Το ανοιχτό μοντέλο Leontief

Μιχάλης Τζούμας
Σχολικός Σύμβουλος κλάδου ΠΕ03 Ν. Αιτ/νίας
mtzoumas@sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο Wassily Leontief, ο οποίος τιμήθηκε με το βραβείο Νόμπελ Οικονομίας το 1973, εισηγήθηκε το μοντέλο εισροών-εκροών, στο έργο του "Quantitative input and output relations in the economic system of the United States" το 1936. Η απλότητα και η καθαρότητα της σκέψης του είναι εκείνα, που το καθιστούν αξιοθαύμαστο. Συγκεκριμένα, ο Leontief περιέγραψε με θαυμαστό τρόπο την αλληλεξάρτηση των βιομηχανικών προϊόντων. Το ερώτημα στο οποίο έδωσε απάντηση ήταν το εξής: «Ποιο θα μπορούσε να είναι το επίπεδο παραγωγής n βιομηχανικών προϊόντων, που αλληλεξαρτώνται, σε μια συγκεκριμένη οικονομική κατάσταση παραγωγής, ώστε να ικανοποιείται η ολική ζήτηση αυτών»;

1. Προαπαιτούμενα. Πριν δούμε τον τρόπο με τον οποίο απάντησε ο Leontief στο παραπάνω ερώτημα, θα ήταν σκόπιμο να δώσουμε ή να θυμίσουμε μερικά στοιχεία από τη θεωρεία πινάκων. Έστω ο πίνακας $A \in R^{nxn}$, θα λέμε ότι ένας πίνακας A είναι μη αρνητικός και θα σημειώνουμε $A \geq 0$ αν και μόνον αν (ανν) $a_{ij} \geq 0, 1 \leq i, j \leq n$. Ο πίνακας A είναι θετικός και θα σημειώνουμε $A > 0$ ανν $a_{ij} \geq 0, 1 \leq i, j \leq n$ και $A \neq 0$. Τέλος θα λέμε ότι ο πίνακας A είναι αυστηρά θετικός και θα σημειώνουμε $A \gg 0$ ανν $a_{ij} > 0, 1 \leq i, j \leq n$ Αντίστοιχοι ορισμοί θα ισχύουν για τα διανύσματα $u \in R^n$. Η έννοια της διάταξης μεταξύ δυο πινάκων $A, B \in R^{nxn}$ ορίζεται με βάση το αν η διαφορά είναι ένας μη αρνητικός, θετικός ή αυστηρά θετικός πίνακας. Μια έννοια στενά συνδεδεμένη με τους πίνακες είναι η έννοια της "irreducibility" και "reducibility".

Ορισμός (1.1). Λέμε ότι ο πίνακας $A \in R^{nxn}$ είναι "reducible" ανν υπάρχει ένας μεταθετικός* πίνακας P, ώστε να ισχύει:

---

* Μεταθετικός είναι ένας πίνακας που έχει σε κάθε γραμμή του και κάθε στήλη μια μονάδα και σε όλες τις άλλες θέσεις του έχει το μηδέν. Όταν ένας μεταθετικός πίνακας πολλαπλασιάζει από αριστερά τον πίνακα A μεταθέτει τις γραμμές του ενώ όταν πολλαπλασιάζει από δεξιά τον A μεταθέτει τις στήλες του.

$$P^T AP = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(1.2)}$$

όπου B και C είναι τετραγωνικοί πίνακες και P^T σημαίνει τον ανάστροφος του P. Σε αντίθετη περίπτωση θα λέμε ότι ο πίνακας είναι “irreducible”. Ένας $1x1$ πίνακας είναι πάντα “irreducible”, εκτός κι αν είναι μηδέν.

Είναι φανερό ότι ένας “irreducible” μη αρνητικός πίνακας είναι πάντα θετικός. Επίσης, αφού με το μεταθετικό μετασχηματισμός (1.2) τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα A παραμένουν στη διαγώνιο, αν ο πίνακας A είναι “irreducible” τότε και ο $A + aI$ είναι “irreducible”. Σημαντικά θεωρήματα ισχύουν για τους πίνακες αυτούς. Χωρίς απόδειξη, για οικονομία χώρου, παραθέτουμε ορισμένα από αυτά. Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται μπορεί να ανατρέξει στα κλασικά, πλέον, βιβλία αναφοράς των Varga[1] και Berman και Plemmons[2].

Θεώρημα (1.3) Αν ο πίνακας $A(> 0)$ είναι ένας nxn “irreducible” πίνακας, τότε

$$(I + A)^{n-1} \gg 0. \qquad \textbf{(1.4)}$$

Η σχέση (1.4), ισχύει για κάθε nxn “irreducible” πίνακα $A(> 0)$, με $a_{ii} > 0$, $1 \le i \le n$, αφού κάθε τέτοιος πίνακας μπορεί να γραφεί

$$A = \frac{1}{s} sA = \frac{1}{s}(I + B),\ \mu\varepsilon\ \mathrm{B} > 0, \qquad \textbf{(1.5)}$$

αρκεί να πάρουμε ως $s = \max\{a_{ii}, 1 \le i \le n\}$.

Οι έννοιες αυτές είναι στενά συνδεδεμένες με την επίλυση γραμμικών συστημάτων, αφού ένα γραμμικό σύστημα της μορφής

$$Ax = b, \qquad \textbf{(1.6)}$$

με τον πίνακα A “reducible” μπορεί να γραφεί ως εξής

$$P^T APP^T x = P^T b \iff \begin{pmatrix} B & 0 \\ D & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(1.7)}$$

Απλή άλγεβρα στη δεύτερη από τις προηγούμενες σχέσεις μας δίνει

$$Bx_1 = b_1 \quad \kappa\alpha\iota \quad Cx_2 = b_2 - Dx_1. \qquad \textbf{(1.8)}$$

Δηλαδή η λύση του συστήματος (1.7) προκύπτει από τη λύση δυο μικρότερων συστημάτων, όπως αυτά της σχέσης (1.8). Ανεξάρτητα από την “irreducibility” ιδιότητα των πινάκων και από το θετικό ή μη αυτών, ισχύει το επόμενο Θεώρημα [1], [2]

Θεώρημα (1.9). Έστω $B \in R^{nxn}$ **με** $\rho(B) < 1$**, τότε ο** $I - B$ **είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα ισχύει**

$$(I-B)^{-1} = I + B + B^2 + B^3 + \cdots. \qquad \mathbf{(1.10)}$$

Αντιστρόφως αν η σειρά του δεύτερου μέλους της (1.10) **συγκλίνει, τότε**

$$\rho(B) < 1. \qquad \mathbf{(1.11)}$$

Η $\rho(B)$ είναι η φασματική ακτίνα του πίνακα B, δηλαδή το μεγαλύτερο από τα μέτρα των ιδιοτιμών του. Μάλιστα αποδεικνύετε ότι

$$\rho(B) < 1 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} B^k = 0. \qquad \mathbf{(1.12)}$$

Φυσικά, αν ο $B > 0$, τέτοιος θα είναι και ο $(I-B)^{-1}$, αφού οι δυνάμει του B στη σχέση (1.10) θα είναι θετικοί πίνακες. Επιπλέον αποδεικνύεται [1] ότι αν ο B είναι «irreducible”, τότε ο $(I-B)^{-1}$ □ 0.

Ίσως, το πιο σημαντικό θεώρημα σ' αυτούς τους πίνακες είναι το επόμενο θεώρημα, γνωστό ως Θεώρημα των Perron[3]–Frobenius[4], που έχει επηρεάσει σημαντικά τη θεωρία τους. Η απόδειξη του θεωρήματος βρίσκεται σε ένα πλήθος επιστημονικών βιβλίων π.χ. [1], [2] και δε θα την δώσουμε εδώ.

Θεώρημα (1.13) Αν ο πίνακας A **είναι θετικός τετραγωνικός πίνακας και** $\rho(A)$ **η φασματική ακτίνα του τότε:**

- **Η** $\rho(A)$ **είναι απλή ιδιοτιμή.**
- **Κάθε άλλη ιδιοτιμή με το ίδιο μέτρο είναι επίσης απλή.**
- **Στη** $\rho(A)$ **αντιστοιχεί ένα αυστηρά θετικό ιδιοδιάνυσμα** $x($□ $0)$ **και είναι μοναδικό με την έννοια ότι κάθε άλλο αυστηρά θετικό ιδιοδιάνυσμα του** A **είναι θετικό πολλαπλάσιο του** x**.**
- **Επιπλέον όταν** A□ 0**, τότε η** $\rho(A)$ **είναι η μοναδική ιδιοτιμή με αυτό το μέτρο.**

Οι πίνακες που θα προκύψουν από το μοντέλο Leontief έχουν τη χαρακτηριστική ιδιότητα τα μη διαγώνια στοιχεία τους να είναι μη θετικά, δηλαδή

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & -a_{21} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ \mu\varepsilon\ a_{ij} \geq 0,\ 1 \leq i,\ j \leq n\ \kappa\alpha\iota\ i \neq j\,. \mathbf{(1.14)}$$

Οι πίνακες της σχέσης (1.14) απαντώνται στη διεθνή βιβλιογραφία με το όνομα *Ζ*-πίνακες. Είναι φανερό ότι οι πίνακες αυτοί μπορούν να γραφούν στη μορφή $A = sI - B$ με $s > 0$ και $B \geq 0$, αρκεί να επιλέξουμε ένα θετικό $s > \max\{a_{ii}, 1 \leq i \leq n\}$ και $b_{ii} = s - a_{ii}$.

Ορισμός (1.15) Κάθε πίνακας A **της μορφής** (1.14) **για τον οποίο ισχύει** $s \geq \rho(B)$**, όπου** $\rho(B)$ **η φασματική ακτίνα του** B**, καλείται** *Μ*-**πίνακας.**

Υποθέτοντας ότι $s > \rho(B) \Leftrightarrow \dfrac{\rho(B)}{s} < 1$ και αφού $A = s\left(I - \dfrac{1}{s}B\right)$, από το Θεώρημα **(1.9)** θα ισχύει

$$A^{-1} = \frac{1}{s}\left(I - \frac{\rho(B)}{s}B\right)^{-1} > 0\,. \qquad \mathbf{(1.16)}$$

Επιπλέον αν ο A είναι “irreducible” θα έχουμε ότι $A^{-1} \gg 0$. Έτσι αποδείχτηκε το επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα (1.17). Έστω ότι ο πίνακας A **είναι ένας αντιστρέψιμος** ***Μ*-πίνακας, τότε ο** $A^{-1} > 0$ **και αν επιπλέον ο** A **είναι “irreducible” ο** $A^{-1} \gg 0$**.**

2. Ένα παράδειγμα Ας υποθέσουμε ότι ένα οικονομικό σύστημα αποτελείται από τρία μόνο διαφορετικά είδη, π.χ. άνθρακα, ατσάλι και ηλεκτρική ενέργεια, τα οποία προφανώς αλληλεξαρτώνται. Γι αυτά τα τρία είδη υπάρχει μια εξωτερική ζήτηση. Για να είναι, δε, συμβιβαστές οι πάσης φύσης πράξεις μας θα υποθέσουμε ότι οι μετρήσεις μας, όσον αφορά τα είδη, θα γίνονται σε μονάδες €. Στον επόμενο πίνακα φαίνεται η σχέση μεταξύ των ειδών αυτών καθώς και η ζήτησή τους.

	Άνθρακας	Ατσάλι	Ηλ. Ενέργ.	Ζήτηση	Σύνολο
Άνθρακας	24	112	215	60	411
Ατσάλι	93	58	123	140	414
Ηλ. Ενέργ.	190	34	65	120	409

Πίνακας 1

Διαβάζοντας οριζόντια τις γραμμές του παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι ο άνθρακας, για παράδειγμα, δίνει 24 μονάδες για την παραγωγή ίδιου προϊόντος (άνθρακα), 112 μονάδες για την παραγωγή του ατσαλιού, 215 μονάδες για την παραγωγή της ηλεκτρικής ενέργειας και 60 μονάδες στη εξωτερική ζήτηση. Συνολικά, δηλαδή, παράγονται 411 μονάδες. Διαβάζοντας τις στήλες βλέπουμε ότι το ίδιο προϊόν, για την παραγωγή του χρειάζεται 24 μονάδες άνθρακα, 93 μονάδες ατσαλιού και 190 μονάδες ηλεκτρικής ενέργειας. Παρόμοια ανάλυση ισχύει και για τις επόμενες γραμμές και στήλες του ίδιου πίνακα. Διαιρώντας, τώρα, τους αριθμούς των κελιών κάθε γραμμής με τον αριθμό που βρίσκεται στην ίδια γραμμή και την τελευταία στήλη έχουμε τον επόμενο πίνακα, στον οποίο φαίνεται η συμμετοχή του κάθε είδους σε ποσοστά στην παραγωγή μιας συνολικά μονάδας του είδους.

	Άνθρακας	Ατσάλι	Ηλ. Ενέργ.	Ζήτηση	Σύνολο
Άνθρακας	0,058	0,273	0,523	0,146	1
Ατσάλι	0,225	0,140	0,297	0,338	1
Ηλ. Ενέργ.	0,465	0,083	0,159	0,293	1

Πίνακας 2

Πλέον μπορούμε να μιλάμε για διάνυσμα παραγωγής και διάνυσμα ζήτησης. Αν $x=(x_1,x_2,x_3)^T$ είναι το διάνυσμα παραγωγή προφανώς ισχύει η επόμενη σχέση.

$$\begin{pmatrix} 0{,}058 & 0{,}273 & 0{,}523 \\ 0{,}225 & 0{,}140 & 0{,}297 \\ 0{,}465 & 0{,}083 & 0{,}159 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0{,}146\,x_1 \\ 0{,}338\,x_2 \\ 0{,}293\,x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(2.1)}$$

Θέτοντας δε $(0.146x_1, 0.133x_2, 0.293x_3)^T=(d_1,d_2,d_3)^T$ (το διάνυσμα ζήτησης) προκύπτει

$$\begin{pmatrix} 0{,}058 & 0{,}273 & 0{,}523 \\ 0{,}225 & 0{,}140 & 0{,}297 \\ 0{,}465 & 0{,}083 & 0{,}159 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(2.2)}$$

Αναδιατάσσοντας την παραπάνω σχέση παίρνουμε μια έκφραση της μορφής

$$Ax=d \Leftrightarrow (I-T)x=d \Leftrightarrow x=(I-T)^{-1}d\,, \qquad \textbf{(2.3)}$$

όπου I ο μοναδιαίος πίνακας και

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}058 & 0{,}273 & 0{,}523 \\ 0{,}225 & 0{,}140 & 0{,}297 \\ 0{,}465 & 0{,}083 & 0{,}159 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(2.4)}$$

Ο πίνακας T (πίνακας εισόδου) της σχέσης (2.4) είναι σταθερός και γνωστός πίνακας. Τα στοιχεία t_{ij} αυτού του πίνακα αντιπροσωπεύουν την ποσοστιαία συμμετοχή του κάθε προϊόντος στην παραγωγή του εαυτού του ή κάποιου άλλου. Όταν με κάποιο τρόπο μπορέσουμε να προσδιορίσουμε το διάνυσμα ζήτησης d, λύνοντας το σύστημα (2.3), καθορίζουμε το διάνυσμα παραγωγής x. Χρησιμοποιώντας την τελευταία από τις σχέσεις (2.3), βρίσκουμε $x^T = (411, 412, 410)$, που είναι περίπου εκείνο του Πίνακα 1, όπως αναμέναμε.

3. Το ανοιχτό μοντέλο Leontief. Υποθέτουμε ότι μια οικονομία είναι χωρισμένη σε n τομείς, καθένας από τους οποίους παράγει ένα προϊόν, το οποίο καταναλώνεται από τον ίδιο τομέα, από τους άλλους τομείς και τελικά και κάποιους εξωτερικούς τομείς, που θα τους θέσουμε με την γενική ονομασία εξωτερική ζήτηση. Τώρα, για να δηλώσουμε την κατάσταση του i τομέα, με το i προϊόν, χρησιμοποιούμε τις παρακάτω ονομασίες και συμβολισμούς:

- x_i **:** Δηλώνει το συνολικό ποσόν παραγωγής του i προϊόντος.
- x_{ij} : Δηλώνει τη ζήτηση του i προϊόντος από το j προϊόν.
- d_i: Δηλώνει το συνολικό ποσό της εξωτερικής ζήτησης του i προϊόντος.

Το ολικό ισοζύγιο για κάθε τομέα, παρουσιάζεται με την επόμενη ισότητα

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + d_i = x_i,\ 1 \le i \le n\,. \qquad \textbf{(3.1)}$$

Υποθέτοντας ότι η ζήτηση από τον τομέα i, ανά μονάδα παραγωγής του κάθε τομέα j, είναι σταθερή και ίση με t_{ij}, οι σταθεροί συντελεστές t_{ij} ικανοποιούν τη συνθήκη

$$x_{ij} = t_{ij} \cdot x_i,\ 1 \le i \le n\,. \qquad \textbf{(3.2)}$$

Έτσι, η σχέση (3.1) γίνεται

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_i + d_i = x_i \qquad \textbf{(3.3)}$$

και σε επίπεδο πινάκων

$$Tx + d = x \Leftrightarrow (I - T)x = d \Leftrightarrow Ax = d\,, \qquad \textbf{(3.4)}$$

όπου ο $T = (t_{ij})$ είναι σταθερός πίνακας και καλείται πίνακας εισροών, το διάνυσμα $x = (x_i)$ είναι το διάνυσμα εκροών, το $d = (d_i)$ είναι το διάνυσμα ζήτησης και $I \in R^{nxn}$ ο μοναδιαίος πίνακας. Είναι φανερό πλέον ότι ο πίνακας $A = (a_{ij})$ του συστήματος, στη σχέση (3.4), είναι ένας *Z*-πίνακας, αφού η ζήτηση x_{ij} του i προϊόντος από το j προϊόν είναι μη αρνητική ποσότητα, οπότε μη αρνητική ποσότητα θα είναι και το t_{ij}, έτσι θα έχουμε $a_{ij} = -t_{ij} \le 0,\ 1 \le i, j \le n,\ i \ne j$, ενώ $\alpha_{ii} = 1 - t_{ii} \ge 0,\ 1 \le i \le n.$.

Ορισμός (3.5). Ένα ανοιχτό μοντέλο Leontief λέμε ότι είναι «εφικτό», αν έχει ένα μη αρνητικό διάνυσμα παραγωγής για κάθε θετικό διάνυσμα ζήτησης.

Θεώρημα (3.6). Σε ένα ανοιχτό μοντέλο Leontief οι επόμενες δυο προτάσεις είναι ισοδύναμες.

1. **Το μοντέλο έχει «εφικτή» λύση.**
2. **Ο πίνακας A είναι ένας *M*-πίνακας, αντιστρέψιμος.**

Απόδειξη. Υποθέτοντας το **2,** είναι φανερό από το Θεώρημα **(1.17)**, ότι το σύστημα (3.4) έχει πάντα μια μη αρνητική λύση για κάθε θετικό διάνυσμα ζήτησης, αφού ο $A^{-1} > 0$. Αντιστρόφως αν ισχύει το **1,** τότε για κάθε θετικό διάνυσμα d, επομένως και για τα e_i, όπου e_i είναι το διάνυσμα που έχει στην i θέση τη μονάδα και σε όλες τις άλλες το μηδέν, θα έχει μια μη αρνητική λύση, έστω την x_i. Για το πίνακα X που σχηματίζεται με στήλες τα x_i προφανώς ισχύει $A \cdot X = I$, δηλαδή $X = A^{-1}$. Αφού $A = I - T,\ T > 0$ και

$$(I - T)(I + T + T^2 + \cdots + T^n) = I - T^{n+1}$$

είναι φανερό, από το Θεώρημα **(1.9)**, ότι $\rho(T) < 1$, αφού

$$(I - T)^{-1} = \lim_{k \to \infty}(I + T + \cdots + T^k)\,\mathbf{.}$$

Συνεπώς ο πίνακας A είναι ένας αντιστρέψιμος *M*-πίνακας.

Στο ανοιχτό μοντέλο Leontief, όταν ο πίνακας A είναι “reducible”, από τον ορισμό **(1.1)**, βλέπουμε ότι υπάρχει ένας μεταθετικός πίνακας P, που μπορεί να τον τροποποιήσει στη μορφή (1.2), οπότε το σύστημα που έχουμε να επιλύσουμε έχει την μορφή (1.7). Αυτό σημαίνει ότι αν αναδιατάξουμε τα αγαθά μας (ακολουθώντας τις οδηγίες του μεταθετικού πίνακα) ένα πλήθος από αυτά (αυτά που αντιστοιχούν στον τετραγωνικό πίνακα B, της μορφής (1.7)) δεν προσφέρουν στα υπόλοιπα αγαθά (αφού ο πάνω δεξιά πίνακας στην ίδια μορφή είναι 0). Επιπλέον η προσφορά στα αγαθά που αντιστοιχούν στον τετραγωνικό πίνακα D της έκφρασης (1.7), από εκείνα του C (επομένως και στα αγαθά του B), μπορούν να θεωρηθούν ζήτηση από τα αγαθά του πίνακα C και να ενσωματωθούν στο διάνυσμα d. Δηλαδή ένα μοντέλο Leontief με τον πίνακα A “reducible” μπορεί να αναλυθεί σε δυο μικρότερα μοντέλα Leontief τα οποία μπορούν να μελετώνται ανεξάρτητα.

Παράδειγμα. Θεωρούμε τα αλληλοεξαρτώμενα είδη **α, β, γ, δ.** και έστω ότι η συμμετοχή του ενός στην παραγωγή του άλλου είναι όπως φαίνεται στον επόμενο Πίνακα 3.

	α	**β**	**γ**	**δ**
α	0,2	0,3	0,3	0
β	0	0,2	0	0,4
γ	0,3	0	0,2	0,1
δ	0	0,4	0	0,1

Πίνακας 3

Αναδιατάσσοντας τα προηγούμενα είδη μπορούμε να έχουμε τον Πίνακα 4. Τα είδη **β** και **γ** δε συνεισφέρουν στην παραγωγή των **α** και **γ**.

	β	**δ**	**α**	**γ**
β	0,2	0,4	0	0
δ	0,4	0,1	0	0
α	0,3	0	0,2	0,3
γ	0	0,1	0,3	0,2

Πίνακας 4

Οι ποσότητες 0,3 και 0,1 που δίνουν τα είδη **α** και **γ** στα **β** και **δ,** αντίστοιχα, μπορούν να θεωρηθούν ζήτηση για τα δυο είδη (**α** και **γ)** και να έχουμε δυο διαφορετικά οικονομικά μοντέλα εκείνα με τα είδη {**α**, **γ**} και {**β**, **δ**} με την προϋπόθεση ότι συγκεκριμένες ποσότητες **α** και **γ** είναι ζήτηση για την παραγωγή των **β** και **δ**.

Πόρισμα (3.7). Σε ένα «εφικτό» μοντέλο Leontief με τον πίνακα A “irreducible”, το διάνυσμα παραγωγής είναι πάντα θετικό.

Απόδειξη. Πράγματι, αρκεί να σκεφτούμε ότι όταν ο πίνακας A του συστήματος είναι “irreducible” M-πίνακας, οπότε ο $A^{-1} \gg 0$ (Θεώρημα **(1.17)**), θα έχουμε $x = A^{-1}d \gg 0$.

Ας θεωρήσουμε τώρα δυο διανύσματα ζήτησης, τα d_1 και d_2, στο ίδιο «εφικτό» μοντέλο Leontief. Προφανώς θα ισχύει

$$Ax_1 = d_1 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; Ax_2 = d_2, \tag{3.8}$$

όπου ο A είναι ο πίνακας του συστήματος και τα x_1 και x_2 τα διανύσματα παραγωγής και επιπλέον ότι ο πίνακας A είναι “irreducible”. Είναι πλέον φανερό ότι σε μια διαφορά (μεταβολή) $\Delta d = d_2 - d_1$ στα διανύσματα ζήτησης, αντιστοιχεί μια διαφορά (μεταβολή) $\Delta x = x_2 - x_1$ των διανυσμάτων παραγωγής. Από την σχέση (3.8) έπεται ότι η επόμενη σχέση

$$A \cdot \Delta x = \Delta d, \tag{3.9}$$

είναι έγκυρη και μάλιστα αφού $(\Delta x = 0 \Rightarrow \Delta d = 0) \Leftrightarrow (\Delta d \neq 0 \Rightarrow \Delta x \neq 0)$, συμπεραίνουμε ότι οποιαδήποτε μεταβολή στο διάνυσμα ζήτησης συνεπάγεται υποχρεωτικά μεταβολή και στο διάνυσμα παραγωγής. Επιπλέον αφού το μοντέλο είναι «εφικτό», ο πίνακας A θα είναι αντιστρέψιμος επομένως θα ισχύει

$$\Delta x = A^{-1} \Delta d, \tag{3.10}$$

οπότε $(\Delta d = 0 \Rightarrow \Delta x = 0) \Leftrightarrow (\Delta x \neq 0 \Rightarrow \Delta d \neq 0)$. Έτσι αποδείχτηκε ότι οποιαδήποτε μεταβολή στο διάνυσμα παραγωγής επιφέρει υποχρεωτικά μεταβολή και στο διάνυσμα ζήτησης. Επιπλέον αφού ο A είναι “irreducible” ο $A^{-1} \gg 0$, οπότε αν $\Delta d > 0 (< 0)$, τότε $\Delta x \gg 0 (\ll 0)$. Δηλαδή ακόμη και μια από τις συντεταγμένες του διανύσματος ζήτησης αν μεταβληθεί θετικά ή αρνητικά ολόκληρο το διάνυσμα παραγωγής θα μεταβληθεί προς την ίδια κατεύθυνση. Με μαθηματικούς όρους έχουμε την επόμενη σχέση

$$\Delta d > 0 (< 0) \Rightarrow \Delta x \gg 0 (\ll 0). \tag{3.11}$$

Παράδειγμα. Να βρεθεί το διάνυσμα μεταβολή της παραγωγής στο μοντέλο Leontief, όταν $\Delta d = (2, 0, 0)^T$ και

$$T = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Αφού $\Delta x = (I - T)^{-1} \Delta d$, προκύπτει ότι

$$\Delta x = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 20 & 12 & 16 \\ 12 & 12 & 12 \\ 16 & 12 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 40 \\ 24 \\ 32 \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Είναι φανερό ότι η μεγάλη «μεταβολή» συντελείται στην παραγωγή του προϊόντος που υφίσταται τη «μεταβολή» στη ζήτηση, όμως όλα τα προϊόντα υφίστανται αύξηση για να συνεισφέρουν. Ίσως θα πρέπει να τονιστεί ότι είναι δυνατόν να έχουμε μηδενική μεταβολή σε ένα προϊόν ($\Delta x_j = 0$) παρόλο που η ζήτηση αυτού του προϊόντος είναι θετική ($\Delta d_j > 0$), όπως ακριβώς συμβαίνει στην περίπτωση όπου $\Delta d = (-1,1,0)^T$, όπως φαίνεται στην επόμενη σχέση

$$\Delta x = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 20 & 12 & 16 \\ 12 & 12 & 12 \\ 16 & 12 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(3.14)}$$

όπου $\Delta x_2 = 0$ παρόλο που $\Delta d_2 > 0$. Τέλος, με $\Delta x = \frac{1}{3}(4,12,8)^T$, T εκείνον της (3.12) και $\Delta d = (-1,2,0)^T$ παρατηρούμε ότι το αντίστροφο της σχέσης (3.11) δεν ισχύει, αφού $(I-T)\Delta x = \Delta d$. Δηλαδή, παρόλο που το $\Delta x \gg 0$ (αυξάνουν όλες του οι συντεταγμένες), δε σημαίνει ότι και του Δd θα αυξάνουν οι συντεταγμένες του. Το τι συμβαίνει και πως επηρεάζεται το διάνυσμα παραγωγής όταν το διάνυσμα ζήτησης έχει θετικές αλλά και αρνητικές αλλαγές θα μπορούσε κάποιος να το δει το σχετικό άρθρο του Sierkma[5].

Abstract

Wassily Leontief, who was rewarded the Nobel Prize 1973 in Economics, had proposed the input-output model in his work "*Quantitative input and output relations in the economic system of the United States*" (1936). The simplicity and clarity of his thought are the elements that make this work remarkable. Leontief described in a wonderful way the correlation between commodities. He provided an answer to the following question: "What the production level of n interdependent industries (or sectors) in an economy could be, so that their total (external and internal) demand would be satisfied?"

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

---

[1] **R. S. Varga (1962)**, *Matrix Iterative Analysis,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (Επίσης: 2nd Edition, Revised and Expanded, Springer, Berlin, 2000.)

[2] **A. Berman and R. S. Plemmons (1994)**, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. Classics in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia.
[3] **O. Perron (1907)**, *Zur Theorie der Über Matrizen*, Math. Ann. 64, 248-263.
[4] **G. Frobenius (1912)**, *Uber Matrizen aus nicht negativen Elementen,* S.-P. Preuss. Akad.Wiss., Berlin, 456-477.
[5] **G. Sierkma (1979)**, *Nonnegative Matrices: The open Leontief Model*, Linear Algebra and its Applications, 26, 175-201.