformovaná geometrie nemůže být kruhový válec

Inflace a extenze válcové trubice

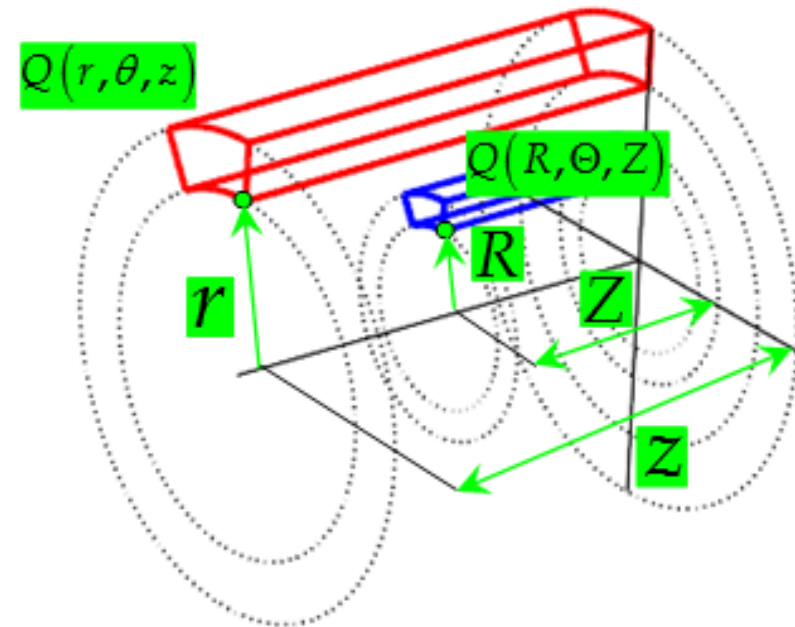
Interpretace složek \mathbf{F}

$$F_{rZ} = \frac{\partial r(R, \Theta, Z)}{\partial Z}$$

$$F_{rZ} = \frac{\partial r(R, \Theta, Z)}{\partial Z} \neq 0 \Leftrightarrow r = r(Z) \quad \text{tj. zdeformovaný poloměr } r \text{ závisí}$$

na původní axiální souřadnici Z

Taková situace může nastat, uvažujeme-li např. kuželovité trubice. U nich lze racionálně očekávat, že $r = r(Z)$, neboť vnější poloměr před deformací je $R_o = R_o(Z)$.



Inflace a extenze válcové trubice

Interpretace složek \mathbf{F}

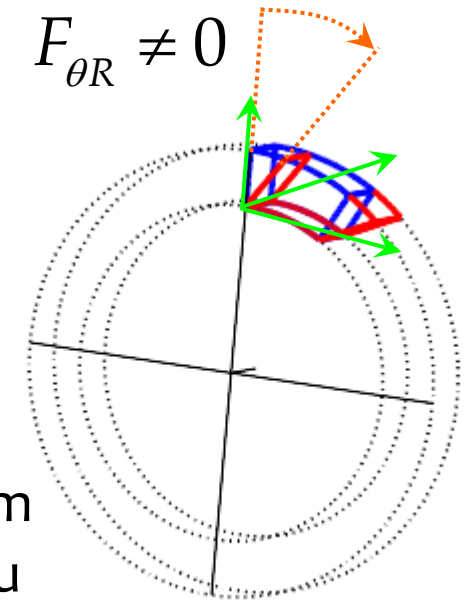
$$F_{\theta R} = r \frac{\partial \theta(R, \Theta, Z)}{\partial R}$$

$$F_{\theta R} = r \frac{\partial \theta(R, \Theta, Z)}{\partial R} \neq 0 \Leftrightarrow \theta = \theta(R) \quad \text{tj. zdeformovaná obvodová souřadnice závisí na počátečním poloměru}$$

Pro nenulovost by musel nastat zkos (odklon). Přírůstek polohy na nafouknutém obvodu by závisel na velikosti počátečního poloměru, tj. došlo by k vzájemnému posuvu/smyku obvodových vrstev (obvod R a obvod $R + dR$).

$$F_{\theta\Theta} = \frac{r}{R} \frac{\partial \theta(R, \Theta, Z)}{\partial \Theta}$$

$$\frac{\partial \theta(R, \Theta, Z)}{\partial \Theta} = 1 \quad \text{když se kruhová válcová trubice nafukuje do tvaru kruhové válcové trubice} \quad \Leftrightarrow \quad F_{\theta\Theta} = \frac{r}{R}$$



Inflace a extenze válcové trubice

Interpretace složek \mathbf{F}

$$F_{\theta Z} = r \frac{\partial \theta}{\partial Z}$$

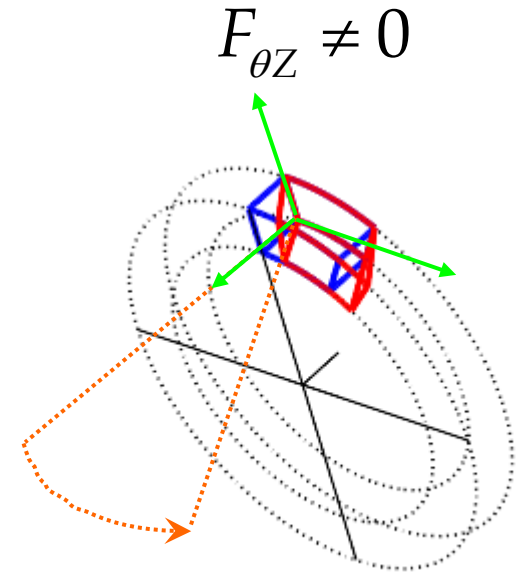
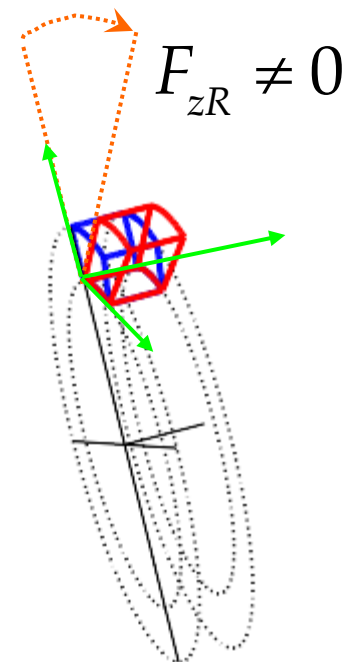
$$F_{\theta Z} = r \frac{\partial \theta}{\partial Z} \neq 0 \Leftrightarrow \theta = \theta(Z) \quad \text{tj. když zdeformovaná obvodová souřadnice závisí na počáteční axiální poloze}$$

V typu zkosu rozpoznáváme *zkrut*.

$$F_{zR} = \frac{\partial z}{\partial R}$$

$$F_{zR} = \frac{\partial z}{\partial R} \neq 0 \Leftrightarrow z = z(R) \quad \text{tj. když axiální protažení závisí na počátečním poloměru}$$

Axiální, nebo-li teleskopický, smyk. V trubici může být vytvořen např. podélným třením vazké kapaliny o stěnu (krev).



Inflace a extenze válcové trubice

Interpretace složek \mathbf{F}

$$F_{z\Theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial z}{\partial \Theta}$$

$$F_{z\Theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial z}{\partial \Theta} \neq 0 \Leftrightarrow z = z(\Theta) \quad \text{axiální protažení by muselo záviset na počáteční poloze podél obvodu}$$

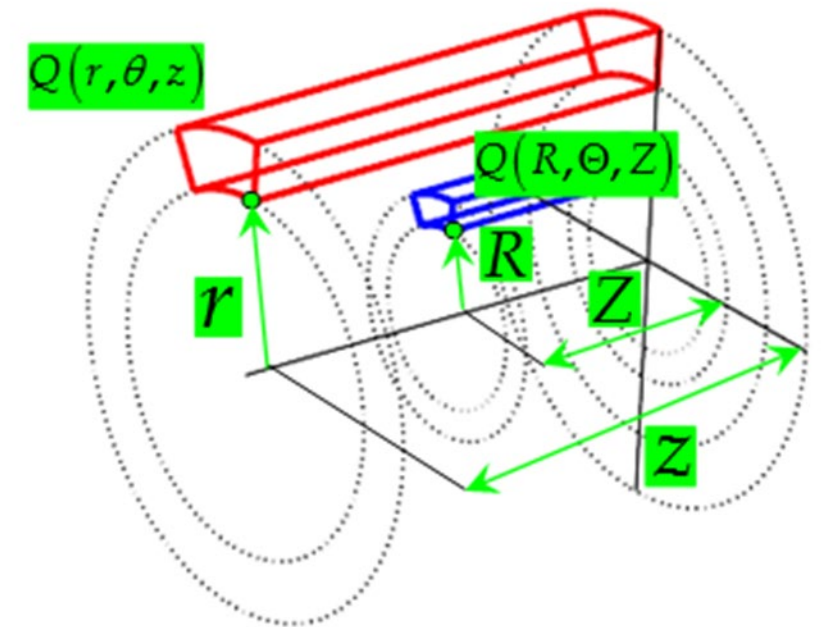
$$F_{zZ} = \frac{\partial z}{\partial Z}$$

$$F_{zZ} = \frac{\partial z}{\partial Z} \neq 0 \Leftrightarrow z = z(Z) \quad \text{axiální protažení není po celé délce trubky rovnoměrné}$$

Inflace a extenze válcové trubice

Nejběžnější model kinematiky inflace a extenze válcové trubice počítá s rovnoměrným protažením a nafouknutím, čili:

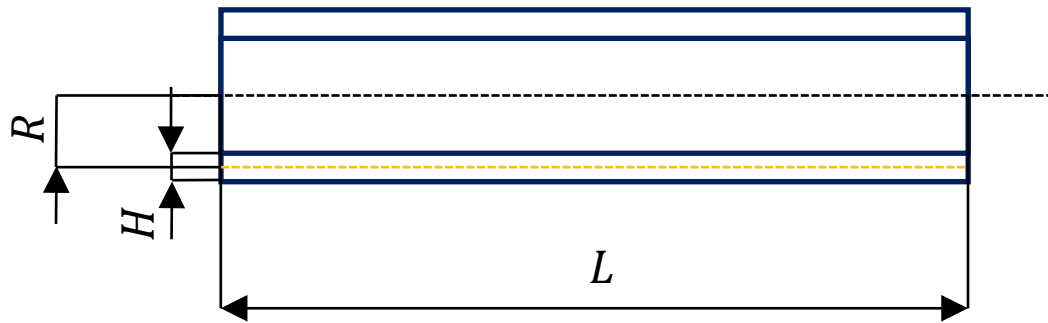
$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{L} \end{pmatrix}$$



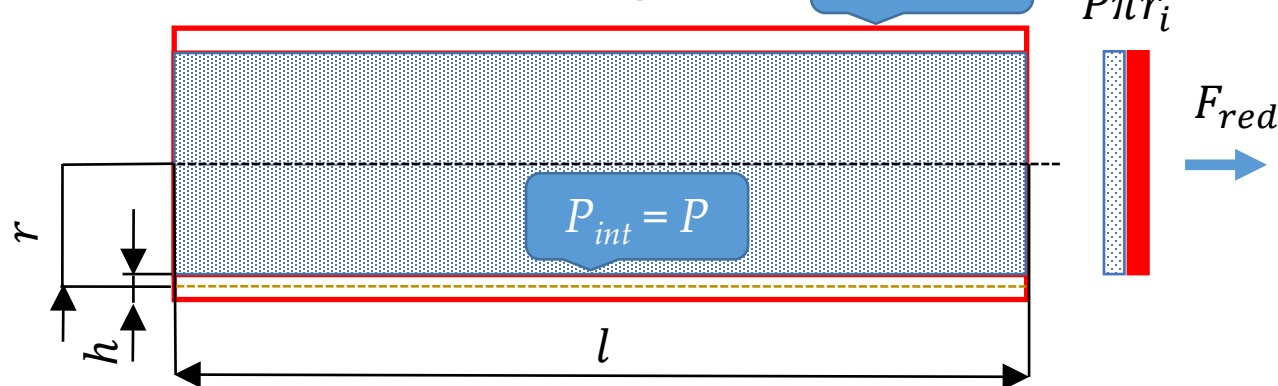
Inflace a extenze tenkostěnné válcové trubice

Válcová membránová skořepina

Referenční konfigurace



Průběžná konfigurace $P_{ext} = 0$



$$r = \lambda_{\theta\theta} R \quad z = \lambda_{zZ} Z \quad h = \lambda_{rR} H$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h}{H} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{L} \end{pmatrix}$$

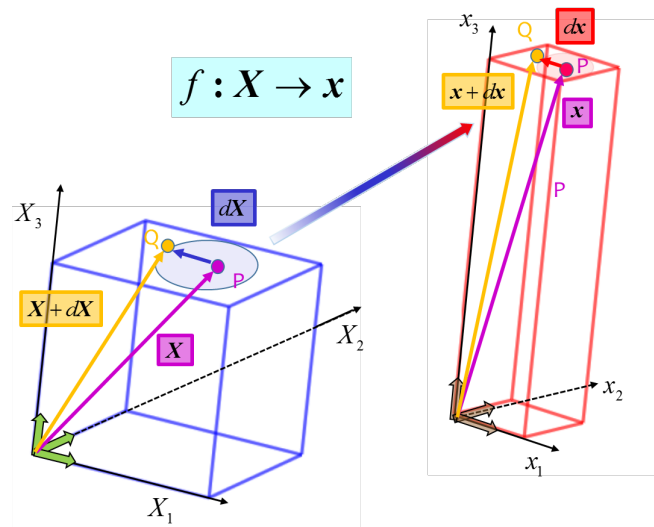
Rychlost deformace

Rozlišujeme **materiálovou rychlost** $V(\mathbf{X},t)$ a **prostorovou rychlost** $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$

Lépe řečeno, hovoříme o rychlosti v materiálovém nebo prostorovém popisu

$$V(\mathbf{X},t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X},t)}{\partial t}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x},t)}{\partial t}$$



$$\mathbf{x} = f(\mathbf{X})$$
$$\mathbf{X} = f^{-1}(\mathbf{x})$$

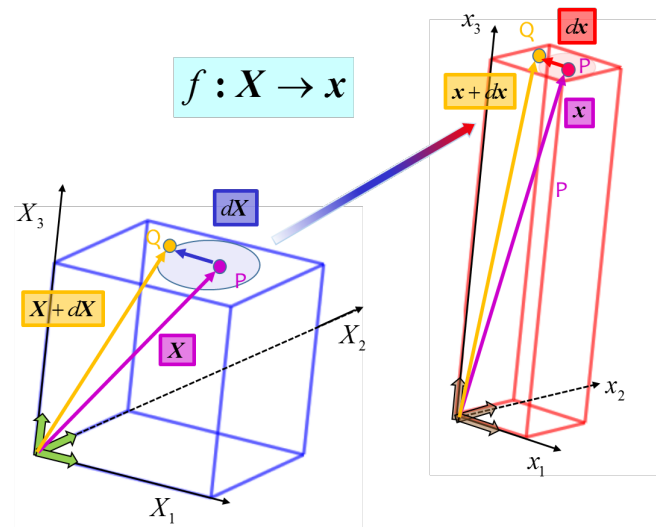
Rychlost deformace

Rozlišujeme **materiálové zrychlení** $\mathbf{A}(\mathbf{X},t)$ a **prostorové zrychlení** $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)$

Lépe řečeno, hovoříme o zrychlení \mathbf{A} v materiálovém nebo \mathbf{a} v prostorovém popisu

$$\mathbf{A}(\mathbf{X},t) = \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X},t)}{\partial t}$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial t}$$



$$\mathbf{x} = f(\mathbf{X})$$
$$\mathbf{X} = f^{-1}(\mathbf{x})$$

Rychlost deformace

Materiálová derivace prostorové rychlosti $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$

Tj. derivace podle t při konstantním \mathbf{X} , které ale není explicitně proměnná ve \mathbf{v}

Připomeňme, že parciální derivaci funkce více proměnných se na ostatní proměnné díváme

jako na konstanty. Máme-li \mathbf{X} chápat jako konstantní, musíme si uvědomit, že skrze závislost na \mathbf{x} jde

o složenou funkci více proměnných, tj. $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$.

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X} = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}, t)}$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \Big|_t \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X} = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}, t)}$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathit{grad}(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j$$

Rychlost deformace

Časová derivace, neboli rychlost, deformačního gradientu \mathbf{F} ,
(materiálové souřadnice)

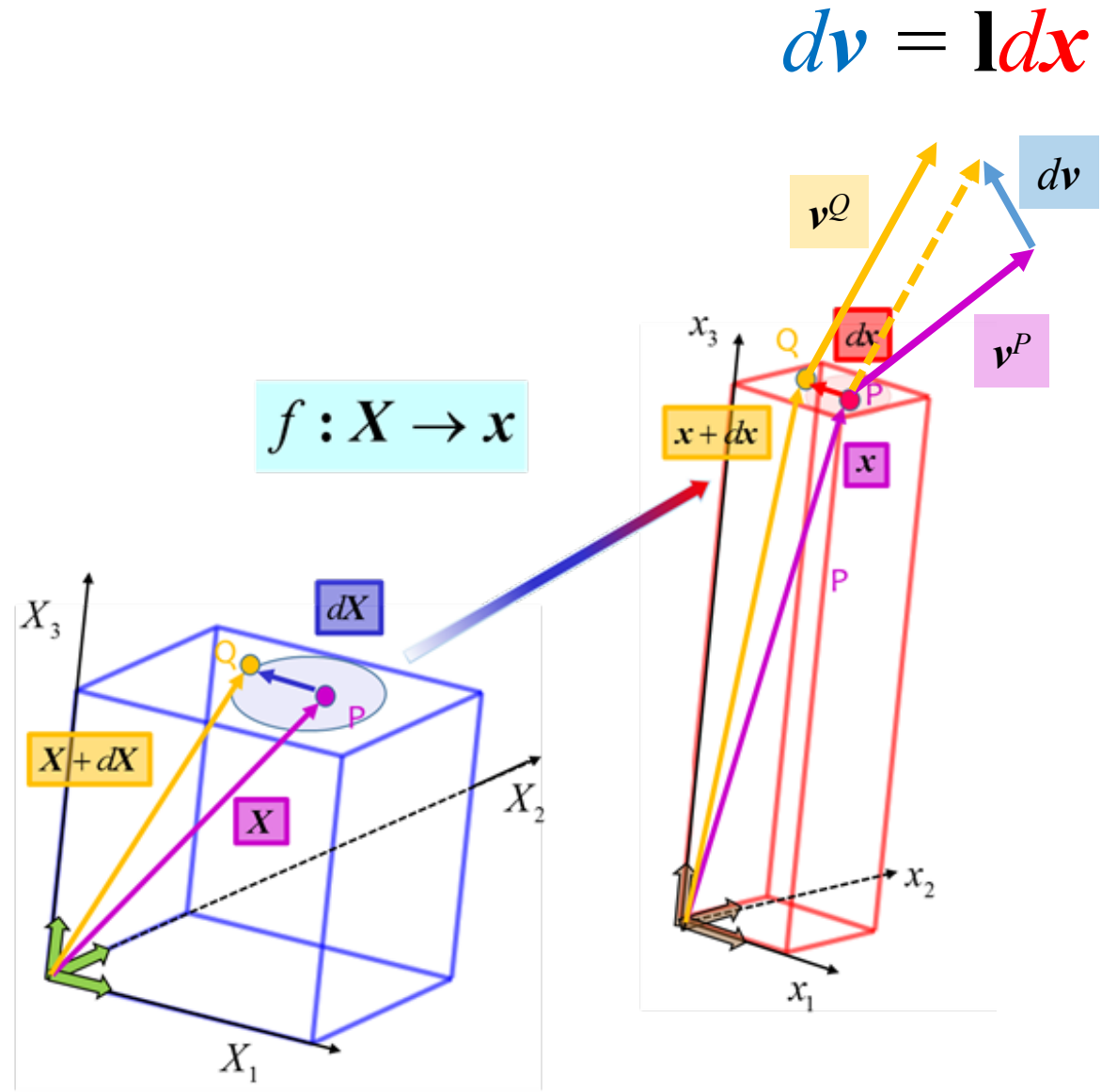
$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{d}{dt} \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \frac{d\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{dt} = \frac{\partial V(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad}(V)$$

Rychlost deformace

Prostorový gradient rychlosti \mathbf{l}

$$\mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \text{grad}(\mathbf{v})$$

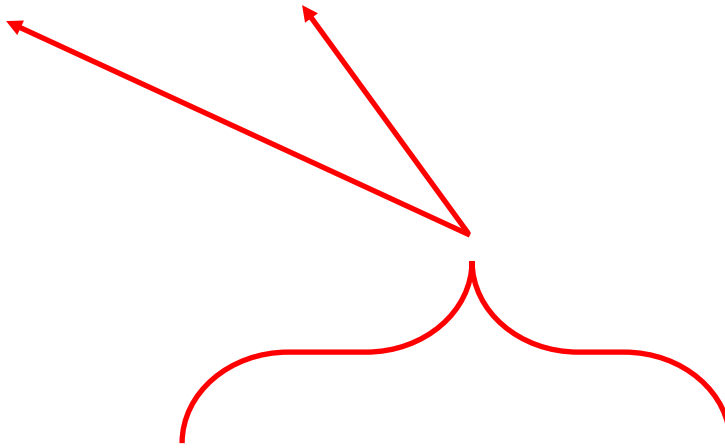
$$l_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$



Rychlost deformace

$$\dot{\mathbf{F}} = \text{Grad}(V) = \frac{\partial V(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial V(f^{-1}(\mathbf{x}), t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial v(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial v(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial v(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \text{grad}(\mathbf{v}) \mathbf{F} = \mathbf{I} \mathbf{F}$$

$$\mathbf{I} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$$


$$\begin{array}{l} \mathbf{x} = f(\mathbf{X}) \\ \mathbf{X} = f^{-1}(\mathbf{x}) \end{array} \quad V(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

Prostorový tenzor rychlosti deformace \mathbf{d}

Tenzor \mathbf{l} není symetrický

Rozložíme ho na symetrickou část \mathbf{d}

a antisymetrickou část \mathbf{w}

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^T$$

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{l} - \mathbf{l}^T)$$

$$\mathbf{w}^T = -\mathbf{w}$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{d} + \mathbf{w}$$

Prostorový tenzor rychlosti deformace \mathbf{d}

Tenzor spinu \mathbf{w}

Materiálová rychlost deformace

$$\frac{d}{dt} \mathbf{E} = \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}}$$

Transformace mezi materiálovým a prostorovým popisem: $\frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \mathbf{d} \mathbf{F}$

Což mimochodem
platí nejen
pro rychlosti:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \mathbf{e} \mathbf{F}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1}$$

$$\text{materiálový popis} = \mathbf{F}^T (\text{prostorový popis}) \mathbf{F}$$

$$\text{prostorový popis} = \mathbf{F}^{-T} (\text{materiálový popis}) \mathbf{F}^{-1}$$

Rychlost deformace 1, 2 a 3D elementů

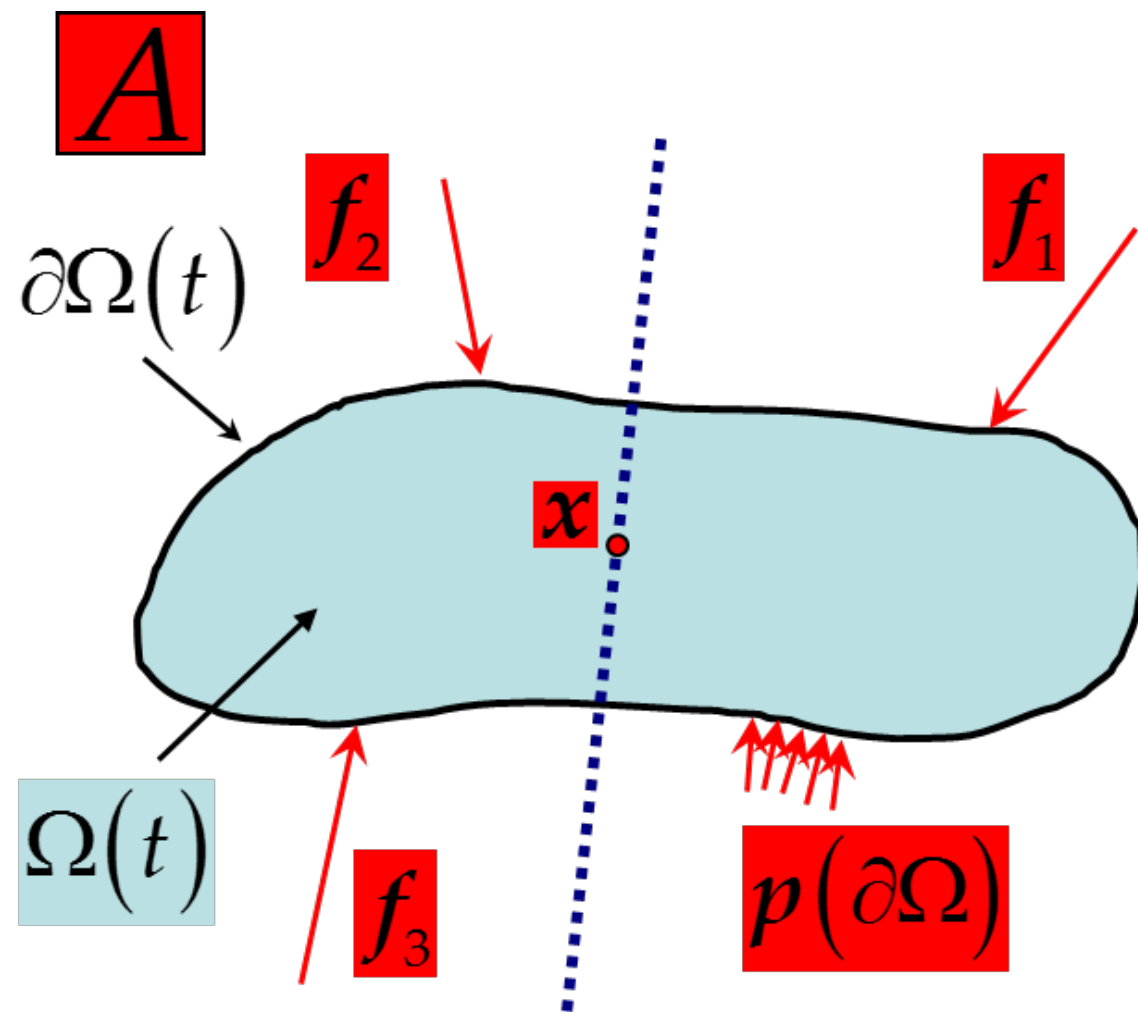
$$\frac{d}{dt} d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} (\mathbf{F} d\mathbf{X}) = \dot{\mathbf{F}} d\mathbf{X} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} = \mathbf{l} d\mathbf{x}$$

$$\frac{d}{dt} ds = \frac{d}{dt} (J \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{S}) = \dots = \text{div}(\mathbf{v}) ds - \mathbf{l}^T ds$$

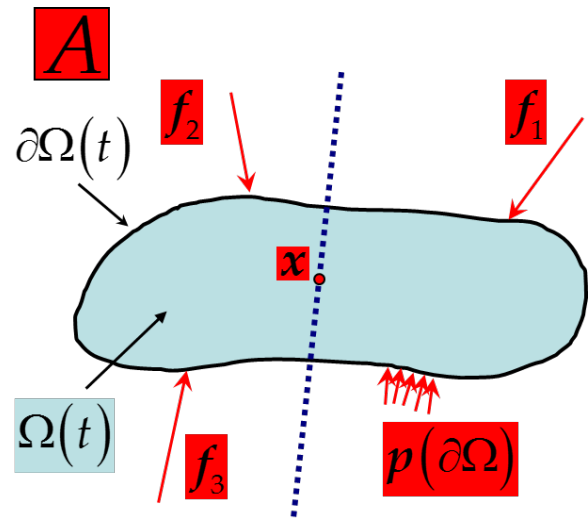
$$\frac{d}{dt} J = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} = \dots = J \text{div}(\mathbf{v}) = J \text{tr}(\mathbf{d})$$

Míry napětí ,
čili plošná intenzita
vnitřních sil

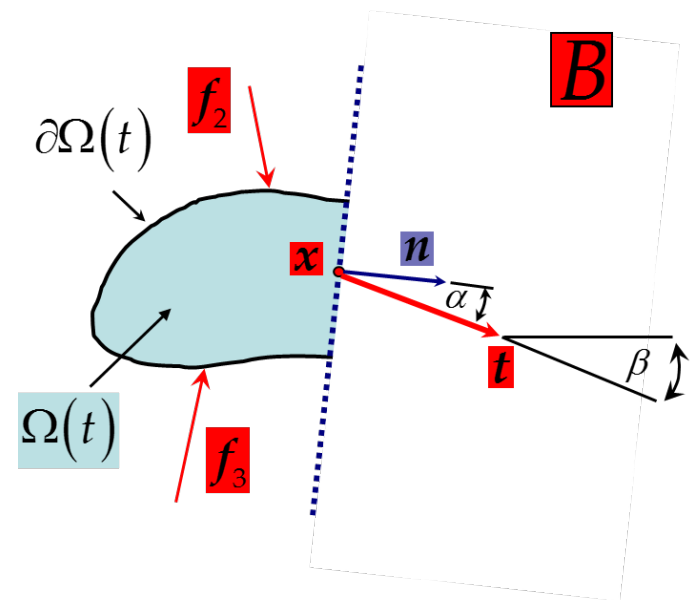
Tenzor napětí σ



Tenzor napětí σ (Cauchyovo neboli skutečné)



SR



Zavádíme vektor (plošné) *intenzity vnitřních sil* \mathbf{t} (tzv. trakční nebo též napěťový vektor) tak, že platí

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta s} \quad d\mathbf{f} = \mathbf{t} ds$$

zde ds je velikost plochy elementárního okolí bodu \mathbf{x}
v rovině řezu a $d\mathbf{f}$ je infinitesimální vektor vnitřní síly uvádějící řez do rovnováhy

Tenzor napětí σ (Cauchyovo neboli skutečné)

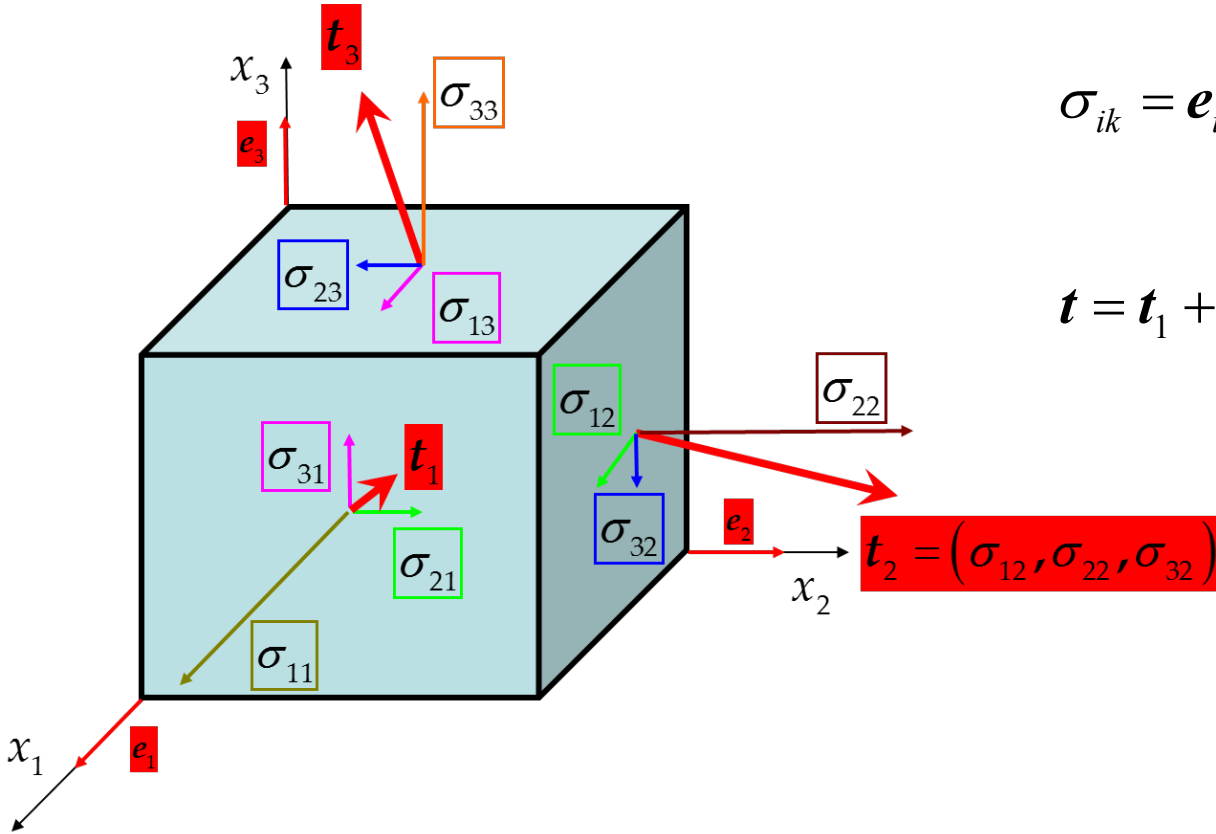
Tenzor druhého řádu, čili zobrazení σ , které promítá \mathbf{n} , což je vektor vnější normály roviny řezu v bodě \mathbf{x} , na napět'ový vektor \mathbf{t}

$$\sigma : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{t} \qquad \mathbf{t} = \sigma \mathbf{n}$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Takže tenzor napětí σ umožňuje určit napět'ový vektor \mathbf{t} v bodě \mathbf{x} v libovolném řezu, čili pro libovolný vektor \mathbf{n} . To je úplná informace o stavu napjatosti v bodě. Toto tvrzení, že závislost mezi \mathbf{t} a \mathbf{n} je lineární skrze σ , se nazývá Cauchyova věta.

Tenzor napětí σ (Cauchyovo neboli skutečné)



$$\sigma_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{t}_k$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13} \\ \sigma_{21} + \sigma_{22} + \sigma_{23} \\ \sigma_{31} + \sigma_{32} + \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

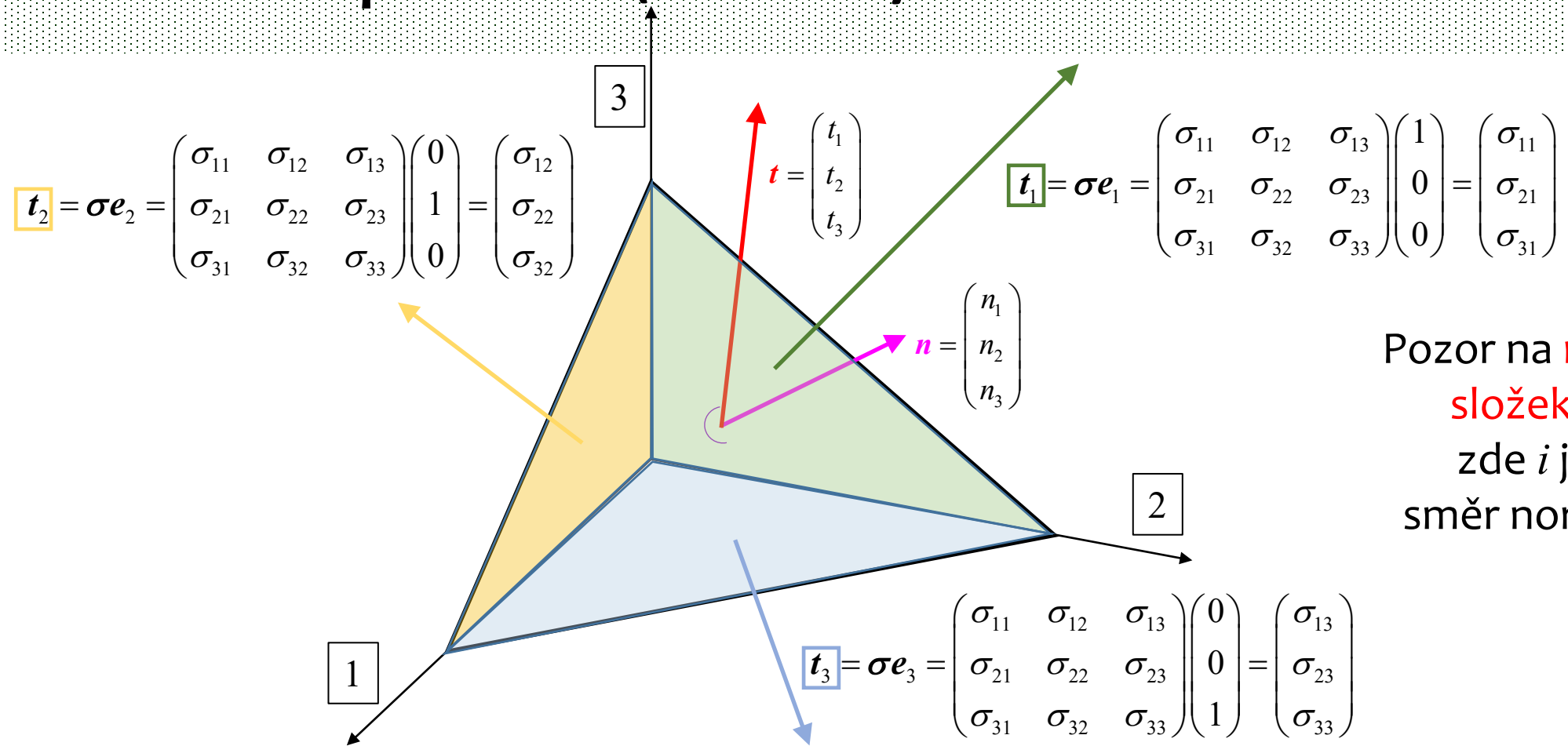
$$\mathbf{t}_1 = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{t}_2 = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{32} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{t}_3 = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Pozor na rozdí v označování složek tenzoru napětí σ_{ij} ,
zde i je směr průmětu a j směr normály stěny krychle

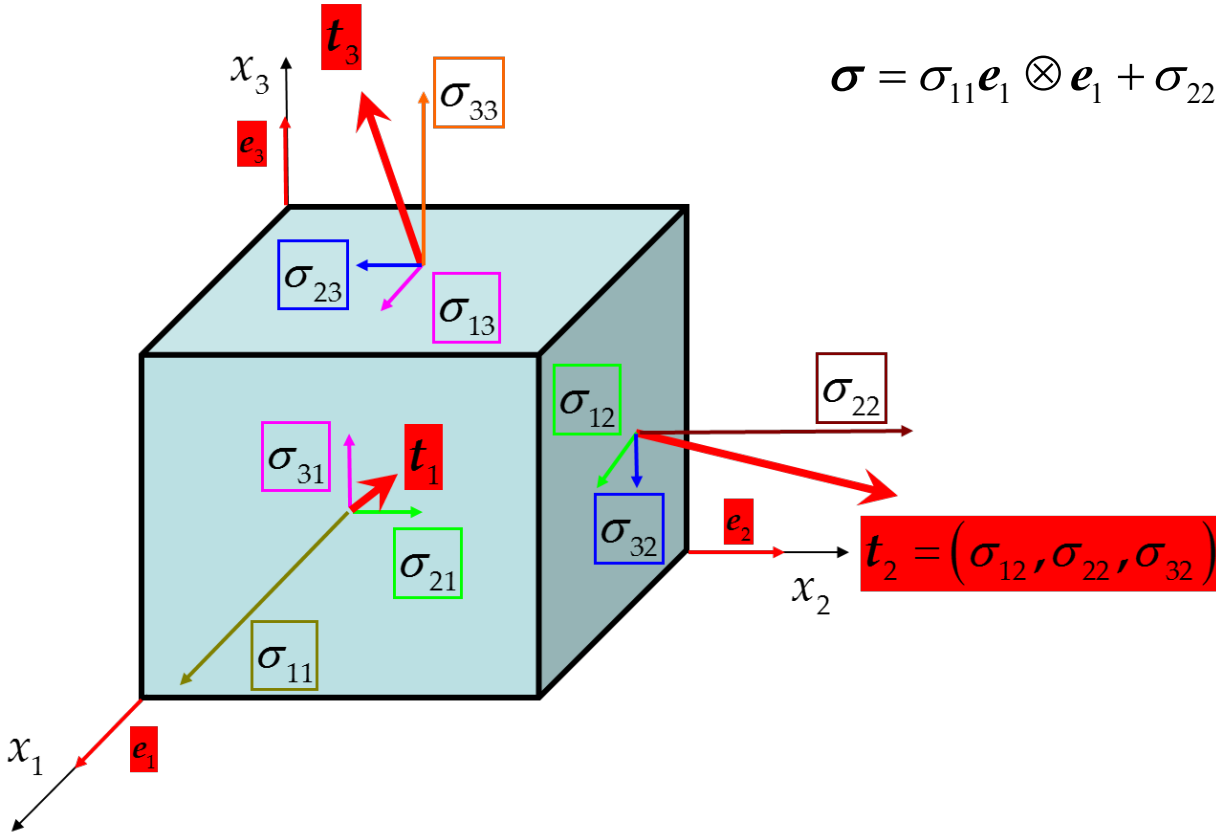
Tenzor napětí σ (Cauchyovo neboli skutečné)



Pozor na rozdí v označování složek tenzoru napětí σ_{ij} , zde i je směr průmětu a j směr normály stěny krychle

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 \\ \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 \\ \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{pmatrix}$$

Tenzor napětí σ



$$\sigma = \sigma_{11}e_1 \otimes e_1 + \sigma_{22}e_2 \otimes e_2 + \sigma_{33}e_3 \otimes e_3 + 2\sigma_{12}e_1 \otimes e_2 + 2\sigma_{23}e_2 \otimes e_3 + 2\sigma_{31}e_3 \otimes e_1$$

$$\sigma = \sigma^T$$

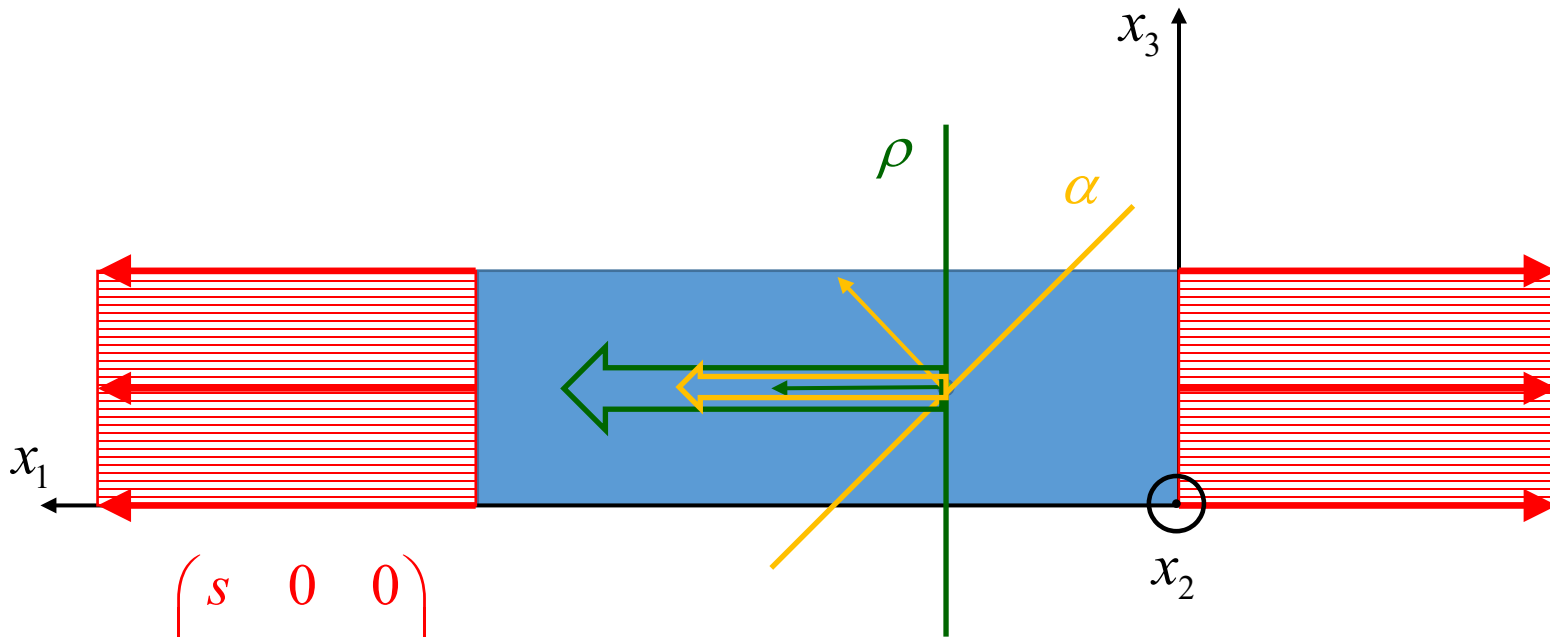
$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$$

Pozor na rozdíl v označování složek tenzoru napětí σ_{ij} ,
zde i je směr průmětu a j směr normály stěny krychle

Tenzor napětí σ

$$\mathbf{n}_\rho = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{t}_\rho = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_\rho = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{n}_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{t}_\alpha = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_\alpha = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

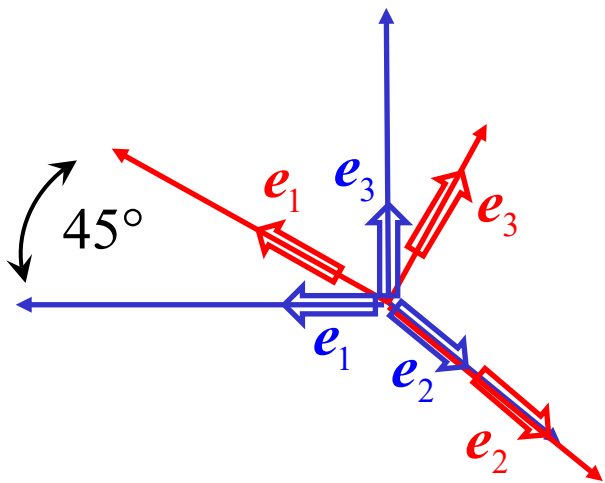


$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nekonečně mnoho rovin
 řezu \Rightarrow nekonečně mnoho
 normál $\mathbf{n} \Rightarrow$ nekonečně
 mnoho napět'ových
 vektorů \mathbf{t} , **ale jen jeden**
tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$!

Otočení soustavy souřadnic: Ortogonální transformace báze

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & \cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & \cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \\ \cos(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & \cos(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) & \cos(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ \cos(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) & \cos(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) & \cos(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_i = \mathbf{Q}\mathbf{e}_i$$



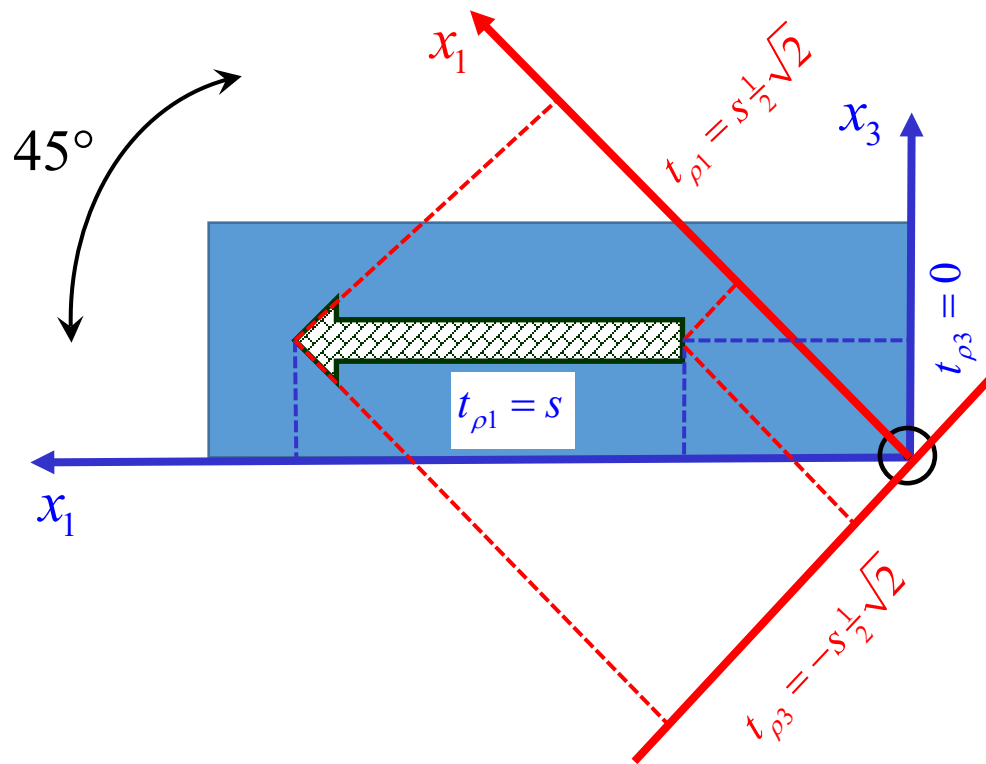
$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & \cos(90^\circ) & \cos(135^\circ) \\ \cos(90^\circ) & \cos(0^\circ) & \cos(90^\circ) \\ \cos(45^\circ) & \cos(90^\circ) & \cos(45^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_1 &= \mathbf{Q}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 &= \mathbf{Q}\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 &= \mathbf{Q}\mathbf{e}_3 \\
 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Otočení... ortogonální transformace složek vektorů

$$[\mathbf{u}] = [\mathbf{Q}^T][\mathbf{u}]$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & \cos(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & \cos(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) \\ \cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & \cos(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) & \cos(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) \\ \cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) & \cos(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) & \cos(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad u_i = Q_{ji} u_j$$



$$\mathbf{t}_\rho = \begin{pmatrix} s \frac{1}{2} \sqrt{2} \\ 0 \\ -s \frac{1}{2} \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2} \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} \sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2} \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^T \mathbf{t}_\rho$$

Otočení... ortogonální transformace složek vektorů

To byl náš běžný maticový pohled na věc.

Pojďme se podívat, jak bychom transformaci vektorů zapsali pomocí čistě indexové notace a následně tato pravidla použijeme pro vyjádření transformace složek tenzorů druhého řádu.

Čistě algebraický pohled

Tenzor druhého řádu \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

Složky tenzoru A_{ij} jako projekce do bázových vektorů \mathbf{e}_i a \mathbf{e}_j

$$A_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} \mathbf{e}_j$$

$$\mathbf{A} \mathbf{e}_j = (A_{lk} \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_j = A_{lk} (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_l = A_{lk} \delta_{kj} \mathbf{e}_l = A_{lj} \mathbf{e}_l$$

$$A_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot A_{lj} \mathbf{e}_l = A_{lj} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_l) = A_{lj} \delta_{il} = A_{ij}$$

Transformace vektorů báze algebraický pohled

Ortogonalní transformace \mathbf{Q} vektorů báze

$$\mathbf{e}_i \rightarrow \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{Q}\mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{e}_i = Q_{ji}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{Q}\mathbf{e}_i \Rightarrow \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{e}_i = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{e}_i \Rightarrow \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{e}_i \rightarrow \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{e}_i = \mathbf{Q}^T\mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{e}_i = Q_{ij}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i$$

Ortogonalní transformace \mathbf{Q}

Platí $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$ představuje otáčení (rotaci, čili vlastní ortogonální transformaci, když $\det\mathbf{Q} = 1$)

(Otáčení soustavy) transformace složek vektoru \mathbf{u}

Transformace vektorů báze

$$\mathbf{e}_i \rightarrow \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{e}_i \rightarrow \mathbf{e}_i$$

Transformace vektoru \mathbf{u} $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$

$$u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q} \mathbf{e}_i = \mathbf{u} \cdot Q_{ji} \mathbf{e}_j = Q_{ji} \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_j = Q_{ji} u_j$$

$$u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}^T \mathbf{e}_i = \mathbf{u} \cdot Q_{ij} \mathbf{e}_j = Q_{ij} \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_j = Q_{ij} u_j$$

Otočení – transformace složek tenzorů

S využitím těchto pravidel $A_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} \mathbf{e}_j$ $\mathbf{A} \mathbf{e}_j = A_{lj} \mathbf{e}_l$
dostáváme:

$$T_{ij} = \overbrace{\mathbf{e}_i}^{\mathbf{e}_i = Q_{ki} \mathbf{e}_k} \cdot \mathbf{T} \underbrace{\mathbf{e}_j}_{\mathbf{e}_j = Q_{mj} \mathbf{e}_m} = (Q_{ki} \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{T} (Q_{mj} \mathbf{e}_m) = Q_{ki} Q_{mj} (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_m) = Q_{ki} Q_{mj} T_{km} = Q_{ki} T_{km} Q_{mj}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}^T \mathbf{T} \mathbf{Q}$$

$$T_{ij} = Q_{ki} T_{km} Q_{mj}$$

Otočení – transformace tenzorů

$$\mathbf{t}_\rho = \begin{pmatrix} s\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -s\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^T \mathbf{t}_\rho$$

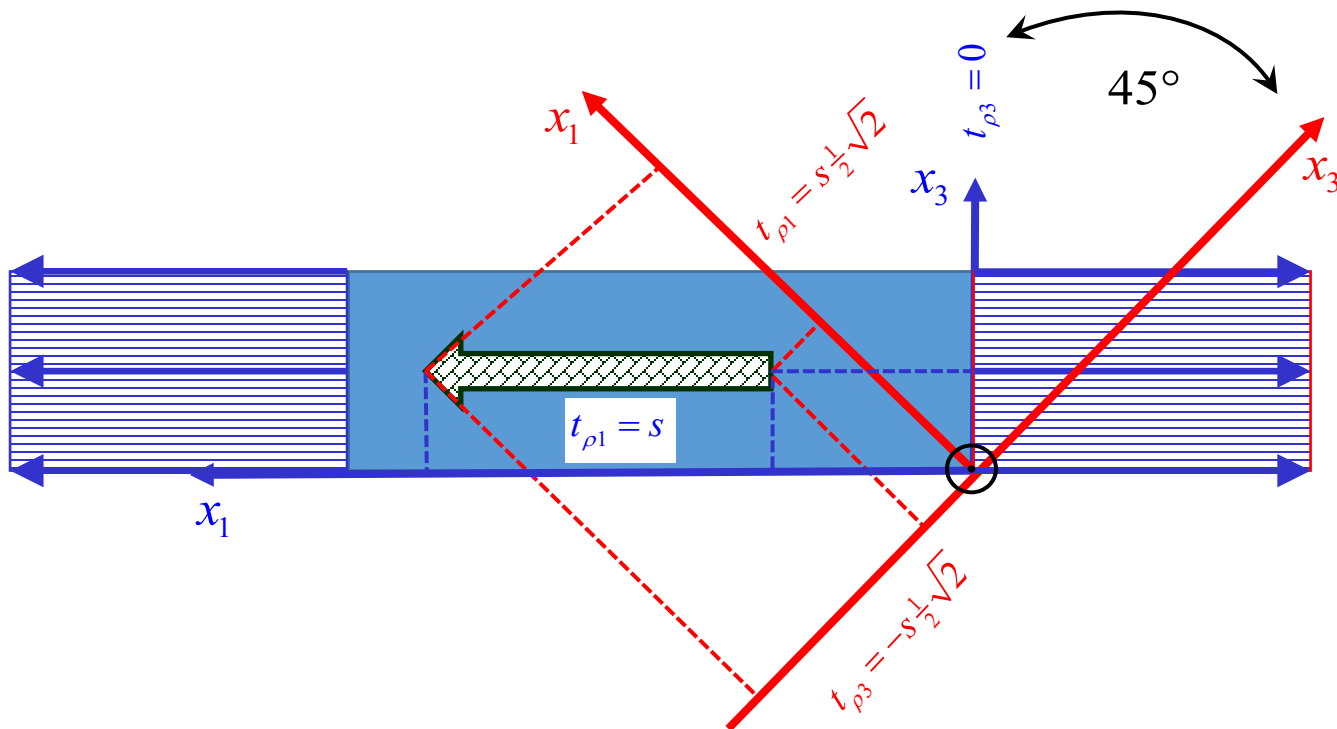
$$T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_j = (\mathcal{Q}_{ki} \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{T} (\mathcal{Q}_{mj} \mathbf{e}_m) = \mathcal{Q}_{ki} \mathcal{Q}_{mj} (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_m) = \mathcal{Q}_{ki} \mathcal{Q}_{mj} T_{km} = \mathcal{Q}_{ki} T_{km} \mathcal{Q}_{mj}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}^T \mathbf{T} \mathbf{Q}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s & 0 & \frac{1}{2}s \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}s & 0 & \frac{1}{2}s \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{t}_\rho = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_\rho = \mathbf{Q}^T \mathbf{t}_\rho = (\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q})(\mathbf{Q}^T \mathbf{n}_\rho) = \begin{pmatrix} s\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -s\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$



Otočení – transformace tenzorů

- Skalár (tenzor řádu 0) $t = t$
- Vektor (tenzor řádu 1) $t_i = Q_{ji} t_j$
- Tenzor 2. řádu $t_{ij} = Q_{ki} Q_{mj} t_{km}$
- Tenzor 3. řádu $t_{ijl} = Q_{ki} Q_{mj} Q_{nl} t_{kmn}$
- Tenzor 4. řádu $t_{ijlp} = Q_{ki} Q_{mj} Q_{nl} Q_{qp} t_{kmnq}$
- ...

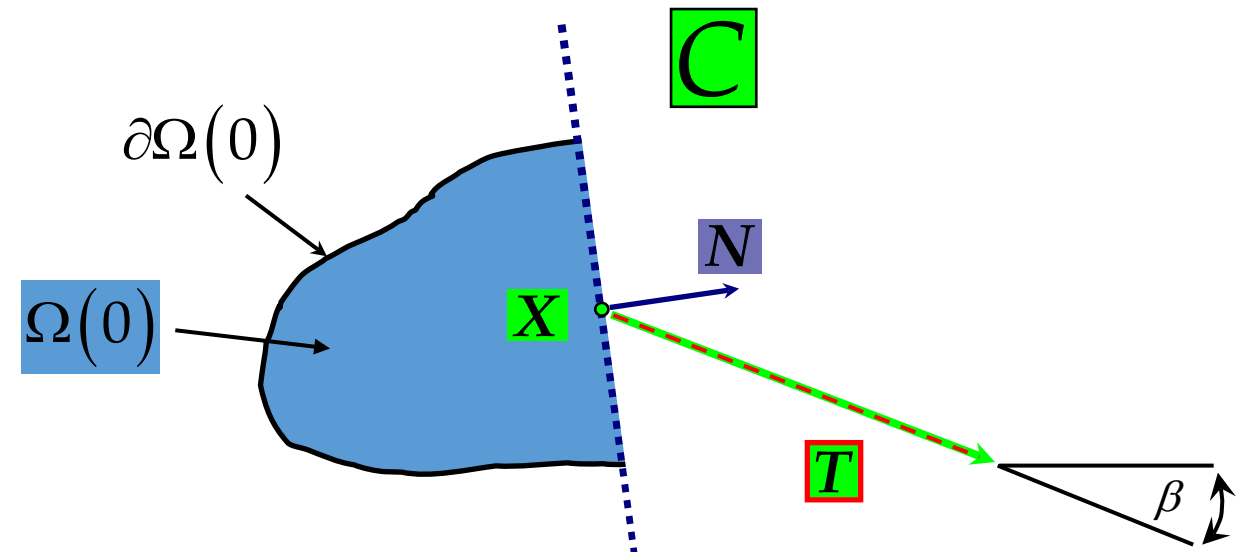
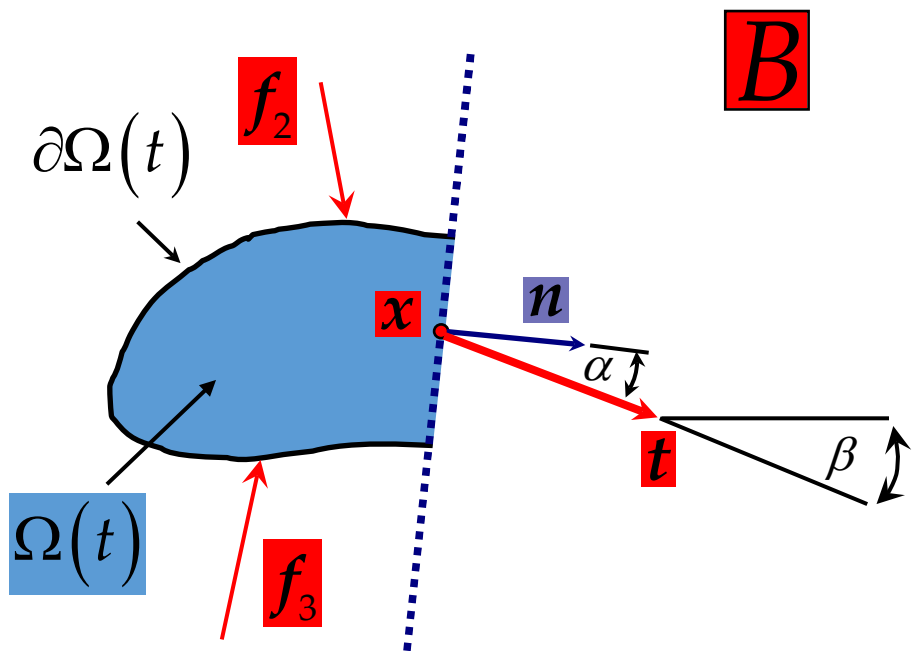
Složky vektorů a tenzorů závisí na použité bázi. Použijeme **ortonormální báze**. Takové **složky** pak nazýváme **fyzikální**.

Tenzory napětí \mathbf{P} a σ

- Přenesme výslednici vnitřních silových účinků $d\mathbf{f}$ do referenční konfigurace, a vytvořme tak novou míru napětí \mathbf{P}

Tenzory napětí \mathbf{P} a $\boldsymbol{\sigma}$

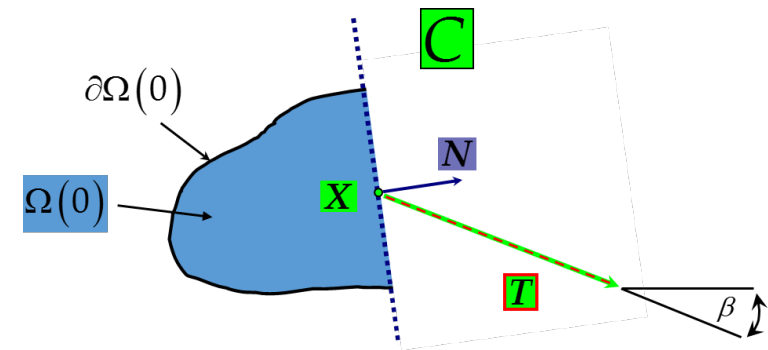
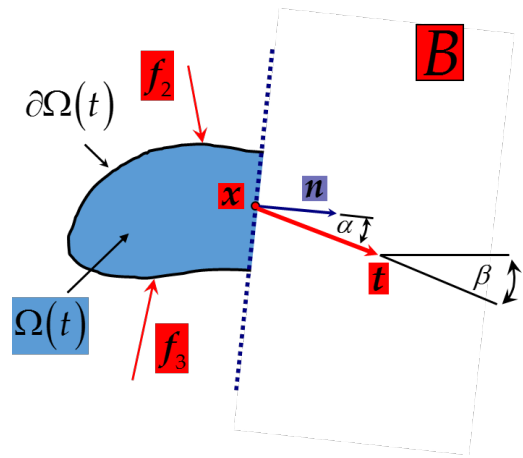
Řez v průběžné konfiguraci



Řez v referenční konfiguraci a přenesení $d\mathbf{f}$

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}ds = \mathbf{T}dS$$

Tenzory napětí \mathbf{P} a σ



$$d\mathbf{f} = \mathbf{t} ds = \mathbf{T} dS$$

Cauchyův tenzor napětí σ

$$\mathbf{t} = \sigma \mathbf{n}$$

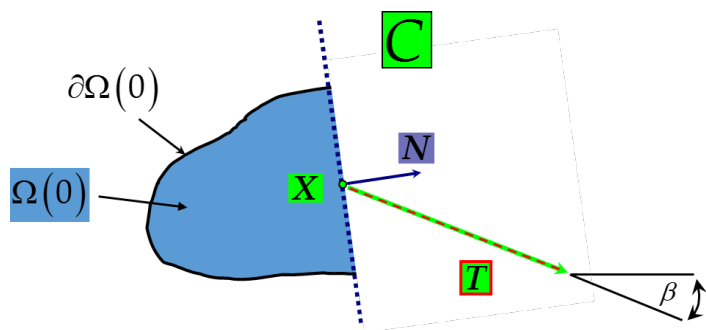
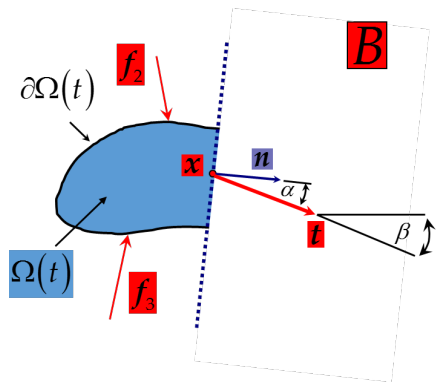
$$t_i = \sigma_{ij} n_j$$

Tenzor smluvního napětí \mathbf{P}

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} \mathbf{N}$$

$$T_i = P_{iK} N_K$$

Tenzory napětí \mathbf{P} a $\boldsymbol{\sigma}$



$$ds = J \mathbf{F}^{-T} dS$$

$$d\mathbf{f} = d\mathbf{f} \Leftrightarrow \mathbf{t} ds = \mathbf{T} dS \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} ds = \mathbf{P} \mathbf{N} dS \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} ds = \mathbf{P} dS \Leftrightarrow$$

$$J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} dS = \mathbf{P} dS \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}$$

$$P_{iK} = J \sigma_{ij} F_{Kj}^{-1}$$

2. Piolův-Kirchhoffův tenzor napětí \mathbf{S}

- Převeďme silový vektor $d\mathbf{f}$ stejně jako převádíme polohový vektor $d\mathbf{x}$, a vytvořme tak materiálově vyjádřený výsledný vnitřní účinek a další míru napětí \mathbf{S}

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}$$

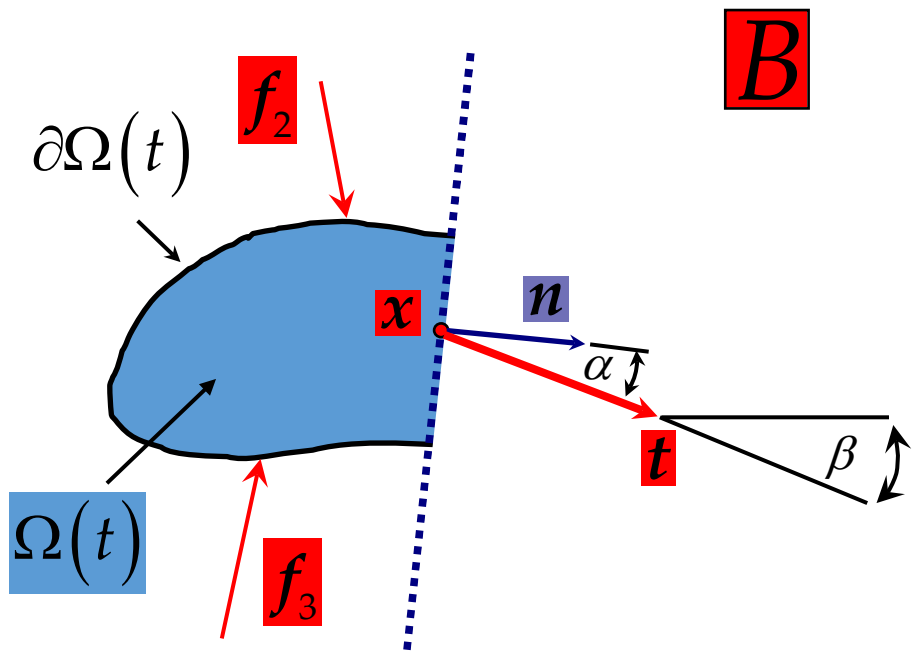
$$dX_K = F_{Ki}^{-1} dx_i$$

$$d\mathbf{F} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{f}$$

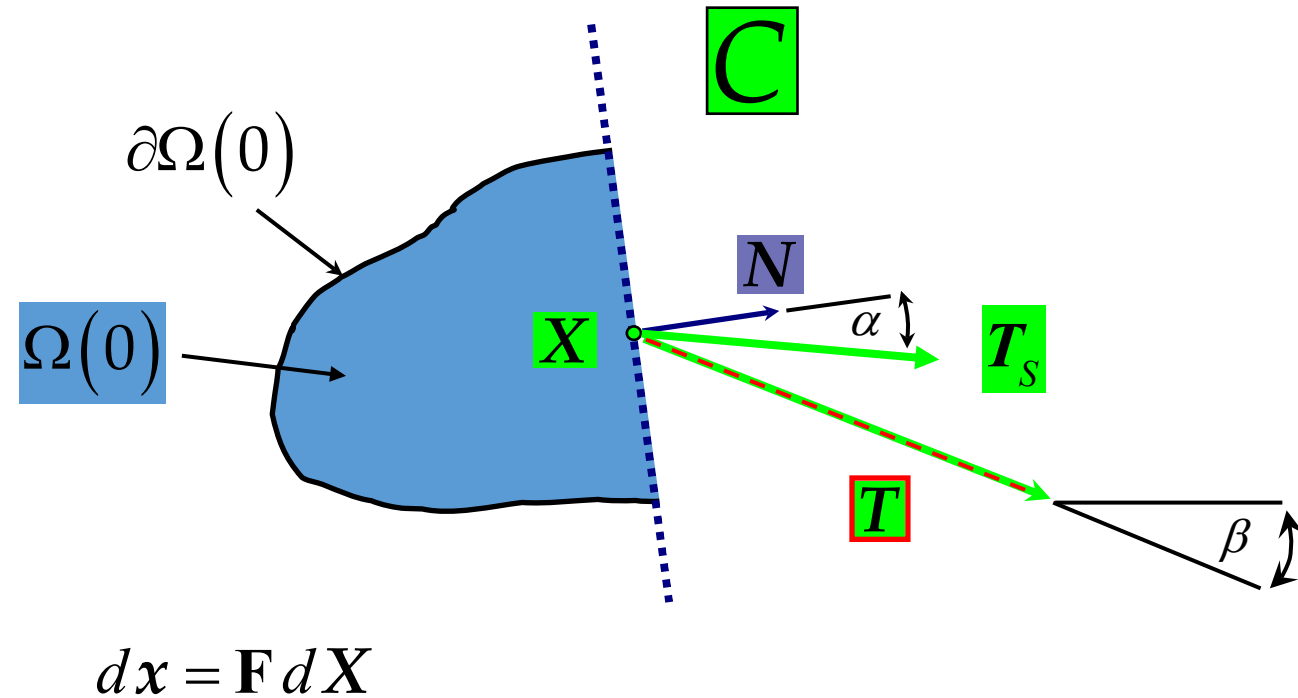
$$dF_K = F_{Ki}^{-1} df_i$$

2. Piolův-Kirchhoffův tenzor napětí \mathbf{S}

Řez v průběžné konfiguraci



Řez v referenční konfiguraci a přenesení df



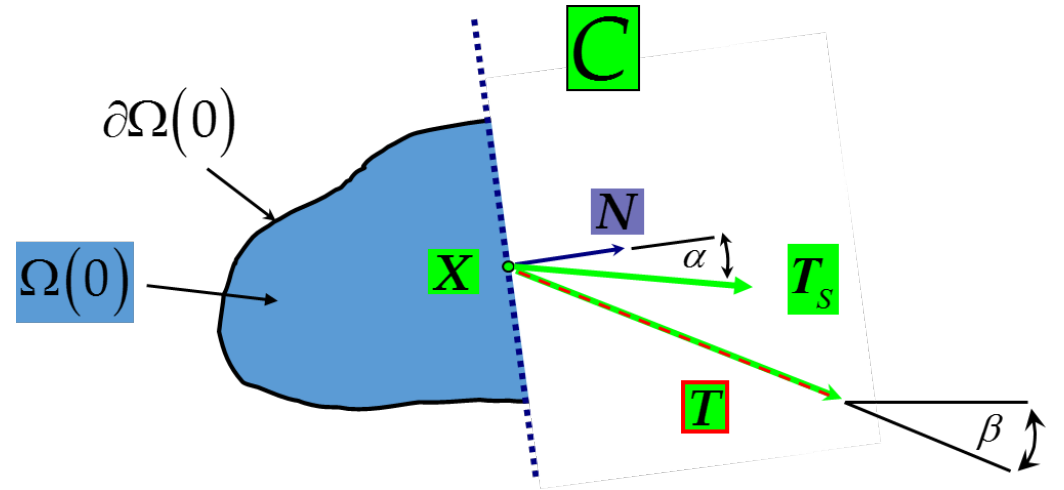
$$\mathbf{F}^{-1} df = \mathbf{F}^{-1} T dS = \mathbf{F}^{-1} t ds = T_S dS$$

2. Piolův-Kirchhoffův tenzor napětí \mathbf{S}

Na elementární výslednici vnitřních sil $d\mathbf{f}$ aplikujeme stejnou geometrickou transformaci jako při popisu kinematiky deformace. Dostáváme tak fiktivní materiálovou výslednici vnitřních sil $d\mathbf{F} = \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{f}$.

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}$$

$$d\mathbf{f} = \mathbf{F} d\mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{F} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{f}$$



$$\Rightarrow \quad d\mathbf{F} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{f} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} dS = \mathbf{T}_S dS$$

Druhý Piolův-Kirchhoffův napěťový vektor

$$\mathbf{T}_S = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}$$

Tenzory napětí \mathbf{S} , \mathbf{P} a $\boldsymbol{\sigma}$

Cauchyův tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad t_i = \sigma_{ij} n_j$$

Tenzor smluvního napětí \mathbf{P}

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} \mathbf{N} \quad T_i = P_{iK} N_K$$

2. Piolův-Kirchhoffův tenzor napětí \mathbf{S}

$$\mathbf{T}_S = \mathbf{S} \mathbf{N} \quad T_{S_i} = S_{iK} N_K$$

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t} ds = \mathbf{T} dS = \mathbf{F} \mathbf{T}_S dS$$

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} ds = \mathbf{P} \mathbf{N} dS = \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{N} dS$$

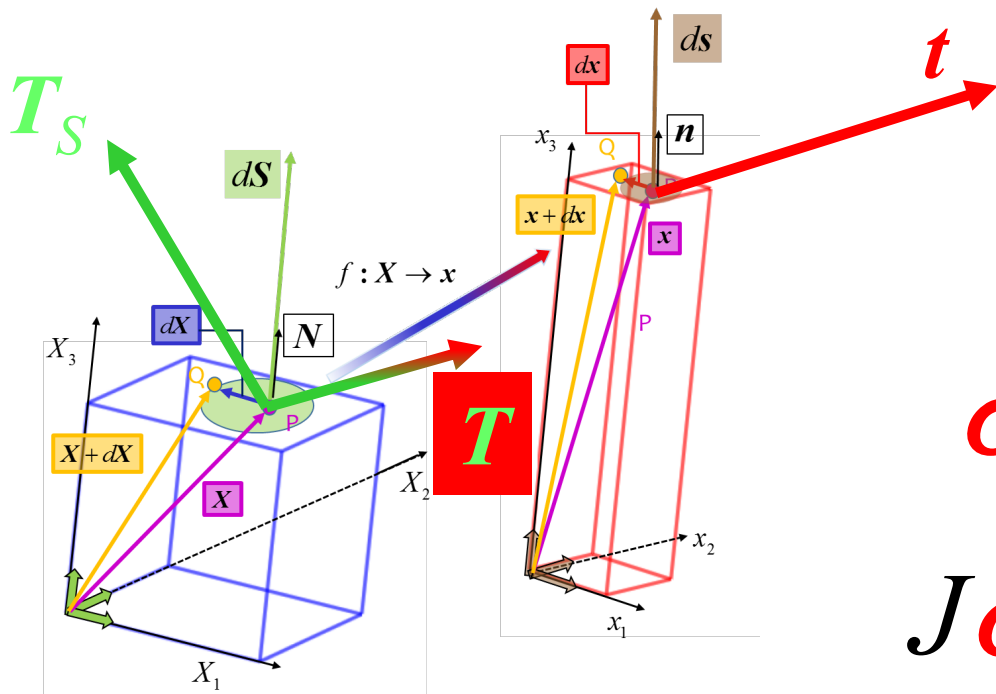
$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} ds = \mathbf{P} d\mathbf{S} = \mathbf{F} \mathbf{S} d\mathbf{S}$$

$$ds = J \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{S} \quad d\mathbf{S} = J^{-1} \mathbf{F}^T ds$$

$$d\mathbf{f} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{S} = \mathbf{P} d\mathbf{S} = \mathbf{F} \mathbf{S} d\mathbf{S}$$

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} ds = J^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}^T ds = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T ds$$

Tenzory napětí \mathbf{S} , \mathbf{P} a $\boldsymbol{\sigma}$



$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma} &= J^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}^T = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \\
 J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} &= \mathbf{P} = \mathbf{F} \mathbf{S} \\
 J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} &= \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = \mathbf{S}
 \end{aligned}$$

Tenzory napětí \mathbf{S} , \mathbf{P} a $\boldsymbol{\sigma}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= J^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}^T = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \\ \sigma_{ij} &= J^{-1} P_{iK} F_{jK} = J^{-1} F_{iL} S_{LK} F_{jK}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} &= \mathbf{P} = \mathbf{F} \mathbf{S} \\ J \sigma_{ij} F_{Kj}^{-1} &= P_{iK} = F_{iL} S_{LK}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} &= \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = \mathbf{S} \\ J F_{Li}^{-1} \sigma_{ij} F_{Kj}^{-1} &= F_{Li}^{-1} P_{iK} = S_{LK}\end{aligned}$$

Tenzory napětí \mathbf{S} , \mathbf{P} a $\boldsymbol{\sigma}$

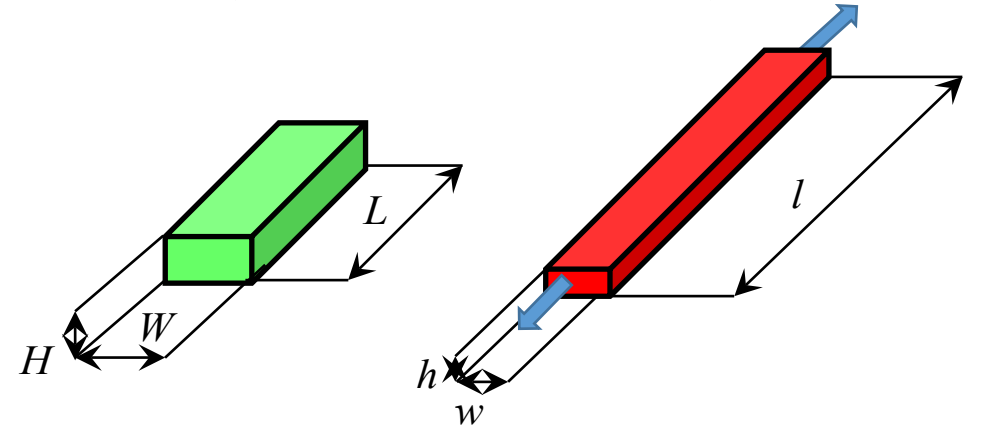
Napětí při jednoosém tahu nestlačitelného materiálu (isochorický děj)

Smluvní napětí \mathbf{P}

$$P = \frac{F}{A} \left[\frac{\text{síla}}{\text{referenční plocha průřezu}} \right]$$

Cauchyovo napětí $\boldsymbol{\sigma}$

$$\sigma = \frac{F}{a} = \frac{F}{\lambda^{-1} A}$$



$$v = V \Rightarrow lwh = LWH \Rightarrow la = LA \Rightarrow a = \frac{L}{l} A \Rightarrow a = \lambda_1^{-1} A$$

2. Piolovo-Kirchhoffovo napětí \mathbf{S}

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}$$

$$\begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-2} \end{pmatrix}$$

$$S = \lambda_1^{-1} P = \lambda_1^{-2} \sigma$$

$$S = \lambda_1^{-1} \frac{F}{A}$$

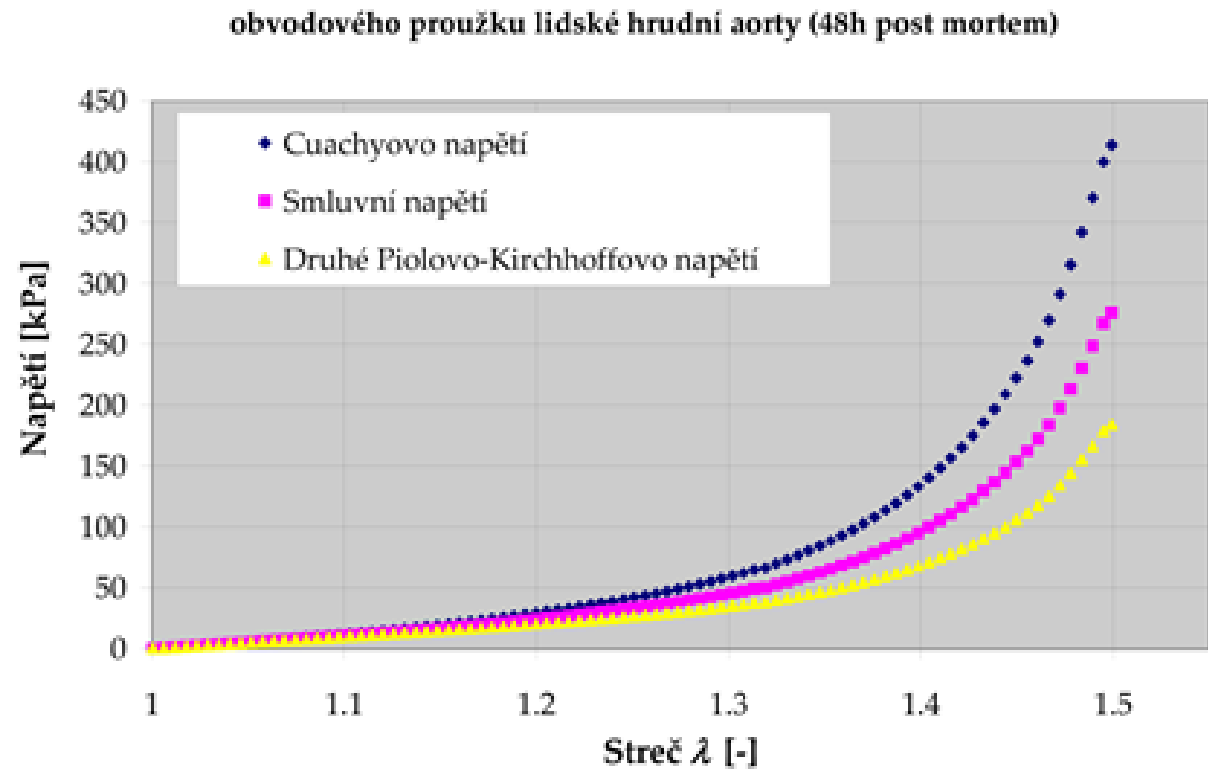
Tenzory napětí \mathbf{S} , \mathbf{P} a $\boldsymbol{\sigma}$

Napětí při jednoosém tahu nestlačitelného materiálu (isochorický děj)

Smluvní napětí \mathbf{P}
$$P = \frac{F}{A} \left[\frac{\text{síla}}{\text{referenční plocha průřezu}} \right]$$

Cauchyovo napětí $\boldsymbol{\sigma}$
$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{F}{a} = \frac{F}{\lambda^{-1} A}$$

2. Piolovo-Kirchhoffovo napětí \mathbf{S}
$$S = \lambda_1^{-1} \frac{F}{A}$$



Konstitutivní rovnice

Konstitutivní rovnice

Konstitutivní rovnice je matematický *předpis vyjadřující vzájemnou závislost stavových proměnných* – v případě pružných těles jde o závislost mezi tenzorem napětí a deformace.

Analogie se stavovou rovnicí v termodynamice plynů

$$pV = nRT$$

„cauchyovská“ elasticita – přímá konstrukce

$$\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{\varepsilon})$$

cauchyovský přístup znamená, že se snažíme zkonstruovat přímou funkční závislost mezi složkami tenzoru deformace a napětí tak, jak tomu je např. v zobecněném Hookeově zákoně

$$\sigma_{11} = E \varepsilon_{11}$$

při jednoosém stavu napjatosti lineárního izotropního materiálu

„cauchyovská“ elasticita – přímá konstrukce

Lineární izotropní materiál při obecném stavu napjatosti (maticový zápis)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

*E... modul pružnosti
ν... Poissonovo číslo*

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

„cauchyovská“ elasticita – přímá konstrukce

Symbolický (tenzorový) zápis

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

μ ... je smykový modul pružnosti (někdy označovaný G)

λ ... je tzv. první Lamého konstanta

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$
$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

„greenovská“ elasticita – hyperelasticita

greenovský přístup znamená, že se snažíme zkonstruovat funkci *hustoty deformační energie* $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ (hustota vzhledem k referenčnímu objemu) a složky tenzoru napětí $\boldsymbol{\sigma}$ získáváme pomocí derivací $W(\boldsymbol{\varepsilon})$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

Hyperelasticita

Konjugované páry napětí a rychlosti *deformace* – jejich skalární součin je roven hustotě výkonu intenzity vnitřních sil (napětí) při deformaci
Odvodí se pomocí bilance mechanické energie

$$w_{int} = J \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{C}}$$

Hyperelasticita

Elastické chování \Rightarrow nulová hustota mařené energie D_{int}

Opět je zformulováno jako hustota výkonu

$$D_{int} = w_{int} - \dot{W}(\mathbf{F}) = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \dot{W}(\mathbf{F}) = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} = \left(\mathbf{P} - \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right) : \dot{\mathbf{F}} = 0$$

$$\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = P_{iK} \dot{F}_{iK} = P_{11} \dot{F}_{11} + P_{12} \dot{F}_{12} + P_{13} \dot{F}_{13} + P_{21} \dot{F}_{21} + P_{22} \dot{F}_{22} + P_{23} \dot{F}_{23} + P_{31} \dot{F}_{31} + P_{32} \dot{F}_{32} + P_{33} \dot{F}_{33}$$

$$\begin{aligned} \dot{W}(\mathbf{F}) &= \frac{d}{dt} W(\mathbf{F}) = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} : \frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} : \frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial W}{\partial F_{iK}} \frac{dF_{iK}}{dt} = \\ &= \frac{\partial W}{\partial F_{11}} \dot{F}_{11} + \frac{\partial W}{\partial F_{12}} \dot{F}_{12} + \frac{\partial W}{\partial F_{13}} \dot{F}_{13} + \frac{\partial W}{\partial F_{21}} \dot{F}_{21} + \frac{\partial W}{\partial F_{22}} \dot{F}_{22} + \frac{\partial W}{\partial F_{32}} \dot{F}_{32} + \frac{\partial W}{\partial F_{31}} \dot{F}_{31} + \frac{\partial W}{\partial F_{32}} \dot{F}_{32} + \frac{\partial W}{\partial F_{33}} \dot{F}_{33} \end{aligned}$$

Hyperelasticita

Elastické chování \Rightarrow nulová hustota mařené energie D_{int}

$$D_{int} = \left(\mathbf{P} - \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right) : \dot{\mathbf{F}} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}$$

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}$$

$$P_{iK} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial F_{iK}}$$

Hyperelasticita

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \frac{\partial W(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} \mathbf{b}$$

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}$$

$$P_{iK} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial F_{iK}}$$

$$\sigma_{ij} = 2J^{-1} \frac{\partial W(\mathbf{b})}{\partial b_{ik}} b_{kj}$$

$$S_{IK} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial E_{IK}} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial C_{IK}}$$

Hyperelasticita

Lineárně pružný materiál (Hookeův) při inženýrských deformacích

$$W = \frac{1}{2} \lambda I_1^2 + 2\mu I_2 = \frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)} I_1^2 + \frac{E}{1+\nu} I_2$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij}$$

$$I_1 = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad I_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2} \varepsilon_{11}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_{22}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_{33}^2 + \varepsilon_{12} \varepsilon_{21} + \varepsilon_{23} \varepsilon_{32} + \varepsilon_{31} \varepsilon_{13}$$

Hyperelasticita

Saint-Venantův–Kirchhoffův lineárně pružný materiál

Přímý převod Hookeova zákona
do konečných deformací

$$[\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}] \rightarrow [\mathbf{E}, \mathbf{S}]$$

$$W = \frac{\lambda^2}{2} \text{tr}^2(\boldsymbol{\varepsilon}) + \mu \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$W = \frac{\lambda}{2} \text{tr}^2(\mathbf{E}) + \mu \text{tr}(\mathbf{E}^2)$$

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = \lambda \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}$$

Tento materiálový model selhává při popisu tlakové napjatosti!

Hyperelasticita

Nerealističnost *Saint-Venantova–Kirchhoffova* lineárně pružného materiálu

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}$$

Uvažujme jednoosou napjatost, když tahová/tlaková síla působí ve směru 1. Čili tenzor 2. Piolova-Kirchhoffova napětí má pouze složku S_{11} .

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(E_{11} + E_{22} + E_{33}) + \frac{E}{1+\nu}E_{11} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(E_{11} - 2\nu E_{11}) + \frac{E}{1+\nu}E_{11} = \\ &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\frac{1}{2}(\lambda_{11}^2 - 1) - 2\nu\frac{1}{2}(\lambda_{11}^2 - 1)\right) + \frac{E}{1+\nu}\frac{1}{2}(\lambda_{11}^2 - 1) = \frac{E\nu(\lambda_{11}^2 - 1)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\frac{1}{2} - \nu\right) + \frac{E}{2(1+\nu)}(\lambda_{11}^2 - 1) = \\ &= (\lambda_{11}^2 - 1)\left(\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\frac{1}{2} - \nu\right) + \frac{E}{2(1+\nu)}\right) = (\lambda_{11}^2 - 1)\frac{2E\nu\left(\frac{1}{2} - \nu\right) + E(1-2\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)} = \\ &= (\lambda_{11}^2 - 1)\frac{E\nu(1-2\nu) + E(1-2\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)} = E(\lambda_{11}^2 - 1)\frac{1-\nu-2\nu^2}{2(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{E}{2}(\lambda_{11}^2 - 1) \end{aligned}$$

Hyperelasticita

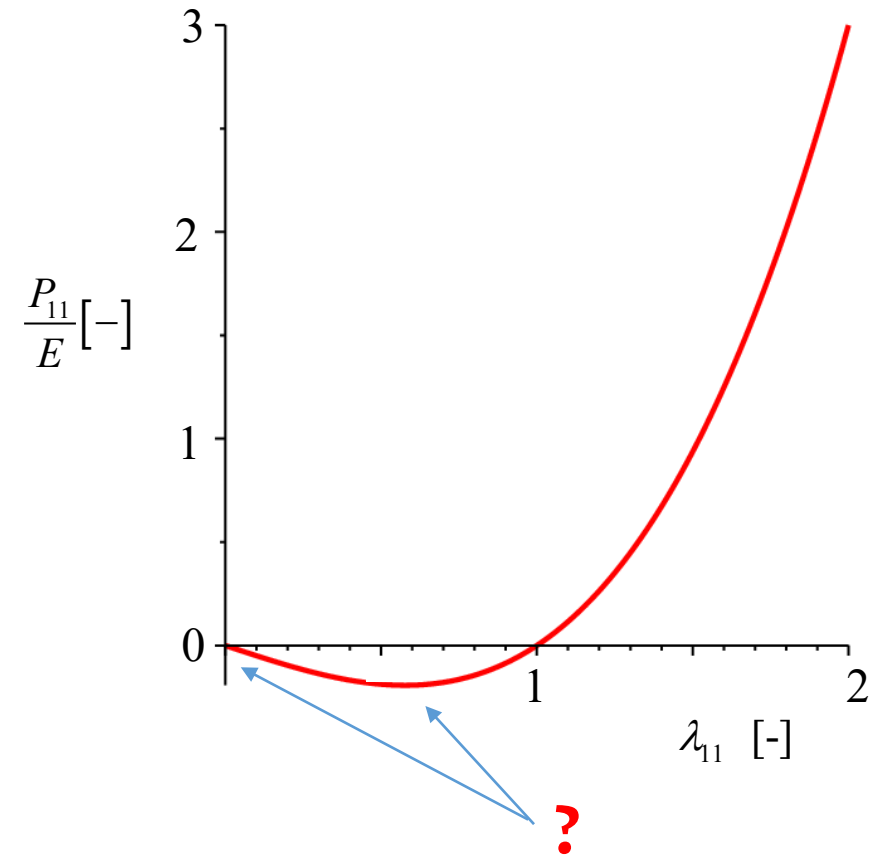
Nerealističnost *Saint-Venantova–Kirchhoffova* lineárně pružného materiálu
- jednoosá napjatost S_{11}

$$S_{11} = \frac{1}{2} E (\lambda_{11}^2 - 1)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{FS}$$

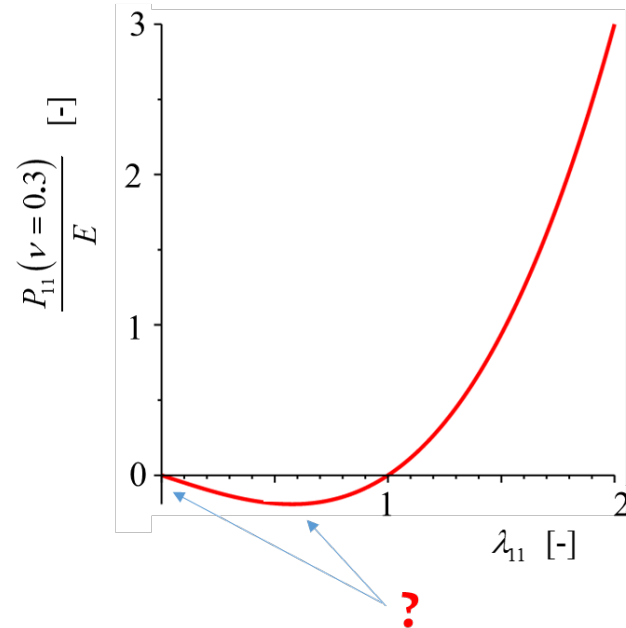
$$\mathbf{P} = \mathbf{FS} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11} S_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{11} = \frac{1}{2} E \lambda_{11} (\lambda_{11}^2 - 1)$$



Hyperelasticita

Racionalita W



$$W(\mathbf{I}) = 0 \quad W(\mathbf{F}) \geq 0 \quad \mathbf{P}(\mathbf{I}) = \frac{\partial W(\mathbf{I})}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{0} \quad \frac{\partial^2 W(\mathbf{I})}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}} > \mathbf{0}$$

V (beznapětové) referenční konfiguraci je **energie 0**, během deformace je **energie nezáporná**, v (beznapětové) referenční konfiguraci je **tenzor napětí nulový** a jeho druhé derivace (**tenzor pružnosti**, někdy též tuhosti) **nezáporný**

$$J = \det(\mathbf{F}) \rightarrow \infty \Rightarrow W(\mathbf{F}) \rightarrow \infty$$

$$J = \det(\mathbf{F}) \rightarrow 0^+ \Rightarrow W(\mathbf{F}) \rightarrow \infty$$

$$W(\mathbf{QF}) = W(\mathbf{F})$$

Zde \mathbf{Q} je nějaký ortogonální tenzor ($\det(\mathbf{Q}) = \pm 1$, $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$) který představuje rotaci nebo zrcadlení. **Ani rotace, ani zrcadlení nevedou ke změně deformační energie uložené v materiálu**

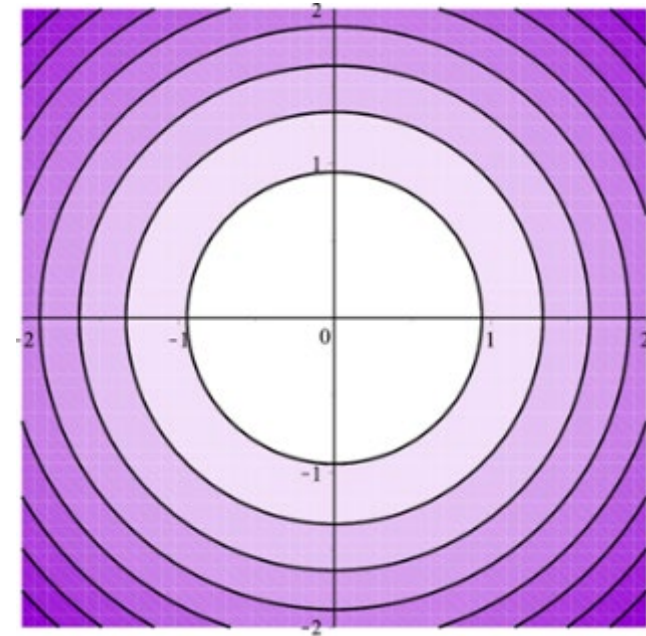
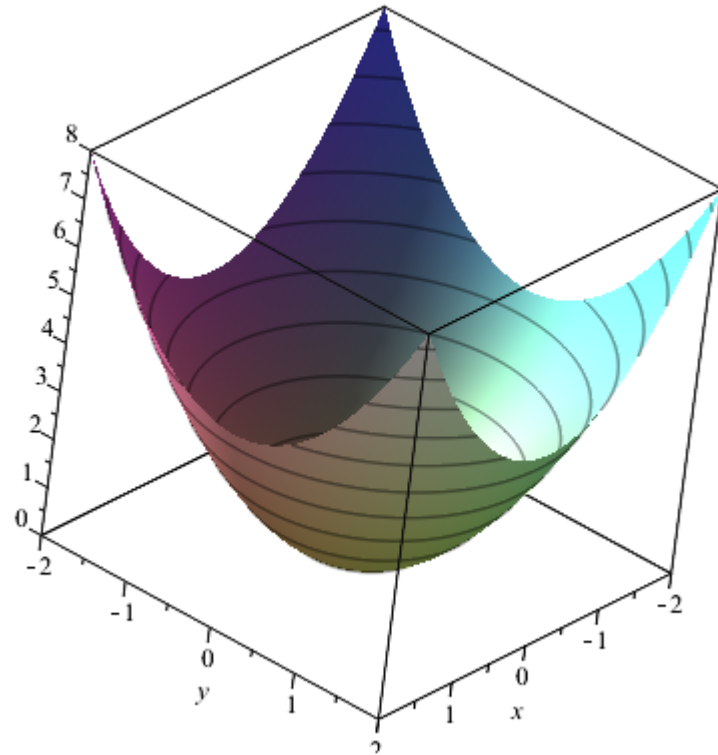
$$W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{U}) = W(\mathbf{C}) = W(\mathbf{E})$$

Důsledky předchozího při volbě $\mathbf{Q} = \mathbf{R}$, když $\mathbf{F} = \mathbf{RU}$

Hyperelasticita

Racionalita W

Konvexita
(polykonvexita)

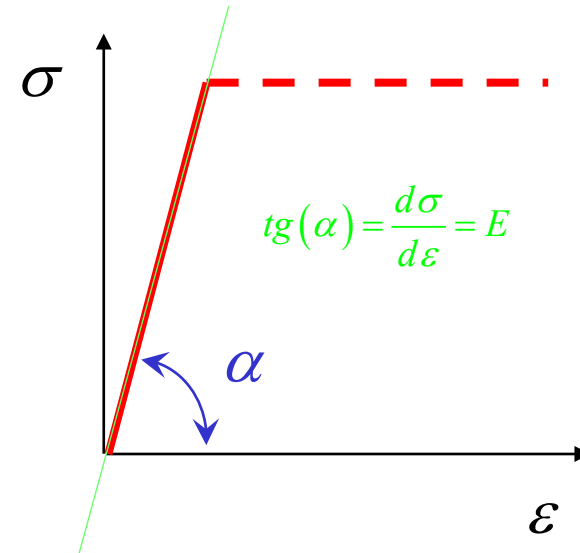


- Zajišťuje jednoznačnost a existenci řešení linearizované vlnové rovnice
- Zajišťuje existenci globálního minima
- Zajišťuje kladný přírůstek napětí při kladném přírůstku deformace
- Je v rozporu s chováním pozorovaným při ztrátě stability deformace

Hyperelasticita

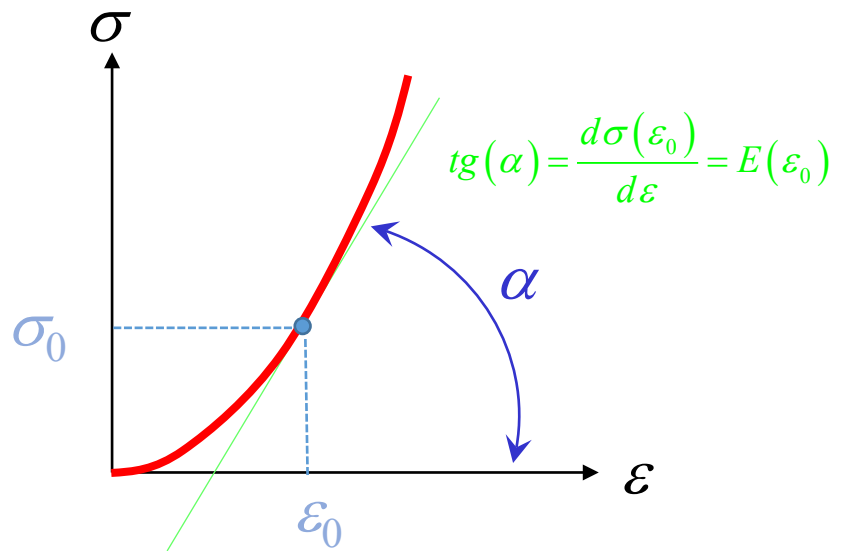
Tenzor pružnosti (též říkáme: tuhosti, elasticity, elastických modulů)

$$E = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (E \varepsilon) = \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \left(\frac{1}{2} E \varepsilon^2 \right) = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2}$$



Hyperelasticita

Tenzor pružnosti (tuhosti, elasticity, elastických modulů)



$$E(\varepsilon) = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} \neq \textit{konst.}$$

Hyperelasticita

Tenzory pružnosti (tuhosti, elasticity,...)

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial^2 W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}}$$

$$A_{iKjL} = \frac{\partial P_{iK}}{\partial F_{jL}} = \frac{\partial^2 W}{\partial F_{jL} \partial F_{iK}}$$

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial^2 W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} = 4 \frac{\partial^2 W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}}$$

$$C_{KLMN} = \frac{\partial S_{KL}}{\partial E_{MN}} = 2 \frac{\partial S_{KL}}{\partial C_{MN}} = \frac{\partial^2 W}{\partial E_{MN} \partial E_{KL}} = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial C_{MN} \partial C_{KL}}$$

$$\mathbf{c} = 2 \mathbf{b} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} = 4J^{-1} \mathbf{b} \frac{\partial^2 W(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b} \partial \mathbf{b}} \mathbf{b}$$

$$c_{ijkl} = 4J^{-1} b_{im} \frac{\partial^2 W}{\partial b_{mj} \partial b_{kn}} b_{nl}$$

$$c_{ijkl} = J^{-1} F_{iK} F_{jL} F_{kM} F_{lN} C_{KLMN}$$

Hyperelasticita

HYPERELASTICKÝ \Leftrightarrow EXISTUJE ELASTICKÝ POTENCIÁL W \Leftrightarrow

\Leftrightarrow PRUŽNÝ \Leftrightarrow $C_{IJKL} = C_{KLIJ}$

tzv. hlavní symetrie

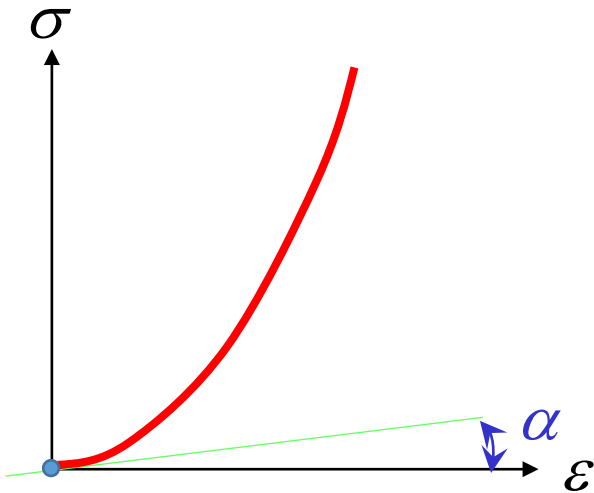
Implicitně předpokládáme adiabatický izotermální děj

Je-li materiál izotropní, existuje i tzv. vedlejší symetrie tenzoru pružnosti:

$$C_{IJKL} = C_{JIKL} = C_{IJLK}$$

Hyperelasticita

Počáteční modul pružnosti pro látku v pevné fázi musí být kladný



$$E(\varepsilon = 0) = \frac{d\sigma(\varepsilon = 0)}{d\varepsilon} = \operatorname{tg}(\alpha) > 0$$

$$\frac{\partial^2 W(\mathbf{I})}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}} > \mathbf{0}$$

Nestlačitelný hyperelastický materiál

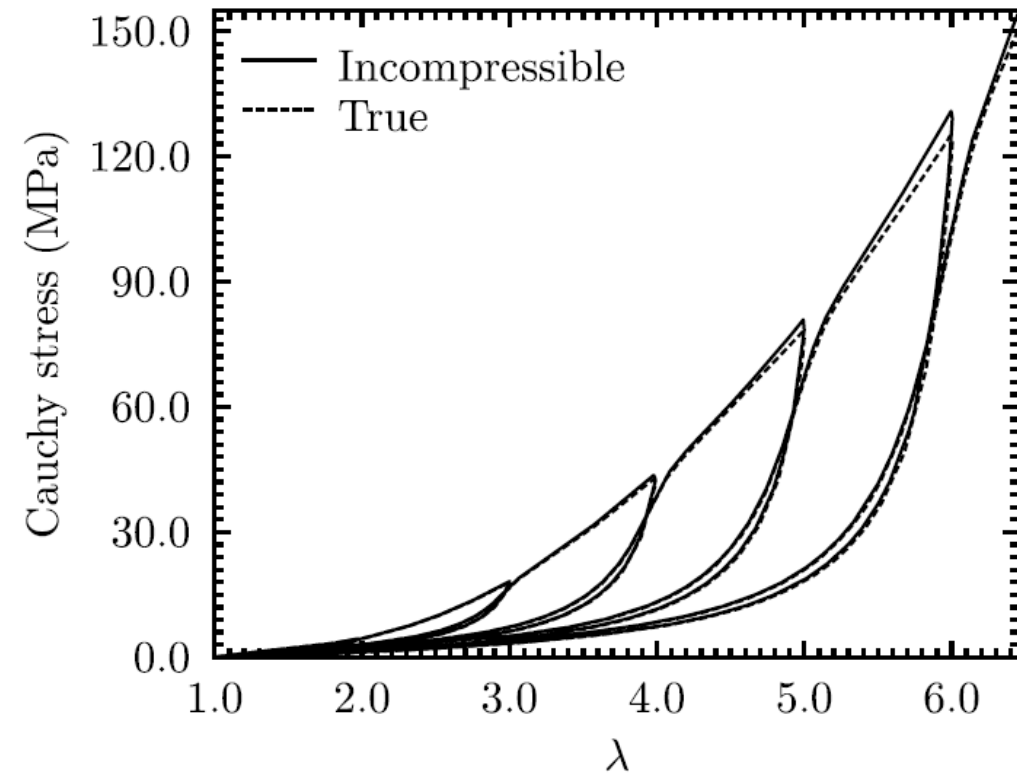
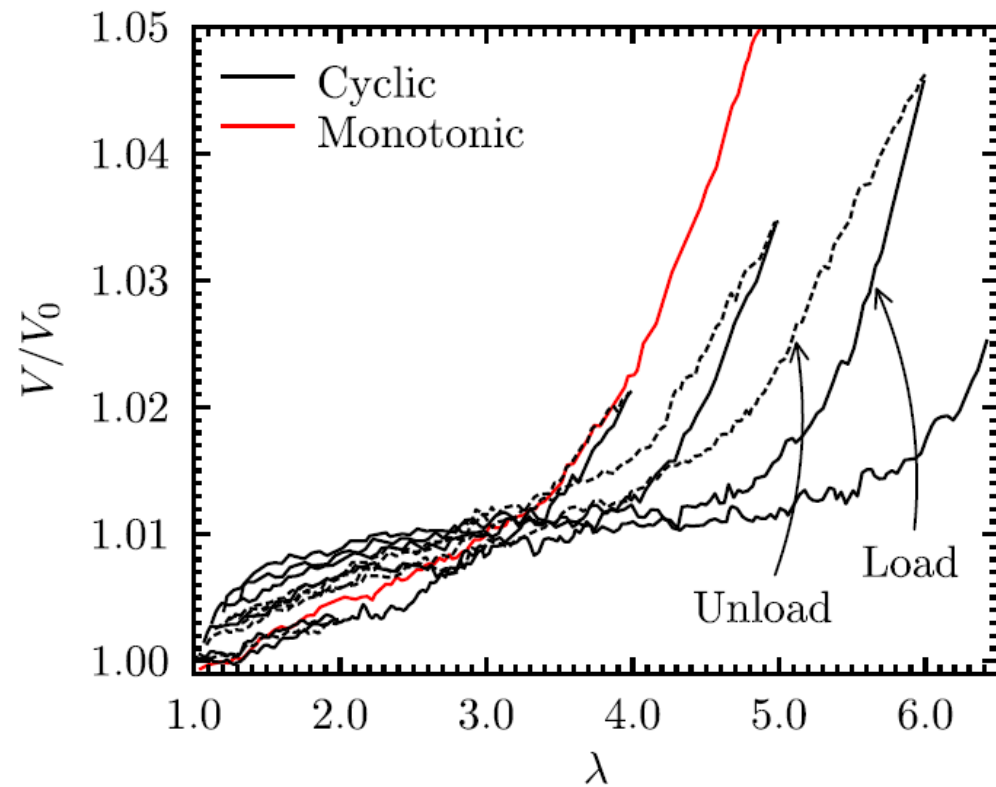
Pro deformace měkkých tkání, díky vysokému obsahu vody, často předpokládáme, že v rozsahu fyziologického zatěžování nemění svůj objem

Podobně i chování elastomerních materiálů (kaučuky) bývá pokládáno v „určitým rozsahu zatěžování“ za nestlačitelné

- v polymerní síti má elastické chování povahu vnitřní reakce na změny konfigurace sítě, tj. **změny entropie**
- vnitřní síly vznikající jako reakce na **změnu objemu spojujeme s interakcí molekul mezi sebou**, což je energeticky mnohem náročnější
- Velmi zjednodušeně: konají-li vnější síly práci, ta se projeví spíše přeuspořádáním makromolekulárních řetězců vůči sobě, než stlačováním řetězců mezi sebou

Nestlačitelný hyperelastický materiál

Experimentální data pro styren-butadienový kaučuk při jednoosém tahu



Merckel, Y., Diani, J., Brieu, M., & Caillard, J. (2013). Constitutive modeling of the anisotropic behavior of mullins softened filled rubbers. *Mechanics of Materials*, 57, 30-41.

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167663612001834#>

Nestlačitelný hyperelastický materiál

Nemění-li materiál objem, jsou posuvy, na kterých by složky hydrostatické napjatosti vykonaly práci, nulové.

Tudíž z $W(\mathbf{F})$ nelze získat složky hydrostatické

napjatosti pomocí operace $\frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}$

Nestlačitelný hyperelastický materiál

Postupujeme metodou neurčitého multiplikátoru p . Hustotu deformační energie W modifikujeme do tvaru

$$W = W(\mathbf{F}) - p(J - 1) \quad \text{kde } J = 1$$

Konstitutivní rovnice pak mají tvar:

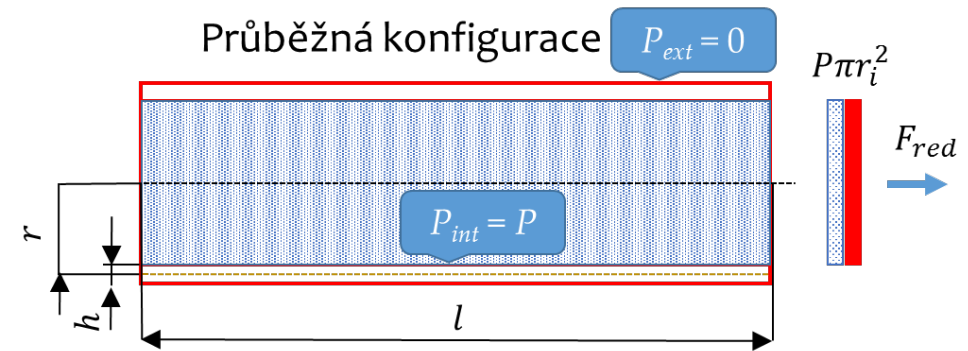
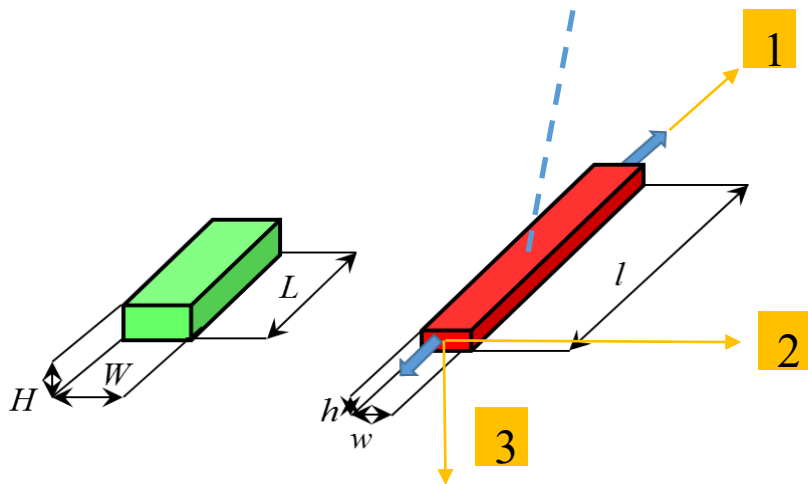
$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T \quad \mathbf{P} = -p\mathbf{F}^{-T} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \quad \mathbf{S} = -p\mathbf{C}^{-1} + 2\frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = -p(2\mathbf{E} + \mathbf{I})^{-1} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}$$

p se určí pomocí **silové** okrajové podmínky

Nestlačitelný hyperelastický materiál

p se určí pomocí silové okrajové podmínky

$$\sigma_{33} = 0 \Rightarrow \lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} - p = 0$$



$$\sigma_{rr}(r = r_i) = -P \Rightarrow \lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} - p = -P \Big|_{r = r_i}$$

Modely pro W

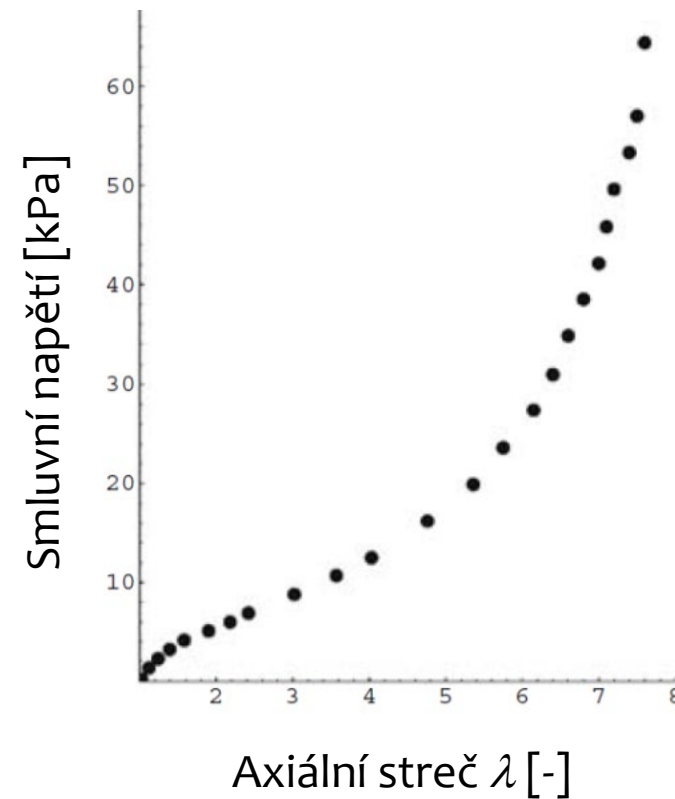
Nyní se konečně dostaneme k tomu, abychom projasnili, co se může skrývat pod výrazem typu

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda}$$

W musí samozřejmě mít takovou matematickou formu, aby odpovídalo pozorování $\frac{\partial W}{\partial \lambda}$

Modely pro W

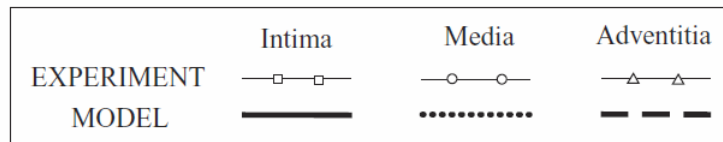
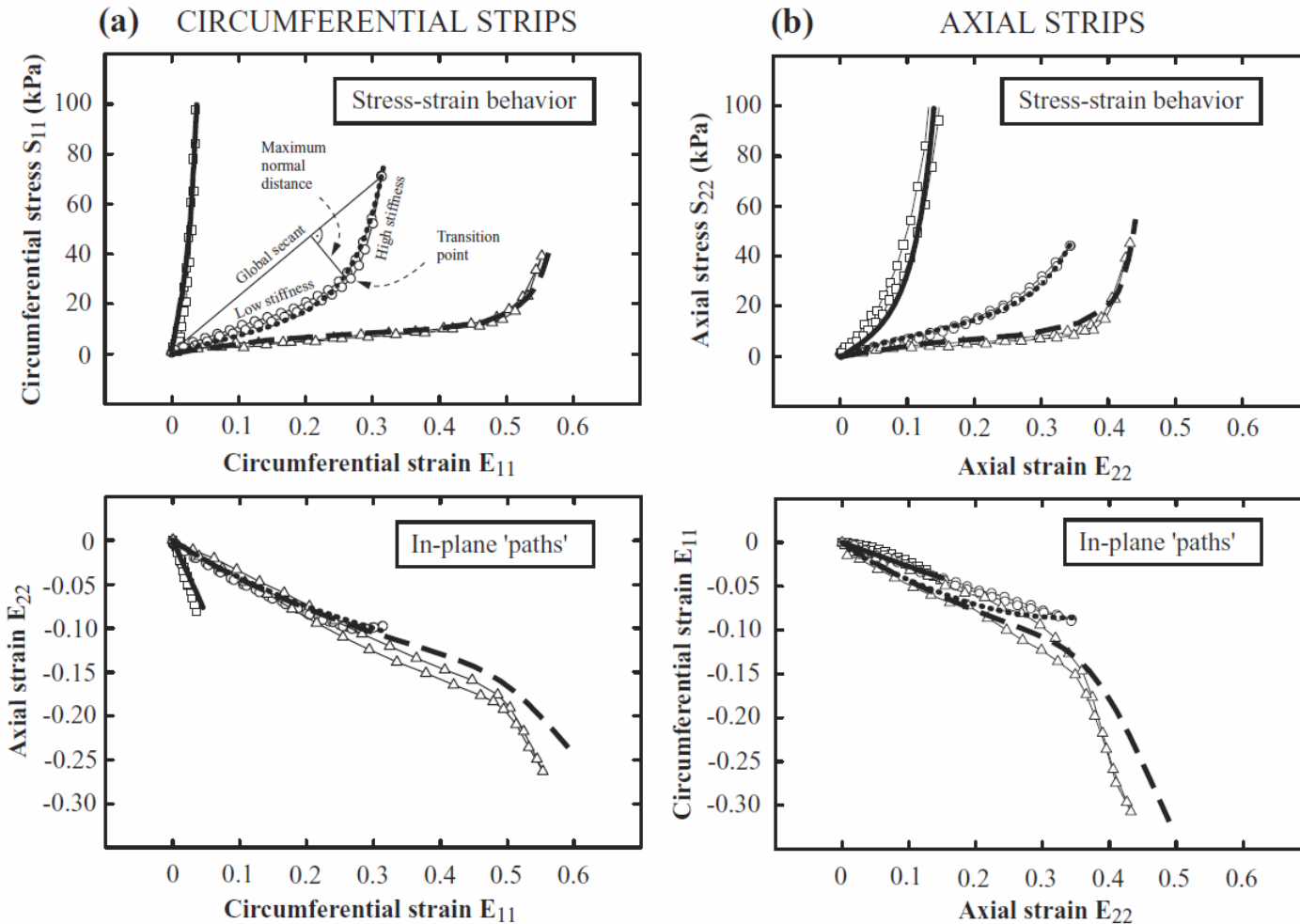
Jednoosá tahová zkouška latexu (LRG Treloar 1944)



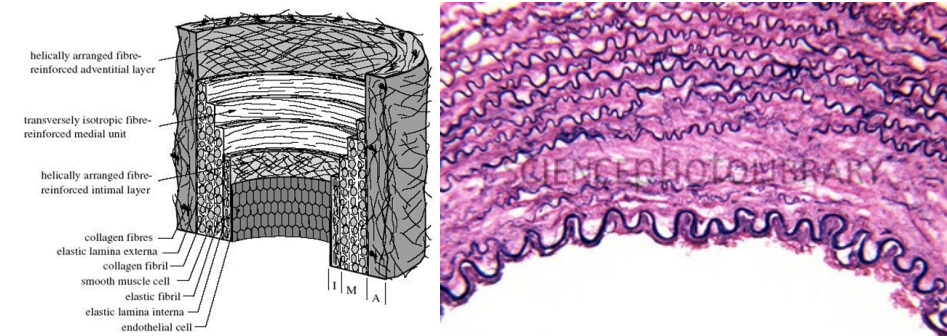
[http://en.wikipedia.org/wiki/L. R. G. Treloar](http://en.wikipedia.org/wiki/L._R._G._Treloar)

http://books.google.cz/books/about/The_Physics_of_Rubber_Elasticity.html?id=-iyDehYpoAQC&redir_esc=y

Modely pro W



Výsledky jednoosé tahové zkoušky s vrstvami lidské břišní aorty (F80)



Gasser, T. C., Ogden, R. W., & Holzapfel, G. A. (2006). Hyperelastic modelling of arterial layers with distributed collagen fibre orientations. *Journal of the Royal Society Interface*, 3(6), 15-35. <http://rsif.royalsocietypublishing.org/content/3/6/15>

http://www.sciencephoto.com/image/115279/530wm/CO051117-Human_artery_wall_cross-section_LM-SPL.jpg

Holzapfel, G. A. (2006). Determination of material models for arterial walls from uniaxial extension tests and histological structure. *Journal of Theoretical Biology*, 238(2), 290-302.

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022519305002080>

Modely pro W

Hledáme vhodný tvar W jakožto (skalární) funkce tenzoru deformace (\mathbf{C} , \mathbf{E} , \mathbf{U} či jiného)

$$W = W(\mathbf{C})$$

anebo, a to ještě častěji, hledáme tvar W jakožto (skalární) funkce (hlavních izotropních) invariantů \mathbf{C} (nebo jiného tenzoru deformace)

$$W = W(I_1, I_2, I_3)$$

Modely pro W

S přijetím předpokladu o izochorické deformaci

$$J = 1 \Rightarrow I_3 = 1$$

$$W = W(I_1, I_2)$$

Začneme s elementárními funkcemi (polynomy, racionální funkce, exponenciální funkce, logaritmická funkce) za splnění racionálních požadavku diskutovaných výše.

Modely pro W

Neo-hookeovský materiál (40. léta)

- Jde o elementární model, který v zásadě reprodukuje lineární chování při konečných deformacích
- Tento model je možné interpretovat pomocí statistické fyziky polymerních řetězců, když předpokládáme gaussovskou hustotu pravděpodobnosti pro rozložení koncových poloh polymerních řetězců při deformaci

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$$

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

$$I_2 = \frac{1}{2}[\text{tr}^2(\mathbf{C}) - \text{tr}(\mathbf{C}^2)] = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2$$

$$I_3 = \det(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2$$

Modely pro W

Neo-hookeovský materiál

$$W = \frac{\mu}{2} (I_1 - 3)$$

$$\mu = \frac{NkT}{V} = nkT = \frac{\rho RT}{M} > 0$$

μ – počáteční smykový modul pružnosti

N – počet řetězců v objemu

V – objem vzorku

n – objemová hustota řetězců

k – Boltzmannova konstanta

T – termodynamická teplota

ρ – hustota hmotnosti

R – univerzální plynová konstanta

M_s – průměrná molární hmotnost řetězce

Analogie s ideálním plynem

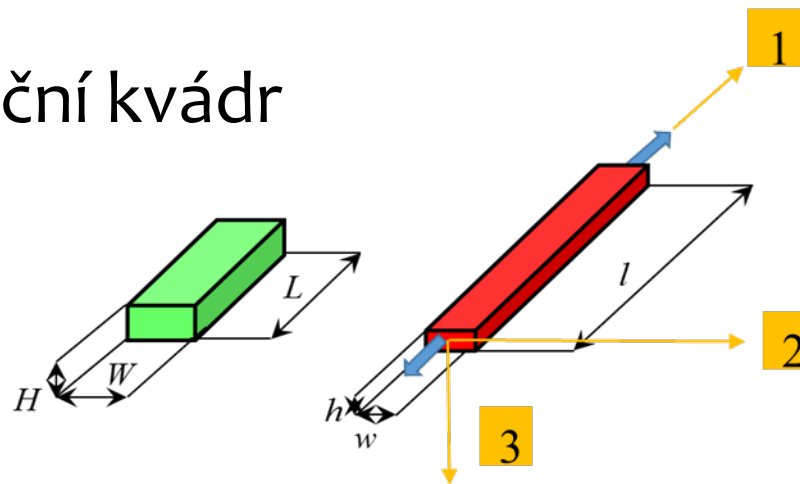
$$P = \frac{nRT}{V} = \frac{\rho RT}{M}$$

Modely pro W

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3)$$

Neo-hookeovský nestlačitelný materiál při jednoosém tahu

(1) Kinematika = at' se referenční kvádr mění na zdeformovaný kvádr (tj. žádné zkosity)



$$\begin{aligned}x_1 &= \lambda_1 X_1 \\x_2 &= \lambda_2 X_2 \\x_3 &= \lambda_3 X_3\end{aligned}$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Modely pro W

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3)$$

Neo-hookeovský nestlačitelný materiál při jednoosém tahu

(2) Vyjádření $I_1 = \text{trace}(\mathbf{C})$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{11}^2 + F_{21}^2 + F_{31}^2 & F_{11}F_{12} + F_{21}F_{22} + F_{31}F_{32} & F_{11}F_{13} + F_{21}F_{23} + F_{31}F_{33} \\ F_{11}F_{12} + F_{21}F_{22} + F_{31}F_{32} & F_{12}^2 + F_{22}^2 + F_{32}^2 & F_{12}F_{13} + F_{22}F_{23} + F_{32}F_{33} \\ F_{11}F_{13} + F_{21}F_{23} + F_{31}F_{33} & F_{12}F_{13} + F_{22}F_{23} + F_{32}F_{33} & F_{13}^2 + F_{23}^2 + F_{33}^2 \end{pmatrix}$$

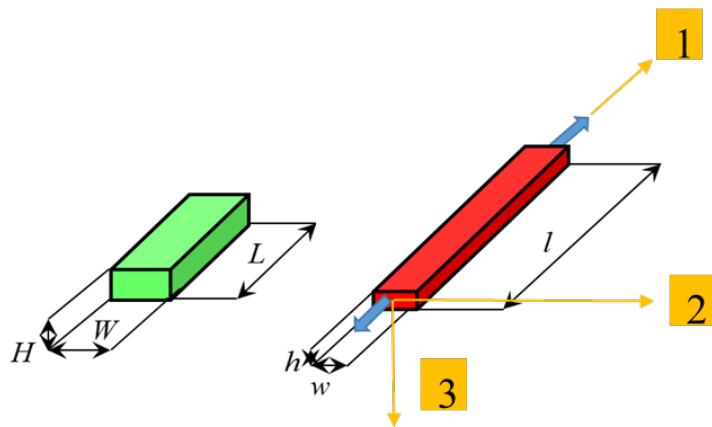
$$I_1 = \text{trace}(\mathbf{C}) = F_{11}^2 + F_{21}^2 + F_{31}^2 + F_{12}^2 + F_{22}^2 + F_{32}^2 + F_{13}^2 + F_{23}^2 + F_{33}^2$$

Modely pro W

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3)$$

Neo-hookeovský nestlačitelný materiál při jednoosém tahu

(2) Vyjádření $I_1 = \text{trace}(\mathbf{C}) = F_{11}^2 + F_{21}^2 + F_{31}^2 + F_{12}^2 + F_{22}^2 + F_{32}^2 + F_{13}^2 + F_{23}^2 + F_{33}^2$



$$x_1 = \lambda_1 X_1$$

$$x_2 = \lambda_2 X_2$$

$$x_3 = \lambda_3 X_3$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{11} & 0 & 0 \\ 0 & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$I_1 = \text{trace}(\mathbf{C}) = F_{11}^2 + F_{22}^2 + F_{33}^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

Modely pro W

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3)$$

Neo-hookeovský nestlačitelný materiál při jednoosém tahu

(3) Konstitutivní rovnice
$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T - p \mathbf{I}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial F_{11}} & \frac{\partial W}{\partial F_{12}} & \frac{\partial W}{\partial F_{13}} \\ \frac{\partial W}{\partial F_{21}} & \frac{\partial W}{\partial F_{22}} & \frac{\partial W}{\partial F_{23}} \\ \frac{\partial W}{\partial F_{31}} & \frac{\partial W}{\partial F_{32}} & \frac{\partial W}{\partial F_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{11} & F_{21} & F_{31} \\ F_{12} & F_{22} & F_{32} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{pmatrix} - p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial F_{11}} F_{11} + \frac{\partial W}{\partial F_{12}} F_{12} + \frac{\partial W}{\partial F_{13}} F_{13} - p & \frac{\partial W}{\partial F_{11}} F_{21} + \frac{\partial W}{\partial F_{12}} F_{22} + \frac{\partial W}{\partial F_{13}} F_{23} & \frac{\partial W}{\partial F_{11}} F_{31} + \frac{\partial W}{\partial F_{12}} F_{32} + \frac{\partial W}{\partial F_{13}} F_{33} \\ \frac{\partial W}{\partial F_{21}} F_{11} + \frac{\partial W}{\partial F_{22}} F_{12} + \frac{\partial W}{\partial F_{23}} F_{13} & \frac{\partial W}{\partial F_{21}} F_{21} + \frac{\partial W}{\partial F_{22}} F_{22} + \frac{\partial W}{\partial F_{23}} F_{33} - p & \frac{\partial W}{\partial F_{21}} F_{31} + \frac{\partial W}{\partial F_{22}} F_{32} + \frac{\partial W}{\partial F_{23}} F_{33} \\ \frac{\partial W}{\partial F_{31}} F_{11} + \frac{\partial W}{\partial F_{32}} F_{12} + \frac{\partial W}{\partial F_{33}} F_{13} & \frac{\partial W}{\partial F_{31}} F_{21} + \frac{\partial W}{\partial F_{32}} F_{22} + \frac{\partial W}{\partial F_{33}} F_{23} & \frac{\partial W}{\partial F_{31}} F_{31} + \frac{\partial W}{\partial F_{32}} F_{32} + \frac{\partial W}{\partial F_{33}} F_{33} - p \end{pmatrix}$$

Modely pro W

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3)$$

Neo-hookeovský nestlačitelný materiál při jednoosém tahu

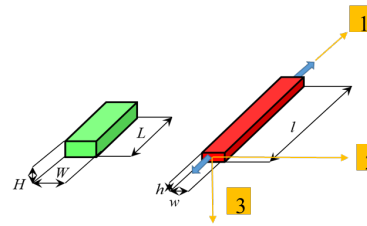
(3) Konstitutivní rovnice $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T - p \mathbf{I}$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial F_{11}} F_{11} - p & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial W}{\partial F_{22}} F_{22} - p & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial W}{\partial F_{33}} F_{33} - p \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - p & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - p & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} - p \end{pmatrix}$$

Modely pro W

Neo-hookeovský nestlačitelný materiál při jednoosém tahu

(3) Konstitutivní rovnice



$$\sigma_1 = \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - p$$

$$\sigma_2 = \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - p$$

$$\sigma_3 = \lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} - p$$

$$\sigma_1 = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) - p = \mu \lambda_1^2 - p$$

$$\sigma_2 = \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \lambda_2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) - p = \mu \lambda_2^2 - p$$

$$\sigma_3 = \lambda_3 \frac{\partial}{\partial \lambda_3} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) - p = \mu \lambda_3^2 - p$$

Nestlačitelnost v napětích
(silová okrajová podmínka pro p)

$$\sigma_3 = 0 \Rightarrow p = \lambda_3^2 \mu$$

Nestlačitelnost v deformaci

$$J = \sqrt{\det(\mathbf{C})} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad \text{Isotropie} \quad \lambda_2 = \lambda_3$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$$

$$\sigma_1 = \mu \lambda_1^2 - \frac{\mu}{\lambda_1}$$

Modely pro W

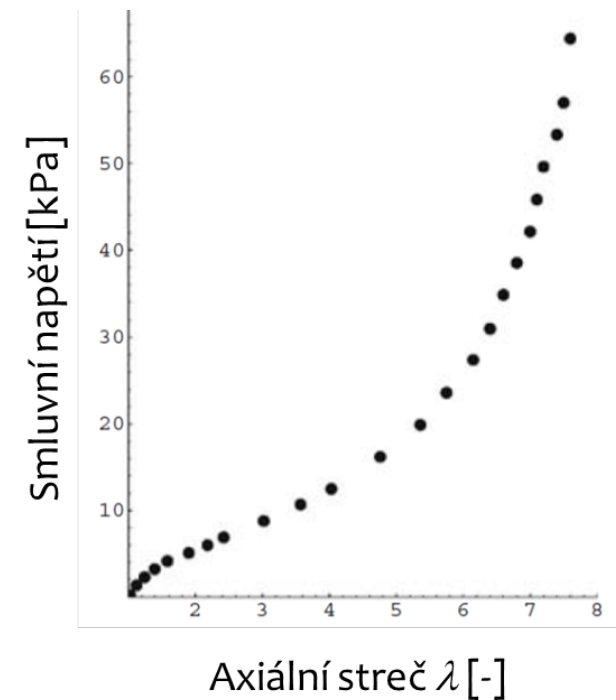
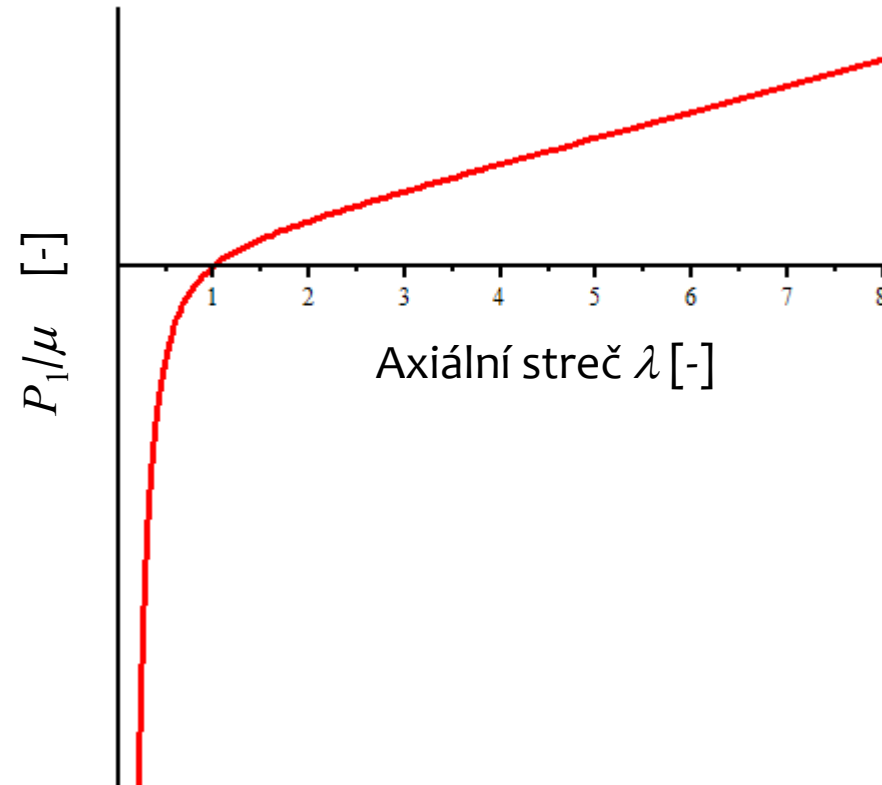
$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3)$$

Neo-hookeovský nestlačitelný materiál při jednoosém tahu

$$\sigma_1 = \mu \lambda_1^2 - \frac{\mu}{\lambda_1}$$

$$P_1 = \mu \lambda_1 - \frac{\mu}{\lambda_1^2}$$

$$S_1 = \mu - \frac{\mu}{\lambda_1^3}$$

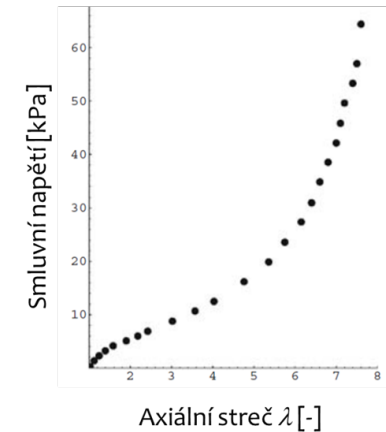
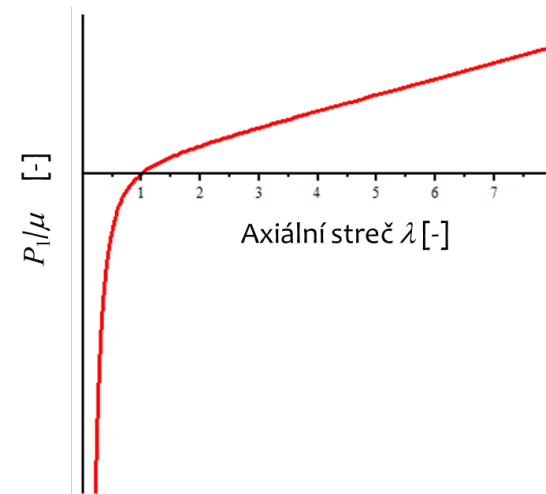


Modely pro W

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3)$$

Neo-hookeovský nestlačitelný materiál při jednoosém tahu

- Neo-hookevský model nedokáže zachytit „large strain stiffening“
- Tato skutečnost souvisí s tím, že při velkých deformacích nelze použít gaussovskou hustotu pravděpodobnosti pro popis polohy koncových bodů molekulárních řetězců



Modely pro W

Mooneyův-Rivlinův model 40. léta

$$W = \frac{\mu}{2} \left[\alpha (I_1 - 3) + (1 - \alpha) (I_2 - 3) \right]$$

$$\mu > 0 \quad \wedge \quad 0 < \alpha \leq 1$$

$$W = c_1 (I_1 - 3) + c_2 (I_2 - 3)$$



http://en.wikipedia.org/wiki/Melvin_Mooney

Melvin Mooney (1893-1968), americký fyzik s výsledky v oblasti mechanických vlastností pryží

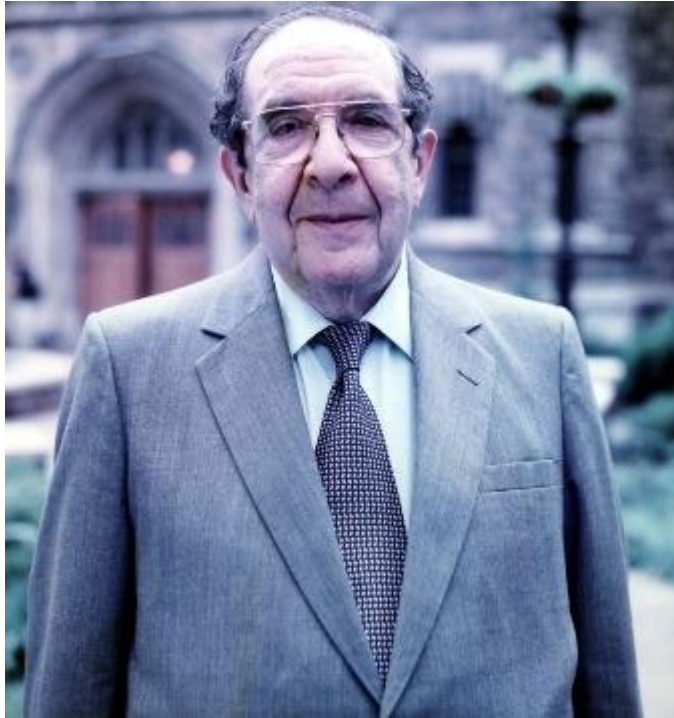
$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$$

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[\text{tr}^2(\mathbf{C}) - \text{tr}(\mathbf{C}^2) \right] = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2$$

$$I_3 = \det(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2$$

Ronald Rivlin a nelineární kontinuum



- Ronald Samuel Rivlin byl osobností, která zásadně formovala aparát nelineární mechaniky kontinua
- matematický popis nelineárních materiálů, a ne-newtonských kapalin
- absolvent St John's College Cambridge
- působil na Brown University, Lehigh University
- získal celou řadu ocenění - Timošenkovu, Goodyearovu, von Karmanovu medaili

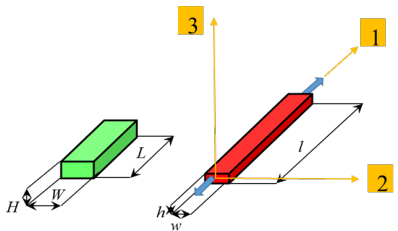
Ronald Samuel Rivlin (1915-2005),
narozen v UK, stal se v r. 1955
občanem USA

http://www.lehigh.edu/engineering/about/alumni/bio_rivlin_r.html

http://en.wikipedia.org/wiki/Ronald_Rivlin

Modely pro W

Mooney-Rivlin model $W = \frac{\mu}{2} [\alpha (I_1 - 3) + (1 - \alpha)(I_2 - 3)]$ $\sigma = -p\mathbf{I} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T$



$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - p & \sigma_1 &= \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left\{ \frac{\mu}{2} [\alpha (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + (1 - \alpha)(\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 - 3)] \right\} - p = \mu \lambda_1 [\alpha \lambda_1 + (1 - \alpha)(\lambda_1 \lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_3^2)] - p \\ \sigma_2 &= \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - p & \sigma_2 &= \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \left\{ \frac{\mu}{2} [\alpha (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + (1 - \alpha)(\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 - 3)] \right\} - p = \mu \lambda_2 [\alpha \lambda_2 + (1 - \alpha)(\lambda_2 \lambda_1^2 + \lambda_2 \lambda_3^2)] - p \\ \sigma_3 &= \lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} - p & \sigma_3 &= \lambda_3 \frac{\partial}{\partial \lambda_3} \left\{ \frac{\mu}{2} [\alpha (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + (1 - \alpha)(\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 - 3)] \right\} - p = \mu \lambda_3 [\alpha \lambda_3 + (1 - \alpha)(\lambda_3 \lambda_1^2 + \lambda_3 \lambda_2^2)] - p \end{aligned}$$

$$J = \sqrt{\det(\mathbf{C})} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad \wedge \quad \lambda_2 = \lambda_3 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \quad \sigma_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \mu \lambda_3 [\alpha \lambda_3 + (1 - \alpha)(\lambda_3 \lambda_1^2 + \lambda_3 \lambda_2^2)]$$

$$\sigma_1 = \alpha \mu \lambda_1^2 + \mu (1 - \alpha) \lambda_1 - \alpha \mu \lambda_1^{-1} + \mu (\alpha - 1) \lambda_1^{-2}$$

Modely pro W

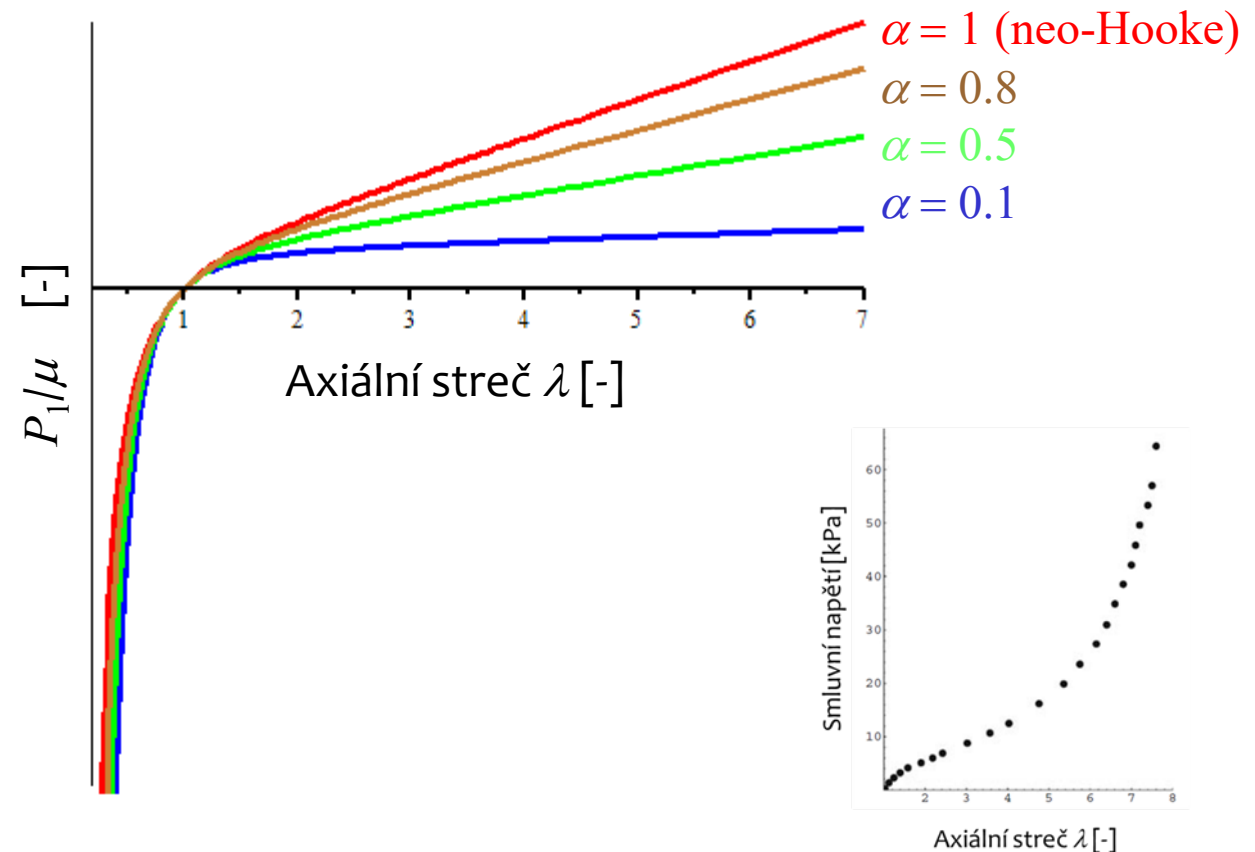
Mooney-Rivlin model

$$\sigma_1 = \alpha \mu \lambda_1^2 + \mu(1-\alpha) \lambda_1 - \alpha \mu \lambda_1^{-1} + \mu(\alpha-1) \lambda_1^{-2}$$

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}$$

$$P_1 = \alpha \mu \lambda_1 + \mu(1-\alpha) - \alpha \mu \lambda_1^{-2} + \mu(\alpha-1) \lambda_1^{-3}$$

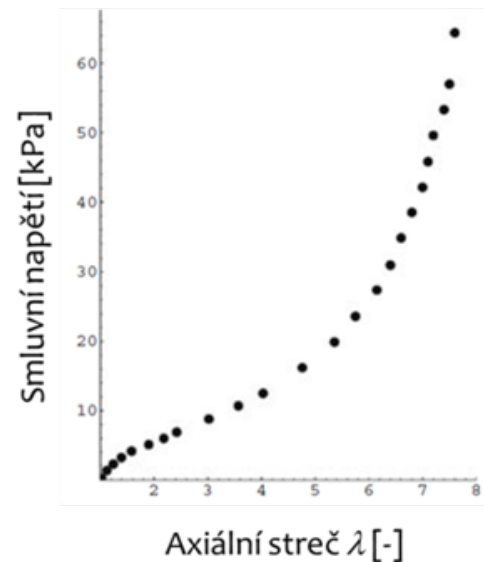
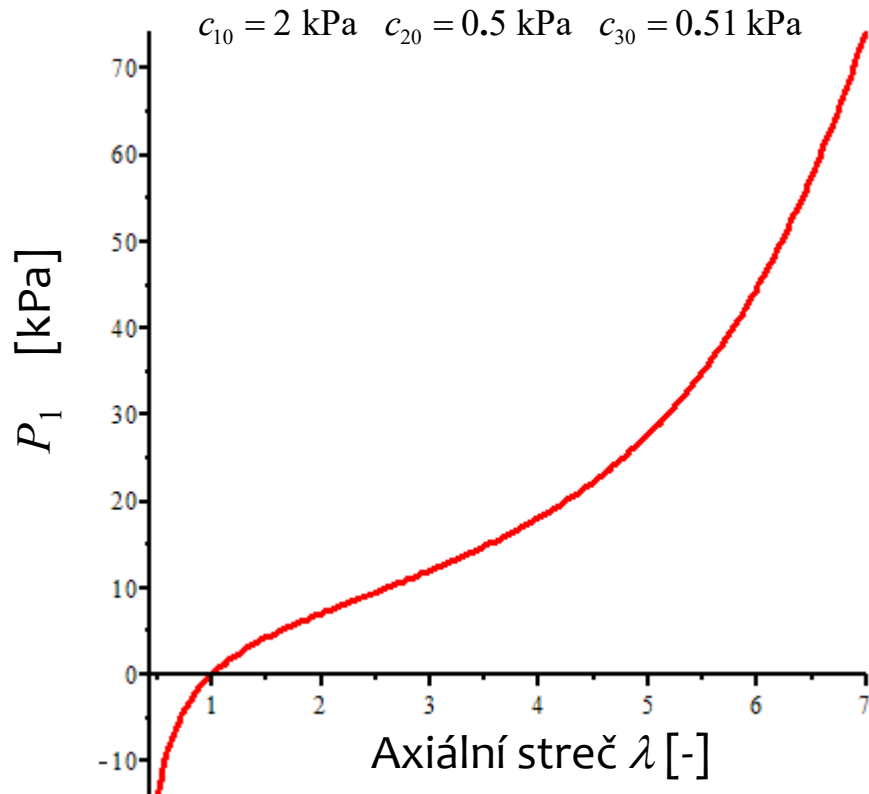
$$W = \frac{\mu}{2} [\alpha(I_1 - 3) + (1-\alpha)(I_2 - 3)]$$



Modely pro W

Zobecněný Rivlinův model začátek 50. let

$$W = \sum_{i,j=0}^n c_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad c_{00} = 0$$



$$P_1 = \left(6\lambda_1^5 - 36\lambda_1^3 + 18\lambda_1^2 + 54\lambda_1 - 36 - \frac{24}{\lambda_1^4} + \frac{72}{\lambda_1^3} - \frac{54}{\lambda_1^2} \right) c_3 + \left(4\lambda_1^3 - 12\lambda_1 + 4 - \frac{8}{\lambda_1^3} + \frac{12}{\lambda_1^2} \right) c_2 + \left(2\lambda_1 - \frac{2}{\lambda_1^2} \right) c_1$$

Modely pro W

Ogdenův model (1972)

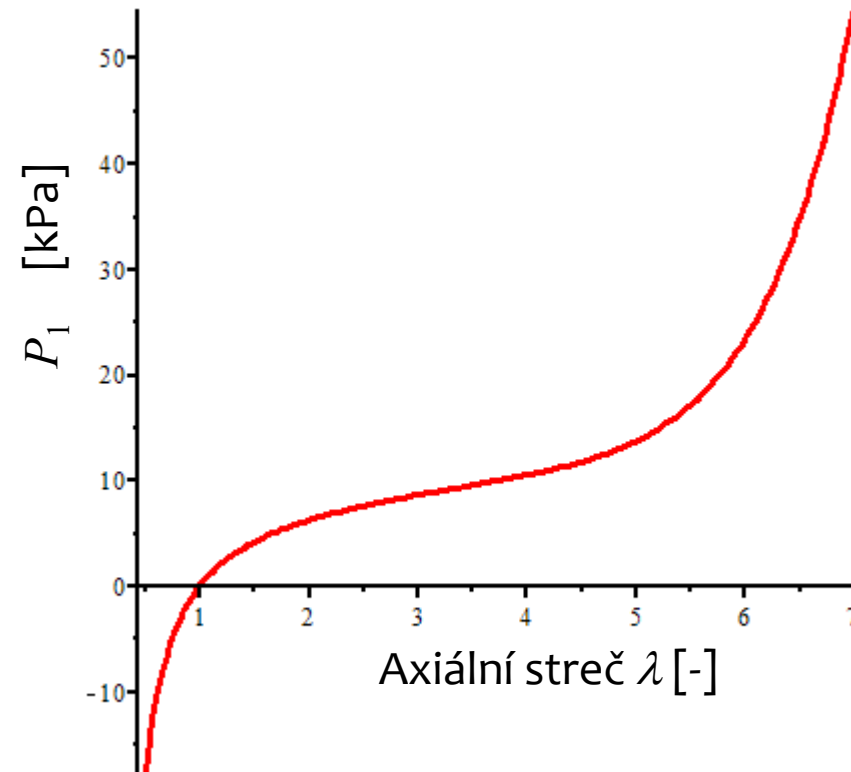
Profesor R.W. Ogden působí
na univerzitě v Glasgow,
obor aplikovaná matematika

<http://www.gla.ac.uk/schools/mathematicsstatistics/staff/raymondogden/>

$$W = \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{\alpha_k} \left(\lambda_1^{\alpha_k} + \lambda_2^{\alpha_k} + \lambda_3^{\alpha_k} - 3 \right)$$

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \mu_k = 2\mu > 0$$

$$\mu_1 = 5.39 \text{ kPa} \quad \mu_2 = -0.531 \text{ kPa} \quad \mu_3 = 0.19 \cdot 10^{-5} \text{ kPa} \quad \alpha_1 = 1.46 \quad \alpha_2 = -2.03 \quad \alpha_3 = 9.68$$



$$P_1 = \mu_1 \lambda_1^{\alpha_1-1} + \mu_2 \lambda_1^{\alpha_2-1} + \mu_3 \lambda_1^{\alpha_3-1} - \mu_1 \lambda_1^{\frac{\alpha_1-1}{2}} - \mu_2 \lambda_1^{\frac{\alpha_2-1}{2}} + \mu_3 \lambda_1^{\frac{\alpha_3-1}{2}}$$

Modely pro W

Gentův model (1996)

A.N. Gent (1927-2012) byl profesorem na univerzitě v Akronu (Ohio, USA), kde se zabýval vlastnostmi kaučuků (nestability, kavitace, materiálové modely)



http://en.wikipedia.org/wiki/Alan_Neville_Gent

<http://www.uakron.edu/cpspe/news-events/news-detail.dot?newsId=0f955746-a127-40b1-ad7a-6237185becea&pageTitle=Racent%20Headlines&crumbTitle=In%20the%20world%20of%20polymer%20science,%20Alan%20Neville%20Gent%20was%20a%20giant>

$$W = -\frac{\mu J_m}{2} \ln \left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right)$$

$$J_m > 0 \quad \wedge \quad \mu > 0$$

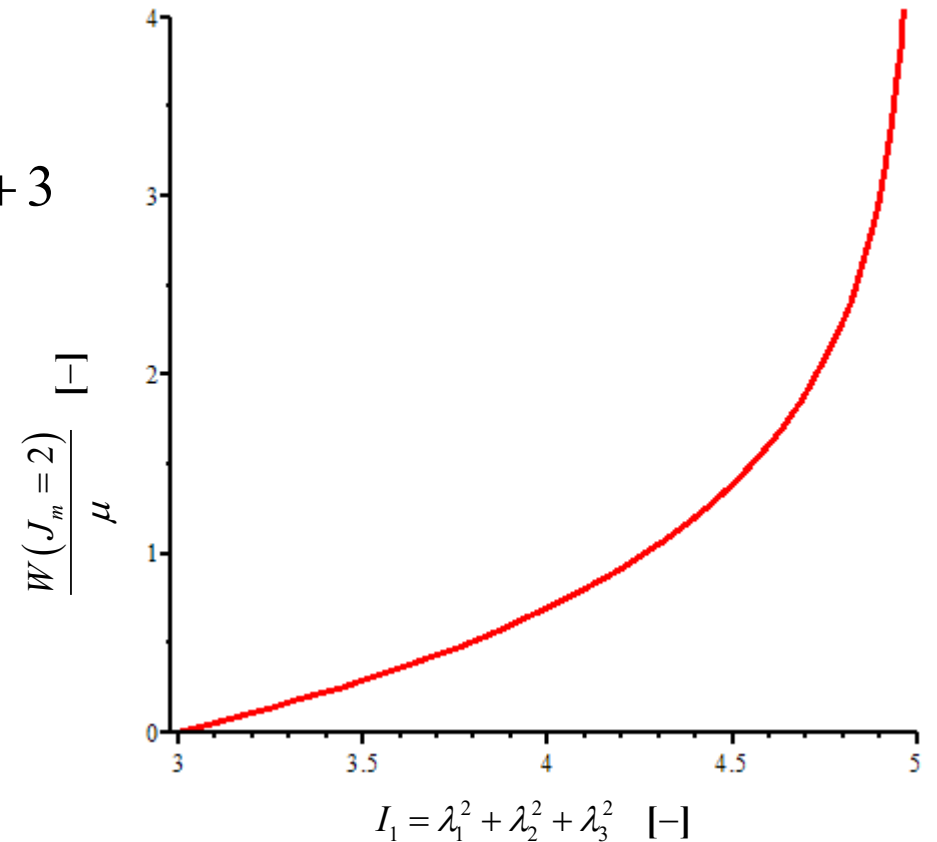
- Model patří do skupiny tzv. „limiting extensibility models“
- Zřejmě nejsou přípustné všechny kinematiky (trajektorie ve fázovém prostoru deformací)

Modely pro W

Gentův model

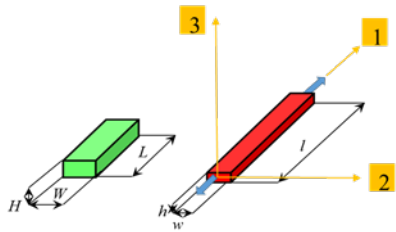
$$W = -\frac{\mu J_m}{2} \ln \left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right)$$

$$0 < 1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} = \frac{J_m - I_1 + 3}{J_m} \Leftrightarrow 0 < J_m - I_1 + 3 \Leftrightarrow I_1 < J_m + 3$$



Modely pro W

Gentův model



$$W = -\frac{\mu J_m}{2} \ln \left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - p \\ \sigma_2 &= \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - p \\ \sigma_3 &= \lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} - p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\mu J_m \lambda_1^2}{J_m + 3 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)} - p \\ \sigma_2 &= \frac{\mu J_m \lambda_2^2}{J_m + 3 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)} - p \\ \sigma_3 &= \frac{\mu J_m \lambda_3^2}{J_m + 3 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)} - p \end{aligned}$$

$$\sigma_3 = 0 \Rightarrow p = \frac{\mu J_m \lambda_3^2}{J_m + 3 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)}$$

$$J = \sqrt{\det(\mathbf{C})} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad \wedge \quad \lambda_2 = \lambda_3$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$$

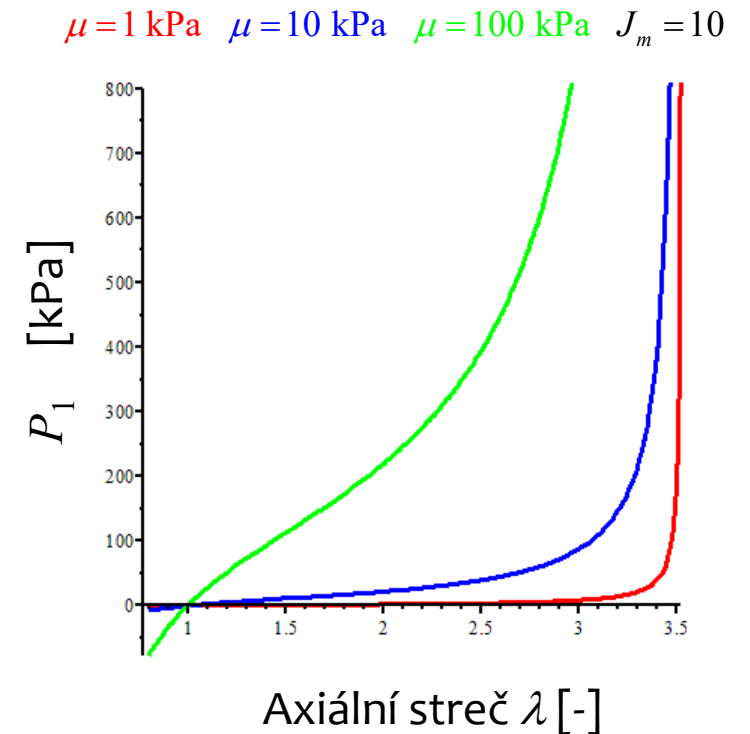
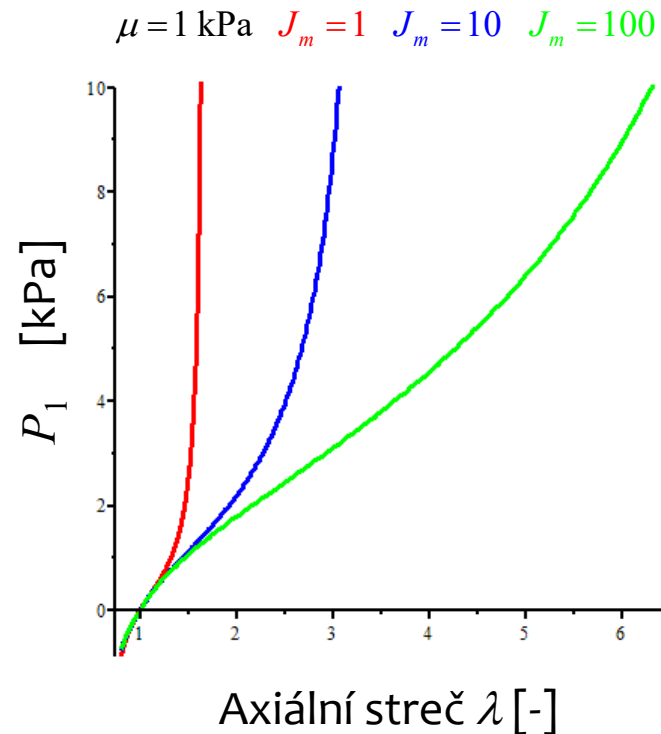
$$P_1 = \frac{\mu J_m \lambda_1}{J_m + 3 - \lambda_1^2 - \frac{2}{\lambda_1}} - \frac{\mu J_m}{\lambda_1^2 \left(J_m + 3 - \lambda_1^2 - \frac{2}{\lambda_1} \right)}$$

Modely pro W

Gentův model

$$W = -\frac{\mu J_m}{2} \ln \left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right)$$

$$P_1 = \frac{\mu J_m \lambda_1}{J_m + 3 - \lambda_1^2 - \frac{2}{\lambda_1}} - \frac{\mu J_m}{\lambda_1^2 \left(J_m + 3 - \lambda_1^2 - \frac{2}{\lambda_1} \right)}$$



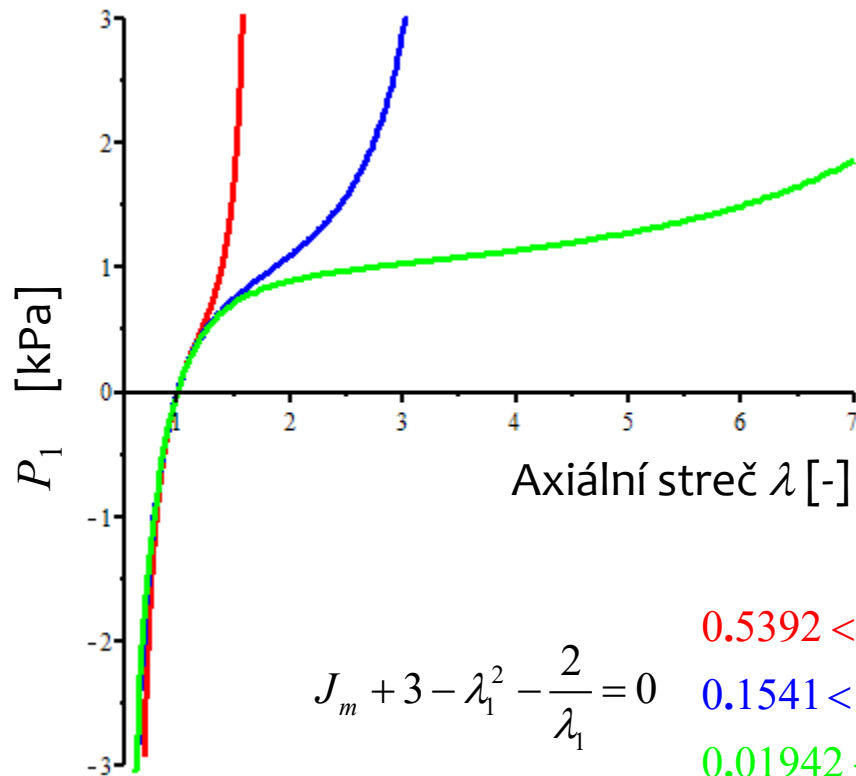
Modely pro W

Gentův model

$$W = -\frac{\mu J_m}{2} \ln \left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right)$$

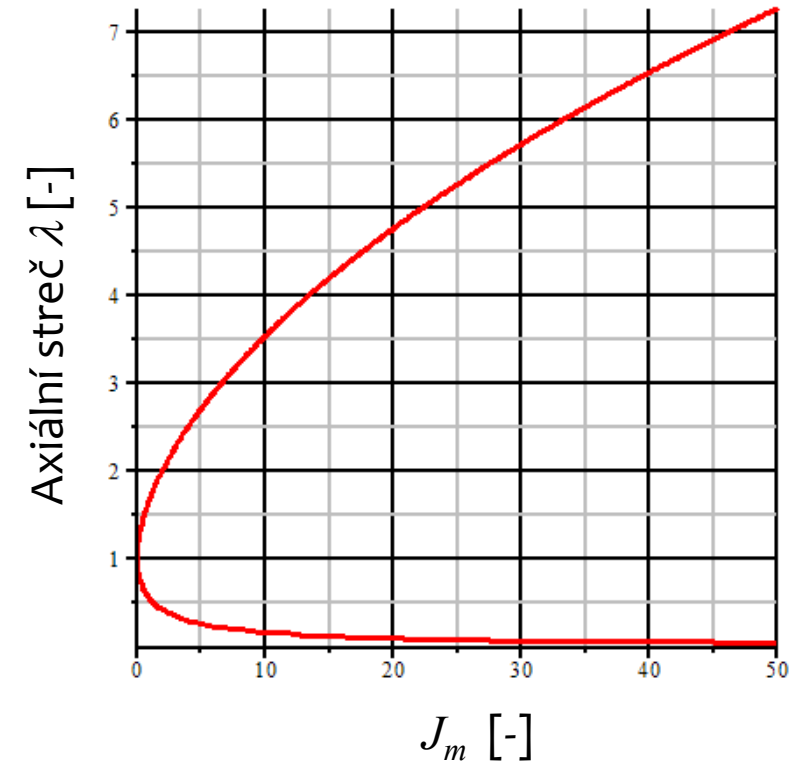
$$P_1 = \frac{\mu J_m \lambda_1}{J_m + 3 - \lambda_1^2 - \frac{2}{\lambda_1}} - \frac{\mu J_m}{\lambda_1^2 \left(J_m + 3 - \lambda_1^2 - \frac{2}{\lambda_1} \right)}$$

$\mu = 1$ kPa $J_m = 1$ $J_m = 10$ $J_m = 100$



$$J_m + 3 - \lambda_1^2 - \frac{2}{\lambda_1} = 0$$

$0.5392 < \lambda_1 < 1.675$
 $0.1541 < \lambda_1 < 3.526$
 $0.01942 < \lambda_1 < 10.14$



Modely pro W

Exponenciální modely – Y.C. Fung

$$W = \frac{c}{2} (e^Q - 1)$$

$$Q = b_{11}E_{11}^2 + b_{22}E_{22}^2 + b_{33}E_{33}^2 + 2b_{12}E_{12}^2 + 2b_{13}E_{13}^2 + 2b_{23}E_{23}^2 + 2b_{21}E_{11}E_{22} + 2b_{32}E_{22}E_{33} + 2b_{31}E_{11}E_{33}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$$

Y.C. Fung je v podstatě zakladatel biomechaniky jako moderního vědního oboru.
Je emeritním profesorem UC San Diego, autorem několika monografií o biomechanice

http://en.wikipedia.org/wiki/Yuan-Cheng_Fung

http://www.jacobsschool.ucsd.edu/faculty/faculty_bios/index.sfe?fmp_recid=21

Modely pro W

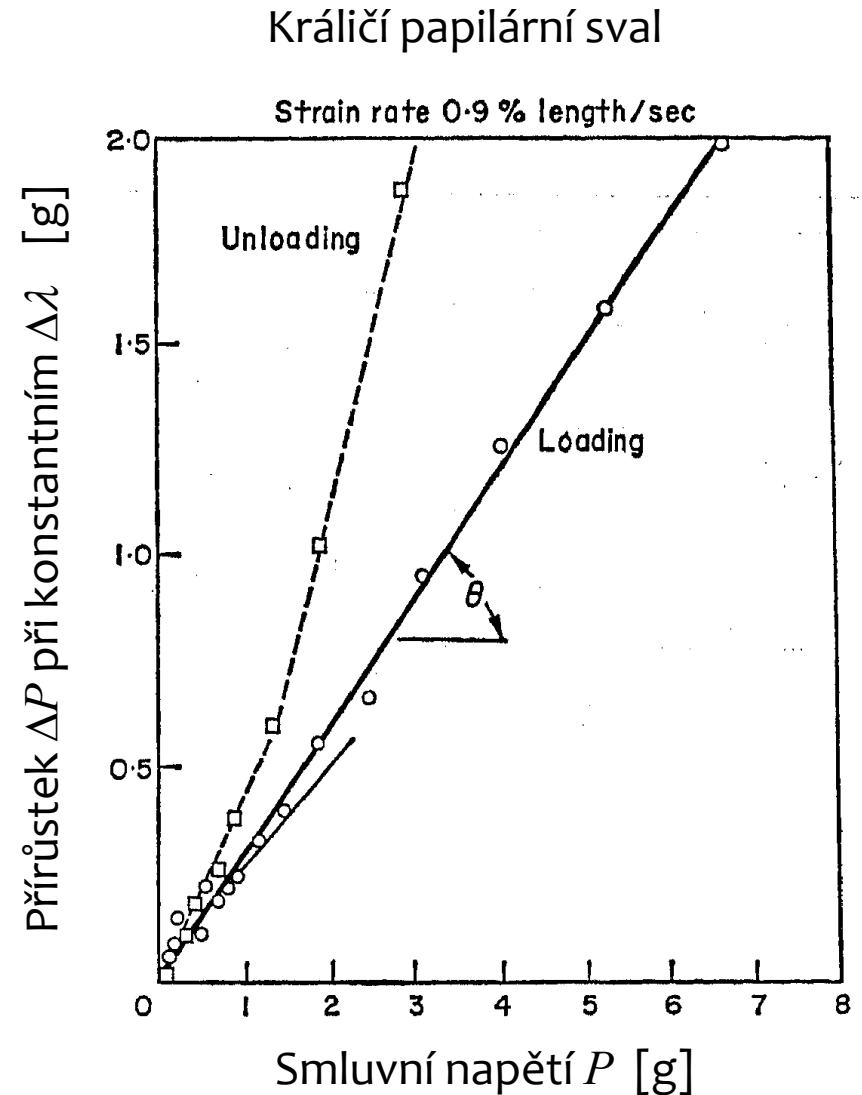
Exponenciální modely $W = \frac{c}{2}(e^{\rho} - 1)$

Jsou založeny na Fungově pozorování, publikovaném okolo 1967, získaném při tahových zkouškách měkkých tkání, které ho vedlo k závěru, že modul pružnosti je lineární funkcí napětí

$$E = \frac{d\sigma}{d\lambda} = a + b\sigma \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{a}{b}(e^{b(\lambda-1)} - 1)$$

$$y' = a + by$$

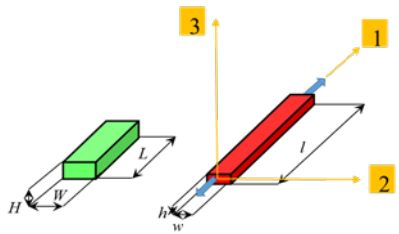
$$y(0) = 0 \quad \vee \quad y'(0) = E_{ini}$$



Modely pro W

Exponenciální modely

$$W = \frac{\mu}{2\alpha} \left(e^{\alpha(I_1 - 3)} - 1 \right)$$



$$\sigma_1 = \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - p \quad \sigma_1 = \frac{\mu}{2\alpha} \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left(e^{\alpha(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)} - 1 \right) - p = \mu \lambda_1^2 e^{\alpha(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)} - p$$

$$\sigma_2 = \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - p \quad \sigma_2 = \frac{\mu}{2\alpha} \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \left(e^{\alpha(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)} - 1 \right) - p = \mu \lambda_2^2 e^{\alpha(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)} - p$$

$$\sigma_3 = \lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} - p \quad \sigma_3 = \frac{\mu}{2\alpha} \lambda_3 \frac{\partial}{\partial \lambda_3} \left(e^{\alpha(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)} - 1 \right) - p = \mu \lambda_3^2 e^{\alpha(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)} - p$$

$$\sigma_3 = 0 \Rightarrow p = \mu \lambda_3^2 e^{\alpha(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)}$$

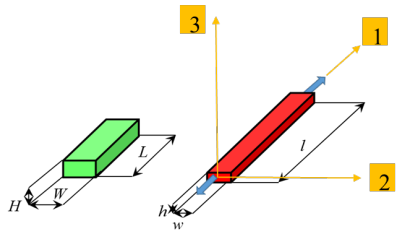
$$J = \sqrt{\det(\mathbf{C})} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad \wedge \quad \lambda_2 = \lambda_3$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$$

$$P_1 = \mu e^{\alpha\left(\lambda_1^2 + \frac{2}{\lambda_1} - 3\right)} \left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^2} \right)$$

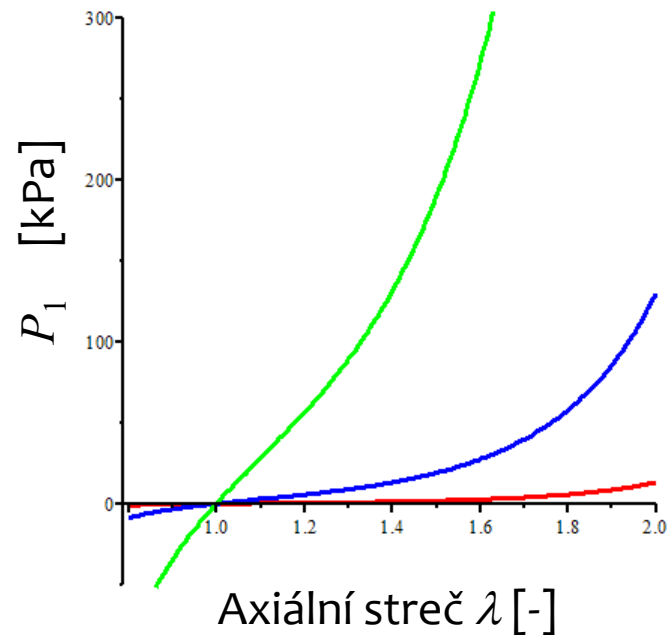
Modely pro W

Exponenciální modely

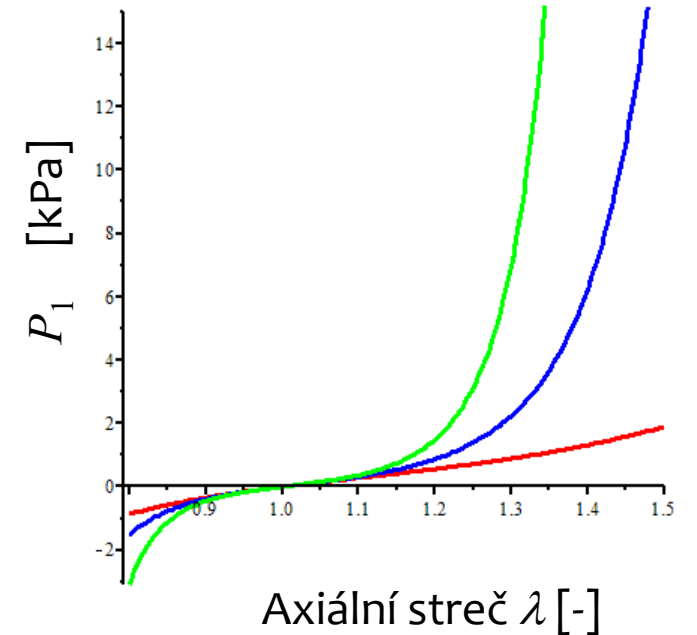


$$W = \frac{\mu}{2\alpha} \left(e^{\alpha(I_1-3)} - 1 \right) \quad P_1 = \mu e^{\alpha \left(\lambda_1^2 + \frac{2}{\lambda_1} - 3 \right)} \left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^2} \right)$$

$\mu = 1 \text{ kPa}$ $\mu = 10 \text{ kPa}$ $\mu = 100 \text{ kPa}$ $\alpha = 1$



$\alpha = 1$ $\alpha = 5$ $\alpha = 10$ $\mu = 1 \text{ kPa}$



Modely pro W

Kilianův model (van der Waals)

H. G. Kilian 1980 – 1984

Ulm, Max Planck Institut

$$W = -\left(\lambda_m^2 - 3\right) \mu \left(\ln(1 - \eta) + \eta\right) - \frac{2}{3} a \mu \left(\frac{\tilde{I} - 3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\tilde{I} = (1 - \beta) I_1 + \beta I_2$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\tilde{I} - 3}{\lambda_m^2 - 3}}$$

Modely pro W

Kilianův model (van der Waals)

H. G. Kilian 1980 – 1984

vs.

Gentův model

A. N. Gent 1996

$$W = -J_m \mu \ln \left(1 - \sqrt{\frac{\tilde{I} - 3}{J_m}} \right) - J_m \mu \sqrt{\frac{\tilde{I} - 3}{J_m}} - \frac{2}{3} a \mu \left(\frac{\tilde{I} - 3}{2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$W = -\frac{\mu J_m}{2} \ln \left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right)$$

$$W = -J_m \mu \ln \left(1 - \sqrt{\frac{(1 - \beta) I_1 + \beta I_2 - 3}{J_m}} \right) - J_m \mu \sqrt{\frac{(1 - \beta) I_1 + \beta I_2 - 3}{J_m}} - \frac{2}{3} a \mu \left(\frac{(1 - \beta) I_1 + \beta I_2 - 3}{2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$J_m = \lambda_m^2 - 3$$

$$I_1 - 3$$

vs.

$$(1 - \beta) I_1 + \beta I_2 - 3$$

kde

$$\beta \in [0; 1]$$

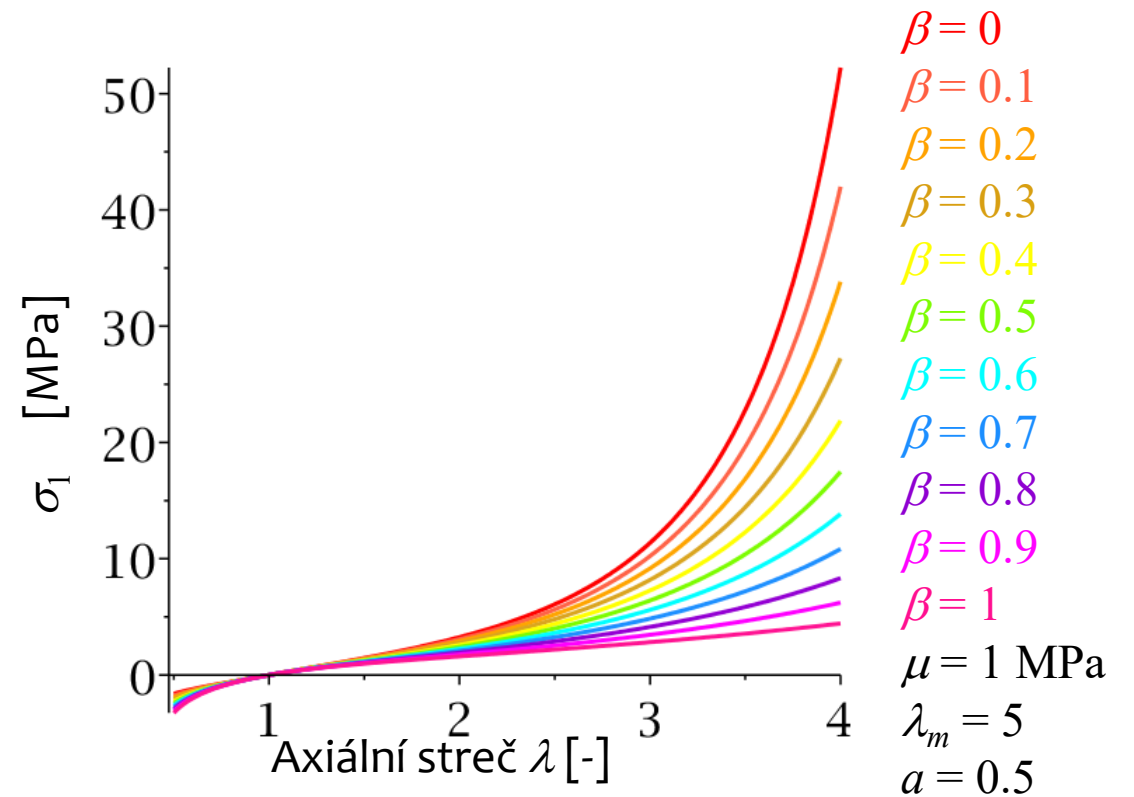
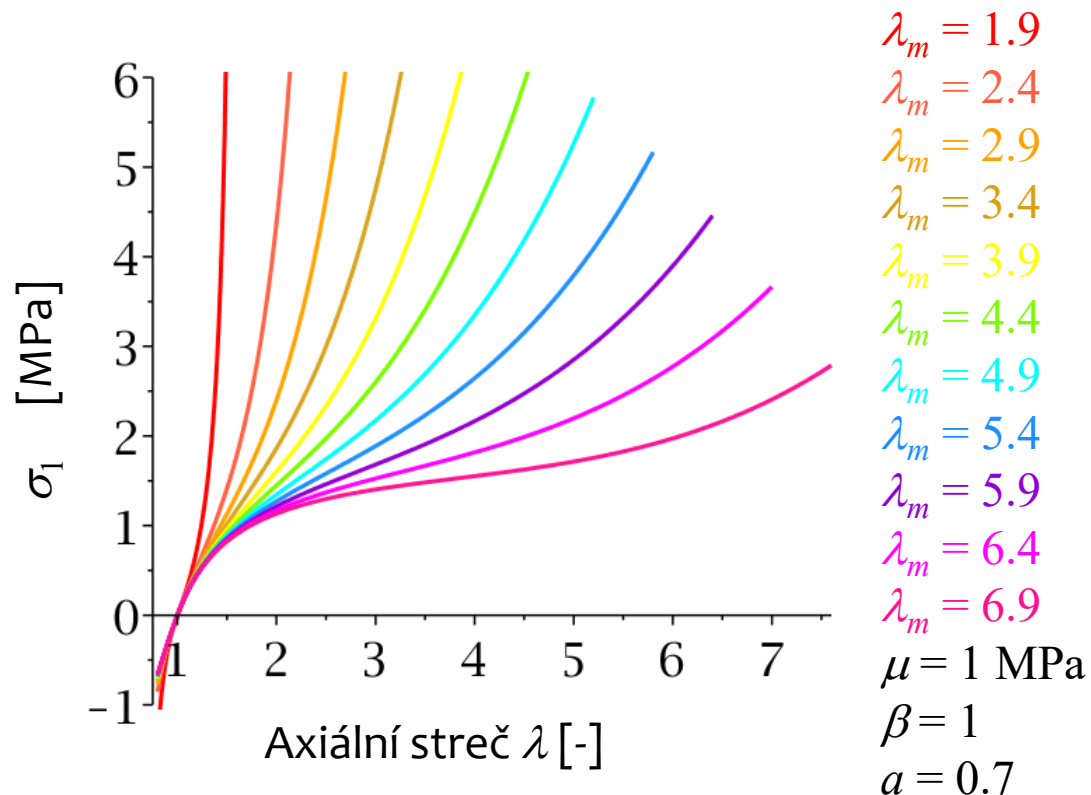
Modely pro W

Kilianův model (van der Waals)

$$W = -J_m \mu \ln \left(1 - \sqrt{\frac{(1-\beta)I_1 + \beta I_2 - 3}{J_m}} \right) - J_m \mu \sqrt{\frac{(1-\beta)I_1 + \beta I_2 - 3}{J_m}} - \frac{2}{3} a \mu \left(\frac{(1-\beta)I_1 + \beta I_2 - 3}{2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$J_m = \lambda_m^2 - 3$$

Jednoosý tah pro nestlačitelný případ



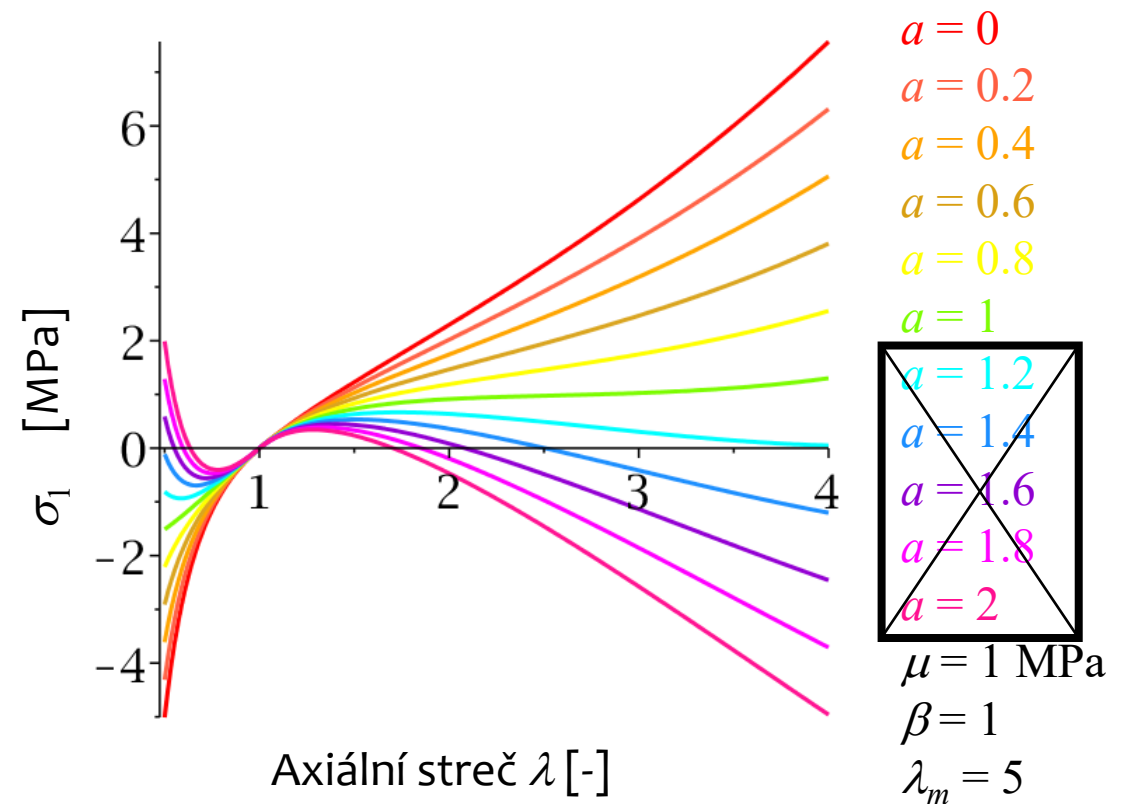
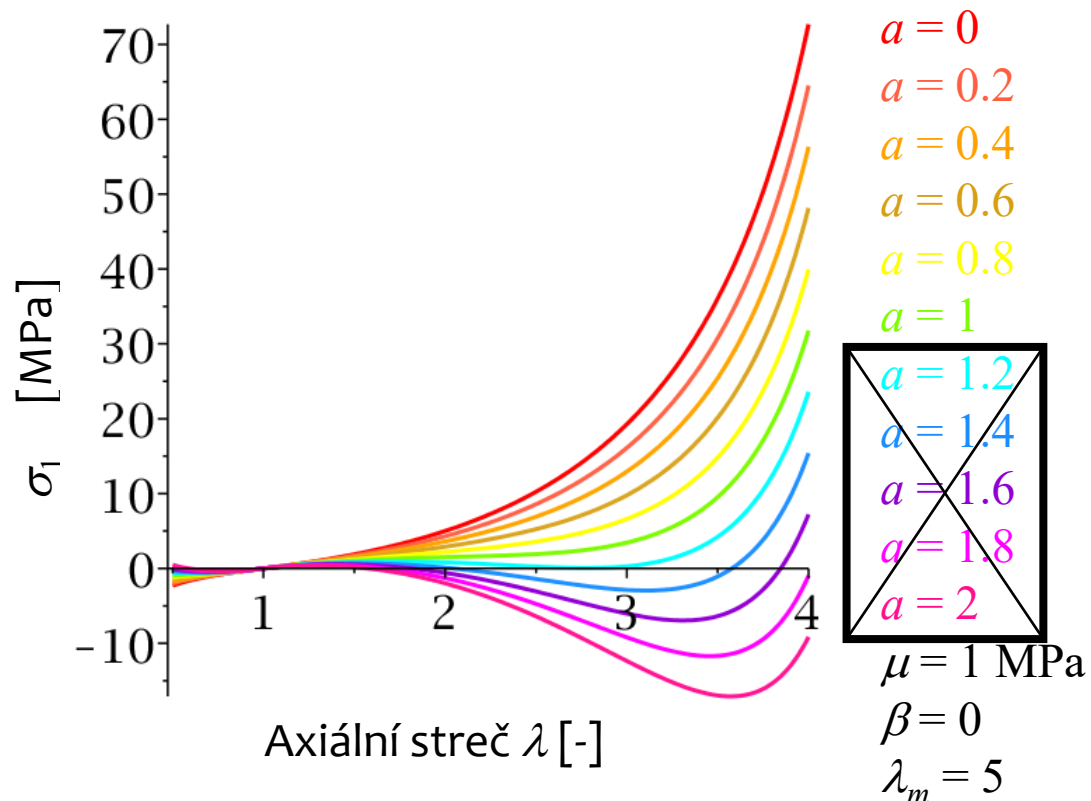
Modely pro W

Kilianův model (van der Waals)

$$W = -J_m \mu \ln \left(1 - \sqrt{\frac{(1-\beta)I_1 + \beta I_2 - 3}{J_m}} \right) - J_m \mu \sqrt{\frac{(1-\beta)I_1 + \beta I_2 - 3}{J_m}} - \frac{2}{3} a \mu \left(\frac{(1-\beta)I_1 + \beta I_2 - 3}{2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$J_m = \lambda_m^2 - 3$$

Jednoosý tah pro nestlačitelný případ



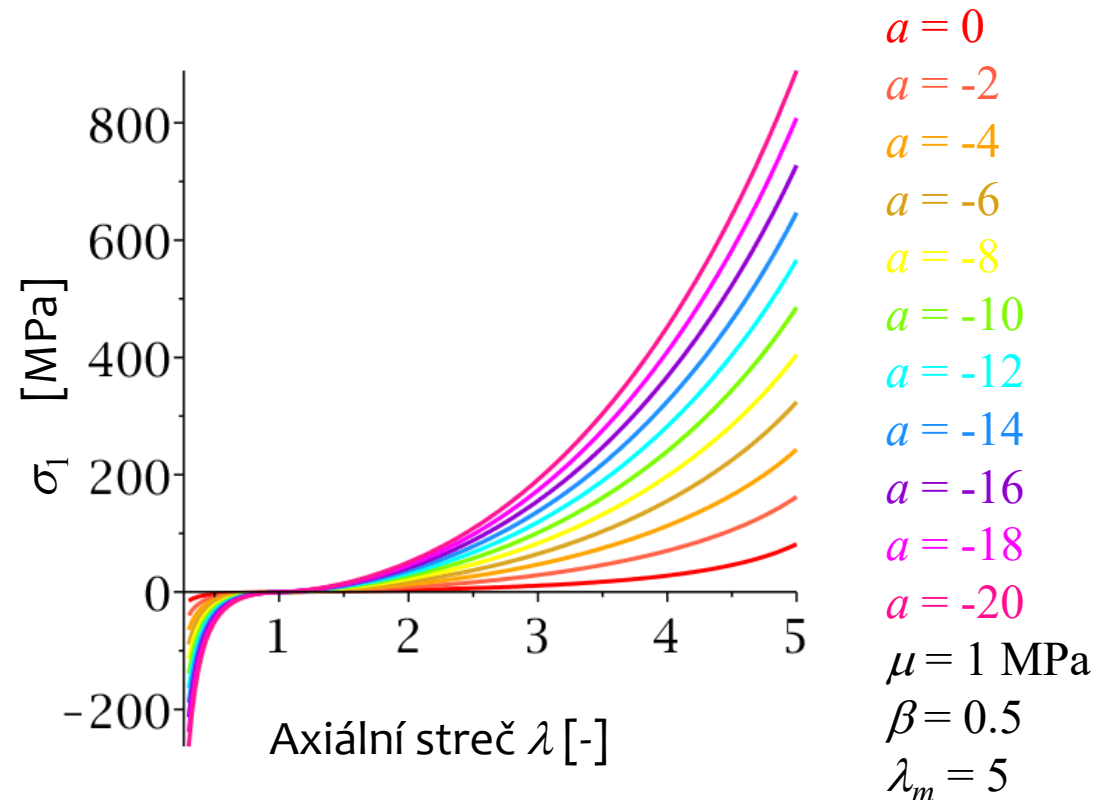
Modely pro W

Kilianův model (van der Waals)

Jednoosý tah pro nestlačitelný případ

$$W = -J_m \mu \ln \left(1 - \sqrt{\frac{(1-\beta)I_1 + \beta I_2 - 3}{J_m}} \right) - J_m \mu \sqrt{\frac{(1-\beta)I_1 + \beta I_2 - 3}{J_m}} - \frac{2}{3} a \mu \left(\frac{(1-\beta)I_1 + \beta I_2 - 3}{2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$J_m = \lambda_m^2 - 3$$



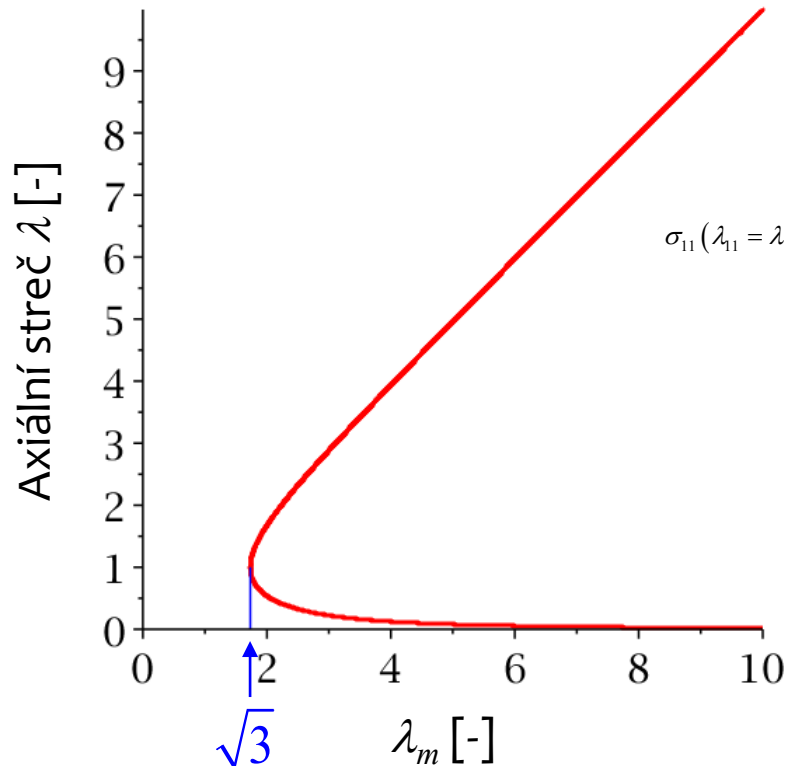
Modely pro W

Kilianův model (van der Waals)

Jednoosý tah pro nestlačitelný případ

$$W = -J_m \mu \ln \left(1 - \sqrt{\frac{(1-\beta)I_1 + \beta I_2 - 3}{J_m}} \right) - J_m \mu \sqrt{\frac{(1-\beta)I_1 + \beta I_2 - 3}{J_m}} - \frac{2}{3} a \mu \left(\frac{(1-\beta)I_1 + \beta I_2 - 3}{2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$J_m = \lambda_m^2 - 3$$

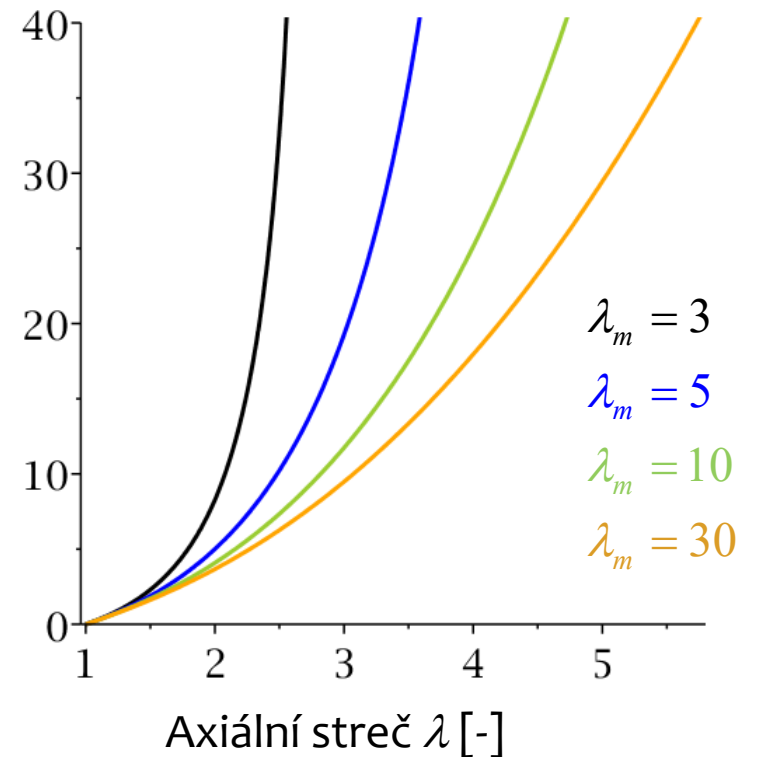


$$\beta = 0 = a$$

$$\sigma_{11}(\lambda_{11} = \lambda) = \mu \frac{\lambda^2 \sqrt{\lambda_m^2 - 3}}{\sqrt{\lambda_m^2 - 3} - \sqrt{\lambda^2 + \frac{2}{\lambda^2} - 3}} - \mu \frac{\sqrt{\lambda_m^2 - 3}}{\lambda \left(\sqrt{\lambda_m^2 - 3} - \sqrt{\lambda^2 + \frac{2}{\lambda^2} - 3} \right)}$$

$$\sqrt{\lambda_m^2 - 3} - \sqrt{\lambda^2 + \frac{2}{\lambda^2} - 3} = 0$$

$$\frac{\sigma_{11}}{\mu}$$



Modely pro W

Arruda-Boyce model 1993

Ellen M. Arruda
(University of Michigan,
Ann Arbor)



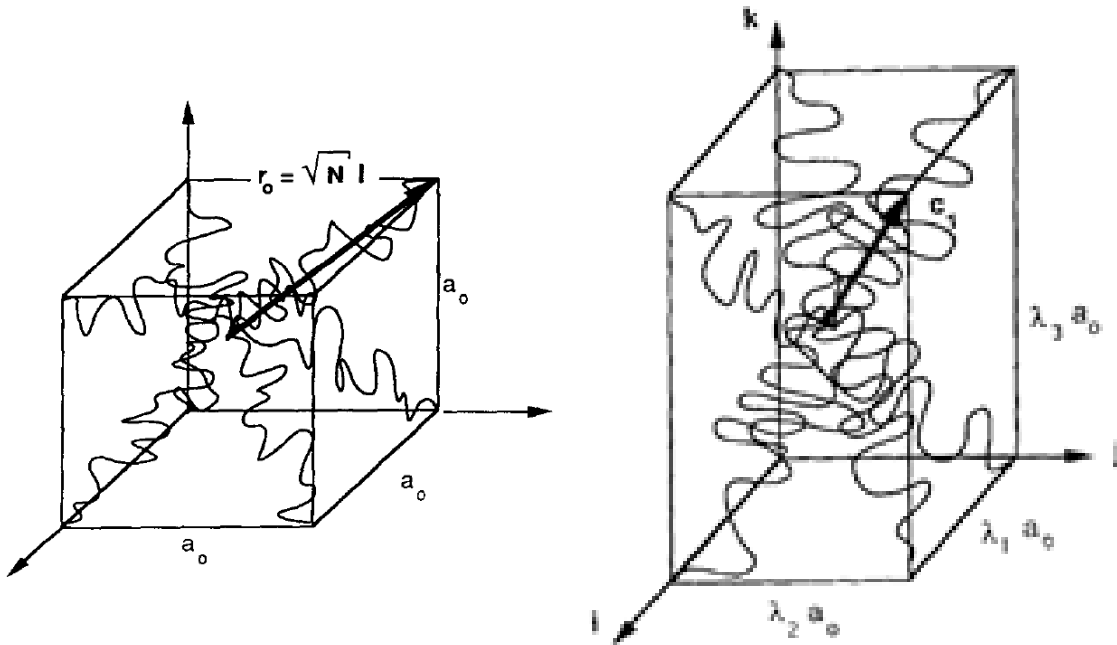
Mary C. Boyce
(MIT)

$$W = \mu \sqrt{N} \left(\beta \lambda_c - \sqrt{N} \ln \left(\frac{\sinh \beta}{\beta} \right) \right)$$

Modely pro W

Arruda-Boyce model 1993
uvažuje průměrování
na 8-řatězcový element

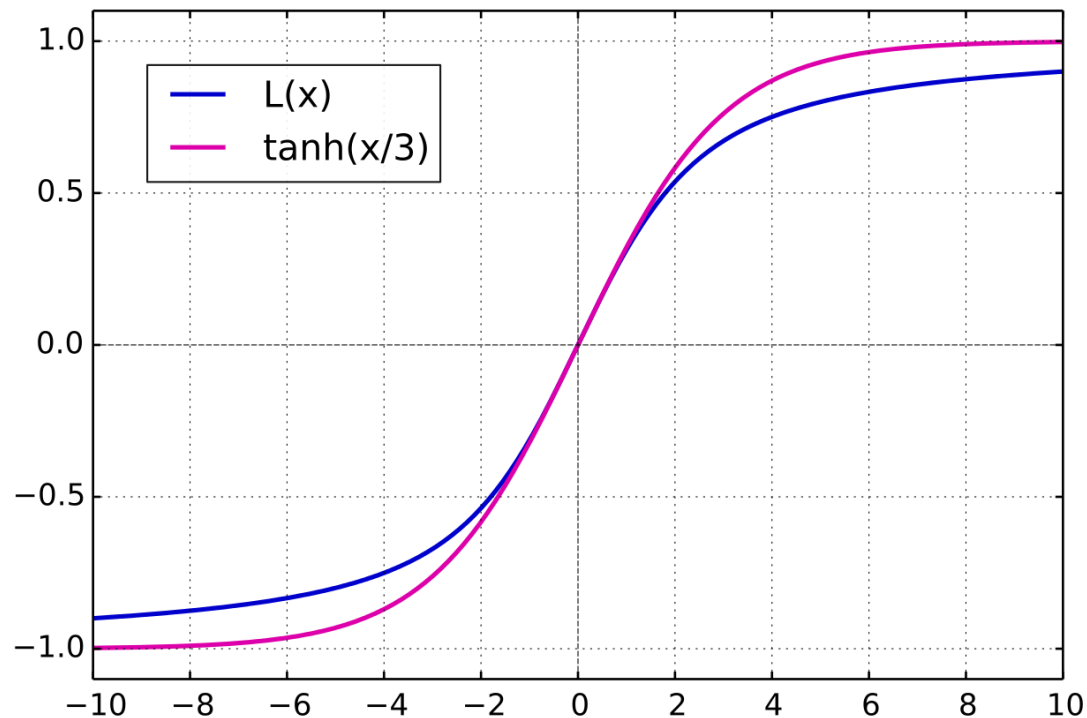
$$W = \mu \sqrt{N} \left(\beta \lambda_c - \sqrt{N} \ln \left(\frac{\sinh \beta}{\beta} \right) \right)$$



$$\lambda_c = \sqrt{\frac{I_1}{3}} = \sqrt{\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}{3}}$$

Modely pro W

*Arruda-Boyce model 1993
pomocí $L(x)$ zohledňuje limitní
průtažnost molekulárního řetězce*



$$W = \mu \sqrt{N} \left(\beta \lambda_c - \sqrt{N} \ln \left(\frac{\sinh \beta}{\beta} \right) \right)$$

$$\beta = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{N}} \right)$$

$$\mathcal{L}(x) = \coth(x) - \frac{1}{x}$$

Modely pro W

*Arruda-Boyce model 1993
pomocí $L(x)$ zohledňuje limitní
průtažnost molekulárního řetězce*

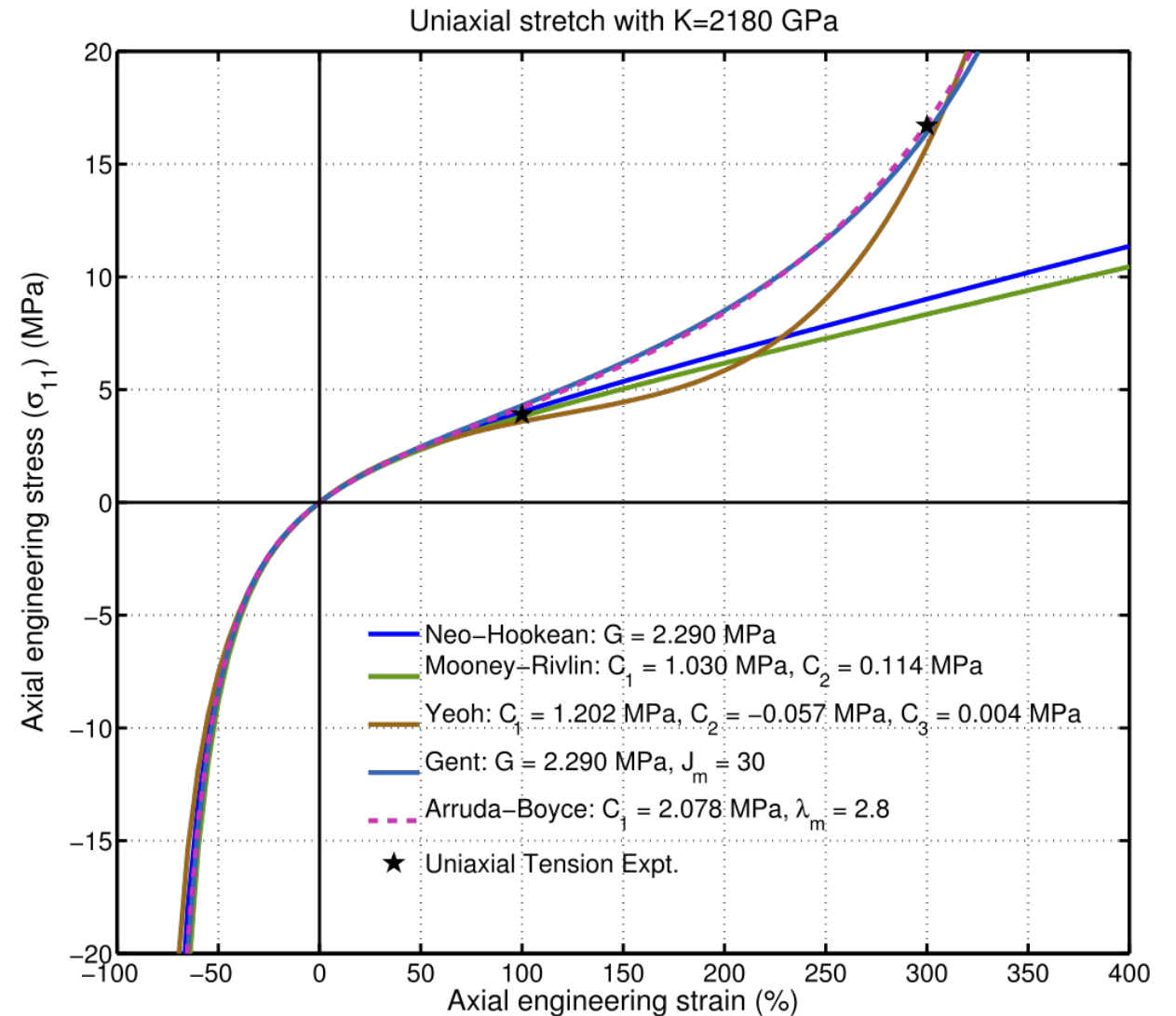
$$W = \mu \sqrt{N} \left(\beta \lambda_c - \sqrt{N} \ln \left(\frac{\sinh \beta}{\beta} \right) \right)$$

$$\beta = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{N}} \right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}(x) \doteq x \frac{3-x^2}{1-x^2}$$

Modely pro W

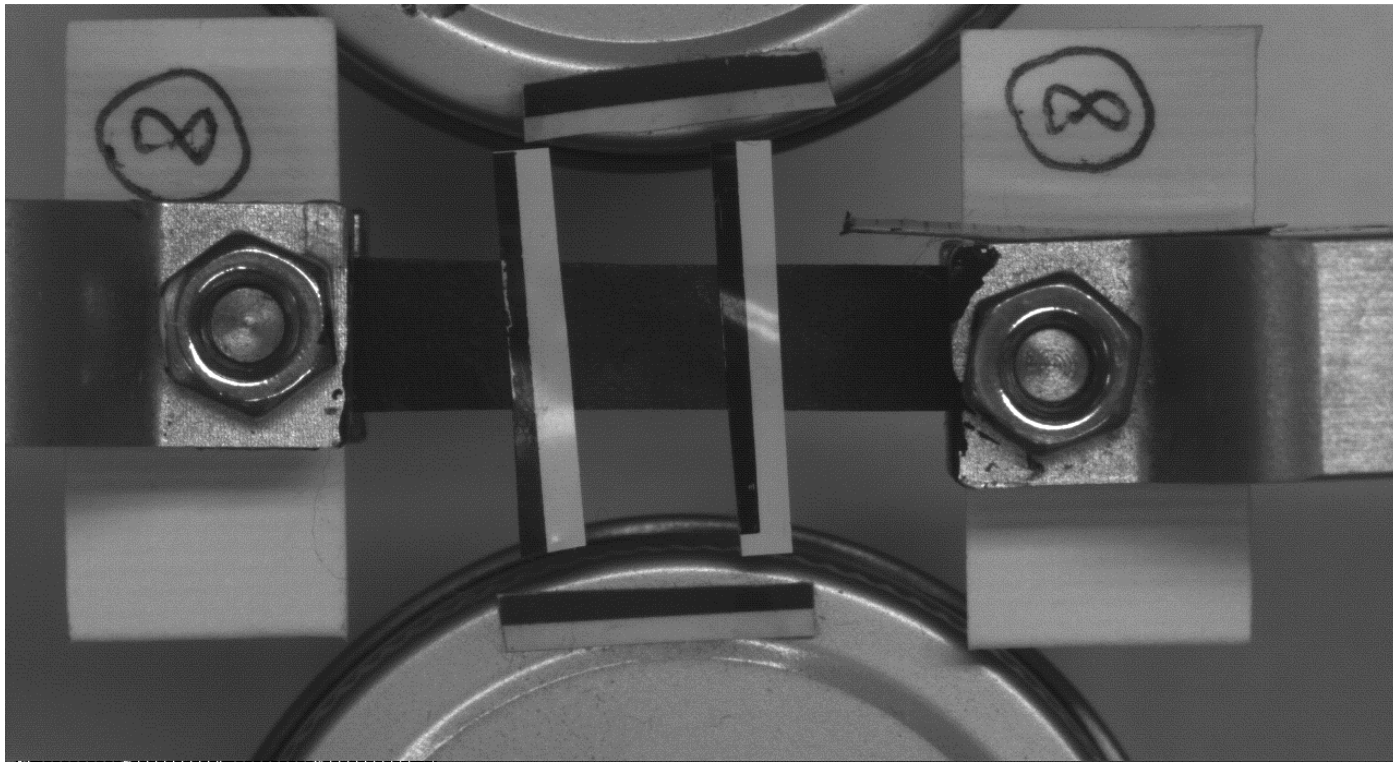
Arruda-Boyce model 1993
pomocí $L(x)$ zohledňuje limitní
průtažnost molekulárního řetězce



Cvičení

Cv. 1 Odhad parametrů modelu W

1. Jednoosá tahová zkouška pryže



Cv. 1 Odhad parametrů modelu W

Jednoosá tahová zkouška pryže

Experiment byl proveden na odboru biomechaniky U12105 ČVUT FS

Jeho záznam je na obrázku

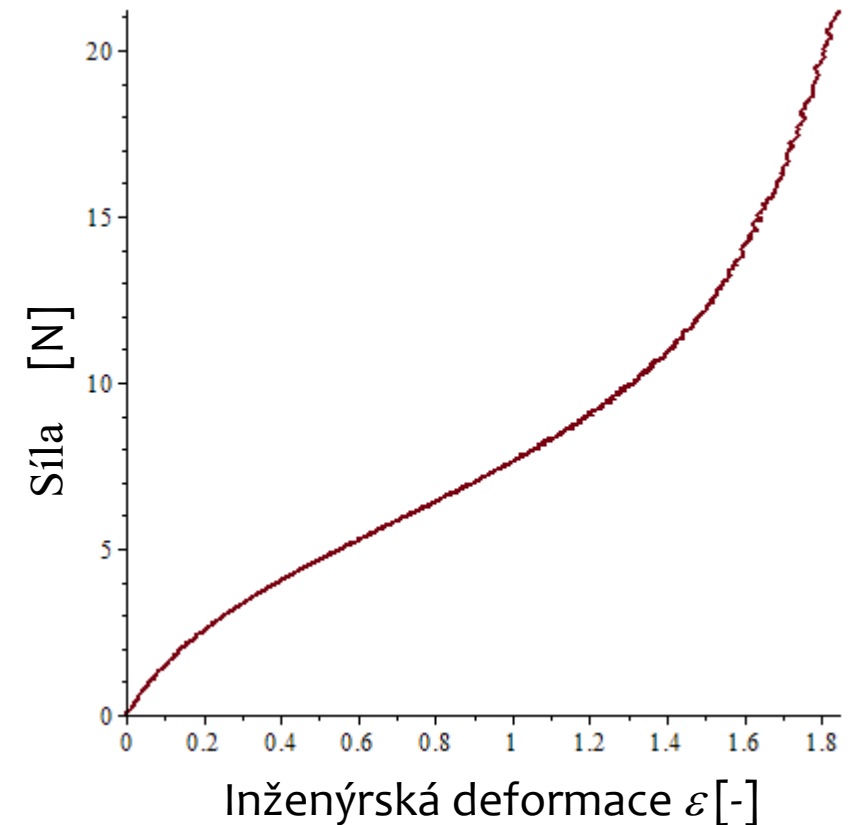
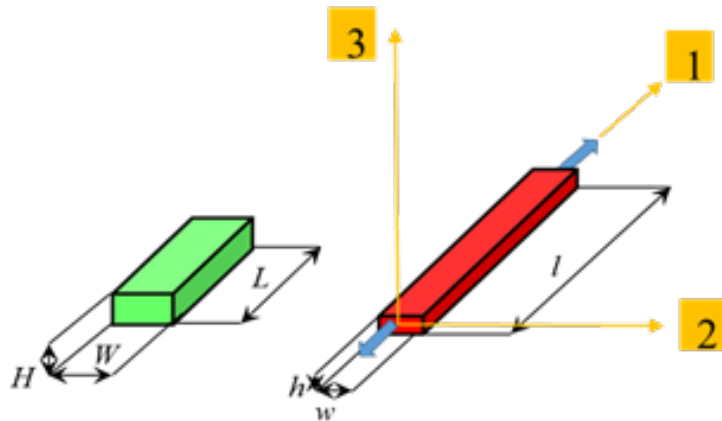
Zdrojová data jsou na adrese

<http://users.fs.cvut.cz/~hornyluk/files/Uniaxial-test-rubber.txt>

Počáteční rozměry proužku byly

Šířka W 5.52 mm

Tloušťka H 1.85 mm



Cv. 1 Odhad parametrů modelu W

Odhad je založen na minimalizaci o druhých mocnin (čtverců) odchylek mezi modelem a pozorováním.

Obor, který se zabývá odhadem parametrů se jmenuje regresní analýza (vyrovnávací počet).

Sestavíme účelovou funkci Q , kterou minimalizujeme nějakou ze známých optimalizačních metod (hledání extrému funkce jedné nebo více proměnných)

Cv. 1 Odhad parametrů modelu W

$$Q = \sum_{j=1}^n \left(f(\mathbf{x}_j, c_1, \dots, c_k) - y_j \right)^2$$

$y_{MODEL} = f(\mathbf{x}, c_1, \dots, c_k)$...funkce předpovídající/modelující/simulující realitu

(např. $\sigma = \mu\lambda^2 - \frac{\mu}{\lambda}$)

y_j ... j -tá pozorovaná hodnota závisle proměnné (např. σ)

\mathbf{x}_j ... j -tá pozorovaná hodnota nezávisle proměnné (např. $[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3]$)

c_1, \dots, c_k ...hledané parametry modelu (např. μ)

Cv. 1 Odhad parametrů modelu W

$$Q = \sum_{j=1}^n \left(f(\mathbf{x}_j, c_1, \dots, c_k) - y_j \right)^2$$

Minimalizací Q zjistíme $[c'_1, \dots, c'_k]$, která je odhadem $[c_1, \dots, c_k]$

Stacionární bod Q , který bude pro kvadratické Q minimem, splňuje podmínku:

$$\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial c_1} = 0, \dots, \frac{\partial Q}{\partial c_k} = 0}_{\text{red bracket}} \rightarrow [c'_1, \dots, c'_k]$$

Řešením soustavy odhadneme parametry W .

Cv. 1 Odhad parametrů modelu W

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{res}}{SS_{total}} \dots \text{Koeficient determinace}$$

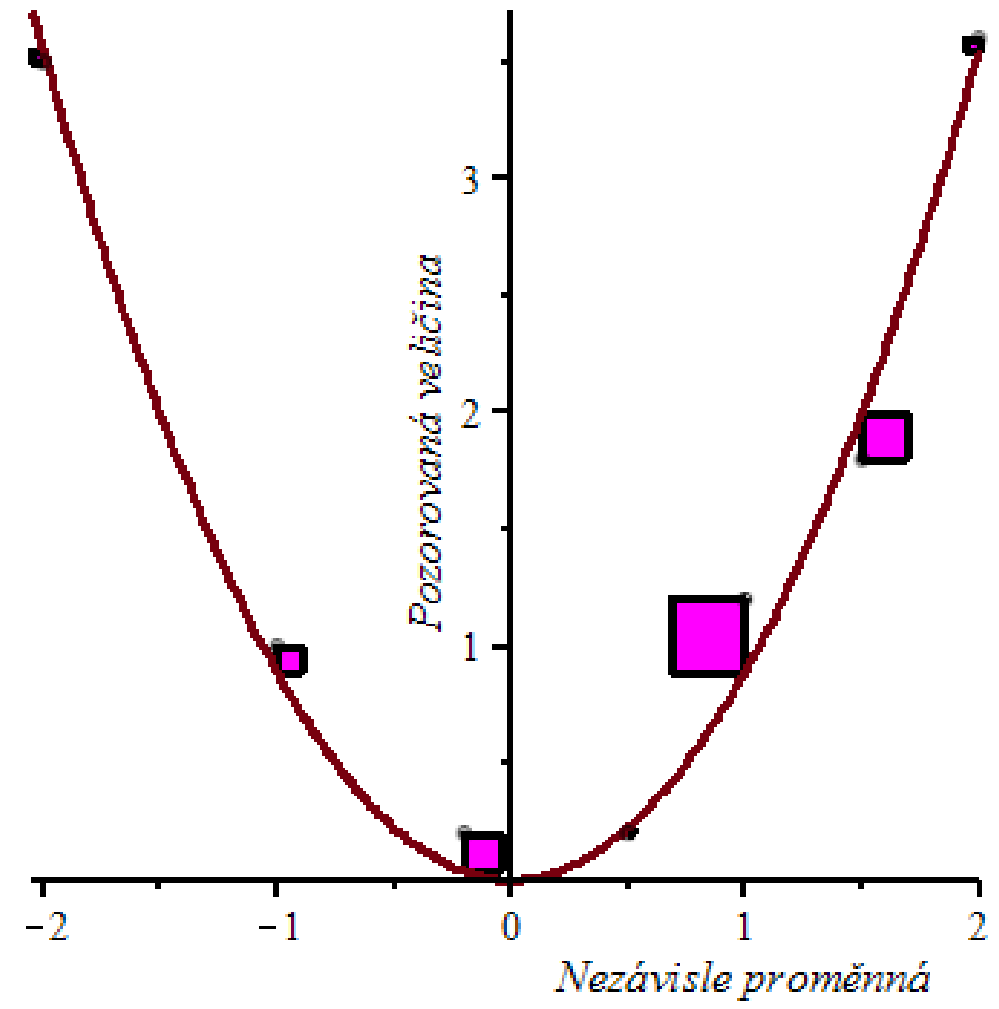
$$SS_{res} = \sum_{j=1}^n \left(f(\mathbf{x}_j, c'_1, \dots, c'_k) - y_j \right)^2 \dots \text{nazýváme reziduální součet čtverců}$$

$$SS_{total} = \sum_{j=1}^n \left(\text{Mean}(y_j) - y_j \right)^2 \dots \text{nazýváme celkový součet čtverců}$$

Cv. 1 Odhad parametrů modelu W

Data	$f(a, x) = ax^2$
[-2, 3.5]	$SS_{res} = 0.1816$
[-1, 1]	$SS_{total} = 12.08$
[-0.2, 0.2]	$R^2 = 0.9850$
[0.5, 0.2]	$a' = 0.8871$
[1, 1.2]	
[1.5, 1.8]	
[2, 3.6]	

$$Q = Q(a) = \sum_{j=1}^7 (ax_j^2 - y_j)^2 =$$
$$= (a(-2)^2 - 3.5)^2 + (a(-1)^2 - 1)^2 + (a(-0.2)^2 - 0.2)^2 +$$
$$+ (a(0.5)^2 - 0.2)^2 + (a(1)^2 - 1.2)^2 + (a(1.5)^2 - 1.8)^2 + (a(2)^2 - 3.6)^2$$



Least-squares fit of the curve $y = ax^2$ to 7 given data points.

Cv. 1 Odhad parametrů modelu W

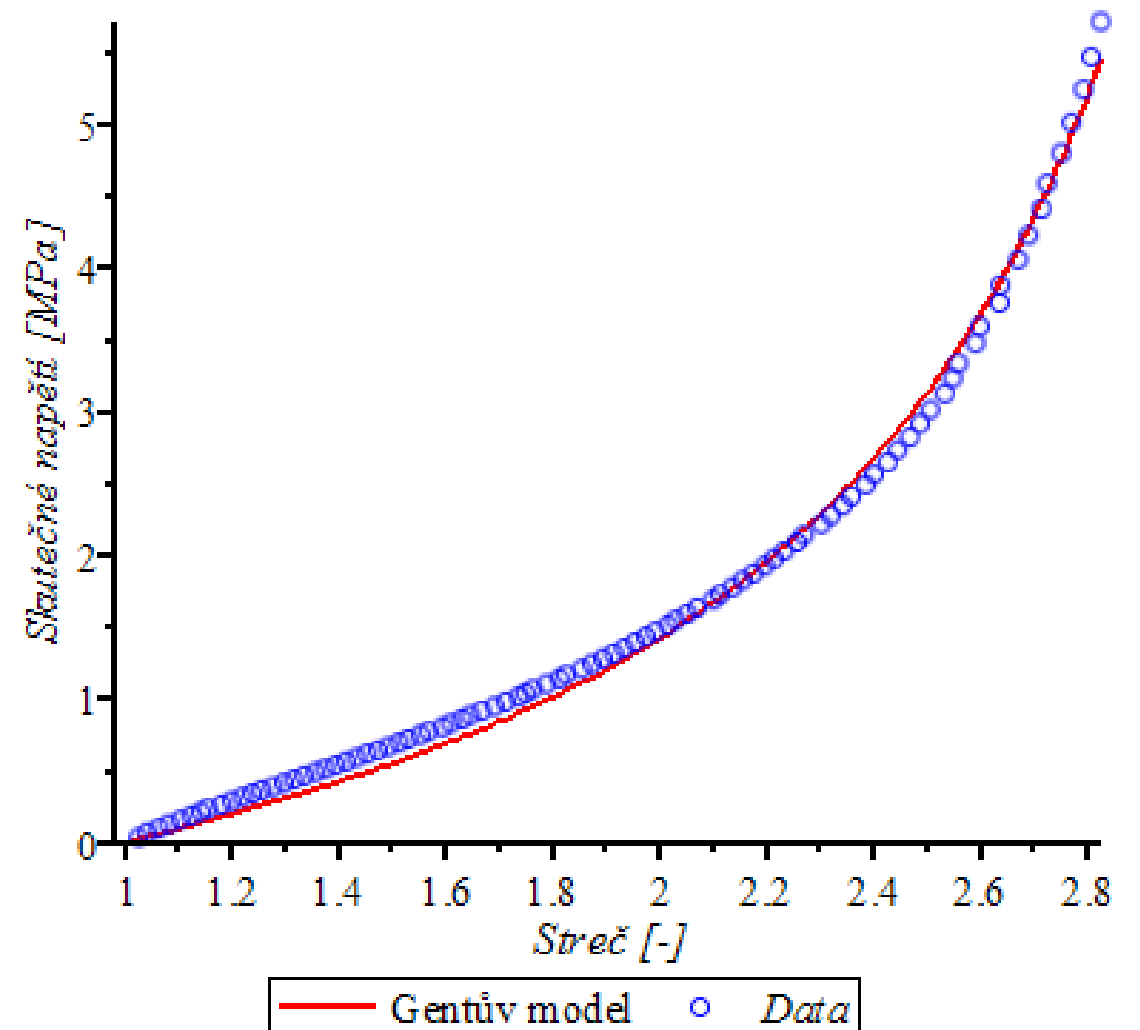
Jednoosá tahová zkouška pryže

$\mu = 0.3314 \text{ MPa}$ $J_m = 10.60$

Koeficient determinace $R^2 = 0.9945$

$$W = -\frac{\mu J_m}{2} \ln \left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right)$$

Tahová zkouška pryže



Cv. 1 Odhad parametrů modelu W

Jednoosá tahová zkouška pryže

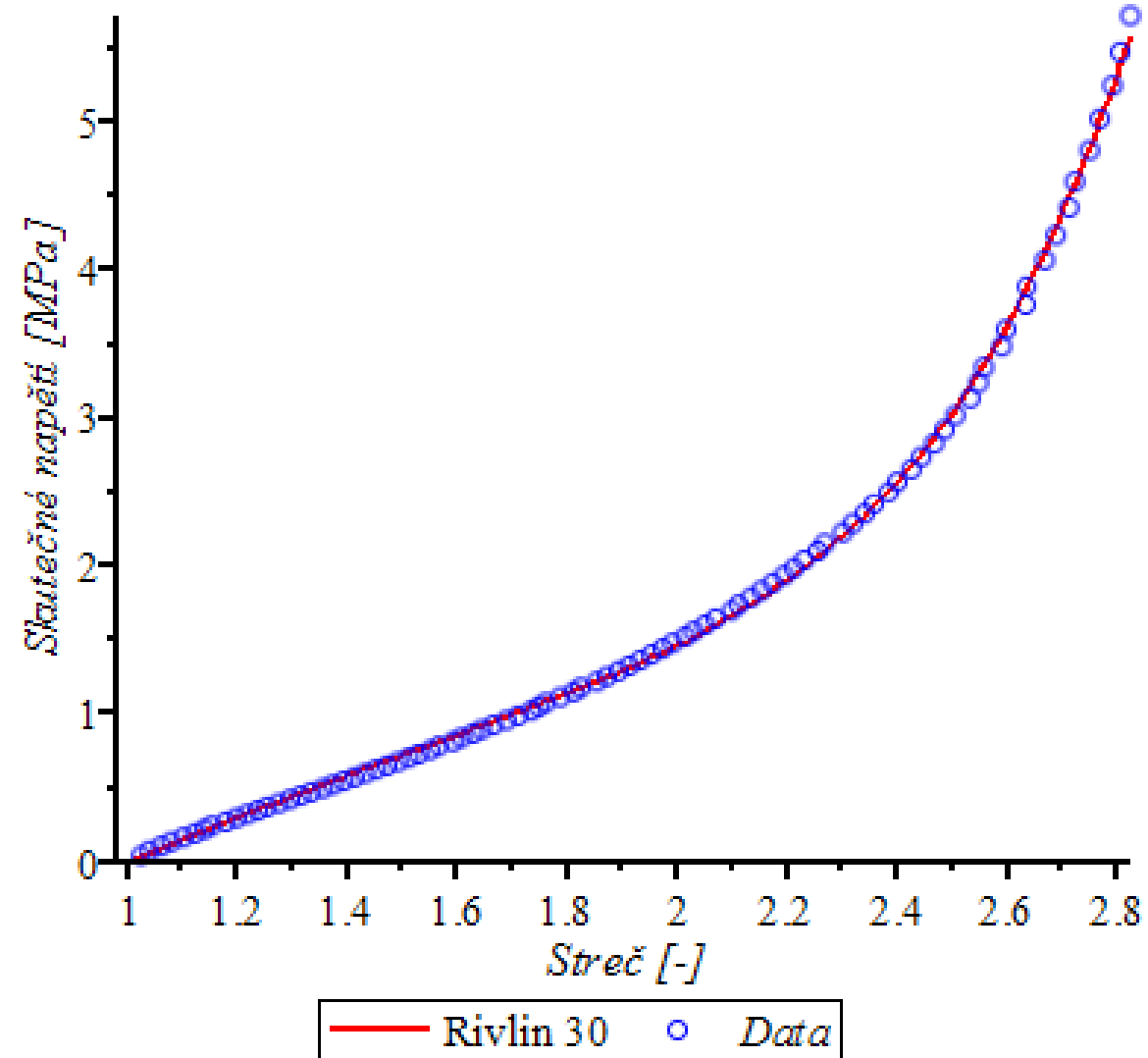
$c_1 = 0.2469$ MPa, $c_2 = -0.02049$ MPa,

$c_3 = 0.003626$ Mpa

Koeficient determinace $R^2 = 0.9993$

$$W = c_1(I_1 - 3) + c_2(I_1 - 3)^2 + c_3(I_1 - 3)^3$$

Tahová zkouška pryže



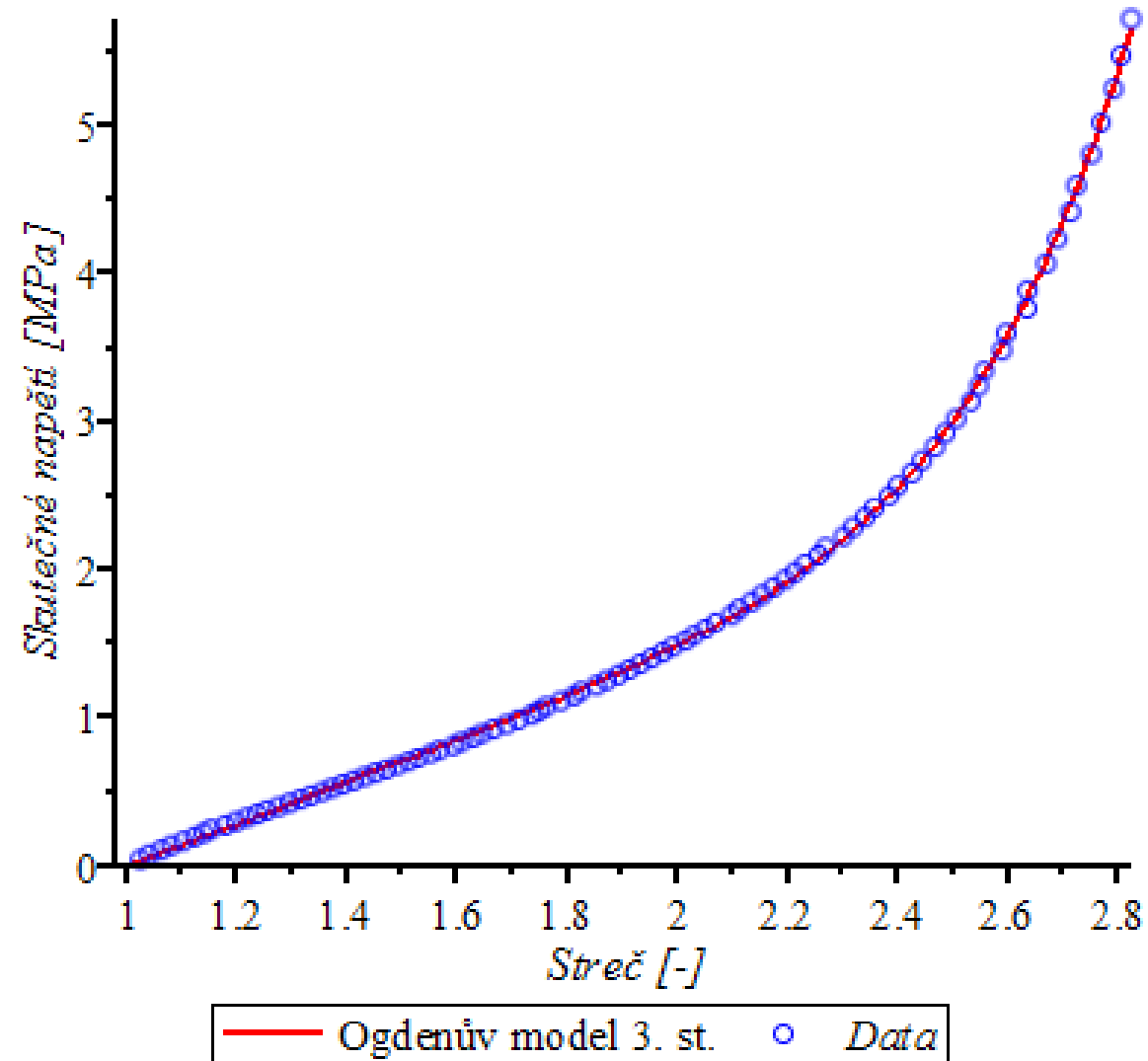
Cv. 1 Odhad parametrů modelu W

Jednoosá tahová zkouška pryže

$\mu_1 = 7.416$ MPa, $\mu_2 = 1.554 \cdot 10^{-4}$ MPa, $\mu_3 = 2.210$ MPa,
 $\alpha_1 = 0.3859$, $\alpha_2 = 9.600$, $\alpha_3 = -0.9011$
Koeficient determinace $R^2 = 0.9997$

$$W = \sum_{k=1}^3 \frac{\mu_k}{\alpha_k} \left(\lambda_1^{\alpha_k} + \lambda_2^{\alpha_k} + \lambda_3^{\alpha_k} - 3 \right)$$

Tahová zkouška pryže



Cv. 1 Odhad parametrů modelu W

Jednoosá tahová zkouška pryže

$$W = -\mu(\lambda_m^2 - 3) \ln \left(1 - \sqrt{\frac{(1-\beta)I_1 + \beta I_2 - 3}{\lambda_m^2 - 3}} \right) - \mu(\lambda_m^2 - 3) \sqrt{\frac{(1-\beta)I_1 + \beta I_2 - 3}{\lambda_m^2 - 3}} - \mu \frac{\sqrt{2}}{6} a ((1-\beta)I_1 + \beta I_2 - 3)^{\frac{3}{2}}$$

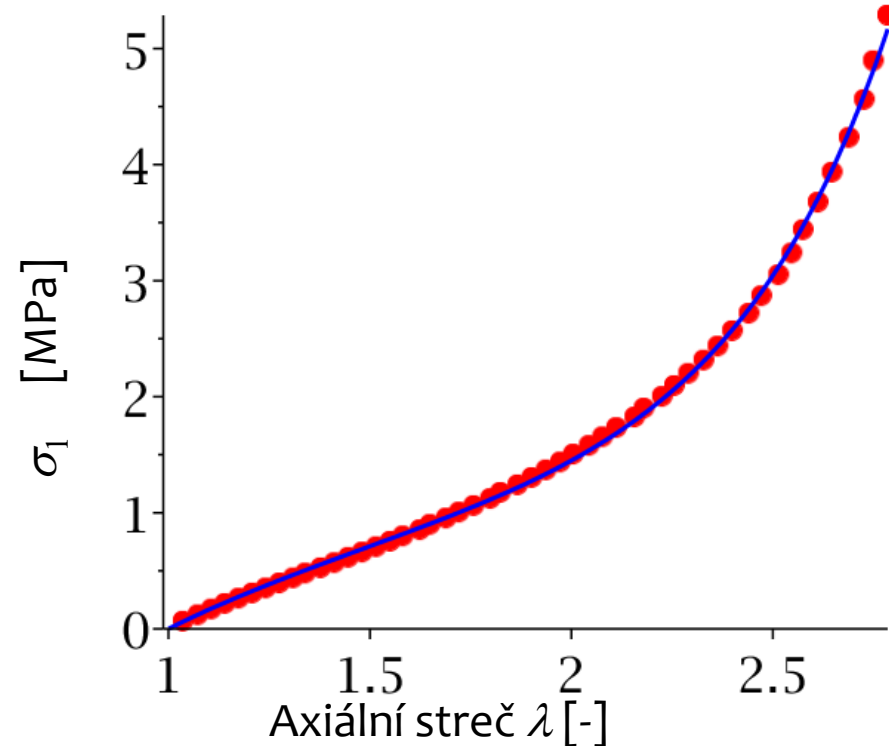
$$\mu = 0.5827 \text{ MPa,}$$

$$\lambda_m = 4.108,$$

$$\beta = 0,$$

$$a = 0.9006$$

$$\text{Koeficient determinace } R^2 = 0.9992$$



Cv. 2 Simulace jednoosé tahové zkoušky cévy

Jednoosá tahová zkouška anizotropního materiálu

Nasimulujte odezvu materiálu střední vrstvy stěny lidské aorty při jednoosém tahu. Pro popis chování materiálu použijte model publikovaný v:

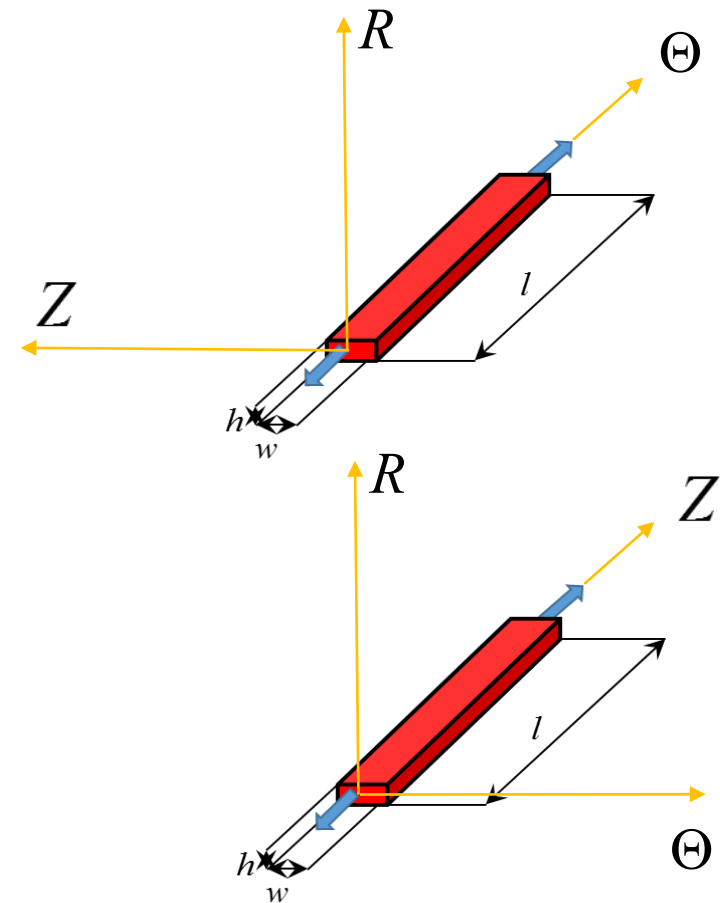
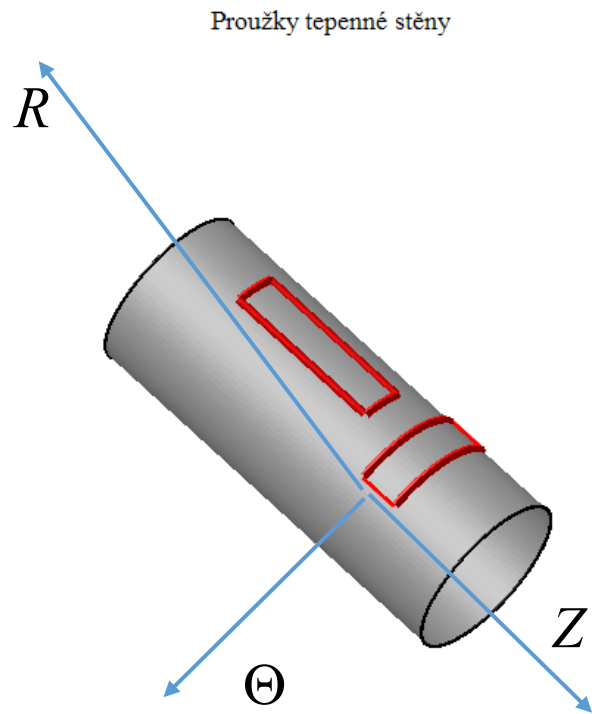
G.A. Holzapfel (2006) Determination of material models for arterial walls from uniaxial extension tests and histological structure. Journal of Theoretical Biology, 238:290-302. http://www.biomech.tugraz.at/images/pdf/Holzapfel-J_Theor_Biol-2006.pdf

$$W = W_{iso} + W_{aniso} = \frac{\mu}{2} (I_1 - 3) + \frac{c}{2} \left(e^{b_1 E_{\Theta\Theta}^2 + b_2 E_{ZZ}^2 + b_3 E_{\Theta\Theta} E_{ZZ}} - 1 \right)$$

$$\mu = 31.4 \text{ kPa} \quad c = 0.14 \text{ kPa} \quad b_1 = 32.8 \quad b_2 = 23.5 \quad b_3 = 14.7$$

Cv. 2 Simulace jednoosé tahové zkoušky cévy

Jednoosá tahová zkouška anizotropního materiálu



Cv. 2 Simulace jednoosé tahové zkoušky cévy

2. Jednoosá tahová zkouška anizotropního materiálu

1. Nejprve dosadíme za Green-Lagrangeovy strainy \mathbf{E} streče, když předpokládáme

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_R & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\Theta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_Z \end{pmatrix} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad E_{KK} = \frac{1}{2}(\lambda_K^2 - 1) \quad K = R, \Theta, Z$$

2. Získáme konstitutivní rovnici $\sigma_{kk} = \lambda_K \frac{\partial W}{\partial \lambda_K} - p \quad k = r, \theta, z; K = R, \Theta, Z$

3. Eliminujeme p pomocí $\sigma_{rr} = 0$

4. Aplikujeme nestlačitelnost $\lambda_R = \frac{1}{\lambda_\Theta \lambda_Z}$

Cv. 2 Simulace jednoosé tahové zkoušky cévy

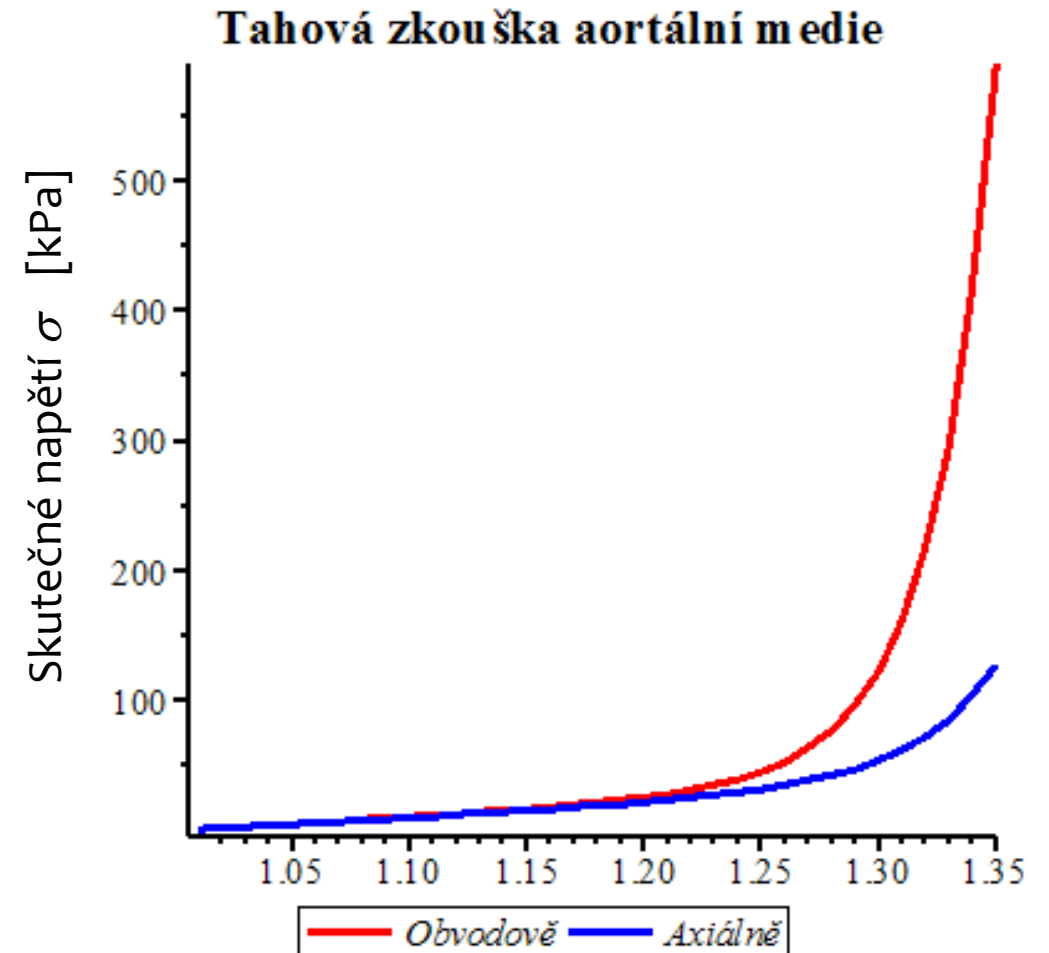
Jednoosá tahová zkouška anizotropního materiálu

5. Složky napětí jsou funkce dvou proměnných, díky anizotropii materiálu

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(\lambda_{\theta}, \lambda_z) \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}(\lambda_{\theta}, \lambda_z)$$

K výpočtu neznámého příčného streče (streč ve směru zkoušky volíme) použijeme okrajovou podmínku nulovosti příčného napětí. Tj. je-li zkouška ve směru λ_{θ} , λ_z vypočteme z rovnice $\sigma_{zz}(\lambda_z) = 0$ pro zvolenou hodnotu λ_{θ} .

Úlohu musíme řešit numericky v dostatečném počtu bodů, aby výsledné křivky vypadaly hladce...

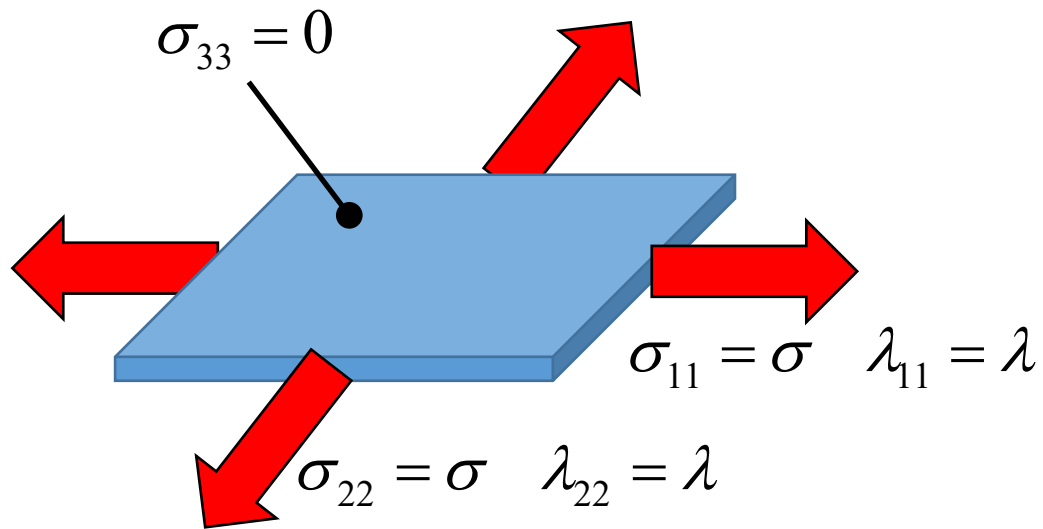


Cv. 3 Simulace tahové zkoušky 1D vs 2D

Předpověď chování při 2D rovnoosém tahu izotropní pryže

$$W = -\mu(\lambda_m^2 - 3) \ln \left(1 - \sqrt{\frac{(1-\beta)I_1 + \beta I_2 - 3}{\lambda_m^2 - 3}} \right) - \mu(\lambda_m^2 - 3) \sqrt{\frac{(1-\beta)I_1 + \beta I_2 - 3}{\lambda_m^2 - 3}} - \mu \frac{\sqrt{2}}{6} a ((1-\beta)I_1 + \beta I_2 - 3)^{\frac{3}{2}}$$

$$\mu = 0.5827 \text{ MPa}, \lambda_m = 4.108, \beta = 0, a = 0.9006$$



$$\sigma_{11} = \lambda_{11} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{11}} - p$$

$$\sigma_{22} = \lambda_{22} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{22}} - p$$

$$\sigma_{33} = \lambda_{33} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{33}} - p$$

Cv. 3 Simulace tahové zkoušky 1D vs 2D

Předpověď chování při 2D rovnoosém tahu izotropní pryže

$$\sigma_{11} = \lambda_{11} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{11}} - p$$

$$\sigma_{22} = \lambda_{22} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{22}} - p$$

$$\sigma_{33} = \lambda_{33} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{33}} - p$$

$$p = \lambda_{33} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{33}}$$

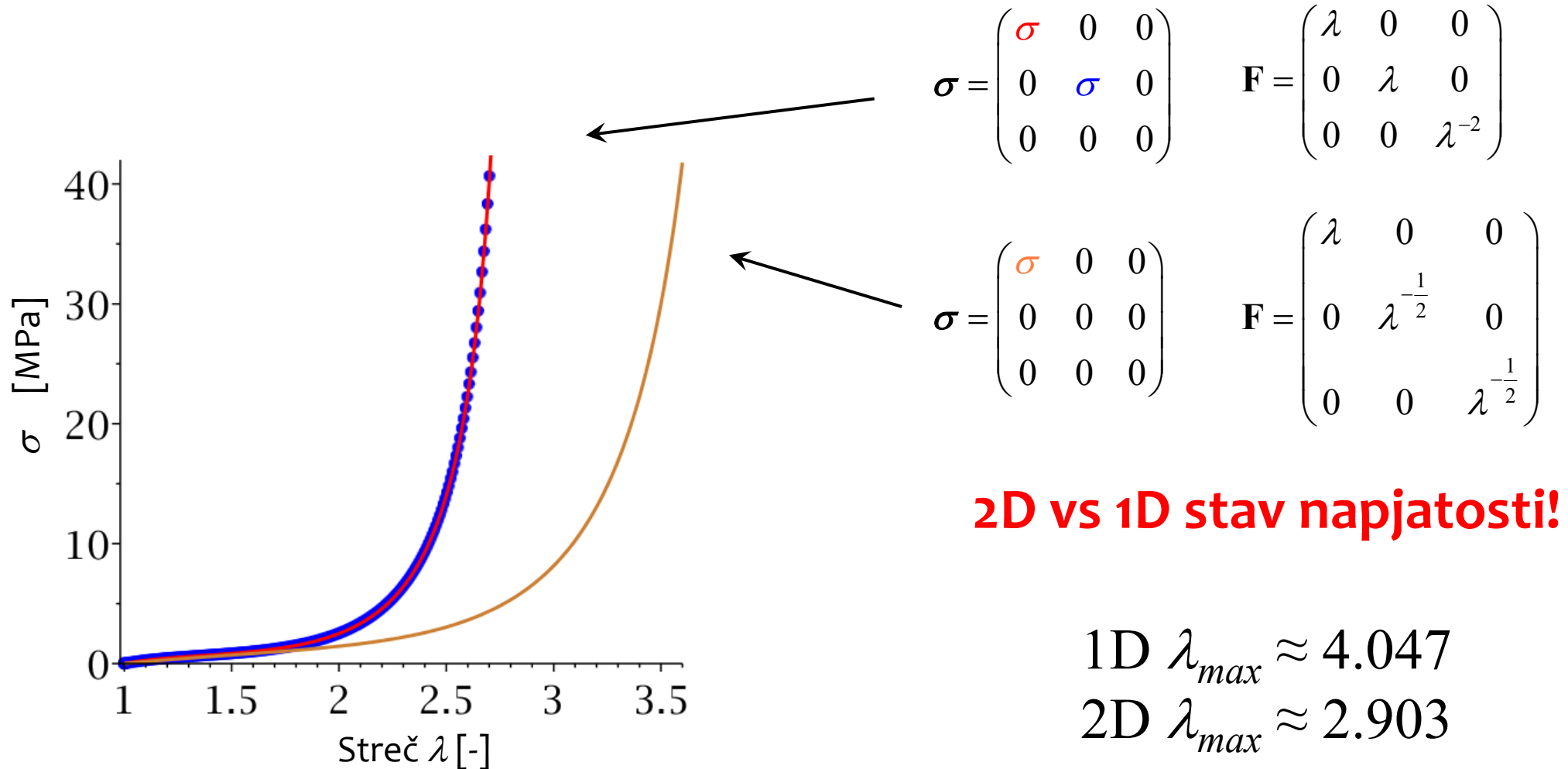
$$\sigma_{11}(\lambda_{11}, \lambda_{22}) = \left[\lambda_{11} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{11}} - \lambda_{33} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{33}} \right]_{\lambda_{33} = \lambda_{11}^{-1} \lambda_{22}^{-1}}$$

$$\sigma_{22}(\lambda_{11}, \lambda_{22}) = \left[\lambda_{22} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{22}} - \lambda_{33} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{33}} \right]_{\lambda_{33} = \lambda_{11}^{-1} \lambda_{22}^{-1}}$$

$$\sigma(\lambda) = \left[\left[\lambda_{11} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{11}} - \lambda_{33} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{33}} \right]_{\lambda_{33} = \lambda_{11}^{-1} \lambda_{22}^{-1}} \right]_{\lambda_{11} = \lambda, \lambda_{22} = \lambda} = \left[\left[\lambda_{22} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{22}} - \lambda_{33} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{33}} \right]_{\lambda_{33} = \lambda_{11}^{-1} \lambda_{22}^{-1}} \right]_{\lambda_{11} = \lambda, \lambda_{22} = \lambda}$$

Cv. 3 Simulace tahové zkoušky 1D vs 2D

Předpověď chování při 2D rovnoosém tahu izotropní pryže vs. 1D tah



Cv. 4 Inflační nestabilita nelineární trubice

Inflace-extenze válcové trubice

Nasimulujte odezvu uzavřené **tenkostěnné válcové trubice**, která je nafukována vnitřním tlakem P . Trubicí považujte za **dostatečně dlouhou**, aby odezněly okrajové poruchy (ohybové momenty vzniklé připojením dna). Zabývejte se pouze odezvou ve střední části trubice.

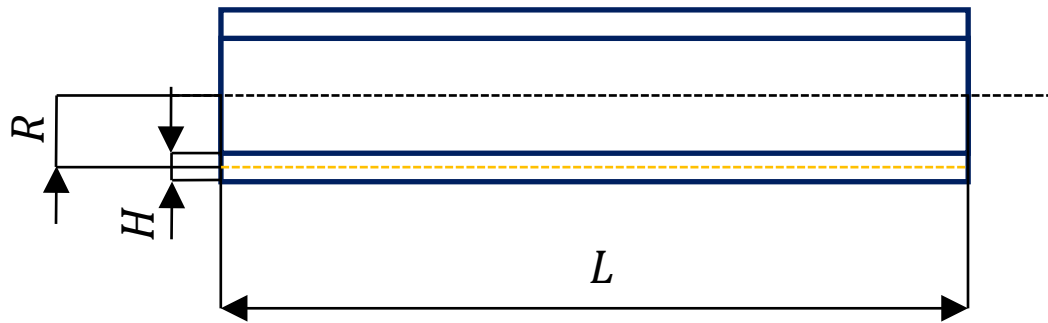
Uvažujte materiál s **Gentovým modelem** W pro $J_m = 10$ a 25 .

$$W = -\frac{\mu J_m}{2} \ln \left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right)$$

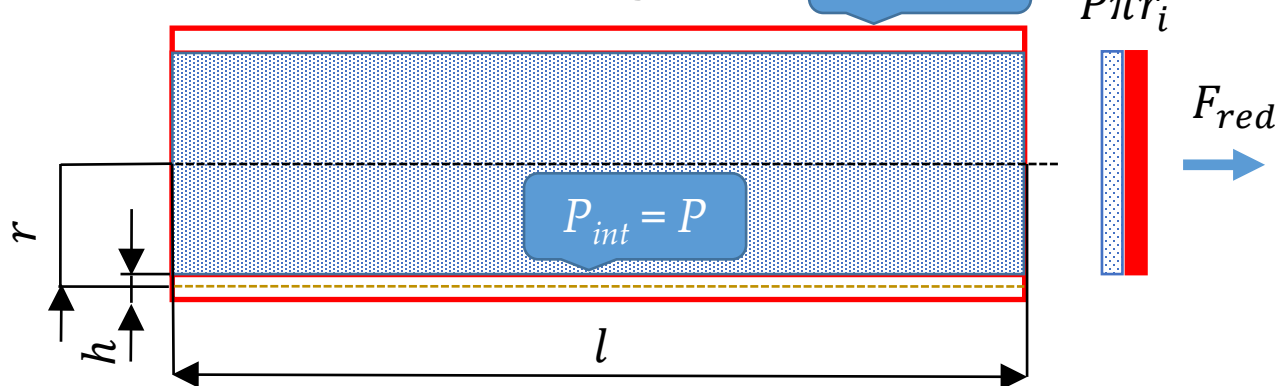
Cv. 4 Inflace a extenze válcové trubice

Válcová membránová skořepina

Referenční konfigurace



Průběžná konfigurace $P_{ext} = 0$



$$r = \lambda_{\theta\theta} R \quad z = \lambda_{zZ} Z \quad h = \lambda_{rR} H$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h}{H} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{L} \end{pmatrix}$$

Cv. 4 Inflační nestabilita nelineární trubice

$$\sum F_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{rr} = 0$$

$$\sum F_t = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{tt} = \frac{Pr}{h}$$

$$\sum F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{zz} = \frac{Pr}{2h}$$

$$\sigma_{rr} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} - p = 0$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{Pr}{h} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{\theta\Theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\Theta}} - p = \frac{Pr}{h}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{Pr}{2h} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} - p = \frac{Pr}{2h}$$

Cv. 4 Inflační nestabilita nelineární trubice

$$\sigma_{rr} = 0 \Rightarrow p = \frac{\mu \lambda_{rR}^2}{1 - \frac{\lambda_{rR}^2 + \lambda_{\theta\Theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3}{J_m}} \quad r = \lambda_{\theta\Theta} R \quad z = \lambda_{zZ} Z \quad h = \lambda_{rR} H \quad \lambda_{rR} = \frac{1}{\lambda_{\theta\Theta} \lambda_{zZ}}$$

$$\frac{\mu \lambda_{\theta\Theta}^2 J_m}{J_m - \left(\frac{1}{\lambda_{\theta\Theta}^2 \lambda_{zZ}^2} + \lambda_{\theta\Theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3 \right)} - \frac{\mu J_m}{\lambda_{\theta\Theta}^2 \lambda_{zZ}^2 \left(J_m - \left(\frac{1}{\lambda_{\theta\Theta}^2 \lambda_{zZ}^2} + \lambda_{\theta\Theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3 \right) \right)} = \frac{P \lambda_{\theta\Theta}^2 \lambda_{\theta\Theta}^2 \lambda_{zZ} R}{H}$$

$$\frac{\mu \lambda_{zZ}^2 J_m}{J_m - \left(\frac{1}{\lambda_{\theta\Theta}^2 \lambda_{zZ}^2} + \lambda_{\theta\Theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3 \right)} - \frac{\mu J_m}{\lambda_{\theta\Theta}^2 \lambda_{zZ}^2 \left(J_m - \left(\frac{1}{\lambda_{\theta\Theta}^2 \lambda_{zZ}^2} + \lambda_{\theta\Theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3 \right) \right)} = \frac{P \lambda_{\theta\Theta}^2 \lambda_{\theta\Theta}^2 \lambda_{zZ} R}{2H}$$

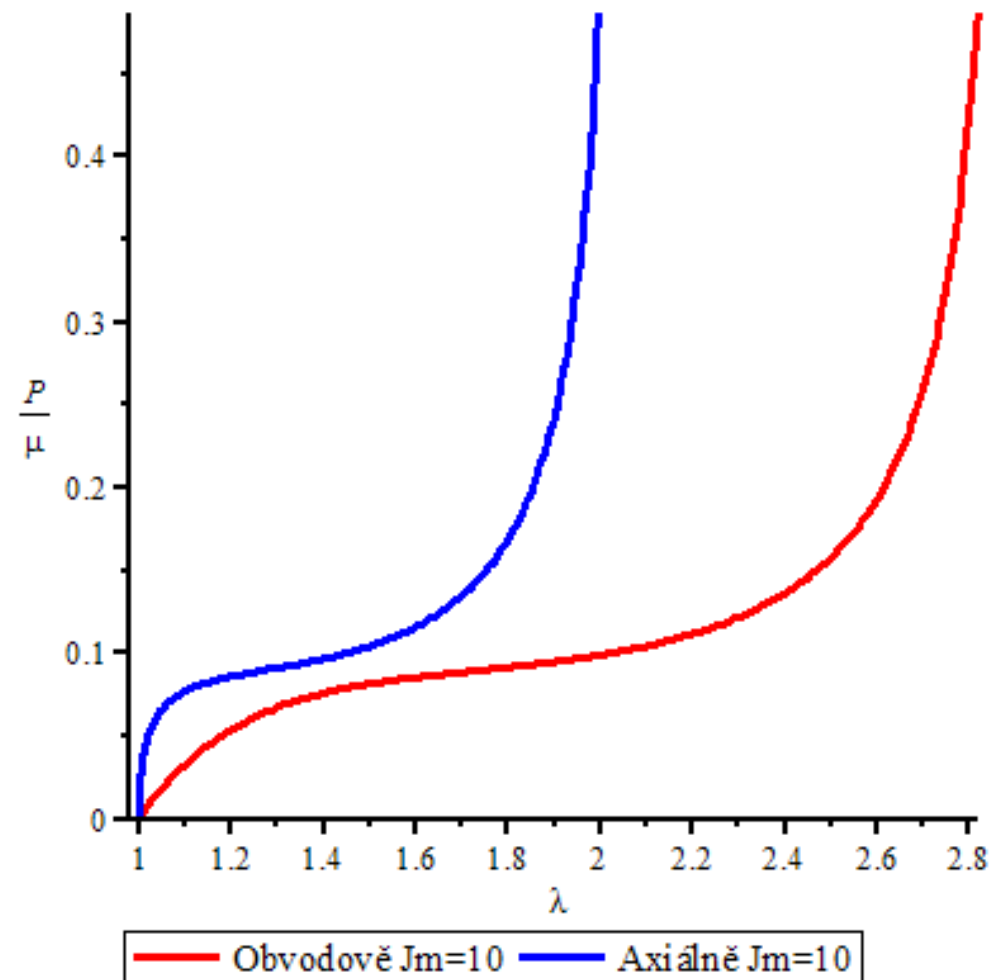
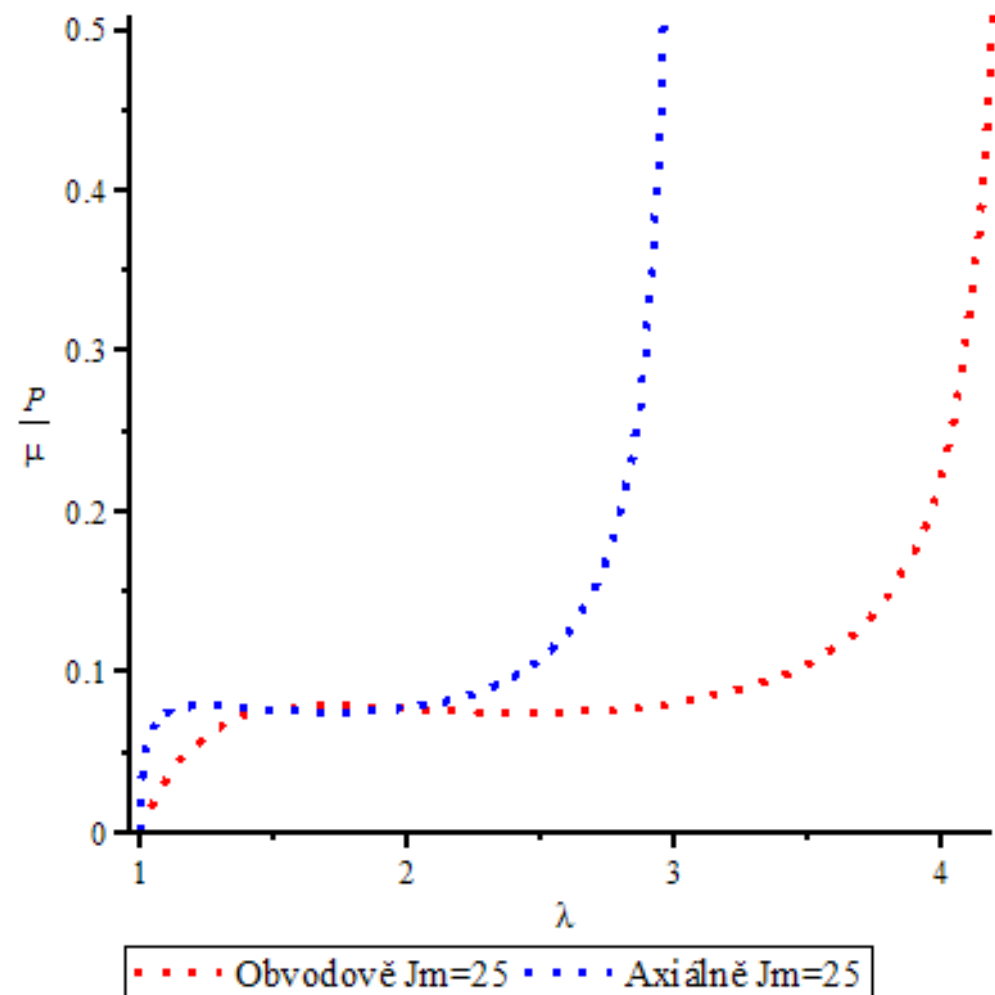
Cv. 4 Inflační nestabilita nelineární trubice

Nakonec celou soustavu normalizujeme μ (tj. podělíme) a zavedeme součinitel tenkonstěnnosti $\varepsilon = H/R$. **Rovnice jsou nyní bezrozměrné!**

Soustavu řešíme následujícím způsobem:

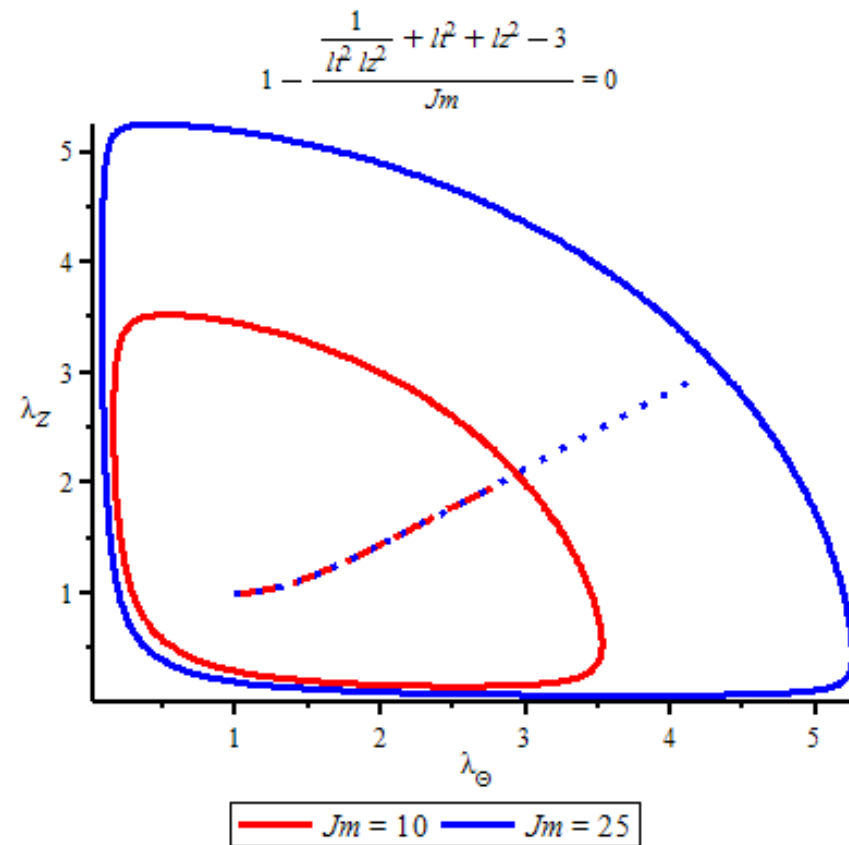
- (1) Zvolíme $\lambda_{\theta\theta}$
- (2) Rovnice řešíme pro neurčité P a λ_{zZ}
- (3) Postup opakujeme v takovém počtu a s tak jemným krokem pro $\lambda_{\theta\theta}$, abychom získali dostatečně hladké křivky

Cv. 4 Inflační nestabilita nelineární trubice



Cv. 4 Inflační nestabilita nelineární trubice

Oblasti kinematically přípustných deformací pro $J_m = 10$ a 25 a stopa inflace ve fázovém prostoru



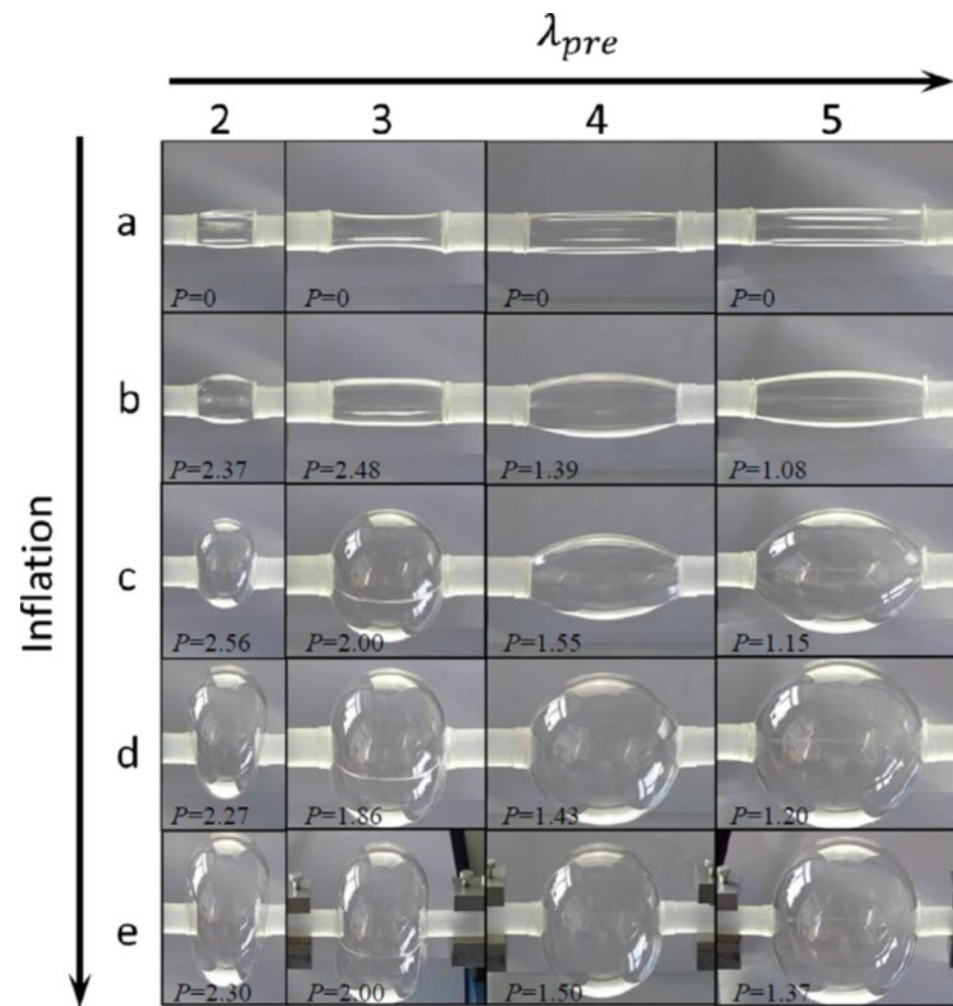
Cv. 4 Inflační nestabilita nelineární trubice

Získaná řešení pro oblast po ztrátě stability nafukování musíme považovat pouze za přibližná, protože výpočty jsme provedli za předpokladu válcovitosti trubice.

Experimentálně lze ale ověřit, že za mezí stability dochází ke změně způsobu deformace:

Rovnoměrná inflace válce přejde jedné z následujících možností: vydutí (bulging), vzepření (průhyb jako u ztráty stability prutu).

U vydutí je navíc možno rozlišit mezi: axiálním šířením výduti při konstantním poloměru ve střední části výduti, nebo nerovnoměrným nafukováním výduti.



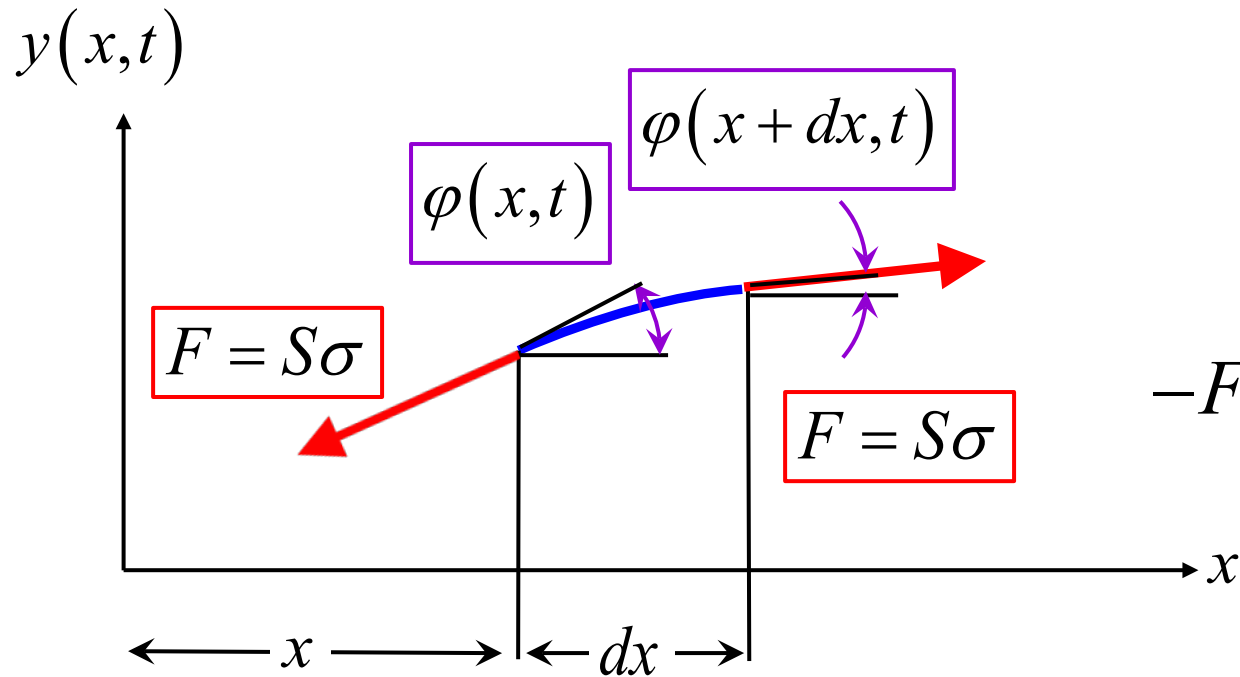
Cv. 5 Jak rychle se šíří tlaková vlna trubicí?

Odvodíme elementární vzorec pro šíření tlakové vlny trubicí. Obecně jde o poměrně obtížnou úlohu, a tak přijmeme několik zjednodušujících předpokladů.

- Geometrie bude tenká válcová trubice
- Vlna bude dlouhá a její čelo bude do délky růst jen pozvolně
- Kapalina bude ideální (nestlačitelná, nevazká)
- Setrvačná síla daná zrychlením stěny trubice bude zanedbatelná proti setrvačné síle kapaliny

Cv. 5 Jak rychle se šíří tlaková vlna trubicí?

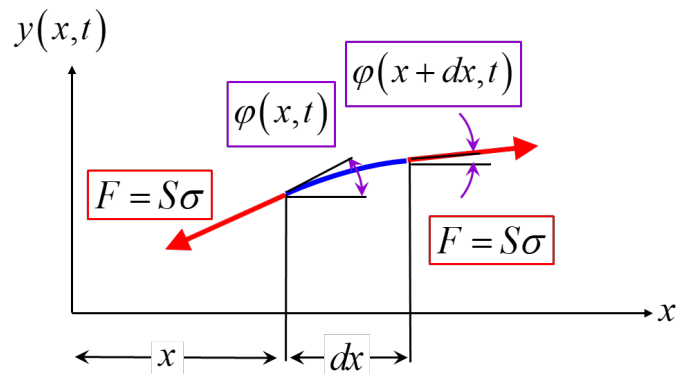
Ještě než se pustíme do tlakové vlny v nelineárně elastické trubici, připomeneme si, jak se to má s šířením rozruchu podél struny = nejjednodušší vlnová úloha (**vlnění/kmitání struny**).



$$\sum F_y = ma_y$$

$$-F \sin \varphi(x, t) + F \sin \varphi(x + dx, t) = ma_y$$

Příčná vlna na struně



$$-F \sin \varphi(x, t) + F \sin \varphi(x + dx, t) = ma_y$$

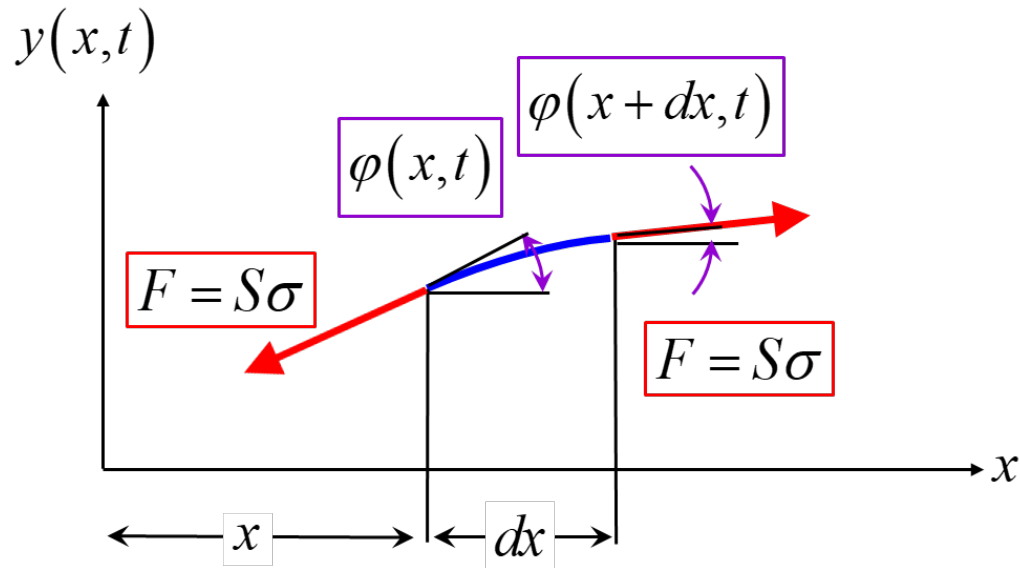
$$F (\sin \varphi(x + dx, t) - \sin \varphi(x, t)) = ma_y$$

dlouhá vlna \Rightarrow $\sin \varphi(x, t) \approx \tan \varphi(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$

$$\frac{\partial y(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \frac{m}{F} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} dx - \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \frac{S dx}{F} \rho \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$

Rychlost příčné vlny na struně c



$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}$$

$$c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

Předpokládali jsme, že vlna je dlouhá a že tahové napětí je konstantní.

Cv. 5 Jak rychle se šíří tlaková vlna trubicí?

Diagram showing a fluid element of length dz in a pipe with varying cross-section $A(z)$ and pressure $P(z)$. The element is moving with velocity $v(z)$. The forces acting on it are:

- Force from the left: $A(z)P(z)$
- Force from the right: $\left(P(z) + \frac{\partial P}{\partial z} dz\right) \left(A(z) + \frac{\partial A}{\partial z} dz\right)$
- Force from the walls: $P(z) \frac{\partial A}{\partial z} dz$
- Net force: $\rho A dz a(z)$

$$A(z)P(z) - \left(P(z) + \frac{\partial P}{\partial z} dz\right) \left(A(z) + \frac{\partial A}{\partial z} dz\right) + P(z) \frac{\partial A}{\partial z} dz = \rho A dz a(z)$$

Síla zleva

Síla zprava

Příspěvek síly od stěn

Setrvačná síla

Geometric relationship between pressure, area change, and wall force:

$$2P \frac{dA}{2} = P \frac{\partial A}{\partial z} dz$$

$$\frac{dA}{2} = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial z} dz$$

Cv. 5 Jak rychle se šíří tlaková vlna trubicí?

Diagram illustrating a fluid element of length dz in a pipe with varying cross-section $A(z)$ and pressure $P(z)$. The element is moving with velocity $v(z)$. The forces acting on the element are:

- Pressure $P(z)$ and area $A(z)$ on the left face.
- Pressure $P(z) + \frac{\partial P}{\partial z} dz$ and area $A(z) + \frac{\partial A}{\partial z} dz$ on the right face.
- Net force $P(z) \frac{\partial A}{\partial z} dz$ acting on the element.

The equation of motion for the element is:

$$A(z)P(z) - \left(P(z) + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \left(A(z) + \frac{\partial A}{\partial z} dz \right) + P(z) \frac{\partial A}{\partial z} dz = \rho A dz a(z)$$

Korektní výpočet zrychlení vyžaduje materiálovou derivaci

$$a = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z}$$

Cv. 5 Jak rychle se šíří tlaková vlna trubicí?

Silová rovnováha tedy říká, že

$$A(z)P(z) - \left(P(z) + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \left(A(z) + \frac{\partial A}{\partial z} dz \right) + P(z) \frac{\partial A}{\partial z} dz = \rho A dz a(z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

Cv. 5 Jak rychle se šíří tlaková vlna trubicí?

Připomeňme si, že silová rovnováha je obecně obsažena v bilanci hybnosti, kterou pro lineárně vazkou kapalinu obvykle píšeme ve formě Navierových-Stokesových rovnic. Pro případ nestlačitelné kapaliny píšeme:

$$\underbrace{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathit{grad}(\mathbf{v})\mathbf{v}}_{\text{Materiálová derivace } \frac{D\mathbf{v}}{Dt}} = -\frac{1}{\rho} \mathit{grad}(P) + \frac{\mu}{\rho} \mathit{div}(\mathit{grad}(\mathbf{v}) + \mathit{grad}(\mathbf{v})^T)$$

Materiálová derivace $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$

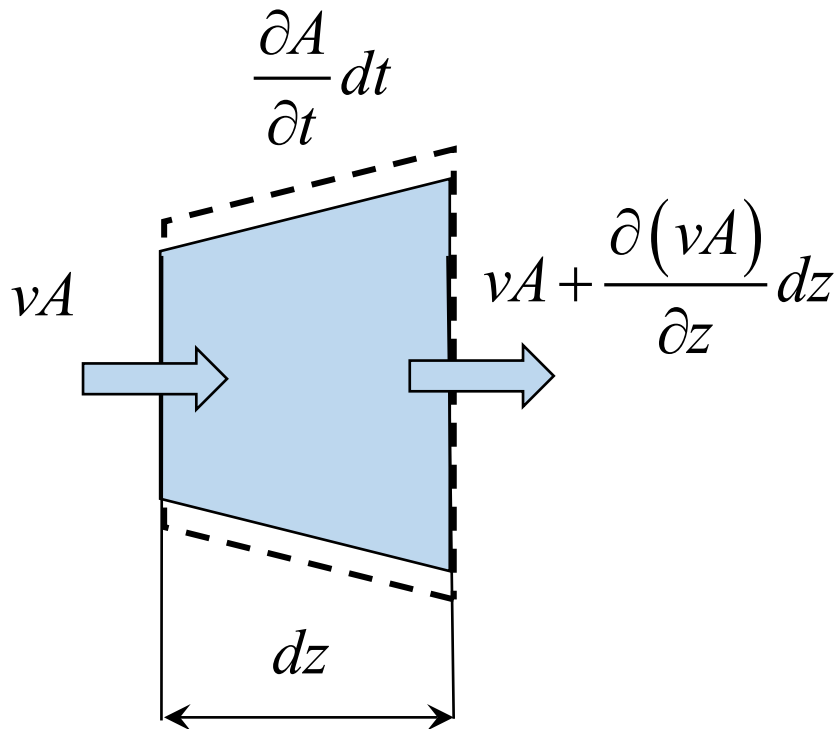
Vektor rychlosti proudění $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$

Pro nevazkou kapalinu $\mu = 0$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

Cv. 5 Jak rychle se šíří tlaková vlna trubicí?

Bilance hmoty vede k **rovnici kontinuity** pro nestlačitelnou kapalinu ve formě (jde nám o vtok a výtok hmoty + v čase se pohybující hranici):

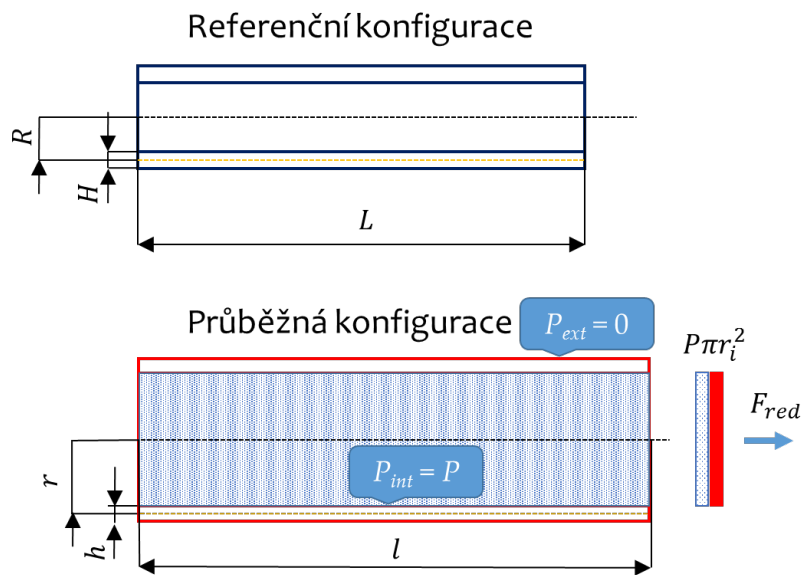


$$\rho v A = \rho \left(v A + \frac{\partial(vA)}{\partial z} dz + \frac{\partial A}{\partial t} dz \right)$$

$$\frac{\partial(vA)}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

Cv. 5 Jak rychle se šíří tlaková vlna trubicí?

Pokračujme v úpravách **rovnice continuity**. Předpokládejme, že při průchodu tlakového pulsu se trubice deformuje jako uzavřená válcová membránová skořepina, u níž zanedbáváme okrajové efekty (vetknutí):



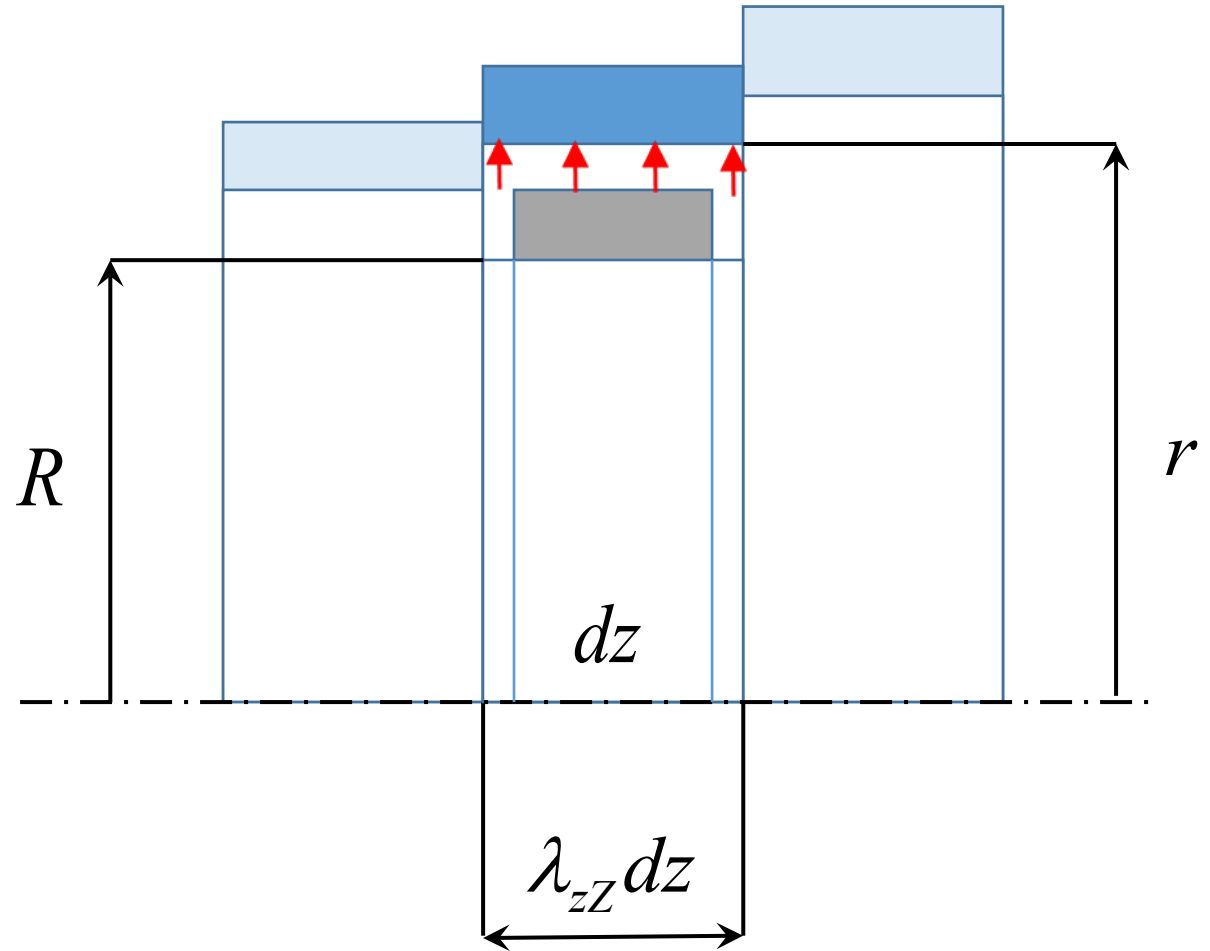
$$r = \lambda_{\theta\theta} R \quad z = \lambda_{zZ} Z \quad h = \lambda_{rR} H$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h}{H} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{L} \end{pmatrix}$$

Cv. 5 Jak rychle se šíří tlaková vlna trubicí?

Pokračujme v úpravách **rovnice kontinuity**. Předpokládejme, že při průchodu tlakového pulsu se trubice deformuje jako uzavřená válcová membránová skořepina, u níž zanedbáváme okrajové efekty (vetknutí):

$$r = \lambda_{\theta\theta} R \quad z = \lambda_{zZ} Z \quad h = \lambda_{rR} H$$



Úpravy rovnice kontinuity

$$\frac{\partial(vA)}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

$$A = \pi r^2 = \pi R^2 \lambda_{\theta\Theta}^2$$

\Rightarrow

$$\frac{\partial(v\pi R^2 \lambda_{\theta\Theta}^2)}{\partial z} + \frac{\partial(\pi R^2 \lambda_{\theta\Theta}^2)}{\partial t} = 0$$

$$\pi R^2 \frac{\partial(v\lambda_{\theta\Theta}^2)}{\partial z} + \pi R^2 \frac{\partial\lambda_{\theta\Theta}^2}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial(v\lambda_{\theta\Theta}^2)}{\partial z} + \frac{\partial\lambda_{\theta\Theta}^2}{\partial t} = 0$$

Úpravy rovnice kontinuity

$$\frac{\partial(v\lambda_{\theta\theta}^2)}{\partial z} + \frac{\partial\lambda_{\theta\theta}^2}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial z}\lambda_{\theta\theta}^2 + v\frac{\partial\lambda_{\theta\theta}^2}{\partial z} + 2\lambda_{\theta\theta}\frac{\partial\lambda_{\theta\theta}}{\partial t} = 0$$

Předpokládáme, že **vlna je dlouhá**, a tak změna poloměru $\lambda_{\theta\theta}$ je jen velmi pozvolnou funkcí z , $\partial\lambda_{\theta\theta}/\partial z \approx 0$

$$v\frac{\partial\lambda_{\theta\theta}^2}{\partial z} = v2\lambda_{\theta\theta}\frac{\partial\lambda_{\theta\theta}}{\partial z} \doteq 0 \quad \Leftarrow \quad \frac{\partial\lambda_{\theta\theta}}{\partial z} \doteq 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{2}{\lambda_{\theta\theta}}\frac{\partial\lambda_{\theta\theta}}{\partial t} = 0$$

Cv. 5 Jak rychle se šíří tlaková vlna trubicí?

Umělý krok. Do rovnice zavedeme výraz: $\frac{\partial P}{\partial \lambda_{\theta\theta}} = P_{\lambda_{\theta\theta}}$


$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{2}{\lambda_{\theta\theta}} \frac{\partial \lambda_{\theta\theta}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{2}{\lambda_{\theta\theta}} \frac{\partial P}{P_{\lambda_{\theta\theta}} \partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{K} \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

$$K = \frac{\lambda_{\theta\theta} P_{\lambda_{\theta\theta}}}{2}$$

Cv. 5 Jak rychle se šíří tlaková vlna trubicí?

Rovnici derivujeme podle času a přepíšeme:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{K} \frac{\partial P}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{K} \right) \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{K} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z} = -\frac{1}{K} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$


$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{K} \right) = \frac{1}{K^2} \frac{\partial K}{\partial t} \doteq 0$$

Cv. 5 Jak rychle se šíří tlaková vlna trubicí?

Stejnou úpravu provedeme i s bilancí hybnosti s tím rozdílem, že derivujeme podle prostoru, z . Navíc ještě zanedbáváme konvektivní člen zrychlení, protože jsme předpokládali, že **vlna je dlouhá**, a tak její čelo způsobuje jen **pozvolný nárůst poloměru, který by generoval nenulový konvektivní příspěvek** ke zrychlení kapaliny... $\partial v / \partial z \approx 0$.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}$$

Vlnová rovnice a rychlost vlny c

Porovnáním bilance hybnosti s bilancí hmoty (kontinuitou) dostáváme vlnovou rovnici pro tlakový puls $P = P(z,t)$. V rovnici vystupuje rychlost vlny c .

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z} &= -\frac{1}{K} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}$$

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda_{\infty}}{2\rho} \frac{\partial P}{\partial \lambda_{\infty}}}$$

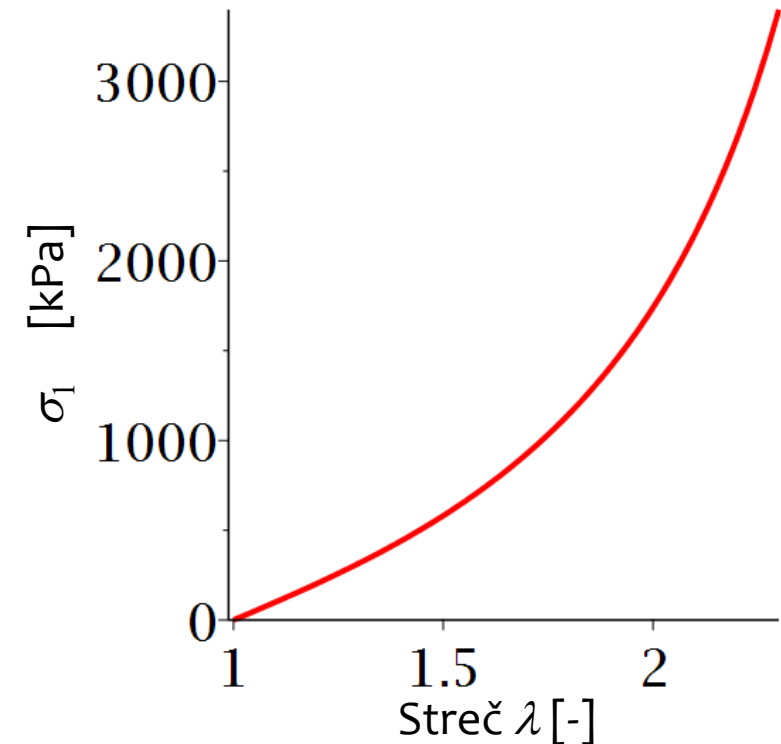
Vlnová rovnice a rychlost vlny c

Nyní, když nebudeme uvažovat setrvačnost stěny, můžeme do vzorce pro c dosadit výsledky kvazistatické simulace nafukování stěny a vypočítat rychlost šíření vlny

$$W = -\frac{\mu J_m}{2} \ln\left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m}\right)$$

$$\mu = 331.4 \text{ kPa}, J_m = 6$$

Jednoosý tah



Kvazistatické nafukování

Necht' má trubice $R = 10$ mm a $H = 1$ mm

Nafukování, jak již bylo řečeno, je popsáno rovnicemi:

$$\left[\lambda_{\theta\theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \right]_{\lambda_{rR} = \lambda_{\theta\theta}^{-1} \lambda_{zZ}^{-1}} - \left[\lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} \right]_{\lambda_{rR} = \lambda_{\theta\theta}^{-1} \lambda_{zZ}^{-1}} = P \lambda_{\theta\theta}^2 \lambda_{zZ} \frac{R}{H}$$
$$\left[\lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} \right]_{\lambda_{rR} = \lambda_{\theta\theta}^{-1} \lambda_{zZ}^{-1}} - \left[\lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} \right]_{\lambda_{rR} = \lambda_{\theta\theta}^{-1} \lambda_{zZ}^{-1}} = \frac{P}{2} \lambda_{\theta\theta}^2 \lambda_{zZ} \frac{R}{H} + \frac{F_{red}}{2\pi RH} \lambda_{zZ}$$

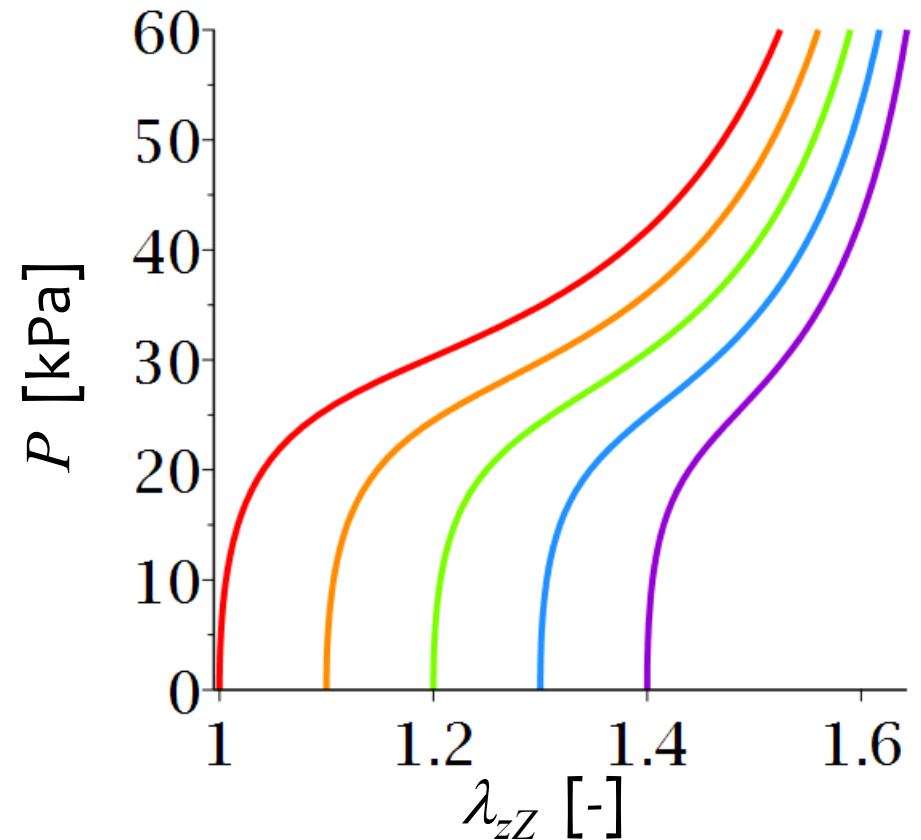
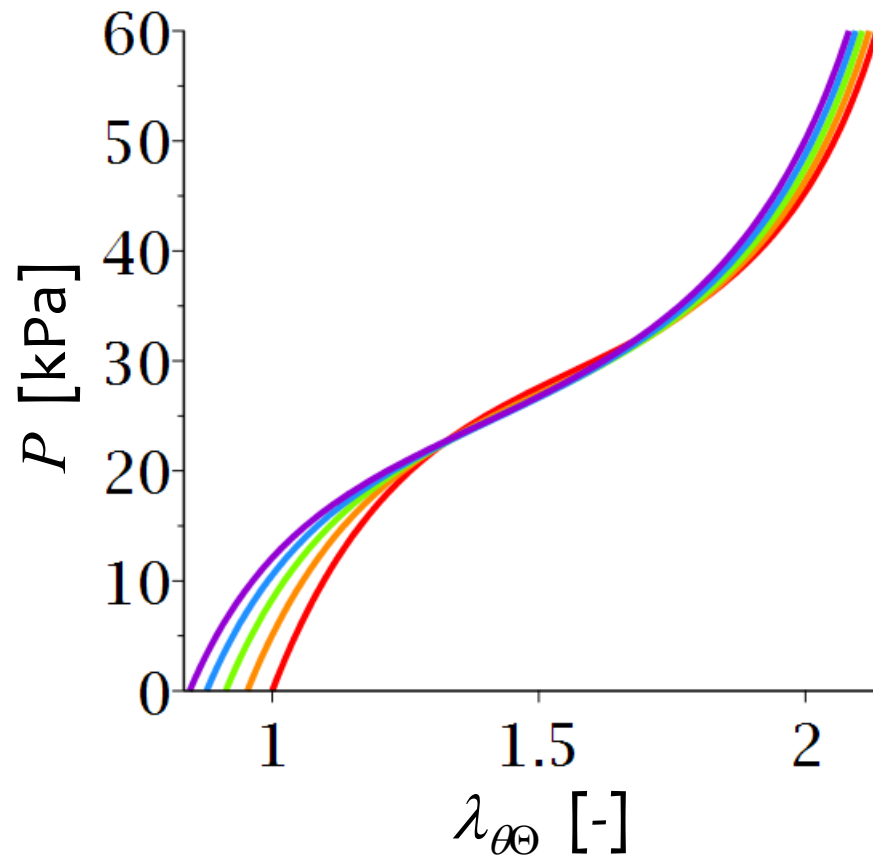
Kvazistatické nafukování

Řešením rovnic pro $R = 10$ mm,
 $H = 1$ mm, $\mu = 331$ kPa, $J_m = 4$
 je nafukování:

$$\left[\lambda_{\theta\theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \right]_{\lambda_{rR} = \lambda_{\theta\theta}^{-1} \lambda_{zZ}^{-1}} - \left[\lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} \right]_{\lambda_{rR} = \lambda_{\theta\theta}^{-1} \lambda_{zZ}^{-1}} = P \lambda_{\theta\theta}^2 \lambda_{zZ} \frac{R}{H}$$

$$\left[\lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} \right]_{\lambda_{rR} = \lambda_{\theta\theta}^{-1} \lambda_{zZ}^{-1}} - \left[\lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} \right]_{\lambda_{rR} = \lambda_{\theta\theta}^{-1} \lambda_{zZ}^{-1}} = \frac{P}{2} \lambda_{\theta\theta}^2 \lambda_{zZ} \frac{R}{H} + \frac{F_{red}}{2\pi R H} \lambda_{zZ}$$

- $\lambda_{zZ}^{ini} = 1$
- $\lambda_{zZ}^{ini} = 1.1$
- $\lambda_{zZ}^{ini} = 1.2$
- $\lambda_{zZ}^{ini} = 1.3$
- $\lambda_{zZ}^{ini} = 1.4$



Rychlost vlny c

$$c = \sqrt{\frac{\lambda_{\theta\theta}}{2\rho} \frac{\partial P}{\partial \lambda_{\theta\theta}}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda_{\theta\theta}} = \dots$$

$$P = \frac{H}{R} \frac{1}{\lambda_{\theta\theta}^2 \lambda_{zZ}} \left[\lambda_{\theta\theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \right]_{\lambda_{rR} = \lambda_{\theta\theta}^{-1} \lambda_{zZ}^{-1}} - \frac{H}{R} \frac{1}{\lambda_{\theta\theta}^2 \lambda_{zZ}} \left[\lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} \right]_{\lambda_{rR} = \lambda_{\theta\theta}^{-1} \lambda_{zZ}^{-1}}$$

Pro přesné vyjádření $\partial P / \partial \lambda_{\theta\theta}$ je třeba uvážit, že $\lambda_{zZ} = \lambda_{zZ}(\lambda_{\theta\theta})$, tj. $\partial P / \partial \lambda_{\theta\theta} = \partial P(\lambda_{\theta\theta}, \lambda_{zZ}(\lambda_{\theta\theta})) / \partial \lambda_{\theta\theta} = \partial P / \partial \lambda_{\theta\theta} + \partial P / \partial \lambda_{zZ} \cdot \partial \lambda_{zZ} / \partial \lambda_{\theta\theta}$. Výraz $\partial \lambda_{zZ} / \partial \lambda_{\theta\theta}$ obdržíme využitím věty o derivaci implicitní funkce, kde F ztotožníme s F_{red} , tj. $\partial \lambda_{zZ} / \partial \lambda_{\theta\theta} = -(\partial F / \partial \lambda_{\theta\theta}) / (\partial F / \partial \lambda_{zZ})$.

Rychlost vlny c

$$c = \sqrt{\frac{\lambda_{\theta\theta}}{2\rho} \frac{\partial P}{\partial \lambda_{\theta\theta}}}$$

Hustota krve
 $\rho = 1060 \text{ kg/m}^3$

